UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATICKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Bojana Soro

BAYES-OVSKO OCENJIVANJE PARAMETARA GARCH MODELA

-MASTER RAD-

Mentor
Prof.dr Zagorka Lozanov-Crvenković

Novi Sad, 2018.

Sadržaj

Pregled slika

Pregled tabela

Predgovor

"Ne postoji nijedna matematička oblast, ma kako ona apstraktna bila, koja se ne bi mogla primeniti na pojave realnog sveta. "

Nikolay Ivanovich Lobachevsky
(1792-1856)-ruski matematičar

Matematika se može primeniti u gotovo svim sferama života. Danas je teško pronaći oblast u kojoj matematika nije našla svoju primenu. Primenjena matematika koristi matematička znanja kako bi došla do rešenja konkretnih problema. U širokoj lepezi primene ove egzaktne nauke moja sfera interesovanja je finansijska matematika.

U modernoj ekonomskoj literaturi gotovo je nemoguće govoriti o bilo kakvom vidu poslovanja a da se u obzir ne uzmu rizici i posledice koje oni mogu doneti. Uopšteno govoreći, rizik se definiše kao neizvesnost budućeg ishoda. Od velikog značaja je pratiti kretanja rizika kako bi se donele ispravne odluke i kako bi se ostvario što veći profit na finansijskim tržištima. Matematički modeli koji se bave merenjem i procenom rizika su GARCH modeli.

Predmet ovog master rada je Bayes-ovsko ocenjivanje parametara GARCH modela. GARCH modeli su neophodan alat u finansijskoj ekonometriji i do nedavno su parametri ovih modela bili ocenjivani korišćenjem klasične tehnike maksimalne verodostojnosti. Ovaj rad ima cilj da demonstrira Bayes-ov pristup u oceni parametara i da ukaže na njegove prednosti u poređenju sa klasičnim pristupom. Istraživanje je sprovedeno u softverskom paketu R i zasnovano je na stvarnim podacima. Prvo poglavlje daje pregled svih definicija i oznaka korišćenih u radu. U drugom poglavlju predstavljen je koncept Bayes-ove statistike. Nakon toga izložene su tehnike simulacije koje se koriste prilikom generisanja uzorka. Sledeća tri poglavlja opisuju GARCH modele i njegove modifikacije pri čemu su parametri svih navedenih modela ocenjeni pomoću Bayes-ovog pristupa. U poslednjem poglavlju prikazani su rezultati dobijeni implementacijom modela.

* * *

Izuzetnu zahvalnost dugujem svojoj mentorki, dr Zagorki Lozanov-Crvenković, za savete, posvećenost, uloženi trud, razumevanje, kao i za svo preneto znanje tokom osnovnih i master studija.
Takođe, želim da se zahvalim i ostalim članovima komisije, dr Ivani Štajner-Papuga i dr Ljiljani Gajić, na interesantnim i poučnim predavanjima tokom dosadašnjeg studiranja.
Posebnu zahvalnost dugujem mr Radenku Kostić na korisnim savetima i ukazanim smernicama prilikom izrade master rada.
Najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici, majci Stoji, ocu Mirku i sestri Teodori, na bezuslovnoj ljubavi podršci i pažnji koju mi pružaju svakodnevno.

Bojana Soro

1 Uvod

1.1 Pregled oznaka i definicija

U tabeli 1.1 prikazane su oznake koje će se koristiti u radu.

Oznaka	Značenje
$\Gamma(\bullet)$	gama funkcija
I_d	identična matrica dimenzije d
$\mathcal{L}(\bullet)$	funkcija verodostojnosti
$\mathcal{L}(\bullet\|y)$	marginalna funkcija verodostojnosti
$p_\bullet(\bullet)$	funkcija gustine
$F_\bullet(\bullet)$	funkcija raspodele
$p(\bullet\|y)$	posteriorna raspodela
$\mathbb{P}(\bullet)$	verovatnoća
$\mathbb{E}(\bullet)$	očekivanje
$\mathbb{E}(\bullet\|\bullet)$	uslovno očekivanje
$\mathbf{0}$	nula vektor
$(\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2)$	parametri ARCH modela
$\boldsymbol{\alpha}$	vektor parametara ARCH modela
β	parametar GARCH modela
$\boldsymbol{\gamma}$	vektor parametara linearnog regresijskog modela
ν	parametar stepena slobode kod studentove-t raspodele
ϖ_t	latentna skalirana promenljiva u trenuktku t
$\boldsymbol{\varpi}$	vektor latentno skaliranih promenljivih
$\theta \quad \psi \quad \Theta$	niz (vektora) parametara modela
$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$
y_t	zavisna promenljiva u trenutku t
$\mathbf{y}$	vektor observacija y_t
ε_t	greška modela u trenutku t
$\hat{\varepsilon}_t$	rezidual modela u trenutku t
u_t	greška linearnog regresijskog modela u trenutku t
$\mathbf{u}$	vektor grešaka u linearnom regresijskom modelu
m	broj egzogenih ili zaostalih zavisnih promnljivih
$\mathbf{x}_t$	vektor egzogenih ili zaostalih zavisnih promenjivih u trenutku t
X	matrica čija je t-ta vrsta $\mathbf{x}_t'$
h_t	uslovna varijansa u trenutku t
h_y	bezuslovna varijansa osnovnog procesa
$\Sigma \quad \Lambda$	dijagonalne matrice uslovne varijanse
ϱ	skalirani faktor $\quad \varrho = \dfrac{\nu - 2}{\nu}$
J	broj izvlačenja u posteriornom uzorku
$q_\bullet(\bullet)$	predložena raspodela
$\mu_\bullet \quad \Sigma_\bullet$	hiperparametri normalne (odsečene) raspodele
$\widehat{\mu_\bullet} \quad \widehat{\Sigma_\bullet}$	predloženi parametri normalne (odsečene) raspodele
$\lambda \quad \delta$	hiperparametri pomerene Eksponencijalne raspodele
K_ε	koeficijent ekscesa greške

K_y	bezuslovni koeficijent ekscesa osnovnog procesa
$l_t^* \quad v_t^* \quad v_t^{**}$	rekurzivne transformacije
$\mathbf{c}_t$	vektor rekurzivnih transformacija
C	matrica čija je t-ta vrsta $\mathbf{c}_t'$
$\mathcal{N}(0,1)$	standardizovana normalna raspodela
$\mathcal{N}_d(\mu,\Sigma)$	d-dimenzionalna normalna raspodela sa vektorom očekiva-nja μ i kovarijansnom matricom Σ
$\mathcal{S}(\mu,\sigma^2,\nu)$	standardna studentova raspodela sa očekivanjem μ, skalira-nim parametrom σ^2 i ν stepena slobode
$\mathcal{IG}(a,b)$	inverzna Gama raspodela sa parametrima a i b
χ_k^2	Hi-kvadrat raspodela sa k stepena slobode

Tabela 1.1: Lista oznaka

U nastavku slede definicije osnovnih pojmova koji će se koristiti u radu.
Na samom početku uvode se osnovni pojmovi iz verovatnoće i stohastike [4, 5].

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$ - skup svih elementarnih događaja, tj. skup svih ishoda nekog eksperimenta.

Definicija 1.1. *Neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Ako važe sledeći uslovi:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $\mathcal{A} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{\mathcal{A}} \in \mathcal{F}$
3. $\{A_i\}_{i\subseteq\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i\subseteq\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$

*tada je $\mathcal{F}$ σ-**polje** (σ-algebra) nad Ω.*

Definicija 1.2. *Najmanje σ-polje koje sadrži sve otvorene podskupove od $\mathbb{R}^n$ zove se **Borelovo σ-polje** nad $\mathbb{R}^n$ i označava se sa $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ili $\mathcal{B}^n$.*

Definicija 1.3. *Preslikavanje (funkcija) $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ koje zadovoljava uslove:*

1. $P(\Omega) = 1$
2. $\{A_i\}_{i\subseteq\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ *i* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *za* $i \neq j \Rightarrow P\big(\sum_{i=1}^n A_i\big) = \sum_{i=1}^n P\big(A_i\big)$

*zove se **verovatnoća** nad $\big(\Omega, \mathcal{F}\big)$.*
*Uređena trojka $\big(\Omega, \mathcal{F}, P\big)$ naziva se **prostor verovatnoća**.*

Posmatra se eksperiment koji ima $n > 1$ mogućih ishoda koji su podjednako verovatni. Ukoliko nema nikakve dodatne informacije o ishodu eksperimenta, verovatnoća svakog od n mogućih ishoda iznosi $\frac{1}{n}$.

Sada se posmatra isti eksperiment ali uz činjenicu da je na raspolaganju informacija da se iz određene grupe od $m < n$ ishoda nije realizovao ni jedan. Sa ovom informacijom skup mogućih ishoda eksperimenta svodi se na ukupno $n - m$ ishoda. Verovatnoća realizacje m ishoda za koje se zna da se nisu dogodili jednaka je nuli, dok je verovatnoća svakog od mogućih $n-m$ ishoda eksperimenta jednaka $\frac{1}{n-m}$. Suština je u tome da se prikupljanjem relevantnih informacija u vezi realizacije eksperimenta mogu promeniti verovatnoće pojedinačnih ishoda.

Definicija 1.4. *Neka je dat prostor verovatnoća* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i neka su dati događaji* $A, B \in \mathcal{F}, P(B) \neq 0$. ***Uslovna verovatnoća*** *događaja A pod uslovom realizacije događaja B u oznaci* $p(A|B)$ *definiše se sa:*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Drugim rečima, ukoliko se traži verovatnoća događaja A a zna se da se realizovao događaj B, tada se skup svih mogućih ishoda svodi na skup B, dok se skup povoljnih ishoda za događaj A svodi na skup AB.

Definicija 1.5. *Neka je dat prostor verovatnoća* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i neka su dati događaji* $A, B \in \mathcal{F}$. *Događaji A i B su* ***nezavisni*** *ako važi da je*

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Kao što je navedeno u definiciji 1.4., verovatnoća nekog događaja može se promeniti ukoliko je poznato da se u slučajnom eksperimentu realizovao neki drugi događaj.
Ako se sada umesto događaja posmatraju slučajne promenljive i njihove raspodele mogu se izvesti slični zaključci. Ukoliko je poznato da se u slučajnom eksperimentu realizovao neki događaj tada se raspodele slučajnih promenljivih mogu razlikovati u odnosu na slučaj kada se o ishodu slučajnog eksperimenta ništa ne zna.

Definicija 1.6. *Neka je data slučajna promenljiva X, neka je dat događaj H takav da je* $P(H) \neq 0$ *i neka je* $B \subset \mathbb{R}$ *proizvoljan Borelov skup.*

(i) ***Uslovna raspodela slučajne promenljive*** *X u odnosu na događaj H je verovatnoća*

$$P_{X|H}(B) = P(X \in B|H) = \frac{P\big(\{X \in B\} \cap H\big)}{P(H)}$$

(ii) ***Uslovna funkcija raspodele*** *slučajne promenljive X u odnosu na događaj H je funkcija*

$$F_{X|H}(x) = P(X \le x|H) = \frac{P\big(\{X \le x\} \cap H\big)}{P(H)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(iii) ***Uslovna funkcija gustine*** *verovatnoće slučajne promenljive X u odnosu na događaj H je funkcija $x \mapsto f_{X|H}(x)$, takva da važi:*

$$F_{X|H}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|H}(t)dt \quad , x \in \mathbb{R}$$

(iv) *Neka je data diskretna slučajna promenljiva X. Definiše se skup $S \subset \mathbb{R}$ na sledeći način: $S = \{x \in \mathbb{R} | P(X = x) \neq 0\}$.*
Uslovni zakon raspodele *slučajne promenljive X u odnosu na događaj H je zakon raspodele:*

$$P\big(X = x_k | H\big) = \frac{P\big(X = x_k | H\big)}{P(H)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

U prethodnoj definiciji navedeno je kako se definišu uslovne raspodele u odnosu na neki “uslovni ”događaj.
Ukoliko se sada i taj događaj predstavi kao neka slučajna promenljiva, dobijaju se uslovne raspodele u odnosu na slučajnu promenljivu.

Definicija 1.7. *Neka su date slučajna promenljiva X i slučajna promenljiva Y koja je diskretna i neka je $B \subset \mathbb{R}$ proizvoljan Borelov skup. Raspodela slučajne promenljive X u odnosu na slučajnu promenljivu Y definiše se kao raspodela koja pri realizaciji događaja $\{Y = y\}$ dobija vrednost:*

$$P\big(X \in B | Y = y\big) = \frac{P\big(X \in B, Y = y\big)}{P\big(Y = y\big)}.$$

U prethodnim definicijama uslovna verovatnoća i uslovne raspodele definisane su u odnosu na događaje koji su pozitivne verovatnoće.
Sada su date dve *neprekidne* slučajne promenljive X i Y i poznata je njihova zajednička raspodela.

Definicija 1.8. *Neka su date neprekidne slučajne promenljive X i Y koje su koncentrisane na skupovima D_x i D_y koji su unije najviše prebrojivo mnogo disjunktnih otvorenih intervala i neka su njihove funkcije gustine verovatnoće f_x i f_y neprekidne i pozitivne.*
Neka je zajednička funkcija gustine verovatnoće $f(x, y)$ neprekidna po svakoj promenljivoj posebno za $x \in D_x$ i $y \in D_y$.

(i) ***Uslovna funkcija raspodele*** *slučajne promenljive X u odnosu na događaj $\{Y = y\}$ je funkcija:*

$$P\big(X \leq x | Y = y\big) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u, y)}{f_Y(y)} du$$

(ii) ***Uslovna funkcija gustine*** *verovatnoće slučajne promenljive X u odnosu na događaj $\{Y = y\}$ je funkcija:*

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Definicija 1.9. *Preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ zove se* ***n-dimenzionalna slučajna promenljiva*** *ako je zadovoljeno da za svako $\mathcal{S} \in \mathcal{B}^n$ važi:*

$$X^{-1}(\mathcal{S}) \in \mathcal{F}$$

tada se kaže da je X $\mathcal{F}$-merljivo.

Definicija 1.10. ***Vremenska serija*** *je familija slučajnih promenljivih uređenih u odnosu na vreme.*

Definicija 1.11. *Vremenska serija $\{y_t\}$ je* ***slabo stacionarna*** *ako :*
1. $E(y_t) = \mu, \quad \forall t$
2. $Cov(r_t, r_{t-l}) = \gamma_l$, za proizvoljan broj $l \in \mathbb{N}$ i $\forall t$

Definicija 1.12. ***Slučajni (stohastički) proces*** *je familija slučajnih promenljivih $\{X_t(\omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$ definisanih nad istim prostorom verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, gde je T indeksni skup.*

Parametar $t \in T$ se u slučaju da je $T \subset \mathbb{R}$ obično interpretira kao vreme.

Ako se fiksira $t \in T$, tada $X_t(\Omega)$ predstavlja slučajnu promenljivu definisanu na skupu elementarnih događaja Ω. Ukoliko se fiksira $\omega \in \Omega$ tada skup vrednosti slučajnih promenljivih postaje funkcija skupa indeksa T.

Postoji više načina da se definiše indeksni skup. U zavisnosti od toga kako se definiše ovaj skup dobijaju se različiti slučajni procesi. Naime, ako je $T = \mathbb{R}$ ili $T \subseteq \mathbb{R}$ onda je slučajni proces definisan sa neprekidnim parametrom.
Sa druge strane, ako je skup T skup celih ili prirodnih brojeva, onda se slučajni proces naziva slučajan proces sa prekidnim (diskretnim) parametrom.

Definicija 1.13. *Slučajni proces $\{X_t\}, t \in T$ naziva se* ***Markov-ski proces*** *ako $(\forall n \in \mathbb{N})$ i za svaki niz tačaka iz skupa T, $s_1 < s_2 < \ldots < s_n < t$ važi sledeće:*

$$P(X_t \in B | X_{s_1}, X_{s_2}, \ldots, X_{s_n}) = P(X_t \in B | X_{s_n})$$

za svaki Borelov skup B.

Ako se trenutak t_n interpretira kao sadašnjost, smisao navedene definicije je da budućnost zavisi od prošlosti samo preko sadašnjosti. Drugim rečima, celokupna informacija iz prošlosti procesa X_t koja utiče na budućnost tog procesa sadržana je u sadašnjosti. Ako se zna sadašnja vrednost, tada poznavanje prethodne istorije procesa nije neophodno. Odnosno, Markov-ski procesi su slučajni procesi sa osobinom da sledeće stanje procesa zavisi samo od sadašnjeg stanja.

Markov-ski lanci su posebna vrsta Markov-skih procesa gde se proces može nalaziti samo u konačnom broju stanja. Markov-ski lanaci predstavljaju korisan alat u statističkom modeliranju u praktično svim poljima primenjene matematike.

U praksi je veoma često potrebno odrediti nepoznate parametre odgovarajuće raspodele. To se postiže upotrebom funkcije verodostojnosti.
Neka je X slučajna promenljiva koja ima $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ raspodelu. Neka je dat uzorak vrednosti slučajne promenljive X i treba proceniti kolike bi mogle biti najverovatnije vrednosti parametara μ i σ^2. Ovaj problem dovodi do funkcije verodostojnosti. Za razliku od verovatnoće koja se koristi da proceni nepoznate ishode na osnovu poznatih parametara, verodostojnost se koristi da se procene nepoznati parametri na osnovu poznatih ishoda.

U opštem slučaju dat je vektor $\mathbf{x}$, vektor parametara $\boldsymbol{\theta}$ i zajednička funkcija gustine verovatnoće (odnosno raspodele u slučaju da je slučajni vektor diskretan) $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$. Za različite vrednosti vektora parametara dobijaće se različite funkcije gustine verovatnoće $\mathbf{x} \to f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$, tj. od vrednosti vektora parametara zavisiće u kojim tačkama prostora vektora slučajnih promenljivih će funkcija gustine verovatnoće imati koje vrednosti, odnosno, koje su verovatnoće da će vektor slučajnih promenljivih imati određene vrednosti. Ukoliko se sada funkcija f shvati kao funkcija svog drugog argumenta $\boldsymbol{\theta}$, pri čemu je prvi argument $\mathbf{x}$ poznat, dobija se funkcija verodostojnosti $\boldsymbol{\theta} \to f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ u oznaci $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ (slovo $\mathcal{L}$ potiče od engleske reči "*likelihood*").

Definicija 1.14. *Neka je data zajednička funkcija gustine raspodele $f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$ vektora slučajnih promenljivih $\boldsymbol{X}$ u zavisnosti od vektora parametara $\boldsymbol{\theta}$.*
Funkcija verodostojnosti *vektora parametara $\boldsymbol{\theta}$ za fiksno $\boldsymbol{x}$ u oznaci $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x})$ je funkcija $f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$ posmatrana kao funkcija svog drugog argumenta.*

U slučaju da je dat uzorak od $n > 1$ međusobno nezavisnih vrednosti slučajnog vektora, funkcija verodostojnosti vektora parametara dobija se kao proizvod pojedinačnih funkcija verodostojnosti, tj.

$$\mathcal{L}\big(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1, \mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{X}_n = \mathbf{x}_n\big) = f(\mathbf{x}_1|\boldsymbol{\theta}) f(\mathbf{x}_2|\boldsymbol{\theta}) \ldots f(\mathbf{x}_n|\boldsymbol{\theta})$$

.

1.2 Motivacija

U modernoj ekonomskoj literaturi gotovo je nemoguće govoriti o bilo kakvom vidu poslovanja a da se u obzir ne uzmu rizici i posledice koje oni mogu doneti. Uopšteno govoreći rizik se definiše kao neizvesnost budućeg ishoda. Jedan od najpoznatijih oblika jeste tržišni rizik ili neizvesnost u promenama cena akcija. Smatra se da je tržišni rizik najveći rizik koji je prisutan u investicionom poslovanju akcijama. Najčešći uzroci promena cena su nesklad u ponudi i potražnji na tržištu i promena kamatnih stopa.
Sa druge strane, tržišni rizik je najlakše identifikovati i kvantifikovati jer se cene akcija beleže prilikom svake transakcije, a preko cena je dalje lako pratiti i prinose koje te akcije donose.
U stručnoj terminologiji koristi se reč *volatilnost* kako bi se direktno opisao rizik promene vrednosti akcije (ili nekog drugog finansijskog derivata). Volatilnost predstavlja procenu vrednosti derivata, upravljanje, optimizaciju portfolija a koristi se kao mehanizam za merenje rizika i upravljanje njime.

Sa matematičkog gledišta, volatilnost predstavlja uslovnu standardnu devijaciju prinosa, a analitički modeli modeli koji se koriste da bi je prikazali su ARCH i GARCH modeli. Navedeni modeli su postali široko primenjivani u analizi podataka vremenskih serija u kojima je prisutna heteroskedastičnost, tj. pojava da varijanse grešaka koje se prave nisu konstantne, nego se menjaju tokom vremena. Osnovni cilj ovih modela jeste izučavanje neke od mera volatilnosti poput standardne greške, koju je moguće koristiti pri donošenju različitih finansijskih odluka, poput analize rizika, izbora portfolija ili formiranja cena hartija od vrednosti.

