UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

FUNKCIJE AGREGACIJE I PRIMENA U GRUPNOM ODLUČIVANJU

- MASTER RAD -

Mentor:
Prof. dr Ivana Štajner-Papuga

Student:
Boris Sabo73m/12

Novi Sad, 2013

SADRŽAJ

1. Predgovor

Agregacija i fuzija informacija je osnovni zadatak sistema zasnovanih na znanju, od obrade slike do donošenja odluke. Sa generalne tačke gledišta može se reći da agregacija ima za cilj istovremeno korišćenje različitih delova informacije kako bi se došlo do zaključka ili odluke.

Međutim, najviše se koristi definicija da je agregacija proces kombinovanja i spajanja nekoliko, najčešće numeričkih vrednosti, u jednu. Pomoću funkcija vrši se preslikavanje ulazne vrednosti u izlaznu vrednost. Funkcija se obično obeležava sa $f(x) = y$ gde je x argument, a y vrednost. Ulazna vrednost može biti i vektor, na primer $x = (x_1, \dots, x_n)$ i to je najčešći slučaj kod funkcija agregacije. Funkcije agregacije se puno koriste u matematici (statistika, verovatnoća), ekonomiji, finansijama, kao i u mnogim drugim prirodnim naukama. Postoji više istraživačkih oblasti koje se bave agregacijom, među njima je više-kriterijumska oblast, zatim fuzija senzora, donošenje odluke, kao i traženje bitnih podataka. Svaka od navedenih oblasti koristi ili predlaže određene metodologije kako bi se dobila inteligentna agregacija, to su na primer, neuronske mreže, korišćenje specifičnih tehnika fuzije, verovatnoće, fazi skupova. Svi navedeni prilazi koriste određene numeričke operatore i zato numerička agregacija igra fundamentalnu ulogu. To je razlog zasto se insistira na matematičkom aspektu agregacije, s obzirom da je u pitanju agregacija realnih brojeva, a ne na primer agregacija važnih pravila.

Najstariji primer agregacije je aritmetička sredina gde se od više ulaznih veličina dobija jedna prosečna vrednost. Funkcije pomoću kojih se dobija jedna vrednost od više ulaznih vrednosti nazivaju se funkcije agregacije.

Ovaj master rad je podeljen na tri povezane celine. U prvom delu su definisane funkcije agregacije i operatori agregacije pomoću koji se takođe od više ulaznih dobija jedna izlavrednost ([4],[6]). Zatim su kroz definicije i teoreme prikazane najvažnije osobine funkcija agregacije ([4],[6],[1]).

Drugi deo počinje sa osnovnim operatorima agregacije kao i sa njihovim osobinama ([3],[8]). Navedeni su operatori koji se najviše primenjuju u raznim naučnim disciplinama, između ostalog i u grupnom odlučivanju. Zatim su od operatora agregacije izdvojene trougaone norme, trougaone konorme, uninorme i nula norme, upravo zbog osobina koje su potrebne u procesu grupnog odlučivanja ([2],[7],[1],[11],[13]). Potom su objašnjene osnovne algebarske karakteristike trougaonih normi i trougaonih konormi.

Treći deo se bavi primenom operatora agregacije. Na početku su prikazani fazi skupovi i naglašena je njihova veza sa funkcijama preferencija agenata koji su uključeni u proces grupnog odlučivanja ([11],[10],[12]). Upoređuju se načini grupnog odlučivanja pomoću operatora agregacije i uočavaju se prednosti i nedostaci primene operatora agregacije. Takođe se i razmatraju oblici koji će uključiti važnije agente u proces grupnog odlučivanja kako bi se na kraju dobila najoptimalnija alternativa, odnosno jedna izlazana vrednost ([5],[12]).

U suštini, u radu je prikazana matematička primena u grupnom odlučivanju. Osim toga prikazane su i metode po kojima će to odlučivanje biti pravednije i pomoću kojih će se dobiti odluka koja će najviše odgovarati učesnicima.

2. Funkcije agregacije

Proučavanja problema agregacije su pokazala da je izbor funkcije agregacije daleko od proizvoljnog i da treba da se bazira na osnovu uređenja u kojem se vrši agregacija. Takođe, nije uvek ispunjeno da matematički operator koji transformiše skup brojeva u jedinstven broj daje reprezentativnu ili značajnu vrednost. Na primer u nekim metodama procene, cilj je da se dodeli uopšten rezultat svakoj altenativi pomoću skupa parcijalnih rezultata. Jasno, bilo bi neprirodno dodeliti opšti rezultat koji je manji od najmanjeg parcijalnog rezultata ili dodeliti rezultat koji je veći od najvećeg parcijalnog rezultata. Drugi primer je agregacija mišljenja u procesu glasanja. Obično su glasači anonimni, zato je funkcija agregacije simetrična.

Da bi funkcija bila funkcija agregacije ona mora da ispunjava određene osobine. Prvo, kao što je ranije navedeno, izlazna veličina je sintetička vrednost. Zatim, ako su sve ulazne vrednosti u intervalu $[a, b]$, tada je i izlazna vrednost u intervalu $[a, b]$. Povrh toga, ako su sve ulazne vrednosti jednake donjoj granici a, tada je i izlazna vrednost a, slično je i za gornju granicu b. Sledeći uslov koji je bitan je neopadajuća monotonost. To znači da, ako bi se povećale ulazne vrednosti, izlazna vrednost bi se trebala povećati ili barem ostati ista. Mnoge funkcije ispunjavaju navedene osobine što problem biranja odgovarajućih funkcija za određene zahteve čini težim.

U ovom poglavlju prezentovane su osobine navedene u [4] koje su generalno važne za agregaciju. Na primer, rastuća monotonost je neophodna za agregaciju preferencija. Idempotentnost je neophodna kada agregaciona procena predstavlja prosečnu vrednost. Podrazumeva se da nisu sve osobine podjednako važne. Neke od njih su imperativni uslovi čije narušavanje dovodi do kontradiktornih agregacionih modela. Druge su samo tehnički uslovi koji olakšavaju predstavljanje ili računanje funkcija agregacije.

Pretpostavka je da promenljive bilo koje funkcije agregacije imaju zajednički domen $\mathbb{I}$, koji je neprazan realan interval, ograničen ili neograničen. Neka je n proizvoljan ne nula ceo broj, tada se sa [n] obeležava skup {1,...,n}. Takođe, n-torke se obeležavaju podebljanim slovima. Na primer $(x_1,...,x_n)$ se označava sa **x**, dok se n-torka i permutacija $\sigma \in \mathfrak{S}_{[x]}$ predstavlja sa $[x]_\sigma:=(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$. Kodomen bilo koje funkcije F se označava sa ran(F).

Pretpostavka je da $\mathbb{I}$=[0,1]. Funkcija agregacije na $[0,1]^n$ je funkcija $A^{(n)}$: $[0,1]^n \rightarrow [0,1]$ koja je za svaku promenljivu neopadajuća i koja zadovoljava granične uslove:

$$A^{(n)}(0,\ldots,0)=0 \ \text{ i } A^{(n)}(1,\ldots,1)=0 \ .$$

Definicija 2.1.[4] Funkcija agregacije na $\mathbb{I}^n$ je funkcija $A^{(n)}$: $\mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ koja je :

(i) neopadajuća
(ii) ispunjava granične uslove

$$inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{I}^n} A^{(n)}(\mathbf{x}) = inf\ \mathbb{I} \text{ i } sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{I}^n} A^{(n)}(\mathbf{x}) = sup\ \mathbb{I} \ .$$

Prirodan broj n predstavlja broj promenljivih. Primeri funkcija agregacije su aritmetička sredina $M^{(n)}(\mathbf{x})= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, proizvod $\Pi(\mathbf{x})= \prod_{i=1}^{n} x_i$, kao i geometrijska sredina $GM(\mathbf{x})=(\prod_{i=1}^{n} x_i)^{1/n}$.

Funkcije $Min(\mathbf{x})= \min(x_1,...,x_n)$ i $Max(\mathbf{x})= \max(x_1,...,x_n)$ se obeležavaju na sledeći način

$$Min(\mathbf{x})=\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \quad Max(\mathbf{x})= \bigvee_{i=1}^{n} x_i.$$

Funkcija agregacije se može proširiti kako bi se dobila proširena funkcija agregacije.

Definicija 2.2.[4] Proširena funkcija na $\bigcup_{n\in N} \mathbb{I}^{\boldsymbol{n}}$ preslikava

$$F: \bigcup_{n\in N} \mathbb{I}^{\boldsymbol{n}} \to \overline{\mathbb{R}} .$$

Proširena funkcija agregacije na $\bigcup_{n\in N} \mathbb{I}^{\boldsymbol{n}}$ je proširena funkcija na $\bigcup_{n\in N} \mathbb{I}^{\boldsymbol{n}}$ čija je restrikcija $A^{(n)} = A^{(n)}{}_{|\mathbb{I}^n}$ na $\mathbb{I}^{\boldsymbol{n}}$ funkcija agregacije na $\mathbb{I}^{\boldsymbol{n}}$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$. Može se primetiti da za bilo koju funkciju $F: \mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \overline{\mathbb{R}}$ koja ispunjava uslove (i) i (ii) iz definicije (2.1) važi $ran(F)\subseteq \overline{\mathbb{I}}$. Osim toga, svaka n-torka $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n) \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$, čije će se koordinate spojiti pomoću funkcije agregacije A može se posmatrati kao funkcija koja preslikava [n] u $\mathbb{I}$. Odnosno, A je funkcionela iz $\mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ u $\mathbb{I}$.

Napomena 2.3 Postoji drugi pristup agregacije argumenata u jednu izlaznu vrednost preko operatora agregacije. Operatori agregacije se definišu slično kao i proširene funkcije agregacije (videti [2]). Oni se prvenstveno uvode zato što je prilikom agregacije (skupljanja) podataka u aplikacijama, zgodno dodeliti svakoj n-torki elemenata u recimo, [0,1], jedinstven broj u [0,1]. Zbog toga je operator agregacije obično definisan kao funkcija iz $\bigcup_{n\in \mathbf{N}}[0,1]^n$ u [0,1]. Naravno, u mnogim slučajevima može se uzeti operator agregacije iz binarnih operacija na [0,1]. Može se zapaziti da je operator agregacije ustvari proširena agregaciona funkcija na datom intervalu uz uslov da je $A(x)=x$ za $x \in [0,1]$. Sledi definicija operatora agregacije iz [2].

Definicija 2.4[2] Operator agregacije je funkcija $A: \bigcup_{n\in \mathbf{N}}[0,1]^n \to [0,1]$, takva da :
(i) $A(x_1,x_2,\dots,x_n)\leq A(y_1,y_2,\dots,y_n)$ kada je $x_i\leq y_i$ za sve $i \in \{1,\dots,n\}$.
(ii)$A(x)=x$ za sve $x \in [0,1]$.
(iii)$A(0,0,\dots,0)=0$ i $A(1,1,\dots,1)=1$.

Definicija 2.5.[4] Dijagonalna sekcija bilo koje funkcije $F: \mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \overline{\mathbb{R}}$ je unarna funkcija $\delta_F(x)= F(x,\dots,x)$ za sve $x \in \mathbb{I}$.

Sledeće tvrđenje pokazuje da ako dijagonalna sekcija ispunjava granične uslove (2.1) i uslov $ran(F)\subseteq \mathbb{I}$ onda je funkcija $F: \mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \overline{\mathbb{R}}$ funkcija agregacije.

Tvrđenje 2.6.[4] Neopadajuća funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je funkcija agregacije na $\mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ ako i samo ako je za $\mathrm{ran}(\delta_F) \subseteq \mathbb{I}$ ispunjeno

$$inf_{x\in\mathbb{I}}\delta_F(\mathrm{x})=inf\ \mathbb{I}\ \text{ i }\ sup_{x\in\mathbb{I}}\delta_F(\mathrm{x})=sup\ \mathbb{I}.$$

Dokaz. Za datu neopadajuću funkciju F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, neposredno slede nejednakosti

$$\delta_F(\min(\mathrm{x}_1,...,\mathrm{x}_n)) \leq \mathrm{F}(\mathbf{x}) \leq \delta_F(\max(\mathrm{x}_1,...,\mathrm{x}_n)) \quad (2.4)$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ što implicira:

$$inf_{x\in\mathbb{I}}\mathrm{F}(\mathbf{x})=inf_{x\in\mathbb{I}}\delta_F(\mathrm{x})\ \text{ i }\ sup_{x\in\mathbb{I}}\mathrm{F}(\mathbf{x})=sup_{x\in\mathbb{I}}\delta_F(\mathrm{x}).$$

Na osnovu navedenog zaključak je da je F funkcija agregacije. ■

2.1 Monotonost

U ovom odeljku razmatraju se monotonost, neopadajuća monotonost, strogo rastuća monotonost i jednoglasno rastuća monotonost definisane u [4]. Sa $\overline{\mathbb{R}}$ se označava $[-\infty, +\infty]$.

Definicija 2.7.[1] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je neopadajuća (za svaki argument) ako je za sve $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^* \in \mathbb{I}^n$,

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{x}^* \Rightarrow \mathrm{F}(\mathbf{x}) \leq \mathrm{F}(\mathbf{x}^*).$$

Za neopadajuće funkcije važi da se povećanjem ulazne vrednosti ne smanjuje izlazna vrednost.

Definicija 2.8.[1] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je strogo rastuća (za svaki argument) ako je za sve $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^* \in \mathbb{I}^n$,

$$\mathbf{x} < \mathbf{x}^* \Rightarrow \mathrm{F}(\mathbf{x}) < \mathrm{F}(\mathbf{x}^*).$$

Prema tome, funkcija je strogo rastuća ako je neopadajuća i ako predstavlja pozitivnu reakciju za bilo kakvo povećanje bar jedne ulazne vrednosti. Osim toga, strogo rastuća monotonost implicira neopadajuću monotonost.

Definicija 2.9.[1] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je jednoglasno rastuća ako je neopadajuća i ako, za sve $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^* \in \mathbb{I}^n$,

$$\mathrm{x}_i < \mathrm{x}_i^*,\ \forall i \in [\mathrm{n}] \Rightarrow \mathrm{F}(\mathbf{x}) < \mathrm{F}(\mathbf{x}^*).$$

Lako se uočava da strogo rastuća monotonost omogućava jednoglasno rastuću monotonost. Na primer, aritmetička sredina je strogo rastuća, stoga i jednoglasno rastuća.

Primer 2.10.[1] Funkcije Min i Max su jednoglasno rastuće ali ne i strogo rastuće. Ograničena suma koja se definiše kao S_L(x)=Min($\sum_{i=1}^{n} x_i$,1) na $[0,1]^n$ je neopadajuća ali ne i jednoglasno rastuća.

2.2 Neprekidnost

Neprekidnost je važna osobina agregacionih funkcija koja je prikazana na osnovu [4].

Definicija 2.11.[4] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$ je neprekidna ako za sve $\mathbf{x}^* \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_i}_{\mathbf{x}\in\mathbb{I}^n}} \mathrm{F}(\mathbf{x})=\mathrm{F}(\mathbf{x}^*).$$

Osobina neprekidnosti znači da male promene argumenata ne prave veliku promenu u vrednosti agregacije.

Tvrđenje 2.12.[4] Za neopadajuću funkciju F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:
(i) F je neprekidna
(ii) F je neprekidna za svaku promenljivu, to jest, za svako $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ i svako $i \in [n]$, unarna funkcija

$$\boldsymbol{u} \longrightarrow \mathrm{F}(x_1, \dots, x_{i-1}, u, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

je neprekidna.
(iii) Za svako $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$, pri čemu $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, i za $c \in [\mathrm{F}(\mathbf{x}), \mathrm{F}(\mathbf{y})]$, postoji $\mathbf{z} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$, $\mathbf{x} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{y}$, tako da je $\mathrm{F}(\mathbf{z})=c$.
Dokaz. (i)⟺(ii) U tvrđenju 2.25 dat je opštiji dokaz ekvivalencije pomoću leve neprekidnosti i desne neprekidnosti.

(i)⟹(iii) Poznato je da neprekidne unarne funkcije imaju osobinu srednje vrednosti. Sada za bilo koje $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{I}^n$ takve da je $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ i $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ može se definisati unarna funkcija f: $[0,1] \to \mathbb{R}$ kao

$$f(\mathrm{t}) := \mathrm{F}((1-\mathrm{t})\mathbf{x}+\mathrm{t}\mathbf{y}).$$

Ova funkcija je neprekidna i stoga za svako $c \in [\mathrm{F}(\mathbf{x}),\mathrm{F}(\mathbf{y})] = [f(0),f(1)]$ postoji neko $t_0 \in [0,1]$ tako da je $f(t_0) = c$. Odnosno, postoji $\mathbf{z} = (1-t_0)\mathbf{x}+t_0\mathbf{y}$ za koje važi $\mathbf{x} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{y}$ tako da je $\mathrm{F}(\mathbf{z}) = c$.

(iii)⟹(ii) Kada bi se fiksirale sve promenljve funkcije F sem jedne promenljive iz osobine srednje vrednosti bi sledila sirjektivnost funkcije F kao funkcije jedne slobodne promenljive, uzimajući za kodomen najmanji interval koji sadrži prihvatljive vrednosti.

Sirjektivnost je zbog neopadajuće monotonosti ekvivalentna neprekidnošću funkcije F u slobodnoj promenljivoj. ■

Kao što je ranije napomenuto, neprekidnost funkcije F je sprečava da ima velike greške izlaznih vrednosti usled malih grešaka ulaznih vrednosti. Međutim, generalno kod neprekidnih funkcija nije određen odnos grešaka između ulaznih vrednosti i izlaznih vrednosti. Da bi se izbegli takvi problemi uvode se jači oblici neprekidnosti. Ti oblici su uniformna neprekidnost, apsolutna neprekidnost i možda najpoznatija, Lipšicova neprekidnost.

Definicija 2.13.[4] Neka je $\|\cdot\|$: $\mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ norma i $D \subseteq \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$. Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbb{R}$ je uniformno neprekidna na D ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da $|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})| < \varepsilon$ kada je $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| < \delta$ i $\mathbf{x},\mathbf{y} \in D$.

Tvrđenje 2.14.[4] Funkcija $F:[a,b]^n \longrightarrow \mathbb{R}$ je uniformno neprekidna na $[a,b]^n$ ako i samo ako je neprekidna na $[a,b]^n$.

Dokaz. Neka je F neprekidna na $[a,b]^n$ ali ne i uniformno neprekidna. Tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ postoje $\mathbf{x}^{(k)},\mathbf{y}^{(k)} \in [a,b]^n$ za koje važi $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{y}^{(k)}\| \leq \frac{1}{k}$ i $|F(\mathbf{x}^{(k)}) - F(\mathbf{y}^{(k)})| > \varepsilon$.

Od niza $\mathbf{x}^{(k)}$ može se uzeti podniz $\mathbf{x}^{(k_m)}$ koji konvergira ka granici $\mathbf{x}^* \in [a,b]^n$. Tada podniz $\mathbf{y}^{(k_m)}$ takođe konvergira ka $\mathbf{x}^*$ zbog

$$\| \mathbf{y}^{(k_m)} - \mathbf{x}^* \| \leq \| \mathbf{y}^{(k_m)} - \mathbf{x}^{(k_m)} \| + \| \mathbf{x}^{(k_m)} - \mathbf{x}^* \|.$$

Dakle iz neprekidnosti sledi da $F(\mathbf{x}^{(k_m)}) - F(\mathbf{y}^{(k_m)})$ konvergira ka $F(\mathbf{x}^*) - F(\mathbf{y}^*) = 0$. Dolazi se do kontradikcije sa pretpostavkom pošto je

$$|F(\mathbf{x}^{(k_m)}) - F(\mathbf{y}^{(k_m)})| > \varepsilon.$$ ■

Definicija 2.15.[4] Neka je data funkcija $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ i neka je D podskup od $\mathbb{R}$. Varijacija f na D, u oznaci $\mathrm{Var}_D(f)$ se definiše: Ako $D \cap \mathbb{I} = \emptyset$ tada je $\mathrm{Var}_D(f)=0$. U suprotnom,

$$\mathrm{Var}_D(f) = \sup\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} |f(a_i) - f(a_{i-1})| \mid a_0, \dots, a_n \in D \cap \mathbb{I},\ a_0 \leq \dots \leq a_n\}.$$

Ako je $\mathrm{Var}_D(f)$ konačan, onda je f granična varijacija na D.

Definicija 2.16.[4] Unarna funkcija f: $[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ je apsolutno neprekidna ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je za bilo koji uređen sistem disjunktnih intervala $(a_i,b_i) \subset (a,b)$, $i=1,\dots,n$, za koje je

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$$

važi nejednakost:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Tvrđenje 2.17.[4] Apsolutno neprekidna funkcija *f*: [*a*,*b*]→$\mathbb{R}$ je granična varijacija na [*a*,*b*].
Dokaz. Neka je dato $\varepsilon > 0$. Za proizvoljnu, ali fiksnu podelu *D* intervala [*a*,*b*] mogu se dodavanjem novih intervala podele, grupisati svi podintervali D^*, polazeći od leve granice *a* ka desnoj *b*, tako da je dužina svih podintervala $\frac{\delta}{2}$. To se radi pomoću definicije (2.15.) Maksimalan broj takvih podintervala je

$$C = \left\lfloor \frac{2(b-a)}{\delta} \right\rfloor + 1.$$

Kako je *f* apsolutno neprekidna, sledi da na svakoj podgrupi podintervala važi

$$\sum_{D'} |f(b_i) - f(a_i)| < C_\varepsilon.$$

Zato je

$$\sum_{D} |f(b_i) - f(a_i)| < C_\varepsilon.$$ ■

Tvrđenje 2.18.[4] Neka je *f*: [*a*,*b*]→$\mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja je diferencijabilna na (*a*,*b*). Ako je izvod funkcije f' integrabilan na [*a*,*b*], tada je *f* apsolutno neprekidna i važi

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt.$$

Osobina neprekidnosti može se pojačati pomoću Lipšicovog uslova.

