



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU



NEKE MATEMATIČKE OSOBINE FLUIDA

-MASTER RAD-

Mentor:

Prof. dr. Marko Nedeljkov

Kandidat:

Bojana Velečković

Novi Sad, 2016.

PREDGOVOR

Priroda je dobar primer savršenstva i lepote matematike. Ona nam pomoću matematičkih formula objašnjava neke od pojava koje se dešavaju u prirodi i čini ih razumljivim. Fluidi su prirodne pojave koje nas svakodnevno okružuju u svojim raznim oblicima kao što su more, dim, oblaci itd. Svaki od njih pokazuje fascinantne oblike ponašanja. Svi smo mi na neki način izgradili određeno intuitivno razumevanje ponašanja fluida, međutim još uvek postoje oblici ponašanja koje većina ljudi ne može da shvati. Zbog toga ova tema vekovima privlači velike naučnike da se bave ovim pitanjem. Nauka koja se bavi fluidima, mehanika fluida, došla je u stadijum kada je moguće na dobar način predstaviti probleme matematički. Prirodne fenomene moguće je predstaviti pomoću matematičkih modela, to je jedan zahtevan i složen izazov. Zahtevnost njihovog modeliranja proizilazi iz njihove kompleksnosti i složene dinamike koju je teško matematički opisati. Zahvaljujući razvoju kompjutera i programa uz pomoć aproksimacija može se rešiti velik broj fenomena iz prirode.

Dve stvari sa kojima sam u svakodnevnom kontaktu su me podstakle da se odlučim za ovu temu, a to su kafa (fluid) i matematika. Na prvi pogled deluje da namaju nikakvih dodirnih tačaka, međutim, kad kafu počnemo da posmatramo kao fluid, a ne samo kao sredstvo za uživanje, dolazimo do činjenice da je ona ipak povezana sa matematikom. Zato ćemo se usredsrediti u radu na dva bitna fluida u našim životima, a to su: krv koja teče našim telom i voda kao izvor života.

Zahvaljujem se mentoru, profesoru dr Marku Nedeljkovu, na pruženoj podršci, savetima i pomoći pri izradi ovog master rada, takođe se zahvaljujem profesorki dr Danijel Rajter-Ćirić i profesorki dr Milici Žigić na ukazanoj pomoći. Zahvaljujem se i svojoj porodici i prijateljima za pruženu podršku i razumevanje.

SADRŽAJ

1. UVOD.....	3
2. MEHANIKA FLUIDA.....	5
2.1. FLUID	5
2.2. FIZIČKA SVOJSTVA FLUIDA	6
2.2.1. <i>Gustina</i>	6
2.2.2. <i>Pritisak</i>	7
2.2.3. <i>Stišljivost</i>	7
2.2.4. <i>Viskoznost</i>	8
2.3. IDEALAN I REALAN FLUID	9
2.4. KRETANJE FLUIDA	9
3. PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE (PDJ)	12
3.1. KLASIFIKACIJA PDJ DRUGOG REDA	13
3.2. KLASIČNE JEDNAČINE MATEMATIČKE FIZIKE	14
3.3. <i>L_p</i> , PROSTORI SOBOLEVA I POJAM SLABOG REŠENJA	16
4. JEDNAČINE FLUIDNOG KRETANJA	19
5. PROTICANJE TEČNOSTI KROZ CILINDRIČNE CEVI KRUŽNOG PRESEKA.....	30
5.1. VODOVODNI SISTEM	31
5.2. KARDIOVASKULARNI SISTEM	33
5.3. LAMINARNO PROTICANJE TEČNOSTI (VODA I KRV)	34
6. MODELI PROTICANJA.....	41
6.1. MODELIRANJE ŠIRENJA OLOVA U VODI ZA PIĆE	41
6.1.1. <i>Model difuzije</i>	41
6.1.2. <i>Model protoka u cevi</i>	48
6.2. MODELIRANJE PROTOKA KRVI KROZ ARTERIJE.....	51
7. ZAKLJUČAK.....	64
LITRATURA	66
BIOGRAFIJA	68

KLJUČNA DOKUMENTACIJA	69
KEY WORD DOCUMENTATION.....	73

1. UVOD

U toku studija upoznali smo se sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama (PDJ) na istoimenom kursu, gde su nam predstavljene neke poznate jednačine. Ove jednačine imaju veliku primenu u različitim naukama. Velik broj ovih jednačina još uvek nije rešen, a neke se čak ni ne mogu rešiti, može se dokazati samo da rešenje postoji. Zahvaljujući razvoju tehnologije i matematičkom modelovanju problema, nalaze se dobre aproksimacije rešenja za iste. Tako ću u daljem radu iskoristi znanja koja sam stekla iz navedenih oblasti, a dok budem obrađivala temu upoznaću se fascinantnim pojmom fluida, njegovim osobinama, kretanjem.

Cilj ovog master rada je da u sličnim uslovima upoređujemo rešenja jednačina kretanja fluida uz različite pretpostavke o modelima, i to upoređivaćemo kao što je spomenuto već fluide koji nas svakodnevno okružuju: voda i krv. Upoređivaćemo njihovo viskozno, odnosno neviskozno kretanje stišljivih i nestišljivih fluida i daćemo primere za iste. Kako se spomenuti fluidi kreću kroz velike i na neki način slične sisteme, predstavimo modele koji opisuju kretanje vode i krvi kroz cev (u slučaju krvi kroz arteriju).

U prvom delu rada smo dali neke osnovne podatke vezane za mehaniku fluida, kao što su fizička svojstva i kretanje fluida koji su nam veoma bitni pri modelovanju. Upoznali smo se sa obe vrste kretanja fluida, turbulentnim i laminarnim, i nagovestili da ćemo se fokusirati na laminarno kretanje zbog jednostavnosti pri rešavanju. Zatim smo se osvrnuli na parcijalne diferencijalne jednačine kao matematičke modele za rešavanje mnogih fizičkih pojava. Preko linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda se formulišu osnovni zakoni u prirodnim naukama, zbog toga smo ih definisali u radu.

U drugom delu rada su predstavljene osnovne jednačine fluidnog kretanja u zavisnosti od toga da li se fluid posmatra kao stišljiv ili nestišljiv i viskozan ili bezviskozan. Dali smo primer plitke vode kada se posmatra fluid koji je nestišljiv i neviskozan, a gasne dinamike kada se posmatra fluid koji je stišljiv i neviskozan.

U trećem delu opisali smo proticanje tečnosti (voda i krv) kroz cilindrične cevi, gde smo prvo opisali vodovodni sistem, a zatim i kardiovaskularni sistem. Oba sistema su komplikovana, funkcionišu po sličnom principu. Dalje smo definisali protok tečnosti, uveli jednačine pomoću kojih se dobijaju proračuni za proticanje tečnosti kroz cilindrične cevi i dali za iste primere. Na kraju smo predstavili model širenja olova u vodi za piće kroz nepropusnu čvrstu cilindričnu cev, kao i model protoka krvi kroz velike sistemske arterije. Izabrali smo

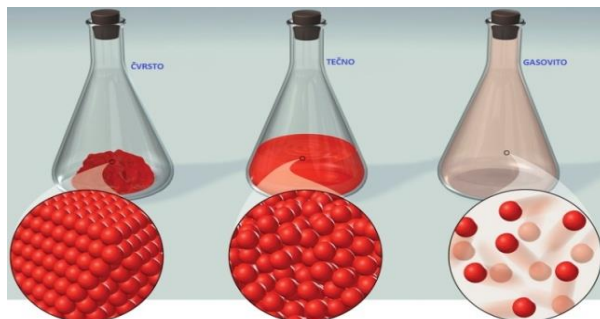
velike sistemske arterije jer se kretanje krvi kroz njih predstavlja Njutnovskim modelom. Dok smo model širenja olova u vodi za piće uzeli da posmatramo zbog njegove problematike na Evropskom nivou. Oba modela su veoma bitna u razvoju ljudske vrste i svakodnevna su problematika.

2. MEHANIKA FLUIDA

Mehanika fluida je deo mehanike koji izučava mirovanje i kretanje tečnosti i gasova. Početak razvoja ove nauke javlja se još u praistoriji, vezan je za Arhimedov zapis "O telima koja plivaju" koji potiče iz trećeg veka pre nove ere. Ovo je jedna kompleksna nauka koja nam je približila neke fascinantne oblike ponašanja iz prirode kao što su na primer: turbulencija aviona, virovi u rekama, kretanje čamca u reci, vrtlozi vetra i mnoge druge prirodne pojave. Zanimanja za ovu nauku pokazale su značajne istorijske ličnosti kao što je spomenuti Arhimed (250 p.n.e), Galilej i Leonardo da Vinči (XVI vek), Njutn (XVII vek), Ojler i Bernuli (XVIII vek) i mnogi drugi. U prirodnim i drugim naukama mehanika fluida igra veoma važnu ulogu, zbog toga i postoji veliko interesovanje za ovu nauku. Deo mehanike fluida koji se bavi kretanjem tečnosti naziva se dinamika fluida koju ćemo u ovom radu i izučavati. Pod uticajem sile fluidi se kreću, prema njihovom kretanju možemo razlikovati dva strujna režima: laminarni i turbulentni.

2.1. Fluid

Poznato je da se supstance u prirodi nalaze u jednom od tri agregatna stanja: čvrstom, tečnom i gasovitom. Osnovna razlika između čvrstih supstanci i fluida je u tome što se pod dejstvom spoljašnjih sila čvrste supstance deformišu do neke tačke, a fluid se deformiše sve dok na njega deluje spoljašnja sila. Kao što smo rekli fluidi se lako deformišu, pa čak i pri delovanju vrlo male spoljašnje sile i nikada se ne vraćaju u prvobitan oblik. Čvrste supstance pri dejstvu spoljašnje sile ne menjaju svoj oblik i zapreminu, tečnosti zadržavaju svoju zapreminu, dok gasovi menjaju i oblik i zapreminu u odnosu na posudu u kojoj se nalaze. Ovakvo ponašanje javlja se zbog unutrašnjih sila koje deluju na molekule, kao što se može videti na slici 1.



Slika 1

Kod čvrstih supstanci međumolekularne sile privlačnosti su veoma jake pa pruzrokuju stalnost kontaktnog okruženja, iz tog razloga ove supstance ne menjaju svoju zapreminu i oblik. Međumolekularne sile kod tečnosti su znatno manje nego kod čvrstih supstanci, pa ove sile ne sprečavaju da se molekuli neprekidno kreću kroz masu tečnosti, ali uslovljavaju da se nalaze u kontaktnom okruženju u odnosu jedni na druge. Iz tog razloga tečnosti ne menjaju zapreminu, ali menjaju oblik. Negativan intenzitet koji deluje na molekule kod gasova, dovodi do promenljive zapremine i oblika.

Karakteristično svojstvo tečnosti i gasova, koje ih odvaja od čvrstih supstanci, je lakoća sa kojom se mogu deformisati pod dejstvom vrlo malih spoljašnjih sila. Fluid je termin pod kojim se podrazumeva zajednički naziv za tečnosti i gasove, a taj zajednički naziv ukazuje na zajednička svojstva, ne isključujući njihove razlike.

2.2. Fizička svojstva fluida

Sva fizička svojstva se mogu vezati ili za konačnu količinu fluida ili za jednu tačku unutar fluida. Fizička svojstva fluida pogodno je podeliti u tri grupe[11]:

- Mehanička (gustina (ρ), pritisak (p));
- Termička (temperatura (t, T), unutrašnja energija (u), entalpija (S), specifična toplota (C));
- Uzrokovana (viskoznost (μ, ν), stišljivost (s, ϵ), površinski napon (γ), napon pare (p_k), toplotno širenje (θ), kavitacija (k)).

Definisaćemo samo najvažnija svojstva fluida koja ćemo koristiti u radu.

2.2.1. Gustina

Gustina je najznačajnije fizičko svojstvo fluida. Definiše se kao masa po jedinici zapremine, njena jedinica je kg/m^3 . Formula za srednju gustinu je

$$\rho = m/V, \quad (2.1)$$

gde je m masa, a V zapremina. Ako je gustina fluida $\rho = const$, fluid je homogen. Fluid je homogen kad ne dolazi do mešanja dva različita fluida u sudu. Onaj koji ima manju gustinu zauzimaće gornju polovinu, dok će onaj sa većom gustinom zauzimati donju polovinu suda i njihova granica je jasna. Ovo se najbolje može videti uz pomoć dva svakodnevna sastojka voda

i jestivo ulje. U posudu prvo sipamo vodu zatim polako i ulje, ulje će ostati da pliva na površini zato što je njegova gustina manja od gustine vode. Međutim, ako gustina nije konstantna onda je fluid nehomogen i dolazi do njihovog mešanja.

2.2.2. Pritisak

Pritisak je skalar, označava se malim slovom p i ima dimenziju Paskal¹. Postoje dve vrste pritiska: unutrašnji i spoljašnji pritisak. Unutrašnji pritisak u okviru elementarnih zapremina u posmatranoj izvedenoj fluidnoj zapremini se poništavaju. Spoljašnji pritisak predstavlja dejstvo spoljašnjih sila. Spoljašnje sile mogu biti zapreminske i površinske. Zapreminske sile deluju na sve tačke supstance i srazmerne su masi u svakoj tački (zemljina teža). Površinske sile deluju na tačke spoljašnje površine supstance i nezavisne su od mase (pritisak vetra na reku).

2.2.3. Stišljivost

Kao najznačajniju razliku između tečnosti i gasova možemo navesti stišljivost. Pojam stišljivosti vezuje se za promenu gustine. Stišljivost je sposobnost fluida da menja zapreminu pri promeni temperature i pritiska. Sve supstance su u izvesnoj meri stišljive, jer određena mera pritiska i temperature uvek dovodi do promene zapremine. Ovo svojstvo fluida iskazuje se koeficijentom stišljivosti, koji je definisan na sledeći način:

$$s = -\frac{dV}{V} \cdot \frac{1}{dP}, \quad (2.2)$$

gde znak minus u jednačini ukazuje na to da se zapremina smanjuje pri povećanju pritiska. Recipročna vrednost koeficijenta stišljivosti naziva se modul stišljivosti

$$\varepsilon = \frac{1}{s}. \quad (2.3)$$

Stišljivost vode je neznatna i zato je praktično moguće zanemariti je. Ako na vodu u posudi deluje sila velikog intenziteta, ona će promeniti svoj oblik, ali ne i zapreminu. Dok će gas promeniti svoj oblik i zapreminu čak i pri prelasku iz manje u veću posudu, odnosno ispuniće

¹ Jedinica je nazvana po Blezu Paskalu. Ekvavilentan je jednom Njutnu po kvadratnom metru. ($P_a = N/m^2$)

celu posudu iako je znatno veća. Stišljivost se ne sme zanemariti kada se proučava stišljivost kod kojih brzina dostiže brzinu zvuka. Tečnosti su fluid koji nikada ne bi uspeli da dostignu datu brzinu, zato se i posmatraju kao nestišljiv što nije slučaj i sa gasovima.

2.2.4. Viskoznost

Viskoznost je svojstvo koje se javlja pri kretanju fluida, pokazujući otpor pri relativnom klizanju svojih molekula. Unutrašnje trenje, odnosno viskoznost, posledica je delovanja dva mehanizma. Prvi mehanizam je privlačnost međumolekularnih sila, drugi mehanizam je rezultat stalnog haotičnog kretanja molekula unutar fluida. Kod međumolekularne sile privlačnosti, što su molekuli međusobno bliži, veće su sile između njih pa je veća i viskoznost. Molekuli iz sloja koji se kreće brže bivaju usporeni od strane molekula iz sloja koji se kreću sporije usled delovanja međumolekularnih sila, i obrnuto. Kod drugog mehanizma usled haotičnog kretanja, molekuli iz bržeg sloja prelaze u sporiji sloj i sa sobom ponesu i veću brzinu. Kada se molekuli iz ova dva sloja sudare dolazi do razmene količine kretanja, odnosno do ubrzanja sporijeg molekula. Isti proces se dešava kada molekuli iz sporijeg sloja pređu u brži, sporiji molekul će pri sudaranju sa bržim usporiti ga. Proces razmene količine energije se događa i kod tečnosti i kod gasova, njegov intenzitet ne zavisi od pritiska, već od pokretljivosti molekula, odnosno temperature fluida. Kišne kapljice se lepe za okno od prozora, i ako na njih deluje sila Zemljine težine koja ih povlači ka zemlji. U dodirnoj površini kapljice i stakla vlada sila atezije koja je u stanju da zaustavi kapljice. Čvrsta površina koči kretanje kapljice, sa površine se kočenje prenosi na unutrašnje kretanje, jer postoji unutrašnja sila među njima (kohezija). U zavisnosti od vrste fluida koju posmatramo primetićemo da je viskoznost kod različitih vrsta fluida u velikoj meri različita. Ovo se lako može videti u sledećem primeru: Ako pokušamo da sipamo vodu iz flaše u čašu to ćemo uraditi relativno lako jer će ona prosto lagano da se prelije iz flaše u kojoj se nalazi. Dok ukoliko budemo želeli da sipamo glicerin iz boce u neku posudu, moraćemo da pritismo bocu u kojoj se nalazi. Razlog ovakvom ponašanju ove dve različite tečnosti je upravo njihova viskoznost. Unutrašnje trenje kod glicerina je znatno veće nego kod vode i zato na glicerin moramo da delujemo znatno većom silom. Temperatura jako utiče na viskoznost i njenim porastom viskoznost tečnosti opada, a viskoznost gasova se povećava. U tečnostima se povećanjem temperature smanjuje sila kohezije među molekulima (koje su kod tečnosti uzajamno bliže nego kod gasova), tako da se time smanjuje i viskoznost. Kod gasova kako se povećava temperatura, povećava se i brzina Brownovog kretanje molekula gasa, pa se povećava i verovatnoća uzajamnog sudaranja molekula, čime se povećava i viskoznost. Viskoznost fluida se povećava povećanjem pritiska.

2.3. Idealan i realan fluid

Kada se fluid kreće među njegovim česticama i slojevima se javlja unutrašnje trenje uzrokovano međumolekularnim silama. Ako je unutrašnje trenje zanemarljivo, kažemo da je fluid idealan. Iz ovoga zaključujemo da je idealan fluid bezviskozan. Zakoni izvedeni za strujanje idealnog fluida mogu se u velikom broju slučajeva uz određene promene primeniti i na realne fluide. Pretpostavka kod idealnih fluida je da su nestišljivi, što je dobra pretpostavka za tečnosti, a vredi i za gasove pri manjim brzinama kretanja. Tok idealnog fluida je slojevit, pa imamo laminarno, a ne turbulentno kretanje. Stanje stacionarnog strujanja je stanje u kojem se idealni fluidi nalaze ako se u nekoj tački prostora brzine čestica ne menjaju tokom vremena. Kod realnog fluida uvek postoji unutrašnje trenje, koje je posledica međumolekularnih sila privlačnosti. Za njega postoji ograničen broj tačno rešenih problema. Jedan isti fluid pod različitim uslovima može da bude i realan i idealan. Na primer, brzo kretanje kompresivnog gasa kroz cev ima odlike realnog fluida, dok pod drugim uslovima kretanja kao što je sporo isticanje razređenog gasa može biti idealan.