Američki ekonomista Robert Fry Engle III [1] je prvi predstavio ovakve koncepte za proveru volatilnosti u svom radu *"Autoregressive Conditional Heteroskedascity With Estimates of the Variance of UK Inflation "*. On je uočio da prethodni modeli koji su pretpostavljali konstantnu volatilnost za predviđanje kretanja cena akcija i ostalih derivata nisu davali najbolje rezultate.
Stoga je razvio nove statističke modele, koji su pretpostavljali da cene akcija i cene ostalih derivata imaju periodično malu i visoku volatilnost i od tada su ovi modeli ključni u modernoj teoriji cena finansijskih derivata u praksi. Godine 2003., zajedno sa profesorom Clive Granger dobija Nobelovu nagradu u ekonomiji za "Metode analiziranja ekonomskih vremenskih serija sa vremenski promenljivom volatilnošću ".
ARCH modeli se sada značajno primenjuju i predstavljaju osnovni alat u finansijskoj ekonometriji [3].

Iako je ARCH model jednostavan, on često zahteva mnogo parametara, kako bi se adekvatno opisao proces volatilnosti prinosa aktive.
Godine 1986., Bollerslev [2] i Taylor su nezavisno jedan od drugog uopštili Engle-ov model da bi ga napravili realističnijim. Ova generalizacija ARCH modela naziva se GARCH (*Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedastic models*). U ovom modelu uslovna varijansa zavisi od njenih prethodnih vrednosti, što čini model više ekonomičnim. U većini empirijskih primena ispostavlja se da jednostavan GARCH model sa parametrima $p = q = 1$ može reprodukovati dinamiku volatilnosti finansijskih podataka. Ovo je dovelo do toga da GARCH(1,1) model postane najviše primenjivani model, kako od strane teoretičara tako i od strane praktičara.

Predložena su brojna proširenja i poboljšanja GARCH modela u cilju imitacije dodatnih stilizovanih činjenica na finansijskim tržištima. Ova proširenja prepoznaju mogućnost i važnost postojanja nelinearnosti, asimetrije i dugotrajne memorije u procesu volatilnosti. Među tim proširenjima navodi se popularni *eksponencijalni GARCH* model od Nelsona [13] kao i *GJR* model koji su uveli Glosten, Jaganathan i Runkle [14]. Oba ova modela objašnjavaju asimetričnu vezu između prinosa akcija i promene varijanse.

[1] Robert Engle rođen je 10.11.1942. u Sjedinjenim Američkim Dražavama. Diplomirao je fiziku 1964. godine na koledžu Wililiams, dok je 1969. doktorirao iz oblasti ekonomije.Član je Američke akademije nauka i umetnosti, kao i Društva ekonometričara. Engle-ov najveći doprinos je upravo otkriće metoda za analizu nepredvidjivih kretanja cena na tržištu i kretanja kamatnih stopa, tj. uvođenje odelakoji na vrlo dobar način uspevaju da,sa određenom preciynošcu, predvide o prate put kretanja cene akcija.

2 Bayes-ovska statistika

Po mišljenju velikog broja statističara, postoje dva međusobno isključujuća pristupa analizi podataka. Prvi pristup je *klasična* ili *frekvencionistička* teorija koja koristi intervale poverenja i testiranje hipoteza. Klasična teorija se najviše koristi i najrasprostranjenija je u tipičnim statističkim testovima. Drugi pristup je *Bayes-ovska statistika*, analiza zasnovana na Bayes-ovoj teoremi, koja u današnje vreme ima sve veći broj pristalica.

Uprkos tome što je od samog nastanka u 18. veku pa sve do danas predmet mnogih kontroverzi, Bayes-ovska teorija je svoju primenu našla u praktično svim oblastima nauke. U nekim primenama kao što su npr. prepoznavanje oblika, metodi zasnovani na Bayes-ovskoj teoriji se koriste kao neizostavne alatke.

Osnovni princip na kome se zasniva ova teorija i koji je engleski sveštenik Thomas Bayes predstavio u svojoj čuvenoj formuli, jeste da se prikupljanjem informacija iz realizovanih događaja koriguju verovatnoće uspostavljene na osnovu ranijih pretpostavki, iskustva i saznanja.
Ovo poglavlje predstavlja uvod u Bayes-ovu statistiku [6].

2.1 Bayes-ova analiza

Naučno istraživanje je iterativni proces integracije i akumuliranja informacija. Istraživači ocenjuju trenutno znanje o problemu koji se izučava, sakupljaju nove podatke da bi pronašli odgovore na preostala pitanja i potom ažuriraju i oplemenjuju svoje razumevanje da bi povezali i nove i stare podatke. Bayes-ova analiza daje logičan i kvalitetan okvir za ovaj proces.

Izraz “Bayes-ov ”odnosi se na sveštenika Thomas-a Bayes-a. Razvoj teorije verovatnoće na početku 18. veka iznedrio je odgovor na pitanja u vezi sa kockanjem. Pojavio se problem poznatiji kao pitanje obrnute verovatnoće. Matematičari tog vremena znali su kako da pronađu verovatnoću da će, na primer četvoro ljudi iz skupa od 60 ljudi starosti 50 godina, umreti u datoj godini ukoliko je poznata verovatnoća umiranja za svakog od njih. Ali nisu znali kako da izračunaju verovatnoću da će jedan pedesetogodišnjak umreti na osnovu opservacije da je umrlo četvoro od njih 60. Odgovor na ovo pitanje dao je Thomas Bayes u radu koji je objavljen 1763. godine, godinu dana nakon njegove smrti. Bayes je bio sveštenik, kao i veliki broj obrazovanih ljudi toga vremena, samouki naučnik i matematičar. Njegovo rešenje poznato kao *Bayes-ova teorema* predstavlja temelj modernog Bayes-ovog pristupa analaizi svih vrsta podataka.

2.2 Thomas Bayes

Slika 2.1: Thomas Bayes

Thomas Bayes (Tomas Bejz) (1702. - 1761.) je prvi matematičar koji je induktivno koristio verovatnoću i ustanovio matematičku osnovu za analizu verovatnoće (sredstva analize, verovatnoću da će se događaj realizovati u budućim ponavljanjima na osnovu broja ponavljanja u kojima se događaj nije realizovao).

Svoje pronalaske u vezi sa verovatnoćom naveo je u eseju "*An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances* "(1763.), koji je posthumno objavljen u radu "Filozofske transakcije Londonskog kraljevskog udruženja ".

Poznato je da je za života objavio dva dela, jedno teološko i jedno matematičko, koja su u originalu nazvana:

- "*Divine Benevolence, or an Attempt to Prove That the Principal End of the Divine Providence and Government is the Happiness of His Creatures* "(1731.)
- "*An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and a Defence of the Mathematicians Against the Objections of the Author of The Analyst* "(1736.)

Thomas Bayes rođen je 1702. godine u Londonu. Bayes je bio sin sveštenika Joshua Bayes-a (Džoša Bejza) nekonformističkog sveštenika. Godine 1719. upisao se na Univerzitet u Edinburgu, gde je izučavao teologiju i logiku. Smatra se da je primljen u Kraljevsko društvo zbog rasprave u kojoj je 1736. godine branio stavove i filozofiju Isaac-a Newton-a (Isaka Njutna). U svojima kasnim godinama pokazao je veliko interesovanje za verovatnoću.
Umro je 1761. godine u Engleskoj u Bunhill Fields (poljima Banhil).

Doprinosi Thomas-a Bayes-a postali su besmrtnosti nakon što je fundamentalna propozicija verovatnoće nazvana po njemu, Bayes-ovo pravilo.

2.3 Bayes-ova paradigma

Bayes-ov pristup pretpostavlja da su samo trenutno posmatrani podaci relevantni za analizu i da je raspodela populacije ta koja je promenljiva. Nepoznati parametar koji se posmatra je θ, a ono što je poznato je funkcija raspodele $p(\theta)$, koja izražava naše trenutno relevantno mišljenje o tome da su razne moguće vrednosti za θ stvarne vrednosti. Ovo se zove *priorna raspodela* zato što predstavlja stanje našeg znanja pre nego što se izvede eksperment ili pre nego što se vide podaci dobijeni iz eksperimenta.

Priorna raspodela verovatnoća parametra θ je raspodela verovatnoća koja predstavlja naše mišljenje o tom parametru pre nego što se uzmu u obzir neki podaci.

Kada je nejasno ili ako slučajna promenljiva može biti apsolutno neprekidna, diskretna ili mešovita, koristi se izraz funkcija raspodele. U formulama, u skladu sa tipom raspodele, integrale treba zameniti sa sumama.

Određivanje priorne raspodele oduvek je predstavljalo široko rasprostranjenu barijeru za prihvatanje Bayes-ovog metoda. Gotovo je sigurno da naše iskustvo daje neki uvid u moguće vrednosti za parametar, pre nego što se prvi podatak opazi. Ono što je komplikovano jeste prevođenje ovakvog znanja u raspodelu verovatnoće.
Zbog poteškoće pronalaska priorne raspodele koja je ubedljiva (treba ubediti druge da su naša priorna mišljenja validna) i mogućnosti da zapravo ne postoji formalno nikakvo mišljenje, pojam priorne raspodele može se oslabiti. U skladu sa tim u praksi se koriste neispravna i neinformativna priorna raspodela.

Neispravna priorna raspodela je ona čije su verovatnoće nenegativne ali im je suma (integral) beskonačna. Na primer, uniformna priorna raspodela na realnom intervalu je neispravna priorna raspodela.
Pored neispravne često se koristi i neinformativna priorna raspodela.
Priorna raspodela je *neinformativna* ako ima minimalan uticaj na posteriornu raspodelu parametra θ. Drugi naziv za neinformativnu priornu raspodelu je nejasna ili difuzna. Mnogi statističari favorizuju ovu priornu raspodelu jer se pokazalo da je mnogo objektivnija. Mnoga istaživanja bazirala su se na određivanju neinformativne ili nejasne priorne raspodele. Njena svrha je da reflektuje minimalno znanje. Ne postoji univerzalni dogovor za formiranje neinformativne priorne raspodele. Međutim, postoji dogovor da je odgovarajuća neinformativna priorna raspodela za skalirani parametar $p(\theta) = \frac{1}{\theta}, \theta > 0$.

Drugi pojam je funkcija raspodele $f(y|\theta)$. Ona opisuje relativnu verodostojnost da će se razne vrednosti y realizovati izvođenjem eksperimenta u slučaju da je θ konkretna vrednost parametra. Ona se još naziva raspodela modela i zajednička je i za Bayes-ovu i za klasičnu analizu.

Treba napomenuti da je moguće da i y i θ budu vektori, gde su y vrednosti iz uzorka, a θ skup nepoznatih parametara.

Definicija 2.1. ***Raspodela modela*** *je funkcija raspodele prikupljenih podataka ako je data određena vrednost parametra. Međutim, konzistentno sa Bayes-ovom notacijom, raspodela modela se označava sa*

$$f(\boldsymbol{y}|\theta)$$

gde je korišćena vektorska notacija za $\mathbf{y}$ *da ukaže da se ovde pojavljuju svi podaci.*

Sada se prelazi na koncept višedimenzionalne statističke analize.
Ako vektor opservacija $\mathbf{y} = (y_1 \dots y_n)'$ čine međusobno nezavisne, jednako raspodeljene slučajne promenljive, onda je:

$$f(\mathbf{y}|\theta) = f(y_1|\theta) \cdots f(y_n|\theta).$$

Definicija 2.2. ***Zajednička raspodela*** *za* (y, θ) *definisana je funkcijom raspodele:*

$$f(\boldsymbol{y}, \theta) = f(\boldsymbol{y}|\theta)p(\theta).$$

Definicija 2.3. ***Marginalna raspodela*** *za* y *ima funkciju raspodele* [2]

$$f(\boldsymbol{y}) = \int f(\boldsymbol{y}|\theta)p(\theta)d\theta.$$

Sledeći pojam je ključni rezultat Bayes-ove analize. Posteriorna raspodela govori kako se menjalo naše mišljenje o parametru, odnosno predstavlja naše revidirano mišljenje o θ nakon što su analizirani rezultati eksperimenta. Ova posteriorna raspodela sadrži svo naše znanje o nepoznatom parametru nakon dobijenih podataka kao što je i priorna raspodela ranije sadržala naše predznanje.

Definicija 2.4. ***Posteriorna raspodela*** *je uslovna raspodela parametara* θ *u odnosu na dobijene podatke. Označava se sa:*

$$p(\theta|\boldsymbol{y}).$$

Definicija 2.5. *Za priornu raspodelu kaže se da je* **konjugovana priorna raspodela** *za dati model ako je rezultirajuća posteriorna raspodela iz iste familije kao i priorna raspodela (ali verovatno sa drugačijim parametrima).*

Na primer, ako je funkcija verodostojnosti binomna, konjugovana priorna raspodela parametra θ je beta raspodela, sledi da je i posteriorna raspodela takođe beta raspodela. Ili na primer, ako je fukcija verodostojnosti gausova, izbor gausove priorne raspodele osigurava da posteriorna raspodela takođe bude gausova. To znači da je gausova raspodela konjugovana priorna raspodela za funkciju verodostojnosti, koja je takođe gausova.

[2] U slučaju da ima više od jednog parametra ovo će biti višestruki integral

Teorema 2.1. *(**Neprekidna verzija Bayes-ove formule**) Neka su date slučajne promenljive X i Y koncentrisane na skupovima D_x i D_y respektivno. Tada $\forall x \in D_x, \forall y \in D_y$ važi sledeće tvrđenje:*

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{\int_{D_x} f_{Y|X}(y|t)f_X(t)dt}.$$

Primenjujuću teoremu 2.1. na pojmove koji su definisani u nekim od prethodno navedenih definicija dobija se sledeća ključna teorema, koja se u ovom radu koristi i na kojoj su zasnovane Bayes-ove ocene parametara.

Teorema 2.2. *Posteriorna raspodela parametra θ je određena gustinom:*

$$p(\theta|\mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y}|\theta)p(\theta)}{\int f(\mathbf{y}|\theta)p(\theta)d\theta}.$$

2.4 Bayes-ovsko zaključivanje

Kao i u klasičnom pristupu zaključivanja, Bayes-ova ocena pretpostavlja vektor opservacija $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_T)'$, dimenzije $T \times 1$ opisanih preko funkcije raspodele $p(\mathbf{y}|\theta)$. Parametar $\theta \in \Theta$ služi kao indeks familije mogućih raspodela za observacije. To može biti skalar, vektor, matrica ili čak niz matematičkih objekata. Radi jednostavnosti, θ će se posmatrati kao d-dimenzionalni vektor, dakle $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^d$.

Razlika između Bayes-ovog i klasičnog pristupa leži u matematičkoj prirodi θ. U klasičnom okviru, pretpostavlja se da postoji *tačna* i *fiksna* vrednost parametra θ. Za razliku od frekvencionističkog pristupa, u kojem se nepoznati parametar tretira kao broj, u Bayes-ovom pristupu nepoznati parametar θ je slučajna promenljiva sa datom priornom raspodelom u oznaci $p(\theta)$. Priorna raspodela je određena pomoću parametara koji se zovu *hiperparametri*, za koje se inicijalno pretpostavlja da su poznati i konstantni. Štaviše, u zavisnosti od prethodnih informacija istraživača, ova raspodela može biti više ili manje informativna. Zatim, korišćenjem funkcije verodostojnosti, $\mathcal{L}(\theta|\mathbf{y}) \equiv p(\mathbf{y}|\theta)$, priorne raspodele i Bayes-ove formule dobija se posteriorna raspodela parametra θ:

$$p(\theta|\mathbf{y}) = \frac{\mathcal{L}(\theta|\mathbf{y})p(\theta)}{\int_\Theta \mathcal{L}(\theta|\mathbf{y})p(\theta)d\theta} \tag{2.1}$$

Ova posteriorna raspodela je kvantitativan, probabilistički opis znanja o parametru θ nakon dobijanja podataka. Posteriorna raspodela predstavlja uslovnu raspodelu parametra θ ako je dat realizovan uzorak $\mathbf{y}$ [1].

Samo ime "posteriorna raspodela "nagoveštava ulogu $p(\theta|\mathbf{y})$. Kao što priorna raspodela predstavja informacije o θ pre eksperimenta, tako $p(\theta|\mathbf{y})$ predstavlja informacije o θ nakon dobijenog realizovanog uzorka $\mathbf{y}$. Drugim rečima, posteriorna ocena kombinuje priorne informacije o θ i informacije o θ koje su sadržane u realizovanom uzorku $\mathbf{y}$ kako bi se dobila konačna slika o θ. Dakle, implicitno se pretpostavlja da važi princip verdostojnosti, tj. pretpostavlja se da su sve uzoračke informacije o θ sadržane u $\mathcal{L}(\theta|\mathbf{y})$ (za dati vektor $\mathbf{y}$).

Bayes-ovski pristup ocenjivanju parametara koristiće se u određivanju nepoznatih parametara GARCH modela, što je i predmet ovog master rada. Najpre će se usvojiti priorne raspodele za nepoznate parametre, a onda će se na osnovu Bayes-ove formule i podataka dobiti posteriorne raspodele nepoznatih parametara. Kao ocenu vrednosti parametara uzimaće se vrednosti u kojima njihove posteriorne raspodele dostižu maksimum. Takođe će se videti i uticaj izbora priornih raspodela parametara na njihovu ocenu.

Postoje tri glavna problema u vezi sa Bayes-ovskim zaključivanjem.
Jedan je izbor priorne raspodele. Osnovni razlog za kritiku Bayes-ovskog zaključivanja jeste priorna verovatnoća, odnosno priorna raspodela koja se usvaja na osnovu postojećih saznanja. Ovo je aspekt Bayes-ove analize koji se najčešće kritikuje, sa prigovorom da lična priroda ove raspodele uklanja objektivnost, koja se očekuje od naučnog istraživača. Naime, kritičari Bayes-ovske teorije ističu da pogrešna ubeđenja sadržana u priornim raspodelama mogu prilično uticati na posteriorne verovatnoće, odnosno, raspodele. Ukoliko su naša priorna ubeđenja dosta različita od realnosti, čak i pri velikom broju ponavljanja eksperimenta čiji rezultati sugerišu da naša priorna saznanja nisu dobra, uticaj priorne raspodele može biti dominantan u formiranju posteriorne raspodele.
Teorijski, ponavljanjem slučajnog eksperimenta veliki broj puta, postiže se konvergencija posteriorne raspodele ka raspodeli koja odgovara realnosti, ali ponekad je neophodan jako veliki broj ponavljanja da bi se dobila zadovoljavajuća tačnost posteriorne raspodele. Ovo je nepovoljno sa stanovišta efikasnosti, odnosno vreme neophodno za ponavljanje slučajnog eksperimenta ovako veliki broj puta može biti znatno veće od onog koje je na raspolaganju. Zbog toga je izbor priorne raspodele veoma važan faktor o kome treba voditi računa.
Često je pogodno izabrati konjugovanu priornu raspodelu sa funkcijom verodostojnosti. To je raspodela koja dovodi do posteriorne raspodele, koja pripada istoj familiji raspodela kao i priorna. U suštini, konjugovana priorna raspodela dopušta posteriornoj raspodeli da se pojavi bez numeričke integracije. U mnogim slučajevima, malo je verovatno da je konjugovana priorna raspodela adekvatna reprezentacija prethodnog oblika znanja. U takvim slučajevima jednačina 2.1 je analitički nepouzdana, stoga su potrebne asimptotske aproksimacije ili Monte Carlo metode. Determinističke tehinke mogu pružiti dobre rezultate za modele malih dimenzija. Međutim, kada dimenzije modela postanu velike, simulacija je jedini način da se aproksimira posteriorna raspodela.

Drugo je izbor modela. Ovaj problem nije ništa drugačiji od onog sa kojim se susreću svi analitičari.

Nakon što se odredi priorna raspodela i izabere model, analizu čini evaluacija odgovarajućih izraza. Iako formule izgledaju jednostavno, integrali koji se koriste su veoma često komplikovani za izračunavanje. Za jednog Bayes-ovog analitičara od suštinske važnosti je da ume da izvede višestruku numeričku integraciju. Za rešavanje ovog problema do sada je razvijen veliki broj tehnika. Međutim jedna tehnika koja je danas široko rasprostranjena je Markov Chain Monte Carlo simulacija.

3 Markov Chain Monte Carlo metod

Ideju **MCMC** biranja uzorka prvi put su predstavili Metropolis, Rosenbluth i Teller a kasnije je generalizovao Hastings [7].
MCMC ("Markov Chain Monte Carlo") metode predstavljaju klasu algoritama koji se koriste za generisanje uzoraka slučajnih promenljivih sa željenom raspodelom. U MCMC metodu se konstruišu Markov-ski lanci koji kao svoju ravnotežnu raspodelu imaju raspodelu iz koje želimo da uzmemo uzorak. Najčešća primena ovih metoda je u statističkoj fizici, biologiji i lingvistici. Ovde će biti predstavljena primena MCMC metoda u kontekstu Bayes-ovskog ocenjivanja nepoznatih parametara modela finansijske matematike.

MCMC je metoda generisanja Markov-skih lanaca koji imaju osobinu da im je ravnotežna raspodela jednaka nekoj raspodeli čiji se uzorak generiše. Pretpostavlja se da se generiše uzorak raspodele, u opštem slučaju, nekog slučajnog vektora. Može se pokazati da za generisanje uzorka ovakve raspodele nije neophodno da se generiše ceo slučajni vektor odjednom već da je dovoljno da se u jednom trenutku generiše samo jedna komponenta slučajnog vektora. Ovo tvrđenje iskazano je u sledećoj teoremi.

