



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU



Balog Dániel

Analiza stabilnosti talasa na vodi

- Master rad-

Mentor:

dr Marko Nedeljkov

Novi Sad, 2017.

Sadržaj

Predgovor	3
1 Osnovne jednačine	5
Osnovne jednačine	5
1.1 Osnovne jednačine mehanike fluida	5
1.1.1 Zakon održanja mase	5
1.1.2 Ojlerova jednačina kretanja	6
1.1.3 Viskozni fluidi	8
1.1.4 Vrtložnost, strujnice i nevtložno strujanje	10
1.2 Granični uslovi vodenih talasa	13
1.2.1 Kinematički uslov	13
1.2.2 Dinamički uslov	14
1.2.3 Uslov na donjoj granici	15
1.3 Bezdimezionisanje i skaliranje	16
1.3.1 Bezdimezionisanje	16
1.3.2 Skaliranje promenljivih	20
1.3.3 Aproksimacija jednačine	21
2 Metod normalnih modova	23
2.1 Osnovne postupci analize prostiranja talasa	23
2.1.1 Prostiranje linearnog talasa	23
2.1.2 Prostiranje nelinearnog talasa	26
2.2 Analiza stabilnosti rešenja Navije-Stoksovih jednačina	27
2.3 Metod normalnih modova u analizi stabilnosti	30
3 Analiza stabilnosti	35
Analiza stabilnosti	35
3.1 Osnovni protok	35
3.2 Fizički opis nestabilnosti	36

3.3	Jednačine poremećaja	36
3.4	Linearizovani problem	40
3.5	Gravitacioni talasi	43
3.5.1	Površinski gravitacioni talasi	43
3.5.2	Unutrašnji gravitacioni talasi	44
3.6	Uticaj površinskog napona na Kelvin-Helmholcovu nestabilnost	45
	Biografija	51
	Literatura	52
	Ključna dokumentacijska informacija	53

Predgovor

Tema ovog master rada je, kao što i naslov kaže, analiza stabilnosti talasa na vodi. Cilj rada je da se, polazeći od jednačina talasa na vodi, uoče karakteristična stacionarna rešenja u slučaju dva fluida razdvojena graničnom površi i potom, primenom linearne teorije, ispita njihova stabilnost.

Rad se sastoji od tri dela. Prvi deo rada će sadržati matematičku formulaciju osnovnih zakona mehanike fluida. To će obuhvatiti prvenstveno osnovne jednačine za neviskozne fluide (zakon održanja mase i Ojlerovu jednačinu kretanja), kao i prateće granične uslove. Matematički modeli, koji se sastoje od sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina, će biti prikazani i u bezdimenzijskom, odnosno skaliranom obliku, što će omogućiti analizu reda veličine fizičkih parametara prisutnih u problemima.

U drugom delu rada korišćićemo jednačine izvedene u prvom delu. U nastavku će biti prezentovan opšti okvir za analizu stabilnosti stacionarnih rešenja. Konkretno, biće prikazan način formiranja jednačina poremećaja i njihove linearizacije. Takođe će biti definisani osnovni pojmovi u analizi stabilnosti. To će poslužiti kao osnov za primenu stabilnosti stacionarnih rešenja.

U trećem delu će se prethodno razvijene metode primeniti u analizi konkretnih problema. Preciznije rečeno, analiziraće se karakteristični problemi u kojima se posmatra strujanje dva fluida, različitih fizičkih svojstava, koja su razdvojena graničnom površi. To će obuhvatiti analizu Kelvin-Hejmholtcove nestabilnosti i Rejli-Tejlorove nestabilnosti. Najzad, u radu će, u ovom kontekstu, biti analiziran i uticaj fizičkih parametara na stabilnost stacionarnih rešenja.

Na kraju želim da se zahvalim svim mojim profesorima, od kojih sam mnogo naučio u toku školovanja i studiranja.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr Marku Nedeljkovu, kao i članovima komisije, doc. dr Milani Čolić i prof. dr Srboljubu Simiću, na savetima i pomoći pri izradi ovog master rada.

Najveću zahvalnost dugujem svojoj roditeljima: tati Čabi, mami Teodori, i mojoj Kristini na podršci koju mi neprestano pružaju.

Balog Dániel

Glava 1

Osnovne jednačine

Na početku ćemo dati teorijske osnove za proučavanje talasa na vodi. To će biti odgovarajuće jednačine i granični uslovi. Osnovne jednačine su Ojlerova jednačina i zakon održanja mase. Dopunska razmatranja mehanike fluida imaju svoje izvore u udžbenicima [2] i [5], ali ovaj rad se najvećim delom oslanja na [1].

1.1 Osnovne jednačine mehanike fluida

1.1.1 Zakon održanja mase

Posmatrajmo zapreminu V ograničenu površi S koja je ispunjena tečnošću. Gustina tečnosti je ρ , a brzina promena mase u V je

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho dv \right)$$

gde $\int_V dv$ reprezentuje trostruki integral na V . Neka je \mathbf{n} jedinični vektor spoljašnje normale na S , pa je komponenta brzine tečnosti u pravcu \mathbf{n} na S $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$. Tada je protok mase kroz rub S koja ističe iz oblasti V jednak

$$\int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds,$$

a ovo je dvostruki integral na S .

Promena mase u jedinici vremena u V jednaka je protoku mase koja utiče u V preko S

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho \, dv \right) = - \int_S \rho \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Korišćenjem Gausove teoreme o divergenciji dobićemo

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dv = 0,$$

tj.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = 0.$$

Ako uvedemo materijalni izvod

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla, \quad (1.1.1)$$

jednačina (1.1.1) će se svesti na

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Najzad, ako je tečnost nestišljiva, $\rho = \text{const.}$, onda važi

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \text{i} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.1.2)$$

1.1.2 Ojlerova jednačina kretanja

U mehanici fluida na kretanje utiču dve vrste sila: zapreminske i površinske. Zapreminske sile se najčešće označavaju sa $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ i dejstvuju u svakoj tački $\mathbf{x} \in V$. Za našu analizu će od zapreminskih sila biti značajna samo gravitaciona sila, $\mathbf{F} = (0, 0, -g)$. Površinske sile dejstvuju na rubu S oblasti V . Pretpostavićemo da je fluid neviskozan i da površinske sile imaju pravac normale, $\mathbf{P} = -P \mathbf{n}$.

Ukupna sila koja deluje na fluid u oblasti V je

$$\int_V \rho \mathbf{F} \, dv - \int_S P \mathbf{n} \, ds,$$

što se korišćenjem Gausove teoreme o divergenciji svodi na

$$\int_V (\rho \mathbf{F} - \nabla P) dv.$$

Promena količine kretanja fluida u oblasti V je

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho \mathbf{u} dv \right)$$

a protok količine kretanja kroz rub S oblasti V je

$$- \int_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds.$$

Njutnov drugi zakon za fluide možemo izražiti kao

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho \mathbf{u} dv \right) = \int_V (\rho \mathbf{F} - \nabla P) dv - \int_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds,$$

odakle se primenom teoreme o divergenciji dobija

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho \mathbf{u} \right) dv = \int_V (\rho \mathbf{F} - \nabla P) dv. \quad (1.1.3)$$

Levu stranu prethodne jednačine, korišćenjem (1.1.2) možemo transformisati kao

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho \right) dv = \\ & \int_V \left(\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \mathbf{u} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho \right) + \rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) dv = \\ & \int_V \left(\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \mathbf{u} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) dv = \int_V \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dv. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Ovo je odgovarajuća formula za uobičajeni izraz „masa \times ubrzanje” za svaki fluid u V . Iz jednačina (1.1.3) i (1.1.4) sledi

$$\int_V \left(\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho \mathbf{F} + \nabla P \right) dv = 0.$$

Da bi ova relacija važila za proizvoljno V , mora da bude

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho \mathbf{F} + \nabla P &= 0 \\ \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Ovo je *Ojlerova jednačina* koja se dobija kao posledica primene Njutonovog drugog zakona za neviskozne fluide.

U pravougaonom Dekartovom sistemu $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$, $\mathbf{u} \equiv (u, v, w)$ i $\mathbf{F} \equiv (0, 0, -g)$ i sa konstantnom gustinom ρ jednačine (1.1.5) i (1.1.2) postaju

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g, \quad (1.1.6)$$

gde je

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.1.7)$$

i

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.1.8)$$

Jednačine (1.1.6)-(1.1.8) nam čine bazu za proučavanje vodenih talasa.

1.1.3 Viskozni fluidi

Pod viskoznim fluidima se podrazumevaju fluidi kod kojih se javlja unutrašnje trenje između slojeva. Ova pojava nema uticaja na zakon održanja mase – on ostaje nepromenjen. Međutim, sila koja deluje na fluidnu česticu mora biti opisana pomoću *tenzora napona* σ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. Komponenta tenzora napona σ_{ij} predstavlja silu koja deluje u i -pravcu po jedinici površine čija je spoljašnja normala u j -pravcu. Ako je $i = j$, tada σ_{ij} zovemo normalni napon, a ako je $i \neq j$ zove se tangencijalni napon. Tenzor napona viskoznog fluida je simetričan, tj. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Simetrični tenzori imaju osobinu da ih

u određenom kordinatnom sistemu (u odnosu na određenu bazu) možemo svesti na dijagonalni oblik. Zbog toga se tenzor napona viskozno fluida piše u obliku

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + d_{ij}, \quad (1.1.9)$$

gde je P pritisak fluida, δ_{ij} je Kronekerov delta simbol, a d_{ij} je devijatorski deo tenzora napona koji je jednak 0 kada fluid miruje. Ovaj deo je bio zane-maren prilikom izvođenja Ojlerove jednačine (1.1.5). Devijatorski deo tenzora napona je

$$d_{ij} = 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 e_{kk} \right), \quad (1.1.10)$$

gde je

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

je tenzor brzine deformacije, μ je dinamička viskoznost, a

$$\sum_{k=1}^3 e_{kk} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

se zove zapreminska dilatacija – ona je jednaka nula kod nestišljivog fluida. Važno svojstvo devijatorskog dela tenzora napona jeste da je njegov trag jednak nuli, $\sum_{i=1}^3 d_{ii} = 0$.

Primenom drugog Njutnovog zakona na fluide dolazimo do jednačine

$$\int_V \left(\rho \frac{Du_i}{Dt} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho F_i \right) dv = 0,$$

to jest

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i.$$

Za nestišljive fluide sa konstantnom viskoznošću, uvrštavanjem jednačine (1.1.9) i (1.1.10), prethodna jednačina postaje

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + F_i + \frac{\mu}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

gde je

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

Prepisane u vektorskom obliku, ove jednačine glase

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \mathbf{F} + \nu\delta\mathbf{u}, \quad \nabla\mathbf{u} = 0,$$

gde je $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ je kinematička viskoznost. Ove jednačina su u literaturi poznate kao *Navije-Stoksove jednačine* za viskozne fluide.

1.1.4 Vrtložnost, strujnice i nevtložno strujanje

Posmatrajmo familiju krivih takvu da im je vektor tangente jednak vektoru brzine \mathbf{u} . Ove krive se nazivaju strujnice. Ako su one opisane sa $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s; t)$, $\mathbf{x} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, gde je $s \in \mathbb{R}$ parametar koji mapira krivu, a t je vreme, onda se jednačine strujnice dobijaju kao rešenje sledećeg sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{za fiksirano } t).$$

U pravougaonom Dekartovom sistemu ova jednačina postaje

$$\frac{dx}{ds} = u, \quad \frac{dy}{ds} = v, \quad \frac{dz}{ds} = w,$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

Posmatrajmo Ojlerovu jednačinu (1.1.5)

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \mathbf{F}, \quad (1.1.11)$$

gde je \mathbf{F} konzervativno polje sile, $\mathbf{F} = -\nabla\Omega$, a $\Omega(\mathbf{x}, t)$ je njegov potencijal. Jednačina (1.1.11) tako postaje

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla\left(\frac{P}{\rho} + \Omega\right).$$

Transformišemo ovu jednačinu koristeći identitet

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

i uvedimo *vrtložnost* $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} := \nabla \times \mathbf{u}.$$

Odatle sledi

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega \right) = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1.1.12)$$

Kada je $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{0}$, kažemo da je strujanje bezvrtložno. U nastavku ćemo razmatrati dva slučaja.

