UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Branka Jovičin

Svojstva konveksnosti i Pareto efikasnost

Master rad

Mentor:
dr Milica Žigić

Novi Sad, 2019

Sadržaj

Predgovor

Sadržaj master rada "Svojstva konveksnosti i Pareto efikasnost" obuhvata jedan mali deo širokog spektra primene konveksne analize. Konkretno, rad izučava osobine i analizira posledice svojstva konveksnosti, a zatim dobijene rezultate primenjuje u svrhu ispitivanja Pareto efikasnosti u ekonomiji.

$\diamondsuit \quad \diamondsuit \quad \diamondsuit$

U prvoj glavi uvodimo osnovne pojmove konveksne analize. Rad počinjemo predstavljanjem osnovnih metričkih i topoloških pojmova. Zatim, definišemo i pokazujemo svojstva konveksnog skupa, konusa, kao i konveksnih funkcija. Koveksni omotač definišemo kao jedan bitan pojam koji se koristi u sledećoj glavi. Takođe, i hiperravni koristimo kroz ceo rad, u teoremama separacije i u teoremama sa primenom subdiferencijala. Teoreme separacije se bave postojanjem hiperravni koja razdvaja dva disjunktna konveksna skupa. One se povezuju sa egzistencijom rešenja jednačine predstavljene u Minkovski-Farkaš teoremi.

U drugoj glavi predstavljamo teoreme Radona, Karateodorija i Helija, koje redom daju geometrijsku, algebarsku i topološku karakterizaciju konveksnih skupova. Karakteristično za Helijevu teoremu je njeno uopštenje na beskonačno mnogo konveksnih skupova koje važi ako dodatno pretpostavimo njihovu kompaktnost. Helijevu teoremu možemo primeniti u dokazivanju teorema koje nisu klasičnog kombinatornog tipa.

U trećoj glavi dokazujemo ekvivaleciju ova tri pristupa konveksnim skupovima preko teorema Radona, Karateodorija i Helija, gde su dokazi bazirani na subdiferencijalu funkcije rastojanja tačke od skupa. Subdiferencijal ima slične osobine kao prvi izvod funkcije i on je višeznačna funkcija.

U poslednjoj glavi upoznajemo se sa biografijom naučnika Vilfreda Pareta čije smo rezultate koristili u radu. Dalje uvodimo nekoliko specifičnih oblika problema optimizacije. Bavićemo se teoremama Vajerštrasa, Lagranža i Kun-Takera. Na kraju, pomoću teorema separacije, razdvajanja konveksnih skupova u $\mathbb{R}^n$ i Kun-Takerove teoreme pokazaćemo rešenje problema određivanja Pareto optimalnosti. Navodimo pojam Pareto efikasnosti koji nam govori da Pareto optimalna raspodela postoji ako nije moguće drugačije raspodeliti resurse osim da ekonomsko blagostanje jedne individue ne poraste na račun druge. Rad završavamo dokazom i objašnjenjima prve i druge teoreme blagostanja.

♢ ♢ ♢

Želim da se zahvalim svima koji su me podržavali i pomagali mi tokom izrade master rada.

Zahvaljujem se članovima komisije i mom mentoru dr Milici Žigić koja mi je dala niz korisnih sugestija u cilju poboljšanja kvaliteta mog master rada.

Najveću zahvalnost dugujem mojoj porodici na podršci i razumevanju tokom mog školovanja.

Novi Sad, 2019.

Branka Jovičin

Glava 1

Uvod

Na početku rada uvodimo osnovne pojmove iz oblasti konveksne analize koje ćemo koristiti u nastavku rada. Jedan od najznačajnijih pojmova u matematičkoj ekonomiji i mnogim drugim područjima optimizacije jeste pojam konveksnosti. Vođeni time, prvo ćemo uvesti metričke i topološke pojmove, a zatim definisati i dati osnovne osobine konveksnih skupova, konusa, hiperravni i konveksnih funkcija. Projekcija tačke na skup nam je potrebna za dokaze teorema separacije, razdvajanja konveksnih skupova u $\mathbb{R}^n$. Sve navedene podskupove posmatramo unutar $\mathbb{R}^n$, sem ako nije drugačije navedeno. Kao teorijsku osnovu u ovoj glavi koristili smo knjige [2], [8], [13], i [14].

1.1 Metrički prostori i topologija

U prvom uvodnom poglavlju navodimo osnovne metričke i topološke pojmove koji će se intenzivno koristiti kroz ceo rad (videti [8], [14]).

Definicija 1.1. *Metrički prostor je par (X, d), gde je X skup, a d je metrika na X, odnosno funkcija koja definiše udaljenost između elemenata skupa X, data sa $d : X \times X \to \mathbb{R}$ gde je*

1. $d(x, y) \geq 0$ *(nenegativnost),*
2. $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako* $x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$ *(simetrija),*
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(nejednakost trouglova).*

Prostor $\mathbb{R}^n$ je metrički prostor u kojem se metrika d može definisati sledećim funkcijama:

1. $d_p(x,y) := [(x_1 - y_1)^p + ... + (x_n - y_n)^p]^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p \leq \infty$,

2. $d_\infty(x,y) := \max_{k=1,...,n}\{|x_k - y_k|\}$,

za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$. Najčešće se koristi metrika $d_2(x,y)$ koja se naziva euklidska metrika.

Pojam konvergentnog niza u metričkom prostoru definiše se na sledeći način:

Definicija 1.2. *Niz* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *u metričkom prostoru* (X,d) *konvergira ka* x, $x \in X$, *što označavamo sa* $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$ *ako je*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, x) = 0,$$

pri čemu se pretpostavlja da je poznata definicija konvergentnog niza u $\mathbb{R}$.

Definicija 1.3. *Niz* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *u metričkom prostoru* (X,d) *je Košijev ako važi*

$$\lim_{m,n\longrightarrow\infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Definicija 1.4. *Metrički prostor* (X,d) *je kompletan ako je i njemu svaki Košijev niz konvergentan.*

Definicija 1.5. *Za* $x \in X$ *i* $r > 0$, *sa* $L(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ *je označena otvorena lopta sa centrom u tački* x *i poluprečnikom* r, *a sa* $Z(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ *zatvorena lopta sa centrom u tački* x *i poluprečnikom* r.

Definicija 1.6. *Neka je* τ *kolekcija otvorenih skupova* $\mathcal{O}$ *metričkog prostora* (X,d). *Tada važi:*

1. $X, \emptyset \in \tau$,

2. $\mathcal{O}_k \in \tau,\ k = 1,...,n \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n \mathcal{O}_k \in \tau$,

3. $\mathcal{O}_\lambda \in \tau,\ \lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{O}_\lambda \in \tau$.

Struktura (X,τ) *sa navedenim svojstvima zove se topološki prostor.*

Uobičajena topologija na $\mathbb{R}^n$ se definiše pomoću familije otvorenih lopti $\{L(x,r) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$. Na sličan način i svaki drugi metrički prostor definiše topologiju: skup je otvoren ako je otvorena lopta ili njegova proizvoljna unija.

Definicija 1.7. *Neka je skup O otvoren skup i neka je tačka $x \in O$. Skup U takav da je $O \subseteq U$ je okolina tačke x. Otvoren skup je okolina svake svoje tačke.*

Definicija 1.8. *Vektorski prostor $(X, \|\cdot\|)$ je normiran ako preslikavanje dato sa $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ zadovoljava sledeće uslove:*

1. $\|x\| \geq 0$ *i* $\|x\| = 0$ *ako i samo ako je* $x = 0$,
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$,
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X$.

Prostor $\mathbb{R}^n$ je i normiran prostor sa normom:

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Svaki normirani prostor je metrički jer normom možemo definisati metriku na sledeći način:

$$d(x, y) := \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Kažemo da je ta metrika indukovana normom $\|\cdot\|$.

Kada je normiran prostor kompletan, on se zove *Banahov*[1] *prostor.* S obzirom da prostor $\mathbb{R}^n$ jeste kompletan on je i Banahov prostor.

Definicija 1.9. *U vektorskom prostoru X nad poljem realnih brojeva, preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longmapsto \mathbb{R}$ za koje važi:*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ *i* $\langle x, x \rangle = 0$ *ako i samo ako je* $x = 0$,
2. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, $\forall x, y, z \in X$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\forall x, y \in X$,

naziva se skalarni proizvod.

Skalarni proizvod u skupu $\mathbb{R}^n$ može da se računa na sledeći način: $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$, za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$, pri čemu je $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Skalarni proizvod uvek indukuje normu na sledeći način: $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in X$.

[1] S. Banach (1892-1945)

Teorema 1.10. *Neka su* $x = (x_1, ..., x_n)$ *i* $y = (y_1, ..., y_n)$ *vektori u* $\mathbb{R}^n$. *Tada važi Koši*[2]*- Švarcova*[3] *nejednakost:*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \le \|x\| \cdot \|y\|,$$

gde je $\|x\| = (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ *i* $\|y\| = (|y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$.

U normiranom prostoru $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ skalarni proizvod vektora je definisan sa

$$\langle x, y\rangle := \|x\|\|y\| \cos\gamma, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

gde je sa γ označen ugao između vektora x i y. Lako proveravamo da je na ovaj način definisan skalarni proizvod. Dakle, iz $|\cos\gamma| \le 1$ direktno sledi Koši-Švarcova nejednakost $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$, za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ugao između ne-nula vektora x i y se definiše svojim kosinusom $\cos\gamma := \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$.

Definicija 1.11. *Tačka* x *je adherentna tačka skupa* A *ako svaka njena okolina seče skup* A. *Skup adherentnih tačaka naziva se adherencija ili zatvaranje skupa* A *i označava se sa* $\overline{A}$.

Definicija 1.12. *Tačka* a *je tačka nagomilavanja skupa* A *ako u svakoj okolini tačke* a *postoji bar jedna tačka* $b \in A$, $b \ne a$. *Skup tačaka nagomilavanja skupa* A *označava se sa* A'.

Definicija 1.13. *Neka je tačka* x *rubna tačka skupa* A *ako za svaki otvoren skup* O, $x \in O$ *važi* $O \cap A \ne \emptyset$ *i* $O \cap A^C \ne \emptyset$. *Skup svih rubnih tačaka skupa* A *naziva se rub skupa* A *i označava se sa* ∂A.

Definicija 1.14. *Tačka* a *je unutrašnja tačka skupa* A *ako postoji okolina tačke* a *koja se cela sadrži u* A. *Skup svih unutrašnjih tačaka skupa* A *naziva se unutrašnjost skupa* A *i označava se sa* A^o.

Definicija 1.15. *Tačka* a *je izolovana tačka skupa* A *ako postoji barem jedna okolina tačke* a *koja osim tačke* a *ne sadrži nijednu drugu tačku skupa* A.

Na kraju ovog poglavlja definisaćemo svojstvo kompaktnosti na nekoliko različitih načina. Familija skupova ima svojstvo konačnog preseka ako svaka njena konačna podfamilija ima neprazan presek.

[2] A. L. Cauchy (1789-1857)
[3] K. H. A. Schwarz (1842-1921)

Teorema 1.16. *Ako je dato $C \subset \mathbb{R}^n$, tada su sledeći iskazi ekvivalentni:*

1. *Svaki otvoren pokrivač*[4] *skupa C sadrži konačan potpokrivač.*
2. *Svaki beskonačan podskup skupa C ima tačku nagomilavanja i ona pripada skupu C.*
3. *Svaki niz elemenata skupa C sadrži konvergentan podniz i granica tog podniza je element skupa C.*
4. *C je zatvoren i ograničen.*
5. *Svaka familija zatvorenih podskupova skupa C, koja ima osobinu konačnog preseka, ima neprazan presek, tj. barem jednu zajedničku tačku.*

Skup C koji ima neku od gore navedenih osobina zove se kompaktan skup.

Definicija 1.17. *Topološki prostor (X, τ) je kompaktan ako i samo ako svaki otvoren pokrivač skupa X sadrži konačan potpokrivač.*

Prostor $\mathbb{R}^n$ sa uobičajenom topologijom nije kompaktan.

1.2 Konveksni skupovi

Naredno poglavlje posvetićemo definiciji pojma konveksnog skupa i pokazaćemo neke od njegovih osobina. Uglavnom smo koristili oznake i pratili pristup dat u [2] i [14].

Definicija 1.18. *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ i neka je $A \subset X$. Skup A je konveksan ako za sve $x, y \in A$ i za sve $\alpha \in (0,1)$, važi $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$. Ako za sve $x, y \in A$ i za sve $\alpha \in \mathbb{R}$, važi $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$, kažemo da je A afin skup.*

Definicija 1.19. *Neka je dat vektorski prostor X i neka je dato m tačaka $x_1, x_2, ..., x_m$ tog vektorskog prostora. Tačka $x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$ je konveksna kombinacija tačaka $x_1, x_2, ..., x_m$, ako je $\alpha_k \geq 0$ za svako $k = 1, ..., m$ i $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$.*

U sledećoj teoremi date su algebarske osobine konveksnih skupova.

Teorema 1.20. *1. Dekartov proizvod konveksnih skupova je konveksan skup.*

[4]Pokrivač skupa $C \subset \mathbb{R}^n$ je bilo koja familija skupova u $\mathbb{R}^n$ čija unija sadrži C.

2. *Neka su dati $A_1, ..., A_m, A, B$ konveksni podskupovi u vektorskom prostoru X i neka je α realan broj. Tada su skupovi $A_1 + ... + A_m$, $A - B$ i αA konveksni.*

3. *Ako je B konveksan skup i α, β pozitivni realni brojevi tada važi $(\alpha + \beta)B = \alpha B + \beta B$.*

Sledeća teorema daje topološke karakteristike konveksnog skupa.

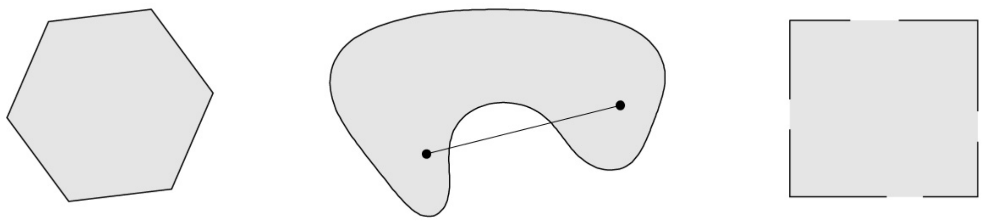
Teorema 1.21. *1. Zatvaranje konveksnog skupa je konveksan skup.*

2. Unutrašnjost konveksnog skupa je konveksan skup.

Sledeća teorema će biti od koristi prilikom dokaza teorema separacije.

Teorema 1.22. *Neka je A konveksan skup neprazne unutrašnjosti. Tada za proizvoljne x_0 i $y \in \overline{A}$ važi $[x_0, y) \subseteq A^o$.*

Primer 1.23. *Konveksni skupovi mogu biti prazan skup, skup koji se sastoji od jedne tačke i čitav skup $\mathbb{R}^n$. U skupu $\mathbb{R}^n$ lopta je konveksan skup dok kružnica nije konveksan skup. Skup koji sadrži više od jedne tačke i bar jednu izolovanu tačku nije konveksan.*



Slika 1.1. Primeri konveksnih skupova i onih koji to nisu. Prvi skup je konveksan, dok drugi i treći skup nisu konveksni.

Teorema 1.24. *Skup X je konveksan ako i samo ako sadrži sve konveksne kombinacije bilo kojeg konačnog broja svojih tačaka.*

Dokaz. Neka skup X sadrži sve konveksne kombinacije bilo kojeg konačnog broja svojih elemenata, tada sadrži i konveksne kombinacije bilo koja dva svoja elementa, pa je X konveksan skup. Obrnuto, pretpostavljamo da je X konveksan skup. Dati su proizvoljni $x_1, ..., x_n$ iz skupa X i neka je njihova proizvoljna konveksna kombinacija

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \in [0, 1], \ i = 1, ..., n.$$

Indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ dokazujemo da $x \in X$. Ako je $n = 2$, tada iz konveksnosti skupa X direktno sledi da $x \in X$. Sada pretpostavimo da za proizvoljnih $n-1$ elemenata skupa X, svaka njihova konveksna kombinacija pripada skupu X. Treba pokazati da tvrđenje važi i za n elemenata.

Konveksnu kombinaciju možemo zapisati u sledećem obliku:

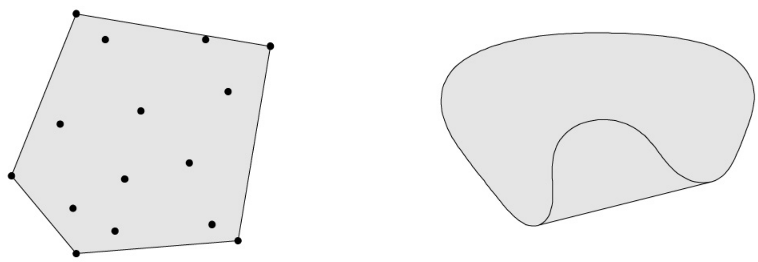
$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1)\left(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}x_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{1-\alpha_1}x_n\right).$$

Izraz u zagradi je konveksna kombinacija $n-1$ elemenata skupa X, pa po indukcijskoj pretpostavci pripada skupu X. Dakle,

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_1} = \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1} = 1, \quad \frac{\alpha_i}{1-\alpha_1} \in [0,1],\ i = 2, ..., n.$$

Jasno, x je predstavljena kao konveksna kombinacija dva elemenata iz X, koji je konveksan, pa je $x \in X$. $\square$

Definicija 1.25. *Neka je $A \subset X$, X je vektorski prostor. Presek svih konveksnih skupova koji sadrže skup A naziva se* ***konveksni omotač*** *skupa A i obeležava se sa coA.*



Slika 1.2. Primeri konveksnih omotača skupa u $\mathbb{R}^2$. Levo: Konveksni omotač skupa od petnaest tačaka, zove se pentagon. Desno: Konveksni omotač figure sa Slike 1.1 u sredini.

Konveksni omotač nekog skupa je konveksan skup, a ako je posmatrani skup konveksan, tada je on jednak svom konveksnom omotaču.

Primer 1.26. *Konveksni omotač skupa $\{x_1, x_2\}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ je duž koja ih spaja, konveksni omotač tri nekolinearne tačke u $\mathbb{R}^n$ je trougao čija su temena date tačke zajedno sa njegovom unutrašnjošću. Konveksni omotač konačnog broja tačaka u ravni je odgovarajući konveksni mnogougao.*

Za proizvoljne skupove $A, B \subset \mathbb{R}^n$ direktno pokazujemo da važi:

1. $A \subset coA$,
2. $A \subset B \Rightarrow coA \subset coB$,
3. $co(coA) = coA$.