Teorema 3.1. *(Clifford-Hammersley-eva teorema) Neka je data zajednička funkcija raspodele $f(\theta, X|Y)$. Tada je ova raspodela u potpunosti određena, tzv. potpunim uslovnim raspodelama $f(\theta|X, Y)$ i $f(X|\theta, Y)$ (eng. complete conditionals).*

Značaj tvrđenja ove teoreme je u tome što je mnogo lakše generisati uzorak slučajne promenljive sa zadatom raspodelom, nego slučajnog vektora. U mnogim slučajevima $f(\theta, X|Y)$ može biti izuzetno komplikovana višedimenzionalna i praktično je neizvodljivo direktno generisati uzorke iz ove raspodele. Međutim, na osnovu Clifford-Hammersley-eve teoreme MCMC algoritmi rešavaju ovaj problem tako što razbijaju zajedničku funkciju raspodele na njene potpune uslovne raspodele. Ovo je velika prednost MCMC metoda u odnosu na druge metode koji ne mogu da se uspešno nose sa ovim problemom.

MCMC metod biranja uzorka obezbeđuje biranje uzoraka iz višedimenzionalnih gustina raspodela, razlažući ih na raspodele manjih dimenzija, sa kojima je lakše raditi. Deo naziva "Monte Carlo", navedenog metoda, ukazuje na proces slučajne simulacije, dok deo naziva "Markov Chain"ukazuje da se element uzorka iz posteriorne raspodele bira na osnovu prethodno izabranog elementa.

Straterija uzorkovanja MCMC se oslanja na konstrukciju lanca Markova sa realizacijama $\theta^{[0]}, \theta^{[1]}, \ldots, \theta^{[j]}, \ldots$ u prostoru parametara Θ. Pod odgovarajućim uslovima regularnosti, asimptotski rezultati garantuju da kada j teži ka beskonačnosti, tada $\theta^{[j]}$ u raspodeli teži slučajnoj promenljivoj čija je gustina $p(\theta|\mathbf{y})$. Stoga se realizovane vrednosti lanca mogu koristiti za izvođenje zaključka o zajedničkoj posteriornoj raspodeli. Sve što je potrebno su algoritmi za konstrukciju odgovarajućih lanaca. MCMC algoritmi mogu se grubo podeliti na dve grupe. To su *Gibbs*-ovi algoritmi i *Metropolis-Hastings* algoritmi. Ovi algoritmi su danas neophodan alat za izvođenje realističnog Bayes-ovog zaključivanja.

3.1 Gibbs-ov algoritam

Gibbs-ov algoritam je tehnika MCMC biranja uzorka koja se najčešće koristi. Ako su potpune uslovne raspodele poznate u zatvorenoj formi i ako se iz njih mogu direktno uzimati uzorci koristi se Gibbs-ov algoritam. Ovaj algoritam je zasnovan na sukcesivnom generisanju uslovne raspodele $p(\theta_i|\theta_{\neq i}, \mathbf{y})$, tj. posteriorne raspodele i-tog elementa vektora $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d)'$, pod uslovom da su dati svi ostali elementi, gde elementi vektora θ mogu biti sklari ili podvektori. U praksi, uzorkovanje se radi na sledeći način:

1. Postavljanje iteracije brojača lanca na $j = 1$ i postavljanje početne vrednosti $\theta^{[0]} = (\theta_1^{[0]} \ldots \theta_d^{[0]})'$;
2. Generisanje nove vrednosti $\theta^{[j]}$ preko $\theta^{[j-1]}$ pomoću sukcesivno generisanih vrednosti

$$\theta_1^{[j]} \sim p(\theta_1|\theta_{\neq 1}^{[j-1]}, \mathbf{y})$$

$$\theta_2^{[j]} \sim p(\theta_2|\theta_1^{[j]}, \theta_3^{[j-1]}, \ldots, \theta_d^{[j-1]}, \mathbf{y})$$

$$\vdots$$

$$\theta_d^{[j]} \sim p(\theta_d|\theta_{\neq d}^{[j]}, \mathbf{y})$$

3. Promeniti brojač j na $j + 1$ i vratiti se na korak 2 sve dok konvergencija ne bude dostignuta

Drugim rečima, Gibbs-ov algoritam podrazumeva biranje uzorka iz uslovne raspodele za svaki parametar posebno, uzimajući u obzir tekuće vrednosti svih ostalih parametara i dobijenih podataka. Opisani postupak se ciklično ponavlja. Svako ponavljanje naziva se iteracija Gibbs-ovog algoritma, dok se svaka nova dobijena vrednost parametra naziva ažurirana vrednost.

Kako se broj iteracija povećava, lanac se približava svojoj stacionarnoj raspodeli. Dovoljni uslovi za konvergenciju Gibbs-ovog algoritma dati su u Roberts i Smith [9]. Ovi dovoljni uslovi omogućuju dobro definisanje svake potpune uslovne raspodele. Iako su ovo samo dovoljni uslovi za konvergenciju Gibbs-ovog algoritma, oni su izuzetno slabi ali zadovoljeni u većini aplikacija.

Gibbs-ov algoritam je najprirodniji izbor MCMC strategije biranja uzorka kada se iz potpunih uslovnih raspodela mogu lako generisati uzorci. Kada je izraz $p(\theta_i|\theta_{\neq i}, \mathbf{y})$ nestandardan, tada se koristi M-H uzorkovanje kao što je prikazano u narednom odeljku.

3.2 Metropolis-Hastings algoritam

Neki složeni Bayes-ovski problemi ne mogu se rešiti korišćenjem Gibbs-ovog algoritma. U mnogim situacijama, bar jedna od potpunih uslovnih raspodela se neće moći birati direktno. Tada se mora primeniti Metropolis-Hastings algoritam (M-H algoritam). To je u slučaju kada se zajednička gustina raspodele ne može prikazati kao proizvod potpunih uslovnih raspodela ili kada je nepoznat oblik potpune uslovne gustine. Ovaj algoritam predlaže kandidata za izbor iz predložene raspodele, a zatim se kandidat prihvata kao uzorak ili ne prihvata na osnovu definisanog kriterijuma.
Algoritam se sastoji od sledećih koraka:

1. Postavljanje brojača iteracije na $j = 1$ i postavljanje početne vrednosti uzorka $\theta^{[0]}$
2. Pomeriti lanac na novu vrednost θ^* generisanu iz predložene raspodele $q(\bullet|\theta^{[j-1]})$
3. Izračunati verovatnoću prelaska sa vrednosti $\theta^{[j-1]}$ na θ^* datu sa:

   $$min\left\{\frac{p(\theta^*|\mathbf{y})}{p(\theta^{[j-1]}|\mathbf{y})}\frac{q(\theta^{[j-1]}|\theta^*)}{q(\theta^*|\theta^{[j-1]})}, 1\right\}$$

   Ako je prelazak prihvaćen, postaviti $\theta^{[j]} = \theta^*$, ako nije postaviti $\theta^{[j]} = \theta^{[j-1]}$ tako da se lanac ne pomera
4. Promeniti brojač j na $j + 1$ i vratiti se na korak 2 sve dok konvergencija ne bude dostignuta

Kao i u Gibbs-ovom algoritmu, lanac se približava svojoj ravnotežnoj raspodeli kada broj iteracija raste.
Implementacija M-H algoritma zahteva uzimanje uzorka iz predložene raspodele i izračunavanje verovatnoće sa kojom se kandidat prihvata. Ovaj algoritam razbija raspodelu, iz koje nije moguće uzeti uzorak, na dva dela. Prvi deo je predložena raspodela iz koje se izvlače kandidati a drugi deo je određivanje verovatnoće prihvatanja kandidata za šta se koristi originalna raspodela iz koje se generiše uzorak.
Generalni savet je da predložene raspodele trebaju što više da "liče" na raspodele koje se generišu. Takođe je preporučljivo da predložene raspodele imaju veliku varijansu.

Ako se izabere simetrična predložena raspodela, tj. $q(\theta^{[j]}|\theta^*) = q(\theta^*|\theta^{[j]})$, verovatnoća prelaska M-H algoritma se redukuje na:

$$min\left\{\frac{p(\theta^*|\mathbf{y})}{p(\theta^{[j]}|\mathbf{y})}, 1\right\}$$

tako da se predložena raspodela ne mora ocenjivati. Ova jednostavnija verzija M-H algoritma poznata je kao *Metropolis algoritam*. Specijalni slučaj sastoji se od predložene raspodele koja zavisi samo od rastojanja između θ^* i $\theta^{[j-1]}$, tj. $q(\theta^*|\theta^{[j-1]}) = q(\theta^* - \theta^{[j-1]})$. Dobijeni algoritam naziva se *slučajni hod Metropolis algoritma*.

Na primer, q bi moglo imati multivarijantnu normalnu raspodelu sa očekivanjem $\theta^{[j-1]}$ i čija je kovarijansna matrica kalibrirana da preuzme korake koji su razumno blizu $\theta^{[j-1]}$ tako da verovatnoća prelaska uzorka nije suviše niska, ali sa dovoljno velikom veličinom koraka da obezbedi dovoljno istraživanje prostora parametara. Nedostatak ove metode je to da nije putpuno automatska jer je potrebno da matrica kovarijansi bude pažljivo odabrana.
Još jedan poseban slučaj M-H algoritma je *nezavisni M-H algoritam*, u kojem se predložene raspodele generišu nezavisno od trenutne pozicije u lancu, tj. $q(\theta^*|\theta^{[j-1]}) = q(\theta^*)$. Ovaj algoritam se često koristi sa normalnom ili studentovom-t raspodelom čiji se momenti ocenjuju iz prethodnog niza MCMC algoritma. Ovaj pristup radi dobro za unimodalne posteriorne raspodele ali može biti vrlo neefikasan ako je posteriorna raspodela asimetrična ili multimodalna.

Na kraju, primećuje se da je u obliku M-H algoritma koji je predstavljen, vektor θ ažuriran u celini u svakoj iteraciji tako da se svi elementi istovremeno menjaju. Međutim, takođe se može razmatrati *algoritam po komponentama* gde svaku komponentu generiše njena sopstvena predložena raspodela. Zapravo, Gibbs pripada ovoj klasi uzorkovanja gde se svaka komponenta ažurira sekvencijano i gde su predložene raspodele uslovne. U ovom slučaju uvek se prihvataju nova izvlačenja. M-H algoritam se često koristi zajedno sa Gibbs algoritmom za one komponente od θ koje imaju uslovnu raspodelu, koja se ne može direkno odabrati.

3.3 Ponašanje MCMC output-a

U prethodnim poglavljima prikazano je građenje blokova za standardni MCMC algoritam. U ovom poglavlju prikazuju se pitanja vezana za njihovu praktičnu primenu. Naročito, komentarisaće se način na koji može da se proceni njihova konvergencija, metod pomoću kojeg se može računati autokorelacija u lancima i kako se mogu dobiti karakteristike zajedničke posteriorne raspodele MCMC output-a.

Postoje različite statistike za procenu konvergencije MCMC output-a. Osnovna ideja većine njih je upoređivanje momenata odabranih parametara na različitim delovima lanca. Alternativno, može se porediti nekoliko nizova izvučenih iz različitih polaznih tačaka i proveravati da li se mogu razlikovati kako se broj iteracija povećava. Koristiće se metodologija zasnovana na analizi varijanse koju su razvili Gelman i Rubin [8]. Preciznije, približna konvergencija se dijagnostikuje kada varijansa između različitih nizova nije veća od varijanse unutar svakog pojedinčnog niza. Pored dijagnostičkih testova, često je pogodno proveravanje konvergencije crtanjem, parametri se crtaju iznad iteracija (tragovi), kao i kumulativna ili srednja vrednost crteža. Što se tiče greške Monte Carlo simulacija ključno je razumeti da izvlačenja generisana MCMC metodom nisu nezavisna. Autokorelacija proizilazi ili iz činjenice da novo izvlačenje zavisi od prethodne vrednosti lanca ili iz činjenice da se stari element duplira. Prilikom procene preciznosti ocenjivača treba se oslanjati na tehnike ocenjivanja koje uzimaju u obzir ovu autokorelaciju.

U nastavku biće ocenjena numerička standardna greška, odnosno varijacije ocena koje se mogu očekivati, ukoliko bi simulacije bile ponovljene. Nakon izvršavanja Markovog lanca i njegove konvergencije ka stacionarnoj raspodeli na raspolaganju je uzorak $\{\theta^{[j]}\}_{j=1}^{J}$ iz zajedničke posteriorne raspodele $p(\theta|\mathbf{y})$. Na taj način može se aproksimirati posteriorno očekivanje bilo koje funkcije $\xi(\theta)$ parametara modela:

$$\mathbb{E}_{\theta|\mathbf{y}}[\xi(\theta)] = \int_{\Theta} \xi(\theta)p(\theta|\mathbf{y})d\theta \tag{3.1}$$

usrednjavanjem preko uzoraka iz posteriorne raspodele dobija se sledeće:

$$\overline{\xi} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\xi(\theta^{[j]})$$

Prema Zakonu velikih brojeva [3] srednja vrednost uzorka $\overline{\xi}$ konvergira ka posteriornom očekivanju čak iako se izvlačenja generišu pomoću MCMC algoritma.

Neki posebni slučajevi jednačine (3.1) omogućavaju da se dobiju karakteristike zajedničke posteriorne raspodele. Na primer,
kada je $\xi(\theta) = \theta$ dobija se da je posteriorno očekivanje vektor θ;
za $\xi(\theta) = (\theta - \overline{\theta})(\theta - \overline{\theta})'$ dobija se posteriorna kovarijansna matrica;
za $\xi(\theta) = \mathbb{I}_{\{\theta \in C\}}$, gde $\mathbb{I}_{\{\bullet\}}$ predstavlja indikator funkciju, koja je jednaka jedinici ako ima ograničenje a u suprotnom je jednaka nuli, dobija se posteriorna verovatnoća skupa C.

Na kraju, ako treba da se odredi marginalna posteriorna raspodela jedne komponente od θ, to se može oceniti pomoću histograma ili jezgra gustine uzorkovanih vrednosti.
Za razliku od toga, deterministička numerička integracija je često nepouzdana [1].

[3] U svome najjednostavnijem obliku ovaj zakon tvrdi da se relativna verovatnoća slučajnog događaja približava verovatnoći ovog događaja kada se slučajni eksperiment ponavlja veliki broj puta.

4 Bayes-ovska ocena GARCH(1,1) modela sa normalnom raspodelom

> *"Izvanredno je koliko je veliki uzorak potreban da normalna raspodela bude tačna aproksimacija"*
> *– Robert McCulloch i Peter E. Rossi*

U ovom poglavlju zadaje se Bajesova ocena skromnog ali efikasnog GARCH(1,1) modela sa normalnom raspodelom. Uzorkuje se zajednička posteriorna raspodela koristeći aproksimaciju koja je predložena od strane Nakatsuma [10, 11].

4.1 Model i priorna raspodela

GARCH(1,1) model sa normalnom raspodelom može se zapisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t h_t^{1/2} \qquad za \quad t = 1, ..., T \\ \varepsilon_t &\overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1) \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \end{aligned} \tag{4.1}$$

gde uslovi $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$ i $\beta \geq 0$ obezbeđuju pozitivnost uslovne varijanse i $h_0 = y_0 = 0$ po konvenciji; $\mathcal{N}(0, 1)$ je standardna normalna raspodela. U ovom okruženju, uslovna varijansa h_t je linearna funkcija prethodnih kvadratnih opservacija i prethodne varijanse.
U cilju zapisivanja funkcije verodostojnosti, definiše se vektor $\mathbf{y} = (y_1 \dots y_T)'$ i $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0 \quad \alpha_1)'$ i pregrupišu se parametri modela u $\psi = (\boldsymbol{\alpha}, \beta)$. Pored toga, definiše se dijagonalna matrica dimenzije $T \times T$:

$$\Sigma = \Sigma(\psi) = diag\big(\{h_t(\psi)\}_{t=1}^T\big)$$

gde je:

$$h_t(\psi) = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}(\psi)$$

Odatle, funkcija verodostojnosti koja zavisi od ψ može se izraziti na sledeći način:

$$\mathcal{L}(\psi|\mathbf{y}) \propto (det\Sigma)^{-1/2} exp\Big[-\frac{1}{2}\mathbf{y}'\Sigma^{-1}\mathbf{y}\Big]$$

Predlažu se sledeće priorne raspodele za parametre $\boldsymbol{\alpha}$ i β prethodnog modela:

$$p(\boldsymbol{\alpha}) \propto \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\mu}_\alpha, \Sigma_\alpha)\mathbb{I}_{\{\boldsymbol{\alpha}>0\}}$$
$$p(\beta) \propto \mathcal{N}(\beta|\mu_\beta, \Sigma_\beta)\mathbb{I}_{\{\beta>0\}}$$

gde su $\mu_\bullet$ i $\Sigma_\bullet$ hiperparametri, $\mathbb{I}_{\{\bullet\}}$ indikator funkcija koja je jednaka jedinici ako postoje ograničenja a nuli u suprotnom, $\mathbf{0}$ je vektor nula dimenzije 2×1 i $\mathcal{N}_d$ je d-dimenzionalna normalna raspodela ($d > 1$).

Pored toga, pretpostavlja se nezavisnost između parametara $\boldsymbol{\alpha}$ i β što znači da važi $p(\psi) = p(\boldsymbol{\alpha})p(\beta)$.
Zatim se konstruiše zajednička posteriorna raspodela pomoću Bajesovog pravila:

$$p(\psi|\mathbf{y}) \propto \mathcal{L}(\psi|\mathbf{y})p(\psi) \tag{4.2}$$

4.2 Modeliranje zajedničke posteriorne raspodele

Rekurzivna priroda jednačine varijanse u modelu (4.1) ne dozvoljava konjugaciju između funkcije verodostojnosti i priorne raspodele u jednačini (4.2). Zbog toga se oslanja na M-H algoritam za kreiranje uzoraka iz zajedničke posteriorne raspodele. Algoritam u ovom odeljku je poseban slučaj algoritma koji je opisao Nakatsuma [10, 11].
Izvlači se početna vrednost $\psi^{[0]} = (\boldsymbol{\alpha}^{[0]}, \beta^{[0]})$ iz zajedničke priorne raspodele i iterativno se generiše J vrednosti za ψ. Pojedinačne vrednosti za parametre razložene su na sledeći način

$$\boldsymbol{\alpha}^{[j]} \sim p(\boldsymbol{\alpha}|\beta^{[j-1]}, \mathbf{y})$$
$$\beta^{[j]} \sim p(\beta|\boldsymbol{\alpha}^{[j]}, \mathbf{y})$$

S obzirom da nijedna potpuna uslovna raspodela nije analitički poznata, uzima se uzorak za parametre $\boldsymbol{\alpha}$ i β iz dve predložene raspodele. Ove raspodele se dobijaju opaskom da GARCH(1,1) model može biti zapisan kao ARIMA(1,1) model za $\{y_t^2\}$. Zaista, definisanjem $\omega_t = y_t^2 - h_t$ može se transformisati izraz uslovne varijanse kao što sledi:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}$$

$$\Leftrightarrow y_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta)y_{t-1}^2 - \beta\omega_{t-1} + \omega_t \tag{4.3}$$

gde se ω_t može zapisati kao:

$$\omega_t = y_t^2 - h_t = \left(\frac{y_t^2}{h_t} - 1\right)h_t = (\chi_1^2 - 1)h_t$$

gde χ_1^2 označava Hi-kvadrat slučajnu promenljivu sa jednim stepenom slobode.

Dakle, prema konstrukciji, $\{\omega_t\}$ je diferencirani martingalski proces sa uslovnim očekivanjem nula i uslovnom varijansom $2h_t^2$ jer χ_1^2 slučajna promenljiva ima očekivanje jednako jedinici i varijansu dva.
Prateći Nakatsuma [10, 11] konstruiše se aproksimativna funkcija verodostojnosti za parametre $\boldsymbol{\alpha}$ i β iz izraza (4.3). Postupak se sastoji u aproksimaciji promenljive ω_t sa promenljivom z_t koja ima normalnu raspodelu sa očekivanjem nula i disperzijom $2h_t^2$.
Ovo dovodi do sledećeg pomoćnog modela:

$$y_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta)y_{t-1}^2 - \beta z_{t-1} + z_t$$

Zatim, primećujući da je z_t funkcija od ψ data sa:

$$z_t(\psi) = y_t^2 - \alpha_0 - (\alpha_1 + \beta)y_{t-1}^2 + \beta z_{t-1} \tag{4.4}$$

i definisanjem vektora $\mathbf{z} = (z_1 \dots z_T)'$ dimenzije $T \times 1$ kao i dijagonalne matrice dimenzije $T \times T$:

$$\Lambda = \Lambda(\psi) = diag\left(\{2h_t^2(\psi)\}_{t=1}^T\right)$$

može se aproksimirati funkcija verodostojnosti od ψ iz pomoćnog modela kao što sledi:

$$\mathcal{L}(\psi|\mathbf{y}) \propto (det\Lambda)^{-1/2} exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{z}'\Lambda^{-1}\mathbf{z}\right] \tag{4.5}$$

Kao što će biti prikazano u nastavku, konstrukcija predloženih raspodela za $\boldsymbol{\alpha}$ i β se zasniva na ovoj aproksimranoj funkciji verodostojnosti.