Prvi slučaj je stacionarni protok, gde \mathbf{u} , P i Ω ne zavise od vremena t . Tada jednačina (1.1.12) postaje

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega \right) = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1.1.13)$$

Prema tome $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ je uvek normalno na površ

$$\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega = \text{const}. \quad (1.1.14)$$

za ma koju vrednost konstante. Međutim, $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ je normalno i na vektor \mathbf{u} i na $\boldsymbol{\omega}$, tj. površ (1.1.14) mora da sadrži prave koje su paralelne sa \mathbf{u} i sa $\boldsymbol{\omega}$. Jednačina (1.1.14) je *Bernulijeva jednačina*, koja se primenjuje na strujnice. Ona opisuje zakon održanja energije za stacionarni protok sa vrtlozima.

Drugi slučaj je nestacionaran protok. Pretpostavimo još da je strujanje bezvrtložno $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$. To znači da postoji potencijalna funkcija $\phi(\mathbf{x}, t)$ takva da je $\mathbf{u} = \nabla \phi$. Za nevrtložno i nestišljivo strujanje imamo da je

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad \text{i} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

odakle sledi da ϕ zadovoljava Laplasovu jednačinu

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \text{tj. uobičajeno} \quad \Delta \phi = 0. \quad (1.1.15)$$

Ako koristimo prethodnu jednačinu u (1.1.13), i ako važi $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, sledi sledeća jednačina

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega \right) = 0,$$

odnosno

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega = f(t), \quad (1.1.16)$$

gde je $f(t)$ proizvoljna funkcija. Ovo je Bernulijeva jednačina za nestacionarni protok. Ako pretpostavimo da je protok stacionaran, Bernulijeva jednačina postaje

$$\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega = \text{const.} \quad (1.1.17)$$

Primetimo da se u jednačini (1.1.17) koristi ista konstanta za ceo fluid, odnosno sve strujnice, a u jednačini (1.1.14) različite konstante za različite strujnice. Ova važna razlika daje kontrast između nevtložnog i vrtložnog stacionarnog strujanja.

Laplasova jednačina u Dekartovim pravougaonim sistemu je

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0.$$

Odgovarajuća brzina ima oblik

$$\mathbf{u} \equiv \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right).$$

1.2 Granični uslovi vodenih talasa

1.2.1 Kinematički uslov

Slobodna površ, čije je određivanje primarni zadatak u problemima vodenih talasa, biće određena funkcijom

$$z = h(\mathbf{x}_\perp, t),$$

gde \mathbf{x}_\perp označava vektor koji je normalan na z -pravac. U Dekartovim koordinatama on se opisuje sa $\mathbf{x}_\perp \equiv (x, y)$. Površ $F(\mathbf{x}, t) = \text{const.}$ koja se kreće sa fluidom i uvek sadrži iste čestice mora da zadovoljava jednačinu

$$\frac{DF}{Dt} = 0.$$

Ovakve površi se zovu *materijalne površi*. Slobodna površ predstavlja materijalnu površ i možemo je zapisati u formi

$$z - h(\mathbf{x}_\perp, t) = 0,$$

zato treba da zadovolji jednačinu

$$\frac{D(z - h(\mathbf{x}_\perp, t))}{Dt} = 0.$$

Kako je

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp + w \frac{\partial}{\partial z},$$

to nas dovodi do

$$\frac{\partial(z - h)}{\partial t} + \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp(z - h) + w \frac{\partial(z - h)}{\partial z},$$

gde ∇_\perp je komponenta operatora nabra normalna na z -pravac,

$$-h_t - \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp h + w,$$

tj.

$$w - (h_t + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) h) = 0.$$

Kinematički uslov zato postaje

$$w = h_t + (\mathbf{u}_\perp) \cdot \nabla_\perp h \quad \text{na} \quad z = h(\mathbf{x}_\perp, t),$$

a evaluacija $z = h$ je potrebna određivanje polja brzine na slobodnoj površi.

1.2.2 Dinamički uslov

U odsustvu viskoznih sila najjednostavniji dinamički uslov zahteva da pritisak P bude zadat na slobodnoj površi $z = h(\mathbf{x}_\perp, t)$. U najvećem broju problema u teoriji vodenih talasa $P = P_a = \text{const.}$, pritisak je jednak atmosferskom pritisku.

Jedan specijalni oblik dinamičkog graničnog uslova važi za nestišljivo, nevtložno, nestacionarno strujanje. Iz jednačine pritiska (1.1.16), sa $\Omega = gz$ dobijamo

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + gz = f(t).$$

Posmatrajmo problem gde je $P = P_a$ na $z = h(\mathbf{x}_\perp, t)$, pa zbog neprekidnosti pritiska važi

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P_a}{\rho} + gh = f(t).$$

Dalje, pretpostavimo da je u udaljenim tačkama $|\mathbf{x}_\perp| \rightarrow \infty$ slobodna površ ravna i stacionarna, $P = P_a$, $h = h_0 = \text{const.}$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ i $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$. Tada važi

$$f(t) = \frac{P_a}{\rho} + gh_0,$$

odnosno

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + g(h - h_0) = 0. \quad (1.2.1)$$

Jednačina (1.2.1) predstavlja jedan od najjednostavnijih dopunskih uslova za površinski pritisak. Za vrtložno strujanje ne možemo koristiti ovu jednačinu već moramo rešiti Ojlerovu jednačinu sa pritiskom P zadatim na $z = h$.

Dinamički uslov na slobodnoj površi neviskoznog fluida može biti uopšten ako se uzme u obzir površinski napon. Klasična relacija koja opisuje površinski napon je data sa

$$\Delta P = \frac{\Gamma}{R}, \quad (1.2.2)$$

gde je $\frac{1}{R}$ glavna krivina

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2},$$

a κ_1, κ_2 su glavni poluprečnici krivine. Parametar Γ je koeficijent površnog napona i $\Delta P > 0$ ako je površ konveksna. Osnovna jednačina (1.2.2) je poznata pod nazivom Laplasova formula. Parametar Γ se menja sa temperaturom, ali ćemo ga ovde, sa dovoljnom tačnošću, tretirati kao konstantu.

Rezultat korišćenja ove jednačine je da kod dinamičnog uslova zameni $P = P_a = \text{const.}$ na površi fluida sa

$$P = P_a - \frac{\Gamma}{R} \quad \text{na} \quad z = h(\mathbf{x}_\perp, t).$$

Odavde možemo zaključiti da je pritisak na slobodnoj površi tečnosti veći od atmosferskog kada je površ konkavna ($R < 0$).

Složenost ove formulacije leži u određivanju krivine $\frac{1}{R}$. U pravougaonom Dekartovom sistemu sa $h = h(x, y, t)$,

$$\frac{1}{R} = \frac{(1 + h_y^2) h_{xx} + (1 + h_x^2) h_{yy} - 2h_x h_y h_{xy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1.2.3 Uslov na donjoj granici

Za neviskozne fluide donja granica se tretira analogno slobodnoj površi – ona je definisana kao da se površ kreće sa fluidom. Neka je donja granica fluida opisana jednačinom

$$z = b(\mathbf{x}_\perp, t).$$

Da bi ona predstavljala materijalnu površ mora biti zadovoljeno

$$\frac{D}{Dt} (z - b(\mathbf{x}_\perp, t)) = 0.$$

Na taj način dobijamo uslov na donjoj granici

$$w = b_t + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) b.$$

U većini problema u našem radu donja granica će biti stacionarna, a tada je

$$w = (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) b.$$

1.3 Bezdimezionisanje i skaliranje

Glavne jednačine i granične uslovi koje smo do sada napisali, definišu jednu klasu problema vodenih talasa. U njima figuriše određeni broj fizičkih parametara i njihov uticaj u konkretnim problemima može biti različitog intenziteta. Da bi se broj parametara sveo na minimum i da bi se mogla dati ocena njihovog uticaja, uvode se bezdimezionalne (skalirane) promenljive. Pomoću njih se jednačine svode na bezdimezionalni oblik u kom se mogu na racionalan način analizirati uticaji fizičkih parametara.

1.3.1 Bezdimezionisanje

Prvo uvedimo odgovarajuće skale za dužine: dubinu vode h_0 i talasnu dužinu λ talasa na slobodnoj površi. U većini problema koje ćemo razmotriti treba da se analizira prostiranje talasa i njihova brzina, koja je približno jednaka $\sqrt{gh_0}$, što ćemo usvojiti kao skalu za brzine normalne na z -pravac. U pravcu z -ose skaliranje brzine se vrši na drugi način, koji obezbeđuje da fizičke relacije imaju smisla. Tako će skala za brzinu u z -pravcu biti $h_0\sqrt{gh_0}/\lambda$. Odatle sledi i odgovarajuća skala za vreme, $\lambda/\sqrt{gh_0}$.

Površinski talas zahteva uvođenje novog parametra: amplitude talasa a . Nju možemo jednostavno uvesti ako opišemo slobodnu površ kao $h = h_0 + a\eta(\mathbf{x}_\perp, t)$, gde je a amplituda, a funkcija η je bezdimezionalna. Sada možemo definisati skup bezdimezionalnih promenljivih u Dekartovom kordinatnom sistemu

$$x \rightarrow \lambda\hat{x}, \quad y \rightarrow \lambda\hat{y}, \quad z \rightarrow h_0\hat{z}, \quad t \rightarrow \frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}}\hat{t},$$

$$\text{tj. } \hat{x} = \frac{x}{\lambda}, \quad \hat{y} = \frac{y}{\lambda}, \quad \hat{z} = \frac{z}{h_0}, \quad \hat{t} = \frac{t\sqrt{gh_0}}{\lambda},$$

$$u \rightarrow \sqrt{gh_0}\hat{u}, \quad v \rightarrow \sqrt{gh_0}\hat{v}, \quad w \rightarrow \frac{h_0\sqrt{gh_0}}{\lambda}\hat{w},$$

$$\text{tj. } \hat{u} = \frac{u}{\sqrt{gh_0}}, \quad \hat{v} = \frac{v}{\sqrt{gh_0}}, \quad \hat{w} = \frac{\lambda w}{h_0\sqrt{gh_0}}$$

uz

$$h = h_0 + a\eta \quad \text{i} \quad b \rightarrow h_0\hat{b}.$$

Tada je

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} = \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \hat{t}}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \hat{x}},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \hat{y}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} = \frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial \hat{z}},$$

Imajući ovo u vidu, pritisak se može zapisati kao

$$P = P_a + \rho g(h_0 - z) + \rho g h_0 p,$$

$$\hat{P} = \frac{P}{\rho g h_0} = \frac{P_a}{\rho g h_0} + \left(1 - \frac{z}{h_0}\right) + p,$$

dakle $\hat{P} = \hat{P}_a + 1 - \hat{z} + p,$

gde je $\rho g(h_0 - z)$ hidrostatički pritisak, skala pritiska će biti $\rho g h_0$, a p je promenljiva koja meri devijaciju (odstupanje) od hidrostatičkog pritiska i $\hat{P}_a = \frac{P_a}{\rho g h_0}$.