Teorema 1.27. *Konveksni omotač otvorenog skupa je otvoren skup.*

Međutim, konveksni omotač zatvorenog skupa ne mora biti zatvoren skup, što ćemo pokazati u sledećem primeru.

PRIMER 1.28. *Neka je skup C zatvoren podskup od $\mathbb{R}^n$, dat sa*

$$C = \{(0,0)\} \cup \{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \geq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}.$$

Njegov konveksni omotač je skup

$$coC = \{(0,0)\} \cup \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0,\ x_2 > 0\},$$

koji nije zatvoren.

Ako je posmatrani zatvoren skup ograničen tj. kompaktan u $\mathbb{R}^n$, onda je njegov konveksni omotač takođe zatvoren i ograničen skup u $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.29. *Dato je $m+1$ tačaka u skupu $\mathbb{R}^n$, $x_0, x_1, ..., x_m$, takvih da su vektori $(x_k - x_0)$, $k = 1, ..., m$ linearno zavisni[5]. Konveksni omotač datih tačaka zove se m dimenzionalni simpleks i označava se sa S_m.*

Teorema 1.30. *Neka skup Y sadrži sve konveksne kombinacije proizvoljnog konačnog broja tačaka skupa X. Dokazati da važi $coX = Y$.*

Dokaz. Neka je $Z = coX$. Trebamo da pokažemo da je $Y = Z$.

Neka je $X \subset Z$ i Z je konveksan, pa na osnovu Teoreme 1.24 dobijamo da Z sadrži sve konačne konveksne kombinacije svojih elemenata, a zatim i elemenata svog podskupa X. Dakle, $Y \subset Z$. Vidimo da je $X \subset Y$, ako pokažemo da je Y konveksan, tada je $Y = Z$. Dati su proizvoljno $a, b \in Y$. Tada važi:

$$a = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i a_i, \quad \sum_{i=1}^{l} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \leq 0,\ i = 1, ..., l,$$
$$b = \sum_{j=1}^{k} \beta_j b_j, \quad \sum_{j=1}^{k} \beta_j = 1,\ \beta_j \leq 0,\ j = 1, ..., k,$$

[5]Vektori $a_1, ..., a_n$ su linearno nezavisni ako iz $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0$ sledi $\alpha_i = 0$ za svako $i = 1, ..., n$.

gde su $a_1, ..., a_l, b_1, ..., b_k \in X$. Neka je $\theta \in (0,1)$ proizvoljno, posmatramo kombinaciju

$$c = \theta a + (1-\theta)b = \sum_{i=1}^{l} \theta\alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{k} (1-\theta)\beta_j b_j.$$

Primetimo da je

$$\sum_{i=1}^{l} \theta\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} (1-\theta)\beta_j = \theta + (1-\theta) = 1,\ \theta\alpha_i \geq 0,\ i = 1, ..., l,$$
$$(1-\theta)\beta_j \geq 0,\ j = 1, ..., k.$$

Konačno, c kao konveksna kombinacija konačnog broja elemenata iz X pripada skupu Y, pa zaključujemo da je Y konveksan. □

Napomenimo ovde da Karateodorijeva teorema, koja je u centralnom delu rada, daje precizniju karakterizaciju elemenata konveksnog omotača skupa X i kaže da za svaki skup X u n-dimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^n$, element njegovog konveksnog omotača se dobija kao konveksna kombinacija najvise $n+1$ elemenata iz X, odnosno

$$coX = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i,\ x_i \in X,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}. \tag{1.1}$$

1.3 Konusi

Kao i konveksni skupovi i konusi su takođe značajni u teoriji optimizacije (videti [14]).

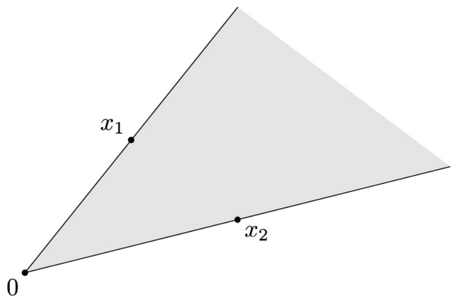
Definicija 1.31. *Skup $K \subset \mathbb{R}^n$ je konus sa vrhom u nuli, ako za svako $x \in K$ i svako $t > 0$ vazi $tx \in K$.*

Iz ove definicije vidimo da nula može, ali ne mora da pripada konusu. Ako je konus K sa vrhom u nuli, tada je skup $K_{x_0} = x_0 + K$ konus sa vrhom u x_0; njegovi elementi su oblika $x_0 + \lambda(y - x_0),\ y \in K_{x_0},\ \lambda > 0$.

Ako je dat afin skup $S = x_0 + C$, gde je C potprostor, tada je skup S takođe konus sa vrhom u x_0.

Konus ne mora biti konveksan, a ne mora biti ni otvoren skup, ali ako jeste zove se konveksan ili otvoren konus. Prazan skup je konveksan konus.

Teorema 1.32. *Skup $K \subset \mathbb{R}^n$ je konveksan konus sa vrhom u nuli ako i samo ako za sve $x, y \in K$ i sve $\alpha, \beta > 0$ važi $\alpha x + \beta y \in K$.*



Slika 1.3. Primer konveksnog konusa

Dokaz. Neka je skup K konveksan konus sa vrhom u nuli. Pokažimo da za sve $x, y \in K$ i sve $\alpha, \beta > 0$ važi $\alpha x + \beta y \in K$. Neka su dati $x, y \in K$ i $\alpha, \beta > 0$, tada važi:

$$(\alpha + \beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}x + \frac{\beta}{\alpha + \beta}y\right) \in K,$$

jer je skup K konveksan konus. Obrnuto, neka za sve $x, y \in K$ i $\alpha, \beta > 0$ važi $\alpha x + \beta y \in K$. Tada za unapred zadato $\lambda > 0$, birajući $\alpha = \beta = \frac{\lambda}{2}$ i $y = x$ se dobija $\lambda x \in K$, odnosno K je konus. A konveksnost se dobija birajući $\alpha \in (0, 1)$ i $\beta = 1 - \alpha$. $\square$

U nastavku ćemo navesti neka značajna svojstva konusa:

1. Neprazan presek proizvoljne familije konusa sa istim vrhom je konus sa tim vrhom.

2. Ako su K_1 i K_2 konusi sa vrhom u x_0, tada je $\alpha K_1 + \beta K_2$ konus sa vrhom u $(\alpha + \beta)x_0$, za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. Suma konveksnih konusa sa zajedničkim vrhom je konveksan konus.

4. Unutrašnjost, zatvaranje i konveksni omotač konusa je konus.

5. Unija konusa sa istim vrhom je konus sa tim vrhom, ali unija konveksnih konusa ne mora biti konveksan skup.

Neka je dat skup oblika

$$K^* = \{c \in \mathbb{R} \mid \langle c, x\rangle \geq 0, \ \forall x \in K\},$$

gde je K konus sa vrhom u nuli. Pošto $0 \in K^*$, K^* je neprazan skup. Za $x \in K^*$, $\lambda > 0$ važi $\langle c, \lambda x\rangle = \lambda \langle c, x\rangle > 0$, pa i $\lambda x \in K^*$. Dakle, on je takođe konus sa vrhom u nuli i nazivaćemo ga *konjugovanim (dualnim) konusom* konusa K. Za proizvoljan konus K, njemu konjugovan konus K^* je zatvoren i konveksan. $(K^*)^* = K$ ako i samo ako je K zatvoren i konveksan konus.

Dat je skup $S \subset \mathbb{R}^n$. Presek svih konveksnih konusa sa vrhom u nuli koji sadrže S zove se *konveksan konus generisan* skupom S i označava se sa $K(S)$. Ako se S sastoji od konačnog broja tačaka onda se $K(S)$ zove *konveksan poliedarski konus.*

Neka je $S = \{a^1, ..., a^m\} \subset \mathbb{R}^n$. Konstruisaćemo matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tako da su joj kolone dati vektori $a^1, ..., a^m$, tj.

$$A = (a^1 a^2 \cdots a^m)_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^m \end{bmatrix}.$$

Konus generisan matricom A je

$$cone(A) = \left\{ b \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \in \mathbb{R}_+^m \right\}.$$

Imamo da je $cone(A)$ neprazan konus jer se primenom matrice A na jedinične vektore $e^j = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}_+^m$ dobija $Ae^j = a^j \in cone(A)$, za $j \in \{1, 2, ..., m\}$. Takođe može se pokazati da je $cone(A)$ zatvoren konveksan sa vrhom u nuli, pri čemu $0 \in cone(A)$.

Može se pokazati da je $cone(A) \setminus \{0\} \subseteq K(S) \subseteq cone(A)$. $cone(A)$ je konveksan konus koji sadrži S, pa direktno dobijamo da je $K(S) \subseteq cone(A)$. Primenom Teoreme 1.32 pokazaćemo da je $K(S) \supseteq cone(A) \setminus \{0\}$. Zaista, $K(S)$ mora da sadrži i sve vektore oblika $\alpha a^i + \beta a^j$, $\alpha, \beta > 0$, za $i, j = 1, ..., m$, koji se dobijaju ako se matrica A primeni na sve vektore $\alpha e^i + \beta e^j$, $\alpha, \beta > 0$, $i, j = 1, ..., m$, odnosno ako se matrica A primeni na sve vektore $x \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$.

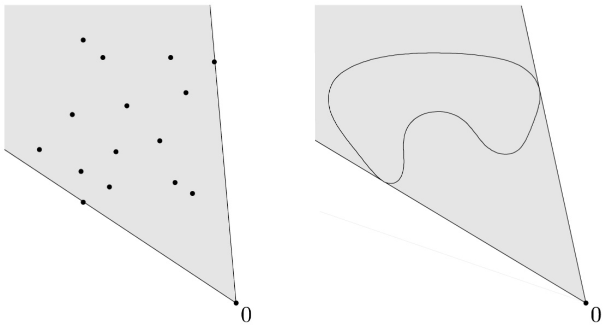
Ako skup S, pa time i $K(S)$ sadrži nulu, onda je on zatvoren skup. Što znači da za zatvoren konveksan poliedarski konus generisan konačnim skupom S važi $\overline{K(S)} = cone(A)$.

Definicija 1.33. *Tačka oblika $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$, gde su $\alpha_i \geq 0$, za $i = 1, ..., m$ se zove konusna kombinacija tačaka $x_1, ..., x_m$. Skup svih konusnih kombinacija tačaka iz S, odnosno*

$$\{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m \mid x_i \in S,\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, ..., m\},$$

naziva se ***konusni omotač*** *skupa S.*

Ako su x_i, $i = 1, ..., m$ tačke iz konveksnog konusa K, tada svaka njihova konusna kombinacija pripada K i obrnuto. Konusni omotač je najmanji konveksni konus koji sadrži skup S.



Slika 1.4. Primer konusnih omotača.

1.4 Hiperravni

U ovom poglavlju definišemo hiperravni koje će nam koristiti u dokazima teorema separacije i u teoremama sa primenom subdiferencijala. Nešto više o ovoj temi čitalac može pogledati u [14].

Definicija 1.34. *Neka je dat ne-nula vektor $c \in \mathbb{R}^n$ i broj $\gamma \in \mathbb{R}$, hiperravan $H_{c,\gamma}$ se definiše na sledeći način:*

$$H_{c,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, c\rangle = \gamma\}.$$

Skup $H_{c,\gamma}$ nije prazan. Ako uzmemo vektor $c = (c_1, ..., c_n)$, tada postoji indeks $j \in \{1, 2, ..., n\}$, tako da je $c_j \neq 0$. Vektor $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ definisan sa $x_j := \frac{\gamma}{c_j}$, a $x_k := 0$, $k \neq j$, pripada skupu $H_{c,\gamma}$. Ako $x_0 \in H_{c,\gamma}$, tada važi

$$H_{c,\gamma} = H_{c,x_0} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - x_0, c\rangle = 0\}.$$

Ortogonalnost vektora $x - x_0$ i c je predstavljena je kao $\langle x - x_0, c\rangle = 0$, vektor c se zove normalni vektor hiperravni $H_{c,\gamma}$. Dakle, u $\mathbb{R}^3$ to bi bila ravan normalna na c, koja prolazi kroz x_0. U skupu $\mathbb{R}$ hiperravni su tačke, u $\mathbb{R}^2$ prave linije.

Direktno po definiciji se pokazuje da je hiperravan konveksan skup. Kada je $\gamma = 0$, $H_{c,0}$ je potprostor dimenzije $n - 1$.

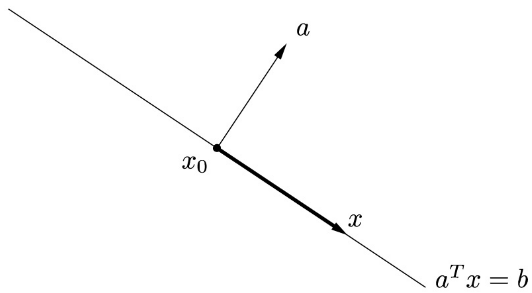
Skupovi

$$H^+_{c,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, c\rangle > \gamma\}$$

i

$$H^-_{c,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, c\rangle < \gamma\}$$

zovu se otvoreni poluprostori, gornji i donji poluprostor. Njihova zatvaranja $\overline{H^+_{c,\gamma}}$ i $\overline{H^-_{c,\gamma}}$ su zatvoreni poluprostori.



Slika 1.5. Primer hiperravni $H_{a,b}$ u $\mathbb{R}^n$.

1.5 Konveksne funkcije

Definicija 1.35. *Neka je dat C konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$ i neka je data funkcija $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$. Tada važi:*

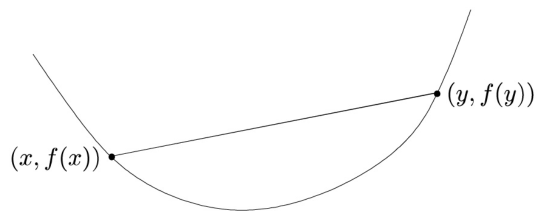
1. *f je konveksna ako za sve $x, y \in C$ i za sve $\alpha \in [0,1]$ važi*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y). \tag{1.2}$$

2. *f je strogo konveksna ako za sve $x, y \in C$, $x \neq y$ i sve $\alpha \in (0,1)$ važi*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

3. *f je konkavna ako je $-f$ konveksna.*



Slika 1.6. Primer konveksne funkcije.

Primetimo da je nejednakost (1.2) specijalan slučaj Jensenove[6] nejednakosti. Ako je funkcija i konveksna i konkavna, onda je ona linearna. Da bi funkcija bila konveksna, domen funkcije mora da je konveksan skup. Skupovi

$$\{x \in C \mid f(x) \leq \gamma\} \quad \text{i} \quad \{x \in C \mid f(x) < \gamma\},$$

[6] J. L. W. V. Jenesen (1859-1925)- danski matematičar i inženjer

gde je $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ data funkcija i γ proizvoljni skalar, su *Lebegovi*[7] *skupovi* funkcije f. Kada je f konveksna funkcija, tada su svi njeni Lebegovi skupovi konveksni. Konveksnost Lebegovih skupova ne implicira konveksnost funkcije.

Naredna teorema daje dovoljne uslove za konveksnost diferencijabilnih funkcija ([13]).

Teorema 1.36. *Neka je C konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$ i neka je $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija na $\mathbb{R}^n$.*

1. *f je konveksna na C ako i samo ako važi*

$$f(z) \geq f(x) + (z - x)^T \nabla f(x), \quad \forall x, z \in C.$$

2. *f je strogo konveksna na C ako i samo ako je prethodna nejednakost stroga kad god je $x \neq z$.*

Teorema 1.37.

1. *Neka je $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ niz konveksnih funkcija nad konveksnim skupom $X \subseteq \mathbb{R}^n$, tada je funkcija $F(x) = \alpha_1 f_1(x) + ... + \alpha_m f_m(x)$, $x \in X$, gde je $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, ..., m$, konveksna.*
2. *Neka je $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ niz konveksnih funkcija nad konveksnim skupom $X \subseteq \mathbb{R}^n$, tada je funkcija $G(x) = \sup_{i \in \mathbb{N}} f_i(x)$, $x \in X$ konveksna.*
3. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i data funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveksna i neopadajuća i funkcija $g : X \to [a, b]$ konveksna, tada je funkcija $f(g(x))$ konveksna nad X.*
4. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i data funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveksna i nerastuća i funkcija $g : X \to [a, b]$ konkavna, tada je funkcija $f(g(x))$ konveksna nad X.*

1.6 Projekcija tačke na skup

Ovo poglavlje je posvećeno proučavanju postojanja projekcije tačke na skup kao i ispitivanju funkcije rastojanja tačke od konveksnog skupa koji koristimo u nastavku rada (videti i [13] i [14]).