2.4. Kretanje fluida

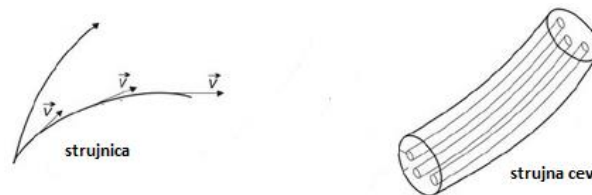
Tečnosti i gasovi imaju zajedničku osobinu koja se ogleda u velikoj pokretljivosti njihovih čestica u odnosu na čvrsta tela. Kada proučavamo kretanje fluida potrebno je da posmatramo velik broj veličina u zapremini koju zauzima neki fluid, koje se menjaju tokom vremena, to je veoma složen proces. Zbog ove složenosti proučavanje se pojednostavljuje na nekoliko načina. Idealizacijom fluida olakšavamo da se matematički na jednostavniji način opiše kretanje fluida. Istorijski posmatrano postoje dva osnovna pristupa opisivanja kretanja fluida u prostoru i vremenu:

- Ojlerov pristup – posmatra promene veličina tokom vremena u nekoj tački prostora koju zauzima fluid.
- Lagranžov pristup – prati se promena koja se događa jednom molekulu kroz vreme. Naravno jedan molekul nije dovoljan za proučavanje kretanja, pa je potrebno posmatrati više njih, što otežava dodatno problem. Ovaj metod se često naziva supstancijalni metod.

Ojlerov pristup je manje detaljan, zbog toga se i više primenjuje, mada se u nekim specijalnim slučajevima koristi i Lagranžov pristup.

Ako pretpostavimo da se parametri fluida u nekoj tački fluidnog prostora ne menjaju tokom vremena omogućićemo jednostavnije matematičko opisivanje. U tom slučaju imaćemo ustaljeno ili stacionarno strujanje. Međutim, ako se posmatrane veličine menjaju tokom vremena kretanje je neustaljeno (nestacionarno). Nestacionarnost nam donosi dosta problema pri rešavanju.

Kretanje fluida se opisuje pomoću njegovih čestica. Važan pojam u analizi kretanja fluida predstavlja pojam strujne linije ili strujnice. Strujnice su zamišljene linije duž kojih se kreću čestice fluida. Uvode se kao krive linije kod kojih je tangenta u svakoj tački fluida kolinearna sa vektorom brzine. Ako povučemo odgovarajuće strujne linije kroz svaku tačku neke uočene zatvorene konture dobićemo strujnu cev. Ona obuhvata mlaz fluida koji se u posmatranom trenutku kreće kroz oblast ograničenu omotačem ove cevi, kao što se vidi na slici 2.



Slika 2.

U zavisnosti od uslova strujanja i brzine, fluidne čestice se mogu kretati po glatkoj putanji, bez mešanja i presecanja svoje putanje sa putanjom drugih čestica, ili može haotično da preplicе svoju putanju sa putanjama drugih čestica, da formira vrtloge i talase. Prema putanji strujnica razlikujemo laminarno i turbulentno kretanje. Kretanje kod koga su strujnice glatke i neprekidne zove se laminarno kretanje. Karakteriše ga slojevito kretanje fluidnih čestica bez prelaženja fluidnih čestica iz sloja u sloj, odnosno bez mešanja čestica iz različitih slojeva. Što znači da sve čestice u istom sloju fluida imaju istu brzinu tj. svi slojevi fluida kreću se paralelno. Ovo kretanje je povezano sa malim brzinama, viskoznost je dovoljno jaka da zadrži čestice na svojoj putanji i da ne dozvoli da dođe do mešanja čestica iz različitih slojeva. Kada brzina poraste, slojevi počinju polako da se mešaju i strujanje postaje turbulentno. Kod turbulentnog kretanja strujnice nisu prave i imaju prekide. Za pojavu turbulencije u fluidu mogu da budu odgovorna dva uzroka. Turbulentno kretanje može da bude uzrokovano nekom preprekom koja se nalazi na putu fluida, a drugi uzrok može da bude prevelika brzina kretanja fluida za date uslove. Zbog intenzivnog mešanja čestica sporije čestice koče brže, a brže

ubrzavaju sporije pa dolazi do njihovog preplitanja i mešanja, što dovodi do turbulencije. U prirodi laminarno kretanje se retko javlja. Turbulentno kretanje se mnogo češće javlja u našoj okolini, možemo ga videti u rekama, kanalima, kada duva vetar i tako dalje. Postojanje ova dva strujna režima dokazao je Osborne Reynolds (Rejnolds). Njegov veliki doprinos bio je to što je utvrdio kriterijum pri kome dolazi do prelaska iz laminarnog u turbulentno kretanje. Zapazio je da promena režima kretanja zavisi od vrste fluida, odnosno njegove viskoznosti, od brzine kretanja fluida i prečnika cevi kroz koju se fluid kreće. Taj kriterijum kasnije je nazvan po njemu Rejnoldsov broj, koji je bezdimenzionalan. Rejnoldsov broj je definisan na sledeći način:

$$R_e = \frac{vd}{\mu}, \quad (2.4)$$

gde je v – brzina fluida, d - prečnik cevi, a μ - viskoznost. U uobičajenim uslovima kad se ne poklanja prevelika pažnja eksperimentu, prelazak iz laminarnog u turbulentno kretanje dešava se između $R_e = 2000 - 4000$. Vrednost $R_e = 2300$ često se upotrebljava kao granica između laminarnog i turbulentnog kretanja kroz okrugle cevi. Između ova dva režima kretanja fluida nalazi se prelazni režim. On sadrži elemente i jednog i drugog kretanja. U radu ćemo se fokusirati na laminarno kretanje fluida zbog matematičke rešivosti.

3. PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE (PDJ)

Parcijalne diferencijalne jednačine predstavljaju važnu matematičku disciplinu zbog njene mnogobrojne primene, a skraćeno se označavaju kao PDJ. One su matematički modeli mnogih fizičkih pojava. Zbog njihove veoma složene strukture, pri rešavanju neophodno ih je uprostiti. Njihovo proučavanje datira još iz 18. veka u radu Euler, d’Alambert, Lagrange i Laplace kao centralnog sredstva pri opisivanju problema u mehanici[1].

Kako bi mogli da definišemo PDJ, prvo ćemo morati da uvedemo obeležja za izvode.

Neka je $u: S \rightarrow R, S \subset R^n, S$ je otvoren i $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ standardna baza prostora R^n . Parcijalni izvod funkcije u po promenljivoj x_i u tački x definišemo pomoću

$$\frac{\partial u}{\partial x_i(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} \quad (3.1)$$

Parcijalne izvode možemo označavati i na sledeći način: $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i(x)}, u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \dots$

Red parcijalnog izvoda odgovara broju indeksa na funkciji u .

U radu ćemo često koristiti Laplasijan funkcije u koji je definisan kao $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$.

Definicija 3.1. *Parcijalna diferencijalna jednačinu reda $k > 0$ je jednačina koja zavisi od nepoznatih funkcija $u(x)$ i njenih parcijalnih izvoda tako da je najviši red parcijalnog izvoda u jednačini jednak k .*

Opšta PDJ je jednačina oblika

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0 \quad (3.2)$$

gde je F data funkcija. Ona ne mora da sadrži sve nezavisne promenljive $x_1, \dots, x_n$, nepoznatu funkciju i sve parcijalne izvode.

Rešenje PDJ (3.2) je funkcija iz nekog dopustivog skupa koja ovu jednačinu identički zadovoljava. Nije uvek moguće pronaći rešenje.

Postoje sledeći oblici PDJ: linearni, semi-linearni, kvazi-linearni i nelinearni oblik. Osnovni zakoni u prirodnim naukama se formulišu preko linearnih PDJ drugog reda.

3.1. Klasifikacija PDJ drugog reda

Linearna homogena PDJ drugog reda je jednačina oblika:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + bu = 0. \quad (3.3)$$

Pretpostavićemo da je $n = 2$, odnosno nepoznata funkcija je $u = u(x_1, x_2)$. Pa opšti oblik jednačine (3.3) je jednačina linearna samo po drugim izvodima:

$$\sum_{i,j=1}^{n(=2)} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b = 0, \quad (3.4)$$

gde su koeficijenti b i a_{ij} definisani: $b = b(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2})$, $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2)$.

Klasifikacija: U oblasti S , u kojoj su koeficijenti b i a_{ij} definisani, uočimo neku tačku $N(x_1, x_2)$

za koju su ispunjeni sledeći uslovi:

I. jednačina (3.4) je hiperboličnog tipa u oblasti S , ako je diskriminanta

$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, tj. $a_{12}^2 > a_{11}a_{22}$. Kanonski oblik ove jednačine je:

$$u_{x_1 x_1} - u_{x_2 x_2} = d(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}). \quad (3.5)$$

II. jednačina (3.4) je paraboličnog tipa u oblasti S , ako je diskriminanta

$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$. Kanonski oblik ove jednačine je:

$$u_{x_1 x_1} = d(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}). \quad (3.6)$$

III. jednačina (3.4) je eliptičnog tipa u oblasti S , ako je diskriminanta

$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, $a_{12}^2 < a_{11}a_{22}$. Kanonski oblik ove jednačine je:

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = d(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}). \quad (3.7)$$

3.2. Klasične jednačine matematičke fizike

Tri osnovna tipa linearnih PDJ drugog reda za koje postoji eksplicitno rešenje.

1. Talasna jednačina

PDJ hiperboličkog tipa se primenjuju na matematičke modele različitih oscilatornih procesa. Talasna jednačina ima oblik:

$$u_{tt} = c^2 \Delta u + f(x_1, \dots, x_n, t), \quad (3.8)$$

gde je parameter $c > 0, x \in S, S \subseteq R^n, S$ je otvoren skup, $u: S \times [0, \infty) \rightarrow R$ je nepoznata. Kada je $f = 0$ tada je funkcija homogena, u suprotnom je nehomogena.

Talasna jednačina za $(n = 3)$ opisuje proces prostiranja zvuka ili proces prostiranja elektromagnetnih talasa.

Dalamberova formula ($n = 1$) Ako je $\varphi \in C^2(R), \psi \in C^1(R)$ tada rešenje Košijevog problema za homogenu talasnu jednačinu

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (3.9)$$

postoji, jedinstveno je i izraženo *Dalamberovom formulom*

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy. \quad (3.10)$$

Kirhofova formula ($n = 3$) Ako je $\varphi \in C^2(R^3), \psi \in C^1(R^3)$ tada rešenje Košijevog problema za homogenu talasnu jednačinu

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (3.11)$$

posle određenih transformacija dato je *Kirhofovom formulom* ($c=1$)

$$u(x, t) = \int_{\partial B(x,t)} t \psi(y) + \varphi(y) + \varphi_y(y) * (y - x) dS(y), \quad (3.12)$$

gde $B(x, t)$ predstavlja loptu sa centrom u x i poluprečnikom $t > 0$.

Poasonova formula ($n = 2$) Ako je $\varphi \in C^2(R^2), \psi \in C^1(R^2)$ tada rešenje Košijevog problema za homogenu talasnu jednačinu

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (3.13)$$

za ($c = 1$), uz korišćenje predhodno definisane Kirhofove formule, dato Poasonovom formulom

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(x, t)} \frac{t\varphi(y) + t^2\psi(y) + t\varphi_y(y)(y-x)}{(t^2 + |y-x|^2)^{1/2}} dy. \quad (3.14)$$

2. Toplotna jednačina

PDJ parabolichnog tipa primenjuju se u matematičkim modelima koji opisuju procese termodinamike, difuzne procese kretanja gasova i viskoznih tečnosti. Toplotna jednačina ima oblik:

$$u_t = c^2 \Delta u + f(x_1, \dots, x_n, t) \quad (3.15)$$

gde je parameter $c > 0, x \in S, S \subseteq R^n, S$ je otvoren skup, $u: S \rightarrow R$ je nepoznata. Kada je $f = 0$ tada je funkcija homogena, u suprotnom je nehomogena.

U slučaju kada je toplotna jednačin homogena i $c = 1$ rešenje početnog problema

$$u_t = \Delta u, u(x, 0) = \varphi(x), \quad (3.16)$$

gde je φ data funkcija ($C^{2,1}$ označava da je funkcija klase C^2 po x i C^1 po t), je dato sa

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int_{R^n} \varphi(s) e^{-\frac{|s-x|^2}{4t}} ds, x \in R^n, t > 0. \quad (3.17)$$

3. Laplasova jednačina

PDJ eliptičnog tipa služe za opisivanje stacionarnih pojava, primenjuju se kod stacionarnog provođenja toplote, potencijalnog elektrostatičkog polja i td. Najjednostavnija jednačina eliptičnog tipa je Laplasova jednačina koja ima sledeći oblik:

$$\Delta u = 0 \quad (3.18)$$

i sa njom povezana Poasonova jednačina:

$$-\Delta u = f(x_1, \dots, x_n) \quad (3.19)$$

pri čemu $x \in S$, $S \subseteq R^n$, S je otvoren skup, $u: S \rightarrow R$ je nepoznata.

3.3. L^p , Prostori Soboljeva i pojam slabog rešenja

L^p prostori

Prvo ćemo sa Ω označiti otvoren podskup od R^n . Pored ovog, potrebno je da uvedemo još nekoliko pojmova. Ako $S \subset R^n$ sa $\bar{S}$ označićemo zatvaranje skupa S u R^n . Ukoliko važi $\bar{S} \subset R^n$ i $\bar{S}$ je ograničen podskup skupa R^n tada ćemo pisati $S \subset\subset R^n$. Prostor $C^m(\Omega)$, $m \in N_0$ je skup funkcija koje su definisane na skupu Ω , koje imaju neprekidne sve izvode zaključno sa redom m . Sa $C(\Omega)$ označavamo prostor neprekidnih funkcija, dok sa $C^\infty(\Omega)$ označavamo prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija.

Nosač neprekidne funkcije $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se definiše kao zatvaranje (adherencija) skupa $\{x \in \Omega: f(x) \neq 0\}$ u skupu Ω . Označavamo ga sa $\text{supp } f$.

Podskup $C_0^m(\Omega)$ skupa $C^m(\Omega)$ je skup funkcija čiji su nosači kompaktni u Ω . tj.

$$C_0^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega): \text{supp } f \subset\subset \Omega\}.$$

Funkcija u definisana skoro svuda na Ω je lokalno integrabilna na Ω ako $u \in L^p(\Omega)$, za svaki merljiv skup $A \subset\subset \Omega$. Zapisujemo $u \in L_{loc}^1(\Omega)$.

Sa $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$ označavamo prostor merljivih kompleksnih funkcija u definisanih na Ω za koje važi

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty. \quad (3.20)$$

$L^p(\Omega)$ je vektorski prostor, pa se uvodi norma na sledeći način:

$$\|u\|^p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (3.21)$$

$L^p(\Omega)$ za $1 \leq p \leq \infty$ je Banahov prostor, a za $p = 2$, odnosno, $L^2(\Omega)$ prostor je Hilbertov.

Prostor Soboljeva

Definicija 3.3.1 Neka je m nenegativan ceo broj, a $1 \leq p \leq \infty$. Tada se prostor

$$H^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ za } 0 \leq \alpha \leq m\},$$

naziva prostor Soboljeva, gde je

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (3.22)$$

i α predstavlja multi-index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. $H^{m,p}(\Omega)$ je vektorski prostor nad poljem C . Uvodimo normu za dati prostor:

$$\|u\|_{p,m,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, \text{ za } 1 \leq p < \infty, \quad (3.23)$$

$$\|u\|_{m,\infty} := \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty.$$

$H_0^{m,p}(\Omega)$ je zatvaranje prostora $C_0^\infty(\Omega)$ u $H^{m,p}(\Omega)$ u odnosu na normu (3.23). Jasno, $H^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

$H^{m,p}(\Omega)$ je Banahov prostor za $1 \leq p \leq \infty, m \in N_0$, a za $p = 2$ $H^{m,2}(\Omega)$ upitanju je Hilbertov prostor. Takođe važi i za $H_0^{m,p}(\Omega)$ je Banahov prostor, a $H_0^{m,2}(\Omega)$ je Hilbertov prostor.

Pojam slabog izvoda

Pojam slabog rešenja definiše se tako da što je više moguće odgovara fizičkom modelu koji jednačina opisuje, ne postoji njegova jedinstvena definicija.

Kažemo da je problem PDJ dobro definisan ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

1. problem ima rešenje
2. jedinstvenost rešenja
3. stabilnost rešenja (svaka mala promena dovodi do male promene u jedinstvenosti rešenja).

PDJ k -tog reda ima klasično rešenje ako je ono najmanje k puta neprekidno diferencijabilno. Rešiti PDJ u klasičnom smislu znači zapisati klasično rešenje jednačine

tako da ono zadovoljava predhodno navedena tri uslova ili bar pokazati da rešenje postoji. U mnogim slučajevima neophodno je odustati od traženja glatkog rešenja, ali je zato poželjno da problem bude dobro definisan. Kod problema za koje ne važi klasično rešenje ako su dobro definisani tražićemo slabo rešenje. Ako posmatramo prostor Soboljeva klasično rešenje ćemo nazivati jakim rešenjem.

4. JEDNAČINE FLUIDNOG KRETANJA

Da bi uveli jednačine fluidnog kretanja neophodno je da prvo definišemo osnovne zakone dinamike fluida: jednačinu kontinuiteta, Drugi Njutnov zakon i zakon održanja energije. One će nam pomoći u boljem razumevanju jednačina fluidnog kretanja, pri njihovom matematičkom uvođenju. Matematičko modeliranje fizičkih zakona sprovodi se pomoću parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Jednačina kontinuiteta (zakon očuvanja mase)

Posmatramo česticu čija je masa Δm . Promena brzine kretanja čestice ne utiče na promenu njene mase, pa dolazimo do zaključka da se masa čestice Δm tokom vremena ne menja, odakle sledi

$$\frac{d}{dt} \Delta m = 0 \quad (4.1)$$

Kako masu čestice možemo da izrazimo preko gustine i zapremine

$$\Delta m = \rho \Delta V, \quad (4.2)$$

jednačina (4.1) se može napisati u sledećem obliku

$$\Delta V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d\Delta V}{dt} = 0, \quad (4.3)$$

gde se i ρ i ΔV menjaju tokom vremena. Možemo zapisati i u sledećem obliku:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (4.4)$$

Poslednja jednačina (4.4) predstavlja zakon održanja mase u diferencijalnom obliku, poznat kao jednačina kontinuiteta.

