UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Brankica Simeonov

PRIMENA STOHASTIČKIH PROCESA U TEORIJI NEŽIVOTNOG OSIGURANJA

Master rad

Mentor: Prof. dr Danijela Rajter-Ćirić

Novi Sad, 2012.

Sadržaj

Predgovor

Primenom matematičkih metoda, teorije verovatnoće, finansijske matematike i stohastičkih modela, aktuarska matematika utvrđuje cene osiguranja. Osiguravajuće društvo se sklapanjem ugovora o osiguranju obavezuje da će nadoknaditi štete nad osiguranim predmetima, ukoliko do štete dođe. Na taj način osiguravajuća kompanija preuzima ne sebe rizik osiguranika, a kao naknadu dobija premiju. Postavlja se pitanje određivanja visine premije tako da kompanija izbegne bankrotstvo. Stoga je potrebno modelirati broj osiguranih slučajeva koji će pretrpeti štetu, kao i iznose šteta, u dugom vremenskom periodu, što je jedan od ključnih zadataka teorije neživotnog osiguranja. Takvi modeli se baziraju, pre svega, na primeni stohastičkih procesa. U ovom radu prikazani su stohastički procesi koji su značajni u oblasti neživotnog osiguranja, kao i njihova konkretna primena u datoj oblasti.

Osnovni pojmovi teorije verovatnoće i stohastičke analize, kao i osnovni pojmovi modela kolektivnog rizika navedeni su u prvom poglavlju.

U drugom poglavlju temeljno su obrađeni pojedini stohastički modeli vezani za prebrajanje zahteva za isplatu štete u neživotnom osiguranju. Posebna pažnja posvećena je Poasonovom procesu, njegovim osobinama i njegovoj ulozi u Kramer-Lundbergovom modelu. Takođe su razrađena i njegova uopštenja, proces obnavljanja i mešoviti Poasonov proces.

U trećem poglavlju prikazana je procena ukupnog iznosa zahteva za isplatu štete na osnovu određivanja očekivanja i varijanse, kao i na osnovu primene zakona velikih brojeva i centralne granične teoreme odgovarajućeg modela. Ukazano je i na asimptotsko ponasanje modela obnavljanja. Na kraju je proučena veza između tih rezultata i principa izračunavanja premije osiguravajućeg društva.

Želela bih da se zahvalim svom mentoru, dr Danijeli Rajter-Ćirić pre svega na strpljenju, savetima i sugestijama pruženim tokom izrade ovog rada. Njena interesantna predavanja iz teorije verovatnoće i stohastičke analize bila su svakako jedan od razloga da se opredelim za temu iz ove oblasti. Takođe bih želela da se zahvalim svima koji su mi na bilo koji način pružili pomoć i podršku. Posebnu zahvalnost dugujem svojoj porodici i prijateljima.

1

Uvod

Prirodne nepogode poput cunamia, poplava, zemljotresa i sl., uticale su na to da osiguranje postane značajan aspekt modernog društva. Međusobno poverenje osiguranika i osiguravajućeg društva je ključni faktor u njihovoj saradnji. Matematička teorija osiguranja igra značajnu ulogu jer obezbeđuje naučnu osnovu za to poverenje.

Već od druge polovine XVII veka u Evropi su bili rasprostranjeni neki tipovi polisa osiguranja. Međutim, temelji moderne aktuarske matematike postavljeni su tek u prvoj polovini XX veka od strane švedskih matematičara Filipa Lundberga i Haralda Kramera. Današnja matematika osiguranja smatra se delom teorije primenjene verovatnoće i većim delom je opisana vremenski neprekidnim stohastičkim procesima.

1.1 Osnovni pojmovi teorije verovatnoće

Teorija verovatnoće je osnovni stub moderne matematike. Ona je usko povezana sa drugim matematičkim oblastima poput algebre, topologije, analize itd. Zahvaljujući njenoj primeni u osiguranju, na nesrećne slučajeve se ne gleda kao na nepredvidive dogadjaje, već kao na pojave koje se mogu zbog odredjenih pravilnosti predvidjati.

Neka je Ω skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta. Elementi skupa Ω su elementarni događaji ω. *Slučajan događaj* A je podskup skupa Ω. Definišimo pojam σ-algebre.

Definicija 1.1 *Podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$ je* σ-algebra *(σ-polje) nad Ω ako važi:*

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) *Ako $A \in \mathcal{F}$, onda $\bar{A} \in \mathcal{F}$*
3) *Ako $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, onda $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.*

Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}^n$ je najmanja σ-algebra koja sadrži sve otvorene podskupove od $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.2 *Funkcija $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ zove se* verovatnoća *na prostoru* $(\Omega, \mathcal{F})$ *ako zadovoljava uslove:*

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) *Ako $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j,\ i,j = 1,2,\ldots$, onda je*

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\,,$$

pri čemu $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ označava uniju familije međusobno disjunktnih događaja.

Prostor verovatnoća je uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Slučajna promenljiva X je realna funkcija definisana na Ω tako da za svaki Borelov skup $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ imamo $X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{F}$.

Raspodela verovanoća slučajne promenljive X data je sa

$$P_X(S) \coloneqq P(X \in S) = P(X^{-1}(S)), \text{ za } S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Slučajna promenljiva X ima *diskretnu* raspodelu ako je njen skup slika najviše prebrojiv skup, tj. postoji niz $\{x_i\}$ takav da je $\sum P\{X = x_i\} = 1$.

Očekivanje slučajne promenljive sa diskretnom raspodelom dato je sa

$$E(X) = \sum x_i P\{X = x_i\}$$

pod uslovom da je suma apsolutno konvergentna.

Funkcija $F_X(x): \mathbb{R} \to [0,1]$ definisana sa

$$F_X(x) = P(\omega \in \Omega\ |X(\omega) < x) = P(X < x)$$

je *funkcija raspodele* slučajne promenljive X.

Slučajna promenljiva X je *apsolutno neprekidna* ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $\varphi_X(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, takva da za svako $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ važi

$$P(X \in S) = \int_S \varphi_X(x)dx.$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ je *gustina* raspodele verovatnoća.

Očekivanje apsolutno neprekidne slučajne promenljive dato je sa

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_X(x)dx$$

i ono postoji ako dati integral apsolutno konvergira.

Definicija 1.3 *Događaji A i B su* nezavisni *ako važi*

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Definicija 1.4 *Preslikavanje* $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$, $\boldsymbol{X}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *jeste* n-dimenzionalna slučajna promenljiva *na prostoru veovatnoća* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ako za svako* $S \in \mathcal{B}_n$ *važi*

$$\{\omega \mid \boldsymbol{X}(\omega) \in S\} = \{\boldsymbol{X} \in S\} = \boldsymbol{X}^{-1}(S) \in \mathcal{F}.$$

Definicija 1.5 Funkcija raspodele *n-dimenzionalne slučajne promenljive* $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ *je*

$$F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \dots, x_n) = F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1, \dots, x_n) = P(\{X_1 < x_1\} \cap \dots \cap \{X_n < x_n\}),$$

$$-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty \,.$$

Definicija 1.6 *Slučajne promenljive* $X_1, X_2, \dots$ *su* nezavisne *ako su događaji* $X_1^{-1}(S_1),\ X_2^{-1}(S_2), \dots$ *nezavisni, za sve Borelove skupove* $S_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i = 1,2, \dots$.

Tvrđenje 1.1 (Nezavisnost slučajnih promenljivih)

Neka su $X_1, \dots, X_n$ *slučajne promenljive na prostoru verovatnoća* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Potreban i dovoljan uslov da slučajne promenljive* $X_1, \dots, X_n$ *budu nezavisne je da važi*

$$F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n).$$

Ako slučajne promenljive $X_1, \dots, X_n$ imaju očekivanja, tada je

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)\,.$$

Ako su pritom i nezavisne tada važi i

$$E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k)\,.$$

Definicija 1.7 Centralni moment reda $k, k \in \mathbb{N}$, *slučajne promenljive* X *je*

$$E(\left(X - E(X)\right)^k).$$

Centralni moment reda 2 slučajne promenljive X *zove se* disperzija (varijansa) *slučajne promenljive* X *i označava se sa* $D(X)$ *ili* $\sigma^2(X)$, *odnosno* $var(X)$.

Sada ćemo navesti neke od osobina disperzije koje će se koristiti u ovom radu. Važi da je $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$. Jedna od osobina disperzije je i ta da ako je c konstanta, onda je $D(cX) = c^2 D(X)$ i $D(X + c) = D(X)$. Kako je $D(X) \geq 0$, *standardna devijacija* slučajne promenljive X definiše se kao $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Definicija 1.8 Funkcija izvodnica momenta *slučajne promenljive* X *je* $\widehat{m}_X(s) = E(e^{sX}), s \in \mathbb{R}$ *kada očekivanje postoji.*

Definicija 1.9 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *prostor verovatnoća i* $A, B \in \mathcal{F}$, *pri čemu je* $P(B) > 0$. Uslovna verovatnoća $P(A|B)$, *tj. verovatnoća događaja* A *pod uslovom da se realizovao događaj* B, *data je sa*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Neka je (X, Y) dvodimenzionalna diskretna slučajna promenljiva sa raspodelom $p(x_i, y_i)$, $i, j = 1,2, \dots$. Uslovno očekivanje za slučajnu promenljivu X pri uslovu $\{Y = y_j\}$ definišemo pomoću uslovne raspodele

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{q(y_j)}, \text{gde je } q(y_j) = P(Y = y_j),$$

na sledeći način:

$$E(X|Y = y_j) = \sum_i x_i\, p(x_i|y_j) = \frac{1}{q(y_j)} \sum_i x_i\, p(x_i, y_j).$$

Neka je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva apsolutno neprekidnog tipa sa gustinom $\varphi_{X,Y}(x, y)$, $-\infty < x, y < \infty$. Uslovna gustina za slučajnu promenljivu X pri uslovu $\{Y = y\}$, za svako y za koje je $\varphi_Y(y) > 0$ data je sa

$$\varphi_X(x|y) = \frac{\varphi_{X,Y}(x, y)}{\varphi_Y(y)}.$$

Dakle, uslovno očekivanje za slučajnu promenljivu X pod uslovom $\{Y = y\}$ je

$$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, \varphi_X(x|y)dx = \frac{1}{\varphi_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} x\, \varphi_{(X,Y)}(x,y)dx\,.$$

Sada ćemo navesti neke raspodele verovatnoća apsolutno neprekidne slučajne promenljive koje će se koristiti u radu.

- Slučajna promenljiva X ima *uniformnu* $\mathcal{U}(a,b)$ *raspodelu*, $a,b \in \mathbb{R}, a < b$, ako je njena gustina raspodele

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a-b}, & x \in (a,b) \\ 0, & x \notin (a,b) \end{cases},$$

  a funkcija raspodele slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}.$$

- Slučajna promenljiva X ima *eksponencijalnu* $\mathcal{E}(\lambda)$ *raspodelu*, $\lambda > 0$, ako je njena gustina raspodele

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

  a funkcija raspodele slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

- Slučajna promenljiva X ima *normalnu* $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ *raspodelu*, $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, ako je njena gustina raspodele

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R},$$

  a funkcija raspodele slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Definicija 1.10 Karakteristična funkcija *slučajne promenljive X, u oznaci* $f_X(t)$, *je funkcija* $f_X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *data sa*

$$f_X(t) = E\left(e^{itX}\right), \qquad t \in \mathbb{R}\,,\ i^2 = -1.$$

Specijalno, karakteristična funkcija slučajne promenljive X

- diskretnog tipa je $f_X(t) = \sum_j e^{itx_j} p(x_j)$
- apsolutno neprekidnog tipa je $f_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi_X(x) dx$

Definicija 1.11

Niz slučajnih promenljivih $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka slučajnoj promenljivoj X

- u verovatnoći $X_n \xrightarrow{p} X, n \to \infty$, *ako za* $\forall\varepsilon > 0$, $P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \to 0\ , n \to \infty$
- skoro sigurno $X_n \xrightarrow{s.s.} X, n \to \infty$, *ako* $P\{X_n \to X, n \to \infty\} = 1$
- srednje kvadratno $X_n \xrightarrow{s.k.} X,\ n \to \infty$, *ako je* $E(X_n^2) < \infty$ *i ako* $E((X_n - X)^2) \to 0, n \to \infty$
- u raspodeli $X_n \xrightarrow{r} X, n \to \infty$, *ako niz odgovarajućih funkcija raspodele* $F_{X_n}(x)$ *konvergira ka funkciji raspodele* $F_X(x)$, *za svako* $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *za koje je* F_X *neprekidna funkcija.*

Tvrđenje 1.2 (Zakon velikih brojeva)

Neka su $X_1, X_2, \dots$ *nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom. Posmatrajmo konvergenciju niza*

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right\} \to 0\ , \qquad n \to \infty.$$

Ako je u pitanju konvergencija u verovatnoći, onda je reč o slabom zakonu velikih brojeva, *a ako je u pitanju skoro sigurna konvergencija tada je to* jak zakon velikih brojeva.

Odnosno, ako je $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ i $E(X_i) = m\ , i = 1,2, \dots$, za slab zakon velikih brojeva važi

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| < \varepsilon\right) = 1,\ \ \varepsilon > 0\ ,$$

a za jak zakon velikih brojeva

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n = m\right) = 1\ .$$

Tvrđenje 1.3 (Centralna granična teorema)

Neka je $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *pri čemu su* $X_1, \dots, X_n$ *nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom. Ako je* $D(X_i) = \sigma^2 < \infty$ *i* $E(X_i) = m$, $i = 1, \dots, n$ *tada važi:*

$$P\left\{\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\,, \quad n \to \infty.$$

1.2 Osnovni pojmovi stohastičke analize

Posmatrajmo slučajnu promenljivu X u nekom vremenskom trenutku t vremenskog intervala I. Dakle, $X(t)$ (ili u oznaci X_t) je slučajna promenljiva za svako $t \in$ I. Tada skup slučajnih promenljivih $\{X(t) : t \in I\}$ posmatramo kao slučajnu funkciju vremena. U tom slučaju kažemo da je $X(t)$ jedan *slučajni* ili *stohastički proces*. Formalno, familija $\{X(t): t \in I\}$ $\mathbb{R}^d$ – vrednosnih slučajnih promenljivih naziva se *stohastički proces* sa *parametarskim skupom* I i sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$. Ukoliko je parametarski skup I prebrojiv, reč je o diskretnom slučajnom procesu, u suprotnom proces je neprekidan. Stohastički proces zavisi od dve promenljive $t \in [t_0, T]$ i $\omega \in \Omega$, međutim promenljivu ω najčešće izostavljamo iz zapisa.

Neka je $\{X(t): t \in [t_0, T]\}$ stohastički proces. Tada je:

- $X(t,\cdot)\mathbb{R}^d$- vrednosna slučajna promenljiva za svaki fiksiran vremenski trenutak $t \in [t_0, T]$.
- $X(\cdot, \omega)\mathbb{R}^d$- funkcija vremena na intervalu $[t_0, T]$ za fiksirano $\omega \in \Omega$.

Funkcija $X_\cdot(\omega)$ naziva se *realizacija* ili *trajektorija* $\mathbb{R}^d$-vrednosnog stohastičkog procesa $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$.

Definicija 1.12 Konačno-dimenzionalne raspodele $\mathbb{R}^d$*-vrednosnog stohastičkog procesa* $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ *date su sa:*

$$P(X_t < x) = F_t(x)$$
$$P\big(X_{t_1} < x_1,\, X_{t_2} < x_2\big) = F_{t_1 t_2}(x_1, x_2)$$
$$\vdots$$
$$P\big(X_{t_1} < x_1, \dots, X_{t_n} < x_n\big) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n),$$
$$\vdots$$

gde su $t, t_i \in [t_0, T], i = 1,2, \dots$ *i* $x, x_i \in \mathbb{R}^d, i = 1,2, \dots$.

Konačno-dimenzionalne raspodele zadovoljavaju sledeće uslove:

1) *Uslov simetrije*

   Ako je $\{i_1, \dots, i_n\}$ jedna permutacija brojeva od 1 do n, tada važi:

$$F_{t_{i_1},\dots,t_{i_n}}\left(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\right) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

2) *Uslov saglasnosti*

   Ako je $m < n$ za proizvoljne vremenske trenutke $t_1, \dots, t_n \in [t_0, T]$ važi:

$$F_{t_1,\dots,t_m,t_{m+1},\dots,t_n}(x_1, \dots, x_m, \infty, \dots, \infty) = F_{t_1,\dots,t_m}(x_1, \dots, x_m).$$

Teorema 1.4 (Fundamentalna teorema Kolmogorova)

Za svaku familiju funkcija raspodele koja ispunjava uslove simetrije i saglasnosti postoji prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i stohastički proces* $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ *na njemu definisan koji date raspodele ima kao konačno-dimenzionalne raspodele.*

Očekivanje ili srednju vrednost $E(X(t))$ stohastičkog procesa X_t označavamo sa $m_X(t)$. Disperzija stohastičkog procesa je $D_X(t) = E(X_t^2) - (E(X_t))^2$.

Definicija 1.13 *Stohastički proces* $\{X(t) : t \in [t_0, T]\}$ *je* Markovski *ako zadovoljava takozvano* Markovsko svojstvo:

$$P(X(t_{n+1}) \in A \mid X(t) = x_t, t \leq t_n) = P\left(X(t_{n+1}) \in A \middle| X(t_n) = x_{t_n}\right) \qquad (1.2.1)$$

za sve A *i za bilo koje vremenske trenutke* $t_n < t_{n+1}$.

Posmatrajmo dalje diskretne stohastičke procese sa prebrojivim skupom stanja S. Tada formulu (1.2.1) možemo zapisati kao

$$P\left(X_{t+s} = j \,\middle|\, X_t = i, X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_1} = i_1\right) = P(X_{t+s} = j \mid X_t = i)$$

za proizvoljna stanja $i_1, \dots, i_n, i, j$ i za vremenske trenutke $t_1 < \cdots < t_n < t$ i $s \geq 0$.
Dakle, verovatnoća da proces bude u nekom stanju ne zavisi od prošlosti već samo od sadašnjeg trenutka.
Vremenski diskretni procesi koji imaju Markovsko svojstvo nazivaju se *lanci Markova*.
Verovatnoća prelaza iz stanja i u stanje j u jednom koraku je

$$p_{i,j} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \qquad n \geq 0.$$

Markovski proces je (vremenski) *homogen* ako je njegova verovatnoća prelaza stacionarna, tj. ako verovatnoća $p_{i,j}$ ne zavisi od vremenskog trenutka n.

Verovatnoća prelaza iz stanja i u stanje j u n koraka je

$$p_{i,j}^{m,m+n} \coloneqq P(X_{m+n} = j \mid X_m = i)\,, \quad m,n,i,j \geq 0.$$

Za homogeni proces ovu verovatnoću označavamo sa $p_{i,j}(n)$.

Matrica prelaza u n koraka homogenog lanca Markova data je sa

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}^{(\mathrm{n})} = \left[p_{i,j}(n)\right]_{i,j}.$$

Tvrđenje 1.5 (Jednačine Chapmen-Kolmogorov-a)

Za $m,n,i,j \geq 0$ *važi:*

$$p_{i,j}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}^{(m)} p_{k,j}^{(n)}\ . \qquad (1.2.2)$$

Jednačinu (1.2.2) možemo zapisati i u matričnom obliku

$$\mathbf{P}^{(m+n)} = \mathbf{P}^{(m)}\mathbf{P}^{(n)}\,,$$

na osnovu čega možemo izvesti da je $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$.