Definicija 1.38. *Neka je skup $A \subset \mathbb{R}^n$ neprazan i tačka $x \in \mathbb{R}^n$. Rastojanje tačke x od skupa A definišemo na sledeći način:*

$$d(x, A) := \inf_{z \in A} d(x, z).$$

[7] H. L. Lebesgue (1875-1941)

Definicija 1.39. *Za funkciju $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je Lipšic*[8] *neprekidna na $\mathbb{R}^n$, ako postoji konstanta $l \geq 0$ tako da je*

$$|f(x) - f(y)| \leq l\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Ako je neka funkcija Lipšic neprekidna, tada je i uniformno neprekidna na $\mathbb{R}^n$. Pokazaćemo u sledećoj teoremi da je funkcija rastojanja tačke od nepraznog skupa Lipšic neprekidna na $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.40. *Neka je dat neprazan skup A u Banahovom prostoru $\mathbb{R}^n$. Funkcija rastojanja $d(\cdot, A)$ je Lipšic neprekidna na $\mathbb{R}^n$ sa Lipšicovom konstantom $l = 1$.*

Dokaz. Pokazaćemo da je

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Za proizvoljno $z \in A$, korišćenjem nejednakosti trougla dobijamo

$$d(x, A) \leq \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|.$$

Tada važi

$$d(x, A) \leq \|x - y\| + \inf\{\|y - z\| \mid z \in A\} = \|x - y\| + d(y, A),$$

Dakle, $d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$. Slično imamo da je

$$d(y, A) - d(x, A) \leq \|x - y\|.$$

Stoga, $|d(y, A) - d(x, A)| \leq \|y - x\|$. □

Teorema 1.41. *Ako je A konveksan skup u $\mathbb{R}^n$, tada je funkcija rastojanja $d(\cdot, A)$ konveksna funkcija.*

Dokaz. Fiksiramo $x, y \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in (0, 1)$. Pokazaćemo da funkcija rastojanja data kao $f(x) := d(x, A)$, za svako $x \in \mathbb{R}^n$, zadovoljava konveksnu nejednakost:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Fiksiramo $\epsilon > 0$. Iz svojstva infimuma, postoji $u \in A$ takvo da

$$d(x, A) \leq \|x - u\| < d(x, A) + \frac{\epsilon}{2}.$$

[8] R. O. S. Lipschitz (1832-1903)

Slično, postoji $v \in A$ tako da

$$d(y, A) \leq \|y - v\| < d(y, A) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Pošto je A konveksan skup, tada je $\lambda u + (1-\lambda)v \in A$. Pa imamo

$$\begin{aligned} d(\lambda x + (1-\lambda)y, A) &\leq \|\lambda x + (1-\lambda)y - (\lambda u + (1-\lambda)v)\| \\ &\leq \|\lambda(x-u)\| + \|(1-\lambda)(y-v)\| \\ &= \lambda\|x-u\| + (1-\lambda)\|y-v\| \\ &\leq \lambda \left[d(x, A) + \frac{\epsilon}{2}\right] + (1-\lambda)\left[d(y, A) + \frac{\epsilon}{2}\right] \\ &= \lambda d(x, A) + (1-\lambda) d(y, A) + \epsilon. \end{aligned}$$

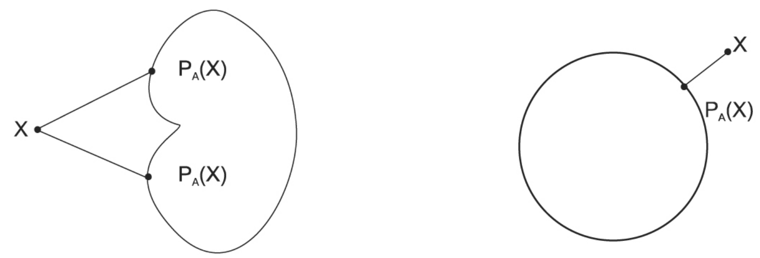
Kada $\epsilon \to 0$, dobijamo da je d konveksna funkcija. $\square$

Definicija 1.42. *Neka je skup $A \subset \mathbb{R}^n$ neprazan i tačka $x \in \mathbb{R}^n$. Tačka $x_0 \in A$ je projekcija tačke x na skup A, $x_0 = P_A(x)$, ako je $d(x, A) = \|x - x_0\|$.*

Postavlja se pitanje kada projekcija tačke na skupu postoji. Može se pokazati da ako je skup neprazan i zatvoren tada projekcija proizvoljne tačke uvek postoji, ali ne mora biti jedinstvena (videti Posledicu 4.7).

Sledeća teorema daje dovoljan uslov za jedinstvenost projekcije tačke na skup.

Teorema 1.43. *Ako je A neprazan, zatvoren i konveksan podskup u $\mathbb{R}^n$, onda za svako $x \in \mathbb{R}^n$ postoji njena projekcija na skupu A, pri čemu je ona jedinstvena.*



Slika 1.7. Projekcija tačke x na skup A, ako postoji, ne mora biti jedinstvena.

Teorema 1.44. *Neka je data tačka $x \in \mathbb{R}^n$ i neka je $A \subset \mathbb{R}^n$. Tada važi: ako je A konveksan i zatvoren skup, onda za $z \in A$ važi $z = P_A(x)$ ako i samo ako je $\langle x - z, z - y \rangle \geq 0$, za svako $y \in A$.*

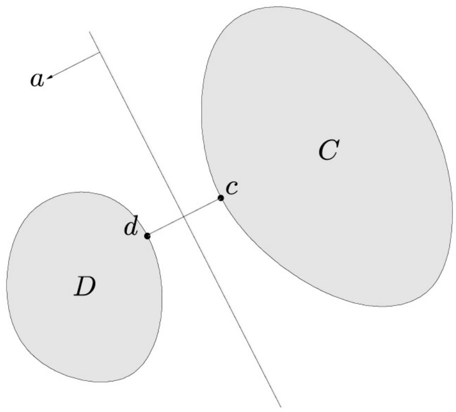
1.7 Teoreme separacije

Teoreme separacije imaju veoma važnu ulogu u matematičkoj teoriji optimizacije. One se bave pitanjem postojanja hiperravni koja razdvaja dva data disjunktna konveksna podskupa. Na početku podsetimo se definicije hiperravni $H_{c,\gamma}$ koja razdvaja skupove (videti u [14]).

Definicija 1.45. *Neka su dati neprazni skupovi $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Hiperravan $H_{c,\gamma}$ razdvaja skupove A i B ako je*

$$\sup_{b \in B} \langle c, b \rangle \leq \gamma \leq \inf_{a \in A} \langle c, a \rangle.$$

Ako je $\sup_{b\in B}\langle c, b\rangle < \inf_{a\in A}\langle c, a\rangle$, tada su skupovi A i B jako razdvojeni, a ako je $\langle c, b\rangle < \langle c, a\rangle$ za sve $a \in A$ i $b \in B$, onda su A i B strogo razdvojeni skupovi.



Slika 1.8. Primer razdvajanja skupova.

Jasno, jako razdvajanje implicira strogo, a strogo implicira obično razdvajanje skupova.

Ako $H_{c,\gamma}$ razdvaja skupove A i B, onda ih razdvaja i hiperravan $H_{\alpha c,\alpha\gamma}$, za $\alpha \neq 0$, zato što je $H_{c,\gamma} = H_{\alpha c,\alpha\gamma}$. Ako je $\alpha := \frac{1}{\|c\|}$, tada sledi da je moguće koristiti hiperravan $H_{c,\gamma}$, za $\|c\| = 1$, gde se skupovi A i B tretiraju na simetričan način. Sada pokazujemo teoreme separacije koje su uslov za razdvajanje ova dva skupa.

Teorema 1.46. *Ako je $A \subset \mathbb{R}^n$ konveksan skup neprazne unutrašnjosti, tada za svako $y \notin A^o$ postoji hiperravan $H_{c,\gamma}$ koja razdvaja skupove $\{y\}$ i A. Ako $y \notin \overline{A}$, onda je to razdvajanje jako.*

Dokaz. Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ konveksan skup i neka je $A \neq \emptyset$. Pretpostavimo da $y \notin \overline{A}$ i neka je $z = P_{\overline{A}}(y)$. Skup $\overline{A}$ je zatvoren i konveksan pa iz Teoreme 1.44 vidimo da je $\langle y - z, z - x \rangle \geq 0$ za svako $x \in \overline{A}$.

Neka je $c := y - z$ i tada važi sledeće:

$$\langle c, y - x \rangle = \langle y - z, y - z \rangle + \langle y - z, z - x \rangle \geq \|c\|^2 > 0,$$

pa je $\langle c, y \rangle - \|c\|^2 \geq \langle c, x \rangle$, odakle je $\sup_{x \in \overline{A}} \langle c, x \rangle < \langle c, y \rangle$. Dalje, biramo $\gamma \in (\sup_{x \in \overline{A}} \langle c, x \rangle, \langle c, y \rangle)$. Hiperravan $H_{c,\gamma}$ jako razdvaja skupove $\overline{A}$ i $\{y\}$.

Sada pretpostavimo da je $y \in \overline{A}$ i $y \in \partial A$, odnosno $y \notin A^o$. Neka je x_0 proizvoljna tačka unutrašnjosti skupa A. Posmatramo otvorenu loptu $L(y, r)$ sa centrom u y i poluprečnikom $r := d(y, x_0)$. Primetimo da svaka tačka na duži $[x_0, y)$ pripada unutrašnjosti skupa A. Neka je $y_0 := 2y - x_0$. Posmatrajmo duž $[x_0, y_0]$, koja je prečnik lopte $L(y, r)$. Tačka $y_0 \notin \overline{A}$, u suprotnom bi tačka $y \in [x_0, y_0)$ bila unutrašnja tačka skupa A. Na sličan način može se konstruisati niz tačaka $y_k = y + \frac{1}{2^k}(y - x_0)$, $k \in \mathbb{N}$, koje ne pripadaju skupu $\overline{A}$ i za koje važi da je $\lim_{k \longrightarrow \infty} y_k = y$. Na osnovu dokazanog sledi da za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji γ_k i c_k, $\|c_k\| = 1$, tako da hiperravan H_{c_k, γ_k} jako razdvaja skupove $\overline{A}$ i $\{y_k\}$. Niz $\{c_k\}$ pripada kompaktnom skupu u $\mathbb{R}^n$, pa sledi da postoji konvergentan podniz $\{c_{k_m}\}$ tog niza.

Neka je $\lim_{m \longrightarrow \infty} c_{k_m} = c$. Važi $\|c\| = 1$. Pošto je $\langle c_{k_m}, x \rangle < \langle c_{k_m}, y_{k_m} \rangle$ za sve $x \in \overline{A}$ i $m \in \mathbb{R}$ sledi da je $\lim_{m \longrightarrow \infty} \langle c_{k_m}, x \rangle \leq \lim_{m \longrightarrow \infty} \langle c_{k_m}, y_{k_m} \rangle$, odnosno na osnovu neprekidnosti skalarnog proizvoda, važi $\langle c, x \rangle \leq \langle c, y \rangle$, za svako $x \in \overline{A}$. Ako stavimo da je $\gamma = \langle c, y \rangle$ dobijamo da hiperravan $H_{c,\gamma}$ razdvaja skupove $\overline{A}$ i $\{y\}$. $\square$

Teorema 1.47. *Neka su $A, B \subset \mathbb{R}^n$ disjunktni konveksni skupovi nepraznih unutrašnjosti. Tada postoji hiperravan $H_{c,\gamma}$ koja razdvaja skupove A i B, kao i skupove $\overline{A}$ i $\overline{B}$. Ako pri tome $y \in \overline{A} \cap \overline{B}$, onda je $\gamma = \langle c, y \rangle$.*

Dokaz. Posmatrajmo skup $X = A - B = \{a - b \mid a \in A,\ b \in B\}$. Skup X je konveksan skup i važi da je $X \neq \emptyset$. Takođe $0 \notin X$, jer su A i B disjunktni skupovi. Pa iz prethodne teoreme sledi da postoji hiperravan $H_{c,\gamma}$ koja razdvaja X i $\{0\}$. Iz definicije 1.45 imamo da je $\langle c, 0 \rangle \leq \langle c, x \rangle$, za svako $x \in X$, odnosno $0 \leq \langle c, a - b \rangle$, za sve $a \in A$ i $b \in B$. Iz $0 \leq \langle c, a - b \rangle$ dobijamo $0 \leq \langle c, a \rangle - \langle c, b \rangle$, odakle je $\langle c, b \rangle \leq \langle c, a \rangle$, za sve $a \in A$ i $b \in B$. Dakle, $\sup_{b \in B} \langle c, b \rangle \leq \langle c, a \rangle$ za svako $a \in A$, pa je $\sup_{b \in B} \langle c, b \rangle \leq \inf_{a \in A} \langle c, a \rangle$. Ako izaberemo γ tako da važi $\sup_{b \in B} \langle c, b \rangle \leq \inf_{a \in A} \langle c, a \rangle$, tada $H_{c,\gamma}$ razdvaja skupove A i B.

Sada pokazujemo da ta hiperravan razdvaja skupove $\overline{A}$ i $\overline{B}$. Neka je $a \in \overline{A}$ i $b \in \overline{B}$. Tada postoje nizovi $\{a_m\} \subset A$ i $\{b_m\} \subset B$, takvi da je $\lim_{m \longrightarrow \infty} a_m = a$ i $\lim_{m \longrightarrow \infty} b_m = b$. Pošto je $\langle c, a_m \rangle \geq \gamma \geq \langle c, b_m \rangle$, važi

$\lim_{m\longrightarrow\infty}\langle c, a_m\rangle \geq \gamma \geq \lim_{m\longrightarrow\infty}\langle c, b_m\rangle$, odnosno $\langle c, a\rangle \geq \gamma \geq \langle c, b\rangle$, za sve $a \in \overline{A}$ i $b \in \overline{B}$. $\square$

Teorema 1.48. *Neka su $A, B \subset \mathbb{R}^n$ zatvoreni disjunktni skupovi, pri čemu je barem jedan od njih ograničen. Tada se oni mogu jako razdvojiti.*

Dokaz. Posmatrajmo skup $X = A - B$, $X \neq \emptyset$. Skup X je zatvoren jer sadrži svoje tačke nagomilavanja. Na osnovu dokaza Teoreme 1.46 postoji hiperravan $H_{c,\gamma}$ koja jako razdvaja $\{0\}$ i X.

Prikazano je da važi $\langle c, 0\rangle \geq \langle c, x\rangle + \|c\|^2 > \langle c, x\rangle$, za svako $x \in X$, odnosno $0 \geq \langle c, a-b\rangle + \|c\|^2$, za sve $a \in A$ i $b \in B$, pa je $\langle c, b\rangle \geq \langle c, a\rangle + \|c\|^2$. Tada je

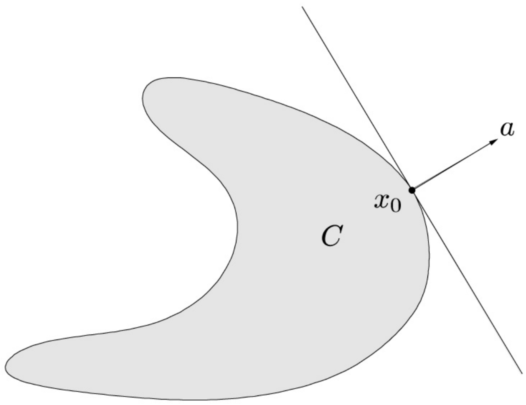
$$\langle c, b\rangle \geq \sup_{a\in A}\langle c, a\rangle + \|c\| > \sup_{a\in A}\langle c, a\rangle$$

i

$$\inf_{b\in B}\langle c, b\rangle \geq \sup_{a\in A}\langle c, a\rangle + \|c\| > \sup_{a\in A}\langle c, a\rangle .$$

Neka je $\gamma \in (\sup_{a\in A}\langle c, a\rangle, \inf_{b\in B}\langle c, b\rangle)$. Prema tome, hiperravan $H_{c,\gamma}$ jako razdvaja skupove A i B. $\square$

Definicija 1.49. *Hiperravan $H_{c,\gamma}$ je potporna hiperravan za skup X u tački $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ako je $\langle c, x\rangle \geq \gamma$ za svako $x \in X$ i $\langle c, x_0\rangle = \gamma$. Vektor c se zove potporni vektor za skup X u tački x_0.*



Slika 1.9. Primer potporne hiperravni.

Iz Teoreme 1.46 i prethodne definicije zaključujemo da u svakoj rubnoj tački postoji barem jedna potporna hiperravan.

Sledeća teorema je ekvivalentna formulacija teoreme Minkovski-Farkaš, koja otkriva i geometrijsku interpretaciju.

Teorema 1.50. *(Minkovski[9]-Farkaš[10]) Neka je dato m tačaka u $\mathbb{R}^n$, vektori $x_1, ..., x_m$ i vektor $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Tada važi tačno jedno od sledećih mogućnosti:*

- *ili postoje brojevi $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, ..., m$, od kojih je barem jedan različit od nule tako da je $y_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$,*
- *ili postoji $a \in \mathbb{R}^n$ tako da važi $\langle y_0, a\rangle < 0$ i $\langle x_i, a\rangle \geq 0$, $i = 1, ..., m$.*

Sada ćemo dati geometrijsku interpretaciju Teoreme Minkovski-Farkaš. Neka je K konveksan poliedarski konus generisan vektorima $x_1, ..., x_m$. Podsetimo se, $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\| \cos\gamma$, gde je γ ugao između datih vektora, pa je $\langle u, v\rangle > 0$, ako je $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$, a $\langle u, v\rangle < 0$, ako je $\gamma \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Dakle, $\langle a, x_i\rangle \geq 0$, $i = 1, ..., m$ znači da $a \in K^*$, a $\langle a, y_0\rangle \geq 0$ znači da je a element onog poluprostora određenog sa $H_{y_0,0}$ u kojem je i y_0, jer je $\langle y_0, y_0\rangle > 0$. Teorema 1.50 kaže da postoje dve isključive mogućnosti: ili $y_0 \in K$, onda $\langle y_0, a\rangle \geq 0$ za svako a za koje je $\langle a, x_i\rangle \geq 0$, $i = 1, ..., m$, odnosno K^* je u onom poluprostoru u kojem je i tačka y_0; ili $y_0 \notin K$, onda postoji $a \in K^*$ koji nije u poluprostoru u kojem je y_0.

[9] H. Minkowski (1864-1909)
[10] B. Farkas (1775-1856)

Glava 2

Teoreme Radona, Karateodorija i Helija

U ovoj glavi predstavićemo i dokazati teoreme Radona, Karateodorija i Helija koje ističu različite karakteristike konveksnih skupova u $\mathbb{R}^n$. Naime, one daju geometrijsku, algebarsku i topološku karakterizaciju konveksnih skupova.

Teorema Karateodorija je objavljena 1907. godine u naučnom članku [5], a Radonova teorema je dokazana 1921. godine i publikovana u radu [12]. Prvo objavljivanje Helijeve teoreme sa dokazom bilo je od strane Radona 1921. godine u radu [12], a njen drugi dokaz (inače, ne suštinski različit od Radonovog) je objavio Konig[1] 1922. godine. Napokon treći Helijev dokaz se pojavio 1923. godine u radu [9]. Helijeva teorema nosi ime po Eduardu Heliju zato što ju je on formulisao još 1913. godine, iako je prvi dokaz objavio Radon. Od tada, ove tri teoreme, naročito Helijeva, su proučavane, primenjivane i uopštavane od strane mnogih autora. Zanimljivo je da analiza teorema Radona, Karateodorija i Helija ima nekoliko zajedničkih aspekata sa elementarnom teorijom brojeva, dok sa druge strane pruža odličan uvod u teoriju konveksnih skupova.

U ovoj glavi koristimo se pristupom, oznakama i rezultatima datim u [5], [6], [9], [10], [12], [13] i [14].

2.1 Radonova teorema

Radonova teorema je jednostavan i bazičan geometrijski rezultat o konveksnim skupovima. Johan Radon je objavio i dokazao ovu teoremu 1921. godine ([12]) i u nastavku dajemo njen dokaz.