Ojlerova jednačina i zakon održanja mase (1.1.6)-(1.1.8) sada postaju:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \rightarrow \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda} \frac{D(\sqrt{gh_0} \hat{u})}{D\hat{t}} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial (\rho g h_0 \hat{P})}{\partial \hat{x}},$$

$$\frac{gh_0}{\lambda} \frac{D\hat{u}}{D\hat{t}} = -\frac{1}{\rho \lambda} \rho g h_0 \frac{\partial p}{\partial \hat{x}},$$

$$\frac{D\hat{u}}{D\hat{t}} = -\frac{\partial p}{\partial \hat{x}},$$

slično $\frac{D\hat{v}}{D\hat{t}} = -\frac{\partial p}{\partial \hat{x}};$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g \rightarrow \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda} \frac{D\left(\frac{h_0 \sqrt{gh_0}}{\lambda} \hat{w}\right)}{D\hat{t}} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{h_0} \frac{\partial (\rho g h_0 \hat{P})}{\partial \hat{z}} - g,$$

$$\frac{gh_0^2}{\lambda^2} \frac{D\hat{w}}{D\hat{t}} = -\frac{1}{\rho h_0} \rho g h_0 \left(-1 + \frac{\partial p}{\partial \hat{z}}\right) - g = -g \frac{\partial p}{\partial \hat{z}},$$

$$\left(\frac{h_0}{\lambda}\right)^2 \frac{D\hat{w}}{D\hat{t}} = -\frac{\partial p}{\partial \hat{z}}.$$

Dakle

$$\frac{D\hat{u}}{D\hat{t}} = -\frac{\partial p}{\partial \hat{x}}, \quad \frac{D\hat{v}}{D\hat{t}} = -\frac{\partial p}{\partial \hat{y}}, \quad \delta^2 \frac{D\hat{w}}{D\hat{t}} = -\frac{\partial p}{\partial \hat{z}}, \quad (1.3.1)$$

gde je

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow$$

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} &= \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \sqrt{gh_0} \hat{u} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \sqrt{gh_0} \hat{v} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} + \frac{h_0}{\lambda} \sqrt{gh_0} \hat{w} \frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial \hat{z}}, \\ \frac{D}{Dt} &= \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} + \hat{w} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right), \\ \text{tj. } \frac{D}{D\hat{t}} &\equiv \frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} + \hat{w} \frac{\partial}{\partial \hat{z}},\end{aligned}\quad (1.3.2)$$

i

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = 0. \quad (1.3.3)$$

Dobijene jednačine su date u bezdimenzionalnom obliku, a $\delta = h_0/\lambda$ je bezdimenzionalni parametar talasne dužine (parametar plitkosti). Gornja i donja površ fluida su predstavljene jednačinom

$$z = h(\mathbf{x}_\perp, t) = h_0 + a\eta(\mathbf{x}_\perp, t) \quad \rightarrow \quad \hat{z} = 1 + \frac{a}{h_0}\eta,$$

$$\text{tj. } \hat{z} = 1 + \varepsilon\eta, \quad \text{na } \hat{z} = \frac{1}{h_0}b = \hat{b}$$

gde je $\varepsilon = a/h_0$ bezdimenzionalni parametar amplitude.

Sada možemo da pređemo na granične uslove. Kinematički uslov na slobodnoj površi

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) h$$

$$\text{gde je } \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp = \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda} \hat{u} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda} \hat{v} \frac{\partial}{\partial \hat{y}},$$

$$\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp = \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda} (\hat{\mathbf{u}}_\perp \cdot \hat{\nabla}_\perp)$$

$$\text{i } h = h_0 \hat{h} = h_0 (1 + \varepsilon\eta), \quad \text{tj. } \hat{h} = 1 + \varepsilon\eta,$$

postaje

$$w = \frac{h_0 \sqrt{gh_0}}{\lambda} \hat{w} = h_0 \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{t}} + \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda} (\hat{\mathbf{u}}_\perp \cdot \hat{\nabla}_\perp) h_0 \hat{h},$$

$$\hat{w} = \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{u}}_\perp \cdot \hat{\nabla}_\perp) (1 + \varepsilon\eta),$$

$$\text{tj. } \hat{w} = \varepsilon \left(\frac{\partial \eta}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{u}}_\perp \cdot \hat{\nabla}_\perp) \eta \right) \quad \text{na } \hat{z} = 1 + \varepsilon\eta.$$

Dinamički uslov će biti

$$\hat{P} = \hat{P}_a - \frac{\Gamma}{R},$$

gde $\frac{1}{R}$ treba da izvedemo. Kao što znamo

$$\frac{1}{R} = \frac{(1 + h_y^2) h_{xx} + (1 + h_x^2) h_{yy} - 2h_x h_y h_{xy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{a } h_x = \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\lambda} h_0 \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} = \delta \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}} = \delta \varepsilon \eta_{\hat{x}}, \quad \text{slično } h_y = \delta \varepsilon \eta_{\hat{y}},$$

$$h_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\delta \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}} \right) = \frac{\delta \varepsilon}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \hat{x}^2} \right) = \frac{\delta \varepsilon}{\lambda} \eta_{\hat{x}\hat{x}},$$

$$\text{slično } h_{yy} = \frac{\delta \varepsilon}{\lambda} \eta_{\hat{y}\hat{y}}, \quad \text{i } h_{xy} = \frac{\delta \varepsilon}{\lambda} \eta_{\hat{x}\hat{y}},$$

dakle

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\lambda} \frac{(1 + \varepsilon^2 \delta^2 \eta_{\hat{y}}^2) \delta \varepsilon \eta_{\hat{x}\hat{x}} + (1 + \varepsilon^2 \delta^2 \eta_{\hat{x}}^2) \delta \varepsilon \eta_{\hat{y}\hat{y}} - 2\varepsilon^3 \delta^3 \eta_{\hat{x}} \eta_{\hat{y}} \eta_{\hat{x}\hat{y}}}{(1 + \varepsilon^2 \delta^2 \eta_{\hat{x}}^2 + \varepsilon^2 \delta^2 \eta_{\hat{y}}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{tj. } \frac{1}{R} = \frac{\delta \varepsilon}{\lambda} \frac{1}{\hat{R}}.$$

Istovremeno je i

$$\hat{P} = \hat{P}_a + 1 - \hat{z} + p, \quad \text{gde } \hat{z} = 1 + \varepsilon \eta,$$

to nas dovodi do

$$\hat{P}_a - \frac{\delta \varepsilon \Gamma}{\lambda \hat{R}} = \hat{P}_a + \rho g h_0 (-\varepsilon \eta + p),$$

$$p - \varepsilon \eta = -\varepsilon \frac{\delta \Gamma}{\rho g h_0 \lambda \hat{R}},$$

s obzirom da je

$$\frac{\delta}{h_0} = \frac{h_0}{\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

$$p - \varepsilon\eta = -\varepsilon \left(\frac{\Gamma}{\rho g \lambda^2} \right) \frac{1}{\hat{R}}$$

na $\hat{z} = 1 + \varepsilon\eta$, gde je $\Gamma/\rho g \lambda^2 = \delta^2 W$ i $W = \Gamma/\rho g h_0^2$ Veberov broj koji opisuje doprinos površinskog napona. Konačno, uslov na donjoj granici postaje

$$\hat{w} = b_t + \left(\hat{\mathbf{u}}_{\perp} \cdot \hat{\nabla}_{\perp} \right) b. \quad (1.3.4)$$

1.3.2 Skaliranje promenljivih

Analizom graničnog uslova na slobodnoj površi možemo uočiti da su w i p proporcionalni ε na $z = 1 + \varepsilon\eta$. Ovo je očekivano zato što $w \rightarrow 0$ i $p \rightarrow 0$ kada $\varepsilon \rightarrow 0$. Prema tome, možemo definisati skup skaliranih promenljivih koje su saglasne sa osnovnim jednačinama i graničnim uslovima

$$p \rightarrow \varepsilon p, \quad w \rightarrow \varepsilon w, \quad (u, v) \rightarrow \varepsilon(u, v).$$

Jednačine (1.3.1)-(1.3.3) postaju

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \delta^2 \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad (1.3.5)$$

gde je

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (1.3.6)$$

i

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.3.7)$$

Granični uslovi na slobodnoj površi su sledeći

$$w = \eta_t + \varepsilon (\mathbf{u}_{\perp} \cdot \nabla) \eta$$

i

$$p = \eta - \delta^2 W \left(\frac{\left(1 + \varepsilon^2 \delta^2 \eta_y^2 \right) \eta_{xx} + \left(1 + \varepsilon^2 \delta^2 \eta_x^2 \right) \eta_{yy} - 2\varepsilon^2 \delta^2 \eta_x \eta_y \eta_{xy}}{\left(1 + \varepsilon^2 \delta^2 \eta_x^2 + \varepsilon^2 \delta^2 \eta_y^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (1.3.8)$$

dok uslov na donjoj granici (1.3.4) postaje

$$w = \varepsilon^{-1} b_t + (\mathbf{u}_{\perp} \cdot \nabla) b. \quad (1.3.9)$$

1.3.3 Aproksimacija jednačine

Bezdimezionisanje i sklairanje jednačina je veoma korisno zbog određivanja reda veličine pojedinih članova u matematičkom modelu. To omogućuje, pod određenim uslovima, aproksimacije osnovnih jednačina i graničnih uslova. Dve najčešće korišćene aproksimacije su

- (a) $\varepsilon \rightarrow 0$: linearizovana problema,
- (b) $\delta \rightarrow 0$: dugotalasni problem.

Slučaj (a) zahteva da amplituda površinskog talasa bude mala. Tako jednačine (1.3.5), (1.3.8) i (1.3.9) postaju

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \delta^2 \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

sa

$$w = \eta_t \quad \text{i} \quad p = \eta - \delta^2 W (\eta_{xx} + \eta_{yy}) \quad \text{na} \quad z = 1$$

i

$$w = (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) b.$$

Slučaj (b) opisuje talase velike talasne dužine, za koje važi da je $\delta = \frac{h_0}{\lambda}$ malo. Aproksimacija $\delta \rightarrow 0$ nas tada dovodi do sledećeg sistema jednačina

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

gde

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

sa

$$w = \eta_t + \varepsilon (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) \eta \quad \text{i} \quad p = \eta \quad \text{na} \quad z = 1 + \varepsilon \eta$$

i

$$w = (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) b.$$

Glava 2

Metod normalnih modova

U ovom poglavlju ćemo se upoznati sa osnovnim metodima analize stabilnosti, koji će zatim biti primenjeni u konkretnim problemima. Ispitivanje stabilnosti će biti ograničeno na linearnu analizu, odnosno primenu metoda normalnih modova. Radi kompletnosti analize i radi motivacije za primenu metoda normalnih modova, najpre ćemo izložiti neke osnovne postupke analize prostiranja linearnih i nelinearnih talasa (videti [1] za više detalja). Naredna glava se oslanja na [3] i [4].