4.2.1 Generisanje vektora $\boldsymbol{\alpha}$

Rekurzivne transformacije koje koje su prvobitno predložili Chib i Greenberg [12] dopuštaju da se funkcija $z_t(\psi)$ u (4.4) izrazi kao linearna funkcija vektora $\boldsymbol{\alpha}$ dimenzije 2×1. Definiše se $v_t = y_t^2$ radi lakšeg zapisa. Rekurzivne transformacije se definišu na sledeći način:

$$l_t^* = 1 + \beta l_{t-1}^*$$
$$v_t^* = v_{t-1} + \beta v_{t-1}^*$$

gde je $l_0^* = v_0^* = 0$

U slučaju GARCH(1,1) modela, izraz za uslovnu varijansu dat je sa:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}$$

gde je $h_0 = y_0$ po konvenciji. Kao što je prikazano u poglavlju 3.2, GARCH(1,1) model sa normalnom raspodelom može se izraziti kao ARIMA(1,1) model za kvadratne opservacije $\{y_t^2\}$ i aproksimira se na sledeći način:

$$y_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) y_{t-1}^2 - \beta z_{t-1} + z_t$$

gde je $\{z_t\}$ diferencirani martingalski proces. Definiše se $v_t = y_t^2$ u svrhe notacije. Tada promenljiva z_t može biti zapisana kao:

$$z_t = v_t - \alpha_0 - (\alpha_1 + \beta) v_{t-1} + \beta z_{t-1} \tag{$\star$}$$

gde je $v_0 = z_0 = 0$.

Teorema 4.1. *Definisanjem sledećih rekurzivnih transformacija:*

$$\begin{aligned} l_t^* &= 1 + \beta l_{t-1}^* \\ v_t^* &= v_{t-1} + \beta v_{t-1}^* \end{aligned} \tag{\#}$$

gde je $l_0^* = v_0^* = 0$ izraz ($\star$) može se zapisati na sledeći način:

$$z_t = v_t - (l_t^* v_t^*)\boldsymbol{\alpha} \tag{$\diamond$}$$

gde je $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0 \quad \alpha_1)'$.Stoga se funkcija $z_t(\boldsymbol{\alpha})$ u ($\star$) može izraziti kao linearna funkcija vektora $\boldsymbol{\alpha}$ dimenzije 2×1.

Dokaz. *Pomoću indukcije.*
Baza indukcije: Za $t = 1$ dobija se:

$$v_1 - (l_1^* \quad v_1^*)\boldsymbol{\alpha} \overset{(\#)}{=} v_1 - (1 \quad 0)\boldsymbol{\alpha} = v_1 - \alpha_0 \overset{(\star)}{=} z_1$$

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavlja se da izraz ($\diamond$) važi za $t = k$
Indukcijski korak:
Za $t = k + 1$ dobija se:

$$\begin{aligned} v_{k+1} = (l_{k+1}^* \quad v_{k+1}^*)\boldsymbol{\alpha} &\overset{(\#)}{=} v_{k+1} - (1 + \beta l_k^* \quad v_k + \beta v_k^*)\boldsymbol{\alpha} \\ &= v_{k+1} - \alpha_0 - \alpha_1 v_k - \beta(\alpha_0 l_k^* + \alpha_1 v_k^*) \\ &= v_{k+1} - \alpha_0 - \alpha_1 v_k - \beta((l_k^* \quad v_k^*)\boldsymbol{\alpha} \\ &\overset{(\diamond)}{=} v_{k+1} - \alpha_0 - \alpha_1 v_k - \beta(v_k - z_k) \\ &= v_{k+1} - \alpha_0 - (\alpha_1 + \beta) v_k + \beta z_k \\ &\overset{(\star)}{=} z_{k+1} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Nakon definisanja dvodimenzionalnog vektora $\mathbf{c}_t = (l_t^* \quad v_t^*)'$, funkcija z_t može se izraziti kao $z_t = v_t - \mathbf{c}_t'\boldsymbol{\alpha}$. Zatim, uzimajući u obzir vektor $\mathbf{v} = (v_1 \dots v_T)'$ dimenzije $T \times 1$ i matricu C dimenzije $T \times 2$ čija je t-ta kolona $\mathbf{c}_t'$, dobija se $\mathbf{z} = \mathbf{v} - C\boldsymbol{\alpha}$. Zbog toga se može izraziti aproksimativna funkcija verodostojnosti parametra $\boldsymbol{\alpha}$ na sledeći način:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}|\beta, \mathbf{y}) \propto (det\Lambda)^{-1/2} exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{v} - C\boldsymbol{\alpha})'\Lambda^{-1}(\mathbf{v} - C\boldsymbol{\alpha})\right]$$

Predložena raspdela uzorka vektora $\boldsymbol{\alpha}$ dobija se ubacivanjem ove funkcije verodostojnosti i priorne raspodele u Bayes-ovu formulu:

$$q_\alpha(\boldsymbol{\alpha}|\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}, \beta, \mathbf{y}) \propto \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\alpha}|\widehat{\boldsymbol{\mu}_\alpha}, \widehat{\Sigma_\alpha})\mathbb{I}_{\{\alpha>0\}}$$

sa:

$$\widehat{\Sigma_\alpha^{-1}} = C'\widetilde{\Lambda^{-1}}C + \Sigma_\alpha^{-1}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}_\alpha} = \widehat{\Sigma_\alpha}\left(C'\widetilde{\Lambda^{-1}}\mathbf{v} + \Sigma_\alpha^{-1}\boldsymbol{\mu}_\alpha\right)$$

gde je $\tilde{\Lambda} = diag\big(\{2h_t^2(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \beta)\}_{t=1}^T\big)$ $T \times T$ dijagonalna matrica i $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ prethodno izvlačenje iz $\boldsymbol{\alpha}$ u M-H algoritmu.
Kandidat $\boldsymbol{\alpha}^*$ se uzima iz uzorka ove predložene raspodele i prihvata se sa verovatnoćom:

$$min\left\{\frac{p(\boldsymbol{\alpha}^*, \beta|\mathbf{y})}{p(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \beta|\mathbf{y})}\frac{q_\alpha(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\alpha}^*, \beta, \mathbf{y})}{q_\alpha(\boldsymbol{\alpha}^*|\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \beta, \mathbf{y})}, 1\right\}$$

4.2.2 Generisanje parametra β

Funkcija $z_t(\psi)$ u jednačini (4.4) iz prethodnog poglavlja se može izraziti kao linearna kombinacija parametra $\boldsymbol{\alpha}$ ali se ne može izraziti kao linearna funkcija od β. Za prevazilaženje ovog problema linearizuje se $z_t(\beta)$ preko Tejlorovog razvoja prvog reda u tački $\tilde{\beta}$:

$$z_t(\beta) \simeq z_t(\tilde{\beta}) + \left.\frac{dz_t}{d\beta}\right|_{\beta=\tilde{\beta}} \times (\beta - \tilde{\beta})$$

gde $\tilde{\beta}$ predstavlja prethodno izvlačenje parametra β u M-H algoritmu.
U nastavku se definiše sledeće:

$$r_t = z_t(\tilde{\beta}) + \tilde{\beta}\triangledown_t \qquad , \triangledown_t = -\left.\frac{dz_t}{d\beta}\right|_{\beta=\tilde{\beta}}$$

gde se izraz $\triangledown_t$ može izračunati pomoću sledeće rekurzije:

$$\triangledown_t = y_{t-1}^2 - z_{t-1}(\tilde{\beta}) + \tilde{\beta}\triangledown_{t-1}$$

uz $\triangledown_0 = 0$.

Ova rekurzija dobija se jednostavno, diferenciranjem (4.4) po parametru β. Zatim, se ovaj izraz pregrupiše u $T \times 1$ vektore $\mathbf{r} = (r_1 \dots r_T)'$ i $\nabla = (\triangledown_1 \dots \triangledown_T)'$ i izraz unutar eksponencijalne funkcije u (4.5) se aproksimira sa $\mathbf{z} \simeq \mathbf{r} - \beta\nabla$. Ovo daje sledeću aproksimativnu funkciju verodostojnosti za parametar β:

$$\mathcal{L}(\beta|\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{y}) \propto (det\Lambda)^{-1/2} exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{r} - \beta\nabla)'\Lambda^{-1}(\mathbf{r} - \beta\nabla) \right]$$

Predložena raspodela uzorka β dobija se kombinovanjem ove funkcije verodostojnosti i priorne raspodele uz pomoć Bayes-ove formule:

$$q_\beta(\beta|\boldsymbol{\alpha}, \tilde{\beta}, \mathbf{y}) \propto \mathcal{N}\big(\beta|\widehat{\boldsymbol{\mu}_\beta}, \widehat{\Sigma_\beta}\big)\mathbb{I}_{\{\beta>0\}}$$

sa:

$$\widehat{\Sigma_\beta^{-1}} = \nabla'\widetilde{\Lambda}^{-1}\nabla + \Sigma_\beta^{-1}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}_\beta} = \widehat{\Sigma_\beta}\big(\nabla'\widetilde{\Lambda^{-1}}\mathbf{r} + \Sigma_\beta^{-1}\boldsymbol{\mu}_\beta\big)$$

sa dijagonalnom matricom $\widetilde{\Lambda} = diag\big(\{2h_t^2(\boldsymbol{\alpha}, \tilde{\beta})\}_{t=1}^T\big)$ dimenzije $T \times T$.

Kandidat β^* se uzima iz predložene raspodele i prihvata se sa verovatnoćom:

$$min \left\{ \frac{p(\boldsymbol{\alpha}, \beta^*|\mathbf{y})}{p(\boldsymbol{\alpha}, \tilde{\beta}|\mathbf{y})} \frac{q_\beta(\tilde{\beta}|\boldsymbol{\alpha}, \beta^*, \mathbf{y})}{q_\beta(\beta^*|\boldsymbol{\alpha}, \tilde{\beta}, \mathbf{y})}, 1 \right\}.$$

5 Bayes-ovska ocena linearnog regresijskog modela sa normalnim-GJR(1,1) rezidualima

"Sve u svemu, ovi rezultati pokazuju veći uticaj na volatilnost negativnih nego pozitivnih šokova prinosa "
- Robert F. Engle i Victor K. Ng

U ovom poglavlju izlaže se Bayes-ova ocena linearnog regresijskog modela sa uslovnim heteroskedastičnim rezidualima. U kontekstu vremenskih serija, regresioni deo može uključivati promenljive koje imaju spoljašnji uzrok ili zaostale zavisne promenljive. Štaviše, ovde se nadograđuje tradicionalan GARCH model grešaka kako bi objasnila asimetrična kretanja između uslovne varijanse i osnovnog procesa.

Volatilnost ima tendenciju da se mnogo više povećava kao odgovor na loše vesti nego na dobre. Ova pojava naročito važi na tržištima kapitala. Prvi koji je uočio i posmatrao ovaj efekat je Black [15] a u finansijskoj literaturi poznat je pod nazivom leverage effect (leveridž efekat) ili na srpskom jeziku, efekat poluge. Jedno objašnjenje ove ove empirijske činjenice je da negativni prinosi povećavaju finansijski leverage što povećava rizik kompanije a samim tim i varijansu. Kako bi se savladala ova činjenica, uvodi se Glosten - Jagannathan - Runkle GARCH, kraće **GJR model** od strane Glostena [14]. U ovom okviru, uslovna varijansa može reagovati asimetrično u zavisnosti od znaka prethodnih šokova zbog uvođenja veštačkih promenljivih. Atraktivan aspekt ovoga modela je to što obuhvata simetrični GARCH model. Pored toga, MCMC šema, predstavljena u poglavlju 3.2, može se lako proširiti na asimetričan model u cilju pronalaženja predložene raspodele parametara.

5.1 Model i priorne raspodele

Linearni regresijski model sa normalnim-GJR(1,1) rezidualima može se zapisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} y_t &= \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\gamma} + u_t \qquad za \quad t = 1, \ldots, T \\ u_t &= \varepsilon_t h_t^{1/2} \\ \varepsilon_t &\overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1) \\ h_t &= \alpha_0 + \big(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}\geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}<0\}}\big) u_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \end{aligned} \tag{5.1}$$

gde uslovi $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ i $\beta \geq 0$ obezbeđuju pozitivnost uslovne varijanse i po konvenciji je $h_0 = y_0 = 0$; y_t je skalarna zavisna promenljiva; $\mathbf{x}_t$ je $m \times 1$ vektor spoljašnjih uticaja ili zaostalih zavisnih promenljivih; $\boldsymbol{\gamma}$ je $m \times 1$ vektor regresijskih koeficijenata $\mathcal{N}(0,1)$ je standardizovana normalna raspodela.
U ovom okviru, uslovna varijansa h_t je linearna funkcija kvadrata prethodnih šokova i prethodne varijanse ali nasuprot GARCH modelu, uslovna varijansa može reagovati asimetrično u zavisnosti od znakova prethodnih šokova. Efekat poluge je prisutan ako je $\alpha_2 > \alpha_1$ tako da je uslovna varijansa veća nakon negativnog nego nakon pozitivnog šoka.

Radi zapisa funkcije verodostojnosti, definišu se vektori $\mathbf{y} = (y_1 \ldots y_T)'$ i $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2)'$ kao i matrica X dimenzije $T \times m$ čija je t-ta vrsta data sa $\mathbf{x}_t'$. Parametri modela se pregrupišu u $\psi = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \beta)$ radi jednostavnijeg zapisa i definiše se dijagonalna matrica dimenzije $T \times T$:

$$\Sigma = \Sigma(\psi) = diag\big(\{h_t(\psi)\}_{t=1}^T\big)$$

gde

$$\begin{aligned} h_t(\psi) &= \alpha_0 + \big(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}(\boldsymbol{\gamma})\geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}(\boldsymbol{\gamma})<0\}}\big) u_{t-1}^2(\boldsymbol{\gamma}) + \beta h_{t-1}(\psi) \\ u_t(\boldsymbol{\gamma}) &= y_t - \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\gamma}. \end{aligned}$$

Zatim, se izraz za grešku $u_t(\boldsymbol{\gamma})$ pregrupiše u $T \times 1$ vektor $\mathbf{u} = (u_1 \ldots u_T)'$ i izražava se funkcija verodostojnosti u zavisnosti od ψ na sledeći način:

$$\mathcal{L}(\psi|\mathbf{y}, X) \propto (det\Sigma)^{-1/2} exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{u}'\Sigma^{-1}\mathbf{u}\right]. \tag{5.2}$$

Predložene priorne raspodele za parametre prethodnog modela su sledeće:

$$p(\boldsymbol{\gamma}) = \mathcal{N}_m\big(\boldsymbol{\gamma}|\boldsymbol{\mu}_\gamma, \Sigma_\gamma\big)$$
$$p(\boldsymbol{\alpha}) \propto \mathcal{N}_3\big(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\mu}_\alpha, \Sigma_\alpha\big)\mathbb{I}_{\{\boldsymbol{\alpha}>0\}}$$
$$p(\beta) \propto \mathcal{N}\big(\beta|\mu_\beta, \Sigma_\beta\big)\mathbb{I}_{\{\beta>0\}}$$

gde su $\mu_\bullet$ i $\Sigma_\bullet$ hiperparametri, $\mathbf{0}$ je 3×1 vektor nula, $\mathbb{I}_{\{\bullet\}}$ je indikator funkcija i $\mathcal{N}_d$ je d-dimenzionalna normalna raspodela ($d > 1$).
Pored toga, pretpostavlja se nezavisnost između parametara $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\alpha}$ i β što daje sledeću zajedničku priornu raspodelu:

$$p(\psi) = p(\boldsymbol{\gamma})p(\boldsymbol{\alpha})p(\beta).$$

Zatim se konstruiše zajednička posteriorna raspodela pomoću Bayes-ovog pravila:

$$p(\psi|\mathbf{y}, X) \propto \mathcal{L}(\psi|\mathbf{y}, X)p(\psi).$$

5.2 Simulacija zajedničke posteriorne raspodele

Kao i u GARCH modelu iz poglavlja 4., rekurzivna priroda jednačine varijanse ne dozvoljava konjugaciju između funkcije verodostojnosti i zajedničke posteriorne raspodele. Stoga se ponovo oslanja na M-H algoritam za prikupljanje uzoraka iz zajedničke posteriorne raspodele.

Postavlja se početna vrednost $\psi^{[0]} = \big(\boldsymbol{\gamma}^{[0]}, \boldsymbol{\alpha}^{[0]}, \beta^{[0]}\big)$ iz zajedničke priorne raspodele i iterativno se generiše J koraka za ψ. Pojedinačan korak je razložen na sledeći način:

$$\boldsymbol{\gamma}^{[j]} \sim p\big(\boldsymbol{\gamma}|\boldsymbol{\alpha}^{[j-1]}, \beta^{[j-1]}, \mathbf{y}, X\big)$$
$$\boldsymbol{\alpha}^{[j]} \sim p\big(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\gamma}^{[j]}, \beta^{[j-1]}, \mathbf{y}, X\big)$$
$$\beta^{[j]} \sim p\big(\beta|\boldsymbol{\gamma}^{[j]}, \boldsymbol{\alpha}^{[j]}, \mathbf{y}, X\big)$$

Kako nijedna uslovna gustina nije analitički poznata, parametri $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\alpha}$ i β se biraju iz tri predložene raspodele.

5.2.1 Generisanje vektora $\boldsymbol{\gamma}$

Predložena raspodela uzorka $\boldsymbol{\gamma}$ dimenzije $m \times 1$ dobija se ubacivanjem funkcije verodostojnosti (5.2) i priorne raspodele u Bayes-ovu formulu:

$$q_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\gamma}|\tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\alpha}, \beta, \mathbf{y}, X) = \mathcal{N}_m\left(\boldsymbol{\gamma}|\widehat{\boldsymbol{\mu}_\gamma}, \widehat{\Sigma_\gamma}\right)$$

sa

$$\widehat{\Sigma_\gamma^{-1}} = X'\widetilde{\Sigma^{-1}}X + \Sigma_\gamma^{-1}$$
$$\widehat{\boldsymbol{\mu}_\gamma} = \widehat{\Sigma_\gamma}\left(X'\widetilde{\Sigma^{-1}}\mathbf{y} + \Sigma_\gamma^{-1}\boldsymbol{\mu}_\gamma\right)$$

gde je $\tilde{\Sigma} = diag\left(\{h_t(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\alpha}, \beta)\}_{t=1}^{T}\right)$ dijagonalna $T \times T$ matrica i $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ prethodno izvlačenje iz $\boldsymbol{\gamma}$ u M-H algoritmu.

Kandidat $\boldsymbol{\gamma}^*$ se uzima iz predložene raspodele i prihvata se sa verovatnoćom:

$$min\left\{\frac{p(\boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\alpha}, \beta|\mathbf{y}, X)}{p(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\alpha}, \beta|\mathbf{y}, X)}\frac{q_{\boldsymbol{\gamma}}(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}|\boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\alpha}, \beta, \mathbf{y}, X)}{q_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\gamma}^*|\tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\alpha}, \beta, \mathbf{y}, X)}, 1\right\}.$$

5.2.2 Generisanje parametara GJR modela

Predložene raspodele za generisanje parametara $\boldsymbol{\alpha}$ i β se dobijaju na isti način kao i u poglavlju 4.2. Međutim, kako se u ovom modelu pojavljuje regresijski izraz, parametre GJR modela ocenjujemo iz reziduala $u_t = y_t - \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\gamma}$ umesto iz y_t. Zatim se konstruiše aproksimativna funkcija verodostojnosti za $(\boldsymbol{\alpha}, \beta)$ iz procesa $\{u_t^2\}$. U slučaju GJR modela za u_t, ne završava se sa ARIMA procesom za $\{u_t^2\}$ kao u GARCH modelu jer postoje dve veštačke promenljive koje se pojavljuju u izrazu za uslovnu varijansu.
Zaista, definisanjem $\omega_t = u_t^2 - h_t$, može se transformisati izraz za uslovnu varijansu na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
h_t &= \alpha_0 + \big(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}\geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}<0\}}\big)u_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \\
\Leftrightarrow u_t^2 &= \alpha_0 + \big(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}\geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}<0\}} + \beta\big)u_{t-1}^2 - \beta\omega_{t-1} + \omega_t
\end{aligned}
$$

gde ω_t može biti zapisano kao $\omega_t = (\chi_1^2 - 1)h_t$, χ_1^2 označava Hi-kvadrat slučajnu promenljivu sa jednim stepenom slobode. Kao i u slučaju GARCH modela, niz ω_t je diferencirani martingalski proces gde promenljiva ω_t ima uslovno očekivanje nula i uslovnu varijansu $2h_t^2$. Prateći metodologiju iz poglavlja 4.2, aproksimira se promenljiva ω_t sa promenljivom z_t koja ima normalnu raspodelu sa očekivanjem nula i varijansom $2h_t^2$. Ovo dovodi do sledećeg pomoćnog modela:

$$
u_t^2 = \alpha_0 + \big(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}\geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}<0\}} + \beta\big)u_{t-1}^2 - \beta z_{t-1} + z_t
$$

Zatim, zapažanjem da je z_t funkcija od $(\boldsymbol{\alpha}, \beta)$ koja je data sa:

$$
z_t(\boldsymbol{\alpha}, \beta) = u_t^2 - \alpha_0 - \big(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}\geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}<0\}} + \beta\big)u_{t-1}^2 + \beta z_{t-1}(\boldsymbol{\alpha}, \beta) \tag{5.3}
$$

i definisanjem vektora $\mathbf{z} = (z_1 \dots z_T)$ dimenzije $T \times 1$ kao i dijagonalne matrice $T \times T$:

$$
\Lambda = \Lambda(\boldsymbol{\alpha}, \beta) = diag\big(\{2h_t^2(\boldsymbol{\alpha}, \beta)\}_{t=1}^T\big)
$$

može se izraziti aproksimativna funkcija verodostojnosti od $(\boldsymbol{\alpha}, \beta)$ na sledeći način:

$$
\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}, \beta | \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{y}, X) \propto (det\Lambda)^{-1/2} exp\Big[-\frac{1}{2}\mathbf{z}'\Lambda^{-1}\mathbf{z}\Big]
$$

Kao što će biti prikazano u narednom poglavlju, konstrukcija predložene gustine za parametre $\boldsymbol{\alpha}$ i β se zasniva na ovoj aproksimativnoj funkciji verodostojnosti.