[1] Dénes König (1884-1944)

Teorema 2.1. ***(Radonova[2] teorema)*** *Neka je skup $X = \{x_1, ..., x_{n+2}\}$, sa $n+2$ tačke iz $\mathbb{R}^n$. Tada postoje dva neprazna disjunktna podskupa $A, B \subset X$, takvi da je $coA \cap coB \neq \emptyset$.*

Dokaz. Bez umanjenja opštosti, translacijom skupa X pretpostavimo da je $x_{n+2} = 0$. Skup $X' = X \setminus \{x_{n+2}\}$ je skup od $n+1$ tačke u $\mathbb{R}^n$, te je on linearno zavisan skup, tj. postoje konstante $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n+1}$, koje nisu sve jednake nuli, tako da važi $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0$. Ako uzmemo da je $\lambda_{n+2} = -\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$, onda imamo da je

$$\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i x_i = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i = 0, \tag{2.1}$$

gde nisu sve konstante λ_i, $i = 1, ..., n+2$ jednake nuli.

Posmatrajmo sada skupove indeksa $I = \{i \mid \lambda_i > 0\}$ i $J = \{j \mid \lambda_j < 0\}$. Prvo vidimo da važi $I \cap J = \emptyset$. Takođe, na osnovu (2.1) važi da

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = -\sum_{j \in J} \lambda_j x_j \quad \text{i} \quad \sum_{i \in I} \lambda_i = -\sum_{j \in J} \lambda_j = \lambda > 0.$$

Neka su $A = \{x_i \in X \mid i \in I\}$ i $B = \{x_j \in X \mid j \in J\}$, tada je očigledno $A \cap B = \emptyset$. Sada dobijamo da je

$$x = \sum_{i \in I} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right) x_i = \sum_{j \in J} \left(\frac{-\lambda_j}{\lambda}\right) x_j \in coA \cap coB.$$

Zaista, $x \in coA$ jer $x_i \in A$, $i \in I$ i $\sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i \in I} \lambda_i = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda = 1$. Slično, $x \in coB$. Dakle, $coA \cap coB \neq \emptyset$. $\square$

2.2 Karateodorijeva teorema

Teorema kojoj je posvećeno ovo poglavlje je jedan od najpoznatijih rezultata konveksne geometrije, a formulisao ga je i dokazao Konstantin Karateodori[3] 1907. godine ([5]). Sam Karateodori je za dokazivanje ove teoreme koristio matematičku indukciju, dok mi dajemo dokaz koji se oslanja na Radonovu teoremu.

Karateodorijeva teorema tvrdi da ako je $X \subset \mathbb{R}^n$, onda se proizvoljni element konveksnog omotača može dobiti kao konveksna kombinacija najviše $n+1$ elemenata skupa X, što ćemo i dokazati.

[2]J. K. A. Radon (1887-1956)
[3]C. Caratheodory (1873-1950)

Teorema 2.2. ***(Karateodorijeva teorema)*** *Za $X \subset \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$, svaka tačka $x \in coX$ može se prikazati kao koveksna kombinacija najviše $n+1$ elemenata skupa X, tj.*

$$coX = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i,\ x_i \in X,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}. \tag{2.2}$$

Dokaz. Na osnovu Teoreme 1.30 znamo da proizvoljno $x \in coX$ može da se napiše kao konačna konveksna kombinacija m elemenata iz X, tj.

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,\ x_i \in X,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

Neka je m minimalan takav broj.

Pretpostavimo suprotno, $m \geq n+2$. Tada na osnovu Teoreme 2.1 postoje disjunktni skupovi $I, J \subset \{1, 2, ..., m\}$ i $\alpha_h > 0$, $h \in I \cup J$, tako da je

$$\sum_{h \in I} \alpha_h x_h = \sum_{h \in J} \alpha_h x_h \quad \text{i} \quad \sum_{h \in I} \alpha_h = \sum_{h \in J} \alpha_h.$$

Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da su skupovi $I = \{1, 2, ..., k\}$ i $J = \{k+1, ..., l\}$ i da je $\frac{\lambda_1}{\alpha 1} = \min_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\alpha_i}$, te obeležimo sa $t = \frac{\lambda_1}{\alpha_1}$. Tada koristeći da je $t\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i - \sum_{j=k+1}^{l} \alpha_j x_j\right) = 0$, možemo zaključiti

$$x = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - t\alpha_i)\, x_i + \sum_{j=k+1}^{l} (\lambda_j + t\alpha_j)\, x_j + \sum_{h=l+1}^{m} \lambda_h x_h = \sum_{i=2}^{m} \nu_i x_i.$$

Jasno, $\nu_1 = 0,\ \nu_i \geq 0,\ i = 2, ..., m$ i

$$\sum_{i=2}^{m} \nu_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i - t(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i - \sum_{j=k+1}^{l} \alpha_j) = 1 + 0 = 1.$$

Kako je sada x konveksna kombinacija $m-1$ elemenata dolazimo do kontradikcije sa pretpostavkom da je m bilo minimalno. $\square$

2.3 Helijeva teorema

Sada možemo da damo formulaciju i dokaz fudamentalne Helijeve teoreme. Iako dokaz može da se izvede i direktno matematičkom indikcijom po dimenziji osnovnog prostora n, mi ćemo dati Radonov dokaz (videti [12]). Prva uopštenja Helijeve teoreme, na beskonačne familije skupova, je dao sam Heli 1930. godine u [10].

Teorema 2.3. ***(Helijeva[4] teorema)*** *Neka je data $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_m\}$ konačna familija konveksnih skupova u $\mathbb{R}^n$ takva da je za svako $k \leq n+1$ presek k elemenata familije neprazan. Tada je $\bigcap_{i=1}^{m} C_m \neq \emptyset$.*

Dokaz. Pomoću matematičke indukcije po m pokazaćemo da je presek svih članova familije $\mathcal{C}$ neprazan. Pretpostavićemo da familija $\mathcal{C}$ sadrži $m \geq n+1$ elemenata tako da je presek proizvoljnih najviše $n+1$ skupova neprazan. Primetimo da za $m < n+1$, direktno iz teoreme dobijamo da je $\bigcap_{i=1}^{m} C_m \neq \emptyset$. U prvom koraku, za $m = n+1$, nema šta da se dokazuje. Neka je dato $m \geq n+2$. Pretpostavljamo da tvrdjenje teoreme važi za sve familije koje imaju najviše $m-1$ članova. Na osnovu indukcijske hipoteze, sada znamo da je presek bilo kojih $m-1$ članova polazne familije $\{C_1, ..., C_m\}$ neprazan, i neka je $x_i \in \mathbb{R}^n$ takvo da je

$$x_i \in C_1 \cap ... \cap C_{i-1} \cap C_{i+1} \cap ... \cap C_m, \quad i = 1, ..., m,$$

odnosno $x_i \in C_j$ za $j \neq i$.

Na osnovu Teoreme 2.1, postoje disjunktni skupovi $I, J \subset \{1, 2, ..., m\}$ i postoji tačka $x \in \mathbb{R}^n$ tako da

$$x \in co\{x_i \mid i \in I\} \cap co\{x_j \mid j \in J\}.$$

Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da I i J prave particiju indeksnog skupa, tj. da je $I \cup J = \{1, 2, ..., m\}$. Pokazaćemo da je tačka x u svim skupovima C_i, $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Za svako $i \in I$ tačka x_i pripada svim konveksnim skupovima C_j, $j \in J$, iz čega sledi $x_i \in \bigcap_{j \in J} C_j$. Pošto je $\bigcap_{j \in J} C_j$ konveksan skup, dobija se da je

$$co\{x_i \mid i \in I\} \subset \bigcap_{j \in J} C_j.$$

Na sličan način pokazuje se da je

$$co\{x_j \mid j \in J\} \subset \bigcap_{i \in I} C_i.$$

Dakle, pokazali smo da

$$x \in co\{x_i \mid i \in I\} \cap co\{x_j \mid j \in J\} \subset \left(\bigcap_{j \in J} C_j\right) \cap \left(\bigcap_{i \in I} C_i\right) = \bigcap_{i=1}^{m} C_i.$$

$\square$

[4] E. Helly (1884-1943)

Napomena 2.4. *Direktno uopštenje Helijeve teoreme na beskonačne familije konveksnih skupova ne važi. Posmatramo skupove* $C_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq i\}$, $i \in \mathbb{N}$. *Tada bilo kojih konačno mnogo skupova* C_i *ima neprazan presek, ali* $\bigcap_{i \in N} C_i = \emptyset$. *Međutim, uopštenje Helijeve teoreme važi ako dodatno pretpostavimo kompaktnost konveksnih skupova, odnosno važi tvrđenje (videti [10]): Ako za beskonačnu familiju kompaktnih konveksnih skupova u* $\mathbb{R}^n$ *važi da je presek proizvoljnih* $n+1$ *skupova neprazan, onda je i presek svih skupova familije neprazan.*

2.4 Teorijske primene Helijeve teoreme

Helijeva teorema se primenjuje za dokazivanje kombinatornih tvrđenja datih u opštoj formi: Ako je neka konačna kolekcija takva da svaka njena podkolekcija od k članova ima određeno svojstvo, tada će i cela kolekcija imati to svojstvo. Sem toga, ona može da se primeni u dokazivanju teorema koje nisu klasično kombinatornog tipa. Na primer, za dokazivanje da data klasa skupova (potencijalno beskonačna) ima neko svojstvo, prvo pokazujemo da određen broj elemenata te klase zadovoljava to svojstvo, a onda to uopštavamo na celu klasu upotrebom teorema Helijevog tipa (videti Napomenu 2.4). Isto važi i za primenu Karateodorijeve teoreme. Radi ilustracije navešćemo i dokazati neke od primera primene Helijeve teoreme koji su sabrani u preglednom radu [6].

Teorema 2.5. *Neka je* $\mathcal{K}$ *familija od najmanje* $n+1$ *konveksnih skupova u* $\mathbb{R}^n$, *neka je* C *konveksan skup u* $\mathbb{R}^n$ *i neka je ili familija skupova* $\mathcal{K}$ *konačna ili su svi elementi iz* $\mathcal{K}$ *kompaktni. Tada postoji translacija skupa* C *koja preseca sve elemente familije* $\mathcal{K}$ *ako postoji takva translacija za proizvoljnih* $n+1$ *elemenata iz* $\mathcal{K}$.

Dokaz. Neka je data konačna familija $\mathcal{K}$ od najmanje $n+1$ konveksnih skupova u $\mathbb{R}^n$ i konveksni skup C. Za svako $K \in \mathcal{K}$, označimo sa K' skup definisan sa $K' := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x+C) \cap K \neq \emptyset\}$. Primetimo da je za svako $K \in \mathcal{K}$ skup K' je konveksan. Zaista, ako $x, y \in K'$ to znači $(x+C) \cap K \neq \emptyset$ i da je $(y+C) \cap K \neq \emptyset$, odnosno postoje $c_1, c_2 \in C$ tako da $x + c_1 \in K$ i $y+c_2 \in K$. Ali tada $\alpha(x+c_1)+(1-\alpha)(y+c_2) \in K$, jer je K konveksan. Dalje, važi $\alpha x+(1-\alpha)y+\alpha c_1+(1-\alpha)c_2 \in K$, gde je $\alpha c_1+(1-\alpha)c_2 \in C$, jer je i C konveksan skup. Dakle, $\alpha x+(1-\alpha)y \in K'$ jer je $\alpha x+(1-\alpha)y+C \cap K \neq \emptyset$. Sada, na osnovu uslova teoreme imamo da svakih $n+1$ skupova K' ima zajedničku tačku. Konačno iz Helijeve teoreme postoji tačka $z \in \bigcap_{K \in \mathcal{K}} K'$ i tada je $(z+C) \cap K \neq \emptyset$ za svako $K \in \mathcal{K}$.

U slučaju kada je kolekcija $\mathcal{K}$ beskonačna, a elementi $K \in \mathcal{K}$ dodatno i kompaktni, dokazivanje tvrđenja izvodimo na isti način pri čemu primenjujemo verziju Helijeve teoreme iz Napomene 2.4. $\square$

Zajednička transverzala za familiju skupova je prava koja preseca svaki skup u familiji.

Teorema 2.6. *Neka je $\mathcal{S}$ konačna familija paralelnih duži u $\mathbb{R}^2$, takvih da svake tri imaju zajedničku transverzalu. Tada postoji zajednička transverzala za sve elemente iz $\mathcal{S}$.*

Teorema 2.7. *Ako je konveksni skup u $\mathbb{R}^n$ pokriven konačnom familijom otvorenih ili zatvorenih poluprostora, tada je on pokriven i sa $n+1$ ili manje ovih poluprostora.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{F}$ konačna familija u $\mathbb{R}^n$ koja prekriva konveksni skup C i neka je svako $F \in \mathcal{F}$ sa F' obeležen skup $F' = C \setminus F$. Može se pokazati da je za sva $F \in \mathcal{F}$ skup F' konveksan. Tada je $\{F' | F \in \mathcal{F}\}$ konačna familija konveksnih skupova čiji presek je prazan. Zaista, ako bi presek bio neprazan, onda bi postojala tačka skupa C koja nije sadržana ni u jednom $F \in \mathcal{F}$. Na osnovu Helijeve teoreme sledi da postoji $n+1$ ili manje skupova u ovoj familiji čiji je presek prazan (odnosno pokrivaju ceo skup C), jer da to nije slučaj i presek cele familije bi morao da bude neprazan. Time je dokaz kompletan. $\square$

Teorema 2.8. *Dva konačna podskupa X i Y iz $\mathbb{R}^n$ mogu biti strogo razdvojena (nekom hiperravni) ako i samo ako za svaki skup S koji se sastoji od najviše $n+2$ tačke iz $X \cup Y$, važi da se skupovi $S \cap X$ i $S \cap Y$ mogu strogo razdvojiti.*

Teorema 2.9. *Neka je X beskonačan, kompaktan podskup u $\mathbb{R}^n$, i neka za svakih $n+1$ tačaka skupa X važi da postoji tačka skupa X iz koje se svih $n+1$ vidi*[5]*. Tada je skup X zvezdast (tj. postoji tačka skupa X iz koje su sve tačke skupa X vidljive).*

Konveksno telo u $\mathbb{R}^n$ je kompaktan konveksni skup sa nepraznom unutrašnjošti. Ono je glatko pod uslovom da postoji jedinstvena potporna hiperravan u svakoj njegovoj rubnoj tački i strogo konveksno pod uslovom da njena unutrašnjost sadrži interval $[x, y]$, koji spaja svake dve tačke x i y unutar tela.

[5] Kažemo da se tačka $x \in X$ vidi iz tačke $y \in X$ ako važi da je interval $[x, y] \subset X$, gde je $[x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\}$.

Teorema 2.10. *Ako je C konveksno telo u $\mathbb{R}^n$, tada postoji tačka $z \in C$ takva da za svaki interval $[u, v]$ iz C, koji prolazi kroz tačku z važi*

$$\frac{\|z - u\|}{\|v - u\|} \leq \frac{n}{(n + 1)}.$$

Glava 3

Ekvivalencija teorema Radona, Karateodorija i Helija

Sadržaj ove glave počećemo uvođenjem uopštenja pojma gradijenta konveksne funkcije, koji se naziva subdiferencijal. Cilj ove glave je da pomoću teorije o subgradinetu, koja je razvijena, pokažemo ekvivalenciju teorema Radona, Karateodorija i Helija. Primetimo da svaka od ove tri teoreme moze da bude dokazana nezavisno, upotrebom matematičke indukcije po dimenziji osnovnog prostora i primenom potpornih hiperravni i teorema separacije konveksnih skupova. Samim tim, one su na prvi pogled potpuno različite jer osvetljavaju karakteristike konveksnih skupova iz drugačijih uglova (algebarski, geometrijski i topološki pristup). Međutim, ispostavlja se da je svaki od ovih pristupa celovit, odnosno u potpunosti određuje osobine konveksnog skupa, te su one međusobno ekvivalentne.

3.1 Subdiferencijal

Počećemo ovo poglavlje definicijom uopštenja izvoda, odnosno pojma subdiferencijala. Zatim ćemo dati i osnovna računska pravila za njegovo izračunavanje, koja se uglavnom poklapaju sa već poznatim pravilima za određivanje izvoda funkcije. Za dokazivanje ekvivalencije iskaza teorema Radona, Karateodorija i Helija kao osnovu ćemo koristiti subdiferencijal funkcije rastojanja tačke od skupa, kojim i završavamo ovo poglavlje. U ovom poglavlju oslanjali smo se na pristup i oznake date u [3] i [13].

Definicija 3.1. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija i $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ se zove subgradijent od f u x_0 ako važi*

$$\langle c, x - x_0 \rangle \le f(x) - f(x_0),$$

za svako $x \in \mathbb{R}^n$. Funkcija f se naziva subdiferencijalna u x_0, ako ima bar jedan subgradijent u x_0.

Skup svih subgradijenata funkcije f u x_0 zove se subdiferencijal funkcije i označavaćemo ga sa $\partial f(x_0)$. Funkcija f se naziva subdiferencijabilna ako je subdiferencijabilna u svakoj tački $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Napomena 3.2.
- *Primetimo da je subdiferencijal višeznačna funkcija, odnosno za proizvoljno $x_0 \in \mathbb{R}^n$, subdiferencijal $\partial f(x_0)$ je podskup od $\mathbb{R}^n$.*
- *Ako je f konveksna i diferencijabilna funkcija, tada je njen gradijent u x_0 jednak njenom subgradijentu. Tačnije, Ako je funkcija f konveksna i diferencijabilna u x_0, onda je $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$, tj. njen gradijent je i njen jedini subgradijent. Obrnuto, ako je f konveksna u $\partial f(x_0) = \{c\}$, onda je f diferencijabilna u x_0 i važi $\nabla f(x_0) = c$.*

Međutim, subgradijent može da postoji iako f nije diferencijabilna u x_0. Nešto više o ovoj temi čitalac može naći u [2] i [3].

Za sledeću teoremu potreban nam je pojam normalnog konusa. Neka je dat neprazan konveksan skup $X \subset \mathbb{R}^n$ i tačka $x_0 \in X$, tada normalni konus defininišemo na sledeći način:

$$N(x_0, X) := \{c \in \mathbb{R}^n | \langle c, x - x_0 \rangle \leq 0, \ \forall x \in X\}.$$

Primetimo da ako $c \in N(x_0, X)$, onda za svako $x \in X$ važi $\langle c, x - x_0 \rangle \leq 0$, odnosno $x \in H^-_{c,x_0}$. Dakle, važi $X \subseteq H^-_{c,x_0}$.

Naredna teorema daje karakterizaciju subdiferencijala funkcije rastojanja tačke od skupa, koja će se kasnije koristiti. Naime, naredna teorema kaže da je jedinični vektor $c \in \mathbb{R}^n$ subgradijent funkcije rastojanja $d(\cdot, X)$ u tački x_0 ako i samo ako je $X \subseteq H^-_{c,x_0}$. To je ujedno i primer funkcije kod koje subdiferencijal nije klasična, već višeznačna funkcija.