2.1 Osnovne postupci analize prostiranja talasa

2.1.1 Prostiranje linearnog talasa

U teoriji prostiranja talasa najjednostavniji model koji se koristi je jednodimenzionalna talasna jednačina

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (2.1.1)$$

gde u reprezentuje amplitudu talasa. Uvedimo karakteristične promenljive $\xi = x - ct$ i $\eta = x + ct$. Tada je

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + u_{\xi\eta} \eta_x \xi_x + u_{\xi\xi} \xi_{xx} + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_{\eta\xi} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_{xx}, \\ &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + u_{\xi\eta} \eta_x \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_{\eta\xi} \xi_x \eta_x, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{\xi\xi}\xi_t^2 + u_{\xi\eta}\eta_t\xi_t + u_{\xi}\xi_{tt} + u_{\eta\eta}\eta_t^2 + u_{\eta\xi}\xi_t\eta_t + u_{\eta}\eta_{tt}, \\ &= u_{\xi\xi}\xi_t^2 + u_{\xi\eta}\eta_t\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t^2 + u_{\eta\xi}\xi_t\eta_t. \end{aligned}$$

Kako je $\xi_t = -c$, $\xi_x = 1$, $\eta = c$, $\eta_x = 1$, važi

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{tt} = c^2u_{\xi\xi} - 2c^2u_{\xi\eta} + c^2u_{\eta\eta}.$$

Tada će parcijalna diferencijalna jednačina biti svedena na oblik

$$c^2u_{\xi\xi} - 2c^2u_{\xi\eta} + c^2u_{\eta\eta} - c^2(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = 0,$$

$$\text{tj. } u_{\xi\eta} = 0.$$

Rešenje ove jednačine glasi

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

odnosno

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (2.1.2)$$

i zove se *Dalamberovo rešenje*, gde su f i g proizvoljne funkcije, koji reprezentuju prostiranje talasa u desno i u levo.

Dve komponente talasa f i g , prostiru se konstantnom brzinom c i ne deluju jedna na drugu (nema interakcije). Ovo je posledica linearnosti parcijalne diferencijalne jednačine (2.1.1).

U našem radu prostiranje talasa možemo posmatrati i samo u jednom smeru, recimo kada je $g \equiv 0$. Ekvivalentan pristup za taj slučaj je

$$u_{\xi\eta} = 0 \quad \text{tj.} \quad u_{\xi} = 0.$$

Odatle sledi

$$u_x x_{\xi} + u_t t_{\xi} = u_x - \frac{1}{c}u_t = 0,$$

što je ekvivalentno sa

$$u_t - cu_x = 0, \quad (2.1.3)$$

a rešenje ove jednačine je

$$u(x, t) = f(x - ct). \quad (2.1.4)$$

Ako se u analizu prostiranja talasa uključe i disperzioni ili disipativni efekti, onda se dobijaju složeniji modeli poput

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.1.5)$$

ili

$$u_t + u_x - u_{xx} = 0. \quad (2.1.6)$$

Disperzija predstavlja zavisnost brzine talasa od frekvencije i talasne dužine, a disipacija predstavlja koncept dinamičkog sistema gde talasi gube energiju tokom vremena, najčešće zbog delovanja trenja ili turbulencije.

Uobičajeni metod za rešavanje linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina je da se pretpostavi rešenje u vidu jednostavnog talasa u harmonijskom obliku

$$u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} = e^{iw(x, t)}, \quad \text{gde je } w(x, t) = kx - \omega t, \quad (2.1.7)$$

a k i ω su realni parametri.

Ako uvrstimo (2.1.7) u jednačine (2.1.5) i (2.1.6) dobićemo

$$\begin{aligned} (-i\omega + ik - ik^3) u &= 0, \\ \omega &= k - k^3 \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

i

$$\begin{aligned} (-i\omega + ik - k^2) u &= 0, \\ \omega &= k - ik^2 \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

U slučaju (2.1.8), vidimo da je

$$kx - \omega t = k \left(x - \frac{\omega}{k} t \right) = k \left(x - (1 - k^2) t \right),$$

tj. brzina prostiranja talasa je

$$\frac{\omega}{k} = 1 - k^2. \quad (2.1.10)$$

Prema tome, za različite vrednosti talasnog broja k talas se prostire različitim brzinama. Ova osobina talasa je poznata kao *disperzija*.

Jednačina (2.1.5) je najjednostavnija disperzivna talasna jednačina, a (2.1.8) je njena disperzivna relacija, sa brzinom (2.1.10). Brzina $\frac{\omega}{k}$ se zove fazna brzina i opisuje kretanje svake pojedine komponente.

Sličan analiza jednačine (2.1.9) nas dovodi do rešenja

$$u(x, y) = e^{i(kx - \omega t)} = e^{i(kx - (k - ik^2)t)} = e^{-k^2 t} e^{ik(x-t)}.$$

Dobijeno rešenje nam opisuje talas koji se u asimptotskom slučaju $t \rightarrow \infty$ prostire jediničnom brzinom za svako k .

Prikazani postupak analize linearnih talasa, zasnovan na pretpostavci o harmonijskom obliku rešenja, predstavlja osnovu metoda normalnih modova u analizi stabilnosti. O tome će biti više reči u odeljku 2.3.

2.1.2 Prostiranje nelinearnog talasa

Važno svojstvo talasa na vodi jeste da su oni najčešće nelinearni. Najjednostavniji modeli prostiranja talasa se po pravilu oslanjaju na linearizaciju, ali nas preciznija analiza često dovodi do nelinearnih jednačina, kao što je

$$u_t + (1 + u)u_x = 0.$$

Za njeno rešvanje se može iskoristiti metod karakteristika,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t},$$

odnosno

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \left(u + \frac{u^2}{2} \right)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \left(u + \frac{u^2}{2} \right)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} + (1 + u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

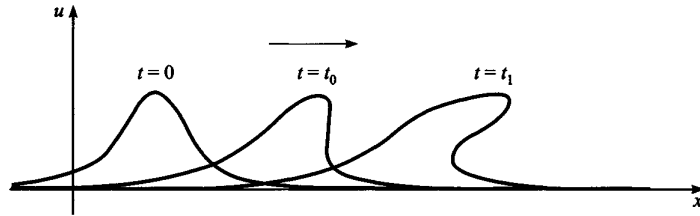
pomoću kog dolazimo do uslova

$$u = \text{const.} \quad \text{duž karakteristike} \quad \frac{dx}{dt} = 1 + u.$$

Ako početni uslov zapišemo u obliku $u(x, 0) = f(x)$, onda se rešenje ove jednačine dobija u implicitnom obliku

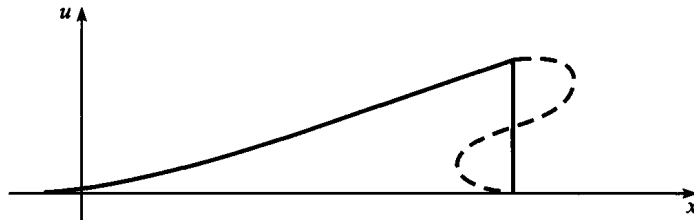
$$u(x, t) = f(x - (1 + u(x, t))t).$$

Dobijeno rešenje možemo predstaviti grafički ako iskoristimo informaciju o karakterističnim linijama. Svaka tačka profila talasa na kojoj u ima vrednost



u_0 , prostiraće se brzinom $1 + u_0$. Odatle sledi da se u tačkama sa većom vrednošću u_0 talas prostire brže nego kada u_0 ima manju vrednost. To znači da profil talasa može menjati oblik kao na sledećoj slici.

Kao što možemo videti na slici, profil talasa može postati višeznačna funkcija posle određenog vremena. Pošto su višeznačna rešenja fizički neprihvatljiva, korektan rezultat se dobija odbacivanjem pretpostavke o neprekidnosti. Tada se u rešenju može pojaviti prekid (skok) koji razdvaja karakteristične linije.



2.2 Analiza stabilnosti rešenja Navije-Stoksovih jednačina

Osnovne pojmove i ideje teorije stabilnosti ćemo uvesti kroz analizu Navije-Stoksovih jednačina, koje predstavljaju jednačine kretanja i održanja mase

viskozno fluida:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\nabla p + R^{-1} \Delta \mathbf{u}, \\ \nabla \mathbf{u} &= 0,\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

gde je $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ polje brzine, a $p(\mathbf{x}, t)$ polje pritiska. Jednačine su date u bezdimenzijskom obliku, pa R predstavlja Rejnoldsov broj. Strujanje fluida se posmatra na ograničenoj oblasti \mathcal{V} , sa rubom $\partial\mathcal{V} = \partial\mathcal{V}_1 \cup \partial\mathcal{V}_2$, na kom polje brzine zadovoljava sledeće granične uslove:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_0 = \text{const. na } \partial\mathcal{V}_1,$$

i $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ je periodično na $\partial\mathcal{V}_2$.

Osnovno (neporemećeno) strujanje je partikularno rešenje jednačina kretanja, čiju stabilnost želimo da ispitujemo. Ono je opisano poljem brzine $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ i poljem pritiska $P(\mathbf{x}, t)$ nestišljivog viskozno fluida. Osnovno strujanje mora *identički* zadovoljiti jednačine kretanja i granične uslove

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla P + R^{-1} \Delta \mathbf{U}\tag{2.2.2}$$

i

$$\nabla \mathbf{U} = 0 \quad \text{na } \mathcal{V};$$

i $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_0$ na $\partial\mathcal{V}_1$, a periodično je na $\partial\mathcal{V}_2$.

Za opšte početne vrednosti brzine $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$ i pritiska $p(\mathbf{x}, 0)$ totalni protok sa brzinom $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ i pritiskom $p(\mathbf{x}, t)$ za $t > 0$ je

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\nabla p + R^{-1} \Delta \mathbf{u}, \\ \nabla \mathbf{u} &= 0 \quad \text{na } \mathcal{V},\end{aligned}$$

i $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$ i tako dalje za $\partial\mathcal{V}$.

Analiza stabilnosti osnovnog strujanja $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ i $P(\mathbf{x}, t)$ podrazumeva uvođenje malih poremećaja, $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0)$ i $p'(\mathbf{x}, 0)$ u početne uslove, za $t = 0$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0), \quad p(\mathbf{x}, 0) = P(\mathbf{x}, 0) + p'(\mathbf{x}, 0),$$

i praćenje njihove prostorno-vremenske evolucije. Rešenje jednačina kretanja se tada može prikazati kao superpozicija osnovnog strujanja i poremećaja u proizvoljnom trenutku vremena t :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t), \quad p(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}, t) + p'(\mathbf{x}, t).\tag{2.2.3}$$

Jednačine koje opisuju promenu poremećaja dobijaju se na sledeći način: u jednačine kretanja (2.2.1) se uvrštava rešenje u obliku (2.2.2), a zatim se od tako dobijenih jednačina oduzimaju jednačine osnovnog strujanja (2.2.3), jer je $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{U}$ i $p' = p - P$. Konačan oblik jednačina poremećaja glasi

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' = -\nabla p' + R^{-1} \Delta \mathbf{u}', \quad (2.2.4)$$

$$\nabla \mathbf{u}' = 0, \quad \text{na } \mathcal{V};$$

i $\mathbf{u}' = \mathbf{0}$ na $\partial \mathcal{V}_1$, a periodična na $\partial \mathcal{V}_2$.