Uobičajeni oblik ove jednačine polazi od činjenice da je ρ funkcija nezavisno promenljivih (x, y, z, t) . Pa jednačina kontinuiteta dobija oblik:

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0, \quad (4.5)$$

ili u tenzorskom obliku

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (4.6)$$

Jednačina kontinuiteta može biti zapisana i u integralnom obliku. Integralićemo predhodnu jednačinu (4.5). Posmatraćemo W kao fiksnu podoblast oblasti D , jednačina ima sledeći oblik:

$$\int_W \left(\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right) dW = 0. \quad (4.7)$$

U koliko je fluid nestišljiv, onda je $\rho = \text{const}$, pa jednačina kontinuiteta ima oblik

$$\text{div} \vec{v} = 0. \quad (4.8)$$

Drugi Njutnov zakon (zakon sile)

Drugi Njutnov zakon opisuje činjenicu da je promena kretanja moguća jedino pod dejstvom sile (zapreminskih i površinskih) i povezuje silu koja deluje na telo sa njegovom masom. Sila je srazmerna proizvodu mase tela i njegovog ubrzanja.

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k}, i = 1, 2, 3, \quad (4.9)$$

gde su p_{ki} elementi tenzora, ova jednačina naziva se osnovna jednačina dinamike neprekidne sredine. Predstavlja PDJ kretanja čestice sredine u kojoj su nezavisno promenljive (x, y, z, t) . Sama jednačina nam pokazuje da ubrzanje čestice potiče od zapreminskih i površinskih sila, gde površinske sile izazivaju ubrzanje samo u slučaju ako se tenzor napona menja od tačke do tačke.

Zakon očuvanja energije

Ukupna energija čestice sastoji se od zbira njene kinetičke i unutrašnje energije. Čestica termodinamičkog sistema interakcijom sa okolnim česticama menja svoju ukupnu energiju. Jednačina unutrašnje energije u tenzorskom obliku:

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{\rho} p_{ki} \dot{\epsilon}_{ki} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \quad (4.10)$$

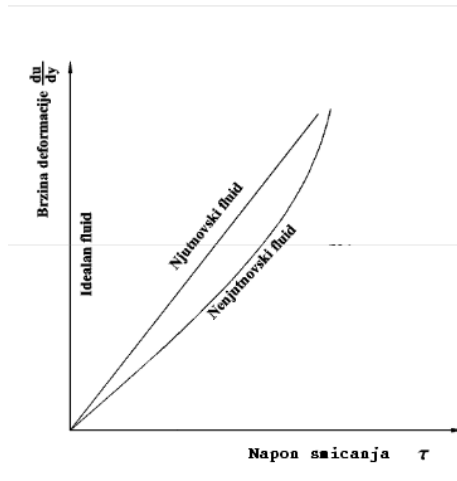
gde $\frac{1}{\rho} p_{ki} \dot{\epsilon}_{ki}$ predstavlja gustinu efekta unutrašnjih površinskih sila pri deformaciji čestice, a $\frac{\partial q_i}{\partial x_i}$ brzina razmene toplote čestice sa okolinom.

Kao što je već spomenuto u radu ćemo se fokusirati na laminarno kretanje fluida. Napomenuli smo ranije da je najznačajnija razlika između tečnosti i gasova stišljivost, kao i da je viskoznost svojstvo koje se javlja isključivo pri kretanju fluida. Stoga će nam ova dva fizička svojstva takođe biti potrebna pri uvođenju jednačina fluidnog kretanja. Tečnosti i gasovi se mnogo razlikuju po stišljivosti. Stišljivost tečnosti je mala pa se može zanemariti, to ustvari znači da se pod dejstvom neke spoljašnje sile zapremine tečnosti ne menjaju. Dok nasuprot tome kod gasova nije moguće zanemariti je. Zaključujemo iz navedenog, da su gasovi stišljivi, a tečnosti nestišljive.

Sila viskoznog trenja se javlja u manjoj ili većoj meri pri kretanju svakog fluida. Ako je sila viskoznosti u fluidu toliko mala da se praktično može zanemariti onda se takav fluid naziva bezviskozan. Sila unutrašnjeg trenja je posledica postojanja tangentialnih napona (τ) koji dovode do klizanja čestica jednih preko drugih. Obrazac

$$\tau(y) = \mu \frac{dv}{dy}, \quad (4.11)$$

gde je $\frac{dv}{dy}$ brzina ugaone deformacije, a μ je dinamički koeficijent viskoznosti, poznat je kao Njutnov zakon viskoznosti. On važi samo za laminarno strujanje tečnosti, kao i za sve homogene tečnosti i gasove. Prema Njutnu postoji proporcionalnost između napona smicanja i brzine deformacije. Svi fluidi koji zadovoljavaju ovaj zakon zovu se njutnovski fluidi, to su na primer voda, vazduh, ulje, med...Sistemi za koje ovaj zakon ne važi su nenjutnovski fluidi. Kod njih je odnos između intenziteta napona smicanja i odgovarajuće brzine deformacije nelinearna. Kod nenjutnovskih fluida, fizičke karakteristike se menjaju praktično svake sekunde, zajedeno sa promenom sile koja na njega deluje. Na slici 3. je prikazan reološki dijagram koji pokazuje zavisnost napona smicanja od brzine deformacije. Vidi se da je njutnovski fluid predstavljen pravom linijom (linearnost), dok je nenjutnovski fluid predstavljen krivom linijom (nelinearnost). Viskoznost se gotovo njenja pri promeni pritiska. Sa povećanjem temperature gasa viskoznost raste linearno, kod tečnosti uticaj međumolekularnih sila je dominantan pa sa povećanjem temperature stepen viskoznosti opada. Step en opadanja, kod tečnosti, nije konstantan već se postepeno smanjuje.



Slika 3.

Često se u praksi koriste kinematički koeficijenti viskoznosti ν koji je jednak:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad (4.12)$$

gde ρ predstavlja gustinu. Ona predstavlja meru otpora fluida prema deformaciji smicanja. Dolazimo do zaključka, što je veća viskoznost kod fluida, on će pružati veći otpor pri proticanju.

Kako se fluidi koje ćemo posmatrati kreću u ograničenoj oblasti i u pitanju su PDJ moraju se definisati granični i početni uslovi. Velik je broj tipova granica, zahtevno bi bilo da uzmemo sve u obzir, zato ćemo razmatrati najuobičajeniji tip granice, a to je nepropusni zid. To znači, fluid ne može da protekne kroz zid.

Kada smo definisali i objasnili sve potrebne pojmove, možemo preći na definisanje jednačina fluidnog kretanja. Ojlerova i Navier-Stokesova jednačina su od velikog značaja u mehanici fluida kao bazne jednačine.

Navier-Stokesove jednačine, koje je razvio Klaud-Luis Navier i Džordž Stokes 1822. godine, su izvedene iz drugog Njutnovog zakona za kretanje fluida. To su jednačine koje se koriste za utvrđivanje vektorskog polja brzine fluida u datoj tački u prostoru i vremenu. Jedna od osnovnih pretpostavki ovog modela je da je fluid viskozni i nestišljiv, kao i da je u pitanju njutnovski fluid (fluid se ponaša po Njutnovim zakonima očuvanja mase i momenta, u nekim slučajevima potrebna je jednačina održanja energije). Složene probleme je teško rešiti pomoću ovih jednačina jer su u pitanju sistemi nelinearnih PDJ drugog reda. Međutim, ove jednačine se

moгу rešiti sa određenim pojednostavljenjima. Neki od izraza su nebitni i možemo ih zanemariti, na taj način ih pojednostavimo. Jednačina zakona očuvanja energije se često izostavlja u realnim situacijama jer dovodi do neprihvatljivih rešenja. Ovakvo pojednostavljenje donosi često pogreške na koje treba obratiti pažnju. Posebno su efikasne za jednostavna kretanja fluida.

U mnogim slučajevima može se pretpostaviti da su gustina fluida i viskoznost konstantne veličine. Za ovakav oblik kretanja fluida možemo koristiti pojednostavljenu jednačinu:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right) = \rho f - \nabla p + \mu \nabla^2 v, \quad (4.13)$$

$$\operatorname{div} v = 0,$$

gde ρ predstavlja gustinu fluida, v - brzina protoka, $\frac{\partial v}{\partial t}$ - promenljivo ubrzanje, $v \nabla v$ - konvektivno ubrzanje², f - spoljašnje sile (npr. gravitacija) koje deluju na fluid, p - pritisak, μ - koeficijent dinamičke viskoznosti.

Međutim, ako pretpostavimo da je fluid neviskozan, navedene jednačine ćemo redukovati, takve jednačine se zovu *Ojlerove*. Pretpostavka da je *fluid nestišljiv* se ne menja, pa će druga jednačina ostati ista, a prva će biti redukovana:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right) = \rho f - \nabla p, \quad (4.14)$$

$$\operatorname{div} v = 0.$$

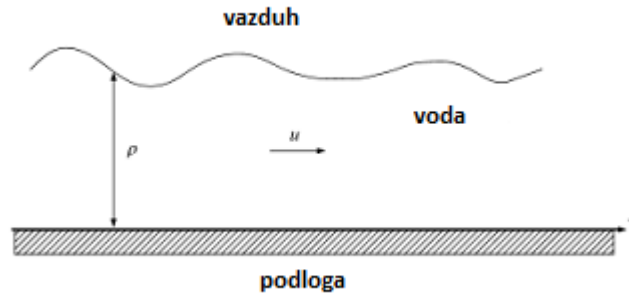
Primer 4.1. (Plitka voda)

Ovo je glavni primer za zakon očuvanja. Prvi korak je konstrukcija fizičkog modela. Definisaćemo sledeće oznake:

ρ ... visina vodostaja (dubina)

v ... brzina protoka vode

² Konvektivno ubrzanje potiče od strujanja fluida kao celine. Svaki molekul, „ubačen“ u glavni tok, kreće se u smeru gradijenta vektora brzine. Ovaj izraz objašnjava kako divergencija utiče na brzinu.



Slika 4.

Model se koristi za opis toka reke kada dubina nije toliko velika. Može se koristiti još i za poplave, protok kanala, lavine i td. Osnovna pretpostavka u ovom modelu je da je tečnost nestišljiva i homogena. Nije potrebno da je dno reke ravno, ali za ravno dno jednačina je homogena – protok je nezavisan od prostorno vremenskih koordinata. To olakšava pronalaženje globalnog rešenja.

Zakon očuvanja mase daje: $\rho_t + (\rho v)_x = 0.$ (4.15)

U cilju rešavanja gornje jednačine uvodimo novu PDJ uključujući brzinu v i drugi Njutnov zakon:

$$(mv)' = f \text{ (sila = „promena impulsa u vremenu“).} \quad (4.16)$$

Posmatramo prostor intervala $[x_1, x_2]$ tokom vremenskog perioda $[t_1, t_2]$. Tada

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t_2) v(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t_1) v(x, t_1) dx =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\rho(x_1, t) v^2(x_1, t) - \rho(x_2, t) v^2(x_2, t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} (p(x_1, t) - p(x_2, t)) dt \quad (4.17)$$

„promena impulsa u vremenu = kinetička energija + sila usled pritiska“

Skraćivanjem prostorno vremenskog intervala: $t_1, t_2 \rightarrow t, x_1, x_2 \rightarrow x$ za određeni trenutak (x, t) dobijamo PDJ:

$$(\rho v)_t + (\rho v^2)_x + p_x = 0. \quad (4.18)$$

Pritisak u gornjoj jednačini je hidraulički pritisak, dobija se (pretpostavimo da je gustina vode jednaka 1)

$$\pi(y) = g(\rho - y) \dots \text{hidraulički pritisak} \quad (4.19)$$

gde je g univerzalna gravitaciona konstanta, i

$$p = \int_0^\rho \pi(y) dy = \int_0^\rho g(\rho - y) dy = g \frac{\rho^2}{2}. \quad (4.20)$$

Zamenom ove relacije u (4.15) i (4.18) daju:

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0$$

$$(\rho v)_t + \left(\rho v^2 + g \frac{\rho^2}{2} \right)_x = 0. \quad (4.21)$$

Diferenciramo drugu jednačinu gore navedenog sistema pod pretpostavkom da imamo dovoljno dobro rešenje:

$$\rho_t v + \rho v_t + 2\rho v v_x + g\rho\rho_x = 0. \quad (4.22)$$

Zamenićemo ρ_t iz prve jednačine u modifikovanu drugu jednačinu. Nakon ovog postupka dobijamo:

$$v_t + v v_x + g\rho\rho_x = 0 \quad (4.23)$$

i na kraju sistem postaje:

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0$$

$$v_t + \left(\frac{v^2}{2} + g\rho \right)_x = 0. \quad \blacksquare \quad (4.24)$$

Ako sad pretpostavimo da je *fluid stišljiv*, prva jednačina ostaje nepromenjena, dok će druga jednačina biti promenjena:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right) = \rho f - \nabla p, \quad (4.25)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0.$$

Primer 4.2. (Gasna dinamika)

Gasna dinamika je jedna od najuticajnijih oblasti u matematičkim teorijama o zakonu očuvanja. Svaka važna definicija, teorema ili posmatranje obično se proverava u nekom modelu dinamike gasa. Suština ovog izentropskog modela³ je da jednačina energije nedostaje i da ona ima ulogu da odredi odgovarajuće rešenje (energija se ne može povećati u zatvorenom sistemu).

Izentropska gasna dinamika:

Prvo ćemo uvesti oznake koje se koriste:

ρ ... gustina gasa

v ... brzina gasa

σ ... pritisak (sila)

Imamo sistem:

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0 \quad (4.26)$$

$$(\rho v)_t + (\rho v^2)_x - \sigma_x = 0.$$

Naredni odnos poseduje sledeće elemente:

$$\sigma = -p + \mu v_x, \quad (4.27)$$

gde je p pritisak gasa bez pomeranja i μ je viskoznost ($\mu \ll 1$)

³U termodinamici, izentropski proces je proces u kojem se, u svrhu inženjerske analize i proučavanja, može pretpostaviti da se proces odvija od početka do kraja bez porasta ili opadanja entropije sistema, tj. entropija sistema ostaje konstantna. Entropija je veličina stanja koja se može posmatrati kao mera za “vezanu” energiju nekog zatvorenog materijalnog sistema, tj. za energiju koja se, nasuprot “slobodnoj”, više ne može pretvoriti u rad.

Dakle,

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0 \quad (4.28)$$

$$(\rho v)_t + (\rho v^2)_x - p_x = \mu v_{xx},$$

važi za viskozne fluide. Znamo da za gasove važi $\mu \rightarrow 0$, pa se može koristiti da je $\mu = 0$.

Ako imamo više od jedne prostorne dimenzije koristimo Navier-Stokes jednačinu:

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.29)$$

$$(\rho v)_t + \vec{v} \operatorname{div}(\rho \vec{v}) + (\rho \vec{v}) \operatorname{div} \vec{v} + \operatorname{grad} p = \mu \Delta \vec{v}, \quad (0 = \text{za neviskozne}).$$

Ako pretpostavimo da je gustina konstantna, onda će redukovani sistem biti:

$$v_t + \vec{v} \nabla \vec{v} = -\nabla p, \quad (4.30)$$

gde je $\nabla \vec{v}$ tenzor derivata vektora v .

Uzmimo termodinamičke efekte gasa u cilju zatvaranja sistema. Uzmimo $p = p(\rho, S)$, gde nova nezavisna promenljiva S označava entropiju. U cilju zatvaranja sistema potrebna je dodatna jednačina ili konstitutivna relacija. Za adijabatski⁴ slučaj možemo, na primer, uzeti

$$S_t + v S_x = 0. \quad (4.31)$$

Za jedan izotopni neviskozni gas važi $S = 0$ i $\mu = 0$.

Sada, neviskozni slučaj dat je modelom

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0$$

$$(\rho v)_t + (\rho v^2)_x + (p(\rho))_x = 0,$$

$$p(\rho) = k \rho^\gamma, \quad (1 < \gamma < 3, \gamma = 1 + \frac{2}{n}), \quad (4.32)$$

⁴ Adijabatski proces je proces u kome je razmena toplote sistema sa spoljašnjom sredinom zanemarljiva.

gde k označava univerzalnu gasnu konstantu, a n broj atoma u molekulu gasa. Poslednja relacija u ovom sistemu se naziva „idealna gasna relacija“. To obuhvata dobro poznatu činjenicu da se pritisak povećava sa gustinom (i obrnuto), ali zanemaruje drugu dobro poznatu činjenicu da se temperatura (unutrašnja energija) povećava sa pritiskom. Pa nam treba nova jednačina umesto ove konstruktivne relacije $p(\rho) = k\rho^\gamma$.

Treba napomenuti, da za $\gamma = 2$ (i $k = g$) dobijamo sistem plitkih voda.

Ojlerov sistem:

Kao što je već rečeno pritisak ne može biti nezavisan u odnosu na temperature tj. energija u realnoj situaciji. Uvodimo nove oznake:

e ... unutrašnja energija

m ... momenat

E ... energija

S ... entropija.

Treća jednačina postaje

$$\left(\rho e + \frac{1}{2}\rho v^2\right)_t + \left(\left(\rho e + \frac{1}{2}\rho v^2 + p\right)v\right)_x = 0. \quad (4.33)$$

Ponovo ćemo koristiti konstruktivnu jednačinu $p = p(\rho, e)$. Koristi se da se isključe sva nefizički slaba rešenja za gornje jednačine. Uzima se $S = S(\rho, e)$ gustina entropije u smislu termodinamike. Pa je rešenje za

$$\rho^2 S_\rho + p S_e = 0, S_e > 0. \quad (4.34)$$

(Obrnuto $T = \frac{1}{S_e}$ je takozvana apsolutna temperatura). Za bilo koju opadajuću funkciju h konveksna funkcija

$$\eta = \rho h^\circ S, \quad (4.35)$$

zove se matematička entropija. Funkcija $Q := v\eta$ se naziva tok entropije i svako glatko rešenje (ρ, v, e) zadovoljava

$$\eta_t + Q_x = 0. \quad (4.36)$$

Slabo rešenje je prihvatljivo za $\eta_t + Q_x \leq 0$, u opštem smislu. Kada tumačimo gornju nejednakost u fizičkom smislu, to znači da prava entropija se ne može smanjiti sa vremenom (i to je konstanta za jako rešenje). Možemo odmah da transformišemo Ojlerov sistem u kanonski oblik:

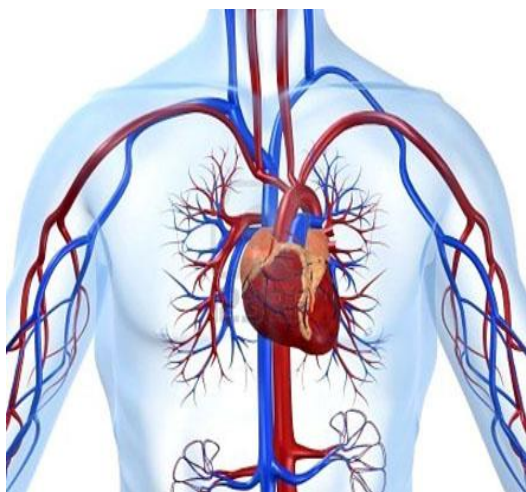
$$\begin{aligned} \rho_t + m_x &= 0 \\ m_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + p \right)_x &= 0 \\ E_t + ((E + p)v)_x &= 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

gde je $E = \rho e + \frac{1}{2}\rho v^2$. Glavni problem ovog sistema je da ne postoji dobar način da se opišu vakumi stanja koja se ne mogu izbeći iz početnih podataka. ■

Prve jednačine predstavljaju drugi Njutnov zakon kretanja, a druge jednačine predstavljaju jednačinu kontinuiteta. Razlika između Navier-Stoksovih i Ojlerovih jednačina je u $\mu \nabla^2 v$ zato što su Ojlerove jednačine bezviskozne, pa je $\mu = 0$ i taj izraz je izostavljen u Ojlerovim jednačinama.