Teorema 3.3. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan, konveksan skup i neka $x_0 \in X$. Tada važi*

$$\partial d(x_0, X) = N(x_0, X) \cap Z,$$

gde je $Z = Z(0, 1)$ zatvorena jedinična lopta u $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Uzmimo proizvoljno $c \in \partial d(x_0, X)$. Tada, s obzirom da $x_0 \in X$, važi

$$\langle c, x - x_0 \rangle \leq d(x, X) - d(x_0, X) = d(x, X), \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Kako je funkcija rastojanja $d(\cdot, X)$ Lipšic neprekidna sa Lipšicovom konstantom $l = 1$, onda iz (3.1) dobijamo

$$\langle c, x - x_0 \rangle \leq d(x, X) - d(x_0, X) \leq \|x - x_0\|, \; \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Na osnovu toga sledi da je $\|c\| \leq 1$, odnosno $c \in Z$. Zaista, ako biramo da je $x = c - x_0 \in \mathbb{R}^n$ dobijamo $\langle c, c \rangle = \|c\|$, tj. $\|c\|^2 \leq \|c\|$, što je tačno za $\|c\| \leq 1$. Dalje, nejednakost (3.1) implicira

$$\langle c, x - x_0 \rangle \leq 0, \; \forall x \in X,$$

jer $\langle c, x - x_0 \rangle \leq d(x, X)$ za svako $x \in \mathbb{R}^n$, pa i za $x \in X$, odakle dobijamo $\langle c, x - x_0 \rangle \leq d(x, X) = 0$. Prema tome $c \in N(x_0, X)$. Dakle, imamo da $c \in N(x_0, X) \cap Z$, odnosno $\partial d(x_0, X) \subseteq N(x_0, X) \cap Z$.

Pokažimo sada i obrnutu inkluziju. Uzmimo proizvoljno $c \in N(x_0, X) \cap Z$. Tada $\|c\| \leq 1$ i važi

$$\langle c, \omega - x_0 \rangle \leq 0, \; \forall \omega \in X.$$

Odavde, za svako $x \in \mathbb{R}^n$ i za svako $\omega \in X$ imamo da je

$$\begin{aligned} \langle c, x - x_0 \rangle &= \langle c, x - \omega + \omega - x_0 \rangle \\ &= \langle c, x - \omega \rangle + \langle c, \omega - x_0 \rangle \\ &\leq \langle c, x - \omega \rangle \leq \|c\| \|x - \omega\| \leq \|x - \omega\|, \end{aligned}$$

gde smo koristili Koši-Švarcovu nejednakost i činjenica da je $\|c\| \leq 1$ i $\langle c, \omega - x_0 \rangle \leq 0, \; \omega \in X$. Dakle, važi

$$\langle c, x - x_0 \rangle \leq \inf_{\omega \in X} \|x - \omega\| = d(x, X) = d(x, X) - d(x_0, X),$$

te imamo da $c \in \partial d(x_0, X)$. □

Sledeća teorema pokazuje da ako je X dodatno i zatvoren skup i ako $x_0 \notin X$, onda je subdiferencijal funkcije rastojanja u tački $x_0 \in X$ singlton.

Teorema 3.4. *Neka je X neprazan, zatvoren, konveksan skup u $\mathbb{R}^n$ i neka $x_0 \notin X$. Tada subdiferencijal funkcije rastojanja tačke od skupa u x_0 predstavljamo kao jednočlani skup na sledeći način:*

$$\partial d(x_0, X) = \left\{ \frac{x_0 - P_X(x_0)}{d(x_0, X)} \right\}.$$

Dokaz. S obzirom da je X neprazan, zatvoren i konveksan podskup u $\mathbb{R}^n$, na osnovu Teoreme 1.43 znamo da proizvoljna tačka $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ima jedinstvenu projekciju na X. Fiksirajmo oznaku $\overline{z} := P_X(x_0) \in X$ i neka je $c \in \partial d(x_0, X)$. Iz definicije subdiferencijala i činjenice da je $d(x_0, X) = \|x_0 - \overline{z}\|$, imamo

$$\begin{aligned}\langle c, x - x_0\rangle &\leq d(x, X) - d(x_0, X) = d(x, X) - \|x_0 - \overline{z}\| \\ &\leq \|x - \overline{z}\| - \|x_0 - \overline{z}\|, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Uvedimo oznaku $p(x) := \|x - \overline{z}\|$. Sada imamo

$$\langle c, x - x_0\rangle \leq p(x) - p(x_0), \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

odnosno $c \in \partial p(x_0) = \left\{\frac{x_0 - \overline{z}}{\|x_0 - \overline{z}\|}\right\}$. Ovde smo koristili da se subdiferencijal poklapa sa gradijentom funkcije ako je funkcija konveksna i diferencijabilna. Pokažimo i obrnutu inkluziju, odnosno da je $c = \frac{x_0 - \overline{z}}{\|x_0 - \overline{z}\|}$ subgradijent funkcije rastojanja $d(\cdot, X)$ u x_0. Prvo, za svako $x \in \mathbb{R}^n$, zamenimo sa $p_x := P_X(x)$. Tada važi

$$\begin{aligned}\langle c, x - x_0\rangle &= \langle c, x - \overline{z}\rangle + \langle c, \overline{z} - x_0\rangle = \langle c, x - \overline{z}\rangle - \|x_0 - \overline{z}\| \\ &= \langle c, x - p_x\rangle + \langle c, p_x - \overline{z}\rangle - \|x_0 - \overline{z}\|.\end{aligned}$$

Kako je $\overline{z} = P_X(x_0)$, iz Teoreme 1.44 sledi $\langle x_0 - \overline{z}, p_x - \overline{z}\rangle \leq 0$, pa imamo $\langle c, p_x - \overline{z}\rangle = \frac{1}{\|x_0 - \overline{z}\|}\langle x_0 - \overline{z}, p_x - \overline{z}\rangle \leq 0$. S obzirom da važi da je $\|c\| = 1$ i koristeći Koši-Švarcovu nejednakost dobijamo da je

$$\begin{aligned}\langle c, x - x_0\rangle &= \langle c, x - p_x\rangle + \langle c, p_x - \overline{z}\rangle - \|x_0 - \overline{z}\| \\ &\leq \|c\| \cdot \|x - p_x\| - \|x_0 - \overline{z}\| = \|x - p_x\| - \|x_0 - \overline{z}\| \\ &= d(x, X) - d(x_0, X), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Na taj način stižemo do $c \in \partial d(x_0, X)$. □

Navešćemo neka korisna svojstva subdiferencijala za konveksne funkcije. Podsetimo se definicije afinog preslikavanja. Za više detalja čitalac se upućuje na [2], [3], [6], [13].

Definicija 3.5. *Ako je funkcija $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zbir linearne funkcije i konstante, tada je ona afina funkcija takva da ima oblik $f(x) = Ax + b$, gde je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $b \in \mathbb{R}^m$.*

Teorema 3.6. *1. Neka su $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ konveksne funkcije za $i = 1, 2$ i neka je $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Tada je*

$$\partial(f_1 + f_2)(x_0) = \partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0).$$

2. Neka je $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija i neka $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Tada za svako $\alpha > 0$ važi sledeće:

$$\partial(\alpha f)(x_0) = \alpha \partial f(x_0).$$

3. Neka je $B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ afino preslikavanje dato sa $B(x) = Ax + b$, gde je A matrica $m \times n$. Posmatramo konveksnu funkciju $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i neka je $y_0 = B(x_0)$. Tada

$$\partial(f \circ B)(x_0) = A^T(\partial f(y_0)) = \left\{A^T(c) \mid c \in \partial f(y_0)\right\}.$$

Neka su date konveksne funkcije $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ za $i = 1, ..., m$. Definišimo funkciju maksimuma

$$f(x) = \max\left\{f_i(x) \mid i = 1, ..., m\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Sledeća teorema daje formulu za izračunavanje subdiferencijala funkcije maksimuma.

Teorema 3.7. *Neka su $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, za $i = 1, ..., m$ konveksne funkcije. Tada za funkciju maksimuma $f = \max_{i=1,...,m} f_i$ važi*

$$\partial f(x_0) = co \bigcup_{i \in I(x_0)} \partial f_i(x_0),$$

gde je $I(x_0) := \{i = 1, ..., m \mid f_i(x_0) = f(x_0)\}$.

Na kraju navedimo i teoremu o minimumu subgradijenata funkcije.

Teorema 3.8. *Tačka x_0 je tačka minimuma konveksne funkcije f akko je f subdiferencijabilna u x_0 i ako važi $0 \in \partial f(x_0)$.*

U sledećim poglavljima dokazi teorema baziraju se na svojstvima subdiferencijala funkcije rastojanja tačke od skupa.

3.2 Karateodorijeva i Helijeva teorema

U ovom poglavlju dokazaćemo ekvivalenciju Karateodorijeve i Helijeve teoreme pomoću dve korisne leme (videti pristup u [13]).

Lema 3.9. *Neka su $X_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, ..., m$ neprazni, zatvoreni i konveksni skupovi. Ako je bar jedan skup X_i i ograničen, tada funkcija maksimuma f*

$$f(x) := \max\left\{d(x, X_i) \mid i = 1, 2, ..., m\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2}$$

ima globalni minimum na $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Definišimo $\gamma := \inf\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$. Kako je vrednost $f(x)$ nenegativna za svako $x \in \mathbb{R}^n$, očigledno da je γ realan broj. Neka je $\{u_k\}$ niz u $\mathbb{R}^n$ tako da je $\lim_{k\longrightarrow\infty} f(u_k) = \gamma$. Pretpostavimo, bez umanjenja opštosti, da je X_1 ograničen. Iz definicije granične vrednosti nalazimo k_0 tako da

$$0 \leq d\,(u_k, X_1) \leq f\,(u_k) < \gamma + 1, \quad \forall k > k_0.$$

S obzirom da je X_1 neprazan, zatvoren i konveksan skup, za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji jedinstvena projekcije u_k na X_1, odnosno postoji $x_k \in X_1$ tako da $\|u_k - x_k\| = d\,(u_k, X_1)\,,\ k > k_0$. Tada imamo $\|u_k - x_k\| \leq \gamma + 1$, pa važi i $\|u_k\| \leq \|x_k\| + \|u_k - x_k\| \leq \|x_k\| + \gamma + 1$ za sve $k > k_0$. Kako je X_1 ograničen, dobijamo da je i niz $\{u_k\}$ ograničen, pa možemo uzeti njegov podniz $\{u_{k_l}\}$ koji konvergira ka u_0. Iz neprekidnosti f sledi da je

$$\gamma = \lim_{l\longrightarrow\infty} f\,(u_{k_l}) = f\,(u_0) \leq f\,(u)\,,$$

za svako $u \in \mathbb{R}^n$. Pa f ima globalni minimum u u_0. $\square$

U narednoj lemi koristićemo pojam aktivnog indeksa $I(x_0)$. Naime, ako je $f(x) := \max\{d(x, X_i) \mid i = 1, 2, ..., m\}$ onda je

$$I(x_0) = \{d(x_0, X_i) = f(x_0) \mid i = 1, ..., m\}\,.$$

Lema 3.10. *Neka su $X_i, i = 1, 2, ...m$ neprazni, zatvoreni i konveksani skupovi tako da važi $\bigcap_{i=1}^m X_i = \emptyset$. Tada funkcija f definisana u* (3.2) *ima globalni minimum u u_0 ako i samo ako*

$$u_0 \in co\,\{x_i \mid i \in I\,(u_0)\}\,,$$

gde je $x_i := P_{X_i}(u_0)$.

Dokaz. Pretpostavka da $\bigcap_{i=1}^m X_i = \emptyset$ implicira da je vrednost funkcije maksimuma $f(x) := \max\{d(x, X_i) \mid i = 1, 2, ..., m\} > 0$, za svako $x \in \mathbb{R}^n$ i da $x \notin X_i$ za svako $i \in I\,(x)$. Iz Teorema 3.4, 3.7 i 3.8 sledi da funkcija f ima globalni minimum u u_0 ako i samo ako

$$0 \in \partial f(u_0) = co\,\{\partial d\,(x, X_i)\ \mid i \in I\,(u_0)\} = co \left\{ \frac{u_0 - x_i}{d\,(u_0, X_i)} \mid i \in I\,(u_0) \right\}.$$

Kako je $f(u_0) = d(u_0, X_i) > 0$ za svako $i \in I(u_0)$, uvešćemo zajedničku oznaku $f(u_0) = d(u_0, X_i) = r$. Iz Teoreme 1.30 postoje $\lambda_i \geq 0$, $i \in I(u_0)$ tako da $\sum_{i \in I(u_0)} \lambda_i = 1$ i

$$0 = \sum_{i \in I(u_0)} \lambda_i \frac{u_0 - x_i}{r},$$

što je ekvivalentno sa $u_0 = \sum_{i \in I(u_0)} \lambda_i x_i$, odnosno $u_0 \in co\,\{x_i | i \in I(u_0)\}$. $\square$

Sada smo spremni da dokažemo ekvivalenciju teorema Karateodorija i Helija.

Teorema 3.11. *Posmatramo sledeća tvrđenja:*

1. *(Karateodorijeva teorema) Neka je $X \subset \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$ i $x_0 \in coX$. Tada postoje $\lambda_i \geq 0$ i $x_i \in X$, $i = 1, 2, ..., n+1$ tako da*

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \quad i \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1.$$

2. *(Helijeva teorema) Neka je $\mathcal{X} = \{X_1, ..., X_m\}$, gde je $m \geq n+2$, konačna familija zatvorenih konveksnih skupova u $\mathbb{R}^n$ takva da je za svako $k \leq n+1$, presek k elemenata familije neprazan. Tada je $\bigcap_{i=1}^m X_i \neq \emptyset$.*

Tada tvrđenje 1. imlicira 2. i obrnuto.

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da trvđenje 1. implicira 2. Neka su X_i, za $i = 1, 2, ..., m$ neprazani zatvoreni, konveksni skupovi i pretpostavimo prvo da je bar jedan od njih ograničen. Neka važi da je presek bilo koje kolekcije k skupova iz celokupne kolekcije, gde je $k \leq n+1$, neprazan. Pokažimo da je tada i $\bigcap_{i=1}^m X_i \neq \emptyset$.

Pretpostavimo suprotno, da je $\bigcap_{i=1}^m X_i = \emptyset$. Posmatrajmo funkciju f definisanu u (3.2) i neka je u_0 tačka u $\mathbb{R}^n$ u kojoj f ima globalni minimum. Znamo da tačka u_0 postoji po Lemi 3.9, a iz Leme 3.10 imamo

$$u_0 \in co\{x_i \mid i \in I(u_0)\},$$

gde je $x_i := P_{X_i}(u_0)$. Primenom Karateodorijeve teoreme, imamo da postoji $J \subset I(u_0)$, $|J| \leq n+1$, tako da

$$u_0 = \sum_{j \in J} \lambda_j x_j \quad \text{i} \quad \sum_{j \in J} \lambda_j = 1. \tag{3.3}$$

Definišemo funkciju

$$g(x) := \max\{d(x, X_j) \mid j \in J\}.$$

Znamo da je $\bigcap_{j \in J} X_j \neq \emptyset$, jer je $|J| \leq n+1$, pa postoji tačka $\tilde{u}$ u ovom preseku, pa je $g(\tilde{u}) = 0$. Kako je $d(u_0, X_j) = r > 0$ za svako $j \in J$, imamo da je $r := f(u_0) = g(u_0) > 0$, pa je aktivni indeksni skup u u_0 funkcije g ceo skup J. Iz Leme 3.10, funkcija g ima globalni minimum u u_0, jer je

$u_0 \in co\{x_j \mid j \in J\}$, pa je $0 < r = g(u_0) \leq g(\tilde{u}) = 0$. Ova kontradikcija implicira tvrđenje 2.

Ako ne pretpostavimo da je bar jedan od skupova ograničen, dokaz nastavljamo na sledeći način. Prvo biramo elemenat u svakom preseku od $n+1$ skupova. Neka $t > 0$ bude dovoljno veliko tako da zatvorena lopta $Z(0,t)$ pokriva sve te tačke. Tada primenjujemo prethodni slučaj na kolekciju $\{\Theta_i \mid i = 1, 2, ...m\}$, gde je $\Theta_i := X_i \cap Z(0,t)$.

Sada ćemo pokazati kako dokazati Karateodorijevu teoremu na osnovu Helijeve teoreme. Fiksirajmo neki element $y_0 \in coX$. Ako $y_0 \in X$, on sam je konveksna kombinacija, pa na očigledan način da dobijamo tvrđenje 1. Pretpostavimo sada da $y_0 \notin X$. Za svaku tačku $x_0 \in X$, označimo sa $Y_1(x_0)$ i $Y_2(x_0)$ zatvorene poluprostore određene sa hiperravni koja prolazi kroz x_0 i normalna je na duž koja povezuje x_0 i y_0, gde $Y_2(x_0)$ sadrži y_0, tj.

$$Y_1(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x_0 - y_0, x - x_0\rangle \geq 0\}\,;$$

$$Y_2(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x_0 - y_0, x - x_0\rangle \leq 0\}\,.$$

Pokažimo prvo da

$$\bigcap_{x_0 \in X} Y_1(x_0) = \emptyset.$$

Pretpostavimo suprotno, da je ovaj skup neprazan. To bi značilo da postoji $\overline{z} \in \bigcap_{x_0 \in X} Y_1(x_0)$, te da za to $\bar{z}$ važi

$$\langle x - y_0, \overline{z} - x\rangle \geq 0,$$

za svako $x \in X$. Pa sledi

$$\begin{aligned}\langle \overline{z} - y_0, y_0 - x\rangle &= \langle \overline{z} - x + x - y_0, y_0 - x\rangle \\ &= \langle \overline{z} - x, y_0 - x\rangle + \langle x - y_0, y_0 - x\rangle \\ &= \langle \overline{z} - x, y_0 - x\rangle - \|x - y_0\|^2 < 0,\end{aligned}$$

za svako $x \in X$. Primetimo da je $\|x - y_0\|^2 > 0$ jer $y_0 \notin X$. S obzirom da je $y_0 \in coX$, na osnovu Teoreme 1.24 postoji $x_i \in X$ i $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, ...m$ tako da je

$$y_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \text{ i } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

Tada važi

$$0 = \langle \overline{z} - y_0, y_0 - y_0 \rangle = \langle \overline{z} - y_0, y_0 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle \overline{z} - y_0, y_0 - x_i \rangle < 0.$$

Ova kontradikcija implicira da je

$$\bigcap_{x_0 \in X} Y_1(x_0) = \emptyset.$$

Sada kako je $Y_1(x)$ neprazan, zatvoren i konveksan skup za svako x iz tvrđenja 2. postoje $x_1, x_2, ...x_{n+1} \in X$ tako da

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} Y_1(x_i) = \emptyset.$$

Međutim, to implicira $y_0 \in co\{x_1, x_2, ...x_{n+1}\}$, što smo i hteli da dokažemo. I zaista, dokažimo ovo svođenjem na kontradikciju. Pretpostavimo suprotno, da $y_0 \notin co\{x_1, x_2, ...x_{n+1}\}$. Tada na osnovu Teoreme 1.50 postoji $a \in \mathbb{R}^n$, tako da

$$\langle a, y_0 \rangle > 0 \quad \text{i} \quad \langle a, x_i \rangle \leq 0,$$

za svako $i = 1, 2, ..., n+1$. Posmatrajmo skup

$$l := \{y_0 - ta \mid t \geq 0\}.$$

Tada važi

$$\begin{aligned} \langle x_i - y_0, y_0 - ta - x_i \rangle &= \langle x_i - y_0, y_0 - x_i \rangle - t \langle a, x_i - y_0 \rangle \\ &= \langle x_i - y_0, y_0 - x_i \rangle - t(\langle a, x_i \rangle - \langle a, y_0 \rangle). \end{aligned}$$

Sada možemo naći vrednost t_0 tako da je ovaj izraz pozitivan za svako $t > t_0$ i za svako i, ali ovo implicira $\bigcap_{i=1}^{n+1} Y_1(x_i) \neq \emptyset$. Dakle, dobili smo kontradikciju koja pokazuje da $y_0 \in co\{x_1, x_2, ...x_{n+1}\}$. $\square$

3.3 Karateodorijeva i Radonova teorema

U nastavku ćemo pokazati ekvivalenciju teorema Karateodorija i Radona, kako bi konačno utvrdili ekvivalenciju sve tri teoreme.