Sa $p_i(n)$ označavamo verovatnoću i-tog stanja u trenutku n. Verovatnoća $p_i(0)$ je *početna verovatnoća* i-tog stanja. Važi da je $\boldsymbol{p}(n) = \boldsymbol{p}(0)\mathbf{P}^n$, pri čemu je $\boldsymbol{p}(k) = [p_1(k), \dots, p_m(k)]$ vektor verovatnoća u trenutku k.

Slučajan hod (random walk) je jedan od jednostavnijih primera Markovskih procesa. Na sledeći način generalizujemo slučajan hod: ako se čestica nalazi u stanju i u trenutku n, tada će biti u stanju j u trenutku $n+1$ sa verovatnoćom

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \begin{cases} p_i, & ako\ \ je\ \ j = i+1 \\ q_i, & ako\ \ je\ \ j = i-1 \\ 0, & inače \end{cases}$$

pri čemu je $p_i + q_i = 1$, za svako $i \in \{0, \pm1, \pm2, \dots\}$.

Definicija 1.14 *Stohastički proces* $\{W_t : t \geq 0\}$ *je* Vinerov proces *ili* Braunovo kretanje *ako važi*

i) $W(0) = 0$,

ii) $\{W(t) : t \geq 0\}$ *ima nezavisne i stacionarne priraštaje,*

iii) $W(t) : \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$, $\forall t > 0$.

Definicija 1.15 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *prostor verovatnoća. Niz* σ*-algebri* $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ *na* Ω *takvih da je* $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}$ *naziva se* filtracija.

Definicija 1.16 *Stohastički proces* $\{N(t), t \geq 0\}$ *je* proces prebrajanja *ako* $N(t)$ *predstavlja ukupan broj „događaja“ koji se pojave do trenutka* t.

1.3 Osnovni model kolektivnog rizika

Godine 1903., Filip Lundberg je postavio temelje moderne teorije rizika. Teorija rizika kao sinonim matematike neživotnog osiguranja, bavi se modeliranjem zahteva koji pristižu u osiguravajuću kompaniju i daje savet kolika premija treba da bude naplaćena kako bi se izbegao bankrot, odnosno propast osiguravajućeg društva. Jedan od Lunderbergovih ključnih doprinosa je uvođenje jednostavnog modela koji je sposoban da opiše osnovnu dinamiku homogenog portfolija osiguranja. Pod ovim podrazumevamo portfolio ugovora ili polisa za slične vrste rizika kao sto je osiguranje vozila za pojedine vrste automobila, osiguranje od krađe u domaćinstvu ili osiguranje jedne porodične kuće od štete prouzrokovane vodom.

Posmatraćemo kratkoročne polise osiguranja koje su svojstvene neživotnom osiguranju. Dakle, polisa traje relativno kratko, najčešće godinu dana, i to vreme je unapred fiksirano. Osiguranik plaća premiju osiguravaču, tj. osiguravajućem društvu, a za uzvrat osiguravač isplaćuje štete nastale po polisi za vreme trajanja polise. Rizik uključuje kako individualnu polisu, tako i određenu grupu polisa. Pretpostavićemo da je trajanje polise jedna godina. Slučajna promenljiva S će u daljem radu označavati ukupnu štetu koju isplaćuje osiguravač godišnje po određenom riziku. Konstruisaćemo modele za tu slučajnu promenljivu. Baziraćemo se na model kolektivnog rizika koji se može proširiti na model individualnog rizika. Problemi koje ćemo proučavati su momenti i raspodela slučajne promenljive S.

Postoje tri pretpostavke u modelu:

1. Proces prebrajanja zahteva, N, u posmatranom vremenskom intervalu je slučajna promenljiva. Zahtevi pristižu u vremenima T_i za koje važi $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots$. Ta vremena nazivamo vremena dospevanja zahteva ili vremena pristizanja zahteva ili jednostavno, dospeća (*claim arrival times*).

2. Pristizanje i-tog zahteva u vremenu T_i prouzrokuje isplatu štete u iznosu X_i. Niz $\{X_i\}$ je niz iid[1] nenegativnih slučajnih promenljivih. Ove slučajne promenljive nazivamo veličinama (iznosima) zahteva (*claim sizes*).
3. Proces veličine zahteva X_i i proces pristizanja zahteva T_i su međusobno nezavisni.

Prve dve pretpostavke su sasvim prirodne sa intuitivne tačke gledišta, dok je treća postavljena zarad matematičke pogodnosti. Iid osobina veličine zahteva, X_i, ukazuje na činjenicu da se u portfoliu nalazi homogena probabilistička struktura.

Neka je $T_0 = 0$. Definišemo *proces broja zahteva*:

$$N(t) = max\{i \geq 0 : \ T_i \leq t\}, \qquad t \geq 0$$

tj. $N = (N(t))_{t\geq 0}$ je proces prebrajanja na intervalu [0, ∞), gde je $N(t)$ broj zahteva koji su dospeli do trenutka *t*.

Glavni objekat interesovanja sa stanovišta osiguravajućeg društva je *proces ukupne sume isplaćenih odšteta :*

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i = \sum_{i=1}^{\infty} X_i I_{[0,t]}(T_i), \quad t \geq 0.$$

Slučajna promenljiva I_A je *indikator proizvoljnog skupa A*:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Proces $S = (S(t))_{t\geq 0}$ je slučajan proces parcijalne sume što ukazuje na činjenicu da je deterministički indeks n parcijalne sume $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ zamenjen slučajnom promenljivom $N(t)$:

$$S(t) = X_1 + \cdots + X_{N(t)} = S_{N(t)}, \quad t \geq 0.$$

On se često naziva i *složeni (zbirni) proces.* Primetićemo da proces ukupne sume zahteva S deli različite osobine sa procesom parcijalne sume. Na primer, asimptotske osobine kao što su centralna granična teorema i zakon velikih brojeva ispunjene su za oba procesa što ćemo i uočiti u daljem radu. Premetimo i da trejektorija procesa N i odgovarajuća trajektorija procesa S imaju „skokove“ u istim vremenskim trenucima T_i, veličine 1 za N i veličine X_i za S.

[1] Engl. Independent and Identically Distributed; sr. nezavisne i jednako raspodeljene (sa istom raspodelom)

2

Modeli procesa broja zahteva za isplatu štete

Pre svega posmatrajmo proces prebrajanja zahteva $\{N(t), t \geq 0\}$. Za svako $t \geq 0$, primetimo da je $N(t,\ \cdot)$ slučajna promenljiva na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Primetimo da proces prebrajanja $N(t)$ zadovoljava:

- $N(t) \geq 0$
- $N(t)$ pripada skupu celih brojeva
- Ako je $s < t$, tada $N(s) \leq N(t)$
- Za $s < t$, $N(t) - N(s)$ predstavlja broj događaja u intervalu $(s, t]$.

Kako bismo došli do preciznijih informacija o slučajnoj promenljivoj S, obradićemo pojedine procese prebrajanja. U zavisnosti od izbora modela za proces prebrajanja N dobijamo različite rezultate koji su od izuzetnog značaja za poslovanje osiguravajućeg društva.

2.1 Poasonov proces

U ovom poglavlju razmatramo najčešći proces prebrajanja zahteva: *Poasonov proces*. Dugi niz godina on se koristi u primenjenoj verovatnoći i u teoriji stohastičkih procesa. Poasonov proces ima najpoželjnije teorijske osobine, a jedna od njih je i mogućnost eksplicitnog izvođenja konačno-dimenzionalnih raspodela. Filip Lundberg je već 1903. godine u svom radu iskoristio Poasonov proces kao model za proces prebrajanja zahteva N. Kasnije, 1930., Harald Kramer je značajno razvio teoriju rizika koristeći proces ukupnog iznosa zahteva S gde zahtevi pristižu u vremenskim trenucima T_i koji su generisani Poasonovim procesom. Iz istorijskih razloga, ali i zbog korisnih matematičkih osobina, Poasonov proces ima značajnu ulogu u matematici osiguranja.

2.1.1 Definicija i osnovne osobine

Navešćemo neke od osobina procesa prebrajanja N koje ćemo uzeti u obzir prilikom formulisanja modela za proces prebrajanja zahteva.

(1) $N(0) \equiv 0$. Za svako $t \geq 0$, $N(t)$ je nenegativna celobrojna slučajna promenljiva.

(2) Ako je $0 \leq s < t$ tada je $N(s) \leq N(t)$. Primetimo da $N(t) - N(s)$ predstavlja broj zahteva u vremenskom intervalu $(s, t]$. Dakle, N je neopadajući proces.

(3) Proces $\{N(t), t \geq 0\}$ ima nezavisne priraštaje, odnosno ako je $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ tada su $N(t_1)$, $N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ nezavisne slučajne promenljive, za svako $n = 1, 2, \ldots$. Drugim rečima, brojevi zahteva koji stižu u disjunktnim vremenskim intervalima su nezavisni.

(4) Proces $\{N(t), t \geq 0\}$ ima stacionarne priraštaje, tj. za $0 \leq s < t, h > 0$ slučajne promenljive $N(t) - N(s)$ i $N(t+h) - N(s+h)$ imaju istu raspodelu. To znači da verovatnoća pojave određenog broja zahteva u bilo kom vremenskom intervalu zavisi samo od dužine tog intervala.

(5) Verovatnoća da dva ili više zahteva pristigne u veoma kratkom vremenskom intervalu je zanemarljivo mala, tj.

$$P(N(h) \geq 2) = o(h), \quad \text{kad} \quad h \to 0.$$

Za proizvoljnu funkciju $f(\cdot)$ kažemo da je $o(h)$ ako je

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$$

(6) Postoji $\lambda > 0$ takvo da je

$$P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h), \quad \text{kad } h \to 0.$$

Broj λ predstavlja stopu pristizanja zahteva. Dakle, verovatnoća da u jako kratkom vremenskom intervalu pristigne tačno jedan zahtev je približno proporcionalna dužini tog intervala.

Definicija 2.1.1 (Poasonov proces)

Proces prebrajanja $\{N(t), t \geq 0\}$ *za koji važe hipoteze* (1)-(6) *je* Poasonov proces sa parametrom λ.

U formulisanju modela poželjno je da su hipoteze realne i jednostavne. Pod „realnim“ podrazumevamo da postulati treba da obuhvate bitne odlike problema koji se izučava. „Jednostavnost“ ukazuje na potrebu da pretpostavke budu matematički pogodne. Za izabrani model teorijske pretpostavke i njihove implikacije treba da budu matematički korisne, što je prednost Definicije 2.1.1.

Sada ćemo dati i drugu definiciju Poasonovog procesa.

Definicija 2.1.2 (Poasonov proces)

Proces prebrajanja $\{N(t), t \geq 0\}$ *je* (homogeni) Poasonov proces *sa stopom* λ, $\lambda > 0$ *ako:*

(i) $N(0) = 0$

(ii) *Proces ima nezavisne priraštaje*

(iii) *Broj događaja (pristiglih zahteva) u bilo kom vremenskom intervalu dužine* t *ima Poasonovu raspodelu sa parametrom* λt. *Dakle, za svako* $s, t \geq 0$

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0,1, \ldots$$

Ukoliko proveravamo da li je neki proces prebrajanja Poasonov, primetimo da uslove *(i)* i *(ii)* nije teško proveriti. Međutim, nije tako jednostavno proveriti da li je uslov *(iii)* zadovoljen. Stoga je Definicija 2.1.1 korisnija.

Veličina λ je *intenzitet* ili *stopa* homogenog Poasonovog procesa. Ako je $\lambda = 1$, N se naziva *standardni homogeni Poasonov proces*.

Radi jednostavnijeg zapisa pojednostavićemo neke oznake. Za proizvoljnu realnu funkciju na intervalu [0, ∞) pišemo

$$f(s,t] = f(t) - f(s), \quad 0 \leq s < t < \infty.$$

S obzirom da slučajna promenljiva $N(t)$ ima Poasonovu raspodelu sa parametrom λt, možemo odrediti očekivanje i disperziju ovog procesa.

$$E\big(N(t)\big) = D\big(N(t)\big) = \lambda t$$

Neopadajuću, sa desne strane neprekidnu funkciju $\mu : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\mu(0) = 0$, takvu da priraštaji $N(s,t]$ za $0 < s < t < \infty$ imaju Poasonovu raspodelu $\mathcal{P}(\mu(s,t])$, nazivamo *funkcija srednje vrednosti* procesa N.

Budući da je $N(0) = 0$ i $\mu(0) = 0$, važi

$$P(N(t) = n) = P(N(t) - N(0) = n) = P(N(0,t] = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Odnosno, $N(t) = N(0,t]$ ima Poasonovu $\mathcal{P}(\mu(0,t]) = \mathcal{P}(\mu(t))$ raspodelu.

Sada ćemo izvesti konačno-dimenzionalnu raspodelu Poasonovog procesa.
Primetimo da za $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$,

$$\big(N(t_1), N(t_2), \dots, N(t_n)\big) =$$

$$= (N(t_1), N(t_1) + N(t_1,t_2], N(t_1) + N(t_1,t_2] + N(t_2,t_3], \dots, \sum_{i=1}^{n} N(t_{i-1},t_i])$$

pri čemu bilo koja slučajna promenljiva sa desne strane ima Poasonovu raspodelu.
Dalje ćemo koristiti osobinu o nezavisnosti priraštaja procesa N:
za bilo koji ceo broj $k_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$

$$P(N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_1 + k_2, \dots, N(t_n) = k_1 + \cdots + k_n)$$

$$= P(N(t_1) = k_1, N(t_1,t_2] = k_2, \dots, N(t_{n-1},t_n] = k_n)$$

$$= e^{-\mu(t_1)}\frac{\big(\mu(t_1)\big)^{k_1}}{k_1!} e^{-\mu(t_1,t_2]}\frac{(\mu(t_1,t_2])^{k_2}}{k_2!} \dots e^{-\mu(t_{n-1},t_n]}\frac{(\mu(t_{n-1},t_n])^{k_n}}{k_n!}$$

$$= e^{-\mu(t_n)}\frac{\big(\mu(t_1)\big)^{k_1}}{k_1!}\,\frac{(\mu(t_1,t_2])^{k_2}}{k_2!}\dots\frac{(\mu(t_{n-1},t_n])^{k_n}}{k_n!}.$$

2.1.2 Homogeni i nehomogeni Poasonov proces

Primetimo da je u slučaju homogenog Poasonovog procesa parametar $\lambda > 0$ konstanta. Međutim u praksi ovaj parametar uglavnom zavisi od vremena. Na primer, postoje situacije kada pristizanje zahteva za isplatu štete zavisi od godišnjeg doba i sl. Stoga proširujemo koncept homogenog Poasonovog procesa dopuštajući da stopa pristizanja zahteva λ bude funkcija vremena t. Nehomogeni Poasonov proces se često naziva i nestacionarni.

Definicija 2.1.3 (Nehomogeni Poasonov proces)

Proces prebrajanja $\{N(t), t \geq 0\}$ *je* nehomogeni Poasonov proces *sa parametrom* $\lambda(t)$, $t \geq 0$, *ako važi:*

(i) $N(0) = 0$

(ii) $N(t)$ *ima nezavisne priraštaje*

(iii) $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

(iv) $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$.

Tvrđenje 2.1.1

Ako je $\{N(t), t \geq 0\}$ *nehomogeni Poasonov proces sa funkcijom intenziteta* $\lambda(t)$, *tada za svako* $0 \leq s < t$ *važi:*

$$N(s+t) - N(s) : \mathcal{P}(\mu(s+t) - \mu(s))$$

gde je μ funkcija srednje vrednosti

$$\mu(s) \coloneqq \int_0^s \lambda(y)dy.$$

Dakle, proces sa linearnom funkcijom srednje vrednosti μ nazivamo *homogeni Poasonov proces*, a u suprotnom *nehomogeni*.

Uopšteno govoreći, N ima funkciju intenziteta ili funkciju stope λ ako je μ apsolutno neprekidno, tj. za svako $s < t$ priraštaj $\mu(s,t]$ predstavljamo na sledeći način:

$$\mu(s,t] = \int_s^t \lambda(y)dy,$$

za neke nenegativne merljive funkcije λ.

Funkcija srednje vrednosti μ može se posmatrati i kao „unutrašnji sat" ili operaciono vreme Poasonovog procesa.. Ako je N homogeno, vreme teče linearno:

$$\mu(s,t] = \mu(s+h, t+h] \text{ za proizvoljno } h > 0 \text{ i } 0 \leq s < t < \infty.$$

Intuitivno, zahtevi pristižu skoro uniformno tokom vremena. Videćemo kasnije da je ovakvo intuitivno shvatanje podržano takozvanom statistikom poretka Poasonovog procesa. Ako N ima funkciju intenziteta λ koja nije konstantna, vreme se „usporava" ili „ubrzava" prema redu veličine $\lambda(t)$. Sa aspekta osiguranja, nekonstantno λ može da se odnosi na sezonske trendove. Na primer, zbog loših vremenskih uslova, više saobraćajnih nezgoda se dešava zimi nego leti. Trendovi takođe mogu da se odnose na povećanje učestalosti zahteva (posebno velikih) u poslednjih nekoliko godina. Takav efekat je primećen kod osiguranja od olujnih vetrova u Evropi i javlja se u kontekstu klimatskih promena.

Uočimo da homogeni Poasonov proces sa funkcijom intenziteta λ ima:

(1) Càdlàg[2] model trajektorija, tj. trajektorije $(N(t,\omega))_{t\geq 0}$ procesa N su neprekidne s desna za $t > 0$.
(2) Počinje od nule
(3) Ima nezavisne i stacionarne priraštaje
(4) $N(t)$ ima $\mathcal{P}(\lambda t)$ raspodelu za svako $t > 0$.

Càdlàg osobina je ništa drugo nego standardna osobina i sa stanovišta teorijske matematike, koja između ostalog, obezbeđuje osobinu merljivosti stohastičkog procesa N u određenim prostorima funkcija.

Nezavisnost priraštaja ukazuje na činjenicu da za svako $0 \leq s < t$ i $h > 0$ procesi $N(s,t]$ i $N(s+h, t+h]$ imaju istu raspodelu:

$$N(s,t], N(s+h, t+h]\colon\ \mathcal{P}\big(\lambda(t-s)\big),$$

tj. Poasonov parameter priraštaja zavisi samo od dužine intervala, a ne od njegovog položaja na vremenskoj osi.

Proces sa osobinama (1)-(3) na intervalu $[0,\infty)$ naziva se *Levijev proces*. Homogeni Poasonov proces je jedan od najvažnijih primera Levijevog procesa sa primenama u najrazličitijim oblastima kao što su teorija čekanja u redu, finansije, osiguranje, stohastičke mreže itd. Drugi važan primer Levijevog procesa je Braunovo kretanje. Nasuprot Poasonovom procesu koji je tzv. proces skokova, Braunovo kretanje ima neprekidnu trajektoriju sa verovatnoćom 1 i njegovi priraštaji $B(s,t]$ imaju normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s))$ za svako $\sigma > 0$.

Homogeni i nehomogeni Poasonov proces su veoma blisko povezani. Ukazaćemo na transformaciju homogenog u nehomogeni Poasonov proces, i obrnuto.