Definicija 2.19.[4] Neka je ||·||: $\mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ norma. Ako funkcija F: $\mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ za sve $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{I}^n$ zadovoljava nejednakost

$$|\mathrm{F}(\mathbf{x}) - \mathrm{F}(\mathbf{y})| \le c\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \tag{2.16}$$

za konstantu $c \in (0,\infty)$, tada se kaže da F ispunjava Lipšicov uslov ili da je Lipšicova. Preciznije, bilo koja funkcija F: $\mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava uslov (2.16) je *c*-Lipšicova.

Uslov *c*-Lipšica ima interesantnu interpretaciju kada se primenjuje u agregaciji. On omogućava procenu greške izlazne vrednosti u poređenju sa greškama ulaznih vrednosti.

$$|\mathrm{F}(\mathbf{x}) - \mathrm{F}(\mathbf{y})| \le c\varepsilon$$

svaki put kada je $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \le \varepsilon$ za $\varepsilon > 0$.

U svim slučajevima kada je $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ Lipšicova osobina za unarne funkcije implicira apsolutnu neprekidnost. Međutim, obrnuto ne važi. Na primer, $\sqrt{x}$ na [0,1] je apsolutno neprekidna ali nije Lipšicova.
Norma Minkovskog se definiše za $p \in [1,\infty)$ kao $\|\mathbf{x}\|_p := (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$, zove se još i L_p-norma.

Primer 2.20.[4] (i) Proizvod $\prod : [0,1]^2 \to [0,1]$ je 1-Lipšicov (u pogledu L_1 norme), zato je i apsolutno neprekidan.
(ii) Geometrijska sredina GM: $[0,1]^n \to [0,1]$ nije Lipšicova uzimajući u obzir bilo koju normu. Međutim, ona je neprekidna i zato je i uniformno neprekidna.

Tvrđenje 2.21.[4] Neka je $[a,b]$ realan interval. Najmanja i najveća agregaciona funkcija na $[a,b]^n$ koje su 1-Lipšicove u pogledu norme $\|\cdot\|$ su redom date preko funkcija $A_*^{(n)}:[a,b]^n \to [a,b]$ sa

$$A_*^{(n)}(\mathbf{x}) := \mathrm{Max}(b - \|n \cdot b - \mathbf{x}\|, a),$$

i $A^{*(n)}:[a,b]^n \to [a,b]$ sa

$$A^{*(n)}(\mathbf{x}) := \mathrm{Min}(a + \|\mathbf{x} - n \cdot a\|, b).$$

Dokaz. Neka je $B:[a,b]^n \to [a,b]$ 1-Lipšicova agregaciona funkcija. Tada je za sve $\mathbf{x} \in [a,b]^n$ ispunjeno:

$$|B(\mathbf{x}) - B(n \cdot a)| \leq \|\mathbf{x} - n \cdot a\|,$$

to jest $B \leq A^{*(n)}$. Lako se pokazuje da je $A^{*(n)}$funkcija agregacije. Još više, $A^{*(n)}$ je 1-Lipšicova kako je

$$|\|\mathbf{x} - n \cdot a\| - \|\mathbf{y} - n \cdot a\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Zaključuje se da je $A^{*(n)}$ najveća 1-Lipšic n-arna agregaciona funkcija na $[a,b]^n$. Dokaz za funkciju $A_*^{(n)}(\mathbf{x})$ je sličan. ■

Primer 2.22.[4] Aritmetička sredina je 1-Lipšicova (u odnosu na L_1 normu) nezavisno od intervala $\mathbb{I}$. Za Lipšicovu konstantu kod aritmetičke sredine $M^{(n)}$ najbolje je da se uzme 1/n.

Definicija 2.23.[4] Neopadajuća funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$ je donje poluneprekidna ili levo- neprekidna ako za sve $(x^{(k)})_{k \in \mathrm{N}} \subset (\mathbb{I}^{\mathbf{n}})^{\mathrm{N}}$ tako da je $\vee_k \mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ ispunjeno

$$\vee_{k \in \mathrm{N}} F(\mathbf{x}^{(k)}) = F(\vee_{k \in \mathrm{N}} \mathbf{x}^{(k)}).$$

Definicija 2.24.[4] Neopadajuća funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$ je gornje poluneprekidna ili desno-neprekidna ako za sve $(x^{(k)})_{k \in \mathrm{N}} \subset (\mathbb{I}^{\mathbf{n}})^{\mathrm{N}}$ tako da je $\wedge_k \mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ ispunjeno

$$\bigwedge_{k\in N} F(\mathbf{x}^{(k)})=F(\bigwedge_{k\in N} \mathbf{x}^{(k)}).$$

Tvrđenje 2.25.[4] Neopadajuća funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$ je donje polu-neprekidna (odnosno, gornje polu-neprekidna) ako i samo ako je F donje polu-neprekidna (odnosno, gornje polu-neprekidna) za svaku promenljivu.
*Dokaz.*Izlaže se samo slučaj donje poluneprekidnosti pošto se slučaj gornje poluneprekidnosti pokazuje slično. Neka je F donje poluneprekidna za svaku promenljivu i neka je $(\mathbf{x}^{(k)})_{k\in N}$ neopadajući niz elemenata iz $\mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ tako da $\mathbf{x} = \vee_k \mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{I}^{\mathbf{k}}$. Tada je $(\mathbf{x}^{(k)})_{k\in N}$ niz elemenata iz $\mathbb{I}$ tako da je $\vee_k x_i^{(k)} = x_i$ za sve $i \in$[n]. Neka je dato $\varepsilon > 0$, donja poluneprekidnost i neopadajuća monotonost funkcije F za prvu promenljivu omogućavaju postojanje $j_1 \in \mathbb{N}$ tako da je ispunjeno:

$$F(x_1,x_2,...,x_n)-F(x_1^{(k_1)},x_2,...,x_n)< \frac{\varepsilon}{n}$$

za svako $k_1 \geq j_1$. Slično, usled donje poluneprekidnosti i neopadajuće monotonosti F, postoji $j_2 \in \mathbb{N}$ tako da je za sve $k_2 \geq j_2$,

$$F(x_1^{(j_1)},x_2,...,x_n)-F(x_1^{(j_1)},x_2^{(k_2)},...,x_n)< \frac{\varepsilon}{n}.$$

Sumiranjem svih n nejednakosti i definisanjem j:= max$\{j_1,...,j_n\}$, zatim koristeći monotonost F, dobija se da je F($\mathbf{x}$)$-$F($\mathbf{x}^{(k)}$)$< \varepsilon$ za svako $k \geq j$. Pošto su $\mathbf{x}$ i ε proizvoljni, dolazi se do zaključka donje poluneprekidnosti za F. ∎

Sledi tvrđenje koje daje vezu između prethodno opisanih pojmova.

Tvrđenje 2.26.[4] Funkcija agregacije F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$ je neprekidna ako i samo ako je i donje i gornje poluneprekidna.

2.3 Simetričnost

Sledeća osobina koja se razmatra je simetričnost, zove se još i komutativnost, neutralnost ili anonimnost. Standardna komutativnost za binarnu operaciju je poznata iz algebre x∗y=y∗x i može se lako generalizovati do n-arnih funkcija [2].

Definicija 2.27.[2] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \overline{\mathbb{R}}$ je simetrična ako

$$F(\mathbf{x})= F([\mathbf{x}]_\sigma)$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$, $\sigma \in \mathfrak{S}_{[n]}$.

Osobina simetričnosti prvenstveno znači da nije bitan raspored ulaznih vrednosti u procesu agregacije. Takva osobina je potrebna pri kombinovanju kriterijuma jednakih važnosti ili mišljenja anonimnih učesnika.

Tvrđenje 2.28.[6] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je simetrična funkcija ako i samo ako za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$, važi

(i) $F(x_2,x_1,x_3,...,x_n)=F(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$
(ii) $F(x_2,x_3,...,x_n,x_1)=F(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$

Tvrđenje 2.29.[6] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je simetrična funkcija ako i samo ako postoji funkcija G: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ takva da je za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

$$F(x_1,...,x_n)=G(x_{(1)},...,x_{(n)}) .$$

U situacijama kada kriterijumi ili individualna mišljenja nisu jednako važna osobina simetričnosti se mora izostaviti.

2.4 Idempotentnost

Element x je idempotentan u određenom skupu ako je za binarnu operaciju $*$ definisanu na tom skupu ispunjeno $x*x=x$. Ova algebarska osobina se može proširiti do n-arnih funkcija. Navedena osobina znači da ako su svi x_i jednaki funkcija $F(x_1,...,x_n)$ vraća istu vrednost. Navode se važne definicije za idempotentne funkcije [4].

Definicija 2.30.[4] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je idempotentna funkcija ako

$$F(n\cdot x)=x$$

za sve $x \in \mathbb{I}$.

Definicija 2.31.[4] Funkcija F:$\cup_{n\in N} \mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je jako idempotentna ako za svako $n \in \mathbb{N}$ i za sve $\mathbf{x} \in \cup_{m\in N} \mathbb{I}^{m}$,

$$F(n\cdot\mathbf{x})=F(\mathbf{x}) .$$

Na primer, ako je F: $\cup_{n\in N} \mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jako idempotentna tada važi

$$F(x_1,x_2,x_1, x_2) = F(x_1, x_2).$$

Definicija 2.32.[4] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \longrightarrow \mathbb{I}$ je kodomen idempotentna ako $\delta_F \circ F= F$, odnosno

$$F(n \cdot F(\mathbf{x}))=F(\mathbf{x})$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

Svaka idempotentna funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \longrightarrow \mathbb{I}$ je kodomen idempotentna.

2.5 Konjukcija, disjunkcija i unutrašnjost

Za date n-arne funkcije F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \overline{\mathbb{R}}$ i G: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \overline{\mathbb{R}}$ se kaže da G dominira nad F ako $F \leq G$ u $\mathbb{I}^{\mathbf{n}}$. Navedena osobina će se koristi kod trougaonih normi, trougaonih konormi i uninormi kao i tri glavne klase agregacionih funkcija: konjuktivne funkcije, disjunktivne funkcije i unutrašnje funkcije [4].

Definicija 2.33.[4] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \overline{\mathbb{R}}$ je konjuktivna ako $\inf \mathbb{I} \leq F \leq \mathrm{Min}$.

Konjuktivne funkcije kombinuju vrednosti kao da su povezane logičkim operatorom $\wedge$. Prema tome, rezultat kombinacija može biti visok samo ako su sve vrednosti visoke.

Definicija 2.34.[4] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \overline{\mathbb{R}}$ je disjunktivna ako $\mathrm{Max} \leq F \leq \sup \mathbb{I}$.

Disjunktivne funkcije kombinuju vrednosti pomoću logičkog operatora $\vee$. Sledi da je rezultat kombinacija visok ako je najmanje jedna vrednost visoka.

Definicija 2.35.[4] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \overline{\mathbb{R}}$ je unutrašnja ako $\mathrm{Min} \leq F \leq \mathrm{Max}$.

Unutrašnjost je osobina koju imaju aritmetička sredina, geometrijska sredina kao i funkcije za računanje proseka koje se najviše koriste za agregaciju. Koši je za sredinu n nezavisnih varijabli $x_1,...,x_n$ uzimao funkciju $F(x_1,...,x_n)$ koja je unutrašnja za skup koje čine promenljive x_i. U problemu donošenja grupne odluke može se kompenzovati loš rezultat pomoću dobrog rezultata, tako da će rezultat agregacije biti srednja vrednost.

Tvrđenje 2.36.[4] Ako je funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \overline{\mathbb{R}}$ unutrašnja, tada je idempotentna. Obrnuto, ako je F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \overline{\mathbb{R}}$ neopadajuća i idempotentna, tada je unutrašnja.

Dokaz. Prvi deo se trivijalno dokazuje.

$$\mathrm{id}=\delta_{\mathrm{Min}} \leq \delta_{\mathrm{F}} \leq \delta_{\mathrm{Max}}=\mathrm{id}.$$

Drugi deo neposredno sledi iz nejednakosti (2.4) na sledeći način.

$$\text{Min}=\delta_F\circ\text{Min} \leq F \leq \delta_F\circ\text{Max}=\text{Max}.$$

2.6 Asocijativnost

Asocijativnost binarne operacije znači $(x*y)*z=x*(y*z)$. Ako bi se binarna operacija zapisala u obliku finkcije $f(a,b)=a*b$, tada bi asocijativnost značila $f(f(a,b),c)=f(a,f(b,c))$ i takav zapis se zove asocijativna funkcionalna jednačina [4].

Definicija 2.37.[1] Funkcija F: $\mathbb{I}^2\to\mathbb{I}$ je asocijativna ako za sve $\mathbf{x}\in\mathbb{I}^3$ važi:

$$F(F(x_1,x_2),x_3)=F(x_1,F(x_2,x_3)). \qquad (2.28)$$

U osnovi, asocijativnost se bavi agregacijom samo dva argumenta. Međutim, kao što će biti prikazano u sledećoj definiciji pomoću asocijativnosti funkcija može vršiti agregaciju bilo kojeg konačnog broja argumenata. Kao što je ranije navedeno, oznaka $F(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)$ ustvari predstavlja $F(x_1,...,x_n,x_1^*,...,x_m^*)$. Takođe, ako je $\mathbf{x}$ prazan vektor tada se može jednostavno izostaviti iz funkcije. Na primer, $F(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)=F(\mathbf{x}^*)$ i $F(F(\mathbf{x}),F(\mathbf{x}^*))=F(F(\mathbf{x}^*))$.

Definicija 2.38.[4] Funkcija F: $\cup_{n\in N}\mathbb{I}^{\mathbf{n}}\to\mathbb{I}$ je asocijativna ako $F(x)=x$ za sve $x\in\mathbb{I}$ i ako:

$$F(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)=F(F(\mathbf{x}),F(\mathbf{x}^*))$$

za sve $\mathbf{x},\mathbf{x}^*\in\cup_{n\in N_0}\mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

Tvrđenje 2.39.[4] Funkcija F: $\cup_{n\in N}\mathbb{I}^{\mathbf{n}}\to\mathbb{I}$ je asocijativna ako i samo ako je $F(x)=x$ za sve $x\in\mathbb{I}$ i

$$F(\mathbf{x},F(\mathbf{x}^*),\mathbf{x}^{**})=F(\mathbf{x},\mathbf{x}^*,\mathbf{x}^{**})$$

za sve $\mathbf{x},\mathbf{x}^*,\mathbf{x}^{**}\in\cup_{n\in N_0}\mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Za sve $\mathbf{x},\mathbf{x}^*,\mathbf{x}^{**}\in\cup_{n\in N_0}\mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ važe sledeće jednakosti

$$F(\mathbf{x},F(\mathbf{x}^*),\mathbf{x}^{**})=F(F(\mathbf{x},F(\mathbf{x}^*)),F(\mathbf{x}^{**}))=F(F(F(\mathbf{x}),F(\mathbf{x}^*)),F(\mathbf{x}^{**}))=F(F(\mathbf{x},\mathbf{x}^*),F(\mathbf{x}^{**}))=F(\mathbf{x},\mathbf{x}^*,\mathbf{x}^{**}).$$

($\Leftarrow$)Trivijalno je ispunjeno $F(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)=F(\mathbf{x},F(\mathbf{x}^*))=F(F(\mathbf{x}),F(\mathbf{x}^*))$. ■

Pod pretpostavkom asocijativnosti se podrazumeva da ako funkcija vrši agregaciju od n argumenata onda ta funkcija može da vrši agregaciju od n+1 argumenta. Zato sledi da je bilo koja asocijativna funkcija određena pomoću binarne funkcije F, to se vidi pomoću sledećeg primera.

$$F(x_1,...,x_{n+1})=F(F(x_1,...,x_n),x_{n+1}).$$

Takođe, može se primetiti da se spajanjem osobina asocijativnosti i idempotencije poništava ponavljanje argumenata u proceduri agregacije, zato što je:

$$F(m\cdot x,n\cdot y)=F(F(m\cdot x),F(n\cdot y))=F(x,y)$$

za sve $m,n \in \mathbb{N}$.

2.7 Dekompozabilnost

Može se lako proveriti da aritmetička sredina kao proširena funkcija ne ispunjava uslov asocijativnosti (2.28). Zato je potrebno uvesti novu osobinu, sličnu asocijativnosti, koju ima aritmetička sredina [4].

$$F(x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n)=F(k\cdot F(x_1,...,x_k),x_{k+1},...,x_n)$$

a sve cele brojeve $0\leq k\leq n$, pri čemu je $n\geq 1$. To je ekvivalentno sledećem zapisu

$$F(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)=F(k\cdot F(\mathbf{x}),\mathbf{x}^*)$$

za sve $k \in \mathbb{N}_0$, sve $x \in \mathbb{I}^k$ i sve $\mathbf{x}^* \in \cup_{n\in N_0} \mathbb{I}^{\boldsymbol{n}}$.

Uvodi se sledeća definicija pod uslovom da prve promenljive nisu privilegovane.

Definicija 2.40.[4] Funkcija $F\colon \cup_{n\in N} \mathbb{I}^{\mathbf{n}}\to\mathbb{I}$ je dekompozabilna ako $F(x)=x$ za sve $x \in \mathbb{I}$ i ako:

$$F(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)=F(k\cdot F(\mathbf{x}),k^*\cdot F(\mathbf{x}^*))$$

za sve $k \in \mathbb{N}_0$, sve $x \in \mathbb{I}^k$ i sve $\mathbf{x}^* \in \mathbb{I}^{k^*}$.

Tvrđenje 2.41.[4] Funkcija $F\colon \cup_{n\in N} \mathbb{I}^{\mathbf{n}}\to\mathbb{I}$ je dekompozabilna ako i samo ako $F(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{I}$ i

$$F(\mathbf{x},k^*\cdot F(\mathbf{x}^*),\mathbf{x}^{**})=F(\mathbf{x},\mathbf{x}^*,\mathbf{x}^{**})$$

za sve $k^* \in \mathbb{N}_0$, sve $\mathbf{x}^* \in \mathbb{I}^{k^*}$ i sve $\mathbf{x}, \mathbf{x}^{**} \in \cup_{n\in N_0} \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu teoreme 2.30.

(⇒) Za proizvoljne $k,k^*,k^{**} \in \mathbb{N}_0$ i $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^k$, $\mathbf{x}^* \in \mathbb{I}^{k^*}$, $\mathbf{x}^{**} \in \mathbb{I}^{k^{**}}$ je ispunjeno:

$$F(\mathbf{x}, k^*\cdot F(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^{**})=F((k + k^*)\cdot F(\mathbf{x}, k^*\cdot F(\mathbf{x}^*)),k^{**}\cdot F(\mathbf{x}^{**}))=F((k + k^*)\cdot F(k\cdot F(\mathbf{x}), k^*\cdot F(\mathbf{x}^*)), k^{**}\cdot F(\mathbf{x}^{**})) = F((k + k^*)\cdot F(\mathbf{x},\mathbf{x}^*),k^{**}\cdot F(\mathbf{x}^{**}))=F(\mathbf{x},\mathbf{x}^*,\mathbf{x}^{**}),$$

takođe je korišćena osobina da je F kodomen idempotentna.
(⇐) Trivijalno ∎

Tvrđenje 2.42.[4] Ako je funkcija F: $\cup_{n\in N} \mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbb{I}$ kodomen idempotentna i asocijativna, tada je dekompozabilna.

Dokaz. Neka $k, k^* \in \mathbb{N}_0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^k$, i $\mathbf{x}^* \in \mathbb{I}^{k^*}$. Tada je ispunjeno

$$\begin{aligned} F(k\cdot F(\mathbf{x}), k^*\cdot F(\mathbf{x}^*)) &= F(F(k\cdot F(\mathbf{x})), F(k^*\cdot F(\mathbf{x}^*))) && \text{(asocijativnost)} \\ &= F(F(\mathbf{x}), F(\mathbf{x}^*)) && \text{(kodomen idempotentna)} \\ &= F(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) && \text{(asocijativnost)} \end{aligned}$$

2.8 Invarijantne osobine

Jedan od glavnih problema prilikom biranja odgovarajuće agregacione funkcije je uzeti u obzir tipove skala (merne jedinice) varijabli koje ulaze u proces agregacije. Primećeno je da je funkcionalna zavisnost između varijabli dosta ograničena ako je poznat tip skale zavisne i nezavisne varijable.

Neka su $x_1,...,x_n,x_{n+1}$ date n+1 varijable koje imaju realan interval za domen i

$$x_{n+1}=F(x_1,...,x_n)$$

je nepoznata funkcija agregacije. Problem je naći generalnu formu funkcije F znajući tipove skala ulaznih i izlazne varijable. Tip skale varijable x_i se definiše kao klasa prihvatljive transformacije, kao što je na primer transformacija grama u kilograme ili stepena Farenhajta u stepene celzijusa. Tipovi skala i transformacije mernih jedinica su prikazani pomoću [4].

U slučaju skale odnosa, prihvatljiva transformacija je preslikavanje $x \rightarrow rx$, za $r > 0$, što menja jedinicu skale. Transformacija kilograma u funtu uključuje prihvatljivu transformaciju $\varphi(x)=2.2x$. Dužine (inči, centimetri) i vremenski intervali (godine, sekunde) su dva primera skale odnosa.

Slično, za skalu razlike prihvatljiva transformacija vrši preslikavanje $x \rightarrow x + s$, pri čemu $s \in \mathbb{R}$. Navedeno preslikavanje menja početak skale. Osim toga, za skalu intervala prihvatljiva transformacija preslikava $x \rightarrow rx + s$, gde $s \in \mathbb{R}$ i $r > 0$. Ova tranformacija menja početak i jedinicu skale. Transformacija celzijusa u Farenhajte $\varphi(x)= \frac{9}{5}x + 32$ uključuje skalu intervala pošto se menja i početak i jedinica skale.

Za rednu skalu prihvatljiva transformacija je strogo rastuća funkcija $x \rightarrow \varphi(x)$, koja menja vrednosti skale čuvajući njihov red. Na primer, za čistoću vazduha u gradovima se koriste ocene 1 za nezdravi vazduh, 2 za nezadovoljavajući vazduh, 3 za zadovoljavajući vazduh, 4 za dobar vazduh i 5 za odličan vazduh. Za ocene čistoće su se takođe mogle koristiti ocene 1, 7, 8, 15, 23 ili bilo koji drugi brojevi koji čuvaju redosled čistoće.