Teorema 3.12. *Posmatramo sledeća tvrđenja:*

1. *(Karateodorijeva teorema) Neka je $X \subset \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$ i $y_0 \in coX$. Tada postoji $\lambda_i > 0$ i $x_i \in X$, $i = 1, 2, ..., n+1$ tako da*

$$y_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \quad i \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1.$$

2. *(Radonova teorema) Neka je skup $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, sa $m \geq n+2$ tačke u $\mathbb{R}^n$. Tada postoje dva neprazna disjunktna podskupa $A, B \subset X$, takva da je $coA \cap coB \neq \emptyset$.*

Tvrđenja 1. i 2. su ekvivalentna.

Dokaz. Pokažimo prvo da tvrđenje 1. implicira 2. Posmatrajmo $X \subset \mathbb{R}^n$ skup koji je dat sa $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, gde je $m \geq n+2$. Tada je

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_m}{m} \in co\{x_1, x_2, ..., x_m\}.$$

Iz Karateodorijeve teoreme imamo

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_m}{m} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i,$$

gde je $\lambda_i \geq 0$ i $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Odavde dobijamo da važi jednakost

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,$$

gde je $\beta_i = \frac{1}{m}$, $i = 1, 2, ..., m$, a $\lambda_i \geq 0$, za $i = 1, ..., n+1$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, dok je $\lambda_i = 0$ za sve $i = n+2, ..., m$. Dakle,

$$\sum_{i=1}^{m} (\beta_i - \lambda_i) x_i = 0.$$

Poslednju sumu možemo zapisati u obliku

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i x_i = 0,$$

gde je $\gamma_i = \beta_i - \lambda_i$, $\sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 0$ i nisu sve γ_i nule. Tada je

$$\sum_{i \in I} \gamma_i x_i + \sum_{j \in J} \gamma_j x_j = 0,$$

gde $I := \{i \in \{1, ..., m\} \mid \gamma_i > 0\}$ i $J := \{i \in \{1, ..., m\} \mid \gamma_i \leq 0\}$. Vidimo da su I i J oba neprazna. Definišemo $\gamma := \sum_{i \in I} \gamma_i$, zatim $A := \{x_i | i \in I\}$, i $B := \{x_j | j \in J\}$. Tada ako uvedemo oznaku $\gamma = -\sum_{j \in J} \gamma_j$, važi

$$\frac{1}{\gamma} \sum_{i \in I} \gamma_i x_i = -\frac{1}{\gamma} \sum_{j \in J} \gamma_j x_j \in coA \cap coB.$$

I ovo je kraj dokaza jer možemo videti da su A i B baš oni skupovi čije postojanje garantuje Radonova teorema.

Pokažimo sada da Radonova teorema implicira Karateodorijevu teoremu. Fiksiramo neko $y_0 \in coX$. Tada na osnovu Teoreme 2.1 postoji $\lambda_i > 0$, $i = 1, ..., m$ gde je $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ i

$$y_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,$$

gde $x_i \in X$ za svako $i = 1, ..., m$. Neka je m minimalan broj elemenata skupa X preko kojih se y_0 može izraziti kao konveksna kombinacija. Pokazaćemo da je $m \leq n+1$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je $m > n+1$. Radonovu teoremu primenjujemo na skup $X := \{x_1, ..., x_m\}$. Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da važi

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i x_i = \sum_{i=k+1}^{m} \gamma_i x_i,$$

gde je $\gamma_i \geq 0$, $i = 1, ..., m$ i $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i = \sum_{i=k+1}^{m} \gamma_i = 1$ za $1 \leq k < m$. Tada važi

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i = 0,$$

gde je $\beta_i := \gamma_i$ za $i = 1, ..., k$ i $\beta_i = -\gamma_i$ za $i = k+1, ..., m$. Primetimo da je $\sum_{i=1}^{m} \beta_i = 0$. Biramo indeks $i_0 = \{1, ..., k\}$ tako da je

$$t := \frac{\lambda_{i_0}}{\beta_{i_0}} = \min \left\{ \frac{\lambda_i}{\beta_i} \mid i = 1, ..., k, \ \beta_i > 0 \right\}.$$

Definišemo $\alpha_i := \lambda_i - t\beta_i$ za $i = 1, ..., m$. Tada $\alpha_i \geq 0$ za $i = 1, ..., m$, $\alpha_{i_0} = 0$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, i

$$y_0 = \sum_{i=1, i \neq i_0}^{m} \alpha_i x_i.$$

Što je kontradikcija sa tim da je m minimalno. $\square$

Napomena 3.13. *Primetimo da svojstvo zatvorenosti koje je pretpostavljeno u Helijovoj teoremi (Teoremi 3.11 pod 2.) može biti oslabljeno, tj. tvrđenja u Teoremi 3.11 i Teoremi 3.12 su ekvivalentni sledećem tvrđenju:*

Za proizvoljnu kolekciju nepraznih konveksnih skupova $\{X_1, ..., X_m\}$, *za* $m \geq n+2$ *u* $\mathbb{R}^n$ *sa osobinom da je presek bilo kojih* $n+1$ *skupova iz ove kolekcije neprazan, važi*

$$\bigcap_{i=1}^{m} X_i \neq \emptyset.$$

U stvari, ovo tvrđenje očigledno implicira Teoremu 3.11 pod 2. i direktno sledi iz Teoreme 3.12 pod 2.

Glava 4

Pareto efikasnost

U prvom delu ovog poglavlja upoznaćemo se sa biografijom naučnika čiji je rad bio inspiracija za formulaciju problema Pareto efikasnosti, a u drugom delu ćemo se baviti primenom konveksne optimizacije za odredjivanje Pareto optimalne raspodele. S tim u vezi, uvodimo osnovne pojmove vezane za problem optimizacije konveksnih problema. Bavićemo se nekim poznatim teoremama kao što su Vajerštrasova, Lagranžova i teorema Kun-Takera. Predstavićemo neke specijalne oblike konveksne optimizacije. U ovom poglavlju koristićemo rezultate objavljene u [1], [2], [4], [7], [11], [14], [15] i [16].

4.1 Vilfredo Pareto

Vilfredo Federiko Damaso Pareto (ital. Vilfredo Pareto; 1848 - 1923) je rođen u Parizu. Bio je italijanski inženjer, ekonomista, sociolog, politikolog i filozof. Školovao se u Francuskoj i Italiji, a u Torinu je stekao titulu inženjera. Odbranio je doktorat iz inženjerstva na sadašnjem Politehničkom univerzitetu u Torinu (videti u [15]).

Nakon diplomiranja radio je kao građevinski inženjer. Bio je direktor željezare San Dovani Valdarno, a kasnije i njen generalni direktor. U svojim četrdesetim godinama počeo je ozbiljnije da se zanima za ekonomiju. Godine 1886, postao je predavač ekonomije i menadžmenta na Univerzitetu u Firenci.

Pareto se posebno zainteresovao za ekonomska pitanja i postao zagovornik tzv. slobodne trgovine, i zbog toga došao u poteškoće sa italijanskom vladom. Njegovi radovi afirmišu ideje Leona Valrasa[1] da je ekonomija u suštini matematička nauka.

Bavio se i analiziranjem ravnoteže na tržištu, a njegov pristup teoriji ravnoteže je dobio na značaju 1930-ih godina i veoma je uticao na ekonomski

[1] L. Valras (1834-1910)- francuski ekonomista

pristup teoriji ravnoteže. U svojim radovima je intenzivno koristio krive indiferencije, naročito za teoriju potrošača i u svojoj teoriji proizvođača. Pareto je dao svoj doprinos u mikroekonomiji, naročito zbog uvođenja pojma "Paretove optimalnosti". Glavna ideja "Paretove optimalnosti" je da ako sistem (ekonomija, tržište) uživa u maksimalnom ekonomskom blagostanju ni jednom pojedincu u sistemu ne može biti bolje, a da pritom nekom drugom pojedincu iz istog sistema ne bude lošije. Paretova optimalnost se široko koristi u ekonomiji blagostanja i teoriji igara.

4.2 Problem konveksne optimizacije

U nastavku ćemo reći nešto o minimumu i maksimumu funkcije, a zatim se baviti problemom konveksne optimizacije. Nešto više može se pogledati u [1], [2], [7] i [14].

Problem optimizacije zapravo podrazumeva minimizaciju, odnosno maksimizaciju neke funkcije na zadatom skupu. Ako je taj skup čitav prostor $\mathbb{R}^n$, tada je reč o optimizaciji bez ograničenja. U praksi se retko nailazi na probleme bez ograničenja. Posmatraćemo jedno proizvodno preduzeće koje naravno želi da maksimizira svoj prihod, ali u toku poslovanja ono nailazi na razne vrste troškova: troškova radne snage, troškove nabavke sirovina, troškove skladištenja, amortizacione troškove i slično. Kada želimo da rešimo problem maksimizacije prihoda nekog proizvodnog preduzeća moramo da uzmemo u obzir odgovarajuća ograničenja.

Definicija 4.1. *Neka je dat skup $X \subset \mathbb{R}^n$ i neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Vektor $x_* \in X$ koji zadovoljava*

$$f_* = f(x_*) = \inf_{x \in X} f(x),$$

naziva se minimum funkcije f na skupu X. Vektor x_* još zovemo minimizirajućom tačkom ili minimizatorom funkcije f na skupu X. Ako je skup $X = \mathbb{R}^n$ ili je domen funkcije upravo skup X, tada se vektor x_* naziva globalni minimum.

Analogno, definišemo (globalni) maksimum funkcije na zadatom skupu. Glavno pitanje vezano za probleme optimizacije jeste da li optimalno rešenje postoji, odnosno da li postoji minimum (maksimum) posmatranog problema.

Definicija 4.2. *Neka je data funkcija f nad skupom X. Skup M_γ definisan sa $M_\gamma = \{x \in X \mid f(x) \leq \gamma\}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ zove se Lebegov skup funkcije f.*

Iz definicije globalnog minimuma funkcije možemo zaključiti da je skup minimuma posmatrane funkcije na zadatom skupu jednak preseku tog skupa i familije nepraznih Lebegovih skupova date funkcije.

Definicija 4.3. *Niz* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *iz* X *je minimizirajući niz funkcije* f *nad skupom* X*, ako važi* $\lim_{k\longrightarrow\infty} f(x_k) = f_*$.

Sledeća teorema se često zove osnovna Vajerštrasova[2] teorema koja kaže da neprekidna funkcija nad zatvorenim intervalom dostiže svoj minimum i maksimum.

Teorema 4.4. *Neka je* X *neprazan i kompaktan podskup od* $\mathbb{R}^n$ *i neka je* $f : X \to \mathbb{R}$ *neprekidna na* X*. Tada važi:*

1. $f_* = \inf_{x\in X} f(x) > -\infty$,

2. *Skup* $X_* = \{x \in X \mid f(x) = f_*\}$ *je neprazan, kompaktan i svaki minimizirajući niz konvergira ka* f_*.

Ovu teoremu lako možemo preformulisati u slučaju kada želimo da rešimo problem maksimizacije određivanje maksimuma funkcije: Ako je data realna funkcija, neprekidna u svim tačkama zadatog kompatnog skupa, tada je skup maksimuma posmatrane funkcije na datom skupu neprazan i kompaktan. U nastavku ćemo navesti neka uopštenja osnovne Vajerštrasove teoreme. Vajerštrasova teorema se može uopštavati tako što oslabimo uslov neprekidnosti funkcije f ili kompaktnog skupa X. Naredna uopštavanja se baziraju na relaksaciji kompaktnog skupa X.

Teorema 4.5. *Neka je* X *neprazan i zatvoren skup u* $\mathbb{R}^n$*, neka je funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$ *neprekidna na* X *i neka je za neko* $x_0 \in X$ *Lebegov skup dat sa* $M = \{x \in X \mid f(x) \leq f(x_0)\}$ *ograničen. Tada važi:*

1. $f_* = \inf_{x\in X} f(x) > -\infty$,

2. *Skup* $X_* = \{x \in X \mid f(x) = f_*\}$ *je neprazan, kompaktan i svaki minimizirajući niz iz* M *konvergira ka* f_*.

Teorema 4.6. *Neka je* X *neprazan i zatvoren skup u* $\mathbb{R}^n$*, neka je funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$ *neprekidna na* X *i neka za svaki niz* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$*, za koji je* $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n\| = \infty$*, važi* $\lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = \infty$*. Tada važi:*

1. $f_* = \inf_{x\in X} f(x) > -\infty$,

[2] K. T. W. Weierstrass (1815-1897)

2. Skup $X_* = \{x \in X \mid f(u) = f_*\}$ je neprazan, kompaktan i svaki minimizirajući niz konvergira ka f_*.

Jedna od važnih posledica Vajerštrasnove teoreme je i teorema o egzistenciji projekcije na zatvorenom skupu.

Posledica 4.7. *Ako je X neprazan i zatvoren skup u $\mathbb{R}^n$, tada za svako $x \in \mathbb{R}^n$, postoji $y \in X$, tako da važi $d(x, X) = d(x, y)$.*

Kada želimo dobijene rezultate da primenimo u praksi, uglavnom smo zainteresovani za globalni minimum. Pri rešavanju problema optimizacije možemo se susresti sa problemima koji dopuštaju definisanje ekstrema i u nekoj slabijoj formi, na primer da je dobijeni ekstrem optimalan samo kada se uporedi sa tačkama koje su u blizini.

Definicija 4.8. *Dat je skup $X \subset \mathbb{R}^n$ i data je funkcija $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Vektor $x_* \in X$ je lokalni minimum funkcije f na skupu X ako postoji neko $\epsilon > 0$ takvo da važi $f(x_*) \leq f(x)$, za svako $x \in X$, pri čemu je $\|x - x_*\| \leq \epsilon$.*

Kada je skup $X = \mathbb{R}^n$ ili kada je domen funkcije f upravo skup X, tada x_* zovemo lokalni minimum funkcije f. Za lokalni minimum x_* kaže se da je strogi ako ne postoji drugi lokalni minimum unutar okoline od x_*. Analogno definišemo lokalni maksimum.

Mnogi uslovi optimalnosti i algoritmi ne mogu da naprave razliku između lokalnog i globalnog minimuma, pa moramo da se zadovoljimo lokalnim minimumom. To je glavna poteškoća pri rešavanju konkretnih problema optimizacije u praksi. Međutim ovaj rad se bavi konveksnim funkcijama i konveksnim skupovima, a za njih važi: Svi lokalni minimumi konveksne funkcije nad konveksnim skupom su takođe i globalni minimumi. Ovo tvrđenje je formalno zapisano u sledećoj teoremi.

Teorema 4.9. *Neka je konveksan skup $X \subset \mathbb{R}^n$ i neka je $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ prava konveksna funkcija. Tada je lokalni minimum funkcije f na skupu X takođe i globalni minimum. Ako je funkcija f još i strogo konveksna, tada postoji najviše jedan globalni minimum funkcije f na skupu X.*

U nastavku ćemo pokazati primene problema konveksne optimizacije. One se koriste pri rešavanju mnogih problema iz raznih oblasti: modeliranja i analize podataka, statistike, finansija i slično.

Prvo uvodimo osnovne pojmove vezane za probleme optimizacije konveksnih problema.

Posmatrajmo problem:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizirati} & f_0(x) \\ \text{uz uslove} & f_i(x) \leq 0, \ i = 1, ..., m \\ & h_j(x) = 0, \ j = 1, ..., p. \end{array} \tag{4.1}$$

gde su $f_0, f_i, h_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \ i = 1, ..., m$, i $j = 1, ..., p$, koji se zove problem optimizacije standardnog oblika. Tačka $x \in \mathbb{R}^n$ je promenljiva optimizacije, dok funkcija f_0 označava funkciju cilja ili funkciju troškova. Nejednakosti $f_i(x) \leq 0$ predstavljaju ograničenja tipa nejednakosti, a jednačine $h_j(x) = 0$ predstavljaju ograničenja tipa jednakosti. Domen problema optimizacije (4.1) predstavlja skup tačaka za koje su funkcija cilja i sve funkcije ograničenja definisane

$$D = \bigcap_{i=0}^{m} dom(f_i) \cap \bigcap_{j=1}^{p} dom(h_j).$$

Ako tačka $x \in D$ zadovoljava ograničenja nejednakosti $f_i(x) \leq 0, \ i = 1, ..., m$ i jednakosti $h_j(x) = 0, \ j = 1, ..., p$, tada kažemo da je ona dopustiva. Skup svih dopustivih tačaka zove se dopustivi skup. Kažemo da je problem dopustiv ako postoji najmanje jedna dopustiva tačka, inače je nedopustiv. Ako problem nema ograničenja, tada je neograničen. Definišimo optimalnu vrednost problema (4.1) označenu sa f^*

$$f^* = \inf \{f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0, \ i = 1, ..., m, \ h_j(x) = 0, \ j = 1, ..., p\},$$

gde f^* može da prima vrednosti $\pm\infty$. Ako je problem nedopustiv, tada je $f^* = \infty$. Ako postoje dopustive tačke x_k takve da $f_0(x_k) \longrightarrow -\infty$ kada $k \longrightarrow \infty$, tada je $f^* = -\infty$ i u tom slučaju kažemo da je problem neograničen sa donje strane.