---

[2] Càdlàg - franc. continu à droite, limite à gauche; sr. neprekidna zdesna, sa levim limesom

Neka je N Poasonov proces na [0,∞) sa funkcijom srednje vrednosti μ. Krenimo od standardnog homogenog Poasonovog procesa $\widetilde{N}$ i definišimo $\widehat{N}(t)$ kao

$$\widehat{N}(t) := \widetilde{N}(\mu(t)), \quad t > 0.$$

Nije teško primetiti da je $\widehat{N}$ ponovo Poasonov proces na [0,∞). Uočimo da se càdlàg osobina od μ koristi kako bi se obezbedila càdlàg osobina trajektorije $\widehat{N}(t, \omega)$. Pošto je

$$\hat{\mu}(t) = E(\widehat{N}(\mu(t))) = \mu(t), \qquad t \geq 0,$$

i kako je raspodela Poasonovog procesa određena njegovom funkcijom srednje vrednosti $\hat{\mu}$, sledi da procesi N i $\widehat{N}$ imaju jednake konačno-dimenzionalne raspodele. Otuda se procesi N i $\widehat{N}$ ne razlikuju sa stanovišta verovatnoća, u smislu Kolmogorove teoreme o konzistentnosti. Štaviše, trajektorije procesa $\widehat{N}$ su càdlàg kao što je zahtevano u definiciji Poasonovog procesa.

Sada pretpostavimo da N ima neprekidnu, rastuću funkciju srednje vrednosti μ. Ova osobina je zadovoljena ako N ima skoro svuda pozitivnu funkciju intenziteta λ. Tada postoji inverz μ^{-1} od μ.
Može se pokazati da je proces $\widetilde{N}(t) = \widetilde{N}(\mu^{-1}(t))$ standardni homogeni Poasonov proces na [0, ∞) ako je $\lim_{t\to\infty} \mu(t) = \infty$. Međutim, ako je $\lim_{t\to\infty} \mu(t) = y_0 < \infty$ za neko $y_0 > 0$, μ^{-1} je definisano na $[0, y_0)$ i $\widetilde{N}(t) = \widetilde{N}(\mu^{-1}(t))$ zadovoljava osobine standardnog, homogenog Poasonov procesa isključivo na intervalu $[0, y_0)$.

Tvrđenje 2.1.2 (Poasonov proces kad vreme nije konstanta)
Neka je μ funkcija srednje vrednosti Poasonovog procesa N i neka je $\widetilde{N}$ standardni, homogeni Poasonov proces. Tada važi sledeće:

(1) *Proces $(\widetilde{N}(\mu(t)))_{t\geq 0}$ je Poasonov proces sa funkcijom srednje vrednosti μ.*
(2) *Ako je μ neprekidna, rastuća funkcija i $lim_{t\to\infty} \mu(t) = \infty$, tada je $(N(\mu^{-1}(t)))_{t\geq 0}$ standardni homogeni Poasonov proces.*

Ovaj rezultat, koji sledi direktno iz definicije Poasonovog procesa, dozvoljava u najvećem broju slučajeva iz praktičnog interesa prebacivanje sa nehomogenog na homogeni Poasonov proces putem jednostavne promene vremena. On takođe sugeriše da se na jednostavan način trajektorije nehomogenog Poasonovog procesa predstave pomoću trajektorija homogenog Poasonovog procesa. U kontekstu osiguranja, obično se susrećemo sa nehomogenim procesom pristizanja zahteva. Navedena teorija dozvoljava da se napravi „operativna vremenska promena“ ka homogenom modelu čija je teorija mnogo pristupačnija.

Primer 2.1.1 (*Kramer-Lundbergov model*)
Najvažniju ulogu u matematici osiguranja igra homogeni Poasonov proces. Ako za proces prebrajanja zahteva uzmemo homogeni Poasonov proces, rezultirajući model koji kombinuje iznos zahteva i vreme pristizanje zahteva naziva se *Kramer-Lundbergov model*. Kramer-Lundbergov model je jedan od najpopularnijih i najkorisnijih modela u matematici neživotnog osiguranja. Uprkos njegovoj jednostavnosti, on opisuje neke ključne karakteristike procesa ukupne sume zahteva koji se uočava u praksi.
Dakle, u Kramer-Lundbergovom modelu važi:

- Zahtevi se realizuju u trenucima pristizanja $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots$ homogenog Poasonovog procesa $N(t) = max\{i \geq 0 : \ T_i \leq t\}, \quad t \geq 0$,
- Pristizanje i-tog zahteva u trenutku T_i utiče na veličinu zahteva X_i. Niz (X_i) predstavlja niz nezavisnih nenegativnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom.
- Nizovi (T_i) i (X_i) su nezavisni. Posebno, N i (X_i) su nezavisni.

Proces ukupne sume zahteva S u Kramer-Lundbergovom modelu takođe se zove *složeni Poasonov proces.* Dakle, proces ukupne sume zahteva u okviru Kramer-Lundbergovog modela je proces sa nezavisnim, stacionarnim priraštajima, počinje od nule i ima càdlàg trajektorije. U poglavlju 2.1.6 detaljnije ćemo obraditi ovaj model.

2.1.3 Markovsko svojstvo Poasonovog procesa

Poasonovi procesi predstavljaju posebnu klasu Markovskih procesa na intervalu [0,∞) prostora $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$. Ovo je jednostavna posledica osobine nezavisnih priraštaja. Dakle, Poasonov proces ima Markovsko svojstvo, tj. za svako $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ i neopadajuće prirodne brojeve $k_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n, \ n \geq 2$,

$$P(N(t_n) = k_n \,|N(t_1) = k_1, \dots, N(t_{n-1}) = k_{n-1}) = P(N(t_n) = k_n \,|N(t_{n-1}) = k_{n-1}).$$

Teorija Markovskih procesa ne igra jako značajnu ulogu u teoriji neživotnog osiguranja, nasuprot ulozi u modernom životnom osiguranju gde su Markovski modeli fundamentalni.

Međutim, funkcija intenziteta Poasonovog procesa N ima lepo tumačenje kao funkcija intenziteta Markovskog procesa N.

Pre nego što preciziramo ovo izlaganje, podsetimo se da su veličine $p_{k,k+h}(s,t)$ takve da važi

$$p_{k,k+h}(s,t) = P(N(t) = k + h \mid N(s) = k) = P(N(t) - N(s) = h),$$

$$0 \leq s < t, \quad k, h \in \mathbb{N}_0$$

nazivaju *verovatnoće prelaza* (iz stanja k u stanje $k + h$, od trenutka s do trenutka t) Makovskog procesa N na prostoru $\mathbb{N}_0$.

Budući da je trajektorija $(N(t,\omega))_{t \geq 0}$ skoro svuda rastuća, potrebno je samo razmotriti prelaze procesa Markova sa k na $k + h$ za $h \geq 0$. Verovatnoće prelaza usko su povezane sa intenzitetima koji su dati u obliku limesa

$$\lambda_{k,k+h}(t) = \lim_{s \to 0} \frac{p_{k,k+h}(t, t+s)}{s} \ ,$$

pod uslovom da postoji analogija sleva, da je limes konačan i da se ovi limesi poklapaju.

Tvrđenje 2.1.3 (Odnos funkcije intenziteta Poasonovog procesa i njegovih Markovskih intenziteta)

Neka je dat Poasonov proces $(N(t))_{t\geq 0}$ *sa neprekidnom funkcijom intenziteta* λ *na* $[0,\infty)$. *Tada, za* $k \geq 0$,

$$\lambda_{k,k+h}(t) = \begin{cases} \lambda(t) & ako\, je\;\; h = 1, \\ 0 & ako\, je\;\; h > 1. \end{cases}$$

Rečima, funkcija intenziteta $\lambda(t)$ Poasonovog procesa N nije ništa drugo do intenzitet procesa Markova N za prelaz sa koraka k na $k + 1$.

Funkcija intenziteta procesa Markova je kvantitativna mera verovatnoće da Markovski proces N ima skokove na malom vremenskom intervalu. Direktna posledica Tvrđenja 2.1.3 je ta da je malo verovatno da Poasonov proces sa neprekidnom funkcijom intenziteta λ ima skokove veće od 1. Zaista, uzimajući u obzir verovatnoću da N ima skok veći od 1 na intervalu $(t, t + s]$ za neko $t \geq 0,\ s > 0$:

$$P(N(t, t+s] \geq 2) = 1 - P(N(t, t+s] = 0) - P(N(t, t+s] = 1)$$

$$= 1 - e^{-\mu(t,t+s]} - \mu(t, t+s] e^{-\mu(t,t+s]} \qquad (2.1.1)$$

Pošto je λ neprekidno,

$$\mu(t, t+s] = \int_t^{t+s} \lambda(y)\, dy = s\,\lambda(t)\,(1 + o(1)) \to 0 \quad \text{kad} \quad s \to 0.$$

Štaviše, Tejlorov razvoj za $x \to 0$ daje da je $e^x = 1 + x + o(x)$. Prema tome iz (2.1.1) možemo zaključiti da, kad $s \to 0$,

$$P(N(t, t+s] \geq 2) = o(\mu(t, t+s]) = o(s). \tag{2.1.2}$$

Jasno je da je

$$P(N(t, t+s] = 1) = s\,\lambda(t)\,\big(1 + o(1)\big). \tag{2.1.3}$$

Relacije (2.1.2) i (2.1.3) obezbeđuju da je malo verovatno da Poasonov proces N sa neprekidnom funkcijom intenziteta λ ima skok veličine veće od 1.

2.1.4 Raspodela vremena između dva uzastopna dospeća (Interarrival time distribution)

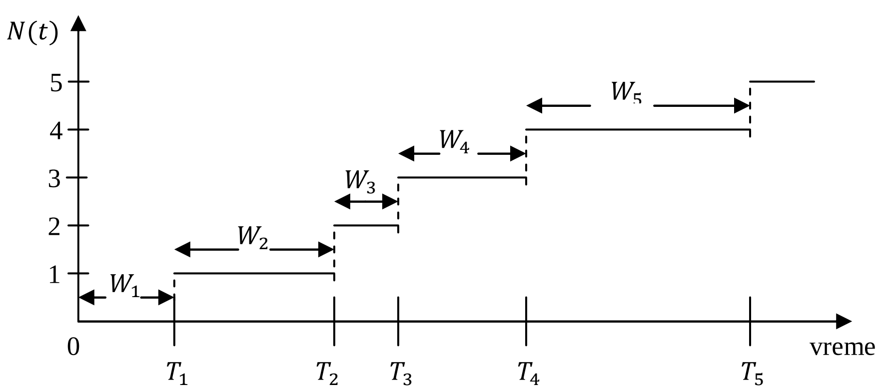
Neka je $\{N(t), t \geq 0\}$ Poasonov proces sa stopom $\lambda > 0$ i neka je $T_0 \equiv 0$.
Za $n = 1,2,\ldots$ definišemo

$$T_n = inf\{t \geq 0 : N(t) = n\} = vreme\ pristizanja\ n - tog\ zahteva$$

odnosno vreme čekanja do prispeća n-tog zahteva.
Dalje neka je

$$W_i = T_i - T_{i-1}\,, \quad i = 1,2,\ldots$$

tj., $W_i = vreme\ između\ prispeća\ (i-1).\ $ i $i - tog\ zahteva.$
Dakle, slučajne promenljive $T_0, T_1, T_2, \ldots$ nazivamo *vremena dospeća* (ili vremena čekanja), dok niz $\{W_i\}$, $i = 1,2,\ldots$ nazivamo niz *vremena između dva (uzastopna) dospeća*.



Grafik 2.1.1

Za svako $s > 0$ primetimo da je $\{T_1 > s\} = \{N(s) = 0\}$. Stoga je

$$P(W_1 > s) = P(T_1 > s) = P(N(s) = 0) = e^{-\lambda s}$$

Sledi da je $P(W_1 \leq s) = 1 - e^{-\lambda s}$. Dakle, slučajna promenljiva W_1 ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelu. Za svako $t \geq 0$ i svako $n \geq 1$, događaj $\{W_n > t\}$ je ekvivalentan sa događajem $\{N(T_{n-1} + t) - N(T_{n-1}) = 0\}$. Zaista, W_n može biti duže od vremena t ako i samo ako n-ti događaj se nije pojavio tokom vremena t nakon pojave $(n-1)$. događaja u trenutku T_{n-1}. Kako Poasonov proces ima nezavisne priraštaje, promene vrednosti procesa u disjunktnim vremenskim intervalima su nezavisne. Na osnovu ekvivalencije događaja, dobijamo da sau W_i nezavisne slučajne promenljive. Dalje, koristeći stacionarnost priraštaja Poasonovog procesa

$$P(W_n > t) = P(N(T_{n-1} + t) - N(T_{n-1}) = 0) = e^{-\lambda t},$$

što implicira da sva vremena između dospeća W_i imaju identičnu eksponencijalnu raspodelu

$$F_{W_n}(x) = P(W_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad n = 1,2, \dots$$

Sada ćemo razmotriti zajedničku raspodelu od (T_1, T_2). Neka $F_{(T_1,T_2)}$ predstavlja zajedničku funkciju raspodele od (T_1, T_2).

$$F_{(T_1,T_2)}(t_1, t_2) = P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2)$$

Za $0 \leq t_1 \leq t_2$,

$$\{T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2\} = \{N(t_1) \geq 1, N(t_2) \geq 2\}$$

$$= \{N(t_1) = 1, N(t_2) - N(t_1) \geq 1\} \cup \{N(t_1) \geq 2\}$$

gde unija predstavlja uniju nezavisnih događaja.

Koristeći nezavisnost i stacionatnost priraštaja procesa N dobijamo:

$$F_{(T_1,T_2)}(t_1, t_2) = P(N(t_1) = 1, N(t_2) - N(t_1) \geq 1) + P(N(t_1) \geq 2)$$

$$= \lambda t_1 e^{-\lambda t_1}\left(1 - e^{-\lambda(t_2 - t_1)}\right) + \left[1 - \left(e^{-\lambda t_1} + \lambda t_1 e^{-\lambda t_1}\right)\right]$$

$$= -\lambda t_1 e^{-\lambda t_2} + H(t_1)$$

gde je H funkcija koja zavisi samo od t_1.

Odgovarajuća zajednička funkcija gustine $f_{(T_1,T_2)}$ od (T_1, T_2) data je sa:

$$f_{(T_1,T_2)}(t_1,t_2) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1} F_{(T_1,T_2)}(t_1,t_2)$$

$$= \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda t_2}, & \text{ako} \quad 0 < t_1 < t_2 < \infty \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Da bismo odredili zajedničku gustinu od (W_1, W_2) na osnovu pokazanog, uočimo da je

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 - T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}. \qquad (2.1.4)$$

Linearna transformacija data (2×2) matricom u izrazu (2.1.4), ima determinantu koja je jednaka 1 i transformiše oblast $\{(t_1, t_2): 0 < t_1 < t_2 < \infty\}$ (u 1-1 smislu) u oblast $\{(w_1, w_2): w_1 > 0, w_2 > 0\}$. Stoga je zajednička funkcija gustine $f_{(W_1,W_2)}$ od (W_1, W_2) data sa

$$f_{(W_1,W_2)}(w_1,w_2) = f_{(T_1,T_2)}(w_1, w_1 + w_2)$$

$$= \begin{cases} \left(\lambda e^{-\lambda w_1}\right)\left(\lambda e^{-\lambda w_2}\right), & \text{ako} \quad w_1 > 0, w_2 > 0 \\ 0\,, & \text{inače} \end{cases}.$$

Tako su W_1, W_2 nezavisne slučajne promenljive, svaka sa eksponencijalnom raspodelom sa parametrom λ. Analogno se može pokazati i opšti slučaj.

Tvrđenje 2.1.4 (Raspodela vremena između dva uzastopna prispeća zahteva)
Neka je $\{N(t), t \geq 0\}$ homogeni Poasonov proces sa stopom $\lambda > 0$. Neka $W_1, W_2, \dots$ predstavljaju vremena između uzastopnih dospeća zahteva. Tada je $\{W_i\}, i = 1,2, \dots$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih koje imaju istu $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelu.

Uzimajući u obzir gore navedeno, dokaz za slučaj $n = 2$ je jasan. Ukažimo pre svega na to da je zajednička funkcija raspodele od $T_1, T_2, \dots, T_n$ data sa

$$F_{(T_1,T_2,\dots,T_n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) = -\lambda^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{n-1} t_i \right) e^{-\lambda t_n} + H(t),$$

ako je $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$, pri čemu je funkcija $H(\cdot)$ takva da je

$$\partial^n H / (\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n) = 0.$$

U suštini, $H(\cdot)$ je suma konačnog broja izraza gde je svaki od njih proizvod nekog stepena od t_i i $e^{-\lambda t_j}$ sa najmanje jednim $t_k, k \geq 2$ koje nedostaje. Izvođenje pomenutog je tehnički deo dokaza koji nećemo ispisivati.
Na kraju dobijamo da je zajednička funkcija gustine data od $T_1, T_2, \dots, T_n$ data sa

$$f_{(T_1,T_2,\dots,T_n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda t_n} & \text{ako } \ 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty \\ 0\,, & \text{inače} \end{cases}.$$

Sada ćemo navedeno razmotiriti iz drugog ugla, koristeći funkciju srednje vrednosti.
Pre svega, primetimo da Poasonov proces sa stopom $\lambda > 0$ možemo predstaviti na sledeći način:

$$N(t) = max\{n \geq 1 : \ T_n \leq t\}\,, t \geq 0, \text{ gde je } \ T_n = W_1 + \cdots + W_n\,, \ n \geq 1.$$

pri čemu $W_i : \mathcal{E}(\lambda), i = 1, \dots, n$.
Na osnovu Tvrđenja 2.1.2, nehomogeni Poasonov proces N sa funkcijom srednje vrednosti μ interpretiramo kao vremenski izmenjen homogen Poasonov proces $\widetilde{N}$:

$$(N(t))_{t\geq 0} = (\widetilde{N}(\mu(t)))_{t \geq 0}$$

gde se znak „=“ odnosi na jednakost u smislu raspodela.
Specijalno, neka $(\tilde{T}_i)$ bude niz dolazaka od $\widetilde{N}$ i neka je μ rastuće i neprekidno. Tada postoji μ^{-1} i

$$N'(t) = max\{i \geq 1 : \ \tilde{T}_i \leq \mu(t)\} = max\{i \geq 1 : \ \mu^{-1}(\tilde{T}_i) \leq t\}, \ \ t \geq 0,$$

je prikaz od N u smislu identiteta konačno-dimenzionalnih raspodela, tj., $N = N'$.

Zbog toga i na osnovu prethodne priče, vremena pristizanja nehomogenog Poasonovog procesa sa funkcijom srednje vrednosti μ predstavljamo sa

$$T_n = \mu^{-1}(\tilde{T}_n), \quad \tilde{T}_n = \widetilde{W}_1 + \cdots + \widetilde{W}_n, \qquad n \geq 1, \tag{2.1.5}$$

gde su $\widetilde{W}_i$ nezavisne slučajne promenljive sa $\mathcal{E}(1)$ raspodelom.