U “načelu teorije o konstrukciji“ se navodi da prihvatljive transformacije ulazećih varijabli moraju voditi do prihvatljive transformacije izlazeće varijable. Na primer, ako su varijable ulazećih vrednosti nezavisne, tada funkcija F treba da ispunjava sledeći uslov: Za prihvatljivu transformaciju $\boldsymbol{\varphi}$= $(\varphi_1,...,\varphi_n)$ varijabli ulazećih vrednosti, postoji prihvatljiva transformacija ψ_φ izlazeće vrednosti tako da je

$$\mathrm{F}(\varphi_1(\mathrm{x}_1),...,\varphi_n(\mathrm{x}_\mathrm{n}))=\psi_\varphi(\mathrm{x}_{\mathrm{n}+1})$$

ili ekvivalentno,

$$\mathrm{F}(\varphi_1(\mathrm{x}_1),...,\varphi_n(\mathrm{x}_\mathrm{n}))=\psi_\varphi(\mathrm{F}(\mathrm{x}_1,...,\mathrm{x}_\mathrm{n})).$$

Može se pretpostaviti da ulazne varijable definišu istu skalu. To implicira da se ista pruhvatljiva transformacija mora primeniti za sve varijable inputa i zato se dobija

$$\mathrm{F}(\varphi(\mathrm{x}_1),...,\varphi(\mathrm{x}_\mathrm{n}))=\psi_\varphi(\mathrm{F}(\mathrm{x}_1,...,\mathrm{x}_\mathrm{n})).$$

2.8.1 Skala razlike, intervala, odnosa i log-odnosa

Pre nego što se uvedu definicije potrebno je uvesti određene oznake koje se koriste [4]. Za proizvoljan podskup K opšteg skupa Ω, funkcija $\mathbf{1}_K : \Omega \to \{0,1\}$ je karakteristična funkcija K, koja se definiše sa $\mathbf{1}_K = 1$ ako $\omega \in K$ i 0 u suprotnom. Praktično za bilo koje $K \subseteq [n]$, $\mathbf{1}_K$ je karakterističan vektor od K na $\{0,1\}^n$, odnosno to je n-torka čija je i-ta koordinata 1 ako $i \in K$ i 0 u suprotnom. Često se piše **0** i **1** umesto $\mathbf{1}_\emptyset$ i $\mathbf{1}_n$, respektivno.

Definicija 2.43.[4] Funkcija F: $\mathbb{I}^\mathbf{n} \to \mathbb{R}$ je invarijantna skala odnosa ako za proizvoljno $r > 0$ važi:

$$\mathrm{F}(r\mathbf{x})=r\mathrm{F}(\mathbf{x})$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^\mathbf{n}$ tako da $r\mathbf{x} \in \mathbb{I}^\mathbf{n}$.

U prethodnim definicijama se razmatraju skale odnosa za nezavisne varijable i skala odnosa za zavisnu varijablu.

Definicija 2.44.[4] Funkcija F: $\mathbb{I}^\mathbf{n} \to \mathbb{R}$ je značajna za jedinstvenu skalu odnosa ako za $r > 0$, postoji $R(r) > 0$, tako da je

$$\mathrm{F}(r\mathbf{x})=R(r)\mathrm{F}(\mathbf{x})$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^\mathbf{n}$ tako da $r\mathbf{x} \in \mathbb{I}^\mathbf{n}$.

Kada su skale odnosa nezavisne koristi se sledeća definicija.

Definicija 2.45.[4] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$ je značajna na nezavisnoj skali odnosa ako, za sve $\boldsymbol{r} \in (0,\infty)^n$, postoji $R(\boldsymbol{r})>0$ tako da važi

$$F(\boldsymbol{r}\mathbf{x})=R(\boldsymbol{r})F(\mathbf{x})$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ tako da $r\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

Za funkcije koje su invarijantne za skalu odnosa se kaže da su stabilne za istu prihvatljivo sličnu transformaciju ili pozitivno homogene.

Slično za skale razlike, odnosno za skale sa prihvatljivom transformacijom $\varphi(x) \to x + s$ se navode tri definicije.

Definicija 2.46.[4] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$ je invarijantna skala razlike ako, za proizvoljno $s \in \mathbb{R}$ važi

$$F(\mathbf{x}+s\mathbf{1})=F(\mathbf{x})+s$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ tako da $\mathbf{x} + s\mathbf{1} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

Definicija 2.47.[4] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$ je značajna na jedinstvenoj skali razlike ako za proizvoljno $s \in \mathbb{R}$, postoji $S(s) \in \mathbb{R}$ tako da važi

$$F(\mathbf{x}+s\mathbf{1})=F(\mathbf{x})+S(s)$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ tako da $\mathbf{x} + s\mathbf{1} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

Definicija 2.48.[4] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$ je značajna na nezavisnim skalama razlike ako, za proizvoljno $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, postoji $S(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}$ tako da važi

$$F(\mathbf{x}+\mathbf{s})=F(\mathbf{x})+S(\mathbf{s})$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ tako da $\mathbf{x} + \mathbf{s} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

Funkcije koje su invarijantne skale razlike se takođe nazivaju promenljivo invarijantne, stabilne za istu promenljivu transformaciju. Za skale intervala slede definicije.

Definicija 2.49.[4] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$ je invarijantna skala intervala ako za $r > 0$ i proizvoljno $s \in \mathbb{R}$ važi

$$F(r\mathbf{x}+s\mathbf{1})=rF(\mathbf{x})+s$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ tako da $r\mathbf{x} + s\mathbf{1} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

Definicija 2.50.[4] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$ je značajna na jedinstvenoj skali intervala ako za $r>0$ i proizvoljno $s \in \mathbb{R}$ postoji $R(r,s) > 0$ i $S(r,s) \in \mathbb{R}$ tako da je ispunjeno

$$\mathrm{F}(r\mathbf{x}+s\mathbf{1})=R(r,s)\mathrm{F}(\mathbf{x})+\mathrm{S}(r,s)$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ tako da $r\mathbf{x} + s\mathbf{1} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

Definicija 2.51.[4] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$ je značajna na nezavisnim skalama intervala ako za proizvoljno $\boldsymbol{r} \in (0,\infty)^{\mathrm{n}}$ i $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ postoji $R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) > 0$ i $S(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) \in \mathbb{R}$ tako da je ispunjeno

$$\mathrm{F}(\boldsymbol{r}\mathbf{x}+\boldsymbol{s})=R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})\mathrm{F}(\mathbf{x})+\mathrm{S}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ tako da $\boldsymbol{r}\mathbf{x} + \mathbf{s} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

Iz definicije se zaključuje da je funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$ invarijantna skala intervala ako i samo ako je invarijantna skala odnosa i invarijantna skala razlike. Šta više, na osnovu definicija se dolazi do sledećeg tvrđenja.

Tvrđenje 2.52.[4] Neka $0 \in \mathbb{I}$ i neka je data proizvoljna funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$. Ako je F invarijantna skala odnosa tada je $\mathrm{F}(\mathbf{0})=0$. Ako je F invarijantna skala intervala tada je idempotentna.

Dokaz. Ako je F invarijantna skala odnosa tada je $\mathrm{F}(\mathbf{0})= \mathrm{F}(r\mathbf{0})= r\mathrm{F}(\mathbf{0})$ za svako $r > 0$ i stoga je $\mathrm{F}(\mathbf{0})= 0$. Posebno, ako je F invarijantna skala intervala, tada je za $s \in \mathbb{I}$ ispunjeno $\mathrm{F}(s\mathbf{1})=\mathrm{F}(\mathbf{0}) + s = s$ i zato je F idempotentna. ■

Sledeće definicije se tiču skale log-odnosa.

Definicija 2.53.[4] Neka je $\mathbb{I} \subseteq [0,\infty]$. Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to [0,\infty]$ je log-odnos invarijantna ako za proizvoljno $r>0$ važi

$$\mathrm{F}(\mathbf{x}^{r\mathbf{1}})=\mathrm{F}(\mathbf{x})^{r}$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ tako da $\mathbf{x}^{r\mathbf{1}} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

Definicija 2.54.[4] Neka je $\mathbb{I} \subseteq [0,\infty]$. Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to [0,\infty]$ je značajna na jedinstvenoj skali log-odnosa ako za proizvoljno $r>0$ postoji $R(r) > 0$ tako da je

$$\mathrm{F}(\mathbf{x}^{r\mathbf{1}})=\mathrm{F}(\mathbf{x})^{R(r)}$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ tako da $\mathbf{x}^{r\mathbf{1}} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

Definicija 2.55.[4] Nekaje $\mathbb{I} \subseteq [0,\infty]$. Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow [0,\infty]$ je značajna na nezavisnim skalama log-odnosa ako za proizvoljno $\boldsymbol{r} \in (0,\infty)^{\mathrm{n}}$ postoji $R(\boldsymbol{r}) > 0$ tako da je

$$F(\mathbf{x}^{\boldsymbol{r}})=F(\mathbf{x})^{R(\boldsymbol{r})}$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ tako da $\mathbf{x}^{\boldsymbol{r}} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

2.8.2 Ordinalne skale

Kod ordinalnih skala prihvatljive transformacije nezavisnih i zavisnih varijabli su strogo rastuće funkcije. Međutim, kao što je prikazano u [4], pretpostavka je da su prihvatljive transformacije varijabli inputa ograničene rastućim bijekcijama iz $\mathbb{I}$ u $\mathbb{I}$.

Neka je $\Phi[\mathbb{I}]$ skup svih rastućih bijekcija iz $\mathbb{I}$ u $\mathbb{I}$ i neka je $\Phi_n[\mathbb{I}]$ dijagonalna restrikcija $\Phi[\mathbb{I}]^{\,n}$, odnosno

$$\Phi_n[\mathbb{I}]:=\{(\varphi,\dots,\varphi) \mid \varphi \in \Phi[\mathbb{I}]\}.$$

Definicija 2.56.[4] F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbb{I}$ je invarijantna ordinalna skala ako je za proizvoljno $\varphi \in \Phi[\mathbb{I}]$ ispunjeno

$$F(\varphi_1(x_1),\dots,\varphi_n(x_n))= \varphi(F(x_1,\dots,x_n))$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

Definicija 2.57.[4] F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbb{R}$ je uporedno značajna na jedinstvenoj ordinalnoj skali ako za proizvoljno $\varphi \in \Phi_n[\mathbb{I}]$ postoji strogo rastuća funkcija ψ_φ: ran(F)→ran(F) takva da je ispunjeno

$$F(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) = \psi_\varphi(F(\mathbf{x}))$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

Definicija 2.58.[4] F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbb{R}$ je uporedno značajna na nezavisnim ordinalnim skalama ako za proizvoljno $\varphi \in \Phi[\mathbb{I}]^n$ postoji strogo rastuća funkcija ψ_φ: ran(F)→ran(F) takva da je ispunjeno

$$F(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}))=\psi_\varphi(F(\mathbf{x}))$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

Funkcije koje su ordinalne skale se u literaturi još nazivaju invarijantne.

Tvrđenje 2.59.[4] F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$ je uporedno značajna na jedinstvenoj ordinalnoj skali ako i samo ako

$$\mathrm{F}(\mathbf{x}) \leq \mathrm{F}(\mathbf{x}^*) \Leftrightarrow \mathrm{F}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) \leq \mathrm{F}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^*))$$

za sve $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ $\in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ i sve $\boldsymbol{\varphi} \in \Phi_n[\mathbb{I}]$.

Dokaz.($\Rightarrow$) Trivijalno.

($\Leftarrow$) Neka je $\boldsymbol{\varphi} \in \Phi_n[\mathbb{I}]$ i pretpostavimo da je F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$ je uporedno značajna na jedinstvenoj ordinalnoj skali. Za proizvoljno $u \in$ ran(F) postoji $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ tako da važi F(x) = u. Zatim se definiše $\psi_\varphi(u)$= F($\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$). Navedena funkcija je strogo rastuća zato što za u, u^* postoje $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^* \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ tako da je u=F($\mathbf{x}$) i u'=F($\mathbf{x}^*$) i stoga je ispunjeno

$$\begin{gathered} u < u' \Leftrightarrow \mathrm{F}(\mathbf{x}) < \mathrm{F}(\mathbf{x}^*) \\ \Leftrightarrow \mathrm{F}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) < \mathrm{F}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^*)) \\ \Leftrightarrow \psi_\varphi(u) < \psi_\varphi(u^*), \end{gathered}$$

čime je dokaz kompletiran. ■

Tvrđenje 2.60.[4] F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$ je uporedno značajna na jedinstvenim ordinalnim skalama ako i samo ako

$$\mathrm{F}(\mathbf{x}) \leq \mathrm{F}(\mathbf{x}^*) \Leftrightarrow \mathrm{F}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) \leq \mathrm{F}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}'))$$

za sve $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^* \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ i sve $\boldsymbol{\varphi} \in \Phi[\mathbb{I}]^{\mathrm{n}}$.

Dokaz. Tvrđenje se slično dokazuje kao tvrđenje 2.49. ■

2.8.3 Inverzija skala

Sada će se razmatrati dve osobine, opisane u [4], koje su povezane sa inverzijom skala, samo-dualnost i samo-recipročnost.

Definicija 2.61.[4] Neka je φ: $\mathbb{I} \to \mathbb{I}$ opadajuća i involutivna ($\varphi \circ \varphi$= id) bijekcija.

- φ-dual funkcije F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{I}$ je funkcija F_φ: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{I}$ definisana sa

$$\mathrm{F}_\varphi(\mathbf{x}) := \varphi^{-1}(\mathrm{F}(\varphi(\mathrm{x}_1),\ldots,\varphi(\mathrm{x}_\mathrm{n}))).$$

- Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{I}$ je φ-samo-dual ako F_φ=F.

- Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{I}$ je slabi samo-dual ako je φ-samo-dual za neku opadajuću involutivnu bijekciju φ: $\mathbb{I} \to \mathbb{I}$.

Ako je $\mathbb{I}$ ograničen (što implicira da je zatvoren ili otvoren) tada je jedina afino opadajuća bijekcija iz $\mathbb{I}$ u $\mathbb{I}$ data sa φ^d(x):= inf $\mathbb{I}$ + sup $\mathbb{I}$ – x. φ^d dualnost se naziva dualnost i obeležava F_{φ^d} =: F^d. Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{I}$ je samo dual ako F^d = F.

Prilikom grupnog odlučivanja samo-dualnost znači da obrnuta skala nema efekta na procenu alternativa. Ako je pretpostavka da su alternative rangirane u uslovima nenaklonosti umesto preferencije, tada se ukupna nenaklonost prikazuje pomoću individualnih nenaklonosti sa istom funkcijom agregacije kao i preferencije. Zaista, nenaklonost i preferencija je samo imenovanje kriterijuma procene, odnosno da li se biraju dobre alternative ili loše.

Napomena 2.62.[4] (i) Iz definicije sledi da je za proizvoljnu funkciju F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{I}$ i proizvoljnu opadajuću i involutivnu bijekciju φ: $\mathbb{I} \to \mathbb{I}$ ispunjeno $(\mathrm{F}_\varphi)_\varphi$ = F.
(ii) Iz definicije sledi da kada je $\mathbb{I} = [a,b]$ ili (a,b), gde $a,b \in \mathbb{R}$, dual od F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{I}$ je funkcija F^d: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{I}$ definisana sa

$$\mathrm{F}^d(\mathbf{x}) = a + b - \mathrm{F}((a+b)\mathbf{1} - \mathbf{x}).$$

Tvrđenje 2.63.[4] Ako je F: $[0,1]^n \to \mathbb{R}$ invarijantna odnos skala i samo-dual tada je i invarijantna skala intervala.
Dokaz. Neka $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ i $s \in [-1,1]$ tako da važi $\mathbf{x} + s\mathbf{1} \in [0,1]^n$. Potrebno je da se dokaže da je $\mathrm{F}(\mathbf{x} + s\mathbf{1}) = \mathrm{F}(\mathbf{x}) + s$.

Iz tvrđenja 2.42, ispunjeno je $\mathrm{F}(\mathbf{0}) = 0$ i iz samo-dualnosti važi $\mathrm{F}(\mathbf{1}) = 1 - \mathrm{F}(\mathbf{0}) = 1$. Može se pretpostaviti da $s \in (-1,1)$. Smenom $\mathbf{y} = \frac{1}{1-s}\mathbf{x}$ može se zaključiti da $\mathbf{y} \in [0,1]^n$ i koristeći invarijantnost skale i samo-dualnost dobija se sledeće

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(\mathbf{x}) &= (1-s)\mathrm{F}(\mathbf{y}) \\ &= (1-s)(1-\mathrm{F}(\mathbf{1}-\mathbf{y})) = (1-s) - (1-s)\mathrm{F}(\mathbf{1}-\mathbf{y}) \\ &= (1-s) - \mathrm{F}((1-s)\mathbf{1} - \mathbf{x}) = 1 - s - \mathrm{F}(\mathbf{1} - (\mathbf{x} + s\mathbf{1})) \\ &= -s + \mathrm{F}(\mathbf{x} + s\mathbf{1}) \end{aligned}$$

čime je dokaz završen. ■

Definicija 2.64.[4] Neka je $\mathbb{I}$ realan interval koji za svaku vrednost x sadrži i njegovu recipročnu vrednost. Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{I}$ je samo-recipročna ako

$$\mathrm{F}(1/x_1, \ldots, 1/x_n) = 1/\mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n)$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

Neka su *a* i *b* dva objekta za čiji odnos je donet zaključak. Ako se međusobno zamene *a* i *b* tada se odnos menja u njihove recipročne vrednosti. Na primer, ako je *a* dva puta teži od *b*, tada je *b* dva puta lakši od *a*. Samo-recipročnost u ovom slučaju agregacioni zaključak pretvara u recipročnu vrednost.

2.8.4 Ostale osobine

Funkcije agregacije mogu imati još neke specifične osobine, definisane u [6], koje nisu spomenute ranije, a mogu biti nametnute samim tipom problema za koji se traži rešenje.

2.8.4.1 Neutralni elemenat i annihilator

Neutralni elemenat je dobro poznati pojam iz oblasti binarnih operacija. Za binarnu operaciju $*$ definisanu na domenu X, elemenat $e \in X$ je neutralni elemenat za operaciju $*$ ako

$$x * e = e * x = x$$

za sve $x \in X$. Jasno, bilo koja binarna operacija ima najviše jedan neutralni elemenat, osim toga može se zapaziti neutralni elemenat u binarnoj operaciji ima isti efekat kao i njegovo izostavljanje.

Definicija 2.65.[6] Neka je F: $\cup_{n\in N} \mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ proširena funkcija. Elemenat $e \in \mathbb{I}$ je proširen neutralni elemenat F ako za proizvoljno $i \in [n]$ i proizvoljno $x \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ tako da $x_i = e$ važi

$$F(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Neutralni elemenat se može izostaviti iz vrednosti argumenata i neće uticati na vrednost agregacije.

Za *n*-arne funkcije postoji alternativan prilaz koji se vidi iz sledeće definicije:

Definicija 2.66.[6] Elemenat $e \in \mathbb{I}$ je neutralan elemenat funkcije F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ako za proizvoljno $i \in [n]$ i $x \in \mathbb{I}$ važi $F(x_i e) = x$.

Jasno, ako je $e \in \mathbb{I}$ prošireni neutralni elemenat proširene funkcije F: $\cup_{n\in N} \mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbb{I}$ gde je $F^{(1)}(x) = x$, tada je *e* neutralni elemenat za sve $F^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Na primer, $e = 0$ je prošireni neutralni elemenat proširene suma funkcije $\sum$. Takođe, to je prošireni elemenat za *n*-arnu suma funkciju $\sum^{(n)}$.

Definicija 2.67.[6] Elemenat $a \in \mathbb{I}$ se naziva annihilator funkcije F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \overline{\mathbb{R}}$ ako za proizvoljno $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ tako da $a \in \{x_1, \dots, x_n\}$ važi F($\mathbf{x}$) = a.

Tvrđenje 2.68.[6] Neka je A: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{I}$ funkcija agregacije. Ako je A konjuktivna i a:= inf $\mathbb{I} \in \mathbb{I}$ tada je a annihilator. Dualno, ako je A disjunktivna funkcija i b:= sup $\mathbb{I} \in \mathbb{I}$ tada je b annihilator.

*Dokaz.*Uzima se slučaj konjuktivne funkcije. Drugi slučaj se dokazuje analogno. Neka $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ i $a \in \{x_1, \dots, x_n\}$. Kako je A konjuktivna, ispunjeno je

$$a \leq A(\mathbf{x}) \leq \mathrm{Min}(\mathbf{x}) = a ,$$

što dokazuje tvrđenje. ■

Primer 2.69.[6] Obrnuti smer u tvđenju 2.68 ne važi zato što na primer na $[0,1]^n$, 0 je annihilator geometrijske sredine GM koja nije konjuktivna.

Definicija 2.70.[6] Neka je A: $\cup_{n \in N} \mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \overline{\mathbb{R}}$ proširena agregaciona funkcija. Sa E_A i A_A se obeležavaju skupovi neutralnih elemenata i annihilatora, respektivno od A.

(i) Trivijalni idempotentni elemenat za A je elemenat skupa $(\{\inf \mathbb{I}, \sup \mathbb{I}\} \cap \mathbb{I} \cup E_A \cup A_A)$
(ii) A je Arhimedova ako za svako x $\in \mathbb{I}$ važi

$$\lim_{n \to \infty} \delta_{A^{(n)}}(x) \in (\{\inf \mathbb{I}, \sup \mathbb{I}\} \cup E_A \cup A_A).$$

Primer 2.71.[6] Svako x $\in \overline{\mathbb{R}}$ je idempotentni elemenat aritmetičke sredine AM: $\cup_{n \in N} \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Trivijalni idempotentni elementi su $-\infty$ i ∞.

2.8.4.2 Aditivnost i povezane osobine

Sada se razmatraju funkcije koje ispunjavaju određene funkcionalne jednačine koje su forme

$$F(\mathbf{x} * \mathbf{x}^*) = F(\mathbf{x}) * F(\mathbf{x}^*)$$

za sve $\mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ gde je $*$ asocijativna operacija ([4]).