Jednačine poremećaja predstavljaju polaznu tačku u analizi stabilnosti. Na osnovu svojstava njihovog rešenja donosi se sud o stabilnosti. Grubo rečeno, za osnovno strujanje se kaže da je *stabilno* ako proizvoljni mali početni poremećaji, u našem slučaju $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0)$ i $p'(\mathbf{x}, 0)$, ostaju mali tokom vremena, za svako $t > 0$. Osnovno strujanje je *nestabilno* ako postoji bar jedan početni poremećaj koji tokom vremena dostigne vrednosti koje se više ne mogu smatrati malim. Da bi se matematički definisao pojam stabilnosti potrebno je uvesti metriku, jer se samo na taj način može definisati „veličina” poremećaja. Ovde ćemo formalizovati *Ljapunovljevu* definiciju stabilnosti: osnovno strujanje je stabilano, ako za sve $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon)$ takvo da za početne poremećaje koji zadovoljavaju uslove

$$\|\mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0)\| < \delta, \quad \|p'(\mathbf{x}, 0)\| < \delta$$

važi

$$\|\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)\| < \varepsilon, \quad \|p'(\mathbf{x}, t)\| < \varepsilon \quad \text{za sve } t > 0.$$

Norma se može izraziti na različite načine. Na primer, možemo usvojiti da je $\|\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)\| = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{V}} |\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)|$ ili $\|\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)\| = [\int_{\mathcal{V}} \mathbf{u}'^2 d\mathbf{x}]^{1/2}$. Drugi slučaj se u literaturi često naziva *stabilnost u srednjem*. Najzad, osnovno strujanje je *asimptotski stabilno*, ako je stabilno i pored toga važi

$$\|\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)\| \rightarrow 0, \quad \|p'(\mathbf{x}, t)\| \rightarrow 0 \quad \text{kad } t \rightarrow \infty.$$

Definicija stabilnosti se odnosi na vremensku evoluciju malih početnih poremećaja. Ako se problem stabilnosti posmatra u okviru klasičnih rešenja, onda postoji konačan interval $t \in [0, t_1]$ u kom će poremećaji biti mali. To nas motiviše da prvu informaciju o ponašanju poremećaja potražimo koristeći *linearizovanih jednačina poremećaja*. One se dobijaju kada se u linearizovanim jednačinama poremećaja i graničnim uslovima zanemare članova koji

koji sadrže proizvodi poremećaja (superlinearnih kombinacija). Iz jednačine (2.2.4) sledi

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla p' + R^{-1} \Delta \mathbf{u}',$$

$$\nabla \mathbf{u}' = 0, \quad \text{na } \mathcal{V};$$

i $\mathbf{u}' = \mathbf{0}$ na $\partial \mathcal{V}_1$, a periodična je na $\partial \mathcal{V}_2$.

2.3 Metod normalnih modova u analizi stabilnosti

Ako je osnovno strujanje nezavisno od t , $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{x})$, onda linearizovane jednačine poremećaja imaju koeficijente nezavisne od t . Odatle sledi da se rešenje problema može potražiti metodom razdvajanja promenljivih. Drugim rečima, opšte rešenje početnog problema će biti linearna superpozicija normalnih modova sledećeg oblika

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = e^{st} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), \quad p'(\mathbf{x}, t) = e^{st} \hat{p}(\mathbf{x}), \quad (2.3.1)$$

gde karakteristični koren s i odgovarajuće karakteristične funkcije $\hat{\mathbf{u}}$, \hat{p} možemo odrediti rešavanjem sistema jednačina i granične uslove dobijenog uvrštavanjem pretpostavljenog rešenja u linearizovane jednačine poremećaja:

$$s \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{U} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla \hat{p} + R^{-1} \Delta \hat{\mathbf{u}},$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0, \quad \text{na } \mathcal{V},$$

i $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ na $\partial \mathcal{V}_1$ periodična je na $\partial \mathcal{V}_2$.

Karakteristični koreni s ovog problema mogu biti realni i konjugovano-kompleksni, $s = \Re(s) + i \Im(s)$. Ako \mathcal{V} je ograničen, tada karakterističnih korena ima beskonačno, ali prebrojivo mnogo. Na osnovu rešenja linearizovanih jednačina poremećaja može se doneti sledeći sud o stabilnosti:

- ako je $\Re(s) < 0$ za sve karakteristične korene s , onda je osnovno strujanje *stabilno*;
- ako je $\Re(s) > 0$ za najmanje jedan karakteristični koren s , onda je osnovno strujanje *nestabilno*.

Ovakav zaključak o stabilnosti sledi iz činjenice da je vremeska evolucija svakog moda određena izrazom

$$\exp\{\Re(s)t + i \Im(s)t\} = \exp\{\Re(s)t \times (\cos(\Im(s)t) + i \sin(\Im(s)t))\},$$

u kom presudan uticaj na ograničenost poremećaja ima $\Re(s)$.

Kada postoje karakteristični koreni za koje važi $\Re(s) = 0$, dok ostali imaju negativne realne delove, osnovno strujanje je *neutralno stabilno* po linearnoj teoriji. Međutim, u ovom slučaju linearna analiza nije dovoljna za donošenje konačnog zaključka o stabilnosti, već je neophodno analizirati nelinearne jednačine poremećaja. Napomenimo još da za jedan normalni mod prostorna struktura poremećaja ostaje nepromenjena tokom njegovog prostiranja, što ne mora da znači za njihovu superpoziciju.

Treba napomenuti da se opisana analiza odnosi samo na slučaj kada su karakteristični koreni prosti (nema višestrukih korena). Moguća je i situacija u kojoj je osnovno strujanje takvo da linearizovane jednačine poremećaja dopuštaju višestruke karakteristične korene. Tada se opšte rešenje problema ne može prikazati u vidu superpozicije eksponencijalno rastućih i eksponencijalno opadajućih normalnih modova. Pored toga, konjugovano kompleksni koreni implicitno generišu dva linearno nezavisna rešenja, jer realni i imaginarni deo korena nezavisno zadovoljavaju diferencijalne jednačine.

Za analizu stabilnosti strujanja viskoznih fluida je specifično da karakteristični koreni mogu zavisiti od Rejnoldsovog broja R (videti [4] za više detalja). Naime, pri nekim njegovim vrednostima osnovno strujanje je stabilno, dok je pri nekim drugim vrednostima osnovno strujanje nestabilno. Po pravilu, kada se Rejnoldsov broj neprekidno menja javlja se prelazak iz stabilnog u nestabilno osnovno strujanje. Tada postoji kritična vrednost Rejnoldsovog broja R_c za koju je osnovno strujanje neutralno stabilno. U nastavku ćemo ovu ideju iskazati u formalnom obliku.

Definišimo *kritični Rejnoldsov broj* R_c tako da za $R \leq R_c$ važi $\Re(s) \leq 0$ za sve karakteristične korene, a da je $\Re(s) > 0$ za najmanje jedan mod i za najmanje jednu vrednost R ma kojoj okolini R_c . Tada se kaže da je osnovno strujanje *marginalno stabilno* ako je $R = R_c$: strujanje stabilno ako je $R < R_c$, nestabilna za dovoljno male pozitivne vrednosti $R - R_c > 0$, a neutralno stabilno kada je $R = R_c$. U realnim situacijama strujanje ima izraženiju nestabilnost što je razlika $R - R_c$ veća, pa se obično očekuje da će ono biti nestabilno za sve $R > R_c$. Napomenimo da marginalna stabilnost implicira neutralnu stabilnost, ali samo u slučaju viskoznih fluida. Kod neviskoznih

fluida to ne mora biti slučaj – stabilna strujanja su po pravilu neutralno stabilna – pa je zato potrebno da se pravi razlika između ova dva pojma.

Ako je potpuni skup normalnih modova prebrojiv, sa karakterističnim funkcijama $\hat{\mathbf{u}}_n$, \hat{p}_n koje odgovaraju karakterističnim korenima s_n za $n = 1, 2, \dots$, tada svaki početni poremećaj može biti izražen kao superpozicija normalnih modova

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}), \quad p'(\mathbf{x}, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \hat{p}_n(\mathbf{x}),$$

za odgovarajuće koeficijente a_n , b_n . Problem sopstvenih vrednosti, koji odatle sledi, je realan, tako da je svaka karakteristična funkcija ili realna, ili se javlja u vidu kompleksno konjugovanog para. Stoga je svaki koeficijent a_n i b_n takođe realan ili deo kompleksno konjugovanog para.

Normalni modovi se mogu urediti tako da za karakteristične korene važi $\Re(s_1) \geq \Re(s_2) \geq \dots$. Odatle sledi da je

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}) e^{s_n t}, \quad p'(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \hat{p}_n(\mathbf{x}) e^{s_n t}.$$

Stoga možemo reći da je asimptotsko ponašanje poremećaja opisano sa

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \sim a_1 \hat{\mathbf{u}}_1 e^{s_1 t}, \quad p'(\mathbf{x}, t) \sim b_1 \hat{p}_1 e^{s_1 t} \quad \text{kad } t \rightarrow \infty, \quad (2.3.2)$$

ako postoji jedinstveni najbrže rastući ili najsporije opadajući mod, a to je za $s_1 > \Re(s_2) \geq \Re(s_3) \geq \dots$, odnosno

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \sim a_1 \hat{\mathbf{u}}_1 e^{s_1 t} + a_1^* \hat{\mathbf{u}}_1^* e^{s_1^* t}, \quad p'(\mathbf{x}, t) \sim b_1 \hat{p}_1 e^{s_1 t} + b_1^* \hat{p}_1^* e^{s_1^* t} \quad \text{kad } t \rightarrow \infty,$$

ako je najbrže rastući ili najsporije opadajući mod u vidu konjugovano kompleksnog para $\Re(s_1) = \Re(s_2) > \Re(s_3) \geq \dots$. Ako je skup karakterističnih funkcija potpun ali neprebrojiv, tada je superpozicija može umesto sume sadržati integral, na primer Furijeov integral.

Klasični metod normalnih modova, koji je upravo opisan, ističe u prvi plan najbrže rastući nestabilni mod. Međutim, eksponencijalno rastući modovi se retko uočavaju u prirodnim fenomenima ili laboratorijskim eksperimentima. Jedan od razloga za to leži u činjenici da nestabilnost ne nastaje trenutno, već osnovno strujanje sporo evoluira i posle određenog vremenskog intervala naglo gubi svoj prvobitni oblik zbog pojave poremećaja. Drugi razlog je da

u opštem slučaju perturbacija nije predstavljena najbrže rastućim modom, već predstavlja superpoziciju svih modova, stabilnih i nestabilnih, koji eksponencijalno opadaju ili rastu sa različitim brzinama. Pored toga, sa porastom amplitude poremećaja nelinearni članovi u jednačinama dolaze do izražaja i ograničavaju njihov rast. Ipak, kriterijum nestabilnosti zasnovan na linearizovanim jednačinama poremećaja je validan i može se koristiti u analizi kritičnih vrednosti parametara modela.

Glava 3

Analiza stabilnosti

U ovoj glavi će biti analizirani neki konkretni problemi hidrodinamičke stabilnosti, koja se oslanja na [3] i [4]. U toj analizi se mogu uočiti neke zajedničke karakteristike, koje ćemo navesti u nastavku. Konkretno, postupak ispitivanja stabilnosti se po pravilu sastoji od sledećih koraka:

1. identifikacija fizičkog mehanizma nestabilnosti datog strujanja i modeliranje nestabilnosti korišćenjem odgovarajućeg sistema jednačina i graničnih uslova;
2. određivanje partikularnog rešenja problema koje će predstavljati osnovno strujanje;
3. linearizacija sistema za male poremećaje osnovnog strujanja;
4. primena metoda normalnih modova za linearnu analizu stabilnosti;
5. analiza rezultata i određivanje kritičnih vrednosti parametara u slučaju nestabilnosti.

3.1 Osnovni protok

Posmatrajmo strujanje dva nestišljiva fluida, koja se nalaze jedan ispod drugog. Osnovno, neporemećeno strujanje će biti opisano uniformnom brzinom i uniformnom gustinom fluida, a površ koja ih razdvaja će biti ravan

$z = 0$. Dakle, brzina, gustina i pritisak su dati sledećim izrazima

$$\mathbf{u}(z) = \begin{cases} u_2 \mathbf{i} \\ u_1 \mathbf{i} \end{cases}, \quad \rho = \begin{cases} \rho_2 \\ \rho_1 \end{cases}, \quad p(z) = \begin{cases} p_0 - g\rho_2 z & \text{na } z > 0 \\ p_0 - g\rho_1 z & \text{na } z < 0 \end{cases}, \quad (3.1.1)$$

gde su u_1 i u_2 brzine fluida, ρ_1 i ρ_2 njihove gustine, p_0 je pritisak na graničnoj površi i g je gravitaciono ubrzanje.

3.2 Fizički opis nestabilnosti

Fenomen, koji je danas poznat pod nazivom *Kelvin-Helmholcova nestabilnost*, analizirali su nezavisno u drugoj polovini XIX veka Helmholtz i Kelvin. Motivacija za njihovo istraživanje ležala je u pojavi okeanskih talasa usled strujanja vetra po slobodnoj površi vode.