Generisanje vektora α

Rekurzivne transformacije predstavljene u poglavlju 4.2.1 se proširuju kako bi se funkcija $z_t(\boldsymbol{\alpha}, \beta)$ iz jednačine (5.3) izrazila kao linearna funkcija vektora $\boldsymbol{\alpha}$ dimenzije 3×1. Kako je uslovna varijansa asimetrična funkcija prethodnih reziduala, treba praviti raliku između pozitivnih i negativnih šokova u rekurzivnim transformacijama.
Radi jednostavnijeg zapisa, definiše se $v_t = u_t^2$. Odgovarajuće rekurzivne transformacije definisane su na sledeći način:

$$l_t^* = 1 + \beta l_{t-1}^*$$
$$v_t^* = v_{t-1}\mathbb{I}_{\{u_{t-1} \geq 0\}} + \beta v_{t-1}^*$$
$$v_t^{**} = v_{t-1}\mathbb{I}_{\{u_{t-1} < 0\}} + \beta v_{t-1}^{**}$$

gde je $l_0^* = v_0^* = v_0^{**} = 0$.

U slučaju GJR (1,1) izraz za uslovnu varijansu y_t dat je sa:

$$h_t = \alpha_0 + \left(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{y_{t-1} \geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{y_{t-1} < 0\}}\right) y_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}$$

gde je $h_0 = y_0$ prema konvenciji. Kao što je i prikazno na početku poglavlja, GJR(1,1) model sa normalnom raspodelom može biti transformisan za kvadratne opservacije $\{y_t^2\}$ i aproksimirati se na sledeći način:

$$y_t^2 = \alpha_0 + \left(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{y_{t-1} \geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{y_{t-1} < 0\}} + \beta\right) y_{t-1}^2 - \beta z_{t-1} + z_t$$

gde je $\{z_t\}$ diferencirani martingalski proces. Radi jednostavnijeg zapisa efiniše se $v_t = y_t^2$. Tada promenljiva z_t može biti zapisana kao:

$$z_t = v_t - \alpha_0 - \left(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{y_{t-1} \geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{y_{t-1} < 0\}} + \beta\right) v_{t-1} + \beta z_{t-1} \qquad (\star)$$

gde je $v_0 = z_0 = 0$.

Teorema 5.1. *Definisanjem sledećih rekurzivnih transformacija:*

$$l_t^* = 1 + \beta l_{t-1}^*$$
$$v_t^* = v_{t-1}\mathbb{I}_{\{u_{t-1} \geq 0\}} + \beta v_{t-1}^* \qquad (\#)$$
$$v_t^{**} = v_{t-1}\mathbb{I}_{\{u_{t-1} < 0\}} + \beta v_{t-1}^{**}$$

gde je $l_0^* = v_0^* = v_0^{**} = 0$, *izraz* $(\star)$ *se može zapisati kao:*

$$z_t = v_t - (l_t^* \quad v_t^* \quad v_t^{**})\boldsymbol{\alpha} \qquad (\diamond)$$

gde je $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2)'$.
Funkcija $z_t(\boldsymbol{\alpha})$ *iz jednačine* $(\star)$ *može se izraziti kao linearna funkcija vektora* $\boldsymbol{\alpha}$ *dimenzije* 3×1.

Dokaz. *Pomoću indukcije.*
Baza indukcije: Za $t = 1$ dobija se:

$$v_1 - (l_1^* \quad v_1^* \quad v_1^{**})\boldsymbol{\alpha} \overset{(\#)}{=} v_1 - (1 \quad 0 \quad 0)\boldsymbol{\alpha} = v_1 - \alpha_0 \overset{(\star)}{=} z_1$$

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavlja se da izraz $(\diamond)$ važi za $t = k$.
Indukcijski korak:
Za $t = k + 1$ dobija se:

$$\begin{aligned}
& v_{k+1} - (l_{k+1}^* \quad v_{k+1}^* \quad v_{k+1}^{**})\boldsymbol{\alpha} \\
\overset{(\#)}{=} & v_{k+1} - \big(1 + \beta l_k^* \quad v_k\mathbb{I}_{\{y_k \geq 0\}} + \beta v_k^* \quad v_k\mathbb{I}_{\{y_k < 0\}} + \beta v_k^{**}\big)\boldsymbol{\alpha} \\
= & v_{k+1} - \alpha_0 - \alpha_1 v_k\mathbb{I}_{\{y_k \geq 0\}} - \alpha_2 v_k\mathbb{I}_{\{y_k < 0\}} - \beta\big(\alpha_0 l_k^* + \alpha_1 v_k^* + \alpha_2 v_k^{**}\big) \\
= & v_{k+1} - \alpha_0 - \alpha_1 v_k\mathbb{I}_{\{y_k \geq 0\}} - \alpha_2 v_k\mathbb{I}_{\{y_k < 0\}} - \beta\big(l_k^* \quad v_k^* \quad v_k^{**}\big)\boldsymbol{\alpha} \\
\overset{(\diamond)}{=} & v_{k+1} - \alpha_0 - \alpha_1 v_k\mathbb{I}_{\{y_k \geq 0\}} - \alpha_2 v_k\mathbb{I}_{\{y_k < 0\}} - \beta(v_k - z_k) \\
= & v_{k+1} - \alpha_0 - \big(\alpha_1\mathbb{I}_{\{y_k \geq 0\}} + \alpha_2\mathbb{I}_{\{y_k < 0\}} + \beta\big)v_k + \beta z_k \\
\overset{(\star)}{=} & z_{k+1} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Kao što je pokazano u prethodnoj teoremi, definisanjem vektora $\mathbf{c}_t = \big(l_t^* \quad v_t^* \quad v_t^{**}\big)'$ dimenzije 3×1, funkcija z_t se može izraziti kao $z_t = v_t - \mathbf{c}_t'\boldsymbol{\alpha}$.
Zatim, uzimajući u obzir vektor $\mathbf{v} = (v_1 \ldots v_T)'$ dimenzije $T \times 1$ kao i matricu C dimenzije $T \times 3$ čija je t-ta vrsta $\mathbf{c}_t'$ dobija se da je $\mathbf{z} = \mathbf{v} - C\boldsymbol{\alpha}$. Prema tome, može da se izrazi aproksimativna funkcija verodostojnosti parametra $\boldsymbol{\alpha}$ na sledeći način:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\gamma}, \beta, \mathbf{y}, X) \propto (det\Lambda)^{-1/2} exp\Big[-\frac{1}{2}(\mathbf{v} - C\boldsymbol{\alpha})'\Lambda^{-1}(\mathbf{v} - C\boldsymbol{\alpha})\Big]$$

Predložena raspodela za uzorak vektora $\boldsymbol{\alpha}$ se dobija kombinovanjem ove funkcije verodostojnosti i priorne raspodele pomoću Bayes-ove formule:

$$q_\alpha\big(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\gamma}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \beta, \mathbf{y}, X\big) \propto \mathcal{N}_3\big(\boldsymbol{\alpha}|\widehat{\boldsymbol{\mu}_\alpha}, \widehat{\Sigma_\alpha}\big)\mathbb{I}_{\{\alpha > 0\}}$$

sa:

$$\widehat{\Sigma_\alpha^{-1}} = C'\widetilde{\Lambda^{-1}}C + \Sigma_\alpha^{-1}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}_\alpha} = \widehat{\Sigma_\alpha}\big(C'\widetilde{\Lambda^{-1}}\mathbf{v} + \Sigma_\alpha^{-1}\boldsymbol{\mu}_\alpha\big)$$

gde je $\tilde{\Lambda} = diag\big(\{2h_t^2(\boldsymbol{\gamma}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \beta)\}_{t=1}^T\big)$ dijagonalna $T \times T$ matrica i $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ prethodno izvlačenje iz $\boldsymbol{\alpha}$ u M-H algoritmu.
Kandidat $\boldsymbol{\alpha}^*$ se uzima iz ove predložene raspodele i prihvata se sa verovatnoćom:

$$min\left\{\frac{p(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}^*, \beta|\mathbf{y}, X)}{p(\boldsymbol{\gamma}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \beta|\mathbf{y}, X)}\frac{q_\alpha(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}|\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}^*, \beta, \mathbf{y}, X)}{q_\alpha(\boldsymbol{\alpha}^*|\boldsymbol{\gamma}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \beta, \mathbf{y}, X)}, 1\right\}$$

Generisanje parametra β

Metodologija je ista kao i u poglavlju 4.2.2. Funkcija $z_t(\beta)$ data sa:

$$z_t(\beta) = u_t^2 - \alpha_0 - \big(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}\geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}<0\}} + \beta\big)u_{t-1}^2 + \beta z_{t-1}(\beta)$$

aproksimira se Tejlorovim razvojem prvog reda u tački $\tilde{\beta}$ koja predstavlja prethodno izvlačenje parametra β u M-H algoritmu.

Predložena gustina $q_\beta(\beta|\bullet)$ dobija se ubacivanjem aproksimativne funkcije verodostojnosti za β i priorne raspodele u Bayes-ovu formulu.

Kandidat β^* generisan je iz ove raspodele i prihvata se sa verovatnoćom:

$$min\left\{\frac{p(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \beta^*|\mathbf{y}, X)}{p(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \tilde{\beta}|\mathbf{y}, X)} \frac{q_\beta(\tilde{\beta}|\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \beta^*, \mathbf{y}, X)}{q_\beta(\beta^*|\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \tilde{\beta}, \mathbf{y}, X)}, 1\right\}.$$

6 Bayes-ovska ocena linearnog regresijskog modela sa studentovim-*t*-GJR(1,1) rezidualima

U ovom poglavlju se proširuje model linearne regresije sa uslovnim heteroskedastičnim rezidualima. Uslovna varijansa je opisana GJR procesom, uvedenim u poglavlju 5.
Međutim, u novoj specifikaciji reziduali više nemaju normalnu raspodelu nego prate studentovu-*t* raspodelu. Stoga, model uključuje mogućnost raspodela sa teškim (debelim) repovima. Zaista, dok se normalna raspodela koristi rutinski, naširoko je prepoznato da finansijska tržišta pokazuju značajne ne-Normalnosti, naročito kada prinosi aktiva imaju teške repove. Raspodele sa teškim repovima pretpostavljaju ekstremne ishode, kao što je propast, sa relativno većom verovatnoćom nego normalna raspodela, koja dodeljuje praktično verovatnoću nula događajima koji su veći od tri standardne devijacije.
Budući da je jedan od ciljeva modela za upravljanje finansijskim rizikom merenje i procena ozbiljnih gubitaka, tj. događaja koji se pojavljuju u repovima raspodele, ovo je ozbiljan nedostatak. Alternativa je studentova-*t* raspodela koja uključuje teške repove u modeliranje.

U Bayes-ovom pristupu, efekat teških repova stvoren je uvođenjem latentnih promenljivih u proces varijanse, kao što je predložio Geweke [16]. Ovaj pristup na odgovarajući način dozvoljava Bayes-ovoj oceni parametara stepene slobode.

6.1 Model i priorna raspodela

Linearni regresijski model sa studentovom-t-GJR(1,1) raspodelom može biti zapisan kao što je dato u nastavku:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\gamma} + u_t \qquad za \quad t = 1, \dots T \\
u_t &= \varepsilon_t(\varrho h_t)^{1/2} \\
\varepsilon_t &\overset{iid}{\sim} \mathcal{S}(0, 1, \nu) \\
\varrho &= \frac{\nu - 2}{\nu} \\
h_t &= \alpha_0 + \left(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{u_{t-1} \geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{u_{t-1} < 0\}}\right) u_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

gde su $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\nu > 2$ i $h_0 = y_0 = 0$ prema konvenciji; y_t je skalarna zavisna promenljiva; $\mathbf{x}_t$ je vektor egzogenih ili zaostalih zavisnih promenljivih dimenzije $m \times 1$; $\boldsymbol{\gamma}$ je $m \times 1$ vektor regresionih koeficijenata; $\mathcal{S}(0, 1, \nu)$ je standardna studentova-t raspodela sa ν stepeni slobode, tj. njegova varijansa je $\frac{\nu}{\nu - 2}$.

Iz specifikacije modela (6.1) primećuje se da je ϱ skalirajući faktor koji normalizuje varijansu studentove-t raspodele sa ν stepeni slobode tako da je h_t varijansa od y_t data sa GJR skedastičnom funkcijom. Ograničenje parametra stepena slobode garantuje ograničenost uslovne varijanse a ograničenja GJR parametara garantuju pozitivnost uslovne varijanse.

Radi jednostavnijeg zapisa funkcije verodostojnosti, definišu se vektori $\mathbf{y} = (y_1 \dots y_T)'$ i $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2)'$ kao i matrica opservacija X dimenzije $T \times m$, čija je t-ta vrsta $\mathbf{x}_t'$. Parametri modela se pregrupišu u $\psi = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \beta, \nu)$.
Pored toga, definiše se $T \times T$ dijagonalna matrica:

$$\Sigma = \Sigma(\psi) = diag\left(\{\varrho h_t(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \beta)\}_{t=1}^T\right)$$

gde je:

$$
\begin{aligned}
h_t(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \beta) &= \alpha_0 + \left(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}(\boldsymbol{\gamma}) \geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}(\boldsymbol{\gamma}) < 0\}}\right) u_{t-1}^2(\boldsymbol{\gamma}) + \beta h_{t-1}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \beta) \\
u_t(\boldsymbol{\gamma}) &= y_t - \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\gamma}
\end{aligned} \tag{6.2}
$$

Zatim se pregrupiše izraz za grešku $u_t(\boldsymbol{\gamma})$ u vektor $\mathbf{u} = (u_1 \dots u_T)'$ dimenzije $T \times 1$ i izražava se funkcija verodostojnosti na sledeći način:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\psi | \mathbf{y}, X) \propto \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\nu^{1/2}}\right]^T (det\Sigma)^{-1/2} \prod_{t=1}^T \left(1 + \frac{u_t^2}{\nu \varrho h_t}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}} \tag{6.3}$$

Notacija $\mathcal{L}_S$ naglašava činjenicu da je funkcija verodostojnosti konstruisana iz studentove-t raspodele.
Dok se funkcija verodostojnosti (6.3) može koristiti u klasičnom zaključivanju, to nije zgodno u Bayes-ovskom zaključivanju. Veoma je teško pronaći predloženu raspodelu za parametre, naročto ako se još teži da se izmere stepeni slobode ν. Kako bi se prevazišao ovaj problem, uvodi se inovacioni proces $\{u_t\}$ u drugoj specifikaciji koju je zadao Geweke [16].
U ovom novom okruženju, promenljiva u_t je izražena na sledeći način:

$$\begin{aligned} u_t &= \varepsilon_t(\varpi_t \varrho h_t)^{1/2} \qquad za \quad t = 1, \dots T \\ \varepsilon_t &\overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1) \\ \varpi_t &\overset{iid}{\sim} \mathcal{IG}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Stoga, izraz za grešku u_t, koji zavisi od ϖ_t, prati normalnu raspodelu sa očekivanjem nula i varijansom $\varpi_t \varrho h_t$; funkcija ϱh_t je pomnožena sa latentnom promenljivom ϖ_t, koja ima Inverznu Gama raspodelu. Parametar stepena slobode ν karakteriše gustinu od ϖ_t kao što sledi:

$$p(\varpi_t|\nu) = \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1} \varpi_t^{-\frac{\nu}{2}-1} exp\left[-\frac{\nu}{2\varpi_t}\right] \tag{6.5}$$

Sada se pregrupiše latentna promenljiva u vekor $\boldsymbol{\varpi} = (\varpi_1 \dots \varpi_T)'$ dimenzije $T \times 1$ i definiše povećani skup parametara $\Theta = (\psi, \varpi)$.
Nakon definisanja dijagonalne matrice dimenzije $T \times T$:

$$\Sigma = \Sigma(\Theta) = diag\left(\left\{\varpi_t \varrho h_t(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \beta)\right\}_{t=1}^{T}\right)$$

gde je h_t u izrazu (6.2), može se izraziti funkcija verodostojnosti od Θ kao što sledi:

$$\mathcal{L}(\Theta|\mathbf{y}, X) \propto (det\Sigma)^{-1/2} exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{u}'\Sigma^{-1}\mathbf{u}\right] \tag{6.6}$$

Ova specifikacija ekvivalentna je sa (6.3). Međutim, u tom slučaju, Bayes-ovom ocenom se može postupati za sve parametre na odgovarajući način.
Predlažu se sledeće odgovarajuće priorne raspodele za parametre $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\alpha}$, β prethodnog modela

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\gamma}) &= \mathcal{N}_m\left(\boldsymbol{\gamma}|\boldsymbol{\mu}_\gamma, \Sigma_\gamma\right) \\ p(\boldsymbol{\alpha}) &\propto \mathcal{N}_3\left(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\mu}_\alpha, \Sigma_\alpha\right)\mathbb{I}_{\{\boldsymbol{\alpha}>0\}} \\ p(\beta) &\propto \mathcal{N}\left(\beta|\mu_\beta, \Sigma_\beta\right)\mathbb{I}_{\{\beta>0\}} \end{aligned}$$

gde su $\mu_\bullet$ i $\Sigma_\bullet$ hiperparametri, $\mathbb{I}_{\{\bullet\}}$ je indikator funkcija, $\mathbf{0}$ je vektor nula dimenzije 3×1 i $\mathcal{N}_d$ je d-dimenzionalana normalna raspodela ($d > 1$).

Priorna raspodela vektora $\boldsymbol{\varpi}$ uslovljenog sa ν se uz napomenu da su komponente ϖ_t nezavisne i imaju istu raspodelu (iid) pronalzi iz jednačine (6.5), što daje:

$$p(\boldsymbol{\varpi}|\nu) = \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{T\nu}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-T} \left(\prod_{t=1}^{T} \varpi_t\right)^{-\frac{\nu}{2}-1} exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{\nu}{\varpi_t}\right]$$

Za izbor priorne raspodele za parametar stepena slobode prati se Deschamps [17]. Raspodela je translirana Eksponencijalna raspodela sa parametrima $\lambda > 0$ i $\delta \geq 2$:

$$p(\nu) = \lambda exp\big[-\lambda(\nu - \delta)\big]\mathbb{I}_{\{\nu > \delta\}}$$

Za velike vrednosti λ, masa priorne raspodele skoncentrisana je u okolini od δ i ograničenje na stepen slobode može biti nametnuto na ovaj način. Normalnost reziduala se postiže kada δ postaje veliko. Kao što je istaknuto kod Deschamps [17], ova priorna raspodela je korisna iz dva razloga. Prvo, što je veoma važno, iz numeričkih razloga, da se ograniči parametar stepena slobode van dvojke da bi se izbegla eksplozija uslovne varijanse. Drugo, može se aproksimirati normalnost reziduala uz očuvanje razumno čvrste priorne raspodele koja može poboljšati konvergenciju MCMC algoritma.