Definicija 2.72.[4] Funkcija F: $\mathbb{I}^{\mathbf{n}} \to \overline{\mathbb{R}}$ je aditivna ako

$$F(\mathbf{x}+\mathbf{x}^*) = F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{x}^*) \qquad (2.29)$$

za sve $\mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$ gde $\mathbf{x}+\mathbf{x}^* \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

Tvrđenje 2.73.[4] Neka funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava Košijevu jednačinu:

$$f(\mathrm{x}+\mathrm{x}^*) = f(\mathrm{x}) + f(\mathrm{x}^*). \qquad (2.3)$$

Tada je f ili forme $f(\mathrm{x}) = c\mathrm{x}$ za neko $c \in \mathbb{R}$ ili je grafik od f svuda gust na $\mathbb{R}^2$.

Dokaz. Iz (2.29) sledi pomoću indukcije

$$f(\mathrm{x}_1 + \ldots + \mathrm{x}_n) = f(\mathrm{x}_1) + \ldots + f(\mathrm{x}_n)$$

i takođe $f(n\mathrm{x}) = nf(\mathrm{x})$ za sve realne x i prirodne brojeve n. Zatim se dobija proširenje $f(\frac{m}{n}\mathrm{x}) = \frac{m}{n} f(\mathrm{x})$ za sve prirodne brojeve m i n na sledeći način

$$mf(\mathrm{x}) = f(m\mathrm{x}) = f(n\frac{m}{n}\mathrm{x}) = nf(\frac{m}{n}\mathrm{x}).$$

Tako je $f(r\mathrm{x}) = rf(\mathrm{x})$ za sve pozitivne racionalne brojeve r. Za $r = 0$ takođe važi jednakost zato što iz (2.29) sledi da $f(0+0) = f(0) + f(0)$, odnosno $f(0) = 0$. Za negativno r važi ista jednakost

$$0 = f(r\mathrm{x} - r\mathrm{x}) = f(r\mathrm{x}) + f(-r\mathrm{x}) = f(r\mathrm{x}) + (-r)f(\mathrm{x}).$$

Ako f nije u formi $f(\mathrm{x}) = c\mathrm{x}$ za proizvoljno $c \in \mathbb{R}$ mogu se uzeti nenula brojevi x_1 i x_2 tako da važi $f(\mathrm{x}_1)/\mathrm{x}_1 \neq f(\mathrm{x}_2)/\mathrm{x}_2$. Ovo se može interpretirati da su vektori $(\mathrm{x}_1, f(\mathrm{x}_1))$ i $(\mathrm{x}_2, f(\mathrm{x}_2))$ linearno nezavisni na $\mathbb{R}^2$. Posledica toga je da je skup vektora

$$\{r_1(\mathrm{x}_1, f(\mathrm{x}_1)) + r_2(\mathrm{x}_2, f(\mathrm{x}_2)) | r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$$

gust na $\mathbb{R}^2$. Takođe,

$$r_1(\mathrm{x}_1, f(\mathrm{x}_1)) + r_2(\mathrm{x}_2, f(\mathrm{x}_2)) = (r_1\mathrm{x}_1 + r_2\mathrm{x}_2, f(r_1\mathrm{x}_1 + r_2\mathrm{x}_2))$$

je tačka na grafiku f i zato grafik mora biti gust na $\mathbb{R}^2$. ■

Za n-arne funkcije jednačina (2.29) se naziva generalizovana Košijeva jednačina.

Tvrđenje 2.74.[4] Funkcija $\mathrm{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je aditivna ako i samo ako postoje aditivne unarne funkcije $f_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1,\ldots,n)$ tako da za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathrm{x}_i).$$

Usled neprekidnosti (respektivno neopadajuće monotonosti) svakog $F(x\mathbf{1}_{\{i\}})$, funkcija F je forme

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, gde su $c_1,...,c_n$ proizvoljne (respektivno nenegativne) realne konstante.

Dokaz. Neka $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Kombinujući jednakost $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} F(x\mathbf{1}_{\{i\}})$ sa jednačinom (2.29) dobija se

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} F(x\mathbf{1}_{\{i\}}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i),$$

gde je svaka unarna funkcija $f_i(x_i) := F(x\mathbf{1}_{\{i\}})$ aditivna. Drugi deo sledi iz tvrđenja 2.73. ■

Definicija 2.75.[4] Funkcija $F: \mathbb{I}^{\mathbf{n}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je minitivna (eng. minitive) ako

$$F(\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}^*) = F(\mathbf{x}) \wedge F(\mathbf{x}^*)$$

za sve $\mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in \mathbb{I}^{\mathbf{n}}$.

3. Elementarne funkcije agregacije

U ovom odeljku će biti definisane funkcije agregacije pomoću kojih se vrši agregacija funkcija preferencije [2]. Osim toga, biće navedene i njihove važne osobine . Prvo su prikazane elementarne familije operatora agregacije ([3], [8]), zatim trougaone norme i trougaone konorme koje su duali i koje spadaju redom u grupu konjuktivnih i disjunktivnih agregacionih funkcija [2]. Zatim se definišu uninorme i nulanorme ([12], [1]), a potom i uređena prosečna ponderisana funkcija poznata kao OWA operator (eng. ordered weighted averaging operator) ([3], [8]).

Pošto su trougaone norme konjuktivne agregacione funkcije, mogu se posmatrati kao generalizacija logičkog operatora “ i ”, dok su trougaone konorme generalizacija logičkog operatora “ ili ”. Međutim, uočeno je da se prilikom grupnog odlučivanja uglavnom ne koristi logika agregacije trougaonih normi i trougaonih konormi. To najviše proizilazi iz činjenice da kod trougaonih normi i konormi nema kompenzacije između “niskih” i “visokih” numeričkih vrednosti. Uvođenjem slabijeg uslova koji razlikuje trougaone norme i konorme nastaju uninormni operatori agregacije. Ovi operatori rešavaju problem međusobnog pojačavanja ili slabljenja podrške prilikom grupnog odlučivanja i uglavnom se koriste u procesu grupnog odlučivanja. OWA operatori su bitni jer se pomoću njih uvode težinski koeficijenti u proces grupnog odlučivanja, odnosno ponderisane važnosti pomoću kojih se vrši “kažnjavanje” agenata u procesu grupnog odlučivanja.

3.1 Elementarni primeri operatora agregacije

Navode se osnovni primeri operatora agregacije definicija (2.4) na osnovu [3]. Svaki operator agregacije A se može reprezentovati pomoću familije $(A_n)_{n\in \mathbf{N}}$ n-arnih operacija, tj. funkcija A_n: $[0,1]^n \to [0,1]$ koje su date sa:

$$A_n(x_1,...,x_n)=A(x_1,\ldots,x_n).$$

Može se primetiti da je $A_1=id_{[0,1]}$ i za $n\geq 2$, svaki A_n je ne-opadajući i zadovoljava $A_n(0,...,0)=0$ i $A_n(1,...,1)=1$. Obično jedan identifikuje operator agregacije A i korespondirajuću familiju $(A_n)_{n\in N}$ n-arnih operacija.

Primer 3.1.[3] (i) Svaka t-norma i svaka t-konorma je komutativan, asocijativan operator agregacije sa neutralnim elementom 1 i 0, respektivno. Šta više, komutativni, asocijativni operator agregacije sa neutralnim elementom $e \in [0,1]$ je t-norma ako i samo ako je e=1 i t-konorma ako i samo ako je e=0 (za uninorme se kasnije vidi da neutralni element $\in (0,1)$).
(ii) Najpopularniji operatori agregacije su aritmetička sredina M, geometrijska sredina G, harmonijska sredina H, kvadratna sredina Q i za $p \in (0,\infty)$, p sredina M_p, koji su dati respektivno.

$$M(x_1,...,x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$
$$G(x_1,...,x_n) = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{1/n} ,$$
$$H(x_1,...,x_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} ,$$
$$Q(x_1,...,x_n) = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2)^{1/2} ,$$
$$M_p(x_1,...,x_n) = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^p)^{1/p} .$$

Svi ovi operatori su komutativni, idempotentni i neprekidni, nijedan nije asocijativan i nijedan nema neutralan elemenat. Operatori M,Q i M_p su strogo monotoni i nemaju annihilator, pošto G i H imaju annihilator 0, oni nisu striktno monotoni.

Primer 3.2.[3] Postoji klasično proširenje aritmetičke sredine, ponderisana sredina, koja omogućava dodavanje težinskih koeficijenata argumentima. Posledica je gubljenje osobine simetričnosti.
Ponderisana sredina je data sa:

$$M_{w_1,\ldots,w_n}(x_1, \ldots , x_n)=\sum_{i=1}^{n}(w_i \cdot x_i)$$

Težinski koeficijenti su nenegativni i ispunjeno je $\sum_{i=1}^{n} w_i =1$.

Primer 3.3.[3] Još jedan operator agregacije koji sledi ideju postojanja srednje vrednosti je medijana. Pomoću tog operatora se vrši agregacija vrednosti tako što se od uređenog niza argumenata (od najmanje vrednosti do najveće vrednosti) uzima ona vrednost koja se nalazi u sredini. Ako je kardinalnost skupa argumenata parna, tada ne postoji argument koji je u sredini, već par argumenata koji je u sredini. Ovaj operator agregacije ispunjava granične uslove, monotonost, simetričnost i idempotentnost.

Postoje razne generalizacije medijane, na primer postoji operator agregacije koji uzima k-tu vrednost uređenih elemenata.

Primer 3.4.[3] Minimum i maksimum su takođe osnovni operatori agregacije. Minimum daje najmanju vrednost skupa, dok maksimum daje najveću vrednost skupa. Oni ne omogućavaju reprezentativnu "srednju vrednost" ali mogu biti značajni u različitom kontekstu. U procesu grupnog odlučivanja min operator znači konjuktivan stav, dok se max prevodi kao disjunktivno ponašanje.

Ova dva operatora ispunjavaju aksiome definicije, kao i osobine monotonosti, simetričnosti, asocijativnosti, idempotentnosti. Matematički gledano oni imaju osobinu kompenzacije ali to su ograničeni slučajevi. Koristići ovaj tip operatora agregacije nikad se ne dobija "vrednost u sredini".

Ako je u pitanju ograničen interval [*a,b*] minimum uvek daje vrednost *a*, dok mu je neutralni elemenat *b*. Za maksimum je suprotno i uvek se dobija vrednost *b*, dok je neutralni elemenat *a*.

Primer 3.5.[3] Sledeći operatori agregacije su ponderisani minimum i ponderisani maksimum koji su dati na sledeći način:

$$\min_{w_1,\dots,w_n}(x_1,\dots,x_n)={}_{i=1}^{n}\min[\max(1-w_i,x_i)]$$

$$\max_{w_1,\dots,w_n}(x_1,\dots,x_n)={}_{i=1}^{n}\max[\min(w_i,x_i)]$$

Težinski koeficijenti w_i su nenegativni i ispunjeno je $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Ovi operatori imaju interesantne osobine. Na primer, ako je težinski koeficijent $w_i=0$, tada argument x_i neće biti uključen u proces agregacije. Takođe, ako su svi težinski koeficijenti jednaki tada se dobija minimum i maksimum, respektivno. Međutim, ovi operatori imaju manu pošto je moguće povećati važnost jednog argumenta, a da to nema nikakvog efekta na rezultat agregacije. To je zato što ovi operatori nisu striktno monotoni u odnosu na težinske koeficijente.

Uvođenjem druge vrste težinskog minimuma i maksimuma se dobija osobina striktne monotonosti u odnosu na težinske koeficijente. Oni se uvode na sledeći način:

$$\min_{w_1,\dots,w_n}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}[i\cdot(w_{\sigma(i)}-w_{\sigma(i+1)})\cdot\min(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(i)})]$$

$$\max_{w_1,\ldots,w_n}(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}[i\cdot(w_{\sigma(i)}-w_{\sigma(i+1)})\cdot\max(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(i)})]$$

Osim uobičajenih uslova da su težinski koeficijenti nenegativni i da važi $\sum_{i=1}^{n} w_i=1$, σ je permutacija koja uređuje važnosti na sledeći način:

$$w_{\sigma(1)} \geq w_{\sigma(2)} \geq \ldots \geq w_{\sigma(n)} \text{ i } w_{\sigma(n+1)}=0.$$

Tvrđenje 3.6.[8] Neka je A operator agregacije i φ: $[0,1] \to [0,1]$ striktno rastuća ili striktno opadajuća bijekcija. Tada $A_\varphi : \bigcup_{n\in N}[0,1]^n \to [0,1]$ definisan sa

$$A_\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\varphi^{-1}(A(\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)))$$

je operator agregacije.

Trivijalno, transformacija φ očuvava komutativnost, idempotentnost, strogu monotonost, neprekidnost i asocijativnost agregatornih operatora. Šta više, ako je $e \in [0,1]$ neutralni element i $a \in [0,1]$ annihilator od A tada $\varphi^{-1}(a)$ je annihilator od A_φ.

Primer 3.7.[8](i) Ako je φ: $[0,1] \to [0,1]$ dato sa $\varphi(x)=x^2$ tada je M_φ=Q i G_φ=G.

(ii) Ako je φ: $[0,1] \to [0,1]$ dato sa $\varphi(x)=e^{\frac{x-1}{x}}$ tada je G_φ=H.

(iii) Ako je φ: $[0,1] \to [0,1]$ dato sa $\varphi(x)=1-x$ tada se operator agregacije A_φ naziva dual agregatornog operatora A, taj dual se obeležava kao DA.

$$DA(x_1,\ldots,x_n)=1-A(1-x_1,\ldots,1-x_n).$$

Može se primetiti da je DDA=A.

(iv) Operator agregacije se naziva samo dual ako je DA=A.

(v) Primeri samo-dualnih operatora su aritmetička sredina M i operator C definisan sa:

$$C(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{ako } \{0,1\} \subseteq \{x_1,\ldots,x_n\} \\ \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\prod_{i=1}^{n} x_i+\prod_{i=1}^{n} 1-x_i} & \text{inače}\end{cases}.$$

Definicija 3.8.[8] Ako je f: $[0,1]\to[-\infty,\infty]$ neprekidna, strogo monotona funkcija sa $\{f(0),f(1)\}\neq\{-\infty,\infty\}$ tada se operator agregacije M_f dat sa :

$$M_f(x_1,\ldots,x_n)=f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right) \qquad (4.2)$$

naziva kvazi-aritmetička sredina.

Direktno sledi da za sve konstante a ∈ $R \setminus \{0\}$ i b ∈ R, funkcije f i g=af+b vode do iste kvazi-aritmetičke sredine to jest ispunjeno je M_f=M_g. Ako je $f(1)$ konačno tada uvek postoji strogo opadajuća neprekidna funkcija t: [0,1]→[0,∞) za koju važi $t(1)$=0 (može se uzeti t=$f-f(1)$ ako je f opadajuća, a t=$f(1)-f$ ako je f rastuća) tako da je M_f=M_t.

Može se zapaziti da ako se u (4.2) obeleži da je f (x)= log x dobija se geometrijska sredina, a ako je f (x)= $\frac{1}{x}$ dobija se harmonijska sredina.

3.2 Trougaone norme

Trougaone norme i trougaone konorme će biti prikazane na osnovu [2]. Prvi matematičar koji je uveo trougaone norme u matematičku literaturu bio je Karl Menger 1942.godine. Upotreba trougaonih normi, kraće t-normi se koristila za fuziju funkcija distribucije koje su bile potrebne za generalizaciju trougaonih nejednakosti od klasičnih metričkih prostora do statističkih metričkih prostora, međutim postoje mnoge druge primene ovih normi. I trougaone norme (t-norme) i t-konorme su operacije na jediničnom intervalu [0,1], ali pošto je interval [a,b] izomorfan sa [0,1], svaki rezultat na intervalu [0,1] može se transformisati u rezultat na [a,b] i obrnuto.

Mengerova definicija je glasila: Neka je data funkcija T(α,β) definisana za 0≤α≤1 i 0≤β≤1 ako je ispunjeno :

(a) 0≤T(α,β) ≤1.
(b) T je neopadajuća funkcija za obe promenljive.
(c) T(α,β)=T(β, α)
(d) T(1,1)=1.
(e) Ako je α>0, tada je T(α,1)>0.

Tada se funkcija T naziva trougaona norma.

Danas se koristi sledeća definicija trougaonih normi.

Definicija 3.9.[2] Trougaona norma (t-norma) je binarna operacija T na jediničnom intervalu [0,1] odnosno funkcija T :$[0,1]^2$→ [0,1] , takva da je za sve x,y,z ∈ [0,1] ispunjeno :

(T1) T(x,y)=T(y,x). (komutativnost)
(T2) T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z). (asocijativnost)
(T3) T(x,y)≤T(x,z) za y≤z.(monotonost)
(T4) T(x,1)=x. (granični uslov)

Kako je t-norma algebarska operacija na jediničnom intervalu [0,1] moguće je koristiti infiksnu notaciju kao x∗y umesto prefiksne notacije T(x,y). Tada će za sve x,y,z ∈ [0,1] važiti:

(T1) $x*y=y*x$.
(T2) $x*(y*z)=(x*y)*z$.
(T3) $x*y\leq x*z$ za $y\leq z$.
(T4) $x*1=x$.

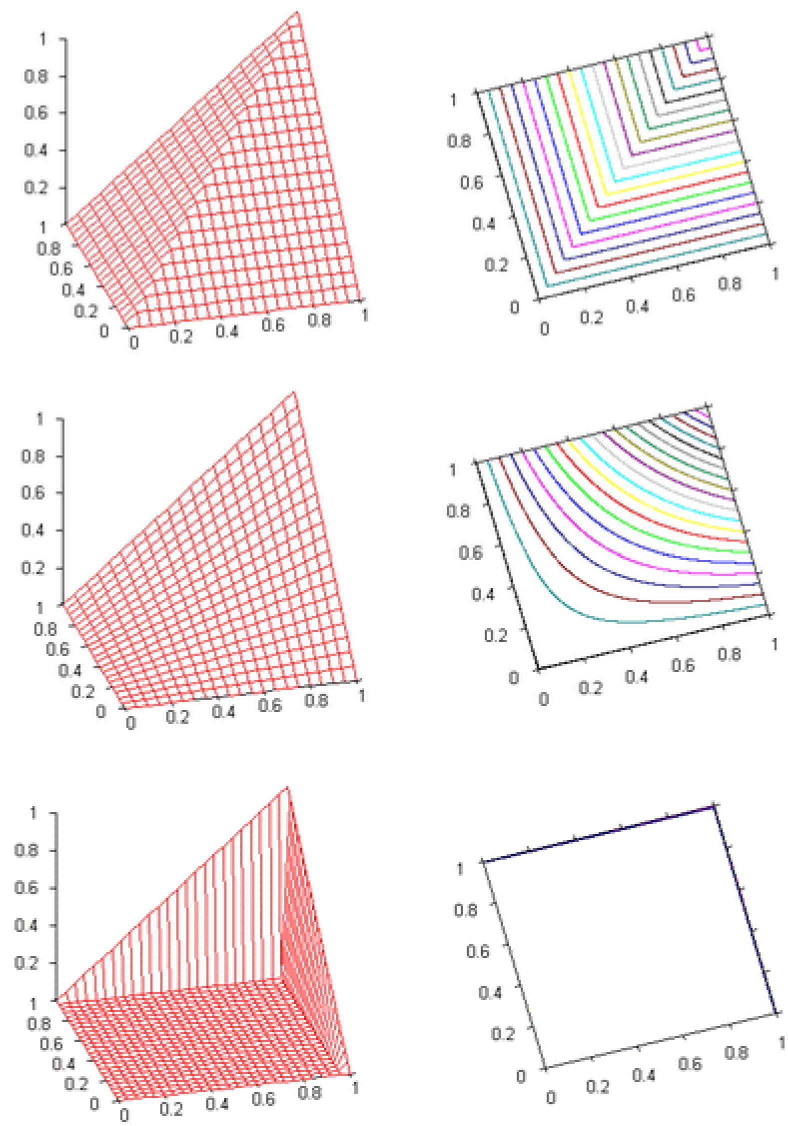
Postoji veliki broj t-normi, ali najosnovnije su četiri t-norme, T_M,T_P,T_L i T_D:

$T_M(x,y)=\min(x,y)$, (minimum)
$T_P(x,y)=x\cdot y$, (proizvod)
$T_L(x,y)=\max(x+y-1,0)$, (Lukaševicova t-norma)
$T_D(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{ako}(x,y)\in[0,1)^2 \\ \min(x,y) & inače \end{cases}$, (drastičan proizvod)

Na osnovu navedenog vidi se da samo asocijativnost operacija T_L i T_D nije sasvim trivijalna. Za T_L važi sledeće:

$$T_L(x,T_L(y,z))=\max(0,x+y+z-2)=T_L(T_L(x,y),z).$$

Za T_D se dobija vrednost različita od nule samo ako su najmanje dve od vrednosti x,y i z jednake 1, u suprotnom je očigledno min (x,y,z).
Ove četiri osnovne t-norme su značajne iz više razloga. Drastičan proizvod T_D i minimum T_M su najmanja i najveća t-norma. Minimum T_M je jedina t-norma gde je svako $x\in[0,1]$ neutralni elemenat. Proizvod T_P i Lukaševicova t-norma T_L su primeri prototipova dve podklase t-normi, striktne i nilpotentne t-norme. Na slici 1 su prikazane redom T_M,T_P i T_D t-norme.



Slika 1.t-norme(T_M,T_P i T_D)

Napomena 3.10.[2] (i) Direktno iz definicije (3.1) sledi da za sve $x \in [0,1]$, svaka t-norma T ispunjava sledeće dodatne granične uslove:

$$T(0,x)=T(x,0)=0,$$
$$T(1,x)=x.$$

Zato se sve t-norme podudaraju na granici jediničnog kvadrata $[0,1]^2$.
(ii) Monotonost t-norme T u drugoj komponenti, opisanoj u (T3), zajedno sa komutativnošću (T1), je ekvivalentna pridruženoj monotonosti za obe komponente, odnosno:

$$T(x_1,y_1) \leq T(x_2,y_2) \text{ za sve } x_1 \leq x_2 \text{ i } y_1 \leq y_2.$$

Zaista, ako je $x_1 \leq x_2$ i $y_1 \leq y_2$, tada važi

$$T(x_1,y_1) \leq T(x_1,y_2) = T(y_2,x_1) \leq T(y_2,x_2) = T(x_2,y_2).$$

Kako su t-norme samo funkcije iz jediničnog kvadrata u jedinični interval, komparacija t-normi se radi na uobičajan način, tj. tačkasto.