Tvrđenje 2.1.5

Pretpostavimo da je N Poasonov proces na $[0,\infty)$ *sa skoro svuda neprekidnom, pozitivnom funkcijom intenziteta λ. Tada važe sledeći iskazi:*

(1) *Vektor vremena pristizanja zahteva $(T_1, \dots, T_n)$ ima gustinu:*

$$f_{T_1,\dots,T_n}(t_1, \dots, t_n) = e^{-\mu(t_n)} \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i) I_{\{0<t_1<\cdots<t_n\}}\,. \tag{2.1.6}$$

(2) *Vektor vremena koja proteknu između dva uzastopna prispeća zahteva* $(W_1, \dots, W_n) = (T_1, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1})$ *ima gustinu:*

$f_{W_1,\dots,W_n}(w_1, \dots, w_n) =$

$$= e^{-\mu(w_1+\cdots+w_n)} \prod_{i=1}^{n} \lambda(w_1 + \cdots + w_i), \quad w_i \geq 0. \tag{2.1.7}$$

Dokaz.

Pošto je funkcija intenziteta skoro svuda pozitivna i neprekidna, $\mu(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$ je rastuće i μ^{-1} postoji. Štaviše, μ je diferencijabilno i $\mu'(t) = \lambda(t)$. Koristićemo ove dve činjenice u onome što sledi.

(1) Počećemo sa standardnim homogenim Poasonovim procesom. Tada su njegova pristizanja $\tilde{T}_n$ data sa $\tilde{T}_n = \widetilde{W}_1 + \cdots + \widetilde{W}_n$ za standardni eksponencijalni niz $(\widetilde{W})_i$ čiji su elementi nezavisni i imaju jednake raspodele. Zajednička gustina od $(\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_n)$ je dobijena iz zajedničke gustine od $(\widetilde{W}_1, \dots, \widetilde{W}_n)$ primenom transformacije:

$$(y_1, \dots, y_n) \xrightarrow{S} (y_1, y_1 + y_2, \dots, y_1 + \cdots + y_n),$$

$$(z_1, \dots, z_n) \xrightarrow{S^{-1}} (z_1, z_2 - z_1, \dots, z_n - z_{n-1}).$$

Imajmo na umu da je $\det(\partial S(y)/\partial y) = 1$. Standardne tehnike za transformaciju gustine daju za $0 < t_1 < \cdots < t_n$,

$$f_{\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_n}(t_1, \dots, t_n) = f_{\widetilde{W}_1,\dots,\widetilde{W}_n}(w_1, w_2 - w_1, \dots, w_n - w_{n-1})$$

$$= e^{-w_1} e^{-(w_2 - w_1)} \dots e^{-(w_n - w_{n-1})} = e^{-w_n}.$$

Pošto μ^{-1} postoji, iz (2.1.5) zaključujemo da za $0 < t_1 < \cdots < t_n$,

$$P(T_1 \leq t_1, \dots, T_n \leq t_n) = P(\mu^{-1}(\tilde{T}_1) \leq t_1, \dots, \mu^{-1}(\tilde{T}_n) \leq t_n)$$

$$= P(\tilde{T}_1 \leq \mu(t_1), \dots, \tilde{T}_n \leq \mu(t_n))$$

$$= \int_0^{\mu(t_1)} \dots \int_0^{\mu(t_n)} f_{\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_n}(y_1, \dots, y_n)\, dy_n \dots dy_1$$

$$= \int_0^{\mu(t_1)} \dots \int_0^{\mu(t_n)} e^{-y_n}\, I_{\{y_1 < \cdots < y_n\}}\, dy_n \dots dy_1.$$

Uzimajući parcijalni izvod u odnosu na promenljive $t_1, \dots, t_n$ i označavajući to sa $\mu'(t_i) = \lambda(t_i)$, dobijamo tražene gustine (2.1.6).

(2) Relacija (2.1.7) sledi iz primene gore navedenih transformacija S i S^{-1} iz gustine od $(T_1, \dots, T_n)$:

$$f_{W_1,\dots,W_n}(w_1, \dots, w_n) = f_{T_1,\dots T_n}(w_1, w_1 + w_2, \dots, w_1 + \dots + w_n). \qquad \blacksquare$$

Iz (2.1.7) možemo zaključiti da zajednička gustina od $W_1, \dots, W_n$ može biti zapisana kao proizvod gustina W_i-ova ako i samo ako $\lambda(\cdot) \equiv \lambda$ za neku pozitivnu konstantu λ. To znači da su jedino u slučaju homogenog Poasonovog procesa vremena između dva dospeća zahteva $W_1, \dots, W_n$ nezavisna (i identički raspodeljena).
Ova činjenica je druga osobina koja izdvaja homogeni Poasonov proces u klasi svih Poasonovih procesa na intervalu $[0, \infty)$.

2.1.5 Osobina statistike poretka (Order statistics property)

U ovom poglavlju izučavamo jednu od najvažnijih osobina Poasonovog procesa koja ga u izvesnom smislu karakteriše. To je *osobina statistike poretka* koja je svojsvena još samo mešovitim Poasonovim procesom koji će biti razmatran u Poglavlju 2.3.
Pretpostavimo da su $X_1, \dots, X_n$ iid slučajne promenljive sa zajedničkom funkcijom raspodele F, definisanom na prostoru Ω. Definišemo nove slučajne promenljive na prostoru Ω, nazivajući ih *statistike poretka*, na sledeći način:
za $\omega \in \Omega$

$$X_{(1)}(\omega) = min\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$$
$$X_{(2)}(\omega) = drugi\ najmanji\ od\ \{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$$
$$\vdots$$
$$X_{(n)}(\omega) = max\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$$

tako da je sa verovatnoćom 1

$$X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}\,.$$

Tvrđenje 2.1.6 *Za* $0 \leq s \leq t$,

$$P(W_1 < s \mid N(t) = 1) = \frac{s}{t}\,,$$

što znači da je vreme dospeća uniformo raspoređeno na $(0, t)$ *s obzirom da je samo jedan zahtev pristigao u intervalu* $[0, t]$.

Dokaz.

Kako Poasonov proces ima nezavisne priraštaje,

$$P(W_1 < s \mid N(t) = 1) = \frac{P(W_1 < s\,, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)}$$

$$= \frac{P(N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)}$$

$$= \frac{P(N(s) = 1) \cdot P(N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)}$$

$$= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}\,,$$

tvrđenje je dokazano. ■

Postavlja se pitanje: Ako je $N(t) = n$, šta možemo reći o uslovnoj raspodeli od $T_1, T_2, \dots, T_n$?

Tvrđenje 2.1.7

Neka je $\{N(t), t \geq 0\}$, *i neka su* $T_1, T_2, \dots, T_n$ *vremena dospevanja zahteva. Za svako* $t > 0$, *i za svako* $n = 1,2, \dots$ *uslovna gustina od* $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ *za dato* $N(t) = n$ *je*:

$$f_{T_1, T_2, \dots, T_n}\big((s_1, s_2, \dots, s_n) \big| \, N(t) = n\big) = n! \cdot \frac{1}{t^n}\,,$$

za $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n < t$.

Dokaz.

Radi jednostavnosti dokazaćemo slučaj kad je $n = 2$. Opšti slučaj ostavljamo za kasnije. Neka je $0 < s_1 < s_2 < t$. Uzmimo $h_1, h_2 > 0$ dovoljno malo tako da $0 < s_1 < s_1 + h_1 < s_2 < s_2 + h_2 < t$. Zatim opet koristimo nezavisnost priraštaja i definiciju Poasonovog procesa kako bismo dobili

$$P(s_1 < T_1 < s_1 + h_1, s_2 < T_2 < s_2 + h_2 \mid N(t) = 2)$$

$$= \frac{1}{P(N(t)=2)} \, P(N(s_1)=0\,, N(s_1+h_1)-N(s_1)=1\,,$$

$$N(s_2)-N(s_1+h_1)=0\,, N(s_2+h_2)-N(s_2)=1\,,$$

$$N(t)-N(s_2+h_2)=0\,)$$

$$= \frac{e^{-\lambda s_1}\lambda h_1 e^{-\lambda(s_1+h_1-s_1)} e^{-\lambda(s_2-(s_1+h_1))}\lambda h_2 e^{-\lambda(s_2+h_1-s_2)} e^{-\lambda(t-(s_2+h_2))}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^2/2!}$$

$$= \frac{2!}{t^2} h_1 h_2\,.$$

Deljenjem sa $h_1 h_2$ i puštanjem $h_1 h_2 \to 0$ dobijamo traženi rezultat. ■

Sada posmatramo opšti slučaj.

Lema 2.1.1

Ako nezavisni i identički distribuirani X_i-ovi imaju gustinu f tada je gustina vektora $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ data sa

$$f_{X_{(1)},\dots,X_{(n)}}(x_1, \dots, x_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i)\, I_{\{x_1<\cdots<x_n\}}\,.$$

Napomena: U skladu sa formiranjem niza statistika, nosač vektora $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ je skup $C_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \le \cdots \le x_n\} \subset \mathbb{R}^n$, i stoga gustina $f_{X_{(1)},\dots,X_{(n)}}$ postaje nula van skupa C_n. Budući da postojanje gustine od X_i podrazumeva da su svi elementi nezavisnih i jednako distribuiranih uzoraka $X_1, \dots, X_n$ različiti skoro sigurno, znak $\le$ u definiciji skupa C_n može biti zamenjen znakom $<$.

Teorema 2.1.8 (Osobina statistike poretka Poasonovog procesa)

Posmatrajmo Poasonov proces $N = (N(t))_{t\ge 0}$ sa neprekidnom, skoro svuda pozitivnom funkcijom intenziteta λ i trenucima dospeća $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ skoro sigurno. Tada je uslovna raspodela od $(T_1, \dots, T_n)$ sa datim $\{N(t) = n\}$ jednaka raspodeli niza $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih promenljivih $X_1, \dots, X_n$ koje imaju zajedničku gustinu $\lambda(x)/\mu(t)$, $0 < x \le t$:

$$(T_1, \dots, T_n \mid N(t) = n) = \big(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}\big).$$

Drugim rečima, vektor sa leve strane ima uslovnu gustinu

$$f_{T_1,\dots,T_n}(x_1,\dots,x_n|N(t)=n)=\frac{n!}{(\mu(t))^n}\prod_{i=1}^{n}\lambda(x_i), \tag{2.1.8}$$

$$0<x_1<\cdots<x_n<t\,.$$

Dokaz.

Pokazujemo da limes

$$\lim_{h_i\to 0,i=1,\dots n}\frac{P(T_1\in(x_1,x_1+h_1],\dots,T_n\in(x_n,x_n+h_n]\mid N(t)=n)}{h_1\dots h_n} \tag{2.1.9}$$

postoji i da je neprekidna funkcija x_i-ova. Sličan dokaz se koristi za analogno tvrđenje za intervale $(x_i-h_i,x_i]$ sa istom graničnom funkcijom. Limes se može protumačiti kao gustina uslovne verovatnoće raspodele od $(T_1,\dots,T_n)$ za dato $\{N(t)=n\}$.
Pošto je $0<x_1<\cdots<x_n<t$, možemo odabrati dovoljno male h_i-ove tako da intervali $(x_i,x_i+h_i]\subset[0,t], i=1,\dots,n,$ budu disjunktni. Tada direktno sledi identitet

$$\{T_1\in(x_1,x_1+h_1],\dots,T_n\in(x_n,x_n+h_n],N(t)=n\}=$$

$$=\{N(0,x_1]=0,N(x_1,x_1+h_1]=1,N(x_1+\ h_1,x_2]=0,$$

$$N(x_2,x_2+h_2]=1,\dots,N(x_{n-1}+\ h_{n-1},x_n]=0,$$

$$N(x_n,x_n+h_n]=1,N(x_n+\ h_n,t]=0\}.$$

Tražeći verovatnoću obe strane i koristeći nezavisnost priraštaja Poasonovog procesa N, dobijamo

$$P(T_1\in(x_1,x_1+h_1],\dots,T_n\in(x_n,x_n+h_n],N(t)=n)$$

$$=P(N(0,x_1]=0)\;P(N(x_1,x_1+h_1]=1)\;P(N(x_1+\ h_1,x_2]=0)$$

$$P(N(x_2,x_2+h_2]=1)\dots\;P(N(x_{n-1}+\ h_{n-1},x_n]=0)$$

$$P(N(x_n,x_n+h_n]=1)P(N(x_n+\ h_n,t]=0)$$

$$=e^{-\mu(x_1)}\left[\mu(x_1,x_1+h_1]e^{-\mu(x_1,x_1+h_1]}\right]e^{-\mu(x_1+\ h_1,x_2]}$$

$$\left[\mu(x_2,x_2+h_2]e^{\mu(x_2,x_2+h_2]}\right]\dots e^{-\mu(x_{n-1}+\ h_{n-1},x_n]}$$

$$\left[\mu(x_n,x_n+h_n]e^{-\mu(x_n,x_n+h_n]}\right]e^{-\mu(x_n+\ h_n,t]}$$

$$=e^{-\mu(t)}\mu(x_1,x_1+h_1]\dots\mu(x_n,x_n+h_n].$$

Deleći sa $P(N(t) = n) = e^{-\mu(t)}\left(\mu(t)\right)^n/n!$ i sa $h_1, \dots, h_n$, dobijamo skaliranu uslovnu verovatnoću

$$\frac{P(T_1 \in (x_1, x_1 + h_1], \dots, T_n \in (x_n, x_n + h_n] \ |N(t) = n)}{h_1, \dots, h_n}$$

$$= \frac{n!}{(\mu(t))^n} \frac{\mu(x_1, x_1 + h_1]}{h_1} \dots \frac{\mu(x_n, x_n + h_n]}{h_n}$$

$$\to \frac{n!}{(\mu(t))^n} \lambda(x_1) \dots \lambda(x_n), \text{ kada } h_i \to 0, i = 1, \dots, n.$$

Imajući u vidu (2.1.9), ovo je željena relacija (2.1.8). U poslednjem koraku koristili smo neprekidnost od λ da pokažemo da je $\mu'(x_i) = \lambda(x_i)$. ■

Primer 2.1.2 (*Osobina statistike poretka homogenog Poasonovog procesa*)
Posmatramo homogen Poasonov proces sa intenzitetom $\lambda > 0$. Tada nam Teorema 2.1.8 daje zajedničku uslovnu gustinu vremena dospeća T_i:

$$f_{T_1,\dots,T_n}(x_1, \dots, x_n | N(t) = n) = n!\, t^{-n}, \qquad 0 < x_1 < \dots < x_n < t.$$

Osvrtom na Lemu 2.1.1 uveravamo se da je ovo zajednička gustina uniformnog niza slučajnih veličina $U_{(1)} < \dots < U_{(n)}$ nezavisnih promenljivih $U_1, \dots, U_n$ sa istom raspodelom. Prema tome, dato je n dospeća homogenog Poasonovog procesa u intervalu $[0, t]$ i ti momenti dospeća daju tačke uniformnog niza sličajnih veličina u $(0, t)$. Ova osobina ne zavisi od intenziteta λ. □
Sada na osnovu svega navedenog možemo dati sledeću teoremu.

Teorema 2.1.9
Neka je $\{N(t) : t \geq 0\}$ *vremenski homogeni Poasonov proces sa stopom* $\lambda > 0$, *i neka* $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ *označavaju vremena pristizanja zahteva u skladu sa* $N(\cdot)$. *Neka je* $\{X_i : i = 1, 2, \dots\}$ *iid niz nezavisan od procesa* $N(t)$. *Tada postoji niz* $\{U_j : j = 1,2, \dots\}$ *takav da:*

(1) $\{U_j\}$ *je niz iid slučajnih promenljivih koje imaju uniformnu* $\mathcal{U}(0,1)$ *raspodelu*

(2) *Familije* $\{U_j\}$, $\{X_i\}$ i $\{N(t)\}$ *su međusobno nezavisne*

(3) *Za svaku funkciju dve promenljive,* g, *važi*

$$\sum_{i=1}^{N(t)} g(T_i\,, X_i) = \sum_{i=1}^{N(t)} g(t\,U_i\,, X_i)\ , \quad t \geq 0$$

gde se znak „ = “ predstavlja jednakost raspodela verovatnoća.

Primer 2.1.3 (*Shot noise process*)

Ova vrsta stohastičkog procesa iskorišćena je u modeliranju električne struje. Elektroni pristižu u skladu sa homogenim Poasonovim procesom N sa stopom λ u vremenskim trenucima T_i. Dolazeći elektron stvara elektičnu struju čije je vreme pražnjenja opisano determinističkom funkcijom f pri čemu je $f(t) = 0$ za $t < 0$. Shot noise opisuje električnu struju u vremenu t nastalu pristizanjem elektrona tokom vremena t kao:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} f(t - T_i).$$

Uobičajni izbori za f su eksponencijalne funkcije $f(t) = e^{-\theta t}\, I_{[0,\infty)}(t),\ \theta > 0.$

Proširenje klasičnog shot noise procesa sa različitim primenama je proces:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i f(t - T_i),\ \ t \geq 0, \qquad (2.1.10)$$

gde važi:

- (X_i) niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom, nezavisan od (T_i)
- f je deterministička funkcija, pri čemu je $f(t) = 0$ za $t < 0$.

Na primer, ako pretpostavimo da su X_i-ovi pozitivne slučajne promenljive, $S(t)$ je generalizacija Kramer-Lunbergovog modela (Primer 2.1.1). Zaista, ako uzmemo da je $f = I_{[0,\infty)}$, tada je shot noise proces (2.1.10) ukupan iznos odšteta u Kramer-Lundbergovom modelu.

U kontekstu osiguranja, f takođe može predstavljati kašnjenje u izmirenju zahteva ili neki faktor diskontovanja. Kašnjenje u izmirenju zahteva za odštetu je na primer predstavljeno funkcijom f koja zadovoljava sledeće uslove:

- $f(t) = 0$ za $t < 0$,
- $f(t)$ je neopadajuća,
- $\lim_{t\to\infty} f(t) = 1$.

Nasuprot Kramer-Lundergovom modelu, gde je veličina odštete X_i isplaćena u trenutku T_i kada se i pojavljuje, opštija funkcija isplate $f(t)$ omogućava da se odloži isplata i brzina kojom se to desi zavisi od rasta funkcije f. Kašnjenje u izmirenju zahteva je pogodno sa tačke gledišta osiguravača. U međuvremenu svota novca koja nije isplaćena za izmirenje zahteva može biti investirana i možda donese neku dodatnu dobit.

Pretpostavimo da je iznos Y_i u trenutku T_i investiran u nerizičnu podlogu (ili je oročenen) sa konstantnom kamatnom stopom $r > 0$. (Y_i) je niz nezavisnih, jednako raspodeljenih i pozitivnih slučajnih promenljivih, i nizovi (Y_i) i (T_i) su nezavisni. Neprekidno kamaćenje daje iznos $e^{r(t-T_i)}Y_i$ u trenutku $t > T_i$. Za iznose Y_i koji su investirani u trenucima dospevanja T_i homogenog Poasonovog procesa, ukupna vrednost investicija u tenutku t data je sa

$$S_1(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} e^{r(t-T_i)} Y_i \,, \qquad t \geq 0.$$

Ovo je još jedan shot noise proces.

Alternativno, mogu nas zanimati sadašnje vrednosti isplata Y_i koje će biti ostvarene u budućim trenucima T_i. Tada je sadašnja vrednost u odnosu na vremenski okvir [0, t] data putem diskontovane sume

$$S_2(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} e^{-r(t-T_i)} Y_i \,, \qquad t \geq 0.$$

□

2.1.6 Kramer-Lundbergov model

U ovom poglavlju ćemo detaljnije obraditi ovaj klasičan i veoma svestran model u osiguranju. Kao što smo već naveli u primeru, zahtevi pristižu u vremenskim trenucima T_i u skladu sa homogenim Poasonovim procesom sa stopom $\lambda > 0$. Veličine zahteva X_i su iid nenegativne slučajne promenljive. Nizovi $\{X_i\}$ i $\{T_j\}$ su međusobno nezavisni.