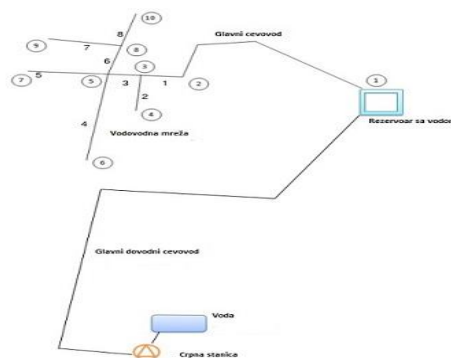
5. PROTICANJE TEČNOSTI KROZ CILINDRIČNE CEVI KRUŽNOG PRESEKA

Voda i krv dva fluida sa kojim se svakodnevno srećemo. U pitanju su dva nestišljiva i viskozna fluida. Viskoznost krvi je 3 do 5⁵ puta veća od viskoznosti vode. Jedna od osnovnih razlika između ova dva fluida je to što je viskoznost kod vode linearna, takav fluid se naziva njutnovski. Dok je viskoznost kod krvi nelinearna i u pitanju je nenjutnovski fluid. Ono što je interesantno kod ova dva fluida je da oba teku, na izgled, kroz slične sisteme što se može videti na slikama. Krv, kao što znamo, teče kroz kardiovaskularni sistem (Slika 5.), a voda koju pijemo stiže do potrošača preko vodovodnog sistema (Slika 6.).



Slika 5.

Kardiovaskularni sistem



Slika 6.

Sistem vodovodne mreže

U oba sistema postoji nešto što vrši pritisak na fluid, protok se odvija kroz cilindrične cevi koje se od glavnih račvaju u sve manje i u oba slučajeva postoje „čvorišta“. Cevi u oba sistema mogu biti hrapave, mada se prilikom modelovanja sistema pretpostavlja da su u pitanju glatke cevi.

⁵ Podatci preuzeti sa [19]

Ovi sistemi su veoma važni, svaki na svoj način. U daljem radu ćemo se prvo osvrnuti na bitne karakteristike ovih sistema, a zatim ćemo predstaviti njihove modele. Bitno je da oba sistema funkcionišu tako da „korisnik“ u svakom trenutku bude snabdeven potrebnom količinom fluida pod ogovarajućim pritiskom. Kako bi što bolje modelirali date sisteme potrebno je da što bolje razumemo njihovo funkcionisanje.

5.1. Vodovodni sistem

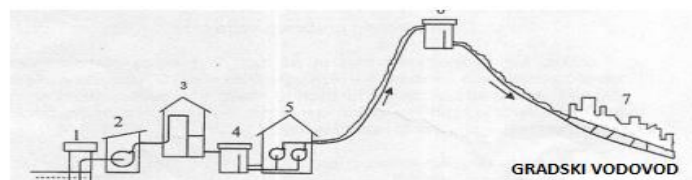
Vodovod, u širem smislu gledano, pored cevovoda za distribuciju i transport vode podrazumeva postrojenja i uređaje koji su u funkciji razmatranog vodosnabdevanja. Njime se voda zahvata, pročišćava i dovodi do mesta potrošnje. Šta će vodovod sadržati zavisi od namene vodovoda, vrste i mesta izvišta – vodozahvata i drugih faktora. S obzirom na potrebne i raspoložive količine vode postoje komunalni i regionalni vodovodi. Komunalni vodovodi pokrivaju jedan grad sa prigradskim naseljima vodom, dok se regionalni vodovodi grade u područjima gde nema dovoljno vode u blizini svakog naselja, pa se voda uzima iz jednog mesta u regionu i sprovodi se do više mesta. Vodovod, u opštem slučaju, pored cevovoda čine i vodozahvatni objekat, pumpne stanice, postrojenja za prečišćavanje, rezervoari i dr. Prema nameni razlikujemo:

1. vodovodi za pijaću vodu (gradski, regionalni, seoski)
2. vodovodi za industrijsku vodu
3. vodovod za protivpožarno snabdevanje
4. vodovod za polivanje zelenih gradskih površina i pranje ulica
5. vodovod za navodnjavanja
6. višefunkcionalni vodovod

Gradski vodovodi su po pravilu višefunkcionalni, odnosno obezbeđuju pored pijaće vode i vodu za gašenje požara, čišćenje ulica i industrijsku vodu, što i nije ekonomično na duže staze.

Veći gradski vodovodi snabdevaju se obično vodom iz više različitih izvora. Vodovodi prema prirodi izvora vodosnabdevanja mogu biti:

1. sa površinskim izvorima vodosnabdevanja (reke, jezera)
2. sa podzemnim izvorima vodosnabdevanja (bunari)
3. sa obe vrste izvora.



Slika 7.

Vodovod se uglavnom sastoji od vodozahvatnog objekta, odakle se voda glavnim cevovodom dovodi do uređaja za poboljšanje kvaliteta i do vodosprema za skladištenje vode, nakon toga se uz pomoć razdelne vodovodne mreže sa pripadnim objektima i kućnim instalacijama razvodi do krajnjih potrošača.

Vodozahvatni objekat, prikazan na slici 7. (oznaka 1), njegov zadatak je da prihvati vodu iz različitih izvora, onemogućiti prodor grube mehaničke nečistoće i stvori uslove za „usisavanje“ vode. Crpna pumpna stanica (oznaka 2), ima zadatak da iz vodozahvatnog objekta crpi vodu i preko postrojenja za prečišćavanje (oznaka 3) transportuje je do rezervoara čiste vode. Čest je slučaj da se ove pumpe nalaze u zajedničkom građevinskom objektu sa vodozahvatom. Stanica za prečišćavanje vode (oznaka 3), ovde se nalaze uređaji za prečišćavanje vode. Ovi uređaji fizičkim, hemijskim i biološkim postupcima iz vode otklanjaju gasove, čvrsta tela i tečnosti te žive organizme, što vodu čini neprikladnom za piće, a takođe uklanjaju neugodne mirise, boju i ukuse, smanjuju tvrdoću vode i korozivnost. Rezervoar čiste vode (oznaka 4) je građevinski objekat u kome se voda sakuplja u delovima dana i noći kad je mala potrošnja, a služi u onim razdobljima kada je potrošnja vode iznad srednje vrednosti. Te građevine moraju biti tehnički i sanitarno besprekorne, njegova veličina dovoljno velika da može da osigura potrebnu količinu vode u satima najveće potrošnje. Mora se dobro predvideti na kojoj će se visini nalaziti da bi se obezbedio odgovarajući pritisak i u najkritičnijim tačkama naselja. Broj pumpi u potisnoj pumpnoj stanici (oznaka 5) određuje se na osnovu tehničko-ekonomskog proračuna i važnosti vodovodnog sistema. One imaju zadatak da vodu iz rezervoara prečišćene vode transportuju do napornog rezervoara. Naporni rezervoar (oznaka 6) ima veoma važnu funkciju, reguliše protok - kompenzuje razliku protoka potisnih pumpi i protoka potrošača.

Vodovodna mreža

Vodovodnu mrežu obuhvataju cevovodi i pridruženi svrsishodni delovi kojima se voda dovodi do potrošača. Čvorovima mreže zovu se mesta gde se cevi račvaju i mesta priključenja potrošača. Prema konfiguraciji one mogu biti granate, prstenaste i mešovite. Kod granate vodovodne mreže tokovi su jednoznačno definisani, pa se prekidom protoka u jednoj deonici mreže prekida dotok vode nizvodno od ove deonice. Dok kod prstenaste vodovodne mreže

postoji više puteva kojima voda iz jednog čvora može doći do drugog čvora. Mešovite vodovodne mreže su kombinacija granate i prstenaste. Kod gradskih i seoskih vodovoda pravi se razlika između spoljašnjih (ulične) i unutrašnjih (dvorišne) vodovodnih mreža. Spoljašnje gradske vodovodne mreže su mešovite konfiguracije. Prstenastom mrežom su obuhvaćeni blokovi zgrada i značajni državni objekti (ambulante, škole i dr. javne ustanove), a iz čvorova ove mreže proširuju se granate mreže.

Vodovodne cevi su okruglog poprečnog preseka. Izbor vrste materijala od kog je cev napravljena zavisi od maksimalnog radnog pritiska, zdravstvenih uslova, finansijskih uslova i td. Osim cevi vodovodna mreža obuhvata i ventile za isključivanje pojedinih delova mreže, vazdušne ventile za ispuštanje vazduha iz najviših delova mreže, hidrante, vodomere i hidrofore u visokim zgradama.

5.2.Kardiovaskularni sistem

Kardiovaskularni sistem je zatvoren sistem krvnih sudova koji omogućava cirkulaciju krvi kroz telo. Kroz njega se obavlja transport hranljivih materija, vode i kiseonika, a uzima otpad kao što je ugljen-dioksid koji proizvode ćelije tela. Kardiovaskularni sistem se deli na sistemsku cirkulaciju i plućnu cirkulaciju. Sistemska cirkulacija se naziva još i veliki krvotok, ona snabdeva krvlju sva tkiva izuzev pluća. Dok se sistemska plućna cirkulacija naziva mali krvotok i on redukovano krv odnosi u pluća gde se krv oksiduje. Osnovni delovi kardiovaskularnog sistema su: srce, krvni sudovi (arterije, vene, kapilari) i krv.

Srce je šuplji mišićni organ (pumpa) izgrađen od glatkih mišića, obavijen srčanom maramicom i njegov zadatak je da pumpa krv kroz krvne sudove. Ovaj organ podeljen je na levu i desnu pretkomoru i komoru. Levu i desnu stranu srca odvaja mišićna pregrada, a komoru i pretkomoru otvori sa zaliscima koji sprečavaju da se krv vrati u pretkomoru. Rad srca čine dve radnje - skupljanje i širenje.

Krvni sudovi služe kao kanali kojima krv cirkuliše, postoje arterije, vene i kapilari. Arterije su krvni sudovi koji krv iz srca sa hranljivim materijama i kiseonikom odnose prema tkivima. Krvni pritisak je najviši u arterijama, iz tog razloga one su u isto vreme veoma elastične i jake da opstanu pod visokim pritiskom. Idući prema tkivima one se granaju na manje grane. Vene su krvni sudovi koji vraćaju krv u srce. One dolaze sa periferije u srce i donose ugljen-dioksid i otpadne materije nastale u metabolizmu. Kapilari su najsitniji krvni sudovi, ali podjednako važni kao i vene i arterije. Nalaze se između arterijskog i venskog sistema i spajaju ih. U njima

se obavlja razmena između krvi i tkiva.

Funkcionisanje kardiovaskularnog sistema deluje veoma jednostavno na prvi pogled, međutim to je jedan vrlo dugačak i komplikovan proces. Krv se svakim otkucajem srčanog mišića iz leve komore pumpa u aortu, odlazi u arterije i preko arteriola i kapilara dolazi do razmene gasova i hranljivih materija sa organima. Kapilari se spajaju i formiraju venule koje odnose ugljen-dioksid i otpadne materije iz organa, a preko vena ovo stiže u desnu srčanu komoru. Deoksigenirana krv ide iz desne komore kroz plućne arterije i vene nazad u levu srčanu pretkomoru. Autonomni nervni sistem upravlja kardiovaskularnim sistemom.

Građa krvnog suda- obično se sastoje iz tri tipa slojeva:

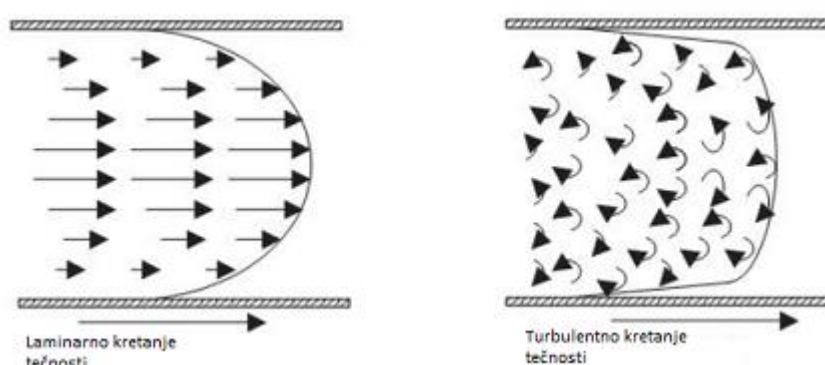
1. Tunica intima – unutrašnji omotač – sastoji se od endotela koji naleže na osnovnu opnu. U ovom tkivu se ponekad mogu naći i glatke mišićne ćelije.
2. Tunika media – srednji omotač – sastoji se od vezivne osnove, u kojoj se nalaze glatke mišićne ćelije i različite količine elastina. Ovo je najširi sloj u zidu arterije.
3. Tunika adventitia – spoljašnji omotač – izgrađen je od rastresitog vezivnog tkiva, sa uzdužno raspoređenim elastičnim vlaknima i kolagenom, ponekad sadrže i glatke mišićne ćelije. Najširi je sloj vene i kod velikih krvnih sudova sadrži nerve i manje krvne sudove.

Kod nekih krvnih sudova između ovih omotača mogu se nalaziti unutrašnje i spoljašnje elastične lamine (vezivno tkivo).

5.3. Laminarno proticanje tečnosti (voda i krv)

Merenje protoka fluida je bitno u industriji (voda, nafta, gas, prehrambenoj...), medicini (krv, urin, kiseonik) i td. Kao što se može primetiti proticanje fluida kroz cev ima veliki praktičan značaj. Protok tečnosti kroz cilindrične cevi pri malim brzinama se kreće laminarno, sa porastom protoka ili nailaženjem na prepreke (naslage) u cevima postaje turbulentno. Prilikom modeliranja protoka fluida mora se uzeti u obzir da brzina tečnosti nije ista duž poprečnog preseka, brzina zavisi od udaljenosti čestice od ose cevi. Brzina je maksimalna na osi cevi, dok u dodiru sa zidovima cevi približna je nuli. Opadanje pritiska duž cevi moglo bi se posmatrati sa gledišta energije. Brzina duž cevi kod tečnosti je konstantna, pa se njena kinetička energija ne može menjati duž cevi. Činjenicom da je kretanje tečnosti u horizontalnom pravcu, ona ne dobija nikakav uticaj od gravitacionog polja. Međutim, da bi se

tečnost kretala, mora da se savlada sila trenja i time vrši uticaj. Prema opisanom ovaj uticaj se vrši na račun energije pritiska, pa mora opadati. Kada je u pitanju laminarno kretanje tečnosti se kreću u slojevima, na svaki od njih deluje različita sila. Na sloj koji se nalazi uz zid deluje sila adhezije koja ih usporava i iz tog razloga se oni kreću sporije, sila kohezije usporava sledeći sloj, ali ta sila opada kako se približavamo centru ose i iz tog razloga se fluid brže kreće. Kretanje u slojevima je karakteristično za laminarno kretanje, čim se pređe na turbulentni režim dolazi do haotičnog kretanja i slojevi „nestaju“. Laminarni protok ima oblik parabole i njegova brzina opada po kvadratnoj funkciji, a turbulenti približno ravan, kao što se vidi na slici 8.



Slika 8.

Protok je količina fluida, koja protekne kroz posmatrani poprečni presek za jedinicu vremena. Jednačina protoka tečnosti data je sa:

$$Q = \frac{dV}{dt}, \quad (5.1)$$

dV je zapremina tečnosti koja protekne u vremenu dt . Merna jedinica za protok je kubni metar u sekundi $\left(\frac{m^3}{s}\right)$. Ako se pod zapreminom V podrazumeva količina tečnosti koja protekne kroz cilindričnu cev i koja pređe put dl u vremenu dt , a ako je S poprečni presek cevi onda predhodnu jednačinu zapisujemo u obliku:

$$Q = S \frac{dl}{dt} = Sv, \quad (5.2)$$

gde je v brzina protoka krvi. Iz predhodne formule se vidi način na koji su povezani protok krvi Q i brzina protoka krvi v . U ovom radu ćemo se ograničiti, kao što je već spomenuto, na laminarno proticanje kroz tanke cevi. S' obzirom da posmatramo cilindričnu cev čiji je poprečni presek krug poluprečnika R , posmatraćemo cilindrični koordinatni sistem. Cilindrični

koordinatni sistem je trodimenzionalni koordinatni sistem koji predstavlja proširenje polarnog koordinatnog sistema dodavanjem treće koordinate. Cilindrične koordinate zadate su transformacijom:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z,$$

gde su r i φ polarne koordinate. Uzimamo da je z – osa u pravcu ose cevi i da je usmerena u smeru kretanja fluida. Komponente brzine fluida iz ovih postavki su:

$$v_r = v_\varphi = 0, v_z = v(r, \varphi, z). \quad (5.3)$$

Polazeći od osnovnih dinamičkih jednačina nestišljivog viskoznog fluida u cilindričnom koordinatnom sistemu [videti [7]]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} \\ = f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{r^2} \right\} \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_\varphi v_z}{r} \\ = f_\varphi - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right\} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0, \quad (5.5)$$

i koristeći (5.3) ovaj sistem se svodi na sledeći slučaj:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} \right) \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (5.7)$$

Sistem nam pokazuje da pritisak zavisi od z , a v_z od r i φ . Jednakost iz prve jednačine je zadovoljena samo u slučaju ako se obe strane svode na istu konstantu. Iz ovoga sledi da je

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const.} \quad (5.8)$$

Pritiske u tačkama M_1 i M_2 duž z – ose na rastojanju l označićemo sa p_1 i p_2 , tada važi

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_2 - p_1}{l} = -\frac{p_1 - p_2}{l} = \text{const.} \quad (5.9)$$

Potrebno je da nađemo polje brzine $v_z = v(r, \varphi)$ rešavanjem prve jednačine (5.6) uz granične uslove $v = 0$ za $r = R$. Partikularno rešenje koje zavisi isključivo od r dobijamo kao rešenje jednačine:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (5.10)$$

uz date granične uslove. Kada se ova jednačina integriše dobijamo:

$$v(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 + A \ln r + B. \quad (5.11)$$

Konstante A i B određuju se iz uslova gore navedenih i dopunskog uslova da je $v(r)$ konačna funkcija u celoj oblasti fluida (uključujući i $r = 0$). Iz dopunskog uslova dobijamo da je $A = 0$, u suprotnom bi za $r = 0$ $v(r)$ postala beskonačna, a iz gore navedenih graničnih uslova dobijamo da je

$$B = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^2. \quad (5.12)$$

Na kraju dobijamo da je partikularno rešenje $v(r)$

$$v(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (R^2 - r^2). \quad (5.13)$$

Kako bi se uverili da je ovo traženo rešenje jednačine (5.6) za granične uslove stavimo da je

$$v(r, \varphi) = v(r) + u(r, \varphi) = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (R^2 - r^2) + u(r, \varphi), \quad (5.14)$$

gde je $u(r, \varphi)$ nepoznata funkcija. Pošto $v(r, \varphi)$ mora da zadovolji jednačinu (5.6) dobijamo

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} (v + u) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (v + u). \quad (5.15)$$

Pošto $v(r)$ zadovoljava jednačinu (5.7), gornja jednačina sa graničnim uslovima $u(r, \varphi) = 0$ za $r = R$ se svodi na

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (5.16)$$

Navedena jednačina predstavlja Laplasovu jednačinu $\Delta u(r, \varphi) = 0$ u cilindričnim koordinatama. Rešenje Laplasove jednačine za $u(r, \varphi)$ sa graničnim uslovima $u(r, \varphi) = 0$ za $r = R$, zbog osobina harmonijskih funkcija (nemaju nigde minimum ni maksimum)

$$u(r, \varphi) = 0. \quad (5.17)$$

Zaključujemo, u našem problemu laminarnog kretanja nestišljivog fluida kroz cev kružnog preseka traženo rešenje je rešenje (5.13), koje zapisujemo u obliku

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (R^2 - r^2). \quad (5.18)$$

Po paraboličkom zakonu fluid duž ose cevi ima najveću brzinu, i ona iznosi

$$v_{max} = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} R^2. \quad (5.19)$$

Količina fluida koja protekne kroz poprečni presek za jedinicu vremena iznosi

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho v(r) r dr d\varphi = \frac{\pi R^4}{8\mu} \rho \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{R^4}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{l}. \quad (5.20)$$

Srednju brzinu proticanja možemo izračunati pomoću formule

$$\bar{v} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho v(r) r dr d\varphi = \frac{R^2}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{1}{2} v_{max}. \quad (5.21)$$

Iz predhodne dve jednačine razliku pritiska možemo napisati u obliku

$$\Delta p = \frac{8\mu l Q}{\pi R^4} = \frac{8\mu l Q}{R^2}. \quad (5.22)$$

Pad pritiska pri laminarnom kretanju je proporcionalan količini fluida koji prođe kroz poprečni presek cevi u jedinici vremena i dužini cevi, a obrnuto proporcionalan četvrtom stepenu poluprečnika cevi. Ili, pad pritiska je proporcionalan srednjoj brzini toka i dužini cevi, a obrnuto proporcionalan kvadratu poluprečnika cevi. Ovo je poznato kao Hagen-Poasonov zakon. Ovaj zakon važi isključivo kada je kretanje fluida laminarno.