Definicija 3.11.[2] (i) Ako za dve t-norme T_1 i T_2, nejednakost $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$ važi za sve $(x,y) \in [0,1]^2$, tada se kaže da je T_1 slabije od T_2 ili ekvivalentno da je T_2 jače od T_1, to se piše kao $T_1 \leq T_2$.
(ii) $T_1 < T_2$ se piše kada važi $T_1 \leq T_2$ i $T_1 \neq T_2$, odnosno ako je $T_1 \leq T_2$ i za neke $(x_0,y_0) \in [0,1]^2$ je ispunjeno $T_1(x_0,y_0) < T_2(x_0,y_0)$.
Osobine (i) i (ii) zajedno sa osobinama t-normi doprinose narednim komparacijama.

Napomena 3.12.[2] (i) Kao posledica napomene 3.10. za svaku t-normu T i za sve $(x,y) \in [0,1]^2$ važi $T(x,y) \leq T(x,1) = x$ i $T(x,y) \leq T(1,y) = y$. Sve t-norme se poklapaju na granici od $[0,1]^2$ i za sve $(x,y) \in (x,y)^2$ je ispunjeno $T(x,y) \geq 0 = T_D(x,y)$. Dakle, drastičan proizvod T_D je najslabiji, i minimum T_M je najjača t-norma:

$$T_D \leq T \leq T_M.$$

(ii) Kako očigledno važi $T_L < T_P$, dobija se raspored za osnovne t-norme:

$$T_D < T_L < T_P < T_M.$$

Jasno je da je najvažnija osobina za t-normu T komutativnost, asocijativnost, monotonost na intervalu $(x,y)^2$, zajedno sa graničnim uslovom T_4. Međutim, ovo nije dovoljno da se garantuje monotonost na celom intervalu $[0,1]^2$. Zato su potrebni dodatni uslovi.

Tvrđenje 3.13.[2] Neka je A skup takav da je ispunjeno $(0,1) \subseteq A \subseteq [0,1]$, i neka je $*: A^2 \to A$ binarna operacija na A takva da za sve $x,y,z \in A$ osobine (T1)-(T3) i $x*y \leq \min(x,y)$ važe. Tada je funkcija $T:[0,1]^2 \to [0,1]$ definisana sa

$$T(x,y) = \begin{cases} x * y \text{ ako } (x,y) \in (A \setminus \{1\})^2 \\ \min(x,y) \text{ inače} \end{cases} \quad (3.5)$$

t-norma. Šta više, T je jedina t-norma čija se restrikcija na $(A \setminus \{1\})^2$ poklapa sa restrikcijom $*$ na $(A \setminus \{1\})^2$.

Dokaz. Komutativnost (T1) i granični uslov (T4) su zadovoljeni iz definicije, dok jedinstvenost T sledi iz napomene 3.10. (i). U pogledu asocijativnosti (T2), je ispunjeno da za $x,y,z \in A\setminus\{0,1\}$ važi $T(T(x,y),z)=T(x,T(y,z))$ kao posledica asocijativnosti $*$. Ako $0 \in \{x,y,z\}$ tada je očigledno 0 na obe strane, a ako $1 \in \{x,y,z\}$ tada $T(T(x,y),z)=T(x,T(y,z))$ sledi iz (T4). Što se tiče monotonosti (T3), pretpostavka je da $y\leq z$. U slučajevima $x,y,z \in A\setminus\{1\}$ ili $x \in \{0,1\}$ ili $y=0$, nejednakost $T(x,y) \leq T(x,z)$ sledi iz $x*y\leq \min(x,y)$. ■

Interesantno je napomenuti da u slučajevima $A=(0,1)$ ili $A=(0,1]$ proizvod T_P i minimum T_M mogu se dobiti pomoću konstrukcije u tvrđenju 3.13., a norme T_L i T_D ne mogu, zato što restrikcija ove dve norme na poluotvoreni jedinični kvadrat $(0,1]^2$ nije binarna operacija na $(0,1]$. Ako $A \to [0,1)$ tada se svaka t-norma može izraziti preko tvrđenja (3.13.).

Definicija 3.14.[2] Funkcija $F:[0,1]^2\to [0,1]$ koja ispunjava za sve $x,y,z \in [0,1]$, osobine (T1)-(T3) i (3.5) zove se t-subnorma.

Očigledno je svaka t-norma t-subnorma, ali obrnuto ne važi. Na primer nula funkcija $F: [0,1]^2\to [0,1]$ data sa $F(x,y)=0$, je t-subnorma ali ne i t-norma.
Intuitivno iz tvrđenja 3.13. se zaključuje da se svaka t-subnorma F može transformisati u t-normu redefinisanjem sopstvenih vrednosti na gornjoj desnoj granici jediničnog kvadrata.

Posledica 3.15.[2] Ako je F t-subnorma tada funkcija $T:[0,1]^2\to [0,1]$ definisana sa

$$T(x,y)=\begin{cases} F(x,y) & \text{ako } (x,y) \in \quad [0,1)^2 \\ \min(x,y) & \text{inače} \end{cases}$$

je trougaona norma.

Tvrđenje 3.16.[2] (i) Jedina t-norma T koja zadovoljava $T(x,x)=x$ za sve $x \in [0,1]$ je minimum T_M.
(ii) Jedina t-norma T koja zadovoljava $T(x,x)=0$ za sve $x \in[0,1)$ je drastični proizvod T_D.
Dokaz. Ako za t-normu T važi $T(x,x)=x$ za sve $x \in [0,1]$, tada za sve $(x,y) \in [0,1]^2$ pri čemu je $y\leq x$ monotonost implicira

$$y=T(y,y) \leq T(x,y) \leq T_M(x,y)=y,$$

što zajedno sa (T1) daje $T=T_M$. Kako bi se pokazala ispravnost (ii), pretpostavimo da $T(x,x)=0$ za sve $x \in [0,1)$. Tada za sve $(x,y) \in [0,1)^2$ sa $y\leq x$ važi $0\leq T(x,y) \leq T(x,x)=0$, stoga se, zajedno sa (T1) i (T4) dobija $T=T_D$.

Pošto iz definicije (3.9) sledi da su t-norme asocijativne, mogu se proširiti na operacije sa više od dva argumenta.

Napomena 3.17.[2] (i) Asocijativnost omogućava proširenje svake t-norme T na jedinstven način do *n*-arne operacije pomoću indukcije, definisanjem za svaku n-torku $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in [0,1]^n$

$$T_{i=1}^{n}=T(T_{i=1}^{n-1}x_i,x_n)=T(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

Posebno za $x_1=x_2=\dots=x_n=x$ može se pisati $x_T^{(n)}=T(x,x,\dots,x)$. Konačno prihvaćena je konvencija da je, za svako $x \in [0,1]$ $x_T^{(0)}=1$ i $x_T^{(1)}=x$.
(ii) Iz činjenice da je svaka T-norma slabija od T_M (ograničena je) postoji mogućnost proširenja do prebrojive beskonačne operacije, stavljajući za svako $(x_i)_{i\in N} \in [0,1]^N$,

$$T_{i=1}^{\infty}x_i=\lim_{n\to\infty} T_{i=1}^{n}x_i.$$

Primer 3.18.[2] Proširenja minimum T_M i proizvoda T_P do n-arnih operatora su očigledna. Za t-norme T_L i T_D se dobijaju sledeća n-arna proširenja:

$$T_L(x_1,x_2,\dots,x_n)=\max\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-(n-1),0\right),$$
$$T_D(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{cases} x_i & \text{ako } x_j=1 \text{ za sve } j\neq i,\\ 0 & \text{inače}\end{cases}.$$

3.3 Trougaone konorme

Trougaone konorme su uvedene kao dualne operacije t-normi [3], osim toga, one spadaju u grupu disjunktivnih agregacionih funkcija. Obično se koristi sledeća nezavisna aksiomatska definicija.

Definicija 3.19.[2] Trougaona konorma (t-konorma skraćeno) je binarna operacija S na jediničnom intervalu [0,1], tj. funkcija S: $[0,1]^2 \to [0,1]$, koja za sve x,y,z ∈ [0,1] zadovoljava (T1)-(T3) i

(S4) S(x,0)=x (granični uslov)

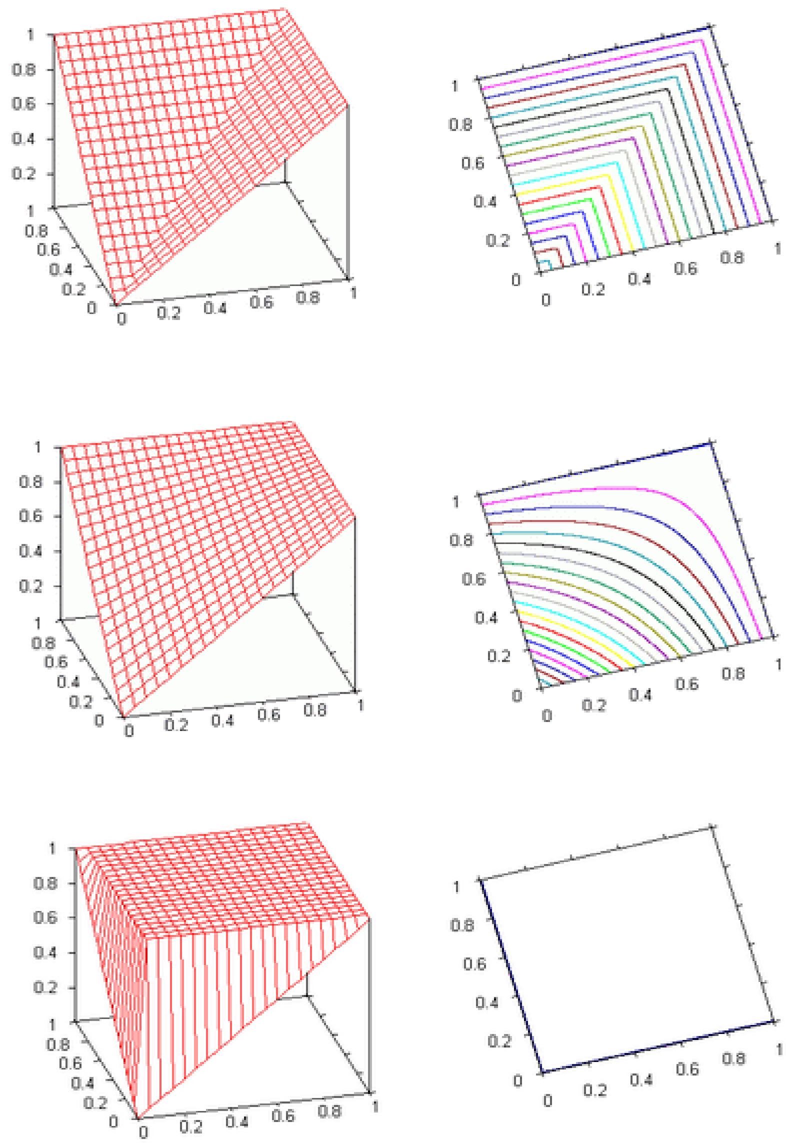
Sa aksiomatske tačke gledišta, t-norme i t-konorme se razlikuju jedino u pogledu graničnih uslova. U stvari, koncepti t-normi i t-konormi su dualni u određenom smislu, kao što se vidi u narednom primeru.

Primer 3.20.[2] Navedene su osnovne t-konorme S_M,S_P,S_L i S_D koje su date sa:

$S_M(x,y)=\max(x,y)$, (maximum)
$S_P(x,y)=x+y-x*y$, (zbir verovatnoće)
$S_L(x,y)=\min(x+y,1)$, (Lukaševicova t-konorma, granična suma)

$$S_D(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{ako}(x,y) \in (0,1]^2 \\ \max(x,y), & \text{inače} \end{cases} \qquad \text{(drastična suma)}$$

Na slici 2 su prikazane S_M,S_P i S_D t-konorme.



Slika 2.t-konorme (S_M,S_P i S_D)

Tvrđenje 3.21.[7] Funkcija S: $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ je t-konorma ako i samo ako postoji t-norma T takva da je za sve (x,y) $\in [0,1]^2$

$$S(x,y)=1-T(1-x,1-y). \qquad (3.12)$$

Dokaz. Ako je T t-norma tada je očigledno operacija S definisana sa (3.12) ispunjava (T1)-(T3) i (S4) i to je stoga t-konorma. Sa druge strane ako je S t-konorma, tada se definiše funkcija $T:[0,1]^2 \to [0,1]$ sa

$$T(x,y)=1-S(1-x,1-y). \tag{3.13}$$

Trivijalno se proverava da je T t-norma i da (3.12) važi. ■

T-konorma data sa (3.12) se zove dualna t-konorma od T i analogno t-norma data sa (3.13) zove se dual t-norme od S.
Očigledno naziv t-konorma proizilazi iz činjenice da se u jediničnom intervalu 1-x ponaša na sličan način kao komplement od x. Treba izbegavati izraze s-norma koji se ponekad pojavljuju u literaturi.

Napomena 3.22.[7] (i) Dokaz tvrđenja 3.21 čini jasnim da je svaka t-norma dualna operacija nekih t-konormi. Očigledno je da su (T_M,S_M), (T_P,S_P), (T_L,S_L) i (T_D,S_D) uređeni parovi t-normi i t-konormi koji su međusobno duali.
(ii) Sve t-norme se poklapaju na granici $[0,1]^2$, kao posledica ovih dodatnih graničnih uslova koje važe za sve $x \in [0,1]$ važi:

$$S(1,x)=S(x,1)=1,$$
$$S(0,x)=x.$$

Kao u slučaju t-normi, tvrđenje 3.13., bilo bi dovoljno definisati t-konormu S na otvorenom ili poluotvorenom jediničnom intervalu i omogućiti da (S1)-(S3) i $S(x,y)\geq\max(x,y)$ važi za sve (x,y) u otvorenom ili poluotvorenom intervalu.
(iii) Dualnost menja raspored: ako za neke t-norme važi $T_1\leq T_2$, i ako su S_1 i S_2 dualne konorme T_1 i T_2, tada se dobija $S_1\geq S_2$. Posledica je da za svaku t-konormu S važi:

$$S_M\leq S\leq S_D,$$

tj., maksimum S_M je najslabija i drastična suma S_D je najjača t-konorma.

$$S_M<S_P<S_L<S_D.$$

(iv)Sa datom t-konormom S, ova operacija se može proširiti do *n*-torki $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in [0,1]^n$:

$$S_{i=1}^{n}x_i=S(S_{i=1}^{n-1}x_i,x_n)=S(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$
$$S_{i=1}^{\infty}x_i=\lim_{n\to\infty} S_{i=1}^{n}x_i.$$

Primer 3.23.[7] Ponovo je *n*-arno proširenje maksimuma S_M očigledno. Za sume verovatnoća S_P, Lukaševicovu t-konormu S_L i drastičnu sumu S_D postoje sledeća *n*-arna proširenja:

$$S_P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i),$$
$$S_L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min(\sum_{i=1}^{n} x_i, 1),$$
$$S_D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} x_i & \text{ako } x_j = 0 \text{ za sve } j \neq i, \\ 1 & \text{inače.} \end{cases}$$

Napomena 3.24.[7] Može se primetiti da ako su (T,S) par međusobno dualnih t-normi i t-konormi tada se dualnost može uopštiti na sledeći način:

$$S_{k\in K} x_k = 1 - T_{k\in K}(1 - x_k),$$
$$T_{k\in K} x_k = 1 - S_{k\in K}(1 - x_k).$$

3.4 Neprekidnost t-normi i t-konormi

Ovaj deo je posvećen analitičkim osobinama t-norme i t-konorme [11]. Kao što se može videti iz drastičnog proizvoda T_D i njegovog duala S_D, t-norme i t-konorme ne moraju da budu neprekidne.

Funkcija $F:[0,1]^2 \to [0,1]$ je neprekidna ako za sve konvergentne nizove $(x_n)_{n\in N}, (y_n)_{n\in N} \in [0,1]^N$ važi

$$F(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n).$$

Kako je jedinični kvadrat $[0,1]^2$ kompaktan podskup realnog prostora R^2, neprekidnost funkcije $F:[0,1]^2 \to [0,1]$ je ekvivalentna uniformnoj neprekidnosti. Takođe se može zaključiti da je t-konorma neprekidna ako i samo ako je njoj dualna t-norma neprekidna.

Tvrđenje 3.25.[11] Neopadajuća funkcija F: $[0,1]^2 \to [0,1]$ je neprekidna ako i samo ako je neprekidna u svakoj komponenti, tj. za sve x_0, $y_0 \in [0,1]$ i vertikalni presek $F(x_0,.)$: $[0,1] \to [0,1]$ i horizontalni presek $F(.,y_0)$: $[0,1] \to [0,1]$ su neprekidne funkcije po jednoj promenljivoj.
Dokaz. Ako je funkcija $F:[0,1]^2 \to [0,1]$ neprekidna tada je očigledno da je neprekidna u svakoj komponenti.
Obrnuto, neka je F neprekidna u svakoj komponentii za fiksirane $(x_0,y_0) \in [0,1]^2$, $\varepsilon > 0$ nizovi $(x_n)_{n\in N}$ i $(y_n)_{n\in N}$ u $[0,1]$ neka konvergiraju ka x_0 odnosno y_0. Iz ovoga se mogu konstruisati četiri monotona niza $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$, $(c_n)_{n\in N}$ i $(d_n)_{n\in N}$ tako da je za sve $n \in \mathbb{N}$ ispunjeno

$$a_n \leq x_n \leq b_n \text{ i } (a_n)_{n\in N} \nearrow x_0, (b_n)_{n\in N} \searrow x_0,$$
$$c_n \leq y_n \leq d_n \text{ i } (c_n)_{n\in N} \nearrow y_0, (d_n)_{n\in N} \searrow y_0.$$

Neprekidnost od F u drugoj komponenti implicira neprekidnost vertikalnog preseka $F(x_0,.)$ što znači da postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da kao posledica monotonosti F važi za sve $n \geq N$

$$F(x_0,y_0)-\varepsilon < F(x_0,c_N) \leq F(x_0,y_n) \leq F(x_0,d_N) < F(x_0,y_0)+\varepsilon.$$

Kako je F neprekidna u prvoj komponenti i kako su dve funkcije $F(.,c_N)$ i $F(.,d_N)$ neprekidne, zato postoji broj $M \in \mathbb{N}$ takav da se za sve $m \geq M$ i $n \geq N$ dobija:

$$F(x_0,c_N)-\varepsilon < F(a_m,c_N) \leq F(x_m,y_n) \leq F(b_M,d_N) < F(x_0,d_N)+\varepsilon.$$

Stavljajući da je $K = \max(M,N)$ se za sve $k \geq K$ dobija

$$F(x_0,y_0)-2\varepsilon < F(x_k,y_k) < F(x_0,y_0)+2\varepsilon,$$

dokazujući da $(F(x_k,y_k))_{k\in \mathrm{N}}$ konvergira ka $F(x_0,y_0)$, tj. F je neprekidna u (x_0,y_0). ■

Definicija 3.26.[11] Funkcija $F:[0,1]^2 \to [0,1]$ se naziva donja (gornja) poluneprekidnost ako za svaku tačku $(x_0,y_0) \in [0,1]^2$ i za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da respektivno:

$$F(x,y) > F(x_0,y_0)-\varepsilon \quad \text{kad god je } (x,y) \in (x_0-\delta, x_0] \times (y_0-\delta, y_0],$$
$$F(x,y) < F(x_0,y_0)+\varepsilon \text{ kad god je } (x,y) \in [x_0, x_0+\delta) \times [y_0, y_0+\delta).$$

Napomena 3.27.[11] Nilpotentni minimum koji se definiše: $T^{nM}(x,y) = \begin{cases} 0 & ako\ x+y \leq 1, \\ \min(x,y) & inače \end{cases}$
je t-norma. Ona je donje poluneprekidna ali ne i gornje poluneprekidna. Drastičan proizvod T_D je gornje poluneprekidan ali ne i donje poluneprekidan.

Tvrđenje 3.28.[11] Neopadajuća funkcija $F: [0,1]^2 \to [0,1]$ je donje poluneprekidna ako i samo ako je levo neprekidna u svakoj komponenti, tj. ako je za sve $x_0, y_0 \in [0,1]$ i za sve nizove $(x_n)_{n\in \mathrm{N}}$, $(y_n)_{n\in \mathrm{N}} \in [0,1]^{\mathrm{N}}$ ispunjeno

$$\sup\{F(x_n,y_0), n \in N\} = F(\sup\{x_n | n \in N\}, y_0),$$
$$\sup\{F(x_0,y_n), n \in N\} = F(x_0, \sup\{y_n | n \in N\}).$$

Dokaz je analogan dokazu tvrđenju 3.25.

Gornja poluneprekidnost ne opadajuće funkcije $F: [0,1]^2 \to [0,1]$ je ekvivalentna njenoj desnoj neprekidnosti u svakoj komponenti. Drugim rečima, t-norma ili t-konorma je donje (gornje) poluneprekidna ako i samo ako je levo neprekidna (desno neprekidna) u prvoj komponenti.

Definicija 3.29.[11] Za t-normu T (t-konormu S) kaže se da je granično neprekidna ako je neprekidna na granici jediničnog kvadrata $[0,1]^2$, to jest, na skupu $[0,1]^2 \setminus (0,1)^2$.

Može se uočiti da je za graničnu neprekidnost t-norme T, dovoljno zahtevati neprekidnost na gornjoj desnoj granici (za t-konormu S na donjoj levoj granici) jediničnog kvadrata $[0,1]^2$. Zaista posledice napomena 3.10 i 3.22. je da za svako $y \in [0,1]$ važi:

$$T(0^+,y)=T(0,y),$$
$$S(1^-,y)=S(1,y).$$

Primer 3.30.[11] (i) Funkcija $T:[0,1]^2 \to [0,1]$ je t-norma koja je granično neprekidna ali ne i levo neprekidna:

$$T(x,y)=\begin{cases} 0 & ako\ (x,y) \in (0,0.5)^2, \\ \min(x,y) & inače \end{cases}.$$

(ii) Naredna funkcija $T:[0,1]^2 \to [0,1]$ je t-norma koja je neprekidna u tački (1,1) ali ne i granično neprekidna:

$$T(x,y)=\begin{cases} 0 & ako\ (x,y) \in (0,1)^2 \setminus [0.5,1)^2, \\ \min(x,y) & inače \end{cases}.$$

3.5 Algebarski aspekti t-normi i t-konormi

U fokusu su idempotentni, nilpotentni elementi i delioci nule [11]. Kako je za svako $n \in \mathbb{N}$ trivijalno $0_T^{(n)}=0$ i $1_T^{(n)}=1$, samo se elementi (0,1) smatraju kandidatima za nilpotentne elemente i delioce nule u sledećoj definiciji.