Ukupan iznos isplaćenih odšteta do trenutka t u ovom modelu dat je sa

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \,, \quad t \geq 0.$$

Primetimo da je $\{S(t): t \geq 0\}$ primer složenog Poasonovog procesa.

Sada obratimo pažnju na diskontovanu sumu koja odgovara modelu iznad. Neka je $r > 0$ kamatna stopa. Definišemo

$$S_0(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} e^{-rT_i} X_i \,, \quad t \geq 0 \,. \tag{2.1.11}$$

Ovo je „sadašnja vrednost“ (u trenutku 0) kumulativnog iznosa zahteva tokom vremenskog intervala $[0, t]$.

Na osnovu Teoreme 2.1.9, za svako $t \geq 0$

$$S_0(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} e^{-rtU_i} X_i \,,$$

gde „=“ označava jednakost raspodela, $\{U_i\}$ je iid $\mathcal{U}(0,1)$ niz kao i u teoremi.

Stoga, koristeći nezavisnost pomenute tri familije slučajnih promenljivih, dobijamo

$$E\big(S_0(t)\big) = E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} e^{-rtU_i} X_i\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} e^{-rtU_i} X_i \,\middle|\, N(t) = n\right) \cdot P(N(t) = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot E[e^{-rtU_1}] \cdot E(X_1) \cdot P(N(t) = n)$$

$$= E\big(N(t)\big) \cdot E(X_1) \cdot \left(\int_0^1 e^{-rty} dy\right)$$

$$= \lambda \frac{1}{r}(1 - e^{-rt}) \cdot E(X_1) \,.$$

Time smo dokazali sledeću teoremu.

Teorema 2.1.10

Sa notacijom kao iznad važi:

$$E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} e^{-rT_i} X_i\right) = \lambda \frac{1}{r}(1 - e^{-rt}) \cdot E(X_1) \,. \tag{2.1.12}$$

U Kramer-Lundbergovom modelu prosečni tj. očekivani iznos potreban za izmirenje zahteva za isplatu štete tokom vremenskog intervala $[0, t]$ *dat je sa* (2.1.12).

Neka $p(t)$ označava *prihod od premije* u vremenskom intervalu $[0, t]$. U Kramer-Lundbergovom modelu pretpostavlja se da je $p(\cdot)$ deterministička, linearna funkcija, odnosno $p(t) = ct,\ t \geq 0$ gde je $c > 0$ konstanta koja predstavlja *stopu premije*. Putem ukupnog iznosa isplaćenih šteta $S(\cdot)$, za $t \geq 0$, imamo

$$U(t) = u + p(t) - S(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i. \qquad (2.1.13)$$

Proces $\{U(t): t \geq 0\}$ naziva se *proces rizika* (ili proces viška) modela, gde u označava *početni kapital*. Primetimo da je $U(t)$ bilans kapitala osiguravajućeg društva u trenutku t.
Puštajući $r \to 0$ u izrazu (2.1.12), uočimo da je $E\big(S(t)\big) = \lambda t E(X_1)$ i otuda je

$$E\big(U(t)\big) = u + ct - E\big(S(t)\big) = u + ct - \lambda t E(X_1)\,. \qquad (2.1.14)$$

Na osnovu (2.1.14), u izboru stope premije za minimalni uslov može se uzeti

$$c > \lambda E(X_1) \qquad (2.1.15)$$

tako da su u proseku zahtevi za odštetu izmireni od strane prihoda od premije. Ovaj donekle jednostavan kriterijum može se opravdati i drugim razlozima kao što ćemo videti kasnije. Oprezniji uslov zahteva da je $c > (1+\rho)\lambda E(X_1)$, gde je $\rho > 0$ bezbedan udeo premije u troškovima poslovanja tzv. *doplata (dodatак) za sigurnost* (safety loading factor).

U okvirima osiguranja dati finansijski rizik se u velikoj meri prenosi na osiguravajuće društvo. Veliki je broj slučajeva kada su osiguravajuća društva bankrotirala zbog nemogućnosti da se nose sa zahtevima za isplatu štete za vreme velikih prirodnih katastrofa. Stoga, teorijsko razumevanje uslova koji dovode do propasti kompanije, razumevanje verovatnoće kao i ozbiljnosti propasti, mogu pomoći makar u izbegavanju određenih zamki. U skladu sa tim analiza problema propasti igra centralnu ulogu u metematici osiguranja. Na kratko ćemo se osvrnuti na problem propasti u Kramer-Lundbergovom modelu.
Slučaj kada proces viška $U(\cdot)$ padne ispod nule naziva se *propast*. Neka je

$$T = inf\{t > 0 : U(t) < 0\}. \qquad (2.1.16)$$

T se naziva *trenutak propasti* i označava prvi vremenski trenutak u kom proces viška padne ispod nule.

Verovatnoća propasti je tada data sa

$$\psi(u) = P(T < \infty \mid U(0) = u) \tag{2.1.17}$$

za $u > 0$. Dakle, verovatnoća propasti je funkcija početnog kapitala u. Primetimo da $\psi(\cdot)$ takođe zavisi i od stope premije c.

Sasvim prirodno pitanje bi bilo: Za koju stopu premije c i početni kapital u može da se desi da je $\psi(u) = 1$? Tj. kada je propast neizbežna?

Na osnovu definicije od $U(\cdot)$, uočimo da $U(\cdot)$ raste na intervalu $[T_n, T_{n+1}),\ n \geq 0$. Stoga do propasti može da dođe samo u nekom trenutku T_n. Sada za $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} U(T_n) &= u + cT_n - \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{(jer je } N(T_n) = n) \\ &= u + \sum_{i=1}^{n} (cW_i - X_i) \qquad \text{(jer je } T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i) \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Neka je $Z_i = X_i - cW_i$, $i \geq 1$, $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, $n \geq 1$. Tada je (2.1.18) baš $U(T_n) = u - S_n$, $n \geq 1$.

Pošto je „propast“=$\{U(T_n) < 0$ za neko $n\}$, sada je lako uočiti da je

$$\psi(u) = P\left(\sup_{n\geq 1} S_n > u\right). \tag{2.1.19}$$

Kako su familije $\{W_i\}$ i $\{X_j\}$ međusobno nezavisne, i svaka od njih je niz iid slučajnih promenljivih, primetimo da je i $\{Z_i\}$ niz iid slučajnih promenljivih i stoga je $\{S_n : n \geq 0\}$ *slučajan hod* (random walk) na realnoj vremnskoj osi $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1.11

Neka su $\{Z_i\}$ i $\{S_n\}$ dati kao iznad. Pretpostavimo da Z_i nije identički jednako nuli i da $E(Z_i)$ postoji.

- *(i)* *Ako je $E(Z_1) > 0$, tada je* $P(\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 1$.
- *(ii)* *Ako je $E(Z_1) < 0$, tada je* $P(\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty) = 1$.
- *(iii)* *Ako je $E(Z_1) = 0$, tada je*

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty, \liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty\right) = 1.$$

Dokazi svojstava *(i)* i *(ii)* slede direktno na osnovu jakog zakona velikih brojeva, tvrđenje *(iii)* zahteva dugačak dokaz.

Na osnovu (2.1.19) i teoreme iznad sledi da je $\psi(u) = 1$ za svako $u > 0$ ako važi da je $E(X_1) - cE(W_1) \geq 0$. Primetimo da je $E(W_1) = \frac{1}{\lambda}$ kad W_1 ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ. Dakle, u Kramer-Lundbergovom modelu propast je sigurna ako (2.1.15) nije zadovoljeno. Uslov (2.1.15) se naziva *uslov neto profita* koji ćemo pomenuti i u Poglavlju 3.2, i za koji se uglavnom pretpostavlja da je zadovoljen. Međutim, ako je uslov (2.1.15) ispunjen to ne znači i da je propast izbegnuta. To samo znači da možda postoji šansa da je $\psi(u) < 1, u > 0$. U skladu sa tim dajemo sledeći rezultat.

Teorema 2.1.12

Pretpostavimo da u Kramer-Lundbergovom modelu važi uslov neto profita. Takođe pretpostavimo da postoji $r > 0$ *takvo da važi*

$$E(e^{rZ_1}) = E\left(e^{r(X_1 - cW_1)}\right) = 1. \tag{2.1.20}$$

Tada je

$$\psi(u) \leq e^{-ru} \quad za \;\; u > 0. \tag{2.1.21}$$

Konstanta r u (2.1.20) naziva se *koeficijent prilagođavanja.* U Kramer-Lundbergovom modelu ovaj koeficijent postoji ako je ispunjen uslov neto profita i ako iznos zahteva X_1 ima generatornu funkciju momenta u okolini nule. Nejednakost (2.1.21) poznata je kao *Lundbergova nejednakost.* Elegantan način za dokazivanje Teoreme 2.1.12 zasniva se na teoriji martingala.

Znatno opštiji model je Sparre-Andersenov model, kada je proces prebrajanja zahteva dat procesom obnavljanja. U ovom modelu vremena između dva dospeća zahteva $W_1, W_2, \ldots$ su samo iid nenegativne slučajne promenljive i nemaju nužno eksponencijalnu raspodelu kao što je to slučaj u Kramer-Lundbergovom modelu. Uslov neto profita je dat analogno kao (2.1.15), $c > E(X_1)/E(W_1)$.

2.2 Proces obnavljanja

Procesi obnavljanja modeliraju događaje koji se javljaju na slučajan način u vremenskim trenucima, gde su vremena između dva događaja nezavisna i imaju istu raspodelu. U oblasti neživotnog osiguranja ovi vremenski trenuci se interpretiraju kao vremena dospeća zahteva za isplatu štete. Takođe, procesi obnavljanja imaju značajnu ulogu u primenjenoj verovatnoći. Složeni stohastički procesi često su opisani putem jednog ili više procesa ovog tipa.

U poglavlju 2.1. videli smo da u slučaju Poasonovog procesa sa stopom λ, vremena između dva dospeća imaju eksponencijalnu $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelu. U opštem slučaju, eksponencijalnu raspodelu vremena između dva dospeća možemo zameniti bilo kojom raspodelom na intervalu $[0, \infty)$ kako bismo dobili širu klasu procesa prebrajanja. Ovakvi procesi, gde je raspodela vremena između dva dospeća proizvoljna, nazivaju se *procesi obnavljanja*, a oblast koja se bavi njihovim izučavanjem naziva se *teorija obnavljanja*. Primetimo da ako vremena između dospeća nemaju eksponencijalnu raspodelu, tada proces neće imati stacionarne i nezavisne priraštaje. Stoga je Poasonov proces jedini proces obnavljanja sa stacionarnim i nezavisnim priraštajima.

Zbog svoje teorijske važnosti procesi obnavljanja su jedni od najčešće izučavanih procesa u teoriji primenjene verovatnoće. Jedan od ključnih objekata interesovanja teorije obnavljanja je svakako *funkcija obnavljanja*

$$m(t) = E\big(N(t)\big) + 1\,, \quad t \geq 0.$$

Ona opisuje prosečno ponašanje procesa obnavljanja. Sa aspekta osiguranja, funkcija obnavljanja predstavlja očekivani broj prispelih zahteva za isplatu štete u portfolio osiguranja. Pretpostavka o nezavisnosti i jednakoj raspodeli vremena pristizanja zahteva nije baš najrealnija ali je pogodna za izgradnju teorije.

2.2.1 Homogeni Poasonov proces kao preces obnavljanja

U ovom odeljku proučavamo niz vremena pristizanja $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots$ homogenog Poasonovog procesa sa intenzitetom $\lambda > 0$. Naš cilj je da pronađemo konstruktivan način za određivanje niza pristizanja koji se može koristiti kao alternativna definicija homogenog Poasonovog procesa. Ova karakterizacija je korisna za proučavanje osobina trajektorija Poasonovog procesa ili za simulaciju delova trajektorije.

Pokazaćemo da se svaki Poasonov proces sa intenzitetom $\lambda > 0$ može predstaviti na sledeći način

$$N(t) = max\{i \geq 1 : \; T_i \leq t\}, \quad t \geq 0, \tag{2.2.1}$$

gde je

$$T_n = W_1 + \cdots + W_n, \quad n \geq 1, \tag{2.2.2}$$

i (W_i) je iid eksponencijalan $\mathcal{E}(\lambda)$ niz.

Neka je $T_0 = 0$. Pošto se slučajan hod (T_n), sa nenegativnim koracima W_n, takođe naziva i *niz obnavljanja*, proces N prikazan sa (2.2.1)-(2.1.2) za opšti niz (W_i), čiji su članovi nezavisni i imaju jednake raspodele, naziva se *obnavljajući proces prebrajanja* (proces obnavljanja).

Počećemo sa homogenim Poasonovim procesom kao procesom obnavljanja a kasnije ćemo analizirati i opšti proces obnavljanja.

Teorema 2.2.1 (Homogeni Poasonov proces kao proces obnavljanja)

(1) *Proces N dat sa* (2.2.1) *i* (2.2.2) *sa eksponencijalnom raspodelom* $\mathcal{E}(\lambda)$ *niza* (W_i) *čiji su elementi nezavisni sa jednakim raspodelama, predstavlja homogeni Poasonov proces sa intenzitetom* $\lambda > 0$.

(2) *Neka je N homogeni Poasonov proces sa intenzitetom λ i vremenima pristizanja* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots$. *Tada je N dato sa* (2.2.1) *i (T_i) je dato sa* (2.2.2) *za svaki eksponencijalni* $\mathcal{E}(\lambda)$ *niz (W_i) čiji su elementi nezavisni i imaju jednake raspodele..*

Dokaz.

(1) Počinjemo sa nizom obnavljanja (T_n) koji je predstavljen sa (2.2.2) i uzimamo da je $T_0 = 0$ jer je to pogodnije. Podsetimo se definisanja osobina Poasonovog procesa. Osobina da je $N(0) = 0$ s.s. sledi pošto je $W_1 > 0$ s.s.. Po konstrukciji putanja $(N(t,\omega))_{t \geq 0}$ dobija vrednost i na intervalu $[T_i, T_{i+1})$ i u trenutku T_{i+1} „skače" do nivoa $i + 1$. Otuda su delovi putanje càdlàg.

Dalje ćemo pokazati da $N(t)$ ima Poasonovu $\mathcal{P}(\lambda t)$ raspodelu. Ključna relacija je data sa

$$\{N(t) = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}, \quad n \geq 0. \tag{2.2.3}$$

Vreme dospeća *n*-tog zahteva, T_n, je suma n slučajnih nezavisnih promenljivih sa istom $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelom tj. $T_n = W_1 + \cdots + W_n$. Poznato je da T_n ima gama $\Gamma(n, \lambda)$

raspodelu. Jedan od mogućih dokaza zasniva se na Poasonovoj raspodeli procesa prebrajanja. Za ceo broj $n > 0$, gustina $\Gamma(n,\lambda)$ raspodele može se zapisati kao

$$f_X(x \mid n,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} & \text{za } x \geq 0 \\ 0 & \text{za } x < 0 \end{cases}$$

gde je $\Gamma(n)$ tzv. gama funkcija[3], definisana sa

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y} dy.$$

Specijalan slučaj gama $\Gamma(n,\lambda)$ raspodele je eksponencijalna $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodela koja se dobija u slučaju $n = 1$. Kako nameravamo da dokažemo da suma n nezavisnih $\mathcal{E}(\lambda)$ slučajnih promenljivih ima gama $\Gamma(n,\lambda)$ raspodelu, primetimo da za $n = 1$ dokaz sledi direktno. Za $n > 1$ najjednostavniji način je da primetimo da je vreme n-tog pristizanja manje ili jednako sa t ako i samo ako je broj dospeća u intervalu $[0,t]$ veći ili jednak sa n. Dakle, događaji

$$\{T_n \leq t\} \quad i \quad \{N(t) \geq n\}$$

su ekvivalentni.

Verovatnoća prvog događaja daje nam funkciju raspodele od T_n:

$$F_{T_n}(t) = P(T_n \leq t) = P(N(t) \geq n) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}.$$

Da bismo dobili funkciju gustine od T_n potražićemo izvod po t funkcije raspodele i dobićemo

$$f_{T_n}(t) = -\sum_{j=n}^{\infty} \lambda \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} + \sum_{j=n}^{\infty} \lambda \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda t}$$

$$= \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}.$$

Upoređujući dobijeno sa funkcijom gustine gama $\Gamma(n,\lambda)$ raspodele dobili smo traženi rezultat.

Primetimo da je na osnovu (2.2.3)

$$P(N(t) = n) = P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

što dokazuje da $N(t)$ ima Poasonovu raspodelu.

[3] Važi: $\Gamma(n) = (n-1)!\,\Gamma(1)$, $\Gamma(1) = 1$.

Sada ćemo obratiti pažnju na nezavisnost i stacionarnost priraštaja. S obzirom da slučaj sa proizvoljnim brojem priraštaja postaje složeniji, fokusiraćemo se na slučaj dva susedna priraštaja da bismo ilustrovali metod. Posmatrajmo priraštaje $N(t) = N(0,t]$ i $N(t,t+h]$ za $t,h > 0$. Treba da pokažemo da za svako $k,l \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} q_{k,k+l}(t,t+h) &= P(N(t) = k, N(t,t+h] = l) \\ &= P(N(t) = k)\, P(N(t,t+h] = l) \\ &= P(N(t) = k)\, P(N(h) = l) \\ &= e^{-\lambda(t+h)} \frac{(\lambda t)^k (\lambda h)^l}{k!\, l!}. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Počinjemo sa slučajem kada je $l = 0, k \geq 1$; slučaj $l = k = 0$ je trivijalan.
Iskoristićemo relaciju

$$\{N(t) = k, N(t,t+h] = l\} = \{N(t) = k, N(t+h) = k+l\}. \tag{2.2.5}$$

Tada, preko (2.2.3) i (2.2.5), dobijamo

$$\begin{aligned} q_{k,k+l}(t,t+h) &= P(T_k \leq t < T_{k+1}, T_k \leq t+h < T_{k+1}) \\ &= P(T_k \leq t\,, t+h < T_k + W_{k+1}). \end{aligned}$$

Sada možemo iskoristiti činjenice da T_k ima $\Gamma(k,\lambda)$ raspodelu sa gustinom $\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}/(k-1)!$ i W_{k+1} ima eksponencijalnu raspodelu $\mathcal{E}(\lambda)$ sa gustinom $\lambda e^{-\lambda x}$:

$$q_{k,k+l}(t,t+h) = \int_0^t e^{-\lambda z} \frac{\lambda(\lambda z)^{k-1}}{(k-1)!} \int_{t+h-z}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx dz$$

$$= \int_0^t e^{-\lambda z} \frac{\lambda(\lambda z)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda(t+h-z)} dz = e^{-\lambda(t+h)} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Za $l \geq 1$ koristimo uslovno očekivanje i (2.2.3):

$$\begin{aligned} q_{k,k+l}(t,t+h) &= P(T_k \leq t < T_{k+1},\, T_{k+l} \leq t+h < T_{k+l+1}) \\ &= E[I_{\{T_k \leq t < T_{k+1} \leq t+h\}}\, P(T_{k+l} - T_{k+1} \leq t+h-T_{k+1} \\ &\qquad < T_{k+l+1} - T_{k+1} \mid T_k, T_{k+1})]. \end{aligned}$$

Neka je N' nezavisna „imitacija“ od N, tj., $N' = N$ u smislu jednakosti raspodela. Pozivajući se na (2.2.3) i na nezavisnost T_{k+1} i $(T_{k+l} - T_{k+1}, T_{k+l+1} - T_{k+1})$, vidimo da je

$$q_{k,k+l}(t, t+h) = E[I_{\{T_k \le t < T_{k+1} \le t+h\}}\, P(N'(t+h-T_{k+1}) = l-1 \mid T_{k+1})]$$

$$= \int_0^t e^{-\lambda z} \frac{\lambda(\lambda z)^{k-1}}{(k-1)!} \int_{t-z}^{t+h-z} \lambda e^{-\lambda x} P(N(t+h-z-x) = l-1) dx dz$$

$$= \int_0^t e^{-\lambda z} \frac{\lambda(\lambda z)^{k-1}}{(k-1)!} \int_{t-z}^{t+h-z} \lambda e^{-\lambda x}\, e^{-\lambda(t+h-z-x)} \frac{\big(\lambda(t+h-z-x)\big)^{l-1}}{(l-1)!} dx dz$$

$$= e^{-\lambda(t+h)} \int_0^t \frac{\lambda(\lambda z)^{k-1}}{(k-1)!} dz \int_0^h \frac{\lambda(\lambda x)^{l-1}}{(l-1)!} dx$$

$$= e^{-\lambda(t+h)} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \frac{(\lambda h)^l}{l!}.$$

Ovo je željeni odnos (2.2.4).