Konačno, uz pretpostavku o nezavisnosti priornih raspodela $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\alpha}$, β i $(\boldsymbol{\varpi}, \nu)$ dobija se sledeća zajednička priorna raspodela:

$$p(\Theta) = p(\boldsymbol{\gamma})p(\boldsymbol{\alpha})p(\beta)p(\boldsymbol{\varpi}|\nu)p(\nu)$$

i ubacivanjem funkcije verodostojnosti (6.6) i zajedničke priorne raspodele u Bayes-ovu formulu konstruiše se posteriorna raspodela:

$$p(\Theta|\mathbf{y}, X) \propto \mathcal{L}(\Theta|\mathbf{y}, X)p(\Theta)$$

6.2 Simulacija zajedničke posteriorne raspodele

Ponovo se oslanja na M-H algoritam za kreiranje uzorka iz zajedničke posteriorne raspodele.
Izvlači se početna vrednost:

$$\Theta^{[0]} = \left(\boldsymbol{\gamma}^{[0]}, \boldsymbol{\alpha}^{[0]}, \beta^{[0]}, \boldsymbol{\varpi}^{[0]}, \nu^{[0]}\right)$$

iz zajedničke priorne raspodele i iterativno se generiše J koraka za Θ. Pojedinačni korak je razložen na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}^{[j]} &\sim p\left(\boldsymbol{\gamma}|\boldsymbol{\alpha}^{[j-1]}, \beta^{[j-1]}, \boldsymbol{\varpi}^{[j-1]}, \nu^{[j-1]}, \mathbf{y}, X\right)\\
\boldsymbol{\alpha}^{[j]} &\sim p\left(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\gamma}^{[j]}, \beta^{[j-1]}, \boldsymbol{\varpi}^{[j-1]}, \nu^{[j-1]}, \mathbf{y}, X\right)\\
\beta^{[j]} &\sim p\left(\beta|\boldsymbol{\gamma}^{[j]}, \boldsymbol{\alpha}^{[j]}, \boldsymbol{\varpi}^{[j-1]}, \nu^{[j-1]}, \mathbf{y}, X\right)\\
\boldsymbol{\varpi}^{[j]} &\sim p\left(\boldsymbol{\varpi}|\boldsymbol{\gamma}^{[j]}, \boldsymbol{\alpha}^{[j]}, \beta^{[j]}, \nu^{[j-1]}, \mathbf{y}, X\right)\\
\nu^{[j]} &\sim p\left(\nu|\boldsymbol{\varpi}^{[j]}\right)
\end{aligned}$$

Samo vektor $\boldsymbol{\varpi}$ se može simulirati iz poznatog izraza. Izvlačenja za parametre $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\alpha}$ i β se izrađuju pomoću metode slične onoj koja je prikazana u odeljku 5.2. Uzimanje uzorka za parametar ν je više tehničko i oslanja se na optimizovano odbacivanje tehnike.

6.2.1 Generisanje vektora $\boldsymbol{\gamma}$

Predložena raspodela za uzorak vektora $\boldsymbol{\gamma}$ dimenzije $m \times 1$ dobija se kombinovanjem funkcije verodostojnosti (6.3) i priorne raspodele koristeći Bayes-ovo pravilo:

$$q_\gamma\left(\boldsymbol{\gamma}|\tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{\varpi}, \nu, \mathbf{y}, X\right) = \mathcal{N}_m\left(\boldsymbol{\gamma}|\widehat{\boldsymbol{\mu}_\gamma}, \widehat{\Sigma_\gamma}\right)$$

sa:

$$\begin{aligned}
\widehat{\Sigma_\gamma^{-1}} &= X'\widetilde{\Sigma^{-1}}X + \Sigma_\gamma^{-1}\\
\widehat{\boldsymbol{\mu}_\gamma} &= \widehat{\Sigma_\gamma}\left(X'\widetilde{\Sigma^{-1}}\mathbf{y} + \Sigma_\gamma^{-1}\boldsymbol{\mu}_\gamma\right)
\end{aligned}$$

gde je $\tilde{\Sigma} = diag\left(\{\varpi_t \varrho h_t(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\alpha}, \beta)\}_{t=1}^T\right)$ dijagonalna matrica dimenzije $T \times T$, $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ prethodno izvlačenje iz $\boldsymbol{\gamma}$ u M-H algoritmu i $\varrho = \dfrac{\nu - 2}{\nu}$.

Kandidat $\boldsymbol{\gamma}^*$ se bira iz predložene raspodele i prihvata se sa verovatnoćom:

$$min\left\{\frac{p\left(\boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{\varpi}, \nu|\mathbf{y}, X\right)}{p\left(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{\varpi}, \nu|\mathbf{y}, X\right)}\frac{q_\gamma\left(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}|\boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{\varpi}, \nu, \mathbf{y}, X\right)}{q_\gamma\left(\boldsymbol{\gamma}^*|\tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{\varpi}, \nu, \mathbf{y}, X\right)}, 1\right\}$$

6.2.2 Generisanje parametara GJR modela

Metodologija je slična onoj koja je izložena u odeljku 5.2.2.
Definiše se:

$$\omega_t = \frac{u_t^2}{\tau_t} - h_t$$

gde je $\tau_t = \varpi_t \varrho$ po konvenciji. Odatle se može transformisati izraz za uslovnu varijansu na sledeći način:

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + \big(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}\geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}<0\}}\big)u_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \\ \Leftrightarrow \frac{u_t^2}{\tau_t} &= \alpha_0 + \big(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}\geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}<0\}}\big) + \beta \frac{u_{t-1}^2}{\tau_{t-1}} - \beta\omega_{t-1} + \omega_t \\ \Leftrightarrow v_t &= \alpha_0 + \big(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}\geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}<0\}}\big)\tau_{t-1} v_{t-1} + \beta v_{t-1} - \beta\omega_{t-1} + \omega_t \end{aligned}$$

gde se $v_t = \frac{u_t^2}{\tau_t}$ definiše radi jednostavnijeg zapisa. Štaviše, primećuje se da se promenljiva ω_t takođe može izraziti kao što sledi u nastavku:

$$\omega_t = \frac{u_t^2}{\tau_t} - h_t = \left(\frac{u_t^2}{\tau_t h_t} - 1\right)h_t = \big(\chi_1^2 - 1\big)h_t$$

gde χ_1^2 označava Hi-kvadrat slučajnu promenljivu sa jednim stepenom slobode. Poslednja jednakost je rezultat izraza za u_t u jednačini (6.4). Stoga, promenljiva ω_t ima uslovno očekivanje nula i uslovnu varijansu $2h_t^2$. Osim toga, zapaža se da je niz $\{\omega_t\}$ ponovo diferencirani martingalski proces.
Aproksimacijom promenljive ω_t sa promenljivom z_t koja ima normalnu raspodelu sa očekivanjem nula i varijansom $2h_t^2$ dobija se sledeći pomoćni model:

$$v_t = \alpha_0 + \big(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}\geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}<0\}}\big)\tau_{t-1} v_{t-1} + \beta v_{t-1} - \beta z_{t-1} + z_t$$

Zatim, uz napomenu da je z_t funkcija koja zavisi od $(\boldsymbol{\alpha}, \beta)$ data sa:

$$z_t(\boldsymbol{\alpha}, \beta) = v_t - \alpha_0 - \Big[\big(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}\geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{u_{t-1}<0\}}\big)\tau_{t-1} + \beta\Big]v_{t-1} + \beta z_{t-1}(\boldsymbol{\alpha}, \beta) \tag{6.7}$$

i definisanjem vektora $\mathbf{z} = (z_1 \dots z_T)'$ dimenzije $T \times 1$ kao i $T \times T$ dijagonalne matrice:

$$\Lambda = \Lambda(\boldsymbol{\alpha}, \beta) = diag\big(\{2h_t^2(\boldsymbol{\alpha}, \beta)\}_{t=1}^T\big)$$

može se aproksimirati funkcija verodostojnosti od $(\boldsymbol{\alpha}, \beta)$ na sledeći način:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}, \beta | \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varpi}, \mathbf{y}, X) \propto (det\Lambda)^{-1/2} exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{z}'\Lambda^{-1}\mathbf{z}\right] \tag{6.8}$$

Kao što će biti prikazano u nastavku, konstrukcija predloženih raspodela za parametre $\boldsymbol{\alpha}$ i β zasniva se na ovoj aproksimativnoj funkciji verodostojnosti.

Generisanje vektora $\boldsymbol{\alpha}$

Cilj je da se izrazi funkcija $z_t(\boldsymbol{\alpha}, \beta)$ kao linearna funkcija vektora $\boldsymbol{\alpha}$ dimenzije 3×1.
U tu svrhu, definišu se sledeće rekurzivne transformacije:

$$
\begin{aligned}
l_t^* &= 1 + \beta l_{t-1}^* \\
v_t^* &= u_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\{u_{t-1} \geq 0\}} + \beta v_{t-1}^* \\
v_t^{**} &= u_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\{u_{t-1} < 0\}} + \beta v_{t-1}^{**}
\end{aligned}
$$

gde je $l_0^* = v_0^* = v_0^{**} = 0$.

Kao što je već prikazano u ovom poglavlju, GJR(1,1) model sa studentovom-t raspodelom, obeležen sa $\{y_t\}$ može da se transformiše u novi niz $\{v_t\}$, gde je $v_t = \dfrac{y_t^2}{\tau_t}$ sa $\tau_t = \varpi_t \varrho$ i $\varrho = \dfrac{\nu - 2}{\nu}$. Zatim proces $\{v_t\}$ može se aproksimirati na sledeći način:

$$
v_t = \alpha_0 + \left(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{y_{t-1} \geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{y_{t-1} < 0\}}\right)\tau_{t-1} v_{t-1} + \beta v_{t-1} - \beta z_{t-1} + z_t
$$

gde je $\{z_t\}$ diferencirani martingalski proces. Iz ovog izraza, pomenljiva z_t može biti zapisana kao:

$$
z_t = v_t - \alpha_0 - \left[\left(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{y_{t-1} \geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{y_{t-1} < 0\}}\right)\tau_{t-1} + \beta\right] v_{t-1} + \beta z_{t-1} \tag{$\star$}
$$

gde je $v_0 = z_0 = 0$.

Teorema 6.1. *Definisanjem sledećih rekurzivnih transformacija:*

$$
\begin{aligned}
l_t^* &= 1 + \beta l_{t-1}^* \\
v_t^* &= y_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\{y_{t-1} \geq 0\}} + \beta v_{t-1}^* \\
v_t^{**} &= y_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\{y_{t-1} < 0\}} + \beta v_{t-1}^{**}
\end{aligned} \tag{\#}
$$

gde je $l_0^* = v_0^* = v_0^{**} = 0$*, izraz* $(\star)$ *može se zapisati na sledeći način:*

$$
z_t = v_t - \left(l_t^* \quad v_t^* \quad v_t^{**}\right)\boldsymbol{\alpha} \tag{$\diamond$}
$$

gde je $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2)'$*. Prema tome, funkcija* $z_t(\boldsymbol{\alpha})$ *iz jednačine* $(\star)$ *može se zapisati kao linearna funkcija vektora* $\boldsymbol{\alpha}$ *dimenzije* 3×1.

Dokaz. *Pomoću indukcije.*
Baza indukcije: Za $t = 1$ *dobija se:*

$$
v_1 - \left(l_1^* \quad v_1^* \quad v_1^{**}\right)\boldsymbol{\alpha} \overset{(\#)}{=} v_1 - (1 \quad 0 \quad 0)\boldsymbol{\alpha} = v_1 - \alpha_0 \overset{(\star)}{=} z_1
$$

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavlja se da izraz $(\diamond)$ *važi za* $t = k$.

Indukcijski korak: Za $t = k + 1$ dobija se:

$$
\begin{aligned}
& v_{k+1} - \begin{pmatrix} l_{k+1}^* & v_{k+1}^* & v_{k+1}^{**} \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\
\overset{(\#)}{=}\ & v_{k+1} - \begin{pmatrix} 1 + \beta l_k^* & y_k^2 \mathbb{I}_{\{y_k \geq 0\}} + \beta v_k^* & y_k^2 \mathbb{I}_{\{y_k < 0\}} + \beta v_k^{**} \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\
=\ & v_{k+1} - \alpha_0 - \alpha_1 y_k^2 \mathbb{I}_{\{y_k \geq 0\}} - \alpha_2 y_k^2 \mathbb{I}_{\{y_k < 0\}} - \beta\big(\alpha_0 l_k^* + \alpha_1 v_k^* + \alpha_2 v_k^{**}\big) \\
=\ & v_{k+1} - \alpha_0 - \alpha_1 y_k^2 \mathbb{I}_{\{y_k \geq 0\}} - \alpha_2 y_k^2 \mathbb{I}_{\{y_k < 0\}} - \beta \begin{pmatrix} l_k^* & v_k^* & v_k^{**} \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\
\overset{(\diamond)}{=}\ & v_{k+1} - \alpha_0 - \alpha_1 y_k^2 \mathbb{I}_{\{y_k \geq 0\}} - \alpha_2 y_k^2 \mathbb{I}_{\{y_k < 0\}} - \beta(v_k - z_k) \\
=\ & v_{k+1} - \alpha_0 - alpha_1 y_k^2 \mathbb{I}_{\{y_k \geq 0\}} - \alpha_2 y_k^2 \mathbb{I}_{\{y_k < 0\}} - \beta v_k + \beta z_k \\
=\ & v_{k+1} - \alpha_0 - \Big[\big(\alpha_1 \mathbb{I}_{\{y_k \geq 0\}} + \alpha_2 \mathbb{I}_{\{y_k < 0\}}\big)\tau_k + \beta\Big] v_k + \beta z_k \\
\overset{(\star)}{=}\ & z_{k+1} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Kao što je prikazano u Teoremi 5.1., nakon definisanja vektora $\mathbf{c}_t = \begin{pmatrix} l_t^* & v_t^* & v_t^{**} \end{pmatrix}'$ dimenzije 3×1, pokazuje se da funkcija z_t može biti izražena kao $z_t = v_t - \mathbf{c}_t' \boldsymbol{\alpha}$. Potom, definisanjem vektora $\mathbf{z} = (z_1 \dots z_T)'$ dimenzije $T \times 1$ i $\mathbf{v} = (v_1 \dots v_T)'$ takođe dimenzije $T \times 1$ kao i matrice C dimenzije $T \times 3$ čija je t-ta vrsta $\mathbf{c}_t'$ dobija se $\mathbf{z} = \mathbf{v} - C\boldsymbol{\alpha}$. Zbog toga se može izraziti aproksimativna funcija verodostojnosti za parametar $\boldsymbol{\alpha}$ kao što sledi:

$$
\mathcal{L}\big(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\gamma}, \beta, \boldsymbol{\varpi}, \nu, \mathbf{y}, X\big) \propto (det\Lambda)^{-1/2} exp\Big[-\frac{1}{2}\big(\mathbf{v} - C\boldsymbol{\alpha}\big)' \Lambda^{-1} \big(\mathbf{v} - C\boldsymbol{\alpha}\big)\Big].
$$

Predložena raspodela za uzorak vektora $\boldsymbol{\alpha}$ dobija se uvrštavanjem ove funkcije verodostojnosti i priorne raspodele u Bayes-ovu formulu:

$$
q_\alpha\big(\boldsymbol{\alpha}|\tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\alpha}, \beta.\boldsymbol{\varpi}, \nu, \mathbf{y}, X\big) \propto \mathcal{N}_3\big(\boldsymbol{\alpha}|\widehat{\boldsymbol{\mu}_\alpha}, \widehat{\Sigma_\alpha}\big)\mathbb{I}_{\{\boldsymbol{\alpha}>0\}}
$$

sa:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Sigma_\alpha^{-1}} &= C' \widetilde{\Lambda^{-1}} C + \Sigma_\alpha^{-1} \\
\widehat{\boldsymbol{\mu}_\alpha} &= \widehat{\Sigma_\alpha}\big(C' \widetilde{\Lambda^{-1}} \mathbf{v} + \Sigma_\alpha^{-1} \boldsymbol{\mu}_\alpha\big)
\end{aligned}
$$

gde je $\tilde{\Lambda} = diag\Bigg(\big\{2h_t^2(\boldsymbol{\gamma}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \beta)\big\}_{t=1}^T\Bigg)$ $T \times T$ dijagonalna matrica i $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ prethodno izvlačenje iz $\boldsymbol{\alpha}$ u M-H algoritmu.

Kandidat $\boldsymbol{\alpha}^*$ uzima se iz ove predložene raspodele i prihvata se sa verovatnoćom:

$$
min\Bigg\{\frac{p(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\gamma}, \beta, \boldsymbol{\varpi}, \nu|\mathbf{y}, X)}{p(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\gamma}, \beta, \boldsymbol{\varpi}, \nu|\mathbf{y}, X)} \frac{q_\alpha(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}|\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}^*, \beta, \boldsymbol{\varpi}, \nu, \mathbf{y}, X)}{q_\alpha(\boldsymbol{\alpha}^*|\boldsymbol{\gamma}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \beta, \boldsymbol{\varpi}, \nu, \mathbf{y}, X)}, 1\Bigg\}.
$$

Generisanje parametra β

Nasuprot parametru $\boldsymbol{\alpha}$, funkciju $z_t(\boldsymbol{\alpha}, \beta)$ nije moguće izraziti iz jednakosti (6.7) kao linearnu funkciju od β. Kako bi se prevazišao ovaj problem, funkcija $z_t(\beta)$ aproksimira se pomoću Tejlorovog razvoja prvog reda u tački $\tilde{\beta}$:

$$z_t(\beta) \simeq z_t(\tilde{\beta}) + \left.\frac{dz_t}{d\beta}\right|_{\beta=\tilde{\beta}} \times (\beta - \tilde{\beta})$$

gde je $\tilde{\beta}$ prethodno izvlačenje iz β u M-H algoritmu. Odatle, definiše se sledeće:

$$r_t = z_t(\tilde{\beta}) + \tilde{\beta}\nabla_t \quad , \qquad \nabla_t = -\left.\frac{dz_t}{d\beta}\right|_{\beta=\tilde{\beta}}$$

gde se izraz ∇_t može izračunati sledećom rekurzijom:

$$\nabla_t = v_{t-1}^2 - z_{t-1}(\tilde{\beta}) + \tilde{\beta}\nabla_{t-1}$$

sa $\nabla_0 = 0$. Ova rekurzija se jednostavno dobija diferenciranjem jednakosti (6.7) u odnosu na parametar β. Zatim se ovi izrazi pregrupišu u vektore $\mathbf{r} = (r_1 \dots r_T)'$ i $\boldsymbol{\nabla} = (\nabla_1 \dots \nabla_T)'$ dimenzija $T \times 1$ i aproksimira se izraz unutar eksponencijalne funkcije iz jednačine (6.8) sa $\mathbf{z} \simeq \mathbf{r} - \beta\boldsymbol{\nabla}$. Ovo daje sledeću aproksimativnu funkciju verodostojnosti za parametar β:

$$\mathcal{L}\big(\beta|\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varpi}, \nu, \mathbf{y}, X\big) \propto (det\Lambda)^{-1/2} exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{r} - \beta\boldsymbol{\nabla})'\Lambda^{-1}(\mathbf{r} - \beta\boldsymbol{\nabla})\right]$$

Ova funkcija verodostojnosti u kombinaciji sa priornom raspodelom pomoću Bayes-ove formule gradi predloženu raspodelu $q(\beta|\bullet)$.
Kandidat β^* se uzima iz predložene raspodele i prihvata se sa verovatnoćom:

$$min\left\{\frac{p(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \beta^*, \boldsymbol{\varpi}, \nu|\mathbf{y}, X)}{p(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \tilde{\beta}, \boldsymbol{\varpi}, \nu|\mathbf{y}, X)} \frac{q_\beta(\tilde{\beta}|\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \beta^*, \boldsymbol{\varpi}, \nu, \mathbf{y}, X)}{q_\beta(\beta^*|\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \tilde{\beta}, \boldsymbol{\varpi}, \nu, \mathbf{y}, X)}, 1\right\}.$$

6.2.3 Generisanje vektora $\boldsymbol{\varpi}$

Komponente vektora $\boldsymbol{\varpi}$ su nezavisne posteriorne raspodele pa se uslovna posteriorna raspodela od ϖ_t dobija na sledeći način:

$$p(\varpi_t|\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \beta, \nu, \mathbf{y}, X) \propto \mathcal{L}(\Theta|\mathbf{y}, X)p(\varpi_t|\nu) \propto \varpi_t^{-\frac{(\nu+3)}{2}} exp\left[-\frac{b_t}{\varpi_t}\right] \tag{6.9}$$

sa:

$$b_t = \frac{1}{2}\left[\frac{(y_t - \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\gamma})^2}{\varrho h_t} + \nu\right]$$

gde se poziva na činjenicu da je $h_t = h_t(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \beta)$ i $\varrho = \dfrac{\nu - 2}{\nu}$. Izraz (6.9) je jezgro Inverzne Gama raspodele sa parametrima $\dfrac{\nu + 1}{2}$ i b_t.

6.2.4 Generisanje parametra ν

Izvlačenja iz $p(\nu|\boldsymbol{\varpi})$ su izgrađena optimizovanim odbacivanjem uzoraka iz translirane Eksponencijalne raspodele. Ciljna raspodela je:

$$p(\nu|\boldsymbol{\varpi}) \propto p(\boldsymbol{\varpi}|\nu)p(\nu) \propto \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{T\nu}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-T} exp\big[-\varphi\nu\big]\mathbb{I}_{\{\nu>\delta\}}$$

sa:

$$\varphi = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(ln\varpi_t + \varpi_t^{-1}) + \lambda$$

Prateći Deschamps [17], uzima se kandidat ν^* iz translirane Eksponencijalne raspodele:

$$g(\nu;\bar{\mu},\delta) = \bar{\mu} \quad exp\big[-\bar{\mu}(\nu-\delta)\big]\mathbb{I}_{\{\nu>\delta\}}$$

gde $\bar{\mu}$ maksimizira verovatnoću prihvatanja. Izbor $\bar{\mu}$ se pronalazi rešavanjem jednačine:

$$\frac{T}{2}\left[ln\left(\frac{1+\mu\delta}{2\mu}\right) + 1 - \psi\left(\frac{1+\mu\delta}{2\mu}\right)\right] + \mu - \varphi = 0$$

po μ, gde je $\psi(z) = \frac{dln\Gamma(z)}{dz}$ Digama funkcija.