Da bismo stekli utisak o fizičkom mehanizmu koji uzrokuje nestabilnost osnovnog strujanja, usvojimo da je $u_1 = -V$, $u_2 = V$ i $\rho_1 = \rho_2$. Dakle, posmatramo specijalni slučaj vrtložnog sloja između dva nestišljiva fluida, pri čemu je potisak zanemarljiv. Pretpostavimo da je početni poremećaj granične površi (vrtložnog sloja) sinusoidnog oblika. Zbog jednostavnosti pretpostavićemo da je protok dvodimenzionalan u (x, z) -ravni, pa je elevacija data kao $z = \zeta(x, t)$.

Fizičko objašnjenje nestabilnosti dao je Batchelor, oslanjajući se na ponašanje vektora vrtložnosti

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j}. \quad (3.2.1)$$

Primećujući da je u našem uprošćenom slučaju vrtložnost pozitivna za $V > 0$, može se konstatovati da će u tačkama u kojima važi $\zeta = 0$ i $\partial\zeta/\partial x < 0$ ugao nagiba granične površi da se povećava, a sa njim i amplituda poremećaja. Ovakva analiza, koja je detaljno prikazana u knjizi (Drazin), značajno se oslanja na fizičku intuiciju. Umesto toga, mi ćemo slediti formalni postupak analize stabilnosti, dat u nastavku teksta.

3.3 Jednačine poremećaja

Analizu poremećaja ćemo započeti oslanjajući se na Kelvinovu pretpostavku da je poremećeno strujanje fluida sa obe strane granične površi (vrtložnog

sloja) bezvrtložno, $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Imajući ovo u vidu, polje brzine je moguće pisati pomoću potencijala brzine ϕ , koji postoji sa obe strane granične površi, $\mathbf{u} = \nabla\phi$, gde je

$$\phi = \begin{cases} \phi_2 & \text{za } z > \zeta \\ \phi_1 & \text{za } z < \zeta, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

a granična površina ima visinu

$$z = \zeta(x, y, t). \quad (3.3.2)$$

Napomenimo da je ovom pretpostavkom ograničena klasa poremećaja koju analiziramo. U opštem slučaju moguće je postojanje poremećaja sa vrtložnošću $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$, ali njih ovde nećemo proučavati.

Jednačina kontinuiteta za nestišljivi fluid je $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, zato će Laplasijan potencijala biti jednak nuli

$$\Delta\phi_2 = 0 \quad \text{za } z > \zeta, \quad \Delta\phi_1 = 0 \quad \text{za } z < \zeta. \quad (3.3.3)$$

U nastavku će biti prikazani granični uslovi. Najpre će biti navedeni, a zatim će biti detaljno prikazano njihovo izvođenje. Granične uslovi imaju sledeći oblik.

(a) Možemo pretpostaviti da je početni poremećaj ograničen na okolinu granične površi između fluida, pa će zato ostati u ograničenoj oblasti i tokom vremena, odnosno

$$\nabla\phi \rightarrow \mathbf{u}, \quad \text{ako } z \rightarrow \pm\infty. \quad (3.3.4)$$

Drugim rečima, poremećeno strujno polje konvergira neporemećenom strujnom polju kada $z \rightarrow \pm\infty$.

(b) Čestice tečnosti na površini treba da kreću sa graničnom površi a da pri tome dva fluida ne zauzimaju istovremeno istu tačku, kao i da se ne formira oblast u kojoj nema fluida (kavitacija). Dakle vertikalna komponenta brzine na površi je data sa

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{D\zeta}{Dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\zeta}{\partial y} \quad \text{u } z = \zeta, \quad (3.3.5)$$

što je materijalni izvod za površinsku elevaciju. Međutim, moguća je razlika tangentskih komponenti brzine fluda na graničnoj površi, što nas dovodi do jednačina

$$\frac{\partial\phi_k}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\phi_k}{\partial x} \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\phi_k}{\partial y} \frac{\partial\zeta}{\partial y} \quad \text{u } z = \zeta, \quad \text{za } k = 1, 2. \quad (3.3.6)$$

(c) Normalni napon tečnosti je neprekidan na graničnoj površi nestišljivog fluida, što se svodi na dinamički uslov da je pritisak fluida neprekidan. Dakle

$$\rho_1 \left(c_1 - \frac{1}{2} (\nabla \phi_1)^2 - \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - gz \right) = \rho_2 \left(c_2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi_2)^2 - \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - gz \right) \quad \text{u } z = \zeta, \quad (3.3.7)$$

na osnovu Bernulijeve jednačine za nevtložno strujanje, koja važi sa obe strane granične površi $z = \zeta$. Da bi osnovno (neporemećeno) strujanje zadovoljavalo ovu jednačinu, konstante c_1 i c_2 moraju zadovoljiti uslov

$$\rho_1 \left(c_1 - \frac{1}{2} U_1^2 \right) = \rho_2 \left(c_2 - \frac{1}{2} U_2^2 \right) \quad \text{na } z = \zeta. \quad (3.3.8)$$

Jednačine (3.3.1)-(3.3.8) formiraju potpun sistem nelinearnih jednačina poremećaja za osnovno strujanje (3.2.1).

Prikazani granični uslovi su napisani u konačnom obliku, koji ćemo u nastavku izvoditi. Prvo će biti pokazano uslov (b), tj. da važi jednačina (3.3.6). Komponenta brzine na graničnoj površi je

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{D\zeta}{Dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} u + \frac{\partial \zeta}{\partial y} v = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \text{na } z = \zeta.$$

Gradijent funkcije $\zeta(x, y, t) - z = 0$ je vektor normale

$$\mathbf{N} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}, -1 \right),$$

sa jediničnim vektorom

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}.$$

Brzinu možemo napisati pomoću normalne i tangencijalne komponente, kao

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_N + \mathbf{u}_T,$$

gde je

$$\mathbf{u}_N = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

$$\text{i } \mathbf{u}_T = \mathbf{u} - \mathbf{u}_N = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}.$$

Moguća razlika tangencijalnih komponenti brzine fluida na graničnoj površi $\mathbf{u}_{T_1} \neq \mathbf{u}_{T_2}$ nas dovodi do jednačine

$$\mathbf{u}_{T_2} - \mathbf{u}_{T_1} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n},$$

ali zahteva jednakost normalnih komponenti brzina

$$\mathbf{u}_1 \mathbf{N} = \mathbf{u}_2 \mathbf{N},$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right),$$

tj. ovaj uslov je saglasan sa jednačinom (3.3.6).

Da bismo dokazali uslov (c), tj. potvrdili da važi jednačina (3.3.7) poći ćemo od jednačine o promeni količine kretanja

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (3.3.9)$$

U slučaju nevirtložnog strujanja $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ je i polje brzine

$$\boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\omega} = 2\nabla \times \mathbf{u} = 2\nabla \times \nabla \phi = \mathbf{0},$$

pored toga važi i Laplasova jednačina (1.1.15). Jednačinu (3.3.9) možemo transformisati u sledeći oblik

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (3.3.10)$$

Kako je

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial (\nabla \phi)}{\partial t} = \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right), \quad \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad \text{i} \quad \mathbf{g} = \nabla (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) = \nabla (-gz),$$

jednačina (3.3.10) postaje

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) = \nabla (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) - \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right),$$

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \frac{p}{\rho} \right) = \mathbf{0},$$

odnosno, dobija se Bernulijev integral

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \frac{p}{\rho} = f(t). \quad (3.3.11)$$

Definišemo novi potencijal polje brzine

$$\hat{\phi} = \phi - F(t), \quad \text{gde je } F(t) = \int f(t)dt,$$

koji opisuje isto polje brzine

$$\nabla \hat{\phi} = \nabla \phi = \mathbf{u}.$$

Jednačina (3.3.11) postaje

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + F'(t) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \frac{p}{\rho} = f(t),$$

odakle sledi trženi oblik Bernulijevog integrala

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + f(t) - C + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + gz + \frac{p}{\rho} = f(t),$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + gz + \frac{p}{\rho} = C = \text{const.}$$

Izražavanjem pritiska ćemo dobiti traženu jednačinu (3.3.7).

3.4 Linearizovani problem

Za ispitivanje stabilnosti u linearnoj aproksimaciji (linearna stabilnost) prvo ćemo uvesti poremećaje ϕ'_1 i ϕ'_2

$$\phi_2 = U_2 x + \phi'_2 \quad \text{za } z > \zeta, \quad \phi_1 = U_1 x + \phi'_1 \quad \text{za } z < \zeta \quad (3.4.1)$$

i zanemarujemo proizvode malih poremećaja ϕ'_1 , ϕ'_2 i ζ . Ovde ϕ_1 i ϕ_2 predstavljaju potencijale brzine poremećenog strujanja. Linearizacija se može smatrati validnom ako su pomeranje granične površi i njen nagib mali, odnosno $\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y} \ll 1$ i $g\zeta \ll U_1^2, U_2^2$. Korišćenjem Tejlorovog polinoma mogu se aproksimirati potencijali brzina fluida na graničnoj površi $z = \zeta$,

$$\left[\phi'_k \right]_{z=\zeta} = \left[\phi'_k \right]_{z=0} + \zeta \left[\frac{\partial \phi'_k}{\partial z} \right]_{z=0} + \dots$$

Tada je linearizacija jednačina (3.3.3)-(3.3.7) jednoznačno data sa

$$\Delta\phi'_2 = 0 \quad \text{za } z > 0, \quad \Delta\phi'_1 = 0 \quad \text{za } z < 0, \quad (3.4.2)$$

$$\nabla\phi'_k \rightarrow 0 \quad \text{ako } z \rightarrow \mp\infty \quad \text{za } k = 1, 2, \quad (3.4.3)$$

$$\frac{\partial\phi'_k}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + U_k \frac{\partial\zeta}{\partial x} \quad \text{u } z = 0 \quad \text{za } k = 1, 2, \quad (3.4.4)$$

$$\rho_1 \left(U_1 \frac{\partial\phi'_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi'_1}{\partial t} + g\zeta \right) = \rho_2 \left(U_2 \frac{\partial\phi'_2}{\partial x} + \frac{\partial\phi'_2}{\partial t} + g\zeta \right) \quad \text{u } z = 0. \quad (3.4.5)$$

Pošto jednačine (3.4.3)-(3.4.5) obrazuju sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, rešenje za poremećaje možemo pretpostaviti u sledećoj formi

$$\begin{aligned} \zeta(x, y, t) &= \hat{\zeta} e^{i(kx+ly)+st}, \\ \phi'_1(x, y, z, t) &= \hat{\phi}_1(z) e^{i(kx+ly)+st}, \quad \phi'_2(x, y, z, t) = \hat{\phi}_2(z) e^{i(kx+ly)+st}. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Na ovaj način se problem svodi na sistem običnih diferencijalnih jednačina, gde je z nezavisno promenljiva, $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$ su funkcije od z , a $\hat{\zeta}$ je konstanta.