Definisali smo pojam (globalnog) minimuma, koji predstavlja optimalno rešenje problema minimizacije. Podsetimo se, kažemo da je x^* (globalno) optimalna tačka problema (4.1) ako je ona dopustiva i ako je $f_0(x^*) = f^*$.

Skup svih optimalnih tačaka se naziva optimalni skup i označavamo sa

$$X_{opt} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m, \ h_j(x) = 0, j = 1, ..., p, \ f_0(x) = f^*\}.$$

Analogno definiciji lokalnog minimuma, dopustiva tačka x je lokalno optimalna, ako postoji $\epsilon > 0$ takvo da je

$$\begin{aligned} f_0(x) = \inf\{f_0(z) \mid f_i(z) \leq 0, i = 1, ..., m, \\ h_j(z) = 0, \ j = 1, ..., p, \ \ \|z - x\| \leq \epsilon\}. \end{aligned}$$

Dakle, x minimizira funkciju f_0 u odnosu na dopustive tačke koje su joj blizu. Dalje ćemo podrazumevati da optimalno znači globalno optimalno.

Ako je x dopustiva tačka i važi da je $f_i(x) < 0$, tada kažemo da je ograničenje $f_i(x) \leq 0$ *regularno* u tački x. Ograničenja tipa jednakosti su regularna u svim dopustivim tačkama. Ograničenje je *suvišno* ako se njegovim brisanjem ne menja dopustiv skup.

Problem optimizacije (4.1) je konveksan ako su funkcije $f_i,\ i = 0, ..., m$ konveksne, a funkcije $h_j,\ j = 1, ..., p$ afine. Konveksne probleme optimizacije u standardom obliku zapisujemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & f_0(x) \\ \text{uz uslove} \quad & f_i(x) \leq 0,\ i = 1, ..., m \\ & \left\langle a_j^T, x \right\rangle = b_j,\ j = 1, ..., p. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ograničenja $\left\langle a_j^T, x \right\rangle = b_j,\ j = 1, ..., p$, se mogu zapisati u matričnom obliku $Ax = b$, gde je $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, a $b \in \mathbb{R}^p$. Primetimo da je kod problema (4.2) dopustiv skup konveksan. On je presek sledećih konveksnih skupova:

1. $D = \bigcap_{i=0}^{m} dom(f_i)$,

2. m Lebegovih skupova - $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \leq 0\}$ i

3. p hiperravni - $\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \left\langle a_j^T, x \right\rangle = b_j\right\}$.

Kada je reč o problemima konveksne optimizacije radi se o optimizaciji konveksne funkcije nad konveksnim skupom. Važna osobina konveksnih problema je ta da u slučaju kada je funkcija cilja strogo konveksna, tada optimalni skup sadrži najviše jednu tačku.

Navešćemo tri činjenice zbog kojih se konveksni problemi bitno razlikuju od nekonveksnih:

1. Svaki lokalni optimum konveksnog problema je i globalni optimum.

2. Algoritmi za rešavanje konveksnih problema se lako definišu pomoću teorije dualnosti.

3. Postoje efikasne numeričke metode koje mogu da reše konveksne probleme čak i ako su oni velikih dimenzija.

U nastavku ćemo pokazati neke od specijalnih oblika problema optimizacije. Nešto više o tome može se pogledati u knjigama [1] i [2].

Problemi dopustivosti

Specijalan slučaj problema u standardnom obliku je problem dopustivosti koji definišemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} \text{naći optimalno} \quad & x \\ \text{uz uslove} \quad & f_i(x) \leq 0,\ i = 1, ..., m \\ & h_j(x) = 0,\ j = 1, ..., p. \end{aligned}$$

Problem dopustivosti podrazumeva ili pronalaženje ekstremne tačke koja zadovoljava ograničenja ili dokazivanje nekonzistentnosti ograničenja.

Problemi maksimizacije

Problem maksimizacije se definiše na sledeći način:

$$\begin{aligned} \text{maksimizirati} \quad & f_0(x) \\ \text{uz uslove} \quad & f_i(x) \leq 0,\ i = 1, ..., m \\ & h_j(x) = 0,\ j = 1, ..., p. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ovaj problem možemo rešiti minimiziranjem funkcije $-f_0$ zavisno od datih ograničenja. Svi pojmovi prethodno definisani kod problema minimizacije (4.1) mogu se analogno definisati za problem maksimizacije (4.3). Posmatrajmo sada problem maksimizacije oblika

$$\begin{aligned} \text{maksimizirati} \quad & f_0(x) \\ \text{uz uslove} \quad & f_i(x) \leq 0,\ i = 1, ..., m \\ & \langle a_j, x \rangle = b_j,\ j = 1, ..., p. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Njega možemo zvati problemom konveksne optimizacije, ako je funkcija cilja f_0 konkavna i ako su funkcije ograničenja tipa nejednakosti $f_1, ..., f_m$ konveksne. Kod ovog problema funkciju cilja zovemo još i funkcija korisnosti.

U nastavku ćemo predstaviti teoreme Lagranža i Kun-Takera i njegova uopštenja koja će nam koristiti za dokaz teorema blagostanja.

Teorema o Lagranžovim množiteljima

Neka je dat konveksan skup $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ i neka je f_0 konveksna funkcija nad skupom X_0. Posmatraćemo problem gde su $f_i,\ i = 1, ..., m$ konveksne funkcije na X_0, a $f_i,\ i = m + 1, ..., p$ linearne funkcije i $f_i(x) = \langle a_i, x \rangle - b_i$, $a_i \in \mathbb{R}^n,\ b_i \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$.

Problem postavljamo na sledeći način:

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & f_0(x) \\ \text{uz uslove} \quad & f_i(x) \leq 0, \ i = 1, ..., m \\ & f_i(x) = 0, \ i = m+1, ..., p. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Definicija 4.10. *Funkcija Lagranža*[3] *problema* (4.5) *se definiše na sledeći način:*

$$L(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x), \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \Lambda,$$

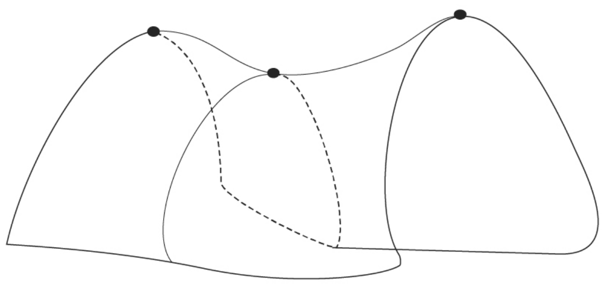
gde promenljive λ_i zovemo Lagranžovim množiteljima problema, a vektor λ nazivamo nizom Lagranžovih množitelja, gde je

$$\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R}^p \mid \lambda_i \geq 0, \ \forall i = 1, ..., m\}.$$

Primetimo da λ_i može biti proizvoljan realan broj za $i = m+1, ..., p$.

Definicija 4.11. *Tačka $(x_*, \lambda^*) \in X \times \Lambda$ je sedlasta tačka Lagranžove funkcije $L(x, \lambda)$, ako za svako $x \in X$ i svako $\lambda \in \Lambda$ važi:*

$$L(x_*, \lambda) \leq L(x_*, \lambda^*) \leq L(x, \lambda^*).$$



Slika 4.1. Sedlasta tačka je tačka u sredini od date tri.

Uspostavićemo odnos između problema (4.5) i sedlaste tačke odgovarajuće Lagranžove funkcije.

Lema 4.12. *Ako je (x_*, λ^*) je sedlasta tačka funkcije $L(x, \lambda)$, onda je x_* dopustiva tačka.*

[3] J. L. Lagrange (1736-1813)

Lema 4.13. *Ako je tačka* (x_*, λ^*) *sedlasta tačka funkcije* $L(x, \lambda)$, *onda je* $\lambda_i^* f_i(x_*) = 0$, *za svako* $i = 1, ..., m$.

Lema 4.14. *Ako je* $\lambda_i^* f_i(x_*) = 0$ *za sve* $i = 1, ..., m$ *pri čemu je* x^* *dopustiva tačka, onda je* $L(x_*, \lambda) \leq L(x_*, \lambda^*)$, *za svako* $\lambda \in \Lambda$.

Iz ovih lema sledi potreban i dovoljan uslov da neka tačka bude sedlasta tačka.

Teorema 4.15. *Potreban i dovoljan uslov da tačka* (x_*, λ^*) *bude sedlasta tačka Langražove funkcije,* $L(x, \lambda)$, *za posmatrani problem je dat sa:*

1. $L(x_*, \lambda^*) \leq L(x, \lambda^*)$, *za sve dopustive tačke* x,

2. $\lambda_i^* f_i(x_*) = 0$, *za sve* $i = 1, ..., m$, *pri čemu je* x_* *dopustiva tačka.*

Teorema 4.16. *(Lagranžova teorema) Neka je* (x_*, λ^*) *sedlasta tačka Lagranžove funkcije. Tada* $x_* \in X_*$ *i* $f_* = L(x_*, \lambda^*) = f(x_*)$, *odnosno* x_* *je rešenje posmatranog problema.*

Lagranžova teorema daje dovoljan uslov za rešenje problema, ali ništa ne govori o egzistenciji sedlaste tačke. Sedlasta tačka se traži među stacionarnim tačakama Lagranžove funkcije. Da bismo znali nešto više o postojanju stacionarnih tačaka, moramo imati još neke uslove za funkciju $f_0(x)$ i za ograničenja tipa nejednakosti $f_i(x) \leq 0, \ i = 1, ..., m$. U sledećem primeru pokazaćemo da nije dovoljno da se pretpostavi da je funkcija $f_0(x)$ konveksna.

Primer 4.17. *Dato je* $f_0(x) = -x, \ X_+ = [0, \infty)$ *i neka je dato ograničenje* $f(x) = x^2, \ X = \{x \in X_+ \mid f(x) \leq 0\}$. *Imamo* $f_* = f(0) = 0$, *ali Lagranžova funkcija* $L(x, \lambda) = -x + \lambda x^2, \ x \in X_+, \ \lambda \geq 0$, *nema sedlastu tačku.*

Teorema Kun-Takera

Kun[4]-Takerova[5]teorema daje dodatne uslove koji obezbeđuju egzistenciju sedlaste tačke. U sledećoj definiciji posmatramo problem (4.5).

Definicija 4.18. *Ograničenje* $f(x) \leq 0$ *je regularno na skupu* $\widehat{X} \subset \mathbb{R}^n$, *ako postoji tačka* $x \in \widehat{X}$, *tako da važi* $f(x) < 0$. *Skup* $\widehat{X} = \bigcap_{i=1}^m X_i$ *je regularan ako su sva ograničenja u njemu regularna, odnosno ako je ograničnje* f_i, $i = 1, ..., m$ *regularno na skupu* $\widehat{X}$.

[4]T. S. Kuhn (1922-1996)
[5]A. W. Tucker (1914-1999)

Lema 4.19. *Neka je X_0 konveksan skup i neka su f_i konveksne funkcije na X_0, $i = 1, ..., m$. Neka je $\widehat{X}$ regularan skup. Tada postoji tačka $x_0 \in X_0$, tako da je $f_i(x_0) < 0$ za sve $i = 1, ..., m$.*

Postojanje tačke $x_0 \in X_0$ za koju je $f_i(x_0) < 0, i = 1, ..., m$ je uslov koji zovemo uslov Slejtera, a tačku x_0 Slejterova tačka. On obezbeđuje regularnost, nenegativnost Lagranžovih množitelja i implicira da su uslovi Kun-Takera potrebni i dovoljni.

Sledeća teorema daje dovoljan uslov za postojanje sedlaste tačke, uz ograničenja tipa nejednakosti:

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & f_0(x) \\ \text{uz uslove} \quad & f_i(x) \leq 0, \ i = 1, ..., m, \end{aligned} \tag{4.6}$$

gde su $f_i, i = 0, ..., m$ konveksne funkcije na skupu $X_0 = dom(f_i) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Teorema 4.20. *Dat je konveksan skup X_0 i neka su funkcije f_i, $i = 0, ..., m$ koveksne na tom skupu. Neka je $\widehat{X}$ regularan skup i neka je $\widehat{X}_*$ neprazan. Tada postoje Lagranžovi množitelji $\lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_m^*)$, $\lambda_i^* \geq 0$, $i = 1, ..., m$, takvi da za svaku tačku $x_* \in \widehat{X_*}$ važi da je (x_*, λ^*) sedlasta tačka funkcije Lagranža za posmatrani problem.*

4.3 Opšta ravnoteža i Pareto optimalnost

U ovom poglavlju uvodimo pojam opšte ravnoteže i pojam Pareto optimalnost (efikasnost). Da bi smo mogli da ih definišemo moramo uvesti relaciju preferencije. Cilj jeste da vidimo kako se međusobno odnose opšta ravnoteža i Pareto optimalnost. Koristili smo [4], [11], [16] iz spiska Literature.

Rezultat u ekonomiji koji je u vezi sa ravnotežom na tržištu i koji se često razmatra je Pareto optimalnost, odnosno Pareto efikasnost. Ona predstavlja situaciju na tržištu takvu da ekonomski napredak jednog potrošača narušava ekonomsko stanje drugog potrošača. U nastavku definišimo skup dobara, potrošače i njihove preferencije.

Dobro predstavlja robu. Označimo sa C vektorski prostor dimenzije k čiji element je vektor $x = (x_1, ..., x_k)$ koji predstavljaju vektor potrošnje roba iz paketa od k različitih dobara. Sada možemo da definišemo potrošače i naglasimo njihove preferencije. Označimo potrošače sa $i = 1, ..., n$, gde i-ti potrošač može birati iz potrošačkog skupa $X_i \subset C$.

Svaki potrošač i ima dobro definisanu relaciju preferencije $\succeq_i$, za svaki par $(x, x') \in X_i \times X_i$, gde $x \succeq_i x'$ znači da je x dobro bar koliko i x' (tj. i-ti potrošač daje prednost, preferira x u odnosu na x'). Binarna relacija $\succeq_i$ na skupu X_i ima sledeće osobine:

1. refleksivnost: za svako $x \in X_i: \ x \succeq_i x$,

2. kompletnost: za svako $x, x' \in X_i: \ x \succeq_i x'$ ili $x' \succeq_i x$ i

3. tranzitivnost: za svako $x, x', x'' \in X_i: \ x \succeq_i x'$ i $x' \succeq_i x'' \Rightarrow x \succeq_i x''$.

Postoji još i relacija stroge preferencije $\succ_i$ koja se definiše na sledeći način: za svako $x, x' \in X_i : x \succ_i x' \Leftrightarrow x \succeq_i x'$ i $\neg(x' \succeq_i x)$.

Napomena 4.21. *Pošto svaki potrošač ima sopstveni poredak preferencija, pomoću indeksa i označavamo na čiji se poredak misli. Na primer relacija $\succeq_i$ se odnosi na i-tog potrošača i potrošački skup X_i.*

U opštoj ravnoteži potrošači prave izbor između svih potrošačkih planova, a ne između pojedinačnih roba. Zajedno sa tranzitivnošću i kompletnošću, ova pretpostavka u vezi sa preferencijama potrošača sadrži ideal neoklasičnog racionalnog izbora.

Svaki potrošač na tržištu, vođen svojim željama i preferencijama, želi da ostvari maksimalnu dobit za sebe. Nema značaja porediti interpersonalne dobiti već treba posmatrati dobit svakog potrošača zasebno. dobit bi trebalo shvatiti ne samo kao funkciju trenutne potrošnje, već celog potrošačkog plana. Tako je racionalan izbor ekvivalentan maksimizaciji dobiti.

Definicija 4.22. *Neka je $\succeq_i$ relacija preferencije na X_i. Funkcija $u_i : X_i \longrightarrow \mathbb{R}$ za koju važi $x \succeq_i x'$ ako i samo ako $u_i(x) \geq u_i(x')$, za svako $x, x' \in X_i$ naziva se funkcija korisnosti relacije preferencije $\succeq_i$.*

Da bi neka realna funkcija bila funkcija korisnosti za određenu relaciju preferencije, potrebni uslovi su da je ona rastuća i neprekidna na posmatranom skupu.

U prostoru dobara postoje i dobavljači, koje označavamo sa $j = 1, ..., m$. Dobavljač je u mogućnosti da izabere bilo koji vektor y iz skupa $Y_j \subset C$, koji nazivamo $j-$ti nabavni skup. Skup Y_j predstavlja poznatu proizvodnju i resuse.

Dakle, ako je dat vektor cena $p = (p_1, ..., p_k)$ isti za sve dobavljače i njegove komponente date tržišne cene odgovarajućih dobara, tada on određuje aditivnu funkciju na skupu C koja predstavlja ukupan ostvariv profit $\langle p, y \rangle$ dobavljane količine robe $y \in C$.

Da bi definisali opštu ravnotežu, posmatramo ekonomiju koja sadrži dobavljače i potrošače, tj. vektor $(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_m)$, gde su $x_i \in X_i$ i $y_j \in Y_j$. Ako su $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$ i $\tilde{y} = \sum_{j=1}^{m} y_j$, tada se vektor $(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_m)$ zove ravnotežni vektor ako je $\tilde{x} = \tilde{y}$.

Opšta ravnoteža je ravnotežni vektor $(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_m)$ i vektor cena $p = (p_1, ..., p_k)$ sa sledećim osobinama:

1. za svako $i,\ i = 1,..,n$ važi $x_i \succeq_i x_i'$ za svako $x_i' \in X_i$ za koje je $\langle p, x_i \rangle \geq \langle p, x_i' \rangle$,

2. za svako $j,\ j = 1,...,m$ važi $\langle p, y_j \rangle \geq \langle p, y_j' \rangle$, za sve $y_j' \in Y_j$.

Definicija 4.23. *Raspodela (x, y) je Pareto optimalna ako ne postoji nijedna druga raspodela (x', y') takva da je $x_i' \succeq_i x_i$ za svako $i = 1,...,n$, i da je $x_i' \succ_i x_i$ za bar jedno $i = 1,...,n$.*

Pareto optimalnost se ne bavi pitanjima raspodele, u smislu kom će potrošaču biti bolje a kom lošije. Već kaže da društveno blagostanje raste samo ako raste individualno bar jednog pojedinca u društvu, a da istovremeno nikome nije gore.