Definicija 3.31.[11] Neka je T t-norma.
(i) Svako $a \in [0,1]$ je idempotentni elemenat za T ako T(a,a)=a. Brojevi 0 i 1 (koji su idempotentni elementi za svaku t-normu T) se nazivaju trivijalni idempotentni elementi za T, svaki idempotentni elemenat u (0,1) se zove ne trivijalni idempotentni elemenat od T.
(ii) Elemenat $a \in (0,1)$ se zove nilpotentni elemenat za T ako postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da važi $a_T^{(n)}=0$.
(iii) Elemenat $a \in (0,1)$ se zove delilac nule od T ako postoji $b \in (0,1)$ tako da je ispunjeno T(a,b)=0.

Primer 3.32.[11] (i) Svako $a \in [0,1]$ je idempotentni elemenat za minimum T_M (T_M norma je jedina t-norma čiji se skup idempotentnih elemenata poklapa sa $[0,1]$. Svako $a \in (0,1)$ je ujedno i nilpotentni elemenat i delilac nule Lukaševicove t-norme, kao i drastičnog proizvoda T_D. Minimum t-norma nema ni nilpotentne elemente ni delioce nule, i T_L i T_D imaju samo trivijalne

idempotentne elemente. Proizvod T_P nema ni ne-trivijalne idempotentne ni nilpotentne elemente ni delioce nule.
(ii) Za nilpotentni minimum T^{nM} definisan u (3.27.), broj a je idempotentni elemenat ako i samo ako a ∈ {0} ∪ (0.5,1], a je nilpotentni elemenat ako i samo ako a ∈(0,0.5) i a je delilac nule ako i samo ako a ∈(0,1).
(iii) Ako je ∗ binarna operacija na (0,1) ili na (0,1], koja ispunjava za sve x,y,z ∈ A osobine (T1)-(T3) i (3.5) tada t-norma konstruisana kao u (3.14.) nema ni delioce nule ni nilpotentne elemente.

Idempotentni elementi t-normi mogu se karakterizovati na sledeći način, koji uključuje minimum operaciju.

Tvrđenje 3.33.[11] (i) Elemenat a ∈ [0,1] je idempotentni elemenat t-norme T ako i samo ako za sve x ∈ [a,1] važi T(a,x)=min(a,x).
(ii) Ako je T neprekidna t-norma, tada a ∈ [0,1] je idempotentni elemenat T ako i samo ako je za sve x ∈ [0,1] ispunjenoT(a,x)=min(a,x).
Dokaz. Ako za sve x∈ [a,1] važi T(a,x)=min(a,x) tada je takođe T(a,a)=a. Suprotan smer u (i) je posledica monotonosti (T3) i graničnog uslova (T4) u T.
Prilikom dokazivanja (ii), zbog (i) dovoljno je pokazati da za idempotentni elemenat a ∈ [0,1] važi T(a,x)=x za sve x ∈ [0,a). Kako funkcija T(a,.): [0,a]→ [0,a] ispunjava T(a,0)=0 i T(a,a)=a, neprekidnost od T implicira da postoji neko z ∈ [0,a] tako da T(a,z)=x, što dovodi do

$$T(a,x)=T(a,T(a,z))=T(T(a,a),z)=T(a,z)=x=\min(a,x)$$

čime je dokazano tvrđenje. ■

Napomena 3.34.[11] (i) Ako je $a \in [0,1]$ idempotentni elemenat t-norme T tada, pomoću indukcije, takođe važi $a_T^{(n)}=a$ za sve $n \in \mathbb{N}$. To u stvari znači da nijedan elemenat iz (0,1) ne može biti i idempotentan i nilpotentan.
(ii) Svaki nilpotentan elemenat a t-norme T je takođe delilac nule od T (ako je $n>1$ to je najmanji ceo broj tako da je $a_T^{(n)}=0$ tada je T($a, a_T^{(n-1)}$)=0 sa $a_T^{(n-1)} > 0$).
(iii) Ako t-norma T ima nilpotentan elemenat a tada uvek postoji elemenat b ∈ (0,1) takav da je $b_T^2=0$. Zaista ako je $n>1$ najmanji ceo broj takav da je $a_T^{(n)}=0$ tada $b=a_T^{(n-1)}$ ispunjava $b_T^2=0$.
(iv) Ako je a ∈ (0,1) nilpotentni elemenat (delilac nule) t-norme T tada je svaki broj b ∈ (0,a) takođe nilpotentni elemenat.
(v) Dakle, oba skupa nilpotentnih elemenata i delioca nule t-norme T mogu biti ili prazan skup ili interval forme (0,c) ili (0,c]. Na primer za nilpotentni minimum T^{nM}, skup nilpotentnih elemenata je skup (0,0.5), dok je za nula delioce (0,1).

Iako je skup nilpotentnih elemenata uopšteno podskup skupa delioca nule, za svaku t-normu postojanje delioca nule je ekvivalentno postojanju nilpotentnih elemenata.

Tvrđenje 3.35.[11] Za svaku t-normu T sledeći iskazi su ekvivalentni:
(i) T ima delioce nule.
(ii) T ima nilpotentne elemente.
Dokaz. Ako T ima delioce nule, tj. ako T(a,b)=0 za neko a>0 i b>0, tada se za c = min(a,b) >0 dobija T(c,c)=0, što govori da je c nilpotentni elemenat T. Smer iz (ii) sledi (i) je posledica napomene 3.34.(ii). ■

Za desno neprekidne t-norme moguće je dobiti idempotentni elemenat kao granicu moći odgovarajućeg x $\in [0,1]$.

Tvrđenje 3.36.[11] Neka je T t-norma koja je desno neprekidna na dijagonali $\{(x,x)|\ x \in [0,1]\}$ jediničnog kvadrata $[0,1]^2$, i neka je $a \in [0,1]$. Tada važi ekvivalencija (i) i (ii):
(i) a je idempotentni elemenat T.
(ii) Postoji $x \in [0,1]$ tako da $a = \lim_{n\to\infty} x_T^{(n)}$.
Dokaz. Očigledno je ispunjeno za svaki idempotentni elemenat a od T i za svako $n \in \mathbb{N}$ $a_T^{(n)}=a$, tako da je $a=\lim_{n\to\infty} a_T^{(n)}$.
Obrnuto, zbog monotonosti (T3), za svako $x \in [0,1]$ niz $(x_T^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ je ne-rastući, tako da ima ograničenje $a \in [0,1]$. Desna neprekidnost od T na $\{(x,x)|x \in [0,1]\}$ implicira

$$\mathrm{T}(a,a)=\lim_{n\to\infty} T(\, x_T^{(n)}, x_T^{(n)})=\lim_{n\to\infty} x_T^{(2n)} = a,$$

pokazujući da je a idempotentni elemenat T. ■

Definicija 3.37.[11] Za proizvoljnu t-normu T važe sledeće osobine:
(i) Za t-normu T se kaže da je striktno monotona ako:

(SM) T(x,y)<T(x,z) kada je x>0 i y<z.

(ii) Za t-normu T se kaže da zadovoljava zakon kancelacije ako:

(CL) T(x,y)=T(x,z) implicira x=0 ili y=z.

(iii) Za t-normu T se kaže da ispunjava uslovni zakon kancelacije ako:

(CCL) T(x,y)=T(x,z) >0 implicira y=z.

(iv) T (t-norma) se naziva Arhimedova ako:

(AP) za svako (x,y) $\in (0,1)^2$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $x_T^{(n)} < y$.

(v) T (t-norma) ima osobinu ograničenosti ako:

(LP) za svex $\in (0,1)$: $\lim_{n\to\infty} x_T^{(n)} = 0$.

Primer 3.38.[11] (i) Minimum T_M nema nijednu od ovih osobina (ranije je navedeno da je svako x $\in [0,1]$ idempotentni elemenat T_M), dok proizvod T_P ispunjava sve osobine. Lukaševicova t-norma i drastičan proizvod su Arhimedove i ispunjavaju uslovni zakon kancelacije (CCL) i osobinu ograničenosti (LP) i nijednu drugu osobinu.
(ii) Ako t-norma T ispunjava zakon kancelacije (CL) , tada je očigledno ispunjena osobina uslovne kancelacije (CCL), obrnuto ne važi.
(iii) Algebarske osobine prikazane u definiciji (3.37.) ne zavise od neprekidnosti: neprekidna t-norma T_M pokazuje da neprekidnost ne implicira ni jednu od ovih osobina. Obrnuto, T_D i ne-neprekidna t-norma T data sa :

$$T(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{2} & ako\ (x,y) \in [0,1)^2, \\ \min(x,y) & inače \end{cases}$$

koja je striktno monotona i zadovoljava zakon kancelacije (CL), su primeri koji pokazuju da nijedna od algebarskih osobina ne implicira neprekidnost t-norme.

Tvrđenje 3.39.[11] Neka je T t-norma.Tada važi:
(i) T je striktno monotona ako i samo ako ispunjava zakon kancelacije.
(ii) Ako je T striktno monotona tada ima samo trivijalne idempotentne elemente.
(iii) Ako je T striktno monotona, tada nema delilaca nule.
Dokaz.Očigledno da striktna monotonost implicira punovažnost zakona kancelacije. Obrnuto, striktna monotonost sledi iz zakona kancelacije zajedno sa monotonošću (T3). Tvrđenje (ii) sledi direktno iz T(x,x)<T(x,1)=x za sve x $\in (0,1)$. Što se tiče (iii), pretpostavka da je $a \in (0,1)$ delilac nule, to jest, T(a,b)=0 za neko $b \in (0,1)$ vodi do T(a,$\frac{b}{2}$) = T(a,b) = 0 i zato se krši striktna monotonost T. ■

Definicija 3.40.[11] (i) Za t-normu T se kaže da je striktna ako je neprekidna i striktno monotona.
(ii) Za t-normu T se kaže da je nilpotentna ako je neprekidna i ako je svako a $\in (0,1)$ nilpotentni elemenat za T.

Napomena 3.41.[11] (i) Proizvod T_P je striktna t-norma, dok je Lukaševicova T_L nilpotentna t-norma.
(ii) Zbog tvrđenja 3.39., t-norma T je stiktna ako i samo ako je neprekidna i ispunjava zakon kancelacije (CL).
(iii) Kao posledica (ii), svaka striktna t-norma ispunjava uslovni zakon kancelacije.
(iv) Takođe, svaka nilpotentna t-norma T zadovoljava uslovni zakon kancelacije. Da bi se to potvrdilo pretpostavka je da T(x,y)=T(x,z) i y<z. Tada zbog neprekidnosti T, mora postojati $u \in [0,1)$ tako da je y=T(z,u). Usled asocijativnosti (T2) se dobija:

$$T(x,z)=T(x,y)=T(x,T(z,u))=T(T(x,z),u)$$

i pomoću indukcije $T(x,z)=T(T(x,z),u_T^{(n)})$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Kako je T nilpotentna, jedina mogućnost je T(x,z)=0, tj.,T ispunjava (CCL).

3.6 Uninorme i nulanorme

Neutralni elementi t-norme 1 i t-konorme 0 su granične tačke jediničnog intervala. Međutim, postoje mnoge važne operacije čiji je neutralni elemenat unutrašnja tačka osnovnog skupa. Činjenica je da se prve tri aksiome (T1)-(T3) poklapaju sa t-normama i t-konormama, to jest jedina aksiomatska razlika je u lokaciji neutralnog elementa. Zato se uvodi nova klasa binarnih operacija usko povezanih sa t-normama i t-konormama ([13], [1]).

Definicija 3.42.[13] Uninorma je binarna operacija U na jediničnom intervalu [0,1], to jest funkcija U: $[0,1]^2 \to [0,1]$, koja ispunjava uslove (T1)-(T3) i

$$\text{(U4)} \qquad \text{U ima neutralni elemenat } e \in (0,1).$$

Uninorme su jedine operacije $*$ na jediničnom intervalu koje transformišu ($[0,1],T_M, *$) i ($[0,1],S_M,*$) u komutativne polu-prstenove. U nekim sistemima specijalne uninorme se koriste za agregaciju lokalnih važnosti u globalne. Takođe, važi da ne postoji uninorma koja je neprekidna na celom jediničnom kvadratu.

Evidentno je da za proizvoljnu uninormu U sa neutralnim elementom $e \in (0,1)$, operacije T_U,S_U: $[0,1]^2 \to [0,1]$ definisane sa:

$$T_U(x,y) = \frac{1}{e}U(ex,ey),$$
$$S_U(x,y) = \frac{1}{1-e}(U(e+(1-e)x,e+(1-e)y)-e),$$

su redom t-norma i t-konorma.

Asocijativnost uninorme implicira da U(0,1) $\in\{0,1\}$. U slučaju da je U(0,1)=0 to je komutativna, asocijativna i monotona konjuktivna uninorma. Ako je U(0,1) =1 to je disjunktivna uninorma.

Definicija 3.42.[1] Nulanorma je binarna operacija V na jediničnom intervalu $[0,1]$ tj. funkcija, V:$[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ koja za sve x,y,z $\in [0,1]$ zadovoljava (T1)-(T3) i uslov (V4) koji glasi: postoji a $\in$ (0,1) tako da je V(x,0)=x za sve x $\in$ [0,a] i V(x,1)=x za sve x $\in$ [a,1].

Jasno je da za svaku nulanormu važi V(x,a)=a za sve a $\in$ [0,1], to jest a je annihilator od V. Slično kao i za sve uninorme, za nulanormu V sa annihilatorom a $\in$ (0,1), operacije T_V, S_V: $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ definisane sa:

$$T_V(x,y) = \frac{1}{1-a}(V(a+(1-a)x,a+(1-a)y)-a,$$

$$S_v(x,y) = \frac{1}{a}V(ax,ay)\ ,$$

su t-norme i t-konorme, redom [1].

3.7 Uređena prosečna ponderisana funkcija

Proces grupnog odlučivanja se deli na homogene i heterogene procese. Proces je homogen kada nijedna ocena važnosti nije pridružena agentu, dok je heterogena u obrnutom slučaju. Međutim, kada nije obezbeđena nijedna ocena važnosti, mnogi problemi grupnog odlučivanja se trebaju klasifikovati kao heterogeni procesi. Zaista, u mnogim slučajevima određeno prisustvo važnosnih ocena pridruženih agentu nije neophodno da bi bili apsolutno sigurni da se nijedan agent ne tretira jednako.U slučaju kada agenti obezbeđuju informacije za rešavanje određene stvari, ove informacije se mogu koristiti kao sredstvo za diskiminaciju agenata kako ne bi imali istu važnost. U ovom slučaju daju se više ocene agentima sa doslednim informacijama. Jedan od načina implementiranja važnosnih ocena u proces odluke je podsticanje redosleda vrednosti preferencija pre njihove agregacije. Za ovo implementiranje se koristi OWA operator. Prikazane su osobine OWA operatora navedene u ([3],[8]).

Ovaj operator prati dva koraka za postizanje finalne odluke iz sinteze ocena preferencija većine agenata: (i) agregaciju (ii) eksploataciju.

Definicija 3.43.[6] OWA operator dimenzije *n* je funkcija F: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ koja ima pridružen skup važnosti, važnosnog vektora $W=(w_1,w_2,...,w_n)$, tako da je $w_i \in [0,1]$ i $\sum_{i=1}^{n} w_i=1$ i koja vrši agregaciju vrednosti $\{x_1,...,x_n\}$ na sledeći način:

$$F(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_{\sigma(i)},$$

gde je σ:{1,...,n}→{1,...,n} permutacija takva da $x_{\sigma(i)} \geq x_{\sigma(i+1)}$, $\forall i$=1,...,n-1 to jest $x_{\sigma(i)}$ je i-ta najveća vrednost u $\{x_1,...,x_n\}$.

Definicija 3.44.[8] Može se definisati kvazi-uređena ponderisana funkcija $OWA_{w,f}$: $I^n \to \mathbb{R}$ koja je definisana sa:

$$OWA_{w,f}(x) := f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x_i)\right),$$

gde je generator f: I→ $\mathbb{R}$ neprekidna i strogo monotona funkcija.

Definicija 3.45.[8] Sistem $\Delta=(w_n:\ n \in N)=(w_{i,n}:\ n \in N,\ i \in [n])$ normalizovanih ponderisanih vektora se naziva ponderisani trougao. Proširena ponderisana aritmetička sredina $WAM_\Delta: \bigcup_{n\in N} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i proširena uređena prosečna ponderisana funkcija $OWA_\Delta: \bigcup_{n\in N} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pridružena ponderisanom trouglu Δ su redom definisane sa:

$$WAM_\Delta(x) = \sum_{i=1}^{n} w_{i,n}\, x_i$$

$$OWA_\Delta(x) = \sum_{i=1}^{n} w_{i,n}\, x_{(i)}\ .$$

Primer 3.46.[8] Kao primer ponderisanog trougla je normalizovan Paskalov trougao, dat sa $w_{i,n}=\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{i-1}$.

OWA operatore je uveo Yager da obezbedi sredstva za agregaciju rezultata pridružene sa satifakcijom u višekriterijskom odlučivanju i pomoću ovog operatora dolazi do sjedinjavanja konjuktivnog i disjunktivnog ponašanja. Pomoću OWA operatora se dobija parametrizovana familija agregatornih operatora, koja uključuje mnoge poznate operatore maksimum, minimum, k-redosled statistika, medijana i aritmetička sredina. Da bi se dobili navedeni operatori treba samo odabrati odgovarajuće težinske koeficijente. Definisanje OWA operatora je važno za dobijanje pridruženog ponderisanog vektora.

	OWA
Minimum	$\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_i = 0 \text{ ako } i \neq 1 \end{cases}$
Maksimum	$\begin{cases} w_n = 1 \\ w_i = 0 \text{ ako } i \neq n \end{cases}$
Medijana	$\begin{cases} w_{\frac{n+1}{2}}=1 \text{ ako je } n \text{ neparan} \\ w_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \text{ i } w_{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{2} \text{ ako je } n \text{ paran} \\ w_i = 0 \text{ u suprotnom} \end{cases}$
k-redosled statistika	$\begin{cases} w_k = 1 \\ w_i = 0 \text{ ako } i \neq k \end{cases}$

Aritmetička sredina	$w_i = \frac{1}{n}\ \forall\, i$

Uređeni prosečni ponderisani operatori su komunitativni, monotoni, idempotentni i imaju kompenzativno ponašanje. Poslednja osobina govori da je agregacija pomoću OWA operatora uvek između maksimuma i minimuma. Kako ovaj operator generalizuje minimum i maksimum, može se gledati kao parametrizovani način prelaženja sa minimuma na maksimum. U tom kontekstu Yager uvodi operator maxness koji se definiše sa:

$$\text{maxness}(w_1, \dots, w_n) = \sum_{j=1}^{n} w_{n-j+1} \cdot \frac{n-j}{n-1} = \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{j-1}{n-1}$$

Minimalna vrednost se dobija za maxness(1,0,…,0) =0, a maksimalna vrednost za maxness(0,0,…,1)=1. Još jedan operator su uveli Yager i O' Hagan koji opisuje disperziju težinskih koeficijenata i baziran je na ideji entropije (neodređenosti).

$$\text{dispersion}(w_1, \dots, w_n) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \ln w_j$$

Jedna od najvažnijih primena OWA operatora je razvijanje odgovarajuće metodologije za izvođenje težinskih koeficijenata koji se koriste u OWA agregaciji. Jedna od odgovarajućih metodologija je maksimizacija disperzije težinskih koeficijenata uz uslov fiksnog maxness-a. Težinski koeficijenti se izračunavaju na sledeći način koristeći dato $\alpha \in [0,1]$.

$$\text{Maksimum} - \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \ln w_j$$

Sa uslovima :

$$\text{maxness}(w_1, \dots, w_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{j-1}{n-1} = \alpha$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1,\ 0 \leq w_j \leq 1$$

Druga metodologija koristi informacije lingvističkog kvantifikatora radi agregacije. Koriste se kvantifikatori koji su definisani sa:

- Q(0) = 0 i Q(1) = 1
- ako je x ≤ y tada je Q(x) ≤ Q(y)

Koristeći navedenu vrstu kvantifikatora Yager uvodi formulu za računanje težinskih koeficijenata na sledeći način:

$$w_j = Q\left(\frac{n-j+1}{n}\right) - Q\left(\frac{n-j}{n}\right)$$

Da bi se došlo do rešenja Q kriterijum treba da je ispunjen. Na primer, ako kriterijum “ najmanje 100%” treba da bude ispunjen koristi se minimum operator. Ako je ispunjen minimum kriterijum tada su i ostali kriterijumi ispunjeni. Konkretni primeri odlučivanja na ovaj način su prikazani u poglavlju alternativni metod odlučivanja.

4. Primena agregatornih operatora-donošenje grupne odluke

Jedna od primena metode agregacije je metoda grupnog odlučivanja. Ovde svaki od učesnika obezbeđuje svoju funkciju preferencije iz skupa dostupnih alternativa. Zatim se pojedinačne funkcije preferencije skupljaju kako bi se dobila grupna funkcija preferencije. Izabrana alternativa optimizira funkciju preferencije grupe. Iz ovog ambijenta nastaje sasvim interesantan ishod zbog činjenice da svaki učesnik grupe ima za cilj maksimizaciju sopstvene funkcije preferencije i ne neophodno grupne funkcije preferencije. Ova situacija može dovesti do strategijskih manipulacija informacija koje obezbeđuju učesnici kako bi postigli svoj cilj. U ovom delu se razmatra jedan tip strategijske manipulacije i obezbeđuje modifikacija donošenja gupne odluke radi odbrane od strategijske manipulacije [12]. Formalno ova modifikacija omogućava sposobnost uključivanja važnih učesnika u proces agregacije.