Primer 5.1. (Brzina protoka vode)

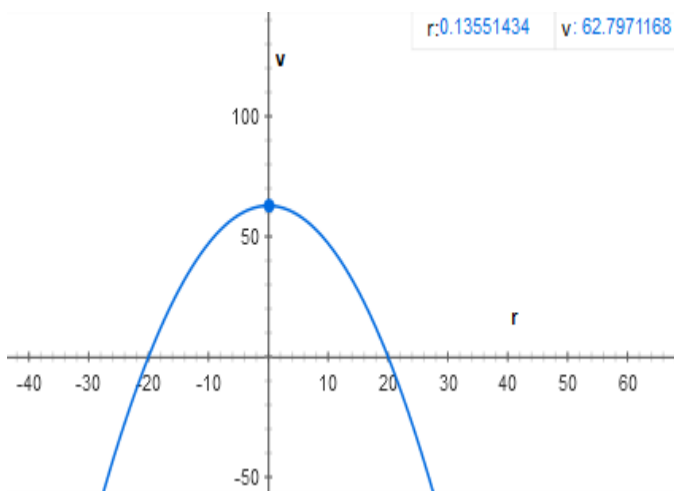
Posmatramo metalnu cev dužine 20 m i poluprečnika 20 cm, spojena je na javnu vodovodnu mrežu u kojoj je pritisak 3 mbar. Na drugom kraju ističe slobodno. Pretpostavimo da je atmosferski pritisak tog dana iznosi 1010 mbar, a viskoznost vode 0,8 mPas. Kolika je brzina protoka i količina protoka?

$$l = 20 \text{ m} = 2000 \text{ cm}, R = 20 \text{ cm}, p_2 = 1010 \text{ mbar}, p_1 = 3 \text{ mbar}, \mu = 0,8$$

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (R^2 - r^2)$$

$$v = \frac{1007}{4 * 0,8 * 2000} * (400 - r^2)$$

$$v \approx 0,157(400 - r^2)$$



Slika 9.

$$Q = \frac{R^4}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{l}$$

$$Q = \frac{160000 * 1007}{8 * 0,8 * 2000}$$

$$Q = 12587,5 \text{ cm}^3/\text{s}$$

Podatci uzeti iz [20] i [21].

Primer 5.2. (Brzina protoka krvi)

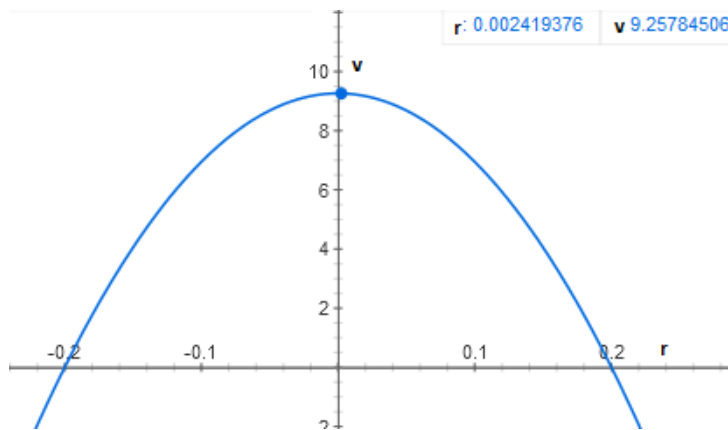
Posmatramo manju arteriju koje se grana od aorte čiji je dužina 2 cm i poluprečnik 2 mm. Pretpostavićemo da je viskoznost 0,027 i razlika pritiska na krajevima manje arterije je 50 mbar. Kolika je brzina protoka i količina protoka?

$$l = 2 \text{ cm}, R = 0,2 \text{ cm}, \Delta P = 50 \text{ mbar}, \mu = 0,027$$

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (R^2 - r^2)$$

$$v = \frac{50}{4 * 0,027 * 2} * (0,04 - r^2)$$

$$v \approx 231,48(0,04 - r^2)$$



$$Q = \frac{R^4}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{l}$$

$$Q = \frac{0,0016 * 50}{8 * 0,027 * 2}$$

$$Q = 0,1852 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

Slika 10.

Podatci preuzeti iz [22].

U oba primera dobili smo konkavni oblik grafika funkcije, na kom možemo da vidimo da fluid postiže maksimalnu brzinu protoka baš na samoj osi cevi u čijem smeru teče fluid, kao što smo već spomenuli. Parabolički izgled grafika nam pokazuje da se radi o laminarnom kretanju tečnosti.

6. MODEL PROTICANJA

6.1. Modeliranje širenja olova u vodi za piće

Veliki problem u državama Evrope javlja se zbog upotrebe olova u cevnim mrežama, a kasnije dolazi do slanja olova u pijaću vodu. U mnogim zemljama koriste se olovne cevi, pošto se te cevi nalaze godinama pod zemljom dolazi do hemijske reakcije između cevi i zemlje, cevi pucaju i dešava se da olovo iz cevi završi u vodi. Fizički je nemoguće to videti, to je jedan od velikih problema. Olovo se skuplja u organizmu i može da ošteti nerve. Širenje olova u vodi za piće u cevi u periodu stagnacije je veoma opasno. Zemlje Evropske unije imaju obavezu da vodu hemijski tretiraju ili da menjaju olovne cevi kako bi smanjili nivo olova u vodi za piće. Cilj ovog modela je pomoć inženjerima da procene problem pomoću kompjutera.⁶ Model se razmatra za jednu cev, nekoliko različitih, zasniva se na hidrodinamici i masi transporta unutar cevi. U radu se posmatraju dva modela: difuzni i model protoka u cevi.

6.1.1. Model difuzije

Takozvani eksponencijalni model, koji ćemo prvo posmatrati, pretpostavlja da je masa prenosa olova, sa unutrašnje površine cevi u vodu koja protiče kroz cev, funkcija stope prenosa početne mase M i ravnotežne koncentracije olova u vodi E . Parametri M i E definišu sposobnost vode da rastvori olovo. Inicijalna stopa prenosa mase i ravnotežna koncentracija olova se mogu ispitivati uzimanjem uzoraka iz vode koja je „odstajala preko noći“ ili bila „30 minuta u stagnaciji“. Izvor olova S , koji svake sekunde ulazi u vodu, direktno je proporcionalan brzini prenosa početne mase, kao i stepenu zasićenosti koncentracije olova. Iz navedenog sledi:

$$S = \frac{AM}{V} \frac{(E-c)}{E}, \quad (6.1)$$

gde su A i V unutrašnji prostor i obim cevi, respektivno. Dakle, koncentracija olova u vodi u svakom trenutku t , data je jednačinom

$$\frac{dc}{dt} = \frac{AM}{V} \frac{(E-c)}{E}, \quad (6.2)$$

⁶ Model opisan u ovom poglavlju zasnovan je na modelu predstavljenom u [15].

od koje, integraljenjem, izraz za koncentraciju posle perioda stagnacije koji ima dužinu T , svodi se na jednačinu

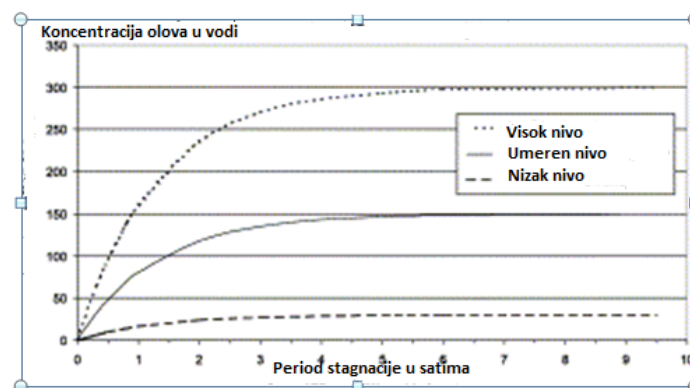
$$c = E - (E - c_0)e^{\left(\frac{AMT}{VE}\right)}, \quad (6.3)$$

gde c_0 predstavlja početnu koncentraciju olova na samom početku perioda bez protoka.

Primer 5.3.⁷ Pretpostavićemo da je prečnik olovne cevi kroz koju protiče voda 12 mm, uslovi ravnoteže stvoreni su nakon 6 sati stagnacije i uzete su tipične vrednosti za M i E:

	M	E
Nizak nivo rastvora olova	0.03	30
Umeren nivo rastvora olova	0.1	150
Visok nivo rastvora olova	0.3	300

Tabela 1.



Slika 11.

Iz grafika funkcije, na slici 11., zaključujemo da koncentracija olova nakon određenog vremenskog perioda stagnacije je nepromenjena. Ako je koncentracija olova u vodi mala, za kraći period stagnacije će koncentracija olova biti konstantna, dok će taj period morati da bude duži u koliko je veća količina olova u vodi. Moguće je empirijski utvrditi stagnacionu krivu za sistem od olovne koncentracije dobijene nakon fiksnog vremena stagnacije. Ovaj metod generalno može da smanji broj potrebnih uzoraka, ali je problem što ne može da se primeni u

⁷ Za više informacij pogledati [17].

širem opsegu dužine cevi.

Drugi model, naziva se modela difuzije, zasniva se na jednačini prenosa mase. Jednačina mase opisuje kako koncentracija olova c varira kroz cev (sa cilindričnim koordinatama x, y, φ) tokom vremena sa pogledom na najvažnije brzine fluida (u, v, w) i koeficijent difuzije u punoj veličini D .

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial r} + w \frac{\partial c}{\partial \varphi} = D \left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (6.4)$$

Pod pretpostavkom da nema protoka i nema razlike u ugaonom pravcu i dužini cevi, jednačina mase prenosa može se napisati

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right). \quad (6.5)$$

Analitička rešenja:

Beselova funkcija rešenja (odnosi se na bakarne cevi) – Jednačina (6.5) ima rešenje koje podleže graničnim uslovima,

$$\begin{aligned} c &= c_0 = E \text{ u } r = r_0, \text{ za } t \geq 0 \\ c &= f(r), 0 < r < r_0, \text{ za } t = 0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

gde je $f(r)$ prenos početne koncentracije preko cevi i r_0 je poluprečnik cevi.

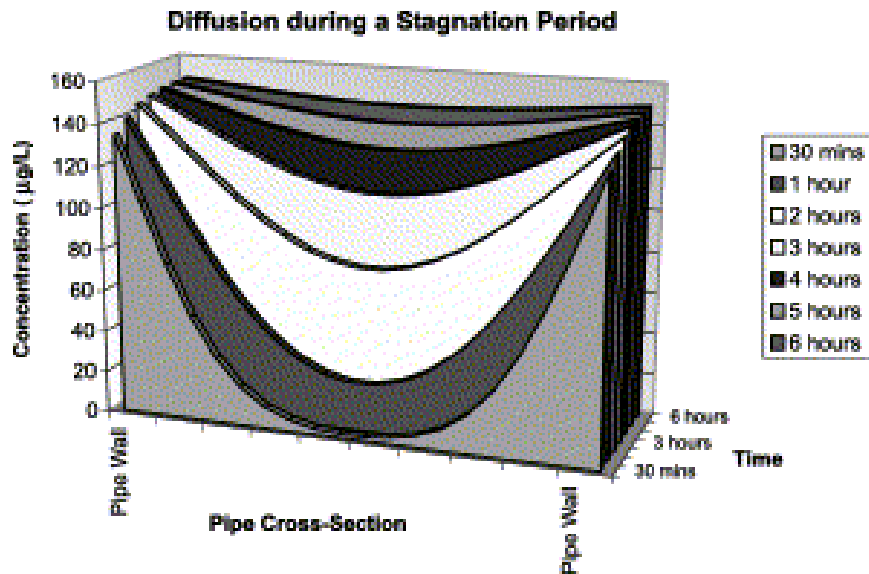
Za bakarne cevi moramo odrediti E za prosečnu koncentraciju ponderisanih – oblasti $c_{average}$, to jest

$$E = c_{average} = \frac{1}{A} \sum_{j=1,n} a_j \bar{c}_j, \quad (6.7)$$

gde je a poprečni presek oblika prstena $j = 1, r$ i $\bar{c}_j$ je prosečna koncentracija čvorova na ivici za prsten $j - 1$ i j . Rešenje jednačine (6.5) pod uslovom (6.6) opisuje kako koncentracija varira kroz poprečni presek cevi i daje

$$c = c_0 \left[1 - \frac{2}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \frac{J_0(r\alpha_n)}{J_1(r_0\alpha_n)} e^{(-D\alpha_n^2 t)} \right] + \frac{2}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{(-D\alpha_n^2 t)} \frac{J_0(r\alpha_n)}{J_1^2(r_0\alpha_n)} \int_0^{r_0} r f(r) J_0(r\alpha_n) dr \quad (6.8)$$

gde J_0 i J_1 su Beselove funkcije i α_n su pozitivni koreni od $J_0(r\alpha_n) = 0$. Grafik na slici 12. jasno pokazuje radijalnu varijaciju koncentracije i kako se olovo rasipa iz zida cevi ka sredini.

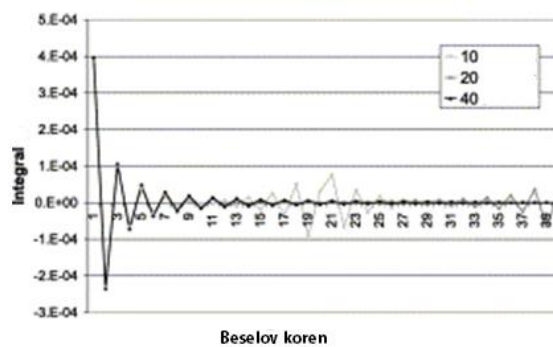


Slika 12.

Problemi u ocenjivanju rešenja – utvrđeno je prilikom rešavanja problema difuzije u odnosu na kratko vreme ($t < 60s$) da Beselova jednačina (6.8) daje neodgovarajuće rezultate. Ima nerealno visoke koncentracije u početnom periodu stagnacije, dok posle jednog minuta padne na očekivanu vrednost. Uzrok⁸ je integral u Besellovoj jednačini (6.8), odnosno

$$I = \int_0^{r_0} r f(r) J_0(r \alpha_n) dr. \quad (6.9)$$

Integral, I je nađen za svaki Beselov koren sve do n . Rezultati su grafički prikazani do $n = 40$ na slici 13.



Slika 13.

⁸ Detaljnije o Besellovoj funkciji i integralu pogledati u [25].

Pošto je u pitanju analitički difuzni model moraju da se spajaju u jedinstveno rešenje. Jasno se vidi, da za određene Beselove korene integral I mora da konvergira ka nuli kako se Beselov koren povećava. Međutim, na grafiku na slici 13. se vidi da za vrednost Beselovog korena za $n = 10$ radijalni elementi počinju da se razilaze, a zatim ponovo spajaju oko 20 Beselovog korena. Ekstrapolacijom se može videti da se ista nestabilnost za $n = 20$ javlja oko 40 Beselovog korena. Razlozi zbog kojih se javljaju ove smetnje ne razumeju se u potpunosti. Prvo se mislilo da nastaju zbog netačnosti pri izračunavanju integrala I . Međutim, više različitih tačnih modela dobilo je slične rezultate. Kasnije je došlo do pretpostavke da su ovi poremećaji izazvani prirodom same Beselove funkcije.

Zakon očuvanja mase – otkriva da Beselovo rešenje potcenjuje prosečnu koncentraciju bakra u cevi. Očekivana prosečna koncentracija u bakarnoj cevi je konstantna tokom vremena, tokom perioda stagnacije, jer ne postoji period izvora iz bakarne cevi. Rešenje Beselove funkcije potcenjuje masu bakra koja se nalazi u cevi jer $masa = koncentracija * zapremina$. Ovo podrazumeva da se očuvanje mase ne održava. Ovaj gubitak se objašnjava pomoću Beselove jednačine, precizniji da budemo preko graničnih uslova koji se koriste. Za bakarne cevi, koncentracija na ivici cevi c_0 je postavljena na početku oblasti sa prosečnim merenjem koncentracije $c_{average}$ u cilju da se (6.8) može koristiti za bakarne cevi. Ovo je Dirihleov granični usov, u slučaju bakarne cevi, koncentracija u granici cevi skače od c_0 do $c_{average}$ kada se primeni ovaj granični uslov. Zbog prirode modela, protok u većini slučajeva $c_{average} < c_0$ stoga je koncentracija na ivicama kapljica c_0 . Ovaj problem se može prevazići primenom prikladnijih Neumanovih graničnih uslova za bakarne cevi. Međutim, to nije moguće kada koristimo analitičko rešenje (6.8) i ako se može koristiti u numeričkom rešenju.