Kako je

$$P(N(t, t+h] = l) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) = k, N(t, t+h] = l),$$

iz (2.2.4) takođe sledi da je

$$P(N(t) = k, N(t, t+h] = l) = P(N(t) = k) P(N(h) = l).$$

Analogno se dokazuje i (2.2.4) za konačno mnogo priraštaja procesa N.

(2) Raspodelu vremena između dva dospeća zahteva W_i smo detaljnije obradili u poglavlju 2.1.4, stoga ćemo dokaz ovog dela teoreme izostaviti. ■

Važna posledica Teoreme 2.2.1 je ta da su vremena između dva pristizanja

$$W_i = T_i - T_{i-1}, \quad i \ge 1,$$

homogenog Poasonovog procesa sa intenzitetom λ, nezavisna, sa jednakom $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelom. Specijalno, $T_i < T_{i+1}$ skoro sigurno za $i \ge 1$, tj. sa verovatnoćom 1 homogen Paosonov proces nema skokove veće od 1. Na osnovu jakog zakona velikih brojeva $T_n/n \xrightarrow{ss} E(W_1) = \lambda^{-1} > 0$, možemo takođe zaključiti da T_n raste skoro kao n/λ, i stoga ne postoji granična vrednost niza (T_n) ni u jednom konačnom vremenskom trenutku. To znači

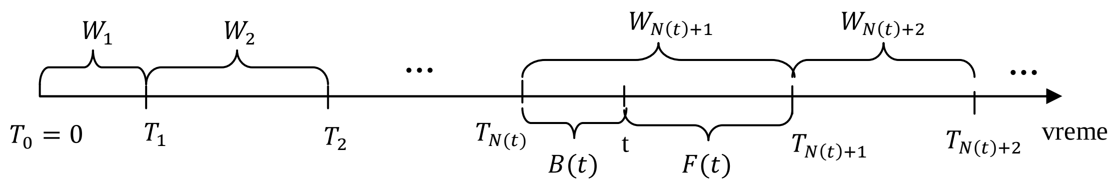
da su vrednosti $N(t)$ homogenog Poasonovog procesa konačne na bilo kom konačnom vremenskom intervalu $[0, t]$.
Homogeni Poasonov proces ima mnogo izuzetnih osobina. Jedna od njih je sledeći fenomen koji se u literaturi pojavljuje pod imenom *paradoks kontrole.*

Primer 2.2.1 *Paradoks kontrole* (The inspection paradox)
Pretpostavimo da analiziramo zahteve koji pristižu u portfolio u skladu sa homogenim Poasonovim procesom N sa intenzitetom λ. Utvrdili smo da vremena između dva pristizanja $W_n = T_n - T_{n-1}$, $n \geq 1$, gde je $T_0 = 0$, čine niz čiji su elementi nezavisni i imaju jednaku $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelu. Posmatrajmo portfolio u fiksiranom vremenskom trenutku t. Poslednji zahtev je stigao u trenutku $T_{N(t)}$, a sledeći će stići u trenutku $T_{N(t)+1}$.
Obratimo pažnju na sledeća pitanja:

(1) Koja je raspodela od $B(t) = t - T_{N(t)}$, tj. koja je dužina perioda $(T_{N(t)}, t]$ od pristizanja poslednjeg zahteva?

(2) Koja je raspodela od $F(t) = T_{N(t)+1} - t$, tj. koja je dužina perioda $(t, T_{N(t)+1}]$ do pristizanja sledećeg zahteva?

(3) Šta možemo reći o zajedničkoj raspodeli od $B(t)$ i $F(t)$?



Grafik 2.2.1

Veličina $B(t)$ se često naziva *starost* procesa obnavljanja u trenutku t, a $F(t)$ *preostali vek trajanja* procesa u trenutku t.
Intuitivno, pošto t leži negde između dospeća dva uzastopna zahteva i budući da su vremena između pristizanja zahteva nezavisna sa $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelom, moglo bi se očekivati da je

$$P(B(t) \leq x_1) < 1 - e^{-\lambda x_1}, x_1 < t, \qquad \text{i} \quad P(F(t) \leq x_2) < 1 - e^{-\lambda x_2}, x_2 > 0.$$

Međutim, ove pretpostavke nisu potvrđene računanjem zajedničke raspodele od $B(t)$ i $F(t)$ za $x_1, x_2 \geq 0$:

$$G_{B(t),F(t)}(x_1, x_2) = P(B(t) \leq x_1, F(t) \leq x_2).$$

Pošto je $B(t) \leq t$ skoro sigurno, razmatramo zasebno slučajeve kada je $x_1 < t$ i $x_1 \geq t$. Posmatramo za $x_1 < t$ i $x_2 > 0$,

$$\{B(t) \leq x_1\} = \{t - x_1 \leq T_{N(t)} \leq t\} = \{N(t - x_1, t] \geq 1\},$$

$$\{F(t) \leq x_2\} = \{t < T_{N(t)+1} \leq t + x_2\} = \{N(t, t + x_2] \geq 1\}.$$

Dakle, koristeći nezavisnost stacionarnih priraštaja procesa N,

$$\begin{aligned} G_{B(t),F(t)}(x_1, x_2) &= P(N(t - x_1, t] \geq 1, N(t, t + x_2] \geq 1) \\ &= P(N(t - x_1, t] \geq 1)\ P(\ N(t, t + x_2] \geq 1) \\ &= \left(1 - e^{-\lambda x_1}\right)\left(1 - e^{-\lambda x_2}\right). \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Analognim izračunavanjem za $x_1 \geq t,\ x_2 > 0$, na osnovu (2.2.6) dobijamo

$$G_{B(t),F(t)}(x_1, x_2) = \left[\left(1 - e^{-\lambda x_1}\right) I_{[0,t)}(x_1) + I_{[t,\infty)}(x_1)\right]\left(1 - e^{-\lambda x_2}\right).$$

Pošto su $B(t)$ i $F(t)$ nezavisni, $F(t)$ ima $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelu i $B(t)$ ima odsečenu[4] eksponencijalnu raspodelu sa skokom u t:

$$P(B(t) \leq x_1) = 1 - e^{-\lambda x_1}\,,\ x_1 < t \quad \text{i} \quad P(B(t) = t) = e^{-\lambda t}.$$

To znači da pomeranje vremena $F(t)$ unapred ima istu $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelu kao i vremena između dva pristizanja W_i Poasonovog procesa N. Ova osobina je blisko povezana sa *osobinom zaboravnosti* (forgetfulness property) eksponencijalne raspodele:

$$P(W_1 > x + y \mid W_1 > x) = P(W_1 > y), \quad x, y \geq 0,$$

što se takođe ogleda i u nezavisnosti priraštaja Poasonovog procesa. Interesantno je uočiti da je

$$\lim_{t\to\infty} P(B(t) \leq x_1) = 1 - e^{-\lambda x_1},\ \ x_1 > 0.$$

Tako, u asimptotskom smislu, $B(t)$ i $F(t)$ postaju nezavisni i imaju eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ. □

[4] *Odsečena raspodela* je uslovna raspodela koja proizilazi iz restrikcije domena neke druge raspodele.

2.2.2 Osnovne osobine procesa obnavljanja

Osnovni motiv za uvođenje procesa obnavljanja je to što (homogeni) Poasonov proces ne opisuje uvek dospevanje zahteva na adekvatan način. Između pristizanja zahteva mogu se javiti veliki raskoraci. Na primer, verovatnoća da zahtevi za isplatu štete za osiguranje od oluje pristižu u skladu sa Poasonovim procesom jako je mala. Oni pristižu kako kad, a ponekad mogu proći i godine do pristizanja sledećeg zahteva. Mnogo je prirodnije da u ovom slučaju pretpostavimo da su vremena između pristizanja dva zahteva raspodeljena tako da omogućavaju modelovanje ovih velikih vremenskih intervala. Detaljnijom analizom može se zaključiti da Poasonov proces nije uvek realan model za realizovano pristizanje zahteva, posebno ako se posmatra duži vremenski period. S druge strane, ako odbacimo hipoteze Poasonovog procesa, gubimo većinu „lepih" osobina ovog procesa koje su blisko povezane sa eksponencijalnom raspodelom W_i-ova. Na primer, u opštem slučaju nije nam poznato koju raspodelu ima $N(t)$ i koja je tačna vrednost očekivanja $E(N(t))$ i vrednost disperzije $D(N(t))$.

Definicija 2.2.1 (Proces obnavljanja)

Neka je (W_i) niz nezavisnih, jednako raspodeljenih, pozitivnih slučajnih promenljivih. Tada slučajan hod (random walk)

$$T_0 = 0, \;\; T_n = W_1 + \cdots + W_n, \;\; n \geq 1,$$

nazivamo niz obnavljanja, *a proces prebrajanja*

$$N(t) = max\{i \geq 1 : \; T_i \leq t\} \qquad t \geq 0,$$

je odgovarajući obnavljajući proces prebrajanja tj. proces obnvljanja.

Nizove (T_n) i (W_n) nazivamo niz trenutaka pristizanja i niz trenutaka međupristizanja procesa obnavljanja N, respektivno.

Iz Teoreme 2.2.1 sledi da je homogeni Poasonov proces sa intenzitetom λ proces obnavljanja sa nezavisnim, jednako $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodeljenim vremenima međupristizanja W_i. Videćemo da proces obnavljanja i homogeni Poasonov proces imaju zajedničke asimptotske osobine. Prvi rezultat koji na to ukazuje je jak zakon velikih brojeva za proces obnavljanja. Da bismo dokazali narednu teoremu koristićemo pomoćno tvrđenje.

Lema 2.2.1

Neka je (Z_n) *niz slučajnih promenljivih takvih da* $Z_n \to Z$ *skoro sigurno kada* $n \to \infty$ *za neku slučajnu promenljivu* Z, *i neka je* $(M(t))_{t\geq 0}$ *stohastički proces celobrojnih slučajnih promenljivih takvih da* $M(t) \to \infty$ *skoro sigurno kad* $t \to \infty$. *Ako su* M *i* (Z_n) *definisani na istom prostoru verovatnoća* Ω, *tada važi*

$$Z_{M(t)} \to Z \text{ skoro sigurno kad } t \to \infty.$$

Dokaz.

Neka je

$$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : M(t,\omega) \to \infty\} \quad \text{i} \quad \Omega_2 = \{\omega \in \Omega : Z_n(\omega) \to Z(\omega)\}.$$

Pod pretpostavkom da je $P(\Omega_1) = P(\Omega_2) = 1$, sledi $P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 1$ i stoga je

$$P\big(\{\omega : Z_{M(t,\omega)}(\omega) \to Z(\omega)\}\big) = P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 1\,.$$

Ovim je lema dokazana. ■

Teorema 2.2.2 (Jak zakon velikih brojeva za proces obnavljanja)

Ako je očekivanje $E(W_1) = \lambda^{-1}$ *vremena između dva pristizanja zahteva* W_i *konačno, proces* N *zadovoljava jak zakon velikih brojeva:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda \ skoro\ sigurno.$$

Dokaz.

Podsetimo se sledeće ključne relacije procesa obnavljanja:

$$\{N(t) = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Tada direktno sledi da važe sledeće nejednakosti:

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1}\frac{N(t)+1}{N(t)}\,. \tag{2.2.7}$$

Na osnovu jakog zakona velikih brojeva za nezavisan, jednako raspodeljen niz (W_n) dobijamo

$$n^{-1}T_n \to \lambda^{-1}\,, \text{ skoro sigurno.}$$

Posebno, $N(t) \to \infty$ skoro sigurno kad $t \to \infty$.

Sada ćemo primeniti Lemu 2.2.1 za $Z_n = T_n/n$ i $M = N$ da bismo dobili

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \to \lambda^{-1} \text{ , skoro sigurno.} \tag{2.2.8}$$

Tvrdnja teoreme sledi iz kombinacije (2.2.7) i (2.2.8). ■

U slučaju homogenog Poasonovog procesa znamo tačnu vrednost očekivanja procesa obnavljanja: $E\big(N(t)\big) = \lambda t$. U slučaju opšteg procesa obnavljanja N jak zakon velikih brojeva, $N(t)/t \to \lambda = (E(W_1))^{-1}$ s.s., nagoveštava da je očekivanje $E(N(t))$ procesa obnavljanja aproksimacija od λt. Donja granica za $E(N(t)/t)$ se lako dostiže. Primenom Fatou-ove leme[5] i jakog zakona velikih brojeva za $N(t)$ dobijamo

$$\lambda = E\left(\liminf_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}\right) \le \liminf_{t\to\infty} \frac{E\big(N(t)\big)}{t}. \tag{2.2.9}$$

Ova donja granica može biti dopunjena odgovarajućom gornjom granicom što dovodi do sledećeg standardnog rezultata.

Teorema 2.2.3 (Osnovna teorema obnavljanja)
Ako je očekivanje $E(W_1) = \lambda^{-1}$ vremena između dolazaka konačno, važi:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(N(t))}{t} = \lambda .$$

Dokaz.
Na osnovu (2.2.9) ostaje da pokažemo da je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{E(N(t))}{t} \le \lambda . \tag{2.2.10}$$

Za gornju granicu koristimo argument odsecanja i za neko $a > 0$ uvodimo

$$W_j^{(a)} = \begin{cases} W_j & \text{ako je } W_j < a \\ a & \text{ako je } W_j \ge a \end{cases}$$

za $j \ge 1$, i pišemo $T_j^{(a)} = W_1^{(a)} + \cdots + W_j^{(a)}$.

Očigledno, $(T_n^{(a)})$ je niz obnavljanja i važi $T_n \ge T_n^{(a)}$. Na osnovu toga možemo zaključiti da je $N_a(t) \ge N(t)$ za odgovarajući proces obnavljanja

$$N_a(t) = max\left\{i \ge 1 : \; T_i^{(a)} \le t\right\}, \quad t \ge 0 .$$

[5] Fatou-ova lema: Neka je (f_n) niz nenegativnih merljivih funkcija na $\mathbb{R}^m$ i $f(x) = \lim\ \inf_{n\to\infty} f_n(x)$, tada je $\int_{\mathbb{R}^m} f\, dm \le \lim\ \inf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_n\, dm$.

Dakle,

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{E(N(t))}{t}\le\limsup_{t\to\infty}\frac{E(N_a(t))}{t}\,. \tag{2.2.11}$$

Primetimo da na osnovu definicije procesa $N_a(t)$ važi

$$T^{(a)}_{N_a(t)}=W_1^{(a)}+\cdots+W^{(a)}_{N_a(t)}\le t.$$

Neka je $\mathcal{F}_n=\sigma(W_j^{(a)},j\le n)$ σ-polje generisano sa $W_1^{(a)},\ldots W_n^{(a)}$. Tada je $(\mathcal{F}_n)$ prirodna filtracija generisana nizom $(W_j^{(a)})$. Sledeći rezultat je posledica činjenice da je $N_a(t)+1$ takozvano *vreme zaustavljanja* u skladu sa prirodnom filtracijom generisanom nizom $(W_j^{(a)})$. Celobrojna slučajna promenljiva τ je vreme zaustavljanja u odnosu na $(\mathcal{F}_n)$ ako je $\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n$.

Ako je $E(\tau)<\infty$ Wald-ov identitet[6] daje

$$E\left(\sum_{i=1}^{\tau}W_i^{(a)}\right)=E(\tau)E\left(W_1^{(a)}\right).$$

Uočimo da je

$$\{N_a(t)=n\}=\left\{T_n^{(a)}\le t<T_{n+1}^{(a)}\right\}.$$

Stoga $N_a(t)$ nije vreme zaustavljanja. Međutim, isti izraz pokazuje da je $N_a(t)+1$ vreme zaustavljanja u skladu sa $(\mathcal{F}_n)$.

Relacija

$$E\left(T^{(a)}_{N_a(t)+1}\right)=E(N_a(t)+1)E\left(W_1^{(a)}\right) \tag{2.2.12}$$

važi na osnovu Wald-ovog identiteta.

Kombinujući (2.2.11)-(2.2.12) možemo zaključiti da je

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{E(N(t))}{t}\le\limsup_{t\to\infty}\frac{E(T^{(a)}_{N_a(t)+1})}{tE(W_1^{(a)})}\le\limsup_{t\to\infty}\frac{t+a}{tE(W_1^{(a)})}=\frac{1}{E(W_1^{(a)})}\,.$$

Na osnovu teoreme o monotonoj konvergenciji, puštajući $a\to\infty$,

$$E\left(W_1^{(a)}\right)=E(\min(a,W_1))\to E(W_1)=\lambda^{-1}\,,$$

tražena relacija (2.2.10) važi. Ovim je teorema dokazana. ■

---

[6] Ako su $W_1,W_2,\ldots$ iid slučajne promenljive, τ njihovo vreme zaustavljanja, $E(W_1)<\infty$, $T_n=W_1+\cdots+W_n$, $n\ge 1, T_0:=0$ i $E(\tau)<\infty$ tada je $E(T_\tau)=E(\tau)E(W_1)$.

Teorema 2.2.3 je jednostavna, ali ne i dovoljno precizna. Mnogo precizniju informaciju dobijamo korišćenjem Blackwell-ove teoreme obnavljanja koja tvrdi da za $h > 0$

$$m(t, t+h] = E(N(t, t+h]) \to \lambda h\,, \quad t \to \infty.$$

Prema tome, za dovoljno veliko t, očekivani broj obnavljanja na intervalu $(t, t+h]$ postaje nezavisan od t i proporcionalan je dužini intervala. Kako je m neopadajuća funkcija na $[0, \infty)$, ona definiše meru m na Borelovom σ-polju $[0, \infty)$, takozvanu *meru obnavljanja.*

Tvrđenje 2.2.4 (Asimptotsko ponašanje varijanse procesa obnavljanja)
Pretpostavimo da je $D(W_1) < \infty$*. Tada*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D(N(t))}{t} = \frac{D(W_1)}{(E(W_1))^3}\,.$$

Pomenuli smo da $N(t)$ zadovoljava centralnu graničnu teoremu. Ona nam daje moguću aproksimaciju za raspodelu broja pristiglih zahteva pod uslovom da je t dovoljno veliko.