U grupnom odlučivanju se koriste fazi podskupovi i to u obliku funkcije preferencije agenata koji biraju alternative. Naime, stepen agentove naklonosti prema biranoj alterativi varira između nule i jedinice. Takođe, kod fazi podskupa postoji funkcija pripadnosti koja preslikava elemente u interval [0,1]. Zato se prvo navode neke osnovne osobine i karakteristike fazi skupova [9].

4.1 Fazi skupovi

Fazi skupove definisao je 1965te godine Lotfi Zadeh kao matematički formalizovan način predstave i modeliraju neodređenosti u lingvistici. U teoriji klasičnih, jasnih skupova, neki određeni element ili pripada ili ne pripada nekom definisanom skupu. Drugim rečima, pripadnost elementa skupu je krajnje distinktna. Fazi skup je, u tom smislu, generalizacija klasičnog skupa, budući da se pripadnost (tj. stepen pripadnosti) elementa fazi skupu može okarakterisati brojem iz intervala [0,1]. Drugim rečima, *funkcija pripadnosti* (eng. membership function) fazi skupa preslikava svaki element univerzalnog skupa u pomenuti interval realnih brojeva. Izraz fazi (eng. fuzzy) znači nešto nejasno, zamagljeno.

Osnovna karakteristika fazi skupa je njegova funkcija pripadnosti. Neka je U univerzalan skup i $\mu_A(x)$ funkcija pripadnosti klasičnog podskupa A od U takva da uzima vrednosti iz skupa $\{0,1\}$, pri čemu je $\mu_A(x) = 1$ ako je $x \in A$ i $\mu_A(x) = 0$ za $x \notin A$. Može se primetiti da su granice podskupa A oštre i jasne i da predstavljaju dvoklasnu kategorizaciju elemenata skupa U. Fazi skup, sa druge strane, uvodi neodređenost poništavanjem oštrih granica između članova skupa i onih koji to nisu. Drugim rečima, prelaz sa članova na ’’nečlanove’’ nije tako oštar, prelaz je postepen. To se omogućava pomoću funkcije pripadnosti fazi podskupa A skupa U koja je definisana na sledeći način

$$\mu_A: U \to [0,1].$$

Osnovna razlika u odnosu na klasičan podskup je da sada neki elemenat $x \in U$ pripada fazi podskupu A sa određenim stepenom između 0 i 1. Radi lakšeg razumevanja funkcija pripadnosti podskupa A se označava sa A(x). Upravo A(x) (funkcija pripadnosti) će biti funkcija preferencije u procesu grupnog odlučivanja, dok će alternative biti prikazane preko promenljvih x.

4.2 Pretpostavke za grupno odlučivanje

Postoji mnogo mogućnosti za primenu teorije fazi skupova u grupnom odlučivanju. Na primer, može se koristiti da prevede neprecizne i nejasne informacije problema u fazi odnose ili da dizajnira fazi instrumente za proces odlučivanja radi uspostavljanja redosleda preferencija alternativa. U svim procesima odlučivanja uspostavljene su procedure za kombinovanje mišljenja o alternativama sa različitim tačkama gledišta.

Pretpostavka je da postoji skup alternativa X= $\{x_1, x_2, ..., x_q\}$, koje biraju grupa od n agenata i koji moraju sarađivati na izboru ove radnje [12]. Pretpostavka je da svaki agent reprezentuje svoju preferenciju u obliku fazi podskupa skupa X i da je fazi podskup predstavljen funkcijom pripadnosti. Neka Aj označava preferenciju za agenta j, i neka je svaki agent nesvestan funkcije preferencije ostalih učesnika.

Mehanizam grupnog odlučivanja je proces selekcije alternative zasnovan na preferencijama pojedinaca koji čine grupu. Svaka nediskriminatorna odluka mehanizma treba tretirati sve učesnike na isti način, jedina razlika između učesnika treba biti u informacijama koje sadrže individualne funkcije korisnosti. Drugi uslov je da bilo koja alternativa koja je prvi izbor od svih učesnika treba biti prvi izbor grupe. Ovo se naziva *Pareto optimalnost* (eng. Pareto optimality).

Prilaz za dobijanje grupne odluke je da se skupe individualne funkcije preferencije Aj za dobijanje grupne funkcije preferencije A i zatim izabrati onu alternativu koja optimizira grupnu funkciju preferencije. Jedna od važnih odluka je izbor operatora za agregaciju individualnih funkcija preferencije. Formalno, ovaj operator agregacije preslikava $F: I^n \rightarrow I$ tako da je za bilo koje $x \in X$, grupna preferencija $A(x) = F(A_1(x), A_2(x), \ldots, A_n(x))$.

Neka je $A(x) = F(A_1(x), A_2(x), \ldots, A_n(x))$ tada se za F vezuju sledeće osobine.

1. Simetričnost, redosled učesnika je nebitan.
2. Monotonost, ako $a_i \geq b_i$ tada je $F(a_1, a_2 \ldots a_n) \geq F(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.
3. $F(1,1,\ldots,1)=1$.
4. $F(0,0,\ldots,0)=0$.

Prvi uslov obezbeđuje ne-diskriminaciju i zahteva da je svako učesnika tretiran isto. Drugi uslov podstiče Pareto optimalnost i omogućuje pozitivno udruživanje između individualnih preferencija i grupne preferencije. Treći uslov pokazuje da, ako su svi učesnici potpuno zadovoljni sa rešenjem, tada je i grupa u potpunosti zadovoljna sa rešenjem. Četvrti uslov implicira da, ako su svi učesnici potpuno nezadovoljni rešenjem, tada je i grupa potpuno nezadovoljna rešenjem. Ovi uslovi nisu u velikoj meri restriktivni i dozvoljavaju puno različitih interpretacija za funkciju F. Stvarni izbor za F biće odraz zajedničkog grupnog imperativa. To jest, grupa se mora unapred usaglasiti sa mehanizmom koji će upravljati skupljanjem individualnih preferencija, to se zove zajednički imperativ. U grupnom odlučivanju ipak postoji podrazumevanje ili primarni zajednički imperativ za koji ne treba dogovor učesnika, jer je prirodno nametnut autonomijom svakog učesnika. Usled agentove autonomije on ne mora da učestvuje ako se ne slaže sa odlukom grupe. Prema tome, ključna odlika primarnog zajedničkog imperativa je da bilo koji učesnik ne mora da prihvati rešenje koje ne voli.

Formalni izraz primarnog zajedničkog imperativa je da učestvujući agent može odbiti bilo koje rešenje koje ne voli. Ovaj tip imperativa može se implementirati koristeći Min tip operatora agregacije $A(x) = Min_i[A_i(x)]$. Pod ovim imperativom ako postoji agent i tako da $A_i(x) = 0$ tada $A(x)=0$, odnosno bilo koji agent može jednoručno odbiti rešenje. Ovo neophodno implicira da svi agenti moraju da prihvate rešenje. Obično se može naći primarni zajednički imperativ koristeći t-normni operator agregacije T, odnosno $A(x)=T_i[A_i(x)]$ i tu je ispunjen uslov da ako postoji agent i tako da $A_i(x)=0$ tada je $A(x)=0$. Osim toga, kao što je ranije napomenuto, t-norma je simetrični, monotoni, asocijativni operator sa neutralnim elementom jedan.

Dok t-norme omogućavaju agregaciju sa ovim primarnim karakteristikama, možda neće omogućiti željenu raznolikost koja se traži u grupi operatora agregacije. Neka je data bilo koja t-norma

$$T(A_1(x),A_2(x),...,A_n(x),A_{n+1}(x)) \leq T(A_1(x),A_2(x),...,A_n(x)).$$

Implikacija ovog je da jedina mogućnost koju imaju novi učesnici koji se dodaju u proces grupnog odlučivanja je da smanje podršku alternativi, nikad ne mogu podržati alternativu. Prema tome npr. ako dva agenta pripišu niske rezultate alternativama $A_1(x)=0.2$ i $A_2(x)=0.25$ tada, ako se iskoristi proizvod t-norme $A(x)=0.05$, zaključuje se da su se ova dva rezultata međusobno pojačala kako bi još više odbili alternativu. S druge strane, ako dva agenta jako podržavaju alternativu $A_1(x)=0.9$ i $A_2(x)=0.95$, tada ne postoji t-norma koja omogućava da se ova dva rezultata međusobno podržavaju.

Ispada da t-norma nije jedina operacija agregacije koja ispunjava osnovne karakteristike za dobijanje zajedničkog imperativa. Druga klasa operatora agregacije koja omogućava primarne odlike su uninormni operatori. Ovi operatori dodatno omogućavaju udruživanje drugih odlika, kao što je pojačavanje podrške i slabljenje podrške [12].

4.3 Primena uninormnih operatora agregacije

Uninormni operatori definicija (3.42) omogućavaju ujedinjenje i generalizaciju t-normnih i t-konormnih operatora. Za t-normu T neutralni elemenat je jedan a za t-konormu S neutralni elemenat je nula. Ako se želi naglasiti neutralni elemenat u vezi sa uninormom R tada se uninorma označava sa R_g, gde je g neutralni elemenat i $g \in (0,1)$. Prema tome, R_1 je t-norma, dok je R_0 t-konorma.

Ako su A_j kolekcije od n fazi podskupova X, može se koristiti uninorma bazirana na agregaciji ovih fazi podskupova kao $A=Uni(A_1,...,A_n)$ tako da je za svako $x \in X$

$$A(x)=R(A_1(x),A_2(x),...A_n(x))$$

gde je R uninormni operator.

Razmatra se t-normni operator T koji je takođe R_1. Kako je $T(a,1)=a$ tada monotonost implicira da je $T(a,b) \leq a$. Ovo implicira da je za bilo koju t-normu T, $T(a,b) \leq Min(a,b)$, što govori da se norma agregacije nikad ne povećava, to jest $T(a,a_{n+1}) \leq a$.

Druga povezana osobina t-norme je *nula fiksacija* (eng. zero fixation). Ona govori da pojavljivanje nule u bilo kom argumentu uvek rezultira u agregatornoj vrednosti nule, ako postoji $a_j=0$, tada je $T(a_1,a_2,...,a_n)=0$. Ova osobina proističe iz činjenice da je $T(a,1)=a$, stoga je $T(0,1)=0$ i zatim monotonost implicira $T(0,x)=0$ pošto $x \in [0,1]$. Konačno asocijativnost pokazuje nula fiksaciju.

Sada se razmatra t-konorma $S(R_0)$. Kako je $S(a,0)=a$ monotonost implicira da je $S(a,b) \geq a$, iz ovoga sledi da je za bilo koju t-konormu S, $S(a,b) \geq Max(a,b)$. Ova situacija implicira da t-konormna agregacija ne može biti opadajuća.

$$S(a_1,...,a_n) \leq S(a_1,...,a_n,a_{n+1}), \text{ što znači da važi } S(a,a_{n+1}) \geq a.$$

Druga osobina je *jedan fiksacija* (eng. one fixation), tj. ako se pojavi jedinica $a_j=1$ tada je $S(a_1,...,a_n)=1$. Sada će se razmatrati fiksacija za uninorme. Napomenuto je da t-norma, R_1 ima nula fiksaciju, dok t-konorma R_0 ima jedan fiksaciju.

Teorema 4.1.[12] Pretpostavka je da je R uninorma i neka je $g \in (0,1)$, tada $R(0,1) \in \{0,1\}$.
Dokaz. Neka je R uninorma sa neutralnim elementom g i neka je $R(0,1)=a$

a)Uzima se slučaj kada je $a \leq g$. Iz asocijativnosti $R(0,0,1)= R(0,R(0,1))= R(R(0,0),1)$. Kako je $R(0,0)=0$ tako je $R(0,0,1)= R(R(0,0),1)= R(0,1)=a$. Međutim, takođe je $R(0,0,1) = R(0,R(0,1))= R(0,a)$. Kako je $R(0,g)=0$ i kako je pretpostavljeno $a \leq g$ sledi $R(0,0,1) =R(0,a)=0$ ovo implicira da je $a=0$.

b) Neka je sada $a \geq g$. Iz asocijativnosti sledi $R(1,1,0)= R(R(1,1),0)= R(1,R(1,0))$. Kako je $R(1,1)=1$ tada $R(1,1,0)= R(R(1,1),0)=R(1,0)=a$. Međutim, važi da je $R(1,1,0)= R(1,R(1,0))= R(1,a)$. Kako je $R(1,g)=1$ i pretpostavka je $a \geq g$ tada $R(1,1,0)= R(1,a)=1$ ovo implicira da je $a=1$.

■

Implikacija ove teoreme je da su sve uninorme $R(1,0)=1$ ili $R(0,1)=0$, ako je $R(0,1)> g$ mora biti 1, ako $R(0,1) <g$ onda je 0 i ako je $R(0,1) =g$ može biti 0 ili 1. Tako se mogu podeliti uninorme u dve klase, one za koje je $R(1,0)=0$ i one za koje je $R(1,0)=1$. Može se primetiti da

postoje dve mogućnosti samo za $g \in (0,1)$. Za $g=1$ u pitanju je t-norma i $R(1,0)=0$. Za $g=0$ je t-konormu , $R(1,0)=1$. Konačno postoje dve klase uninormi $R(0,1)=1$ i $R(0,1)=0$. U slučaju kada je $R(0,1)=1$, monotonost implicira da je $R(a,1)=1$ za sve a iz čega sledi jedan fiksacija, $R(a_1,a_2,...,a_n)= 1$ ako postoji $a_j=1$. Sa druge strane ako $R(0,1)=0$, tada monotonost implicira $R(0,a)=0$ za sve a i u pitanju je nula fiksacija. Ove dve klase se nazivaju nula i jedan fiksacija uninorme. Nula fiksacije mogu imati bilo koji neutralni elemenat osim nule a jedan fiksacija bilo koji neutralni elemenat osim jedinice.

Napomena 4.2.[12] Može se posmatrati zanimljiva veza između uninormnih operatora i srednje vrednosti. Neka je M operator srednje vrednosti, zna se da je ako $a_{n+1} \geq M(a_1,...,a_n)$ tada je $M(a_1,...,a_n,a_{n+1}) \geq M(a_1,...,a_n)$, a ako je $a_{n+1} \leq M(a_1,...,a_n)$ tada je $M(a_1,...,a_n,a_{n+1}) \leq M(a_1,...,a_n)$.

Može se uočiti da dodatni argumenti imaju jasan efekat na agregacioni proces u zavisnosti od odnosa sa graničnom tačkom, postojećom vrednošću agregacije. Ako je vrednost dodatnog argumenta veća ili jednaka od postojeće vrednosti onda ima pozitivan efekat i negativan ako vrednost nije veća od postojeće vrednosti. Takođe, može se primetiti da u slučaju uninorme dodatni argumenti imaju efekat na agregaciju u zavisnosti od odnosa sa neutralnim elementom. Međutim, postoji razlika između ova dva tipa operatora. Kod uninorme agent zna da će ako obezbedi rezultat veći od neutralnog on povećavati podršku alternativi. Sa operatorima srednje vrednosti agent ne zna kako utiče na alternativu, jer to zavisi i od drugih agenata.

4.4 Grupna odlučivanja pomoću uninormi

Ako su $A_1,...,A_n$ kolekcija fazi podskupova sa odgovarajućim funkcijama korisnosti učestvujućih agenata tada je funkcija moguće grupne odluke $A(x)= R(A_1(x),A_2(x),...,A_n(x))$ gde je R uninorma. Dajući svakom učestvujućem agentu mogućnost da poništi bilo koju alternativu, mora da važi $R(0,a)=0$ za bilo koje a. Ovo znači da se R bira iz klase nula fiksiranih uninormnih operatora, koja je definisana sa $R(0,1)=0$ [12].

Važna karakteristika uninorme je izbor neutralnog elementa g. Kako je $R(a_1,a_2,...,a_n,g)=R(a_1,a_2,...,a_n)$, uočava se da se procena $A_j(x)=g$ može videti kao neutralnost ili ravnodušnost sa poštovanjem prema alternativi. Osim toga, dodeljivanjem vrednosti g učesnik govori " neka drugi odluče na ovom, ja niti pojačavam niti umanjujem „. Elemenat g se gleda kao granica, rezultati iznad g su podrška dok ispod g nisu. Uninormni operatori su idealni za grupna odlučivanja jer se u odnosu na neutralni elemenat može videti da li agenti imaju jaku podršku, jako odbijanje ili slabu podršku prema alternativi.

U grupnom odlučivanju svaki učesnik obezbeđuje funkciju preferencije A_i . Ove funkcije se zatim skupljaju kako bi se dobila funkcija preferencije grupe $A(x)=R(A_1(x),...,A_n(x))$. Zatim se bira alternativa koja maksimizira ovu funkciju $A(x^*)=Max_x[A(x)]$. Međutim, pravi cilj svakog od učesnika je maksimizacija individualnog stepena zadovoljstva. Kako bi ostvario taj cilj individualni agent može koristiti bilo kakva dostupna sredstva koja utiču na mehanizam grupne odluke.

Jedna od mogućnosti koje učesnik ima za uticanje na grupno odlučivanje je manipulacija funkcije preferencije koja se obezbeđuje u procesu grupnog odlučivanja. Sa ovakvom situacijom jedna poželjna odlika bilo kakvog grupnog odlučivanja je obeshrabrivanje potencijalnih olakšica iz manipulacija raznih informacija o preferencijama.

Razmatra se situacija u kojoj postoje n agenata i alternative $X=\{x_1,...,x_q\}$. Bez smanjenja opštosti uzima se agent jedan sa funkcijom preferencije A_1. Neka je x_1 najpoželjnija alternativa, $A_1(x_1)=1$. Njegov cilj je da pokuša da se uveri da nijedna alternativa osim x_1 nije izabrana.Sa ovom situacijom se vidi kako agent može najbolje da se uveri u ovo. Umesto da obezbedi grupi stvarnu funkciju preferencije A_1, on može obezbediti grupi stategijski manipulisanu funkciju preferencije $\acute{\AA}_1$, gde je $\acute{\AA}_1(x_1)=1$ i $\acute{\AA}_1(x_j)=0$ za sve $x_j \neq x_1$. Koristeći ovo dobija se grupna funkcija preferencije

$$A(x)=R(\acute{\AA}_1(x),A_2(x),\dots A_n(x)).$$

Kako uninorma koja izvršava agregaciju ima nula fiksaciju i kako informacija koju obezbeđuje ovaj agent ima $\acute{\AA}_1(x_j)=0$ za $x_j \neq x_1$, dobija se $A(x_j)=0$ za sve $x_j \neq x_1$. Ovo uverava agenta jedan da nijedna alternativa nema bolji rezultat od najpoželjnije. Šta više, ako $R[A_2(x_1),...,A_n(x_1)] \neq 0$, tada će x_1 biti jasan grupni izbor. Sa druge strane ako $R[A_2(x_1),...,A_n(x_1)]=0$ i sve alternative imaju $A(x)=0$ [12].

Može se primetiti da bilo koji agent može imati koristi od strategijske manipulacije sopstvenih funkcija preferencije. Ova sposobnost je rezultat želje da se zadovolje prvobitne karakteristike dajući agentu sposobnost da poništi bilo koju alternativu. Koristeći ovu strategiju od strane bilo koja dva agenta koji nemaju istu najbolju alternativu, dolazi se do situacije gde je grupna funkcija preferencije skup nula, $A(x)=0$ za x. Što brzo dovodi ovaj tip odlučivanja do beskorisnosti. Zato se mora modifikovati grupna funkcija preferencije kako bi se poništili podsticaji za strategijskom manipulacijom individualnih funkcija korisnosti. To se radi tako što se svakom agentu dodeli ocena važnosti i koristi umanjenje važnosti kako bi se kaznila strategijska manipulacija.

4.5 Važnosti u uninormnim agregacijama

Razmatra se situacija u kojoj postoji kolekcija argumenata koji se sastoje od parova (w_i,a_i) gde je a_i vrednost za koju će se vršiti agregacija, a $w_i \in [0,1]$ dodata važnost [12]. Cilj je da se izvrši uninormna agregacija parova $R((w_1,a_1),\dots,(w_n,a_n))=\bar{a}$. Jedan prilaz za ispunjenje ovog zadatka je transformacija parova (w_j,a_j) u efektivne vrednosti, $b_j=h(w_j,a_j)$ i zatim korišćenje regularne uninormne agregacije, $\bar{a}=R(b_1,\dots,b_n)$. Postavlja se pitanje koja je forma funkcije h.

Kako je $w_i \in [0,1]$, $w_i=0$ znači slučaj najmanje važnosti, dok je $w_i=1$ slučaj najveće važnosti. Kako se inkluzija važnosti može protumačiti kao proširenje situacije u kojoj se nije razmatrala važnost, može se reći da su svi argumenti jednake važnosti pre proširenja. Za originalan slučaj gde su $w_j=1$ za sve j. Sa ciljem da ovo da odgovor dobijen bez razmatranja važnosti mora biti ispunjeno

$$R((1,a_1),(1,a_2),(1,a_n))=R(a_1,\ldots,a_n)$$

što zahteva da

$$h(1,a)=a.$$

U slučaju kada postoji nula važnost $w_i=0$, osnovni uslov je da bilo koji argument koji ima nula važnost ne treba da doprinese agregaciji. Ovo se ispunjava kada je $h(0,a)=g$, gde je g neutralni elemenat uninorme. Drugi uslov je da funkcija bude monotona sa osvrtom na vrednost a. Ako su a i $\hat{a}$ dva argumenta gde je $a \geq \hat{a}$ tada je i $h(w,a) \geq h(w,\hat{a})$. Treća osbina je da h(w,a) mora biti ograničena za w=0 i w=1 što se piše $h(w,a) \in [g \wedge a,\ g \vee a]$.Četvrti uslov je konzistencija koja govori kako se vrednost pomera od w=0 do w=1 funkcija h(w,a) se menja na konzistentan monoton način. Neka su w i $\tilde{w}$ takvi da $\tilde{w}>w$ tada

ako $h(1,a)>h(0,a)$ $(a>g)$ tada za sve $\tilde{w}>w$ važi $h(\tilde{w},a) \geq h(w,a)$

ako $h(1,a)<h(0,a)$ $(a<g)$ tada za sve $\tilde{w}>w$ važi $h(\tilde{w},a) \leq h(w,a)$

ako $h(1,a)=h(0,a)$ $(a=g)$ tada za sve $\tilde{w}>w$ važi $h(\tilde{w},a)=h(w,a)$.