Kalibracija koeficijenta difuzije – Koeficijent difuzije D , na isti način kao početna brzina prenosa mase M koristi se u eksponencijalnom modelu, kontroliše brzinu rastvaranja olova u vodi. Ako M_t označava količinu olova koja je ušla ili napustila cilindričnu cev u trenutku t i M_∞ posle beskonačnog vremena, nakon toga

$$\frac{M_t}{M_\infty} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{r_0^2 \alpha_n^2} e^{(-D\alpha_n^2 t)}, \quad (6.10)$$

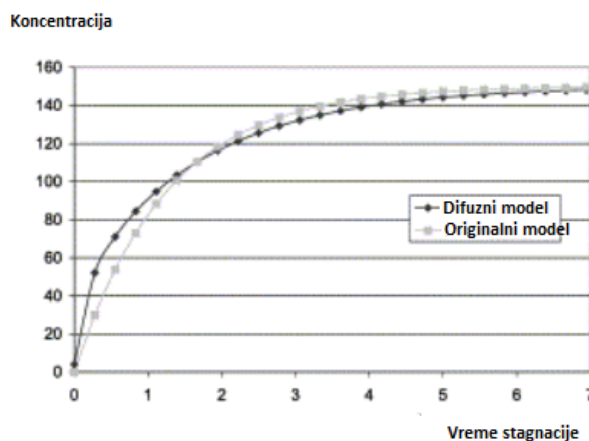
i od

$$\frac{c}{E} = \frac{M_t}{M_\infty}, \quad (6.11)$$

sledi da jednačina (6.8) ima oblik

$$c = E \left[1 - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{r_0^2 \alpha_n^2} e^{(-D \alpha_n^2 t)} \right]. \quad (6.12)$$

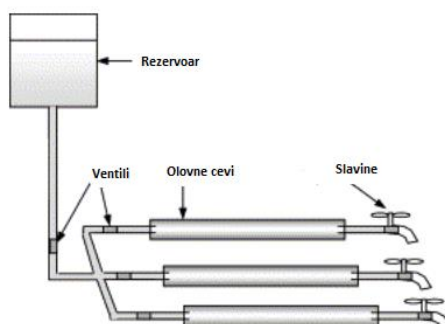
Pogodna vrednost za D se može dobiti kalibracijom jednačine (6.12) sa eksperimentalnim podacima. Na grafiku na slici 14. možemo videti varijaciju koncentracije sa vremenom stagnacije dobijenom iz predhodne jednačine (6.12) koja je upoređena sa rezultatom dobijenim iz eksponencijalnog modela za istu vodu.



Slika 14.

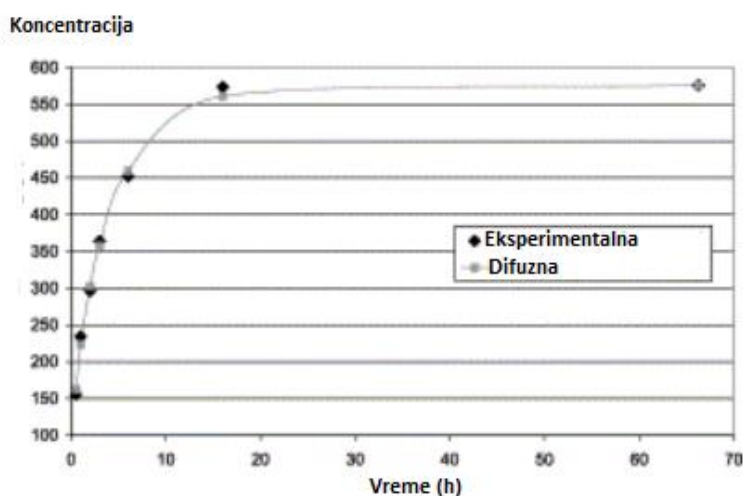
Kako bi se mogla izvršiti kalibracija modela što tačnije rezultati najmanjih kvadrata krive eksponencijalnog i difuznog modela su izvršeni sa različitim vremenom stagnacije. Tako možemo da dobijemo koeficijent difuzije D za određene početne brzine prenosa mase M koji se koristi u eksponencijalnom modelu.

Eksperimentalni metod – koristimo kako bi potkrepiли predhodno obrađen difuzni model. Dobijeni podaci otkrivaju karakteristike rastvaranja olova u vodi i omogućavaju modelu difuzije da potpuno kalibrira. Posmatramo sliku 15., tri olovne cevi su postavljene, na



Slika 15

pet metara razdaljine, u cilju trostrukog rezultata. Nakon što je oprema ispitana na curenje i očišćene su olovne cevi, prošao je uređaj za testiranje vode. Postupak testiranja uključuje prikupljanje uzoraka iz cevi nakon kontrolisanih stagnacija, nakon toga oni se šalju u laboratoriju na ispitivanje i analize. Temperatura cevi se prati kroz procedure testiranja, kao i temperature uzorka, uzima se i pH vrednost u rezervoaru. Dobijeni rezultati se mogu videti na grafiku na slici 16. Dati podatci formiraju stagnacionu krivu kao što je predviđeno difuznim modelom.



Slika 16.

Međutim, ravnotežna koncentracija je nešto veća nego što je predviđeno za testiranu vodu slika 16.. Ovo se dešava zbog efekta toplote na rastvaranje olova u vodi. Tipična ravnotežna koncentracija koja se pretpostavlja je posmatrana na temperaturi 5 – 10°C. Ovo je u suprotnosti sa temperaturom koja je zabeležena u toku testiranja, iznosila je 20°C. Kriva najmanjih kvadrata za eksperimentalni i difuzni model izvršena je u cilju kalibracije modela difuzije i da pokaže ukupnu bliskost naspram podataka. Iz navedenog grafika se vidi da su ova dva modela veoma bliska, skoro pa se poklapaju.

Numeričko rešenje:

Kao što smo već ranije spomenuli, u Dirihleovom graničnom uslovu u slučaj bakarne cevi je nepovezan i dovodi do gubitka u očuvanju mase. Kako nije moguće primeniti Neumanove granične uslove kada se koristi analitičko rešenje (6.8), numeričko rešenje je ispitivano gde je Neumanov granični uslov lako primenljiv. Cev se tretira kao cilindrična koja je diskretizovana duž ose $(i, i = 1, N)$, i pravac poluprečnika $(j, j = 1, J)$. Koncentracija olova u cevi c_j definiše

se

$$c_j^n = c(j\Delta r, n\Delta t), \quad (6.13)$$

gde je Δr je interval u smeru poluprečnika, a Δt je povećanje u vremenu. Jednačina difuzije (6.5) može se napisati u obliku

$$C_j^n = C_j^{n-1} + \Delta t D \left[\frac{C_{j+1}^{n-1} - 2C_j^{n-1} + C_{j-1}^{n-1}}{\Delta r^2} + \frac{C_{j+1}^{n-1} - C_{j-1}^{n-1}}{2r_j \Delta r} \right], \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial c}{\partial r} = 0 \text{ u } r = r_0 \text{ za } t \geq 0, \quad (6.15)$$

$$C = C_0 = E \text{ u } r = r_0 \text{ za } t \geq 0, \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial c}{\partial r} = 0 \text{ u } r = 0 \text{ za } t \geq 0. \quad (6.17)$$

Rešenje (6.14) je prvog reda precizirano u vremenu i drugog reda precizirano u prostoru. Neumanov granični uslov (6.15) se primenjuje na bakarne cevi, dok se Dirihleov granični uslov (6.16) primenjuje na olovne cevi. Ne možemo koristiti Neumanove granične uslove za olovne cevi jer stopa raspada nije konstantna. Dirihleove granične uslove je moguće koristiti i za bakarne i za olovne cevi, predstavlja E prosečnom koncentracijom na bakarne cevi. Međutim, to stvara diskontinuitet i gubi se očuvanje mase. Neophodno je primeniti simetrije stanja (6.17) na sredini cevi. Rešavanjem ovih jednačina otkriva se da masa nije očuvana u bakarnim cevima gde se primenjuju Neumanovi granični uslovi.

Moguće je izračunati, preko preseka cevi u različitim vremenskim tokovima stagnacije za olovne cevi, prosečnu koncentraciju (početna koncentracija je nula). Ovo se može uraditi za svaki od modela. U slučaju olovne cevi numeričko rešenje jednačine difuzije daje praktično indentične rezultate kao i analitičko rešenje.

6.1.2. Model protoka u cevi

Kada olovo uđe u vodu kroz proces difuzije ono se kreće duž cevi pomoću kretanja vode. Znamo da je glavna jednačina za ovakvo kretanje fluida Navier-Stoksova jednačina, koja izgleda

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right) = \rho f - \nabla p + \mu \nabla^2 v.$$

Ako se eksponencijalni model koristi za simulaciju prenosa olova, onda će jednačina biti data sa

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = S. \quad (6.18)$$

U ovom slučaju, jednačina protoka može se koristiti za rešavanje brzine i jednačinu prenosa mase za koncentraciju. Kao što je poznato, protok unutar cevi se karakteriše Rejnoldsovim brojem. U zavisnosti od Rejnoldsovog broja postoji kao što smo već naveli, laminarno i turbulentno kretanje.

Laminarno kretanje – jednačina za laminarno kretanje može se izvesti iz Navier-Stoksove jednačine, pa glasi

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right]. \quad (6.19)$$

Ovo se može integraliti i rešenje daje jednačinu koja opisuje brzinu vode u cevi, odnosno

$$v = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r_0^2 - r^2). \quad (6.20)$$

Iz ovoga se može pokazati da važi

$$v = \frac{2Q}{\pi r_0^4} (r_0^2 - r^2), \quad (6.21)$$

gde je Q zapreminski protok.

Turbulento kretanje – Najjednostavniji način modeliranja turbulentnog toka je korišćenje eksperimentalnih podataka. Poznato je da prosečno vreme brzine za profil turbulentnog protka u cevi je fiksno, osim u blizini zida. Zakon sile je dobra aproksimacija za razne svrhe. Najrasprostranjeniji zakon snage je Jedna-sedmina zakon snage, odnosno

$$\frac{v}{v_{max}} = \left(\frac{r_0 - r}{r_0} \right)^{1/7}. \quad (6.22)$$

Iz predhodne jednačine (6.22) može se pokazati da je prosečna brzina direktno povezana sa maksimalnom brzinom koja je data

$$V = 0,817v_{max}. \quad (6.23)$$

Međutim, prosečna brzina V se takođe može izraziti u smislu protoka Q i površine poprečnog preseka A , odnosno

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r_0^2}. \quad (6.24)$$

Zamenom se dobija

$$v_{max} = \frac{Q}{0,817\pi r_0^2}, \quad (6.25)$$

Na kraju, u jednačinu (6.22) zamenjujemo gore navedenu (6.25) i dobijamo

$$v = \frac{Q}{0,817\pi r_0^2} \left(\frac{r_0 - r}{r_0} \right)^{1/7}. \quad (6.26)$$

Dobijeni profil brzine je ravniji u odnosu na laminarni tok što je predstavljeno na slici 8. U turbulentnom toku granični sloj je ograničen u regionu veoma blizu zida, dok se laminarni dodatno proširuje u toku, zbog toga je brzina u sredini cevi znatno veća.

Rešenje jednačine protoka – U zavisnosti koji model protoka posmatramo, da bi se rešila jednačina (6.18) za bilo koji od profila brzine, koristi se jednostavna konačna procedura. Kao što smo već rekli, cev se posmatra kao cilindrična, što je ekvivalentno očuvanju mase olova, odakle dobijamo

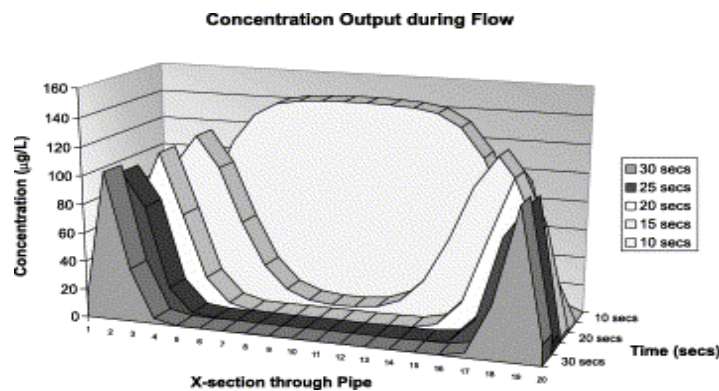
$$\frac{dc_{i,j}}{dt} = \frac{v}{\Delta x_i} (c_{i-1,j} - c_{i,j}) + A_i \frac{M}{\sum_j V_{i,j}} \left(\frac{E - c_{i,j}}{E} \right), \quad (6.27)$$

gde $c_{i,j}$, $V_{i,j}$ i A_i su koncentracije olova u elementu (i,j) , obim elementa (i,j) i unutrašnja površina elementa na zidu cevi, respektivno, a Q i t su brzina protoka i vreme respektivno.

Jednačina (6.27) se rešava korišćenjem konačnih razlika zastupljenih sa leve strane i vremena integracije. Deo olovne cevi ili kombinacija ne olovne cevi može biti nadovezana sa bilo kojom dužinom i prečnikom. $M = 0$ za elemente bezolovnih cevi.

Rezultati za jedinstven model cevi – Prva grupa rezultata dobijena iz konačnih rastvora razlika, ilustruje da koncentracija varira preko poprečnog preseka dobijenog za cev tokom toka. U ovom konkretnom slučaju korišćen je laminarni model i grafik odgovara koncentraciji na slavini tokom prvih 30 sekundi. Nakon 15 sekundi „efekat ispiranja“ je očigledno svežom

vodom razvodnio olovnu vodu. Nasuprot tome, „efekat ispiranja“ ne važi blizu zida cevi, jer se tu koncentracija povećava. To se dešava zbog toga što je brzina protoka uz zid cevi značajno sporija.



Slika 17.

Preko navedenih modela smo istražili simulaciju prenosa olova u vodi unutar cevi tokom perioda stagnacije. Model složene difuzije nije u potpunosti odgovarajući, javljaju se oscilacije. Pronađeni su neki problemi koji su rešivi sa analitičkim rešenjem pod određenim uslovima. Numerički i analitički modeli difuzije dali su praktično indentična rešenja u slučaju olovne cevi, oba su upoređena sa eksponencijalnim modelom. Modeli su bili potkrepljeni eksperimentalnim rezultatima.

6.2. Modeliranje protoka krvi kroz arterije

U ovom delu rada fokusiraćemo se na modeliranje protoka krvi u velikim sistemskim arterijama, pod pretpostavkom da imaju cilindričan oblik, aksialno simetričan tok i visko-elastičnost na zidovima. Velike sistemske arterije posmatarmo zato što u tom slučaju se krv ponaša njutnovski i možemo da koristimo Navier-Stoksovu formulu. Zbog ogromne složenosti kardiovaskularnog sistema, proučavanje između krvotoka i zida krvnog suda je veoma teško. Kad god je moguće pribegava se pojednostavljenju pretpostavki sa ciljem da se zadrže kompleksna numerička svojstva.

Arteriju ćemo modelirati kao što smo već rekli, kao simetričan cilindar. Koristićemo Ω da označimo referentni cilindar, pa ga predstavljamo preko cilindričnih koordinata

$$\Omega = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in R^3 | r \in (0, R), \varphi \in (0, 2\pi), z \in (0, L)\},$$

gde nam je L dužina cilindra, R je referentni poluprečnik (mogu da variraju). Referentni cilindar Ω ima bočnu granicu, koja predstavlja zid krvnog suda i označavamo je sa Σ . Definisana je sa

$$\Sigma = \{(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z) \in R^3 | r \in (0, R), \varphi \in (0, 2\pi), z \in (0, L)\}.$$

Kako se zidovi arterija pod delovanjem unutrašnjeg pritiska deformišu, ovo ponašanje zida ćemo opisati pomoću modela linearne viskoelastične membrane. Da budemo precizniji, zid se ponaša kao homogena, izotropna, linearno viskoelastična membrana debljine h , sa radijalnom deformacijom $\eta(z, t)$. Kretanje zida arterije opisuje se preko drugog Njutnovog zakona za kretanje, uz pretpostavku spoljnog poprečnog opterećenja i nulte uzdužne deformacije, pomoću jednačine

$$f_r = h\rho_w \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{Eh}{1-\sigma^2} \frac{1}{R^2} \eta + p_{ref} \frac{\eta}{R} + \frac{hC_v}{R^2} \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (6.28)$$

gde ρ_w predstavlja gustinu zida, p_{ref} referentni pritisak, E Jangov modul elastičnosti, σ Poasonov odnos i C_v viskoznu konstantu. Jangov model elastičnosti E se definiše kao odnos između normalnog napona i uzdužnog proširenja (dileacije). Njegova veličina meri čvrstinu elastičnog materijala. Merenje modula elastičnosti meri se u laboratorijama tako što se meri sila koja deluje na materijal i njome izazvana deformacija. Poasonov odnos σ je bitno svojstvo za određivanje Jangovog modula elastičnosti, predstavlja odnos poprečnih i uzdužnih proširenja nekog materijala. Ima najveći uticaj prilikom protoka fluida u uslovima visokog pritiska kada usled naprezanja materijala dolazi do deformacije. U nastavku je predstavljen odnos između parametara u jednačini (6.28) i Lamé konstanti (λ, μ - konstante elastičnosti):

$$\frac{Eh}{1-\sigma^2} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} + 2\mu, \quad C_v = \frac{2\lambda_v\mu_v}{\lambda_v+2\mu_v} + 2\mu_v. \quad (6.29)$$

Zid arterije se deformiše tokom vremena t , tako da poluprečnik obuhvata i deformaciju $\eta(z, t)$ u odnosu na referentnu konfiguraciju. Oblast definisanosti koja se menja sa vremenom možemo označiti sa $\Omega(t)$ i definisaćemo na sledeći način:

$$\Omega(t) = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in R^3 | r \in (0, R(z) + \eta(z, t)), \varphi \in (0, 2\pi), z \in (0, L)\}. \quad (6.30)$$

Zid krvnog suda koji se menja sa vremenom t definisan je sa:

$$\Sigma(t) = \{((R(z) + \eta(z, t))\cos\varphi, (R(z) + \eta(z, t))\sin\varphi, z) \in R^3 | \varphi \in (0, 2\pi), z \in (0, L)\}. \quad (6.31)$$

Kako se krv u velikim sistemskim arterijama ponaša kao njutnovski fluid, nestišljiv i viskozan, protok krvi kroz velike sistemske arterije se modelira uz pomoć Navier-Stokesovih jednačina. Navier-Stokesove jednačine predstavljamo preko cilindričnih koordinata:

$$\rho_F \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right) \quad (6.32)$$

$$\rho_F \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (6.34)$$

gde je brzina fluida označena sa $v(r, z, t) = (v_r(r, z, t), v_z(r, z, t))$, pritisak sa $p(r, z, t)$. U prve dve jednačine sa leve strane, množenje tri izraza sa ρ_F (gustina fluida), opisuje inerciju fluida. Dok, ostali pojmovi opisuju zbir svih sila koje deluju na tečnosti. Poslednja jednačina, koja opisuje zakon očuvanja mase, je izvedena na osnovu pretpostavki da masa ne može biti ni uništena ni stvorena. Ove jednačine opisuju kako tečnost menja brzinu i pritisak, u zavisnosti od određenih početnih i graničnih uslova. Kako bi dobro definisali problem moramo da uvedemo sledeće ulazne i izlazne granične uslove:

Ulazni granični uslovi ($z = 0$):

$$p + \rho_F \frac{v_z^2}{2} = P_0(t) + p_{ref} \text{ (dinamički pritisak je propisan)}$$

$$v_r = 0 \text{ (fluid ulazi u cev paralelno sa osom simetrije)}$$

$$\eta = 0 \text{ (nema deformacije na ulasku u cev)} \quad (6.35)$$

Izlazni granični uslovi ($z = L$):

$$p + \rho_F \frac{v_z^2}{2} = P_L(t) + p_{ref}$$

$$v_r = 0 \text{ (fluid izlazi iz cevi paralelno sa osom simetrije)}$$

$$\eta = 0 \text{ (nema deformacije na izlasku iz cevi)} \quad (6.35)$$

U početku je predstavljeno da tečnost miruje, sa početnim uslovima:

$$\eta = \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0,$$

$$v = 0. \quad (6.37)$$

Ovako dobro predstavljeni početni i granični uslovi daju nam mogućnost za numeričkim rešavanjem problema.