Jednačina (3.4.2) daje

$$\begin{aligned} \Delta\phi'_2 &= \left(\frac{d^2\hat{\phi}_2(z)}{dz^2} - (k^2 + l^2) \hat{\phi}_2(z) \right) e^{i(kx+ly)+st} = 0, \\ \Delta\phi'_1 &= \left(\frac{d^2\hat{\phi}_1(z)}{dz^2} - (k^2 + l^2) \hat{\phi}_1(z) \right) e^{i(kx+ly)+st} = 0. \end{aligned}$$

Pošto je $e^{i(kx+ly)+st} \neq 0$, prethodne jednačine svode na

$$\begin{aligned} \frac{d^2\hat{\phi}_2(z)}{dz^2} - \tilde{k}^2 \hat{\phi}_2(z) &= 0, \\ \frac{d^2\hat{\phi}_1(z)}{dz^2} - \tilde{k}^2 \hat{\phi}_1(z) &= 0, \end{aligned}$$

gde $\tilde{k} = (k^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}$ je talasni broj, a njihovo opšte rešenje glasi

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_2(z) &= A_2 e^{-\tilde{k}z} + B_2 e^{\tilde{k}z}, \\ \hat{\phi}_1(z) &= A_1 e^{\tilde{k}z} + B_1 e^{-\tilde{k}z}, \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

gde su A_2 , A_1 , B_2 i B_1 proizvoljne konstante. Granični uslov (3.4.3) implicira da je

$$\frac{d\hat{\phi}_2(z)}{dz} \rightarrow 0, \quad \text{za } z \rightarrow +\infty,$$

$$\frac{d\hat{\phi}_1(z)}{dz} \rightarrow 0, \quad \text{za } z \rightarrow -\infty,$$

pa će biti $B_2 = 0$ i $B_1 = 0$, dakle

$$\hat{\phi}_2(z) = A_2 e^{-\tilde{k}z}, \quad (3.4.8)$$

$$\text{i } \hat{\phi}_1(z) = A_1 e^{\tilde{k}z}. \quad (3.4.9)$$

Na osnovu toga iz jednačina (3.4.4) i (3.4.5) slede tri homogene linearne jednačine sa tri nepoznate $\hat{\zeta}$, A_1 , A_2 . Iz jednačine (3.4.4) ćemo dobiti da je

$$\begin{aligned} -A_2 \tilde{k} &= s \hat{\zeta} + ikU_2 x \hat{\zeta} \quad \text{i} \quad A_1 \tilde{k} = s \hat{\zeta} + ikU_1 \hat{\zeta}. \\ A_2 &= -\frac{(s + ikU_2) \hat{\zeta}}{\tilde{k}} \quad \text{i} \quad A_1 = \frac{(s + ikU_1) \hat{\zeta}}{\tilde{k}}, \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

odatle sopstvena funkcija (3.4.6) će zavistiti samo od proizvoljne multiplikativne konstante, pa iz jednačine (3.4.5) sledi karakteristična jednačina

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(U_1 \frac{(s + ikU_1) \hat{\zeta}}{\tilde{k}} i k e^{i(kx+ly)+st} + \frac{(s + ikU_1) \hat{\zeta}}{\tilde{k}} s e^{i(kx+ly)+st} + g \hat{\zeta} e^{i(kx+ly)+st} \right) = \\ \rho_2 \left(U_2 \frac{-(s + ikU_2) \hat{\zeta}}{\tilde{k}} i k e^{i(kx+ly)+st} + \frac{-(s + ikU_2) \hat{\zeta}}{\tilde{k}} s e^{i(kx+ly)+st} + g \hat{\zeta} e^{i(kx+ly)+st} \right), \end{aligned}$$

$$\text{tj. } \rho_1 \left((s + ikU_1)^2 \frac{\hat{\zeta}}{\tilde{k}} + g \tilde{\zeta} \right) = \rho_2 \left(-(s + ikU_2)^2 \frac{\hat{\zeta}}{\tilde{k}} + g \tilde{\zeta} \right),$$

odnosno dobićemo da je

$$\rho_1 \left(\tilde{k}g + (s + ikU_1)^2 \right) = \rho_2 \left(\tilde{k}g - (s + ikU_2)^2 \right). \quad (3.4.11)$$

Rešenje ove kvadratne jednačine je

$$s = -ik \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \left(\frac{k^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} - \frac{\tilde{k}g (\rho_1 - \rho_2)}{(\rho_1 + \rho_2)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.4.12)$$

Da bi rešenje (3.4.6) bilo stabilno u linearnoj aproksimaciji, sopstvene vrednosti (3.4.12) moraju biti imaginarne, odnosno diskriminanta mora biti negativna

$$\tilde{k}g (\rho_1^2 - \rho_2^2) \geq k^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2. \quad (3.4.13)$$

Jedno nestabilno rešenje se dobija kada je diskriminanta pozitivna (drugo rešenje je asimptotski stabilno)

$$\tilde{k}g (\rho_1^2 - \rho_2^2) < k^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2. \quad (3.4.14)$$

Ovo je potreban i dovoljan uslov za nestabilnost sa talasnim brojevima k, l . Jednačina (3.4.14) može biti detaljnije analizirana.

1. Kada je $\rho_1 < \rho_2$ granična površ je nestabilna. Ovo je fizički očekivan rezultat, jer je fluid veće gustine iznad fluida manje gustine.
2. Kada je $\rho_1 > \rho_2$, onda se (3.4.14) može zapisati u obliku

$$(U_1 - U_2)^2 > \frac{\tilde{k}g (\rho_1^2 - \rho_2^2)}{k^2 \rho_1 \rho_2} > 0. \quad (3.4.15)$$

Odatle sledi da će granična površ biti nestabilna ako je razlika brzina dovoljno velika.

3. Kada je talasni broj $\tilde{k} \ll 1$, granična površ će praktično uvek biti nestabilna za $U_1 \neq U_2$.

3.5 Gravitacioni talasi

Analizu stabilnosti sprovedenu u prethodnom odeljku možemo ilustrovati jednostavnim primerom gravitacionih talasa. Ovde se pod gravitacionim talasima podrazumevaju talasi na graničnoj površi kada fluidi miruju, $U_1 = U_2 = 0$.

3.5.1 Površinski gravitacioni talasi

Ako je gustina gornjeg fluida značajno manja od gustine donjeg, $\rho_2 \ll \rho_1$, možemo izvršiti aproksimaciju $\rho_2 \approx 0$ i $U_1 = U_2 = 0$. Tada je

$$s = \pm \left(-\tilde{k}g \right)^{\frac{1}{2}} = \pm i \left(\tilde{k}g \right)^{\frac{1}{2}},$$

i imamo model površinskih gravitacionih talasa u dubokoj vodi, koji su stabilni i prostiru se faznom brzinom

$$c = \frac{is}{\tilde{k}} = \frac{\pm i^2 \left(\tilde{k}g\right)^{\frac{1}{2}}}{\tilde{k}},$$

odnosno

$$c = \mp \left(\frac{g}{\tilde{k}}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5.1)$$

Ovo ilustruje vrstu talasa koji imaju oscilatorno ponašanje.

3.5.2 Unutrašnji gravitacioni talasi

Kada u neporemećenom strujanju fluidi miruju ($U_1 = U_2 = 0$) tada važi

$$s = \pm \left(-\frac{\tilde{k}g(\rho_1 - \rho_2)}{(\rho_1 + \rho_2)}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm i \left(\frac{\tilde{k}g(\rho_1 - \rho_2)}{(\rho_1 + \rho_2)}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5.2)$$

Nestabilnost imamo ako i samo ako je $\rho_1 < \rho_2$, tj. teži fluid je iznad lakšeg fluida. Međutim ako je $\rho_1 > \rho_2$ imamo stabilnost granične površi, a talasi se prostiru faznom brzinom

$$c = \frac{is}{\tilde{k}} = \frac{\pm i^2 \left(\frac{\tilde{k}g(\rho_1 - \rho_2)}{(\rho_1 + \rho_2)}\right)^{\frac{1}{2}}}{\tilde{k}},$$

odnosno

$$c = \mp \left(\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\tilde{k}(\rho_1 + \rho_2)}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5.3)$$

Karakteristične funkcije (3.4.6) za potencijal brzine eksponencijalno opadaju kada se udaljajemo od granične površi, kao i u svim slučajevima Kelvin-Helmholcove nestabilnosti. Zato je kretanje ograničeno na okolinu granične površi između dve fluida. Ovi talasi predstavljaju specijalne slučajeve unutrašnjih gravitacionih talasa, koji se mogu prostirati i u unutrašnjosti slojevitog fluida. Njih možemo uočiti između slojeva sveže i slane vode koji se javljaju u estuarima.

3.6 Uticaj površinskog napona na Kelvin-Helmholcovu nestabilnost

Dosadašnja analiza Kelvin-Helmholcove nestabilnosti je podrazumevala da je na graničnoj površi pritisak u fluidima jednak, $p_1 = p_2$. Međutim, prisustvo površinskog napona utiče na pojavu razlike pritiska i promenu granice nestabilnosti. Pokazaćemo u nastavku da ako između dva fluida imamo površinski napon γ , tada jednačina (3.4.12) postaje

$$s = -ik \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \left(\frac{k^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} - \frac{\tilde{k}^2}{\rho_1 + \rho_2} \left(\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\tilde{k}} + \tilde{k} \gamma \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pretpostavimo da na kontaktnoj površi postoji razlika pritiska,

$$\Delta p = p_1 - p_2, \quad \text{dakle} \quad p_1 = p_2 + \Delta p \quad (3.6.1)$$

koja se javlja zbog uticaja površinskog napona. Ako uslov za pritisak zapišemo pomoću jednačine (3.4.5), uzimajući u obzir površinski napon, dobija se

$$\rho_1 \left(U_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi'_1}{\partial t} + g\zeta \right) = \rho_2 \left(U_2 \frac{\partial \phi'_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi'_2}{\partial t} + g\zeta \right) + \Delta p. \quad (3.6.2)$$

Razlika pritiska Δp je određena relacijom

$$\Delta p = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n},$$

gde je

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$$

jedinični vektor normale, dok je vektor normale

$$\mathbf{N} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}, -1 \right).$$

Dakle

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}, -1 \right) \left(1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Imajući u vidu da se u analizi stabilnosti razmatra linearizovani problem, divergencija vektora normale se može izraziti kao

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{n}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{n}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{n}_z}{\partial z} \approx \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \Delta \zeta.$$

Tada linearizovani uslov za pritisak na graničnoj površi postaje

$$\rho_1 \left(U_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi'_1}{\partial t} + g\zeta \right) = \rho_2 \left(U_2 \frac{\partial \phi'_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi'_2}{\partial t} + g\zeta \right) + \gamma \Delta \zeta. \quad (3.6.3)$$

Pretpostavljajući rešenje problema u obliku

$$\begin{aligned} \zeta(x, y, t) &= \hat{\zeta} e^{i(kx+ly)+st}, \\ \phi'_1(x, y, z, t) &= \hat{\phi}_1(z) e^{i(kx+ly)+st}, \\ \phi'_2(x, y, z, t) &= \hat{\phi}_2(z) e^{i(kx+ly)+st}. \end{aligned}$$

i koristeći rešenja

$$\hat{\phi}_1(z) = A_1 e^{\tilde{k}z}, \quad \hat{\phi}_2(z) = A_2 e^{-\tilde{k}z},$$

u jednačini (3.6.3), kao i linearizovane divergencije vektora normale

$$\Delta \zeta = - (k^2 + l^2) \hat{\zeta} e^{i(kx+ly)+st} = -\tilde{k}^2 \hat{\zeta} e^{i(kx+ly)+st},$$

dobija se

$$\rho_1 \left(U_1 i k A_1 e^{\tilde{k}z} + s A_1 e^{\tilde{k}z} + g \hat{\zeta} \right) = \rho_2 \left(U_2 i k A_2 e^{-\tilde{k}z} + s A_2 e^{-\tilde{k}z} + g \hat{\zeta} \right) - \gamma \tilde{k}^2 \hat{\zeta}, \quad (3.6.4)$$

gde $z \rightarrow 0$. Iz graničnog uslova (3.4.2)

$$\Delta \phi'_2 = 0 \quad \text{za } z > 0, \quad \Delta \phi'_1 = 0 \quad \text{za } z < 0,$$

možemo izraziti

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(s + ikU_1) \hat{\zeta}}{\tilde{k}}, \\ A_2 &= -\frac{(s + ikU_2) \hat{\zeta}}{\tilde{k}}, \end{aligned}$$

i uvrstiti u jednačinu (3.6.4)

$$\rho_1 \left(\frac{(s + ikU_1)^2 \hat{\zeta}}{\tilde{k}} + g\hat{\zeta} \right) = \rho_2 \left(-\frac{(s + ikU_2)^2 \hat{\zeta}}{\tilde{k}} + g\hat{\zeta} \right) - \gamma \tilde{k}^2 \hat{\zeta}.$$