Tvrđenje 2.2.5 (Centralna granična teorema za proces obnavljanja)
Ako je $0 < D(W_1) < \infty$*, tada za svako* $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{N(t) - \lambda t}{\sqrt{ct}} \le x\right) = \Phi(x) \qquad (2.2.13)$$

gde je $c = \lambda^{-3} D(W_1)$*, a* $\Phi(x)$ *je funkcija standardne normalane raspodele.*

Dokaz.
Na osnovu centralne granične teoreme za sumu iid slučajnih promenljivih imamo da

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{T_n - n\lambda^{-1}}{\sqrt{n\, D(W_1)}} \le x\right) = \Phi(x)\,, \qquad (2.2.14)$$

konvergira uniformno u $x \in \mathbb{R}$.
Šta više, kako je $N(t) = n$ ako i samo ako $\{T_n \le t < T_{n+1}\}$, možemo zapisati

$$P\left(\frac{N(t) - \lambda t}{\sqrt{ct}} \le x\right) = P\big(N(t) \le x\sqrt{ct} + \lambda t\big) = P\big(T_{m(t)+1} \ge t\big)$$

$$= P\left(\frac{T_{m(t)+1} - \lambda^{-1}(m(t)+1)}{\sqrt{(m(t)+1)D(W_1)}} \geq \frac{t - \lambda^{-1}(m(t)+1)}{\sqrt{(m(t)+1)D(W_1)}}\right),$$

gde je $m(t) = \lfloor x\sqrt{ct} + t\lambda \rfloor$.

Kako je $\lim_{t\to\infty} m(t) = \infty$, dovoljno je pokazati da je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t - \lambda^{-1}m(t)}{\sqrt{m(t)D(W_1)}} = -x\,,$$

imajući u vidu da je $1 - \Phi(-x) = \Phi(x)$ i da je konvergencija u (2.2.14) uniformna u $x \in \mathbb{R}$. Primetimo da je $m(t) = x\sqrt{ct} + t\lambda + \varepsilon(t)$, gde je $0 \leq |\varepsilon(t)| < 1$.

Prema tome,

$$\frac{t - \lambda^{-1}m(t)}{\sqrt{m(t)D(W_1)}} = \frac{t - \lambda^{-1}x\sqrt{ct} - t - \lambda^{-1}\varepsilon(t)}{\sqrt{m(t)D(W_1)}} \xrightarrow[t\to\infty]{} -x\,.$$

$\blacksquare$

Na osnovu Tvrđenja 2.2.4, normalizacija konstanti $\sqrt{ct}$ u (2.2.13) može biti zamenjena standardnom devijacijom $\sqrt{D(N(t))}$.

2.3 Mešoviti Poasonov proces

Posmatrajmo situaciju gde se promenljiva prebrajanja N sastoji od dve ili više pomoćne promenljive koje pojedinačno prate Poasonovu raspodelu ali sa različitim vrednostima parametara. Na primer, u osiguranju motornih vozila mogla bi se napraviti razlika između ženskog i muškog vlasnika vozila, ili osuguravač može uzeti u obzir slojeve starosne strukture svojih osiguranih vozača. U principu, pretpostavlja se da zahtevi za isplatu štete pristižu od strane heterogene grupe osiguranika. Svaki od njih indukuje zahtev u skladu sa Poasonovom raspodelom $\mathcal{P}(\lambda)$, gde stopa pristizanja zahteva λ varira od jedne do druge polise u skladu sa funkcijom raspodele stope, tj. intenziteta.

U matematičkom kontekstu to znači da se parametar λ pomoćnih promenljivih treba posmatrati kao krajnji rezultat slučajne promenljive Λ u smislu da je

$$P(N = k \mid \Lambda = \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$.

Slučajna promenljiva Λ se naziva *promenljiva mešanja*, a njena funkcija raspodele, u oznaci F_Λ, $F_\Lambda(\lambda) = P(\Lambda \leq \lambda)$, naziva se *mešovita raspodela*. Štaviše, kažemo da N ima *mešovitu Poasonovu raspodelu* sa raspodelom F_Λ.

Dalje dobijamo funkciju verovatnoće

$$p_k(t) = P(N(t) = k) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}\, d\, F_\Lambda(\lambda)\,.$$

Mešoviti Poasonovi procesi pojavili su se u opštoj formi u aktuarskoj literaturi 1959. godine. Celokupna definicija može biti data putem neprekidnih procesa Markova. Alternativno, mešoviti Poasonov proces može biti uveden putem opšte teorije dvostruko-stohastičkih procesa. Definicija koja će biti navedena u ovom radu zasniva se na relaciji homogenog i standardnog homogenog Poasonovog procesa. Specijalni slučaj gde je F_Λ gama raspodela poznat je pod imenom Poljin proces ili Paskalov proces. Mogući su i drugi slučajevi. Na primer, slučaj kada F_Λ je inverzno normalna raspodela ima veliku upotrebu u osiguranju, ali takođe u geofizičkom modelovanju.

U poglavlju 2.1.2 zaključili smo da nehomogeni Poasonov proces N sa funkcijom srednje vrednosti μ može biti izveden iz standardnog homogenog Poasonovog procesa $\widetilde{N}$ putem fiksiranja vremenske promene. Zaista, proces

$$\widetilde{N}\big(\mu(t)\big),\ \ t \geq 0,$$

ima istu konačno-dimenzionalnu raspodelu kao i N, i neprekidan je s desna sa levim limesom. U daljem radu koristićemo sličnu konstrukciju tretirajući funkciju srednje vrednosti kao slučajnu promenljivu.

Definicija 2.3.1 (Mešoviti Poasonov proces)

Neka je $\widetilde{N}$ standardni homogeni Poasonov proces i neka je μ funkija srednje vrednosti Poasonovog procesa na $[0,\ \infty)$. *Neka je $\Lambda > 0$ skoro sigurno, slučajna promenljiva nezavisna od $\widetilde{N}$. Tada proces*

$$N(t) = \widetilde{N}\big(\Lambda\mu(t)\big), \quad t \geq 0,$$

nazivamo mešoviti Poasonov proces *sa promenljivom mešanja Λ.*

Definicija 2.3.2 (Negativni binomni proces - Poljin proces)

Mešoviti Poasonov proces N je negativni binomni proces ako promenljiva mešanja Λ ima gama $\Gamma(\gamma, \delta)$ raspodelu.

Poljin proces je jedan od važnijih predstavnika mešovitog Poasonovog procesa i dobija se izborom $\mu(t) = t$ i izborom gama raspodele za Λ. Pre svega podsetimo se da slučajna promenljiva Λ sa raspodelom $\Gamma(\gamma, \delta)$ ima gustinu

$$f_\Lambda(x) = \frac{\delta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} e^{-\delta x}, \quad x > 0. \tag{2.3.1}$$

Tada za Poljin proces N imamo:

$$\begin{aligned} P(N(t) = k) &= P\big(\widetilde{N}(\Lambda t) = k\big) \\ &= \int_0^\infty P\big(\widetilde{N}(\Lambda t) = k \big| \, \Lambda = \lambda\big) f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \frac{\delta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \lambda^{\gamma-1} e^{-\delta\lambda}\, d\lambda \\ &= \binom{\gamma + k - 1}{k} \left(\frac{\delta}{\delta + t}\right)^\gamma \left(\frac{t}{\delta + t}\right)^k, \end{aligned}$$

tj. $N(t)$ ima negativnu binomnu raspodelu sa parametrom $(\delta/(\delta + t), \gamma)$.[7]

Mešoviti Poasonov proces je specijalan slučaj takozvanog Cox-ovog procesa gde je funkcija srednje vrednosti μ opšti slučajan proces sa neopadajućim trajektorijama, nezavisan od osnovnog homogenog Poasonovog procesa $\widetilde{N}$. Takvi procesi su se pokazali korisnim, na primer, u medicinskoj statistici gde svaka trajektorija predstavlja medicinsku istoriju za svakog pacijenta koji ima svoju sopstvenu funkciju srednje vrednosti. Možemo smatrati da su takve funkcije izvedene iz raspodele funkcije srednje vrednosti. Kao što smo već pomenuli, možemo smatrati da Λ predstavlja različite faktore uticaja na portfolio osiguranja. Na primer, posmatramo proces prebrajanja zahteva koji dospevaju u portfolio polisa osiguranja automobila. Takav portfolio je skup pojedinačnih trajektorija koje odgovaraju različitim osiguranim licima. Promenljiva $\Lambda(\omega)$ tada predstavlja osobine kao što su veština vožnje, godište, vozačko iskustvo, zdravstveno stanje, itd. svakog vozača pojedinačno.

Primetimo da je

$$\begin{aligned} E\big(N(t)\big) &= E\Big(\widetilde{N}\big(\Lambda\mu(t)\big)\Big) = E\Big(E\big[\widetilde{N}\big(\Lambda\mu(t)\big) \mid \Lambda\big]\Big) \\ &= E[\Lambda\mu(t)] = E(\Lambda)\mu(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

[7] Celobrojna slučajna promenljiva Z je negativno binomno raspodeljena sa parametrom (p, v) ako ima verovatnoću

$$P(Z = k) = \binom{v + k - 1}{k} p^v (1 - p)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad p \in (0,1), \quad v > 0.$$

Prema tome, ako je $E(\Lambda) = 1$, srednje vrednosti slučajnih promenljivih $\widetilde{N}\big(\mu(t)\big)$ i $N(t)$ su iste. Razlike između mešovitog Poasonovog procesa i Poasonovog procesa sa istom funkcijom srednje vrednosti mogu se videti u varijansama. Pre svega uočimo da je

$$E(N(t)|\,\Lambda) = \Lambda\mu(t) \qquad\qquad D(N(t)|\,\Lambda) = \Lambda\mu(t). \tag{2.3.2}$$

Lema 2.3.1

Neka su A i B slučajne promenljive takve da je $D(A) < \infty$. Tada

$$D(A) = E[D(A \mid B)] + D(E[A \mid B]).$$

Primena ove formule za $A = N(t) = \widetilde{N}\big(\Lambda\mu(t)\big)$ i $B = \Lambda$ zajedno sa (2.3.2) daje:

$$\begin{aligned} D\big(N(t)\big) &= E[D(N(t) \mid \Lambda)] + D(E[N(t) \mid \Lambda]) \\ &= E[\Lambda\mu(t)] + D(\Lambda\mu(t)) \\ &= E(\Lambda)\mu(t) + D(\Lambda)\big(\mu(t)\big)^2 \\ &= E\big(N(t)\big)\left(1 + \frac{D(\Lambda)}{E(\Lambda)}\mu(t)\right) > E\big(N(t)\big)\,, \end{aligned}$$

gde smo pretpostavili da je $D(\Lambda) < \infty$ i $\mu(t) > 0$.

Svojstvo da je

$$D(N(t)) > E(N(t)) \ \text{ za svako } \ t > 0 \ \text{ sa } \ \mu(t) > 0 \tag{2.3.3}$$

nazivamo „*over-dispersion*“.

Ovo je jedna od ključnih razlika između mešovitog Poasonovog procesa i Poasonovog procesa N, gde je $E\big(N(t)\big) = D(N(t))$. Dakle, među svim mešovitim Poasonovim raspodelama sa fiksiranim očekivanjem, Poasonova raspodela ima najmanju varijansu. Može se takođe pokazati i da je u klasi mešovitih Poasonovih procesa Poasonov proces jedini koji nema svojstvo „*over-dispersion*“.

Rezimiranjem dolazimo do nekih važnih karakteristika mešovitog Poasonovog procesa. Sledeće osobine se prenose sa Poasonovog na mešoviti Poasonov proces:

- Markovsko svojstvo

- Svojstvo statistike poretka; ako funkcija μ ima neprekidnu, skoro svuda pozitivnu funkciju intenziteta λ, i N ima vremena dospevanja $0 < T_1 < T_2 < \cdots$, tada za svako $t > 0$ važi jednakost raspodela:

$$(T_1, \dots, T_n \mid N(t) = n) = \left(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}\right),$$

gde je desna strana jednakosti tzv. statistika poretka nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih $X_1, \dots, X_n$ sa zajedničkom gustinom $\lambda(x)/\mu(t)$, $0 \le x \le t$.

Osobina statistike poretka je značajna jer ne zavisi od promenljive mešanja Λ. Specijalno, za homogeni Poasonov proces uslovna verovatnoća od $(T_1, \dots, T_{N(t)})$ za dato $\{N(t) = n\}$ je raspodela statistike poretka nezavisnih slučajnih promenljivih sa jednakom uniformnom $\mathcal{U}(0, t)$ raspodelom.

Mešoviti Poasonov proces gubi neke od osobina Poasonovog procesa:

- Ima priraštaje koji su međusobno zavisni
- U opštem slučaju, raspodela od $N(t)$ nije Poasonova
- On je „*over-dispersed*“

3

Ukupan iznos isplaćenih odšteta

U prethodnom poglavlju obradili smo tri najistaknutija procesa prebrajanja zahteva za ispatu štete, N:

- Poasonov proces
- Proces obnavljanja
- Mešoviti Poasonov proces

U ovom poglavlju iskoristićemo navedene procese kako bismo predstavili *proces ukupne sume isplaćenih odšteta* (the total claim amount process):

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \ , \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

gde je proces prebrajanja zahteva N nezavisan od niza veličina zahteva (X_i) čiji su elementi nezavisni, sa jednakom raspodelom. Takođe pretpostavljamo da je skoro sigurno $X_i > 0$. U zavisnosti od izbora procesa prebrajanja N dobijamo različite modele za proces S. U primeru 2.1.1 uveli smo Kramer-Lundbergov model kao specijalni slučaj modela (3.1) kada je N homogen Poasonov proces. Drugi istaknuti model za S je takozvani model obnavljanja ili Sparre-Andersonov model. To je model (3.1) kada je N proces obnavljanja.

3.1. Red veličine ukupnog iznosa isplaćenih odšteta

Jedno od najvažnijih pitanja za osiguravajuće društvo je da odredi red veličine od $S(t)$ za zadati određeni model za S. Ova podatak je potreban kako bi se utvrdila premija koja pokriva gubitke predstavljene sa $S(t)$.

Poželjno bi bilo znati raspodelu od $S(t)$. Ovo je, međutim, u opštem slučaju previše komplikovan problem i zato se često oslanja na numeričke metode ili metode simulacije da bi se približno odredila raspodela od $S(t)$. U ovom poglavlju razmatramo neke jednostavne načine za dobijanje grube procene o ukupnom iznosu zahteva za isplatu štete. Ti načini obuhvataju određivanje očekivanja i varijanse od $S(t)$, zakon velikih brojeva i centralnu graničnu teoremu za $S(t)$ kada $t \to \infty$. U poglavlju 3.2 proučićemo vezu između ovih rezultata i principa izračunavanja premije.

3.1.1 Očekivanje i varijansa u različitim modelima

- Očekivanje od $S(t)$ u Kramer-Lundbergovom modelu i modelu obnavljanja

Očekivanje za ukupan iznos isplaćenih odšteta se lako izračunava korišćenjem nezavisnosti od X_i i $N(t)$, ako su $E(N(t))$ i $E(X_1)$ konačni:

$$E\big(S(t)\big) = E\left[E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \,\middle|\, N(t)\right)\right] = E(N(t)E(X_1)) = E\big(N(t)\big)E(X_1).$$

U Kramer-Lundbergovom modelu $E\big(N(t)\big) = \lambda t$, gde je λ koeficijent intenziteta homogenog Poasonovog procesa N. Stoga,

$$E\big(S(t)\big) = \lambda t E(X_1).$$

U modelu obnavljanja formula koja se dobija nije ovako jednostavna. Međutim, za dato $E(W_1) = \lambda^{-1} < \infty$ iz osnovne teoreme obnavljanja (Teorema 2.2.3) sledi da je $E(N(t)\,)/t \to \lambda$ s.s. kad $t \to \infty$. Zato je

$$E\big(S(t)\big) = \lambda t E(X_1)\big(1 + o(1)\big)\,, \qquad t \to \infty.$$

Ovaj rezultat nije toliko precizan kao što je to slučaj u Kramer-Lundbergovom modelu. Ipak, ova formula nam ukazuje na to da očekivani ukupan iznos isplaćenih odšteta raste skoro linearno za dovoljno veliko t. Kao i u slučaju Kramer-Lundbergovog modela, nagib linearne funkcije je određen recipročnom vrednošću očekivanog vremena između dva dospeća $E(W_1)$ i očekivane veličine zahteva $E(X_1)$.

- Varijansa od $S(t)$ u Kramer-Lundbergovom modelu i modelu obnavljanja

Očekivanje nam ne daje dovoljno podataka o raspodeli od $S(t)$. Ukoliko kombinujemo informacije o $E(S(t))$ sa varijansom $D(S(t))$ saznajemo više o redu veličine od $S(t)$. Pretpostavimo da su $D(N(t))$ i $D(X_1)$ konačne. Postavljanjem uslova $N(t)$ i korišćenjem nezavisnosti od $N(t)$ i (X_i), dobijamo

$$var\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \mid N(t)\right] = \sum_{i=1}^{N(t)} D(X_i \mid N(t))$$

$$= N(t)\, D(X_1 \mid N(t)) = N(t)\, D(X_1)\,,$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \mid N(t)\right] = N(t)E(X_1).$$

Na osnovu Leme 2.3.1 zaključujemo da je

$$D\big(S(t)\big) = E[N(t)D(X_1)] + D(N(t)E(X_1))$$

$$= E\big(N(t)\big)D(X_1) + D\big(N(t)\big)\big(E(X_1)\big)^2.$$

U Kramer-Lundbergovom modelu Poasonova raspodela od $N(t)$ daje nam

$$E\big(N(t)\big) = D\big(N(t)\big) = \lambda t.$$

Otuda

$$D\big(S(t)\big) = \lambda t[D(X_1) + (E(X_1))^2] = \lambda t E\big({X_1}^2\big).$$

U modelu obnavljnja koristimo neke asimptotske osobine za $E(N(t))$ i $D(N(t))$ pozivajući se na Teoremu 2.2.3 i Tvrdjenje 2.2.4:

$$D\big(S(t)\big) = [\lambda t\, D(X_1) + D(W_1)\, \lambda^3 t\, (E(X_1))^2]\,(1 + o(1))$$

$$= \lambda t\,[D(X_1) + D(W_1)\,\lambda^2\,(E(X_1))^2]\,\big(1 + o(1)\big). \qquad \square$$

Tvrđenje 3.1.1 (Očekivanje i varijansa ukupne sume isplaćenih odšteta u modelu obnavljanja)

Ako su $E(W_1) = \lambda^{-1}$ *i* $E(X_1)$ *u modelu obnavljanja konačni,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(S(t))}{t} = \lambda E(X_1) \,.$$

Ako su $var(W_1)$ *i* $D(X_1)$ *konačni, tada je*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D(S(t))}{t} = \lambda \, [D(X_1) + D(W_1) \, \lambda^2 \, (E(X_1))^2] \,.$$

U Kramer-Lundbergovom modelu ove granične relacije transformišu se u identitete za svako $t > 0$:

$$E\big(S(t)\big) = \lambda t E(X_1) \quad \text{i} \quad D\big(S(t)\big) = \lambda t E\big({X_1}^2\big) \,.$$

Na osnovu ovih rezultata možemo zaključiti da u modelu obnavljanja i očekivanje i varijansa ukupnog iznosa odšteta rastu skoro linearno kao funkcija od t. Ovo je važan podatak koji može biti iskorišćen za formiranje pravila koje se koristi u praksi o tome koliko treba promeniti iznos premije da bi se pokrili gubici $S(t)$: premija treba da raste skoro linearno sa nagibom većim od $\lambda E(X_1)$. U poglavlju 3.2 razmotrićemo neke od klasičnih principa obračunavanja premije i videćemo da je ovo formirano pravilo zaista veoma značajno.