Cilindrična bočna granica $\Sigma(t)$ pulsira u period kada krv teče kroz arteriju. Kada leva komora kontrakuje potiskuje se krv u aortu, ona prenosi kinetičku energiju u krv, proteže aortu kada pritisak u aorti dostigne maksimum. U protezanju zidovi aorte trzaju, oslobađajući potencijalnu energiju koja dolazi iz sistole. Ova interakcija između protoka krvi i viskoelastičnog zida poznata je u matematičkoj literaturi kao interakcija između fluida i strukture, opisuju se pomoću dva uslova:

- Zbog sile kohezije čestice krvi se lepe za zid arterije što dovodi do toga da se one kreću istom brzinom kao i zid:

$$v_r(R + \eta(z, t), z, t) = \frac{\partial \eta(z, t)}{\partial t}$$

$$v_r(R + \eta(z, t), z, t) = 0. \quad (6.38)$$

- Sile koje deluju sa zida na fluid su suprotne silama koje deluju sa fluida na zid:

$$f_r = [(p - p_{ref})\mathbf{I} - 2\mu D(\mathbf{v})]\mathbf{n} * \mathbf{e}_r \left(1 + \frac{\eta}{R}\right) \times \sqrt{1 + (\partial_z \eta)^2}, \quad (6.39)$$

gde $D(\mathbf{v})$ simetrični gradijent brzine, $\mathbf{n}$ je vektor normalan na $\Sigma(t)$ i $\mathbf{e}_r$ je radijalna jedinica vektora. Ova dva uslova se izračunavaju na bočnim granicama $\Sigma(t)$.

Problem pronalaženja osno-simetričnog protoka nestišljivog, viskoznog fluida kroz cilindrični domen rešava se pomoću Navier-Stokesovih jednačina (6.32-6.34) na cilindričnom domenu $\Omega(t)$, sa početnim i graničnim uslovima, ulaznim i izlaznim uslovima i sa bočnim graničnim uslovima. Dati problem teško je rešiti i sa numeričke i sa matematičke strane. Osnovni problem leži u činjenici da je jednačina fluida nelinearna, zbog kvadrata u jednačinama (6.32-6.33). Zbog toga se pribegava uprošćenim modelima, mi ćemo se osloniti na redukovani model koji je baziran na analizi bezdimenzionalne forme promenljivih.

Redukovane jednačine modela :

1. Dvodimenzionalne redukovane jednačine

Prvo uvodimo bezdimenzionalne promenljive $\tilde{r}, \tilde{z}, \tilde{t}$ koje se uvode preko:

$$r = R\tilde{r}, z = L\tilde{z}, t = \frac{1}{\omega}\tilde{t},$$

gde
$$\omega = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1}{\rho_F} \left(\frac{hE}{R(1-\sigma^2)} + p_{ref} \right)}. \quad (6.40)$$

Vremenska skala $\frac{1}{\omega}$ određuje frekvenciju oscilacije zida krvnog suda koje su izazvane talasima nastalim usled pritiska u fluidu. Bezdimenzionalnu brzinu, pritisak i deformaciju, respektivno, uvodimo na sledeći način:

$$v = V\tilde{v}, p = \rho_F V^2 \tilde{p}, \eta = \Xi \tilde{\eta}.$$

Proširivanje nepoznatih funkcija $\tilde{v}, \tilde{p}$ i $\tilde{\eta}$ u smislu malog parametra ϵ daju

$$\mathbf{v} = V(\tilde{\mathbf{v}}^0 + \epsilon \tilde{\mathbf{v}}^1 + \dots),$$

gde
$$2V = \frac{P}{\sqrt{\rho_F}} \left(\frac{hE}{R(1-\sigma^2)} + p_{ref} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.41)$$

$$\eta = \Xi(\tilde{\eta}^0 + \epsilon \tilde{\eta}^1 + \dots),$$

gde
$$2\Xi = PR \left(\frac{hE}{R(1-\sigma^2)} + p_{ref} \right)^{-1}, \quad (6.42)$$

i
$$p = \rho_F V^2 (\tilde{p}^0 + \epsilon \tilde{p}^1 + \dots). \quad (6.43)$$

Koeficijenti V i Ξ mere brzinu i deformaciju u parametarskom obliku, respektivno. Njihova rešenja su data u [18]. Parametar P je definisano sa

$$P^2 = \sup_{z,t} |\hat{p}|^2 + \left(\sup_z \int_0^t |\hat{p}_t| d\tau \right)^2 + T \int_0^t |P_L(\tau) - P_0(\tau)|^2 d\tau,$$

gde
$$\hat{p}(t) = \frac{P_L(t) - P_0(t)}{L} z + P_0(t) \quad (6.44)$$

i P predstavlja normu koja meri ulazni i izlazni pritisak, gradijent pritiska i prosečan pritisak tokom jednog srčanog ciklusa. Ova proširenja ćemo sada zameniti u originalne jednačine. Sistem jednačina ćemo izvesti sa redom tačnosti ϵ^2 , pri čemu će važiti:

- $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = 0$ je aproksimacija ravnoteže radijalnog momenta. To znači da važi $\tilde{p} = \tilde{p}^0 + \epsilon \tilde{p}^1$, prema tome $\tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{z}, \tilde{t})$,
- Aproksimacija radijalne komponente brzine, $\tilde{v}_r^0$, je nula. Naime, $v_r = V(\epsilon \tilde{v}_r^1 + \dots)$ dok $v_z = V(\tilde{v}_z^0 + \tilde{v}_z^1 + \dots)$, koji kaže da je radijalna komponenta brzine manja od osnih komponenti brzine za faktore za ϵ .
- Sledeći dvodimenzionalne početne-granične vrednosti problema, definisane na skalarnom domenu $\tilde{r} \in (0,1), \tilde{z} \in (0,1), \tilde{t} > 0$, opisuje jednu ϵ^2 aproksimaciju problema interakcije fluid i strukture:

Jednačine fluida:

$$Sh \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} + \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = \frac{1}{Re} \left\{ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{r}} \right) \right\}, \quad (6.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{v}_r) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\tilde{r} \tilde{v}_z) = 0, \quad (6.46)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = 0, \quad (6.47)$$

gde su Sh i Re , Stronuhalov⁹ i Reynoldsov broj, respektivno.

Bočni granični uslovi:

$$za \tilde{z} \in (0,1), \tilde{t} > 0 \begin{cases} \tilde{p} - \tilde{p}_{ref} = \frac{1}{\rho_F V^2} \left\{ \left(\frac{Eh}{(1-\sigma^2)R} + p_{ref} \right) \frac{\Xi}{R} \tilde{\eta} + \frac{h}{R} C_v \omega \frac{\Xi}{R} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} \right\}, \\ (\tilde{v}_r, \tilde{v}_z)|_{(1,\tilde{z},\tilde{t})} = \left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}}|_{(\tilde{z},\tilde{t})}, 0 \right) \end{cases} \quad (6.48)$$

Ulazni/izlazni granični uslovi:

$$\tilde{\eta}|_{(z=0/L,\tilde{t})} = 0, \tilde{p}|_{(z=0/L,\tilde{t})} = \frac{P_0(\tilde{t}) + p_{ref}}{\rho_F V^2},$$

⁹ Stronuhalov broj se koristi kod periodičnog protoka i definisan je sa $Sh = L\omega/V$.

$$\tilde{v}_r|_{1,z=0/L,\tilde{t}} = 0. \quad (6.49)$$

Početni uslovi:

$$\tilde{v}|_{(\tilde{r},\tilde{z},0)} = 0, \tilde{\eta}|_{(\tilde{z},0)} = 0. \quad (6.50)$$

Ovde će ϵ^2 aproksimacije za brzinu, pritisak i deformaciju izgledati:

$$\begin{aligned} v_r^\epsilon &= \epsilon V(\tilde{v}_r + \mathcal{O}(\epsilon^2)), \quad v_z^\epsilon = V(\tilde{v}_z + \mathcal{O}(\epsilon^2)), \\ p^\epsilon &= \rho_F V^2(\tilde{p} + \mathcal{O}(\epsilon^2)), \\ \eta^\epsilon &= \Xi(\tilde{\eta} + \mathcal{O}(\epsilon^2)). \end{aligned} \quad (6.51)$$

Iako smo smanjili ovaj dvodimenzionalni problem, on je i dalje prilično kompleksan da bi ga mogli rešiti numeričkom metodom. Problem pri rešavanju javlja se zbog nelinearnosti u jednačinama fluida kao i zbog toga što su jednačine definisane na domenu $\Omega(t)$ koji je ograničen pokretnom strukturom čija lokacija zavisi od rešenja. Da bi se problem pojednostavio još više, tipičan pristup je da se jednačina fluida posmatra preko poprečnog preseka, odakle dobijamo jednodimenzionalni model.

2. Jednodimenzionalni model

Nakon integrisanja jednačina (6.45) - (6.47) preko poprečnog preseka, dobija se sledeći sistem:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\Xi}{R} \frac{\partial \tilde{m}}{\partial \tilde{z}} = 0, \quad (6.52)$$

$$Sh \frac{\partial \tilde{m}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\tilde{\alpha} \frac{\tilde{m}^2}{\tilde{t}} \right) + \tilde{A} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = \frac{2}{Re} \sqrt{\tilde{A}} \left[\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{r}} \right]_{\tilde{\Sigma}}, \quad (6.53)$$

gde je $\tilde{A} = \left(1 + \frac{\Xi}{R} \tilde{\eta}\right)^2$ (srazmerna) oblast poprečnog preseka, $\tilde{m} = \tilde{A} \tilde{U}$ stopa protoka, $\tilde{U} = \frac{2}{\tilde{A}} \int_0^{1+\frac{\Xi}{R}\tilde{\eta}} \tilde{v}_z \tilde{r} d\tilde{r}$ prosečna brzina fluida kroz poprečni presek i $\tilde{\alpha} = \frac{2}{\tilde{A} \tilde{U}^2} \int_0^{1+\frac{\Xi}{R}\tilde{\eta}} \tilde{v}_z^2 \tilde{r} d\tilde{r}$ koeficijent zavisnosti od profila osne brzine $\tilde{v}_z(\tilde{r}, \tilde{z}, \tilde{t})$. Ovaj sistem nije zatvoren jer je koeficijent $\tilde{\alpha}$ i trenje zida $\left[\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{r}} \right]_{\tilde{\Sigma}}$ zavise od osnog profila brzine koji treba odrediti. Da bi imali dobro definisan problem koji se može numerički rešiti, treba pretpostaviti da je profil ose brzine zatvoren. Najčešće se za to koristi višočlani odnos između $\tilde{v}_z$ i $\tilde{r}$:

$$\tilde{v}_z = \frac{\gamma+2}{\gamma} \tilde{U}(\tilde{z}, \tilde{t}) \left(1 - \left(\frac{\tilde{r}}{1 + \frac{\varepsilon}{R} \tilde{\eta}(\tilde{z}, \tilde{t})} \right)^\gamma \right). \quad (6.54)$$

Kada je $\gamma = 2$ posmatramo Puzeljevu brzinu, a za $\gamma = 9$ aproksimacija je skoro „približno ravna“ brzini. Ostali slučajevi uključuju ravan profil brzine sa malim linearnim graničnim slojem (Bingman). Koristeći zatvaranje (6.54) dobijamo jednodimenzionalni sistem:

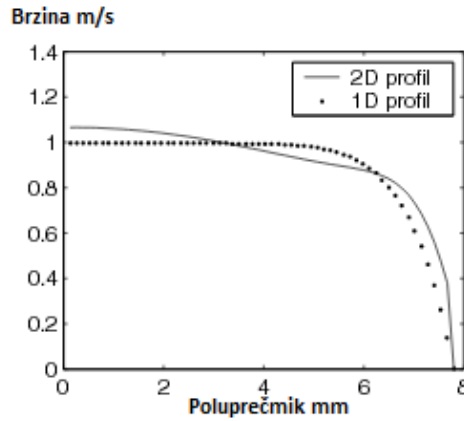
$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial z} = 0, \quad (6.55)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{m^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho_F} \frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{2\mu}{\rho_F} (\gamma + 2) \frac{m}{A}, \quad (6.56)$$

gde je $A = (R + \eta)^2$, a $m = AU$. Da bi smo odredili model u potpunosti potrebno je još da dobijemo jednačinu pritiska. Jednačina pritiska data u (6.48), u smislu površine poprečnog preseka, ima oblik:

$$p = p_{ref} + \left(\frac{Eh}{(1-\sigma^2)R} + p_{ref} \right) \left(\sqrt{\frac{A}{A_0}} - 1 \right) + \frac{hC_v}{R} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\frac{A}{A_0}} \right), \quad (6.57)$$

gde je $A_0 = R^2$ referentna površina poprečnog preseka. Jedan od nedostataka ovog modela je nesklad između osne brzine profila dobijene koristeći jednodimenzionalni model sa zatvaranjem (6.54) za $\gamma = 9$ i originalnog modela, što se može videti na grafiku na slici 18., detaljnije pogledati u [12]. Da bi se problemi koji se javljaju u jednodimenzionalnom modelu prevazišli uvodi se jedno-i-po dimenzionalni model.



Slika 18.

3. Jedno-i-po dimenzionalni redukovani model

Redukovani jedno-i-po dimenzionalni model se dobija iz dvodimenzionalnog modela koji smo predhodno obrađivali. Redukovani model je dvodimenzionalan, ali ima poseban oblik koji omogućava korišćenje jednodimenzionalne numeričke tehnike za numeričko računanje rešenja.

Redukovane jednačine uvodimo pod sledećim pretpostavkama:

- I. Domen je cilindar sa malim odnosom između poluprečnika i dužine tj. $\varepsilon = \frac{R_{max}}{L}$,
- II. Uzdužna deformacija je zanemarljiva,
- III. Radijalna deformacija nije prevelika tj. $\delta = \frac{\varepsilon}{R} \leq \varepsilon$,
- IV. Poluprečnik referentne cevi se sporo menja tj. $R'(z) \leq \epsilon$
- V. Reynoldsov broj je mali, iznosi $Re \approx 800$,
- VI. Parcijalni izvod po z od bezdimenzionalnih jednačina su O_1 (nisu lake).

Uvodimo sledeću notaciju za proširenje kod brzine, deformacije i pritiska:

$$\begin{aligned} v_z &= v_z^{0,0} + v_z^{0,1} + v^{1,0}, v_r = v_r^{1,0} \\ \eta &= \eta^{0,0} + \eta^{0,1} + \eta^{1,0}, p = p^{0,0} + p^{0,1}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Prva jednačina u sva tri problema predstavlja zakon održanja mase, dok druga jednačina odgovara drugom Njutnovom zakonu kretanja. Originalni granični uslovi problema, postavljeni na domenu sa pokretnim bočnim granicama $\Sigma(t)$, aproksimira se i definiše na fiksom domenu oblika cilindra sa poluprečnikom $R = R(z)$. Jedno-i-po dimenzionalne redukovane jednačine koje imaju cilindričan domen sa sporo varirajućim referencama poluprečnika $R = R(z)$ imaju sledeći oblik:

Nulta aproksimacija:

Pronaći $(\eta^{0,0}, v_z^{0,0})$ tako da

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta^{0,0}}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R r v_z^{0,0} dr &= 0, \\ \rho_F \frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial t} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial r} \right) &= - \frac{\partial p^{0,0}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (6.59)$$

$$v_z^{0,0}|_{r=0} - \text{ograničeno}, v_z^{0,0}|_{r=R} = 0, v_z^{0,0}|_{t=0} = 0$$

$$\eta^{0,0}|_{t=0} = 0, \quad p^{0,0}|_{z=0} = P_0, p^{0,0}|_{z=L} = P_L,$$

gde

$$p^{0,0} = \left(\frac{Eh}{(1-\sigma^2)R} + p_{ref} \right) \frac{\eta^{0,0}}{R} + \frac{hC_v}{R^2} \frac{\partial \eta^{0,0}}{\partial t}. \quad (6.60)$$

δ korekcija:

Pronaći $(\eta^{0,1}, v_z^{0,1})$ tako da

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta^{0,1}}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R r v_z^{0,1} dr &= -\frac{1}{2R} \frac{\partial}{\partial t} (\eta^{0,0})^2, \\ \rho_F \frac{\partial v_z^{0,1}}{\partial t} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z^{0,1}}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial p^{0,1}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (6.61)$$

$$v_z^{0,1}|_{r=0} - \text{ograničeno}, v_z^{0,1}|_{r=R} = -\eta^{0,0}, \frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial r}|_{r=R} = 0, v_z^{0,1}|_{t=0} = 0,$$

$$\eta^{0,1}|_{t=0} = 0, \quad p^{0,1}|_{z=0} = 0, p^{0,1}|_{z=L} = 0,$$

gde

$$p^{0,1} = \left(\frac{Eh}{(1-\sigma^2)R} + p_{ref} \right) \left(\frac{\eta^{0,1}}{R} - \left(\frac{\eta^{0,0}}{R} \right)^2 \right) + \frac{hC_v}{R^2} \left(\frac{\partial \eta^{0,1}}{\partial t} - \frac{\eta^{0,0}}{R} \frac{\partial \eta^{0,1}}{\partial t} \right). \quad (6.62)$$

ε korekcija:

Pronaći $(\eta^{1,0}, v_z^{1,0})$ tako da

$$v_r^{1,0}(r, z, t) = \frac{1}{r} \left(R \frac{\partial \eta^{0,0}}{\partial t} + \int_r^R \xi \frac{\partial \eta_z^{0,0}}{\partial z} (\xi, z, t) d\xi \right), \quad (6.63)$$

$$\rho_F \frac{\partial v_z^{1,0}}{\partial t} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z^{1,0}}{\partial r} \right) = -\rho_F \left(v_r^{1,0} \frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial r} + v_z^{0,0} \frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial z} \right). \quad (6.64)$$

$$v_z^{1,0}|_{r=0} - \text{ograničeno}, v_z^{1,0}|_{r=R} = 0, v_z^{1,0}|_{t=0} = 0.$$

Krajnje rešenje:

$$v_z = v_z^{0,0} + v_z^{0,1} + v_z^{1,0}, v_r = v_r^{1,0}$$

$$\eta = \eta^{0,0} + \eta^{0,1} + \eta^{1,0}. \quad (6.65)$$

U slučaju modela sa elastičnom membranom za vrednost viskozne konstante se uzima nula. Ovaj model omogućava proučavanje, između ostalog, talasa u arterijama pod uticajem dva različita viskozna efekta. Jedan je uticaj fluidne viskoznosti, a drugi je uticaj viskoznosti zida. U nastavku ćemo se fokusirati na numeričke simulacije izvedene na osnovu predhodnog modela.