Nešto više o Valrasian ravnoteži i teoremama blagostanja pokazaćemo u sledećem poglavlju.

4.4 Prva i druga teorema blagostanja

U ovom poglavlju pažnju posvećujemo prvoj i drugoj teoremi blagostanja u ekonomiji. Dokazaćemo ih korišćenjem Kun-Takerove teoreme i teoreme separacije konveksnih skupova (pogledati u [4]).

Teoreme blagostanja nam između ostalog daju odgovore na dva pitanja iz svakodnevnog života. Prvo: Može li se dati teorijski rezultat koji dokazuje postojanje "nevidljive ruke[6]", odnosno koji afirmiše empirijsku činjenicu da sopstveni interes nekad vodi do zajedničkog interesa? Prva fudamentalna teorema daje pozitivan rezultat, odnosno ona tvrdi da sopstveni interes vodi ka raspodeli imovine u društvu koja je efikasna u određenom smislu. Tema socijalne jednakosti (pravednosti) i efikasnosti vodi do sledećeg pitanja: Da li sistem plata u nekom sektoru takav da je raspodela plata ne samo efikasna već i poštena? Ako to nije slučaj, tada ovo sugeriše da je neophodno izvršiti uticaj na tržište rada tako da se koriguju razlike u šansama za pravedno vrednovanje rada. Druga teorema blagostanja kaže da se može postići zeljena Pareto optimalna alokacija odgovarajućom raspodelom ukupnog bogatstva, dozvoljavajući da tržište samo odradi svoj posao.

Analizirajući rešenje sledećeg problema dolazimo do (matematičke) formulacije prve i druge teoreme blagostanja.

Problem 4.24. *Najbolji ručak (Druga teorema blagostanja)*
Posmatrajmo grupu ljudi u kojoj svaka osoba kupuje određenu hranu za ručak

[6]"nevidljiva ruka"-izraz koji ekonomisti koriste da bi opisali samoregulišuću prirodu tržišta, metafora A. Smith-a

i namerava da jede onu hranu koju je kupila. Tada jedna od njih ponudi svom susedu jabuku u zamenu za krušku. Ona prihvata, jer više voli jabuku nego krušku. Tako je oboma bolje u ovoj razmeni, jer su im ukusi različiti. Pretpostavimo sada da neko ko zna ukuse osoba iz grupe pokušava da napravi "društveno poželjnu" preraspodelu hrane. On će to pokušati da ostvari pomoću sistema cena na sledeći način. Dodeliće prikladne cene svakoj vrsti hrane, svu hranu će staviti na sto i svakoj osobi će pridružiti njen lični budžet za odabir svog omiljenog ručka. Ovaj budžet ne mora da bude vrednost ručka koji je ta osoba donela do stola, početno učešće (udeo) može da se koriguje. Pokazati da cene i budžeti zaista mogu biti odabrani na način da pojedinačni interes svake individue vodi tačno do planirane "društveno poželjne" raspodele pod prirodnim pretpostavkama.

Rešenje. Modeliramo ovaj problem na sledeći način. Posmatramo n potrošača, i obeležimo ih sa $i = 1, ..., n$, i k roba. Nenegativan vektor $x_i \in \mathbb{R}^k$ zove se vektor potrošnje i prikazuje paket od k roba koristi potrošača. Potrošači imaju početno učešće $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, vektor potrošnje koji prikazuje donešene ručkove. Raspodela je niz od n vektora potrošnje $x = (x_1, ..., x_n)$. Raspodela se zove dopustivom ako je

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i,$$

odnosno može se ostvariti s obzirom na početni ulog. Svaki potrošač ima svoju funciju korisnosti u_i, $i = 1, ..., n$, definisanu na skupu potrošačkih vektora $\mathbb{R}^k$, koja prikazuje individualne preferencije potrošača na sledeći način: $u_i(x_i) > u_i(x_i')$ znači da potrošač i preferira potrošački vektor x_i više od x_i' i $u_i(x_i) = u_i(x_i')$ znači da je jednako zainteresovan.

Dopustiva raspodela se zove Pareto efikasna ako ne postoji druga dopustiva raspodela koja čini da svim ljudima bude bolje. To je ekvivalentno sledećem svojstvu, podrazumevajući ranije navedene osobine funkcija korisnosti: Svaka raspodela koja nekoj osobi čini da bude bolje, bar jednoj drugoj osobi cini bude lošije.

Vektor cena je nenegativni vektor vrste $p = (p_1, ..., p_k)$, kojim prikazujemo izbor cena za svaku od k roba. Vektor budžeta je nenegativan vektor vrste $b = (b_1, ..., b_n)$, koji predstavlja izbor budžeta za svakog potrošača.

Za svaki izbor vektora cena p, svaki izbor vektora budžeta b i proizvoljnog potrošača $i,\ i=1,...,n$ posmatramo sledeći problem:

$$\begin{aligned} \text{maksimizirati} \quad & u_i(x_i) \\ \text{uz uslove} \quad & \langle p, x_i\rangle \le b_i,\ i=1,...,n \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i \le \sum_{j=1}^{n} \omega_j \\ & x_i \in \mathbb{R}_+^k,\ i=1,...,n \end{aligned} \tag{4.7}$$

koji predstavlja ponašanje i-tog potrošača, koji bira najbolji vektor potrošnje koji može da izabere za svoj budžet. Ovaj problem ima jedinstvenu tačku maksimuma $d_i(p,b)$ koju zovemo vektor potražnje potrošača i, za date vektore cene p i budžeta b. Postojanje ovog vektora maksimuma je posledica Vajerštrasove teoreme i osobina funkcije korisnosti. Nenegativan vektor cena p i vektor budžeta b, gde je

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \left\langle p, \sum_{i=1}^{n} \omega_i \right\rangle,$$

odnosno ukupni budžet je jednak ukupnom početnom učešću, naziva se Valrasian ravnoteža ako joj pridruženi niz potražnji

$$d(p,b) = (d_1(p,b),...,d_n(p,b))$$

čini dopustivu raspodelu. □

Definicija 4.25. *Ako je niz potražnji $d(p,b) = (d_1(p,b),...,d_n(p,b))$, koji odgovara izboru vektora cene p i budžeta b, dopustiva raspodela, gde je ukupni budžet jednak ukupnoj vrednosti učešća, odnosno važi*

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \left\langle p, \sum_{i=1}^{n} \omega_i \right\rangle,$$

tada uređeni par (p,b) zovemo Valrasian ravnotežom.

Teorema 4.26. *(Prva teorema blagostanja) Neka je izbor cena p i budžeta b takav da čine Valrasian ravnotežu, tada je odgovarajuća dopustiva raspodela $d(p,b)$ Pareto efikasna.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, neka je x' dopustiva raspodela koja čini svim potrošačima boljitak. S obzirom na svojstvo optimalnosti dopustive raspodele $d(p,b) = (d_1(p,b),...,d_n(p,b))$, tačnije na činjenicu da je $d_i(p,b)$

maksimum problema, dobijamo da je $\langle p, x_i' \rangle > b_i,\ i = 1, ...n$, za sve potrošače i, odnosno

$$\left\langle p, \sum_{i=1}^{n} x_i' \right\rangle > \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Dalje, desna strana ove nejednakosti jednaka je

$$\left\langle p, \sum_{i=1}^{n} \omega_i \right\rangle,$$

na osnovu definicije Valrasian ravnoteže. Dakle, dobili smo kontradikciju sa pretpostavkom da je raspodela x' dopustiva, odnosno da je

$$\sum_{j=1}^{n} x_i' \leq \sum_{j=1}^{n} \omega_j.$$

□

Teorema 4.27. *(Druga teorema blagostanja) Svaka Pareto efikasna dopustiva raspodela x^* za koju svi potrošači imaju pozitivnu količinu svake robe je Valrasian ravnoteža. Preciznije, postoji nenula vektor cena p koji za ako se vektor budžeta definiše sa*

$$b = (\langle p, x_1^* \rangle, ..., \langle p, x_n^* \rangle)$$

daje Valrasian ravnotežu, gde je

$$d(p, b) = (\langle p, x_1^* \rangle, ..., \langle p, x_n^* \rangle).$$

Dokaz. Neka je x^* Pareto efikasna dopustiva raspodela, odnosno x^* je rešenje sledećeg problema minimizacije:

$$\begin{aligned} \text{minimiziramo} \quad & f(x) = \max_{i=1,...,n} (u_i(x_i^*) - u_i(x_i)) \\ \text{uz uslove} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j \leq \sum_{j=1}^{n} x_j^* \\ & x_j \in \mathbb{R}_+^k,\ \forall j = 1, ..., n. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da svi potošači imaju pozitivnu količinu svake robe. Sada primenjujući Kun-Takerovu teoremu, uz napomenu da je $x = 0$ Slejterova tačka, dobijamo da postoji nenegativni niz Lagranžovih množitelja $p = (p_1, ..., p_n)$, tako da Lagranžova funkcija data sa

$$L(x) = f(x) + p \cdot \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^*)$$

ima minimum u $x = x^*$. Primetimo, vektor p ne može biti nula. Zaista, funkcija f nema minimum, jer je strogo monotono opadajuća po svakoj promenljivoj iz pretpostavke da su sve funkcije korisnosti monotono rastuće po svakoj promenljivoj.

Sada ćemo u Lagranžovoj funkciji zameniti $x_j = x_j^*$ za sve $j,\ j = 1, ..., n$, osim jednog, recimo i. Tada će sledeća funkcija po x_i

$$-(u_i(x_i) - u_i(x_i^*))_+ + p \cdot (x_i - x_i^*),$$

imati minimum u $x_i = x_i^*$. Ovde smo korisitili oznaku $t_+ = \max(t, 0)$, za svako $t \in \mathbb{R}$. Sada opet primenjujemo teoremu Kun-Takera i dobijamo da je $x_i = x_i^*$ tačka minimuma problema

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & -(u_i(x_i) - u_i(x_i^*))_+ \\ \text{uz uslov:} \quad & \langle p, x_i \rangle \leq \langle p, x_i^* \rangle . \end{aligned}$$

Ovo možemo preformulisati na sledeći način: $x_i = x_i^*$ je tačka maksimuma problema

$$\begin{aligned} \text{maksimizirati} \quad & u_i(x_i) \\ \text{uz uslov} \quad & \langle p, x_i \rangle \leq \langle p, x_i^* \rangle . \end{aligned}$$

Dodatno važi,

$$x_i^* \leq \sum_{j=1}^{n} \omega_j,$$

pa vektor cena p određuje izbor vektora budžeta

$$b = (\langle p, x_1^* \rangle, ..., \langle p, x_n^* \rangle),$$

koji čine Valrasian ravnotežu gde je

$$d(p, b) = (\langle p, x_1^* \rangle, ..., \langle p, x_n^* \rangle),$$

kao što smo i hteli da dokažemo. $\square$

Napomena 4.28. *U praksi, Pareto optimalna raspodela podrazumeva da je gotovo nemoguće preduzeti bilo kakve društvene aktivnosti, poput promene ekonomske politike, a da ne dođe do pogoršanja ekonomskog položaja bar jedne osobe. Zbog toga su i neki drugi kriterijumi ekonomske efikasnosti našli široku primenu u ekonomiji. Ovo su neki od njih:*

- *Buhananov*[7] *kriterijum jednoglasnosti: koji podrazumeva da je promena efikasna, ako svi članovi društva jednoglasno pristaju na nju.*
- *Kaldor*[8]*-Hiks*[9]*-ova efikasnost: koja kaže da je promena raspodele efikasna, ako je dobitak koji ostvare dobitnici veći od štete koju pretrpe gubitnici pri toj promeni.*
- *Teorema Koasa*[10]*: koja tvrdi da pojedinci mogu pregovarati o dobicima i gubicima kako bi postigli ekonomski efikasan rezultat na konkurentnim tržištima bez transakcijskih troškova.*

Ovi alternativni kriterijumi za ekonomsku efikasnost svi, u određenoj meri, ublažavaju stroge zahteve čiste Pareto efikasnosti u pragmatičnom interesu stvarne svetske politike i odlučivanja ([16]).

[7] J. M. Buchanan(1919-2013)
[8] N. Kaldor(1908-1986)
[9] J. Hicks (1904-1989)
[10] R. Coase (1910-2013)

Zaključak

U centralnom delu rada predstavljene su teoreme Radona, Karateodorija i Helija koje su uopštavane i proučavane od strane mnogih autora. Značajne su jer ističu različite karakteristike (geometrijske, algebarske i topološke) konveksnih skupova u $\mathbb{R}^n$. Za dokazivanje međusobne ekvivalencije ove tri teoreme, odnosno ova tri različita pristupa konveksnim skupovima, korišćen je pojam subdiferencijala funkcije rastojanja tačke od skupa. Kako je subdiferencijal osnov za njihovo dokazivanje, bilo je neophodno ispitati i različita njegova svojstva.

Na kraju rada, na konkretnom primeru predstavljena je Pareto efikasnost, koja kaže da društveno blagostanje raste samo ako raste individualno bar jednog pojedinca u društvu, a da istovremeno nikome nije gore. Prva i druga teorema blagostanja su veoma korisne u teoriji ali da bi se koristile u praksi, moraju se prilagoditi konkretnim potrebama. Različitim transformacijama Paretove optimalne raspodele naučnici pokušavaju da naprave raspodelu koja je fleksibilnija od Paretove. Pareto optimalnost je uvek bila predmet rasprave i sukoba među naučnicima, tako da je ona i dalje predmet istraživanja.

Literatura

[1] Dimitri P. Bertsekas, Angelia Nedić, Asuman E. Ozdaglar, *Convex Analysis and Optimization*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 2003.

[2] Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 2004.

[3] Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe, *Subgradients*, Lecture Notes, Stanford University, 2008.

[4] Jan Brinkhuis, Vladimir Tikhomirov, *Optimization: Insights and Applications*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2005.

[5] Constantin Carathéodory, *Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen.* (German), Math. Ann. 64(1) (1907), 95—115.

[6] Ludwig Danzer, Branko Grunbaum, Victor Klee, *Helly's Theorem and Its Relatives*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 7 Convexity, American Mathematical Society, 1963.

[7] Ljiljana Gajić, *Teorija optimizacije*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1988.

[8] Olga Hadžić, Stevan Pilipović, *Uvod u funkcionalnu analizu*, Univerzitet u Novom Sadu, 1996.

[9] Eduard Helly, *Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten.* (German), Jber. Deutsch. Math. Verein. 32 (1923), 175–176.

[10] Eduard Helly, *Über Systeme von abgeschlossenen Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten.* (German), Monatsh. Math. Phys. 37(1) (1930), 281—302.

[11] Andreu Mas-Colell, Michael Whinston, Jeery Green, *Microeconomic Theory* ,Oxford University Press, New York, Oxford, 1995.

[12] Johann Radon, *Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten.* (German), Math. Ann. 83(1-2) (1921), 113—115.

[13] Adam Robinson, *Helly's Theorem and its Equivalences via Convex Analysis*, Portland State University, 2014.

[14] Nenad Teofanov, Milica Žigić, *Osnovi optimizacije*, Prirodno–matematički fakultet, Novi Sad, 2018.

[15] hhttps://en.wikipedia.org/wiki/Vilfredo Pareto

[16] https://www.investopedia.com/terms/p/pareto-efficiency.asp

Biografija

Branka Jovičin rođena je 10.11.1990. godine u Subotici. Nakon završene osnovne škole u Novom Sadu, upisala je gimnaziju "Svetozar Marković", opšti smer. Godine 2009. upisala je osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer primenjena matematika. Studiranje master akademskih studija je nastavila u oktobru 2013. godine na istom fakultetu, smer primenjena matematika (matematika finansija). Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom i time stekla uslov za odbranu ovog master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Branka Jovičin
AU

Mentor: dr Milica Žigić
ME

Naslov rada: Svojstva konveksnosti i Pareto efikasnost
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2019
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (4/76/16/0/10/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Nelinearna optimizacija
ND

Ključne reči: konveksni skupovi, konveksne funkcije, hiperravni, teoreme separacije, subdiferencijal, konveksna optimizacija, Pareto efikasnost, Valrasian ravnoteža
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Ovaj rad se bavi svojstvima konveksnosti i njihovom primenom na Pareto efikasnost. Pareto raspodela predstavlja situaciju na tržistu takvu da ekonomski napredak jednog potrošača narušava ekonomsko stanje drugog potrošača. U uvodnom delu navedene su definicije i teoreme sa dokazima koji se koriste kroz ceo rad. U drugoj glavi predstavljamo teoreme Radona, Karateodorija i Helija koje ističu algebarsku, geometrijsku i topološku karakteri-

zaciju konveksnih skupova. U trećoj glavi pokazujemo ekvivalenciju ove tri teoreme, koje dokazujemo pomoću subdiferencijala funkcije rastojanja tačke od skupa. U poslednjoj glavi dajemo biografiju naučnika Vilfreda Pareta, zatim formulišemo i rešavamo problem Pareto efikasnosti kao primenu konveksne optimizacije. Rad završavamo konkretnim primerom iz svakodnevnog života kojim ilustrujemo teoreme blagostanja.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 6.6.2019.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Milica Žigić, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Sanja Rapajić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Branka Jovičin
AU

Mentor: dr Milica Žigić
MN

Title: Properties of convex sets and Pareto efficiency
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2019
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (4/76/16/0/10/0/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Nonlinear optimization
SD

Subject/Key words: convex sets, convex functions, hyperplane, separation theorems, subdifferencial, convex optimization, Pareto efficiency, Walrasian equilibrium
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This paper deals with the properties of convexity and their application to Pareto efficiency. Pareto allocation is a market situation such that the economic progress of one consumer distorts the economic condition of another consumer. The introductory section provides definitions and theorems with proofs throughout the paper. In the second chapter, we present Radon's, Caratheodory's, and Helly's theorem that emphasize algebraic, geometric, and topological characterization of convex sets. In the third chapter,

we show the equivalence of these three theorems, which we prove using the subdifferentials of the function of the distance of a point from the set. In the last chapter we give a biography of the scientist Vilfredo Pareto, and then we formulate and solve the Pareto efficiency problem as an application of convex optimization. We end the thesis with a concrete example from everyday life that illustrates the welfare theorems.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 6.6.2019.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad
Mentor: dr Milica Žigić, assistant professor at Faculty of Science in Novi Sad
Member: dr Sanja Rapajić, associate professor at Faculty of Science in Novi Sad