3.1.2 Asimptotsko ponašanje modela obnavljanja

U ovom poglavlju obratićemo pažnju na asimptotsko ponašanje procesa ukupne sume isplaćenih odšteta. Za proces ukupne sume odšteta S uzećemo proces obnavljanja. $S(t)$ u velikoj meri zadovoljava jak zakon velikih brojeva i centralnu graničnu teoremu:

Teorema 3.1.2 (Jak zakon velikih brojeva i centralna granična teorema u modelu obnavljanja)

Pretpostavimo model obnavljanja za S.

1. *Ako vremena između dva dospeća* W_i *i veličine zahteva* X_i *imaju konačna očekivanja,* S *zadovoljava* jak zakon velikih brojeva:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{t} = \lambda \, E(X_1) \quad s.s \tag{3.1.1}$$

2. *Ako vremena između dva dospeća W_i i veličine zahteva X_i imaju konačne varijanse, S zadovoljava* centralnu graničnu teoremu:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P\left(\frac{S(t)-E(S(t))}{\sqrt{D(S(t))}}\le x\right)-\Phi(x)\right|\to 0\,, \qquad (3.1.2)$$

gde je Φ *funkcija normalne* $\mathcal{N}(0,1)$ *raspodele.*

Primetimo da slučajan proces sume S u suštini zadovoljava principe jakog zakona velikih brojeva i centralne granične teoreme kao i proces parcijalne sume

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n\,, \quad n \ge 1.$$

Zaista, iz teorije verovatnoće znamo da (S_n) zadovoljava jak zakon velikih brojeva

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = E(X_1) \quad s.s., \qquad (3.1.3)$$

ako je $E(X_1) < \infty$, i centralnu graničnu teoremu

$$P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}} \le x\right) \to \Phi(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

ako je $D(X_1) < \infty$.

U obe relacije, (3..1.1) i (3.1.2), možemo iskoristiti asimptotske izraze za $E(S(t))$ i $D(S(t))$ na šta je ukazano u Tvrđenju 3.1.1 za normalizovanje u cilju centralizacije. Dakle, imamo

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{E(S(t))} = 1 \quad s.s$$

To može biti prikazano putem nekih složenijih asimptotskih izraza kad $t \to \infty$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P\left(\frac{S(t)-\lambda E(X_1)t}{\sqrt{\lambda t\,[D(X_1)+D(W_1)\,\lambda^2(E(X_1))^2]}}\le x\right)-\Phi(x)\right|\to 0\,.$$

Jak zakon velikih brojeva za ukupan iznos isplaćenih odšteta je jedan od važnijih rezultata koji je iskusilo svako osiguravajuće društvo od samog osnivanja osiguravačkih kompanija. Razlog je to što se jak zakon velikih brojeva može se posmatrati u okviru podataka iz realnog života. Njegova primena nam daje potvrdu da u proseku veliki i mali zahtevi tokom vremena konvergiraju ka njihovim teoretskim srednjim vrednostima. Jak zakon velikih brojeva i centralna granična teorema za S su ključni rezultati kada je u pitanju obračunavanje premije.

3.1.3 Raspodela iznosa zahteva za isplatu štete

Primetimo da skoro svaka apsolutno neprekidna raspodela ima eksponencijalno ograničen rep. Na primer, za neko $a, b > 0$ imamo $\bar{F}(x) = 1 - F(x) \leq ae^{-bx}$ za svako $x > 0$. Za takve raspodele se kaže da imaju *tanak rep*. Jedna od mogućih karakterizacija je sledeća: ako je

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\lambda x}} < \infty \qquad \text{za neko } \lambda > 0,$$

možemo reći da je F *tankog repa*, a ako je

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\lambda x}} > 0 \qquad \text{za svako } \lambda > 0,$$

F je *debelog repa*.

Zajednička raspodela iid niza $\{X_i\}$ naziva se raspodela iznosa (veličine) zahteva (claim size distribution). Uvodimo pretpostavku da X_i ima eksponencijalnu raspodelu. U tom slučaju

$$P(X_i > x) = e^{-\lambda x},\ x > 0, \text{ gde je } \lambda > 0;$$

to jest, (desni) rep raspodele iznosa štete opada sa eksponencijalnom stopom. Većina raspodela koje se koriste za modeliranje u statistici imaju ovo svojstvo. Normalna raspodela opada još bržim tempom. Ovakve raspodele su raspodele tankih repova i njihova funkcija izvodnica momenta postoji u okolini nule.

Važno je napomenuti da raspodele veličina zahteva nemaju nužno tanak rep. Rizici u vezi sa osiguranjem aviona, brana, mostova, nebodera, i td. su veoma visoki. Poslednjih godina kompanije su suočene sa propasti ili su blizu propasti zbog veoma malog broja izuzetno velikih zahteva. Postoji mnogo aspekta posmatranja raspodela sa debelim repovima. Međutim, za ove raspodele uvek važi da funkcija izvodnica momenta ne postoji u svakoj okolini nule. U nastavku je dat opšti pojam debelih repova u kontekstu osiguranja.

Neka je F funkcija raspodele na $(0, \infty)$. Neka je $X_1, X_2, ...$ iid niz sa zajedničkom funkcijom raspodele F. Dalje neka je $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ i $M_n = max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

Ako je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(S_n > x)}{P(M_n > x)} = 1\,, \qquad \text{za } n \geq 2, \tag{3.1.5}$$

tada F nazivamo *subeksponencijalnom funkcijom raspodele*.

Jednakost (3.1.5) ukazuje da parcijalna suma i parcijalni maksimum imaju isto ponašanje repova, što se poklapa sa intuitivnim shvatanjem da je iznos zbira zahteva u suštini određen najvećim od njih.

Ako je F subeksponencijalno, može se pokazati da

$$e^{\alpha x} P(X \geq x) \to \infty,$$

za proizvoljno $\alpha > 0$, gde je X slučajna promenljiva sa funkcijom raspodele F.

Kako funkcija izvodnica momenta ne postoji u okolini nule, primetimo da Teorema 2.1.12 nije primenljiva. U suštini, kada raspodela veličina zahteva pripada odgovarajućoj potklasi subeksponencijalnih raspodela može se utvrditi da se $\psi(u)$ ponaša kao $Ku^{-\delta}$ za veliko u, gde su $K, \delta > 0$ odgovarajuće konstante. Uporedimo ovo sa eksponencijalnom stopom e^{-ru}, gde je $r > 0$ u Teoremi 2.1.12. Dakle, propast je mnogo „strašnija“ ako je raspodela veličine zahteva sa debelim repom.

Pomenimo neke primere raspodela sa debelim repovima.

- *Lognormalna $\mathcal{LN}(m, \sigma^2)$ raspodela:*

  Ako Y ima normalnu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodelu, tada e^Y ima lognormalnu $\mathcal{LN}(m, \sigma^2)$ raspodelu. Formalno, gustina lognormalne raspodele data je sa

  $$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}}\,, \qquad x > 0.$$

- *Weibull-ova $W(\tau, c)$ raspodela*:

  U ovom slučaju

  $$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \begin{cases} \exp(-cx^{\tau}) & \text{ako je } x > 0 \\ 0 & \text{ako je } x \leq 0 \end{cases}$$

  pri čemu su $c > 0,\ \tau > 0$ konstante.

  Ovaj tip raspodela se, osim u osiguranju, koristi i u teoriji pouzdanosti. Ako je $\tau \geq 1$ tada $W(\tau, c)$ ima tanki rep, a ako je $0 < \tau < 1$ tada je F subeksponencijalna raspodela.

- *Paretova $Par(\alpha, k)$ raspodela*:

  Ovde je

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \frac{k^{\alpha}}{(k + x)^{\alpha}}$$

  gde je $x > 0$, a $k, \alpha > 0$ su konstante.

  Paretova raspodela pripada klasi subeksponencijalnih (iako očekivanje postoji samo kada je $\alpha > 1$). Koristi se takođe i u ekonomiji kako bi se opisala raspodela prihoda.

Aktuari uglavnom smatraju da su lognormalne raspodele verodostojne za modele za osiguranje motornih vozila, dok se na Paretove raspodele oslanjaju kada je reč o podacima za model osiguranja od požara.

3.2 Klasični principi obračunavanja premije

Jedno od najvažnijih pitanja za poslovanje osiguravajućeg društva je kako odrediti visinu premije da bi se pokrili gubici tokom vremena, opisani procesom ukupnog iznosa isplaćenih odšteta S. U ovom kontekstu mislimo na prihod od premije $p(t)$ u portfoliu polisa gde se zahtevi za isplatu štete pojavljuju kao determinističke funkcije. Gruba ali korisna aproksimacija slučajne veličine $S(t)$ data je pomoću njenog očekivanja $E(S(t))$. Oslanjajući se na rezultate iz poglavlja 3.1.1 i 3.1.2 za model obnavljanja, možemo očekivati da je osiguravajuće društvo u proseku u gubitku ako je $p(t) < E(S(t))$ za veliko t, a u dobitku ako je $p(t) > E(S(t))$ za veliko t. Stoga ima smisla birati premiju na osnovu očekivanog iznosa odšteta putem pozitivnog broja ρ.

Na primer, iz Tvrđenja 3.1.1 znamo da je u modelu obnavljanja

$$E\big(S(t)\big) = \lambda\, E(X_1)\, t\, \big(1 + o(1)\big)\,, \quad t \to \infty.$$

Zato je logično odabrati $p(t)$ koristeći jednačinu

$$p(t) = (1 + \rho)E(S(t)) \;\text{ ili }\; p(t) = (1 + \rho)\, \lambda\, E(X_1)t\,, \tag{3.1.6}$$

za neki pozitivan broj ρ koji nazivamo *doplata za sigurnost* (safety loading) kao što je već pomenuto u Poglavlju 2.1.6.

Iz asimptotskih rezultata u Poglavljima 3.1.1 i 3.1.2 očigledno je da je poslovanje osiguravajućeg društva sigurnije za veće ρ. S druge strane, prevelike vrednosti za ρ mogu učiniti osiguravajuće društvo manje konkurentnim. U tim slučajevima broj ugovora može opasti ako je premija suviše visoka u odnosu na druge premije ponuđene na tržištu. Budući da se uspeh osiguravajućeg društva bazira na jakom zakonu velikih brojeva, potreban je veliki broj polisa da bi se obezbedio balans između prihoda od premija i ukupnog iznosa odšteta.

Navešćemo neke od osnovnih principa obračunavanja premije:

- *Neto ili princip ekvivalentnosti*

  Ovaj princip premiju $p(t)$ u trenutku t određuje kao očekivanje ukupnog iznosa isplaćenih odšteta $S(t)$:

  $$p_{Net}(t) = E\big(S(t)\big).$$

  Na ovaj način obračunata premija ima čisto teorijsku vrednost kao „standardna premija". Ne koristi se u praksi.

- *Princip očekivane vrednosti*

  $$p_{EV}(t) = (1+\rho)E\big(S(t)\big),$$

  za neki pozitivan dodatak za sigurnost ρ. Objašnjenje ovog principa je sadržano u okviru Teoreme 3.1.2 o jakom zakonu velikuh borjeva.

- *Princip varijanse*

  $$p_{Var}(t) = E\big(S(t)\big) + \alpha\, D\big(S(t)\big)\,,$$

  za neko pozitivno α. U modelu obnavljanja ovaj princip je u asimptotskom smislu ekvivalentan principu očekivane vrednosti sa pozitivnim dodatkom za sigurnost. Zaista, koristeći Tvrđenje 3.1.1, nije teško uočiti da odnos naplaćenih premija na osnovu oba principa konvergira ka pozitivnoj konstanti kad $t \to \infty$, a α preuzima ulogu pozitivnog dodatka za sigurnost.

- *Princip standardne devijacije*

  $$p_{SD}(t) = E\big(S(t)\big) + \alpha\,\sqrt{D\big(S(t)\big)}\,,$$

za neko pozitivno α. Objašnjenje ovog principa je centralna granična teorema za model obnavljanja (Teorema 3.1.2),

$$P(S(t) - p_{SD}(t) \leq x) \to \Phi(\alpha), \qquad x \in \mathbb{R},$$

gde je Φ funkcija standardne normalne raspodele. U modelu obnavljanja princip standardne devijacije i neto princip su ekvivalentni u tom smislu što odnos ove dve premije konvergira ka 1 kad $t \to \infty$. To znači da je premija koristeći ovaj princip manja u poređenju sa principima očekivane vrednosti i varijanse.

Tumačenje principa obračunavanja premije zavisi od osnovnog modela. U modelu obnavljanja i u Kramer-Lundbergovog modelu tumačenje sledi iz centralne granične teoreme i iz jakog zakona velikih brojeva. Ako pretpostavimo da koristimo mešoviti homogeni Poasonov proces kao proces prebrajanja zahteva za odštetu, osobina „over-dispersion“, tj. $D(N(t)) > E(N(t))$, može dovesti do potpuno drugačijeg iskaza. Na primer, za mešoviti složeni homogeni Poasonov proces važi

$$\frac{p_{Var}(t)}{p_{EV}(t)} \to \infty$$

kad $t \to \infty$.

Zaključak

Cilj ovog rada je bio da se prikažu pojedini stohastički procesi koji imaju široku upotrebu u oblasti neživotnog osiguranja, kao i njihova primena u datoj oblasti. Posebna pažnja je posvećena određivanju ukupnog iznosa za isplatu štete kako bi se mogao odrediti adekvatan iznos premije. S obzirom da postoje različiti tipovi osiguranja, ne postoji jedinstven model za proces prebrajanja šteta. Model je neophodno prilagoditi učestalosti nastanka šteta koja može varirati pod uticajem različitih determinističkih i slučajnih faktora. U zavisnosti od odabira modela za proces prebrajanja dobijaju se različiti rezultati koji su od izuzetnog značaja za poslovanje osiguravajućeg društva, a jedan od važnijih rezultata su svakako i različiti principi za obračunavanje premije.

Literatura

1. Embrechts P., Frey R, Furrer H, *Stochastic Processes in Insurance and Finance,* Elsevier, 2001.
2. Lefebvre M., *Applied Stochastic Processes*, Springer, 2006.
3. Mikosch T., *Non-Life Insurance Mathematics*, Springer, 2009.
4. Rajter-Ćirić D., *Verovatnoća*, Novi Sad, 2008.
5. Ramasubramanian S., *On a Stochastic Model in Insurance*, Springer India, 2006.
6. Rausand M., Høyland A., *System reliability theory: models, statistical methods, and applications*, Wiley, 2004.
7. Resnik I.S., *Adventures in stochastic processes*, Birkhäuser, 1992.
8. Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley, 1999.
9. Winkel M., *Lecture Notes – Part B Applied Probability*, Oxford MT 2007.

Kratka biografija

Rođena sam 22. jula 1987. godine. Završila sam Osnovnu školu „Miloš Crnjanski“ u Srpskom Itebeju, a zatim Zrenjaninsku gimnaziju, prirodno-matematički smer, kao nosilac Vukove diplome. Po završetku srednje škole, 2006. godine, upisala sam osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija. Osnovne studije završila sam 2010. godine sa prosekom 8,94 i iste godine upisala master studije primenjene matematike, modul matematika finansija, takođe na Prirodno-matematičkom fakultetu. Zaključno sa septembrom 2011. godine položila sam sve ispite predviđene planom i programom.

Novi Sad, jun 2012. Brankica Simeonov

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: **RBR**	
Identifikacioni broj: **IBR**	
Tip dokumentacije: **TD**	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: **TZ**	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: **VR**	Master rad
Autor: **AU**	Brankica Simeonov
Mentor: **MN**	dr Danijela Rajter-Ćirić
Naslov rada: **NR**	Primena stohastičkih procesa u teoriji neživotnog osiguranja
Jezik publikacije: **JP**	srpski (latinica)
Jezik izvoda: **JI**	s/en
Zemlja publikovanja: **ZP**	Srbija
Uže geografsko područje: **UGP**	Vojvodina
Godina: **GO**	2012.
Izdavač: **IZ**	Autorski reprint
Mesto i adresa: **MA**	Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

Fizički opis rada: **FOR**	(3/69/0/0/0/2/0) (broj poglavlja, strana, lit.citata, tabela, slika, grafika, priloga)
Naučna oblast: **NO**	Matematika
Naučna disciplina: **ND**	Stohastička analiza
Predmetne odrednice, ključne reči: **PO** **UDK**	Stohastički proces, Poasonov proces, procesi obnavljanja, mešoviti Poasonov proces, ukupan iznos isplaćenih odšteta
Čuva se: **ČU**	U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
Važna napomena: **VN**	
Izvod: **IZ**	U radu su prikazani stohastički procesi koji su značajni u teoriji neživotnog osiguranja. Detaljno je predstavljen Poasonov proces, kao proces sa najpogodnijim osobinama. Prikazani su i proces obnavljanja i mešoviti Poasonov proces. U zavisnosti od odabira modela za proces prebrajanja broja zahteva za isplatu štete, dobijeni su različiti rezultati za procenu ukupnog iznosa koji je potreban za isplatu šteta. Dati su i neki klasični principi obračunavanja premije.
Datum prihvatanja teme: **DP**	21.02.2012.
Datum odbrane: **DO**	
Članovi komisije: **KO**	
Predsednik:	dr Sanja Rapajić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član:	dr Dora Seleši, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor:	dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Serial number: **SNO**	
Identification number: **INO**	
Document type: **DT**	Monograph type
Type of record: **TR**	Printed text
Content code: **CC**	Master’s thesis
Author: **AU**	Brankica Simeonov
Menthor: **MN**	dr Danijela Rajter-Ćirić
Title: **TI**	Stochastic processes applied in non-life insurance
Language of text: **LT**	Serbian (Latin)
Language of abstract: **LA**	s/en
Country of publication: **CP**	Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2012.
Publisher: **PU**	Author’s reprint
Publication place: **PP**	Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

Physical description: **PD**	(3/69/0/0/0/2/0) (chapters/pages/literature/tables/pictures/ graphs/add.lists)
Science field: **SF**	Mathematics
Scientific discipline: **SD**	Stochastics Analysis
Subject, Key word: **SKW**	Stochastic process, Poisson process, Renewal Process, Mixed Poisson Process, Total Claim Amount
Holding data: **HD**	In library of Department of Mathematics and Informatics
Note: **N**	
Abstract: **AB**	This thesis is about stochastic pocesses which are significant in the theory of non-life insurance. Poisson processes are presented in detail, as a process with the most appropriate properties. There are also shown Renewal Process and Mixed Poisson Process. Depending on the choice of the claim number process, we got different results for the approximation of the total claim amount. At the end of the paper are given some classical principles of calculating premiums.
Accepted on Scientific Board on: **AS**	21.02.2012.
Defended: **DE**	
Thesis defended board: **DB**	
President:	dr Sanja Rapajić, associate professor, Faculty of Science, Novi Sad
Member:	dr Dora Seleši, assistant professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
Mentor:	dr Danijela Rajter-Ćirić, full professor, Faculty of Science, Novi Sad