Posle sređivanja ove jednačine dobija se kvadratna jednačina

$$\rho_1 \left(\tilde{k}g + (s + ikU_1)^2 \right) = \rho_2 \left(\tilde{k}g - (s + ikU_2)^2 \right) - \gamma \tilde{k}^3,$$

čija su rešenja

$$s = -ik \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \left(\frac{k^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} - \frac{\tilde{k}^2}{\rho_1 + \rho_2} \left(\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\tilde{k}} + \tilde{k}\gamma \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Da bi protok bio stabilan, diskriminanta mora biti nepozitivna

$$\frac{k^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} - \frac{\tilde{k}^2}{\rho_1 + \rho_2} \left(\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\tilde{k}} + \tilde{k}\gamma \right) \leq 0,$$

odakle je

$$(U_1 - U_2)^2 \leq \frac{\tilde{k}^2 (\rho_1 + \rho_2)}{k^2 \rho_1 \rho_2} \left(\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\tilde{k}} + \tilde{k}\gamma \right). \quad (3.6.5)$$

Tj.

$$k^2 (U_1 - U_2)^2 \rho_1 \rho_2 - \tilde{k}^3 \gamma (\rho_1 + \rho_2) - g\tilde{k} (\rho_1^2 - \rho_2^2) \leq 0.$$

Sistem je "stabilniji" ako \tilde{k} raste, sledi ako diskriminanta opada. "Najmanja stabilan" slučaj (najbliži 0) se dobija kada je $\tilde{k} = k$. U tom slučaju nejednačina (3.6.5) postaje

$$(U_1 - U_2)^2 \leq \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \left(\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\tilde{k}} + \tilde{k}\gamma \right).$$

Korišćenjem pomoćne jednačine

$$\varphi(\tilde{k}) = \tilde{k}\gamma + (\rho_1 - \rho_2) \frac{g}{\tilde{k}},$$

dobićemo da je

$$(U_1 - U_2)^2 \leq \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \varphi(\tilde{k}).$$

Nama interesuje za koju vrednosti $\tilde{k} = \tilde{k}^*$ dobijamo minimalnu granicu stabilnosti, iz tih razloga izračunamo prvi izvod pomoćne jednačine

$$\frac{\partial \varphi(\tilde{k})}{\partial \tilde{k}} = \gamma - \frac{g}{\tilde{k}^2} (\rho_1 - \rho_2).$$

Izjednačenjem prethodnu jednačinu sa nulom

$$\frac{\partial \varphi(\tilde{k}^*)}{\partial \tilde{k}} = 0, \quad \text{dobićemo da je } \tilde{k}^* = \pm \left(\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}},$$

gde ćemo uzeti pozitivno rešenje. Sve to važi uz uslov da je drugi izvod pomoćne jednačine pozitivna, tj. imaćemo minimalnu vrednost, ako važi

$$\frac{\partial^2 \varphi(\tilde{k})}{\partial \tilde{k}^2} = 2 \frac{g}{\tilde{k}^3} (\rho_1 - \rho_2) > 0.$$

Talasna dužina je najmanja stabilna u granici stabilnosti za

$$\lambda = \frac{2\pi}{\tilde{k}} = 2\pi \left(\frac{\gamma}{g(\rho_1 - \rho_2)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

koji raširi u pravcu osnovnog strujanja. Sledi da je protok stabilan ako i samo ako je

$$(U_1 - U_2)^2 \leq \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \left(\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\left(\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}}} + \left(\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma \right),$$

odnosno

$$(U_1 - U_2)^2 \leq \frac{2(\rho_1 + \rho_2)(g\gamma(\rho_1 - \rho_2))^{\frac{1}{2}}}{\rho_1 \rho_2}.$$

Na osnovu toga diskriminanta mora biti pozitivna da bi strujanje bilo nestabilna, tj.

$$(U_1 - U_2)^2 > \frac{2(\rho_1 + \rho_2)(g\gamma(\rho_1 - \rho_2))^{\frac{1}{2}}}{\rho_1 \rho_2}. \quad (3.6.6)$$

Ako je zadovoljena nejednakost (3.6.6), neporemećeno strujanje će biti nestabilno u linearnoj aproksimaciji, odakle sledi i nestabilnost u odnosu na tačne, nelinearne jednačine poremećaja.

Poređenjem dobijenog rezultata sa ranije navedenoj granicom nestabilnosti (3.4.15) dobijenom u osnovnom problemu:

$$(U_1 - U_2)^2 > \frac{\tilde{k}g(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{k^2\rho_1\rho_2} > 0,$$

u slučaju $\tilde{k} = k$

$$(U_1 - U_2)^2 > \frac{g(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{\tilde{k}\rho_1\rho_2} > 0,$$

može se uočiti da će granica nestabilnosti (3.6.6) biti viša od (3.4.15):

$$\frac{2(\rho_1 + \rho_2)(g\gamma(\rho_1 - \rho_2))^{\frac{1}{2}}}{\rho_1\rho_2} > \frac{g(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{\tilde{k}\rho_1\rho_2},$$

odnosno da površinski napon stabilizuje neporemećeno kretanje za

$$\tilde{k} > \frac{1}{2} \left(\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Koristeći Kelvinov model možemo pokazati da vetar će generisati talase na moru ako je razlika između brzine vazduha i vode je

$$|U_1 - U_2| > 6.6 \frac{m}{s},$$

koristeći jednačinu (3.6.1) i da je $\rho_1 = 1020 \frac{kg}{m^3}$, $\rho_2 = 1.25 \frac{kg}{m^3}$, $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$, $\gamma = 0.074 \frac{N}{m}$. A talas je najmanje stabilan ako ima talasnu dužinu $\lambda = 0.017m$, sa brzinom $0.008 \frac{m}{s}$.

Biografija

Daniel Balog je rođen 21. jula 1990. godine u Senti. Osnovnu školu "Čeh Karolj" je završio 2006. godine u Adi. Po završetku srednje škole "Gimnazija sa domom učenika za talentovane učenike Boljai" 2009. godine, upisao je osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer tehnomatematika. U oktobru 2013. godine je završio osnovne studije i upisao master studije. Poslednji ispit master studije je položio u julu 2017. godine. Pored toga je položio ispite psiholoških, pedagoških i metodičkih disciplina 30 bodova i 6 bodova prakse u nastavi.

Od septembra 2015. do januara 2017. je radio u gimnaziji "Svetozar Marković" u Novom Sadu, kao profesor matematike.

Novi Sad, avgust 2017.

Balog Dániel

Literatura

- [1] R.S. Johnson (1997), *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*, Cambridge University Press.
- [2] G.K. Batchelor (2000), *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press.
- [3] P.G. Drazin (2002), *Introduction to Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press.
- [4] P.G. Drazin, W.H. Reid (2004), *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press.
- [5] Ž. Bukurov (1987), *Mehanika Fluida*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Ključna dokumentacijska informacija

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Balog Dániel

AU

Mentor: dr Marko Nedeljkov

MN

Naslov rada: Analiza stabilnosti talasa na vodi

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski/engleski

JI**Zemlja publikovanja:** Srbija**ZP****Uže geografsko područje:** Vojvodina**UGP****Godina:** 2017.**GO****Izdavač:** Autorski reprint**IZ**

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

MA**Fizički opis rada:** 3/52/???/0/2/0/0

(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)

FO**Naučna oblast:** Matematika**NO****Naučna disciplina:** Parcijalne diferencijalne jednačine**ND**

Predmetna odrednica/Ključne reči: Vodeni talas, Jednačina kontinuiteta, Ojlerova jednačina, Navije-Stoksova jednačina, Gravitacioni talas, Kelvin-Helmholcova nestabilnost

PO**UDK:**

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu

ČU**Važna napomena:****VN**

Izvod: Rad se bavi sa proučavanjem stabilnosti talasa na vodi kao oblasti primene parcijalnih diferencijalnih jednačina. U radu su najpre prikazane osnovne jednačine mehanike neviskoznih fluida i prateći granični uslovi. Potom je ukratko prikazani metod normalnih modova, koji predstavlja matematički aparat linearne analize stabilnosti. Ovaj metod je potom primenjen u nizu

značajnih problema stabilnosti talasa na vodi.

Prvi deo rada sadrži osnovne jednačine mehanike neviskoznih fluida - zakon održanja mase, Ojlerovu jednačinu kretanja i uvodi pojmove vrtložnosti i strujnica. Analizirani su i najvažniji granični uslovi u problemima prostiranja talasa. Najzad, osnovne jednačine su date i u bezdimenzionalnom obliku i izvršeno je njihovo skaliranje, što u matematičkom smislu može uticati na izbor metoda rešavanja problema.

U drugom delu su dati elementi metoda normalnih modova. Ovaj metod je od fundamentalnog značaja u linearnoj analizi stabilnosti, jer omogućava svođenje problema stabilnosti rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina na algebarski problem analize rešenja karakteristične jednačine. Prikazana je i njegova primena u analizi rešenja Navije-Stoksovih jednačina.

Treći deo je posvećeno analizi stabilnosti u konkretnim problemima prostiranja talasa na vodi. Definisana je osnovni protok, dat je fizički opis nestabilnosti i izvedene su jednačine poremećaja u opštem linearizovanom obliku. Na kraju je izvršena analiza stabilnosti gravitacionih talasa i analizirana je Kelvin-Helmholcova nestabilnost.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 08. 06. 2017.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

Predsednik: dr Milana Čolić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Srbojlob Simić, redovni profesor, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents code: Master's thesis

CC

Author: Balog Dániel

AU

Mentor: Marko Nedeljkov, PhD

MN

Title: Stability analysis of water waves

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: Serbian/English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2017.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: 3/52/??/0/2/0/0

(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Partial Differential Equations

SD

Subject / Key words: Water wave, Continuity equation, Euler's equation, Navier Stokes equation, Gravity waves, Kelvin-Helmholtz instability

SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: Master thesis is about analysing stability of water waves as applied partial differential equations. In the first place we define general equations of inviscid fluid mechanics and attended boundary conditions. Then we describe methods of normal modes which is the mathematical tool of linear analyze of stability. This method is applied in lot of important problems in stability of water waves.

First part of thesis is the general equations of inviscid fluid mechanics - the law of mass conservation, Euler's equation of motion and introduces the concepts of vorticity and streamlines. There is an analyse of the most important boundary conditions in the wave propagation problems. Then general equations are given in the non dimensional and scaled form, what is mathematically the influence selection of problem solving methods.

In the second part are given elements of methods of normal modes. This method has elementary importance in the linear analyze of stability, because it enables the conciliation of the stability problem, solving partial differential equations and the analysis of the characteristic equations. There is also shown its use in the analyse of solving Navier-Stokes equations.

Third part is a complete analysis of stability in concrete problems of water wave propagation. The basic flow is defined, a physical description of the instability is given, and one disturbance is performed in this linearized form. Finally, an analysis of the stability of gravitational waves is performed and Kelvin-Helmholtz's instability is analysed.

AB

Accepted by Scientific Board on: Jun 08, 2017

ASB

Defended:

DE Thesis defend board:

President: Milana Čolić, PhD, Assistant Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Mentor: Marko Nedeljkov, PhD, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Srboľjub Simić, PhD, Full Professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad

DB