Kandidat ν^* se prihvata sa verovatnoćom:

$$p^* = \frac{k(\nu^*)}{s(\bar{\mu},\delta)g(\nu^*;\bar{\mu},\delta)} \tag{6.10}$$

gde je $k(\nu)$ jezgro ciljne raspodele:

$$k(\nu) = \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{T\nu}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-T} exp\big[-\varphi\nu\big]$$

i $s(\mu,\delta)$ dato je sa:

$$s(\mu,\delta) = k\left(\frac{1+\mu\delta}{\mu}\right)\left[g\left(\frac{1+\mu\delta}{\mu};\mu,\delta\right)\right]^{-1}$$

$$= \left(\frac{1+\mu\delta}{2\mu}\right)^{\frac{T(1+\mu\delta)}{2\mu}} \left[\Gamma\left(\frac{1+\mu\delta}{2\mu}\right)\right]^{-T} \mu^{-1} exp\left[1 - \frac{\varphi(1+\mu\delta)}{\mu}\right]$$

Zamenom $k(\nu^*)$, $s(\bar{\mu},\delta)$ i $g(\nu^*;\bar{\mu},\delta)$ u jednakost (6.10) dobija se:

$$p^* = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1+\bar{\mu}\delta}{2\bar{\mu}}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu^*}{2}\right)}\right]^T \left(\frac{\nu^*}{2}\right)^{\frac{T\nu^*}{2}} \left(\frac{1+\bar{\mu}\delta}{2\bar{\mu}}\right)^{\frac{-T(1+\bar{\mu}\delta)}{2\bar{\mu}}} \times exp\big[(\nu^*-\delta)(\bar{\mu}-\varphi) + \frac{\varphi}{\bar{\mu}} - 1\big].$$

Na kraju ovog poglavlja, zapaža se da mala modifikacija koju je uveo Geweke [16] omogućava generisanje izvlačenja iz studentove- t raspodele sa uslovnom varijansom h_t bez potrebe za uvođenjem skalirajućeg parametra $\varrho = \frac{\nu-2}{\nu}$. Ovo je postignuto zamenom specifikacije za latentnu promenljivu ϖ_t u jednakosti (6.4) pomoću:

$$\varpi_t \overset{iid}{\sim} \mathcal{IG}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu-2}{2}\right)$$

Upotreba ove nove specifikacije zahteva neke modifikacije šeme odbacivanja. U teoremi, koja je data u nastavku rada, pokazuju se ekvivalentne specifikacije.

Teorema 6.2. *Sledeći model:*

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t(\varpi_t h_t)^{1/2} \qquad za \quad t = 1, \ldots, T \\ \varepsilon_t &\overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1) \\ \varpi_t &\overset{iid}{\sim} \mathcal{IG}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu-2}{2}\right) \end{aligned} \tag{$\star$}$$

gde je $h_t = h_t(\boldsymbol{\alpha}, \beta)$ GARCH uslovna varijansa, ekvivalentan je sa:

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t h_t^{1/2} \qquad za \quad t = 1, \ldots, T \\ \varepsilon_t &\overset{iid}{\sim} \mathcal{S}^*(0,1) \end{aligned}$$

gde $\mathcal{S}^*(0,1)$ označava standardizovanu studentovu-t raspodelu, tj. njena varijansa je jedan.

Dokaz. *Prvo se pregrupišu parametri modela u $\psi = (\boldsymbol{\alpha}, \beta, \nu)$ radi jednostavnijeg zapisa. U specifikaciji ($\star$), promenljive ϖ_t su nezavisne i imaju istu raspodelu (iid), tj. imaju Inverznu Gama raspodelu sa parametrima $\frac{\nu}{2}$ i $\frac{\nu-2}{2}$:*

$$p(\varpi_t|\nu) = \left(\frac{\nu-2}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1} \varpi_t^{-\frac{\nu}{2}-1} exp\left[-\frac{(\nu-2)}{2\varpi_t}\right]$$

pa je prema tome zajednička gustina vektora $\boldsymbol{\varpi} = (\varpi_1 \ldots \varpi_T)'$ dimenzije $T \times 1$ data sa:

$$p(\boldsymbol{\varpi}|\nu) = \left(\frac{\nu-2}{2}\right)^{\frac{T\nu}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-T} \prod_{t=1}^{T} \varpi_t^{-\frac{\nu}{2}-1} \quad exp\left[-\frac{(\nu-2)}{2\varpi_t}\right] \tag{\#}$$

Na osnovu vektora opservacija $\boldsymbol{y} = (y_1 \ldots y_T)'$ može se izraziti funkcija verodostojnosti od $(\psi, \boldsymbol{\varpi})$ kao što sledi:

$$\mathcal{L}(\psi, \boldsymbol{\varpi}|\boldsymbol{y}) \propto \prod_{t=1}^{T} (\varpi_t h_t)^{-1/2} \quad exp\left[-\frac{1}{2}\frac{y_t^2}{\varpi_t h_t}\right]$$

pa korišćenjem Bayes-ove teoreme, dobija se sledeća zajednička posteriorna raspodela:

$$p(\psi, \boldsymbol{\varpi}|\boldsymbol{y}) \propto \left(\frac{\nu-2}{2}\right)^{\frac{T\nu}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-T} \left(\prod_{t=1}^{T} h_t^{-\frac{1}{2}}\right) \times \prod_{t=1}^{T} \omega_t^{-\frac{(\nu+3)}{2}} \quad exp\left[-\frac{1}{2}\frac{y_t^2}{\omega_t h_t}\right] \tag{$\diamond$}$$

Sada, koristeći sledeći rezultat:

$$\int_0^{\infty} x^{-\frac{a}{2}} exp\left[-\frac{b}{2x}\right]dx = \Gamma\left(\frac{a-2}{2}\right) \times \left(\frac{2}{b}\right)^{\frac{a-2}{2}}$$

može se integraliti izraz ($\diamond$) *po vektoru* $\boldsymbol{\varpi}$ *kako bi se dobio sledeći izraz:*

$$p(\psi|\mathbf{y}) \propto \left(\frac{\nu-2}{\nu}\right)^{\frac{T\nu}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-T} \left[\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\right]^{T} \times 2^{\frac{T(\nu+1)}{2}} \prod_{t=1}^{T} h_t^{-1/2} b_t^{-\frac{(\nu+1)}{2}} \qquad (\spadesuit)$$

gde je:

$$b_t = \frac{y_t^2}{h_t} + (\nu-2) = (\nu-2) \times \left[1 + \frac{y_t^2}{(\nu-2)h_t}\right]$$

Neka mala pojednostavljenja izraza ($\spadesuit$) *daju:*

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)(\nu-2)^{1/2}}\right]^{T} \prod_{t=1}^{T} h_t^{-1/2} \left[1 + \frac{y_t^2}{(\nu-2)h_t}\right]^{-\frac{(\nu+1)}{2}}$$

što je proporcionalno funkciji verodostojnosti parametra ψ *kada opservacije* $y_t \overset{iid}{\sim} \mathcal{S}^*(0, h_t)$
gde je $h_t = h_t(\boldsymbol{\alpha}, \beta)$ ∎

Specifikacija ($\star$) daje dodatni način upravljanja Bayes-ovom ocenom GARCH modela sa studentovom-*t* raspodelom. Ona ima atraktivan aspekt zbog toga što nije potrebno da skalirajući faktor $\varrho = \dfrac{\nu-2}{\nu}$ bude uključen u model.

Međutim, simulaciona šema predstavljena u [16], [17] treba da bude malo izmenjena, kao što se prikazuje u nastavku.

U primeni se teži da se efikasno generišu izvlačenja za parametar stepena slobode ν. Ciljna raspodela dobija se na sledeći način:

$$p(\nu|\boldsymbol{\varpi}) \propto p(\boldsymbol{\varpi}|\nu)p(\nu)$$
$$= \left(\frac{\nu-2}{2}\right)^{\frac{T\nu}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-T} \left(\prod_{t=1}^{T} \varpi_t^{-\frac{(\nu+2)}{2}}\right) \times exp\left[-\frac{(\nu-2)}{2}\sum_{t=1}^{T}\varpi_t^{-1}\right] \lambda exp\left[-\lambda(\nu-\delta)\right]\mathbb{I}_{\{\nu>\delta\}}$$

gde se $\prod_{t=1}^{T} \varpi_t^{-\frac{(\nu+2)}{2}}$ može izraziti kao:

$$\prod_{t=1}^{T} \varpi_t^{-\frac{(\nu+2)}{2}} = \prod_{t=1}^{T} exp\left[ln\varpi_t^{-\frac{(\nu+2)}{2}}\right]$$
$$= \prod_{t=1}^{T} exp\left[-\frac{(\nu+2)}{2} \quad ln\varpi_t\right]$$
$$= exp\left[-\frac{(\nu+2)}{2} \quad \sum_{t=1}^{T} ln\varpi_t\right]$$
$$= exp\left[-\frac{\nu}{2} \quad \sum_{t=1}^{T} ln\varpi_t \quad - \quad \sum_{t=1}^{T} ln\varpi_t\right]$$
$$\propto exp\left[-\frac{\nu}{2} \quad \sum_{t=1}^{T} ln\varpi_t\right]$$

Ovo omogućava da se izrazi jezgro ciljane raspodele na sledeći način:

$$k(\nu) = \left(\frac{\nu-2}{2}\right)^{\frac{T\nu}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-T} exp\left[-\varphi\nu\right]\mathbb{I}_{\{\nu>\delta\}}$$

gde je:

$$\varphi = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[ln\varpi_t + \varpi_t^{-1}\right] + \lambda$$

Napomena: Kako je funkcija $ln\varpi + \varpi^{-1}$ minimizirana po $\varpi = 1$, dobija se da je $\varphi \geq \frac{T}{2} + \lambda > \frac{T}{2}$

Prateći [17], raspodela uzorka je transponovana Eksponencijalna raspodela sa funkcijom raspodele datom sa:

$$g\left(\nu;\mu,\delta\right) = \mu \quad exp\left[-\mu(\nu-\delta)\right]\mathbb{I}_{\{\nu>\delta\}} \tag{6.11}$$

gde je parametar μ izabran tako da maksimizira verovatnoću prihvatanja. Prateći [16], može se odrediti vrednost za ovaj parametar. Pored uobičajenih uslova reguralnosti, neophodan uslov je da je μ deo rešenja sledćeg sistema:

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left[lnk(\nu) - lng(\nu;\mu,\delta)\right] = 0 \tag{6.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}lng(\nu;\mu,\delta) = 0 \tag{6.13}$$

Nakon parcijalne integracije jednačine (6.12) dobija se:

$$\frac{T}{2}\left[ln\left(\frac{\nu-2}{2}\right) + \left(\frac{\nu}{\nu-2}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2}\right)\right] - \varphi + \mu = 0 \tag{6.14}$$

gde $\psi(z) = \dfrac{dln\Gamma(z)}{dz}$ označava digama funkciju, dok rešavanje jednačine (6.13) daje:

$$\nu = \frac{1}{\mu} + \delta = \frac{1+\mu\delta}{\mu} \tag{6.15}$$

Pored toga, primećuje se da u izrazu (6.14) funkcija:

$$ln\left(\frac{\nu-2}{2}\right) + \left(\frac{\nu}{\nu-2}\right) - \left(\frac{\nu}{2}\right)$$

monotono opada od ∞ do 1 na intervalu $(2, \infty)$. Odatle, budući da je $\varphi > \frac{T}{2}$, postoji jedninstveno μ koje zadovoljava jednačinu (6.14). Sada, ubacivanjem (6.15) u izraz (6.14) dobija se:

$$\frac{T}{2}\left[ln\left(\frac{1+\mu(\delta-2)}{2\mu}\right) + \frac{1+\mu\delta}{1+\mu(\delta-2)} + \psi\left(\frac{1+\mu\delta}{2\mu}\right)\right] + \mu - \varphi = 0$$

pa rešavanje ove jednačine po μ daje optimalan parametar $\bar{\mu}$ za efikasnu šemu uzorkovanja. Vrednost $\bar{\mu}$ se može odrediti pomoću standardnih iterativnih metoda.
Zatim, kandidat ν^* se bira iz (6.11) sa parametrom $\bar{\mu}$ i prihvata se sa verovatnoćom:

$$p^* = \frac{k(\nu^*)}{s(\bar{\mu}, \delta) g(\nu^*; \bar{\mu}, \delta)}$$

gde je $s(\mu, \delta)$ dato sa:

$$s(\mu, \delta) = k\left(\frac{1+\mu\delta}{\mu}\right)\left[g\left(\frac{1+\mu\delta}{\mu}; \mu, \delta\right)\right]^{-1}$$

$$= \left(\frac{1+\mu\big(\delta-2\big)}{2\mu}\right)^{\frac{T(1+\mu\delta)}{2\mu}} \left[\Gamma\left(\frac{1+\mu\delta}{2\mu}\right)\right]^{-T} \frac{exp\left[1 - \frac{\varphi(1+\mu\delta)}{\mu}\right]}{\mu}$$

Zamenom $k(\nu^*)$, $s(\bar{\mu}, \delta)$ i $g(\nu^*; \bar{\mu}, \delta)$ u izraz za verovatnoću prihvatanja dobija se:

$$\begin{aligned} p^* &= \left(\frac{\nu^*-2}{2}\right)^{\frac{T\nu^*}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{\nu^*}{2}\right)\right]^{-T} exp\big[-\varphi\nu^*\big]\left(\frac{1+\bar{\mu}(\delta-2)}{2\bar{\mu}}\right)^{-\frac{T(1+\bar{\mu}\delta)}{2\bar{\mu}}} \\ &\times\left[\Gamma\left(\frac{1+\bar{\mu}\delta}{2\bar{\mu}}\right)\right]^{T} \bar{\mu} exp\left[\frac{\varphi(1+\bar{\mu}\delta)}{\mu} - 1\right]\frac{exp\big[\bar{\mu}(\nu^*-\delta)\big]}{\bar{\mu}} \\ &= \left[\frac{\Gamma\big(\frac{1+\bar{\mu}\delta}{2\bar{\mu}}\big)}{\Gamma\big(\frac{\nu^*}{2}\big)}\right]^{T} \left(\frac{\nu^*-2}{2}\right)^{\frac{T\nu^*}{2}} \left(\frac{1+\bar{\mu}(\delta-2)}{2\bar{\mu}}\right)^{-\frac{T(1+\bar{\mu}\delta)}{2\bar{\mu}}} \\ &\times \quad exp\left[\big(\nu^*-\delta\big)\big(\bar{\mu}-\varphi\big) + \frac{\varphi}{\bar{\mu}} - 1\right] \end{aligned}$$

7 Istraživanje

U ovom poglavlju će biti prikazani i analizirani rezultati istraživanja. Kompletno istraživanje sprovedeno je u statističkom softveru R. R predstavlja integrisano programsko okruženje za upravljanje podacima. Ovaj softver je popularan, besplatan programski jezik za statističku i drugu matematičku upotrebu; računanje, modeliranje i grafički prikaz. Analiziraće se podaci kretanja cena dva berzanska indeksa. Koristiće se dve vremenske serije. Prva vremenska serija sadrži dnevne podatke kretanja cena američkog berzanskog indeksa S&P 500, dok je druga vremenska serija zasnovana na dnevnim podacima cena domaćeg indeksa Beogradske berze BELEX 15. Pre početka analize numeričkog eksperimenta, uvodi se pojam berzanskog indeksa a zatim se definišu i opisuju indeksi S&P 500 i BELEX 15.

Berzanski indeksi

Berzanski indeksi predstavljaju jedan od najznačajnijih pokazatelja razvoja finansijskog tržišta, ali i privrede u celini, jer njihovo kretanje predviđa buduća kretanja u privredi. Iako ovi pokazatelji pokazuju kako su se cene menjale u prošlosti, a ne njihove promene u budućnosti, oni imaju široku primenu u analizi berzanskog poslovanja i donošenju odluka o kupovini i prodaji akcija.

Berzanski indeksi imaju nekoliko značajnih funkcija.
Prvo, investitor koji posduje više hartija od vrednosti na određenom tržištu ili u određenom industrijskom sektoru može brzo dobiti informacije kako će tržišna kretanja uticati na tržišnu vrednost novog portfolija. Isti investitor treba samo da proveri vrednosti akcija indeksa sličnih hartija od vrednosti i odredi procenat promene u nameri da dobije informaciju kako se njegov portfolio ponaša. Ovo je mnogo jednostavnije nego kada bi se proveravale cene svake hartije od vrednosti pojedinačno.
Drugo, indeksi su korisni za istorijske analize. Analizirajući tržišne indekse i neke druge ekonomske idikatore, analitičar može odrediti neke konzistentne odnose između različitih indeksa i sektora ekonomije i time biti koristan za razne vrste prognoza. Neki autori sugerišu da indeksi imaju i druge važne funkcije. Pojedini autori veruju da je proučavanjem indeksa tokom vremena moguće otkriti šablone koji se ponavljaju u različitim fazama rasta i pada tržišta. Prema njihovom mišljenu, ovi obrasci iz indeksa mogu se koristiti da predvide buduće smerove kretanja tržišta.

Pokazatelji promena cena akcija, odnosno kretanja tržišta, mogu se podeliti na indekse i proseke, iako je uobičajeno njihovo obeležavanje zajedničkim imenom *berzanski indeksi*. Proseci predstavljaju aritmetičku sredinu ograničenog uzorka cena akcija kojima se trguje na berzi ili na vanberzanskom tržištu. U uzorak je uključena po jedna akcija kompanije sa liste, tako da je ponder definisan visinom cene konkretne hartije od vrednosti, tj. ukoliko je cena neke akcije viša, ona ima veći relativni uticaj na veličinu proseka, bez obzira na veličinu tržišne vrednosti kompanije i na obim prodatih akcija.
Osim ovog nedostatka, proseci imaju i neke nedostatke prilikom računanja. Povremeno dolazi do promene na listi akcija usled prestanka rada, integracije i slično. Takođe, dodatni problem je moguća promena veličine liste akcija, ali svakako najveći problem je deoba akcija, koja povremeno nastaje naročito kada nastane trend rastućeg tržišta.

Indeksi su, za razliku od proseka, kompleksniji pokazatelji, koji koriste ponderisane cene akcija, ali i obime njihovog trgovanja. Izračunavaju se kao kao tržišna kapitalizacija[4] u određenom vremenskom periodu (obično dnevnom), koja se deli odgovarajućim iznosom kapitalizacije na dan kada je indeks konstruisan, a dobijeni iznos množi sa arbitrarno utvrđenom početnom vrednošću indeksa. Vrednost indeksa zavisi od dva faktora: od cene akcija i od broja prodatih akcija i predstavlja pouzdaniji indikator kretanja tržišta u odnosu na prosek.

Svaki indeks se izračunava na različit način. Dobro konstruisan indeks će predstavljati pokazatelj kretanja cena populacije koja se razmatra. Slabo formirani indeksi indiciraće samo to kako se ponaša nereprezentativni uzorak populacije. Pri formulisanju indeksa koji bi bio adekvatan pokazatelj, neophodno je razmotriti faktore kao što su: veličina uzorka, reprezentativnost, ponderisanje i praktična upotreba. Uzorak bi trebao da predstavlja značajniji udeo populacije koja se proučava, pošto veći uzorci generalno daju jasnije indikacije o tome kako se ponaša posmatrana populacija. Sa druge strane, ako je uzorak suviše veliki, bio bi veoma skup i komplikovan za izračunavanje.
Takođe, uzorak bi trebao da predstavlja heterogene elemente koji reprezentuju sve delove populacije. Na primer, uzorak ne bi smeo da se ograniči samo na hartije od vrednosti velikih firmi ili samo akcija iz jednog industrijskog sektora. Različitim elementima u uzorku trebalo bi dodeliti pondere koji bliže određuju međusobni odnos elemenata koji se nalaze u populaiji. Naravno, berzanski indeksi trebalo bi da budu izraženi u jedinicama koje su lake za razumevanje i koje mogu dati odgovore na relevantna pitanja.

S&P 500

Berzanski indeksi su jedan od najvažnijih pokazatelja na tržištima akcija koji u velikoj meri opredeljuju učesnike na finansijskom tržištu. Iako se odnose na cenovne promene u prošlosti, berzanski indeksi predstavljaju veliku pomoć investitorima prilikom donošenja odluka o kupovini i prodaji akcija.
Iako se svi pokazatelji na finansijskom tržištu često tretiraju kao indeksi, njih treba razlikovati od proseka od kojih su znatno prefinjeniji i sveobuhvatniji. Tržišni indeksi, za razliku od proseka, koji su određeni isključivo cenom akcija, uzimaju u obzir i broj prodatih akcija čime je izbegnuto dobijanje pojednostavljene predstave o smeru kretanja tržišta.
Jedan od najreprezentativnijih svetskih indeksa je S&P 500 kompozitni indeks (S&P 500) čuvene kompanije Standardand Poor's koja objavljuje veliki broj pokazatelja na mnogim tržištima širom sveta. Ova kompanija nastala je spajanjem firme Standard Statistics i Poor's izdavačke kuće 1941. godine otkada počinje i istorijat indeksa S&P. 1966. godine kompanija McGraw-Hill preuzima Standard and Poor's koja danas ima preko 5.000 zaposlenih u 19 zemalja širom sveta, sa preko 1.250 analitičara među kojima su i neki od najcenjenijih ekonomista sadašnjice. Njihov zadatak je pružanje nezavisnih i visoko vrednovanih finansijskih informacija pod sloganom "investitor ima pravo da zna"[22].