Numerička simulacija: Kao što je već rečeno u ovom delu rada objasnićemo numerički postupak za rešavanje predhodno obrađenog modela koji je pokazao jednostavnost i brzinu pri rešavanju, jer zahteva samo tehnike za rešavanje jednodimenzionalnog modela, ali sa druge strane uzima i neke činjenice koje su prisutne u dvodimenzionalnom modelu.

Naime, da bi se problem rešio moramo ga zapisati u drugačijem obliku, moramo prvo diferencirati prvu jednačinu (6.59) u odnosu na vreme i priključiti joj zatim drugu jednačinu:

Prva jednačina sistema (6.59) nam je data sa:

$$\frac{\partial \eta^{0,0}}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R r v_z^{0,0} dr = 0.$$

Kao što je već napomenuto, potrebno je da je diferenciramo po vremenu t :

$$\frac{\partial^2 \eta^{0,0}}{\partial t^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R r \frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial t} dr = 0, \quad (6.66)$$

zatim ćemo iz druge jednačine

$$\rho_F \frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial t} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p^{0,0}}{\partial z},$$

izraziti $\frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial t}$ na sledeći način:

$$\frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial t} = \mu \frac{1}{r \rho_F} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho_F} \frac{\partial p^{0,0}}{\partial z}, \quad (6.67)$$

pa nam prva jednačina postaje:

$$\frac{\partial^2 \eta^{0,0}}{\partial t^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R r \left(\mu \frac{1}{r \rho_F} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho_F} \frac{\partial p^{0,0}}{\partial z} \right) dr = 0. \quad (6.68)$$

Sada ćemo iskoristiti pretpostavku da pritisak $p = p(z, t)$ ne zavisi od r i dobijamo

$$\frac{\partial^2 \eta^{0,0}}{\partial t^2} + \frac{1}{R} \mu \frac{1}{\rho_F} \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R \frac{r}{\rho_F} \frac{\partial p^{0,0}}{\partial z} dr = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \eta^{0,0}}{\partial t^2} + \frac{\mu}{\rho_F} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial r} \Big|_{r=R} \right) - \frac{1}{R \rho_F} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p^{0,0}}{\partial z} \int_0^R r dr = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \eta^{0,0}}{\partial t^2} + \frac{\mu}{\rho_F} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial r} \Big|_{r=R} \right) - \frac{R}{2 \rho_F} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 p^{0,0}}{\partial z^2} = 0. \quad (6.69)$$

Na kraju naš sistem izgleda:

$$\frac{\partial^2 \eta^{0,0}}{\partial t^2} - \frac{R}{2 \rho_F} \frac{\partial^2 p^{0,0}}{\partial z^2} = - \frac{\mu}{\rho_F} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial r} \Big|_{r=R} \right), \quad (6.70)$$

$$\rho_F \frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial t} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p^{0,0}}{\partial z}, \quad (6.71)$$

sa početnim i graničnim uslovima

$$\begin{aligned} v_z^{0,0} \Big|_{r=0} - \text{ograničeno}, v_z^{0,0} \Big|_{r=R} = 0, v_z^{0,0} \Big|_{t=0} = 0 \\ \eta^{0,0} \Big|_{t=0} = 0, p^{0,0} \Big|_{z=0} = P_0, p^{0,0} \Big|_{z=L} = P_L, \end{aligned} \quad (6.72)$$

gde

$$p^{0,0} = \left(\frac{Eh}{(1-\sigma^2)R} + p_{ref} \right) \frac{\eta^{0,0}}{R} + \frac{hC_v}{R^2} \frac{\partial \eta^{0,0}}{\partial t}.$$

Kada je u pitanju δ korekcija (6.61) prva jednačina u sistemu dobija se analogno kao u predhodnom sistemu, pa dati sistem možemo zapisati na sledeći način:

$$\frac{\partial^2 \eta^{0,1}}{\partial t^2} - \frac{R}{2 \rho_F} \frac{\partial^2 p^{0,1}}{\partial z^2} = - \frac{\mu}{\rho_F} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_z^{0,1}}{\partial r} \Big|_{r=R} \right) - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\eta^{0,0})^2, \quad (6.73)$$

$$\rho_F \frac{\partial v_z^{0,1}}{\partial t} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z^{0,1}}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p^{0,1}}{\partial z}, \quad (6.74)$$

sa početnim i graničnim uslovima

$$v_z^{0,1}|_{r=0} - \text{ograničeno}, v_z^{0,1}|_{r=R} = -\eta^{0,0}, \frac{\partial v_z^{0,0}}{\partial r}|_{r=R} = 0, v_z^{0,1}|_{t=0} = 0,$$

$$\eta^{0,1}|_{t=0} = 0, p^{0,1}|_{z=0} = 0, p^{0,1}|_{z=L} = 0, \quad (6.75)$$

gde

$$p^{0,1} = \left(\frac{Eh}{(1-\sigma^2)R} + p_{ref} \right) \left(\frac{\eta^{0,1}}{R} - \left(\frac{\eta^{0,0}}{R} \right)^2 \right) + \frac{hc_v}{R^2} \left(\frac{\partial \eta^{0,1}}{\partial t} - \frac{\eta^{0,0}}{R} \frac{\partial \eta^{0,1}}{\partial t} \right).$$

Treći sistem ε korekcija ostaje nepromenjen jer se rešava direktno iz predhodna dva sistema koristeći vrednosti dobijene za njih. Prva jednačina u oba problema može se posmatrati kao jednodimenzionalna talasna jednačina za z i t , a druga kao jednodimenzionalna toplotna jednačina za r i t . One se rešavaju metodom jednodimenzionalnih konačnih elemenata.

Redukovani model proučavan u ovom radu opisuje glavne karakteristike protoka krvi u većim arterijama. Ponašanje zidova arterije modelirano je prema linearno viskoelastičnim membranama.

7. ZAKLJUČAK

Matematika nisu samo brojevi i gomila formula koje je neko davno dokazao, matematika je univerzalni jezik prirodnih nauka. Svaku pojavu u prirodi, bila ona fizička ili hemijska, može se predstaviti matematički. Pomoću raznih matematičkih alata moguće je predstaviti razne prirodne pojave kao što su vrtlozi vetra, virovi u rekama, talasi u moru, proticanje tečnosti kroz cevi i druge. Matematički alati se mogu koristiti i u industriji, medicini, politici, informatici i mnogim drugim oblastima, za rešavanje različitih problema. Razvojem kompjutera znatno je ubrzano rešavanje matematičkih problema.

Tema master rada birana je kao što je već spomenuto zbog svoje velike primenljivosti i upotrebe u svakodnevnom životu. U radu su predstavljeni problemi sa kojima se ljudska vrsta sreće svakodnevno. Da bi se dobro modelirali neophodno je dobro poznavati prirodu problema. Zato smo se u radu prvo osvrnuli na bitne karakteristike fluida i osobine njihovog kretanja. Kako bi matematički predstavili fizičke pojave morali smo da iskoristimo naše znanje iz parcijalnih diferencijalnih jednačina, posebno, zbog prirodnih pojava osvrnuli smo se na linearne parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda.

U radu smo predstavili osnovne jednačine fluidnog kretanja Navier - Stokesove i Ojlerove jednačine. Dali smo primer za svaku od njih, a posebno smo se osvrnuli na Navier – Stokesove jednačine zbog njegove primene na njutnovske fluide. Prilikom modeliranja akcenat smo stavili na model širenja olova u vodi za piće i protok krvi kroz arterije zbog svoje velike važnosti u životu svakog pojedinca. Predstavili smo zasebne modele i dali njihova numerička i analitička rešenja. Oba problema su predstavljena preko Navier – Stokesovih jednačina uz različite modifikacije u zavisnosti od problema. Kod modela protoka krvi kroz arterije posmatrali smo slučaj kada su u pitanju velike sistemске arterije zbog jednostavnosti pri rešavanju, kako bi mogli da koristimo navedenu Navier – Stokesove jednačine, jer se u tom slučaju krv ponaša kao njutnovska. Ovi modeli nisu samo teorijske prirode, i jedan i drugi imaju važnu ulogu kada je u pitanju ljudski život. Širenje olova u vodi za piće je problem na svetskom nivou, koji je moguće smanjiti upotrebom ovog modela. Unapređivanje modela za protok krvi kroz arterije je od velikog značaja za medicinu, operacije i lečenja su znatno sigurnija i preciznija.

Na fakultetu smo se samo delimično upoznali sa primenom matematike u realnom životu, neki slučajevi iz svakodnevnog života su nam odavno poznati, a sa nekim ćemo se tek sresti. Smatram da bi primenu matematike i njen značaj u životu trebalo upoznavati od ranog detinjstva. Većina ljudi nije svesna koliko je matematika korisna i značajna u životu.

Priroda je ogromna knjiga u kojoj je napisana nauka. Ona je stalno otvorena pred našim očima, ali je čovek ne može razumeti ukoliko prethodno ne nauči jezik i slova kojim je napisana. A napisana je ona jezikom matematike.

Galileo Galilej

LITRATURA

- [1] <http://www.math.ualberta.ca/~fazly/files/HistoryPDE.pdf>
- [2] Olsen-Kettle L., *Numerical solution of partial differential equations*, The University of Queensland
- [3] http://matematika3.etf.rs/PDFs/skripte/vise_prom.pdf
- [4] Kuzmanović D., Sedlak A., Nikolić D., Obradović I., *Matematička fizika*, Univerzitet u Beogradu,(2003)
- [5] Nedeljkov M., *Parcijalne diferencijalne jednačine*, Univerzitet u Novom Sadu, (2004)
- [6] https://en.wikipedia.org/wiki/Navier%E2%80%93Stokes_equations
- [7] Stojanović S., *Mehanika fluida*, Univerzitet u Novom Sadu, (2002)
- [8] <http://andrew.gibiansky.com/downloads/pdf/Fluid%20Dynamics:%20The%20Navier-Stokes%20Equations.pdf>
- [9] Gallavotti G., *Foundations of Fluid Dynamics*, Springer (2004)
- [10] Arthur C. Guyton, M.D., *Medicinska fizijologija*, Univerziteta Jackson, prevod W.B.SAUNDERS, Beograd (2003)
- [11] Bukurov, M., *Mehanika fluida*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad (2013)
- [12]https://www.researchgate.net/profile/Josip_Tambaca/publication/7229446_Blood_flow_in_compliant_arteries_an_effective_viscoelastic_reduced_model_numerics_and_experimental_validation/links/0fcfd5098dc2ae5b44000000.pdf
- [13] G.K.Batchelor , *An Introduction To Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (first publisher 1967).
- [14] <https://www.math.iupui.edu/~gguidobo/MyWeb/papers/SIAPviscoelastic.pdf>
- [15] <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X01000774>
- [16] <http://www.krstarica.com/zdravlje/nega/olovo-u-vodi-za-pice/>

- [17] <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0043135483902567>
- [18] <http://amikelic.free.fr/CanicLampMikTambfinal.pdf>
- [19] <https://bundeln.wordpress.com/2013/04/25/hemijski-sastav-krvi-2/>
- [20] <https://bs.wikipedia.org/wiki/Viskoznost>
- [21] http://www.herz-srb.com/presseundnews.php?seo_link=re%C5%A1avanje-problema-pove%C4%87anja-pritiska-u-instalacijama-pitke-vode
- [22] https://sr.wikipedia.org/sr/%D0%9A%D1%80%D0%B2%D0%BD%D0%B8_%D1%81%D1%83%D0%B4
- [23] <https://bs.scribd.com/doc/4931907/Vodovodi-I-dio>
- [24] <https://sh.wikipedia.org/wiki/Vodovod>
- [25] G.N.Watson, Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, (second edition 1966)
-

Slika 5. <http://savremenisport.com/teorija-sporta/sportska-medicina/12/398/kardiovaskularni-sistem>

Slika 7. <https://bs.scribd.com/doc/4931907/Vodovodi-I-dio>

Slika 12. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X01000774>

Slika 17. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X01000774>

Biografija



Bojana Velečković je rođena 26.04.1988. godine u Novom Sadu. Završila je Osnovnu školu „Sonja Marinković“ u Novom Sadu 2003. godine. Iste godine je upisala Srednju ekonomsku školu „Svetozar Miletić“ u Novom Sadu. Osnovne studije Primenjene matematike, modul Finansijska matematika na Prirodno – matematičkom fakultetu u Novom Sadu upisala je 2007. godine i završava ih 2012. godine. Iste godine upisuje master studije Primenjene matematike, modul Finansijska matematika. Položila je sve ispit predviđene planom i programom master studija za modul Finansijska matematika, kao i pedagoško, psihološko, metodičku grupu predmeta. Poslednji ispit je dala u aprilskom ispitnom roku 2015. godine. Na osnovnim studijama obavljala je program radne prakse u Pokrajinskom sekretarijatu za sport i omladinu i bila član studentskog parlamenta tri godine i predstavnik studenata u veću Departmana za matematiku i informatiku. Tokom celog fakultetskog obrazovanja aktivno sudila odbojkaške utakmice i učestvovala kao sudija na velikim međunarodnim takmičenjima.

KLJUČNA DOKUMENTACIJA

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacije*

TD

Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*

TZ

Vrsta rada: *Master rad*

VR

Autor: *Bojana Velečković*

AU

Mentor: *dr Marko Nedeljkov*

MN

Naslov rada: *Neke matematičke osobine fluida*

NR

Jezik publikacije: *srpski (latinica)*

JP

Jezik izvoda: *srpski/engleski*

JI

Zemlja publikacije: *Srbija*

ZP

Uže geografsko područje: *Vojvodina*

UGP

Godina: 2016

GO

Izdavač: *Autorski reprint*

IZ

Mesto i adresa: *Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4*

MA

Fizički opis rada: 7/78/24/1/2/18/0

(broj poglavlja/ broj strana/ broj literatura/ broj citata/ broj tabela/ broj slika/ broj priloga)

FO

Naučna oblast: *Matematika*

NO

Naučna disciplina: *Parcijalne diferencijalne jednačine*

ND

Predmet odrednica/Ključne reči: *Fluid, Parcijalne diferencijalne jednačine, Navije – Stoksove jednačine, Modeli protoka vode i krvi*

PO

Čuva se: *Bibliotek Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno – matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Glavni zadatak ovog master rada je da u sličnim uslovima upoređujemo rešenja jednačina kretanja fluida uz različite pretpostavke o medelima, i to najčešće ćemo upoređivati viskozno i bezviskozno kretanje stišljivih i nestišljivih fluida.

U prvom delu rada dat je kratak opis osnovnih pojmova vezanih za mehaniku fluida i sam fluid, njegove osobine i kretanje.. Zatim smo čitaoce upoznali sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama koje smo koristili u radu. U centralnom delu rada smo se osvrnuli na jednačine fluidnog kretanja. Ako fluid posmatramo kao viskozan i nestišljiv onda koristimo Navije-Stoksov model. Međutim, ako posmatramo neviskozne fluide onda ćemo koristiti Ojlerov model, pa smo dali model plitkih voda kada je fluid nestišljiv i model gasne dinamike kada je fluid stišljiv. Nakon toga smo opisali proticanje tečnosti kroz cilindrične cevi, gde smo prvo predstavili jednačine vezane za brzinu proticanja tečnosti, a zatim smo dali primere za proticanje vode i krvi kroz iste. Odnosno, opisali smo modele i dali njihova analitička i numerička rešenja. Fokusirali smo se kada je voda u pitanju na širenje olova u vodi za piće zbog njegove velike problematike u svetu, a kada je krv u pitanju na proticanje kroz velike sistemske arterije.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 04.05.2016.

DP

Datum odbrane: 2016.

DO

Članovi komisije:

Predsednik: *dr Danijela Rajter –Ćirić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet,*

Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Milica Žigić, docent, Prirodno – matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sad, član

Član: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno – matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu(mentor)

ČK

KEY WORD DOCUMENTATION

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE

Accession number:

ANO

Indentification number:

IN

Document type: *Monograph type*

DT

Type of record: *Printed text*

TR

Contents Code: *Master's thesis*

CC

Author: *Bojana Velečković*

AU

Mentor: *Marko Nedeljkov, Ph.D*

MN

Title: *Some Mathematical Properties of Fluids*

TI

Language of text: *Serbian(Latin)*

LT

Language of abstract: *Serbian/English*

LA

Countrz of publication: *Serbia*

CP

Locality of publication: *Vojvodina*

LP

Publication year: 2016

PY

Publisher: *Autor's reprint*

PU

Publication place: *Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*

PP

Physical description: 7/78/24/1/18/0

(number of sections/pages/references/tables/pictures /appendices)

PD

Scientific field: *Mathematics*

SF

Scientific Discipline: *Partial Differential Equations*

SD

Subject/ Key word: *Fluid, Partial differential equations, Navier – Stokes equations, Models flow of waters and blood*

SKW

Holding data: *The Library of the Department of Matematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad*

HD

Note:

N

Abstract: The first part of the paper provides a short description of basic terms relating to fluid mechanics and fluid itself, its characteristics and movements. Furthermore, readers are introduced to partial differential equations used in the paper.

The main part of the paper is focusing on equations of fluid movements. If the fluid is observed as viscous and incompressible we are using Navier-Stokes model. However, if the focus is on non-viscous fluids than we use Oiler's model, thus, we provided a model of shallow waters when the fluid is non-viscous and a model of gas dynamics when the fluid is viscous. We then describe the flow of fluid through the cylindrical tube, where we first presented the equations related to the flow velocity of liquids, and then we give examples of the water and the blood flow through the same tubes. That is, we described the models and give flair analytical and numerical solutions. Regarding the water, we focused on the spread of lead in drinking water because of its big issues in the world; however, when it comes to blood the focus was on the flow through the major body arteries.

AB

Accepted by the Scintifiic Board on: 04.05.2016.

ASB

Defended: *may 2016*

DE

Thesis defended board:

President: *Danijela Rajter –Ćirić, Ph.D., full professor, Faculty of Science, University of*

Novi Sad,

Member: Milica Žigić, Ph.D, docent, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Marko Nedeljkov, Ph.D, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad, mentor

DB