Ovo pokazuje da ako a>g tada je $\frac{\partial h(w,a)}{\partial w} \geq 0$, ako a<g tada je $\frac{\partial h(w,a)}{\partial w} \leq 0$ i ako a=g tada je $\frac{\partial h(w,a)}{\partial w}=0$.

Za slučaj t-konormi klasa važnosti operatora transformacije koja zadovoljava ova četiri uslova je $h(w,a)=T(w,a)$ gde je T t-norma. Zadovoljeni su svi uslovi:

1.$T(1,a)=a$
2.$T(0,a)=0$
3.$T(w,a) \geq T(w,\hat{a})$ ako $a \geq \hat{a}$.

Ako je na primer g=0 , što implicira a>g, usled četvrtog uslova za $\tilde{w}>w$ treba da važi $h(\tilde{w},a) \geq h(w,a)$ što je zadovoljeno monotonošću t-norme.

Primer 4.3.[12] Operator važnosti transformacije koji je validan za sve g je $h_g(w,a)=wa+\overline{w}g$, gde je $\overline{w}=1-w$. Ako je w=1, $h_g(1,a)=a+0g=a$, ali kada je w=0 ($\overline{w}=1$) $h_g(0,a)=0a+1g=g$. Neka je a

$\geq \hat{a}$, tada važi $h_g(w,a)= wa+\bar{w}g \geq h_g(w,\hat{a})$. Dalje se vidi da $\frac{\partial}{\partial w} h_g(w,a) = a - g$. Prema tome, ako $a>g$ to je nenegativno,a ako $g > a$ nepozitivno, što zadovoljava uslov konzistencije.

4.6 Primena ponderisanih važnosti

Sada se razmatra modifikacija procedure koja se koristi za agregaciju individualnih funkcija preferencije [12]. Koristiće se individualne funkcije preferencije kao i određeni mehanizam koji će se izboriti sa opisanom strategijskom manipulacijom. U prethodnom grupna funkcija preferencije se predviđala kao

$$A(x)=R(A_1(x),A_2(x),...,A_n(x))$$

gde je R uninorma. Sada se predlaže dodavanje svakom Aj važnosni dodatak, tako da je sada $A(x)=R((w_1,A_1(x)),(w_2,A_2(x)),...,(w_n,A_n(x)))$. Takođe se više pridaje pažnja izdavanju pridruživanja ponderisane važnosti w_i svakom agentu. Neka je $v_i=\sum_{x\in X} A_i(x)$ suma ukupnih ocena vezanih sa agentom. Kako je svaki fazi podskup po pretpostavci normalan $1\leq v_i \leq q$, gde je q broj alternativa. Uzima se da je $u_i = v_i - 1$, znači $u_i \geq 0$. Zatim se svakom agentu pridružuje ocena važnosti

$$w_i = \frac{u_i}{max_j[u_j]} .$$

Agentova važnost je direktno povezana sa ukupnom ocenom satisfakcije koja se deli. Agent koji se lakše zadovoljva je važniji, "srećni" agenti su važniji. Sa druge strane agent koji potpuno opovrgava sve alternative osim sopstvene, ima važnosnu težinu nula. Može se primetiti da se koristeći ovaj tip ponderisane važnosti kažnjavanje uvodi na osnovu ukupnog rezultata agenta.

Razmatra se kako ponderisana važnost agregacije funkcioniše kako bi se kaznila strategijska manipulacija. Koristeći ponderisane važnosti, grupna funkcija preferencije postaje $A(x)=R_g((w_1,A_1(x)),(w_2,A_2(x)),...,(w_n,A_n(x)))$. Ovde je R_g uninorma sa neutralnim elementom g, w_j je važnost agenta j i $A_j(x)$ satisfakcija koju agent pripisuje alternativi x. Neka h_g ukazuje na važnosnu funkciju transformacije i tako je ispunjeno

$$A(x)=R_g(h_g(w_1,A_1(x)),h_g(w_2,A_2(x)),...,h_g(w_n,A_n(x))).$$

Bez umanjenja opštosti može se pretpostaviti da agent 1 pokušava da manipuliše situacijom tako što obezbeđuje funkciju preferencije $\hat{A}_1$ gde je $\hat{A}_1(x_1)=1$ i $\hat{A}(x_j)=0$ za sve $x_j \neq x_1$. Tada je $v_1=1$ i $u_1=0$ i njegova važnost je nula. Prema tome za svako x, $h_g(w_i,\hat{A}_1(x))=h_g(0,A_1(x))=g$ i stoga agent jedan nema uloge u agregaciji zato što je g neutralni elemenat uninorme.

Efekat inkluzije bilo koje ponderisane važnosti bazirane na agentovoj podršci alternativama može se videti kao modifikacija fundamentalnog zajedničkog imperativa grupe. Sa uvođenjem ponderisane važnosti određene sa agentovim ukupnim rezultatom, agregativni imperativ postaje malo kompleksniji. Zadržava se agentova sposobnost da eliminiše alternative koje ne voli samo ne može da eliminiše puno alternativa. Ovo omogućava agentu da efektivno podstakne funkciju preferencije " Ne želim alternativu x_j" ali ne i da podstakne funkciju preferencije tipa " Samo želim alternativu x_j".

Primer 4.4.[12] Sada se razmatra uninorma R sa neutralnim elementom g i koristi transformacija važnosti $h(w,a)=wa+\overline{w}g$, gde je $\overline{w}= 1- w$. Tako se dobija

$$A(x_i)=R_g[(w_1A_1(x_i)+\overline{w}_1g),...,(w_nA_n(x_i)+\overline{w}_ng)].$$

Ako se uzme da je E_j fazi podskup takav da je $E_j(x_i)=w_jA_j(x_i)+\overline{w}_jg$, tada se vidi da

$$A(x_i)=R_g[E_1(x_i),E_2(x_i),...,E_n(x_i)].$$

Neka E_j bude "efektivna funkcija preferencije agenta j". Prvo se gleda slučaj kada učestvujući agent ima funkciju preferencije "Ne želim x_1". U ovom slučaju $A_j(x_1)=0$ i $A_j(x_k)=1$ za sve $k\neq 1$. Suma agentovih rezultata će biti velika, $v_j=q-1$. Može se pretpostaviti da je $v_j\approx Max_i[v_i]$, zato je $w_j\approx 1$ i stoga $E_j(x_i) \approx A_j(x_i)$. Prema tome j ta efektivna funkcija preferencije će biti blizu obezbeđene funkcije preferencije.

Sada se razmatra slučaj gde agent ima funkciju preferencije " Sve što želim je x_1".Ovde je $A_j(x_1)=1$ i $A_j(x_k)=0$ za $k\neq 1$. Takođe je $v_j=1$ i $u_j=0$ i prema tome $w_j=0$ i stoga $E_j(x_i)=w_jA_j(x_i)+\overline{w}_jg=g$. U ovom slučaju agentova funkcija preferencije ostaje bez efekta u procesu grupnog odlučivanja. Sa ovim modifikacijama obezbeđuje se odbrana od strategijskih manipulacija.

4.7 Alternativni metod odlučivanja

U prethodnom je opisana upotreba ponderisanih važnosti kako bi se smanjila agentova sposobnost da jednostrano determiniše grupnu odluku odbijanjem puno alternativa. Sposobnost se smanjuje kažnjavanjem agenta zbog odbijanja.

Predlaže se drugi način izračunavanja agentove važnosti koji omogućava kažnjavanje zbog odbijanja puno alternativa. Može se primetiti da ova metoda dopušta više lingvističku interpretaciju [5]. U ovom slučaju se naglašava dozvoljen broj alternativa koje agent može da odbije bez značajnije kazne. Zato se koristi izraz "*pri najvećem k* ili *nekoliko*". Formalno se izražava ova informacija u obliku fazi podskupa. Ovi fazi podskupovi su nad prostorom broja altenativa ili intervala. Neka je $N=\{0,1,...q\}$ gde je q broj alternativa. Informacija se izražava kao fazi podskup $Q:N\rightarrow[0,1]$ tako da je za bilo koje $y \in N$, $Q(y)$ pokazuje prihvatljivost za odbijanje y alternativa. Na primer ako je n=7 i postoje najviše tri alternative koje mogu biti odbijene od strane agenta, tada je Q takvo da

$$Q(y)=1 \text{ za } y\leq 3$$
$$Q(y)=0 \text{ za } y>3.$$

Fazi podskupovi koji reprezentuju ovakav tip informacije imaju osobine:

1. $Q(0)=1$
2. $Q(N)=0$
3. $Q(k_1)\geq Q(k_2)$ ako $k_1<k_2$.

Takođe, mogu se reprezentovati informacije pomoću članova fazi podskupova $\hat{Q}$ gde je $\hat{Q}$:[0,1]→[0,1]. U ovom slučaju za bilo koje y ∈ [0,1], $\hat{Q}(y)$ pokazuje ocenu do koje je agentu dozvoljeno da odbije y proporcionalno alternativama. U ovom slučaju $\hat{Q}$ zadovoljava iste uslove kao i Q:

1. $\hat{Q}(0)=1$
2. $\hat{Q}(1)=0$
3. $\hat{Q}(y_1)\geq\hat{Q}(y_2)$ ako $y_1<y_2$.

Kada postoji opis dostupnih odbijanja agenta koristi se OWA operator kako bi se izračunale ponderisane važnosti agenta. Razmatra se agent A_m i neka je $A_m(x_i)$ satisfakcija agenta sa alternativom x_i. Neka b_k označava k-tu najveću od ovih vrednosti. Takođe, B je vektor čije su komponente b_k. Ponderisana važnost m tog učesnika se izračunava pomoću OWA agregacije

$$w_m=OWA[A_m(x_1),...,A_m(x_n)]=\sum_{k=1}^{n} d_k b_k.$$

Osim toga, d_k su OWA važnosti, takvi da $d_k \in [0,1]$ i $\sum_k d_k=1$. Ovi d_k su dobijeni od informacija koje specificiraju dopustiv broj odbijanja na sledeći način. Ako je Q definisan kao fazi podskup od N, tada se definiše

$$d_k=Q(n-k)-Q(n-(k-1))$$

i ako je $\widehat{Q}$ definisano kao proporcija tada je

$$d_k=\widehat{Q}(1-\frac{k}{n})-\widehat{Q}(1-\frac{k-1}{n}).$$

Primer 4.5.[5] Pretpostavka je da postoji sedam alternativa i da je agentu dozvoljeno da odbije najviše tri. U ovom slučaju je Q(y)=1 za y=0,1,2,3 i Q(y)=0 za y=4,5,6,7. Sada važi $d_k=Q(7-k)-Q(7-k+1)$, stoga:

$d_1=Q(7-1)-Q(7)=0$, $d_2=Q(7-2)-Q(7-1)=0$, $d_3=Q(7-3)-Q(7-2)=0$, $d_4=Q(7-4)-Q(7-3)=1$, $d_5=d_6=d_7=0$.

U ovom slučaju OWA agregacija dovodi do ponderisane važnosti $w_m=b_4$, četvrta najveća od ocena u A_m. Još treba proveriti da li je izbor b_4 podesan. Ako četvrti najveći rezultat dodat od strane ovog agenta nije odbijanje, b_4 ima veliku vrednost. Kako je $b_k \geq b_4$ za $k < 4$ svi rezultati iznad nisu odbijeni što zadovoljava uslov da se ne odbija više od tri alternative. Ako je b_4 odbijen tada je za $k > 4$, $b_k \leq b_4$ odbijeno više od 3 alternative, što znači da je agent prekršio ograničenje.

Kada postoji slučaj da agent može da odbije najviše q alternativa od n dostupnih dobija se OWA vektor takav da $d_{n-q}=1$, a ostale komponente jednake nuli. U ovom slučaju ponderisana važnost agenta je vrednost $n-q$ –te najveće vrednosti obezbeđene od tog agenta.

Koristeći ponderisane važnosti može se modelovati agregacioni proces sa zajedničkim imperativom u formi “ Svaki agent može odbiti alternativu koju ne želi ali ih ne može odbiti previše”. Ovde se može modelovati “ ne previše” kao fazi podskup jediničnog intervala.

5. Zaključak

U prvom delu su navedene važne osobine agregacionih funkcija i definisani su operatori agregacije. Nisu sve osobine podjedanko važne i samo se određene funkcije agregacije mogu koristiti u procesu grupnog odlučivanja. Zatim su prikazani elementarni primeri operatora agregacije od kojih su neki dobro poznati. Takođe, kod određenih operatora su uvedene ponderisane važnosti i takvi operatori imaju primenu u procesu grupnog odlučivanja. Posle definisanja trougaonih normi, trougaonih konormi, uninormi i nula normi uočeno je da su uninorme najbolje za proces agregacije upravo usled činjenice da im je neutralni elemenat u intervalu (0,1). Osim toga, trougaone norme i trougaone konorme imaju osobine nula fiksacije i jedan fiksacije, respektivno, koje onemogućavaju pojačavanje podrške ili smanjivanje podrške alternativama. Osim uninormi u proces grupnog odlučivanja moguće je uključiti i OWA operatore agregacije koji dopuštaju više lingvističko grupno odlučivanje. Fazi skupovi su definisani usled korišćenja u grupnim odlučivanjima u obliku funkcije preferencije učestvujućih agenata. Pokazana je važnost zajedničkog imperativa koji koristi grupa u odlučivanju forme agregacione funkcije. Dolazeći iz učesnikove autonomije, agent ne mora da prihvati odluku grupe koju ne voli. Odnosno, osobina navedenog tipa grupnog odlučivanja je mogućnost agenta da jednostrano odbije bilo koju alternativu dajući joj mali rezultat u funkciji preferencije. Primećeno je da se ova osobina može iskoristiti radi strategijskog manipulisanja učesnika. Zatim su prikazani mehanizmi modifikacije agregacije radi odbrane od strategijskih manipulacija. Mehanizam je uključivao pridruživanje ponderisanih važnosti svakom učesniku na takav način da smanjuje agentovu važnost ako je umešan u stategijsku manipulaciju. Da bi se to uspešno uradilo bilo je potrebno koristiti uređenu prosečnu ponderisanu funkciju-OWA operator, kao i funkciju Q ili definisati modifikovane funkcije preferencije agenata.

LITERATURA

1. Gleb Beliakov; Ana Pradera; Tomasa Calvo; (Springer Publishing Company, 2008): *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*
2. Tomasa Calvo, Gaspar Mayor, Radko Mesiar; (Physica-Verlag, Heidelberg, 2002): *Aggregation Operators: New Trends and Applications*
3. Marcin Detyniecki; (http://www.cs.berkeley.edu/~marcin/agop.pdf.): *Fundamentals on Aggregation Operators*
4. Mishel Grabich; Jean-Luc Marishal; Radtko Mesiar and Endre Pap; (Cambridge University Press 2009): *Aggregation functions*
5. Janusz Kacprzyk; (Fuzzy Sets and Systems, 1986, 18(2):105–118): *Group decision making with a fuzzy linguistic majority*
6. Erich Peter Klement; Radko Mesiar; Endre Pap; (Kluwer academic publichers, 2000): *Triangular norms*
7. Erich Peter Klement; Radko Mesiar; Endre Pap; (International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 04(02), 1996): *On the relationship of associative compensatory operators to triangular norms and conorms*
8. Jose M. Merigo; (httpgandalf.fcee.urv.essigefenglishcongressoscongres15045Merigo.pdf) : *Decision making with distance measures OWA operator and weighted averages.*
9. Endre Pap; (Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-Matematički Fakultet, 1999): *Fazi mere i njihova primena*
10. Tetsuzo Tanino; (Fuzzy Sets and Systems, 1984, 12(2):117–131): *Fuzzy preference orderings in group decision making*
11. Ronald R. Yager; (Physica-Verlag, 2002): *Aggregation Operators*

12. Ronald R. Yager; (European Journal of Operational Research , 2002, 141(1): 217-232): *Defending against strategic manipulation in uninorm-based multi-agent decision making*
13. Ronald R. Yager; Alexander Rybalov; (Fuzzy Sets and Systems 1996, 80(1):111–120): *Uninorm aggregation operators*

BIOGRAFIJA

Boris Sabo je rođen 6.3.1988. godine u Sremskoj Mitrovici. Osnovnu školu "Veljko Dugošević" i gimnaziju "Stevan Puzić", prirodno-matematički smer, završava sa odličnim uspesima u Rumi. Zainteresovan za matematičke primene u ekonomiji upisuje 2007.godine matematiku finansijana departmanu za matematiku-informatiku u Novom Sadu. Oktobra 2011.odbranio je završni rad i stekao zvanje diplomirani matematičar.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNE DOKUMENTACIJSKE INFORMACIJE

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani material
TZ

Vrsta rada: Završni rad
VR

Autor: Boris Sabo
AU

Mentor: dr Ivana Štajner-Papuga
MN

Naslov rada: Operacije agregacije i primena u grupnom odlučivanju
NR

Jezik publikacije: Srpski(latinica)
JP

Jezik izvoda: Srpski/Engleski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2013
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 3
MA

Fizički opis rada: 5 poglavlja/ 60 strana/ 1 tabela/ 2 slike/ 13 referenci
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Teorija odlučivanja
ND

Ključne reči: Funkcije agregacije, operatori agregacije, trougaone norme, trougaone uninorme, grupno odlučivanje
KR

UDK:

Čuva se: Biblioteka departmana za matematiku i informatiku, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Izvod: Jedna od mnogih primena matematike je i u metodi grupnog odlučivanja. U mnogim korporacijama, preduzećima, skupštinama postoje grupna odlučivanja. U takvom okruženju veoma je važno doneti odluku koja će odgovarati najvećem broju učesnika. Da bi se došlo do takve odluke potrebno je izvršiti agregaciju, odnosno sjedinjavanje preferencija učesnika kako bi se dobila grupna preferencija. Grupna preferencija će biti najbolja odluka tj. ona koja najviše odgovara učesnicima.

U prvom delu rada su definisane funkcije agregacije, dok se drugi deo bavi njihovom primenom. Funkcije agregacije vrše sjedinjavanje funkcija preferencija učesnika kako bi se dobila grupna funkcija preferencije.

Trougaone norme i konorme, kao i njima bliske uninorme ispunjavaju navedene osobine i zato su pogodne da budu funkcije agregacije. To su funkcije $F:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ sa osobinama komutativnosti, asocijativnosti, monotonosti i postojanjem neutralnog elementa. Razlika između trougaonih normi, trougaonih konormi i uninormi je u neutralnom elementu koji je kod trougaonih normi 1, trougaonih konormi 0 i uninormi pripada intervalu (0,1).

Primenom funkcija agregacije dobija se alternativa koja optimizira funkciju preferencije grupe.U grupnom odlučivanju postoji dodatni uslov da svaki učesnik može odbiti alternativu koja mu ne odgovara, tj. $F(0,A_1(x),\ldots,A_n(x))=0$ gde su $A_i(x)\neq 0$. Taj uslov može dovesti do određenih manipulacija u grupnom odlučivanju, s obzirom da učesnik želi da maksimizira sopstvenu funkciju preferencije, a ne nephodno i grupnu funkciju preferencije. Da bi se odbranili od manipulacija učesnicima se dodeljuju ponderisane važnosti. Učesnici koji odbacuju sve alternative osim jedne imaće važnost 0 i neće biti uključeni u mehanizam grupnog odlučivanja. Takođe, učesnici koji odbiju previše alternativa imaće malu važnost, dok će učesnici koji su naklonjeni većem broju alternativa imati i veću važnost u grupnom odlučivanju.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:11.6.2013.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
Mentor: dr Ivana Štajner-Papuga, vanredni profesor PMF u Novom Sadu
Predsednik: dr Arpad Takači, redovni profesor PMF u Novom Sadu
Član: dr Mirjana Štrboja, docent PMF u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type

Type of record: Printed text
TR

Contents code: Specialized paper

Author: Boris Sabo
AU

Mentor: Ivana Štajner-Papuga, PhD
MN

Title: Aggregation operations in group decision making for bloking strategic manipulation
TI

Language of text: Serbian (latin)
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2013
PY

Publ. place: University of Novi Sad, Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradivića 3
PP

Physical description: 5 chapters/ 60 pages/ 1 table/ 2 figures/ 13 references
PD

Scientist field: Mathematics
SF

Scientistic discipline: Theory of decision
SD

Key words: Group decision, aggregation operators, triangular norms, triangular uninorms, group decision
KW

UC:
Holding data: Library, Department of Mathematics and Informatics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: One of the many applications of mathematics is in the method of group decision-making. In many corporations, businesses, councils exist group

decision-making. In such an environment it is important to decide which decision will suit the majority of participants. In order to reach such a decision it is necessary to make aggregation and fusion of preferences of the participants to obtain group preference. Group preference will be the best decision that is, the one that best suits the participants.

The first section defines the aggregation function, while the second part deals with their application. Aggregation functions perform functions incorporating preferences of the participants to get a group function preference.
Triangular norms and conorms, and close to them uninorms meet these characteristics and therefore are suited to be the aggregation functions. These are functions F: $[0,1]^2 \to [0,1]$ with the properties of commutativity, associativity, monotonicity and the existence of a neutral element. The difference between triangular norms, triangular conorms and uninorms is in the neutral element. Neutral element of triangular norms is 1, triangular conorms is 0 and of uninorms $\in (0,1)$.

By applying the aggregation function is obtained an alternative that optimizes the function of group preference. In group decision there is an additional requirement that each participant can reject an alternative that does not fit, that is $F(0,A_1(x),\ldots,A_n(x))=0$ where $A_i(x)\neq 0$. This condition can lead to certain manipulations of the group decision, given that the participant wants to maximize its own preference and not necessary the function of group preference. To protect themselves from manipulation of the participants are assigned weighted importance. Participants who reject all alternatives except one will have 0 importance and will not be involved in the mechanism of group decision making. Also, participants who reject too many alternatives will have little importance, while participants who favor a number of alternatives have growing importance in the group decision.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 11.6.2013.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:

Mentor: Ivana Štajner-Papuga, PhD, associate professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
President: Arpad Takači, PhD, full profesor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Mirjana Štrboja, PhD, assistant profesor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
KO