[4]Tržišna kapitalizacija (ili tržišna vrednost) je indikator veličine i obima prometa na berzi. Dobija se množenjem tržišne cene svih akcija na berzi sa ukupnim brojem svih akcija. Ovaj podatak govori o veličini posmatranog tržišta.

BELEX 15

Na našoj finansijskoj berzi odnosno Beogradskoj berzi postoje dva indeksa i to BELEX 15 i BELEX line. U ovom radu koristiće se indeks BELEX 15.

BELEX 15 predstavlja vodeći indeks Beogradske berze sa ciljem da u što preciznijoj meri opiše kretanja cena najlikvidnijih akcija na regulisanom tržištu Beogradske berze. BELEX 15 inicijalno je definisan i metodološki obrađen u septembru 2005. godine. Uzimajući u obzir dostupnost informacija koje se odnose na izdavaoce čijim se akcijama trguje na regulisanom tržištu Beogradske berze, a koje mogu biti uključene u sastav indeksne korpe ovog indeksa, Berza ne može da garantuje da će svi podaci uzeti prilikom kalkulacije indeksa, same kalkulacije, kao i prateći koeficijenti i elementi indeksa biti potpuno zaštićeni od eventualnih grešaka, jer predmetne greške mogu nastati usled neažurnosti samog izdavaoca, pogrešnih informacija dostavljenih Berzi i drugim institucijama, kao i usled neadekvatne primene ove metodologije. U tom smislu, Beogradska berza će izračunati indekse i prateće koeficijente uz dužnu pažnju, ali neće prihvatiti bilo kakvu odgovornost za eventualne direktne i indirektne gubitke koji nastanu kao posledica greške nastale tokom kalkulacije indeksa i pratećih koeficijenata. Sastav bilo kog indeksa Beogradske berze ne može se smatrati preporukom za investiranje u bilo koju komponentu indeksa, te stoga Beogradska berza ne prihvata odgovornost za posledice investicionih odluka nastalih korišćenjem kako samih indeksa, tako i izvedenih podataka.

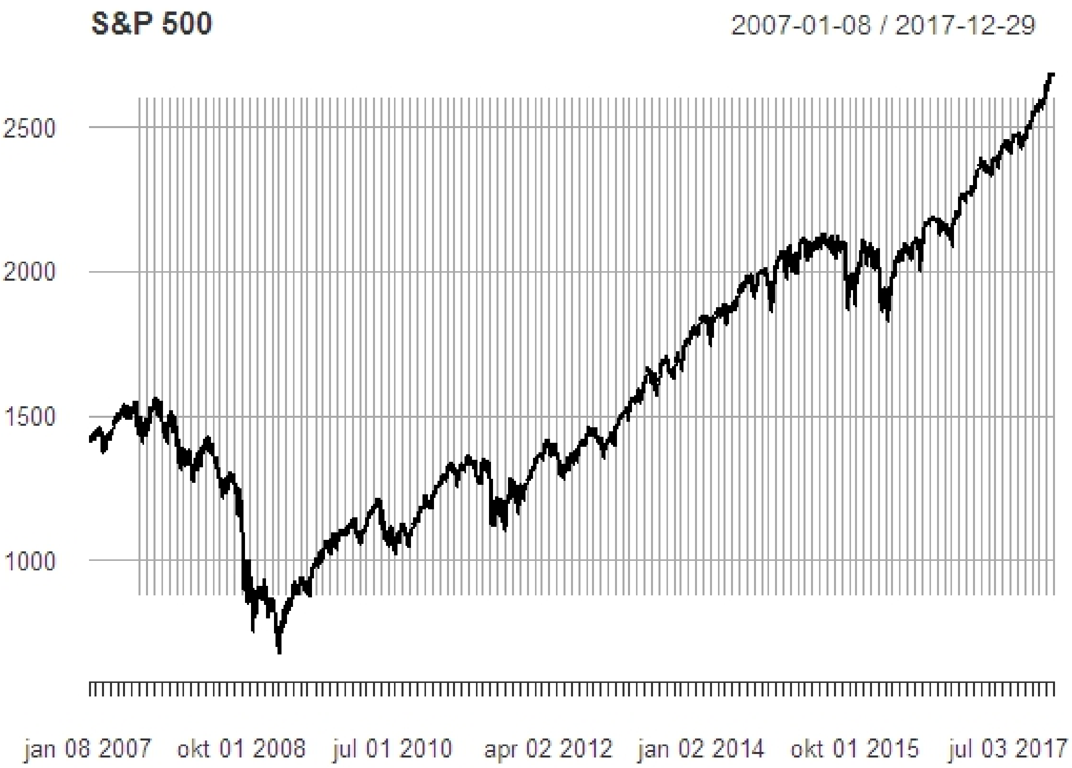
Definicija indeksa BELEX 15 je indeks ponderisan tržišnom kapitalizacijom koja se nalazi u slobodnom prometu (free float) i ne prilagođava za isplaćene dividende. BELEX 15 sastoji se od akcija kojima se se trguje metodom kontinuiranog trgovanja na regulisanom tržištu i koje su ispunile kriterijume za ulazak u indeksnu korpu. Težina komponenti u indeksu je ograničena na maksimalnih 20 odsto u odnosu na ukupnu tržišnu kapitalizaciju indeksa na datum revizije.
Namena indeksa je da meri promene cena (price index) akcija kojima se trguje metodom kontinuiranog trgovanja na regulisanom tržištu, a koje su prethodno zadovoljile kriterijum za uključivanje u u indeksnu korpu. Indeks BELEX 15 je prevashodno namenjen unapređenju investicionog procesa, kroz merenje performansi najlikvidnijeg segmenta srpskog tržišta kapitala, kao i kroz mogućnost upoređivanja potencijalnih investicionih strategija prema indeksu. Sa druge strane, BELEX 15 je dizajniran na način koji najbliže moguće opisuje tržišna kretanja najlikvidnijih akcija i može služiti kao podloga (underlying) za kretanje struktuiranih proizvoda i derivata na domaćem i inostranom tržištu. Namenjen je da bude analitički alat kako za portfolio menadžere, profesionalne analitičare, stručnu javnost, investitore, tako i za sve druge koji proučavaju dinamiku kretanja cena akcija na ovom tržištu.
Zvaničan naziv indeksa je Indeks najlikvidnijih akcija BELEX 15 [21].

Numerički eksperiment

Prvo će se analizirati vremenska serija koja sadrži dnevne podatke kretanja cena američkog berzanskog indeksa S&P 500. Posmatra se vremenska serija za period od 8. januara 2007. do 29. decembra 2017. godine [5]. Ova vremenska serija sadrži ukupno 2776 podataka. Korišćeni su podaci na dnevnom nivou kako bi se obezbedio veći broj podataka što je pogodno prilikom ocenjivanja modela. Za formiranje modela neće se koristiti cela vremenska serija. Naime, vremenski period je podeljen na dva potperioda, gde prvi potperiod obuhvata podatke od 8. januara 2007. do 31. decembra 2014. godine, a drugi potperiod podatke od 2. januara 2015. do 29. decembra 2017. godine. Razlog za ovakvu podelu je taj što će se prvi potperiod koristiti za ocenjivanje modela, dok će se za drugi formirati predikcije.

U ekonomskim istraživanjima i prilikom ocene ekonometrijskih modela za predikcije često se koriste logaritmovane vrednosti vremenske serije. Jedan od razloga za ovakvu transformaciju leži u činjenici da logaritmovana vremenska serija ima stabilniju varijansu od originalne serije. Upravo iz tog razloga u ovom radu analiza podataka i ocena ekonometrijskog modela radiće se na logaritmovanim podacima.

Na slici 7.1 prikazano je kretanje berzanskog indeksa S&P 500 za period od 8. januara 2007. do 29. decembra 2017. Najveći pad ovog berzanskog indeksa zabeležen je 2008. godine u vreme Svetske finansijske ekonomske krize.

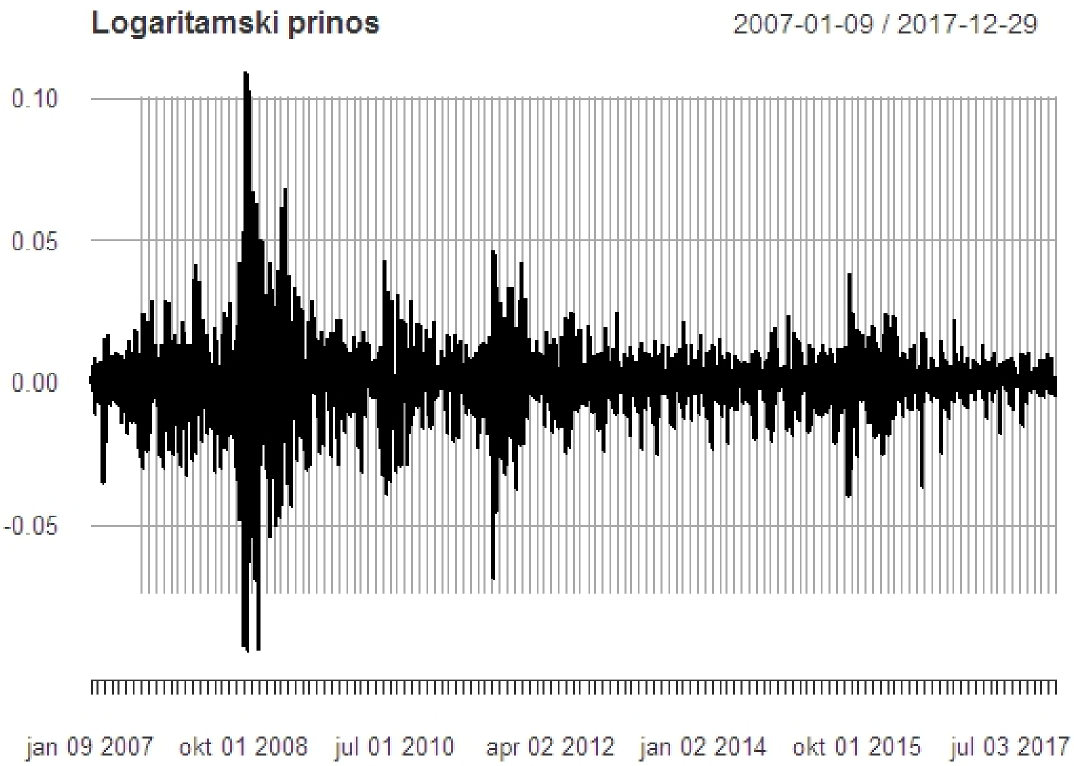


Slika 7.1: Kretanje berzanskog indeksa S&P 500

[5] Podaci o dnevnim kretanjima cena indeksa S&P 500 su preuzeti sa sajta http://www.finance.yahoo.com

Jedan od ključnih pojmova u analizi vremenskih serija jeste stacionarnost. Grubo rečeno, vremenska serija je stacionarna ako se njene statističke osobine ne menjaju tokom vremena. Pod navođenjem pojma stacionarnosti misli se na slabu stacionarnost, koja je definisana u uvodnom delu rada. Implicitno, slaba stacionarnost implicira da su momenti prvog i drugog reda konači.
Modeli koji se koriste u radu baziraju se na pretpostavkama o stacionarnosti vremenskih serija. Zbog toga se pre same ocene modela mora ispitati stacionarnost. U praksi, slaba stacionarnost je neophodna da bi mogle da se odrede predikcije.
Posmatrajući sliku 7.1 može se primetiti da vremenska serija ima rastući trend, što je jedan od pokazatelja nestacionarnosti vremenske serije, što se potvrđuje Duckey-Fuller-ovim (DF) testom. Dobijena p-vrednost korišćenjem ovog testa je 0.6755 što je veće od 0.05, što implicira da je vremenska serija nestacionarna. Diferenciranje može transformisati nestacionarnu seriju u stacionarnu. Iz tog razloga se prvobitno date cene indeksa S&P 500 transformišu u logaritamske prinose.

Na grafiku 7.2 prikazan je logaritamski prinos naše vremenske serije, odnosno kako izgleda vremenska serija nakon diferenciranja. Sa grafika se vidi da vremenska serija osciluje oko nule i da se ne uočavaju ni rastući ni opadajući trendovi pa se može zaključti da je logaritamska serija prinosa stacionarna. Ovaj zaključak se može potvrditi i DF testom, jer je p-vrednost dobijena za logaritamski prinos serije $0.01 < 0.05$.



Slika 7.2: Logaritamski prinos berzanskog indeksa S&P 500

Iz ovog dela rada zaključuje se da je serija berzanskog indeksa S&P 500 na logaritamskom nivou integrisana stepena 1, što znači da postaje stacionarna nakon prvog diferenciranja. Ovo dalje implicira da će se za ocenu modela koristiti serija logaritamskih prinosa.

Statističke osobine indeksa S&P 500

U analizi bilo kojih podataka početni korak podrazumeva ispitivanje statističkih osobina vremenske serije. Time se bavi deskriptivna statistika. Deskriptivna statistika sadrži metode i procedure za prezentovanje i sumiranje podataka. Njena svrha je da pomoću nekoliko brojeva opiše značenje podataka koji se nalaze unutar vremenske serije. Deskriptivna statistika je obično prvi korak u analizi podataka, a služi za opisivanje prikupljenih podataka. Deskriptivna statistika obično prethodi statističkom zaključivanju i predviđanju.
Osnovne mere koje se koriste za opisivanje podataka su očekivanje, medijana, standardna devijacija, minimalna i maksimalna vrednost kao i koeficijenti asimetrije i spljoštenosti.
U Tabeli 7.1 predstavljene su vrednosti deskriptivnih statistika za logaritamske prinose berzanskog indeksa S&P 500.

	S&P 500
Očekivanje	0
Medijana	0
Standardna devijacija	0.01
Min	-0.09
Max	0.11
Koeficijent asimetrije	-0.35
Koeficijent spljoštenosti	10.91
Jarque-Bera	13787
p vrednost	0.00

Tabela 7.1: Deskriptivna statistika za prinose berzanskog indeksa S&P 500

Iz ove tabele se vidi da je očekivanje logaritamskog prinosa berzanskog indeksa blisko nuli. Standardna devijacija pokazuje koliko u proseku elementi u uzorku odstupaju od očekivane vrednosti. Kao i očekivanje i standardna devijacija ove vremenske serije je bliska nuli.
Koeficijent asimetrije daje informaciju o tome da li je većina vrednosti u uzorku veća (ima pozitivan predznak) ili manja (ima negativan predznak) od očekivane vrednosti. Ukoliko je koeficijent asimetrije jednak nuli, može se pretpostaviti da podaci prate standardnu normalnu raspodelu. U našoj vremenskoj seriji ovaj koeficijent je -0.35 , dakle ima negativan predznak, što znači da je većina podataka manja od očekivane vrednosti. Odnosno, vremenska serija je asimetrična na levo. Na osnovu koeficijenta asimetrije investitori mogu bolje da procene kakve će biti buduće vrednosti vremenske serije.
Koeficijent spljoštenosti je pokazatelj koji izražava koliko je neka raspodela spljoštena u odnosu na normalnu. Ukoliko je ovaj koeficijent jednak trojci to znači da je raspodela normalno spljoštena. Ako je koeficijent spljoštenosti veći od tri to znači da raspodela ima deblje repove što ukazuje na postojanje outlier-a, ako je pak ovaj koeficijent manji od tri raspodela ima tanje repove. Koeficijent spljoštenosti u našem slučaju je 10.91 što je daleko iznad tri. Ovo ukazuje na raspodelu sa debelim repovima i na postojanje više outlier-a (ima dosta vrednosti u uzorku koje su značajno udaljene od ostalih vrednosti). Posmatranjem koeficijenta asimetrije i koeficijenta spljoštenosti dolazi se do zaključka da podaci iz vremenske serije vrlo verovatno ne prate standardnu normalnu raspodelu.
Jarque-Bera (JB) test normalnosti testira da li koeficijent asimetrije i splöštenosti odgovaraju normalnoj raspodeli. Nulta hipoteza koja se testira glasi da podaci imaju koeficijent asimetrije jednak nuli a koeficijent spljoštenosti jednak tri, odnosno da ovi koeficijenti odgovaraju normalnoj raspodeli. Kako je registrovana p vrednost u Tabeli 7.1 manja od 0.05 zaključuje se da se nulta hipoteza odbacuje, odnosno da serija indeksa ne prati normalnu raspodelu.

Ocena parametara linearnog GJR(1,1) modela sa studentovom-t raspodelom

Kao što je već naglašeno, za ocenjivanje parametara modela neće se korititi cela vremenska serija nego samo njen prvi potperiod koji obuhvata podatke od 8. januara 2007. do 31. decembra 2014. godine.
Prvo će se oceniti parametri modela uz pomoć klasničnog pristupa, odnosno koristiće se metoda maksimalne verodostojnosti.
U opštem slučaju GJR(p,q) model može se zapisati na sledeći način:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2 I_{t-i}$$

gde je

$$I_{t-i} = \begin{cases} 1, & \varepsilon_{t-i} < 0 \\ 0, & \varepsilon_{t-i} \geq 0 \end{cases}$$

indikator funkcija. Koeficijent γ_j predstavlja efekat asimetrije.
Ovo istraživanje fokusirano je na jednostavnom modelu u kojem je $p = q = 1$, tj. ocenjeni su parametri GJR(1,1) modela, koji je dat formulom:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1}$$

U Tabeli 7.2 prikazani su ocenjeni koeficijenti GJR(1,1) modela sa studentovom-t raspodelom. Koeficijenti su ocenjeni metodom maksimalne verodostojnosti, što je uobičajena tehnika kod klasičnog pristupa ocene parametara.

Parametar	Ocena	Standardna greška	T-statistika
μ	0.000623	0.000179	3.474582
ω	0.000002	0.000002	1.374682
α_1	0.000000	0.021868	0.000004
β_1	0.872973	0.023548	37.072729
γ_1	0.227124	0.042419	5.354282

Tabela 7.2: Ocena parametara GJR(1,1) modela sa studentovom t-raspodelom

Posmatrajući poslednju kolonu ove tabele uočava se da su svi koeficijenti osim α_1 statistički značajni na nivou značajnosti 0.05. Prema tome, naš model može se opisati formulom:

$$\sigma_t^2 = 0.000002 + 0.872973\sigma_{t-1}^2 + 0.227124\varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1}$$

Nakon što su ocenjeni parametri modela, prelezi se na formiranje predikcija.

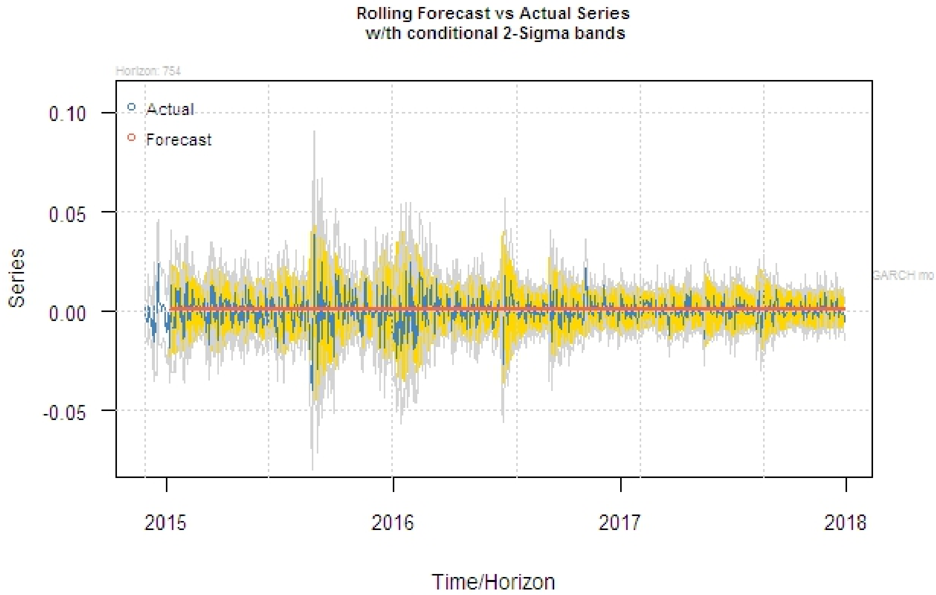
Predikcije

Gotovo je nemoguće pronaći neku nauku koja se ne služi predikcijama i prognozama za buduće periode. Najjednostavniji primer za predviđanje budućih ishoda jeste vremenska prognoza. Vremenska prognoza koristi istorijske podatke, odnosno informacije kakvo je bilo vreme juče, preključe i u prethodnim danima, da bi se odredilo kakvo će vreme biti sutra, prekosutra ili za mesec dana unapred. Na istom tom principu funkcionišu i finansijske vremenske serije. Dakle, na osnovu istorijskih podataka, koristeći odgovarajući model, formiraju se predikcije za neke buduće periode. Predikcije su veoma korisne jer na osnovu njih može da se prognozira kakav će biti prinos ili rizik određene vremenske serije.

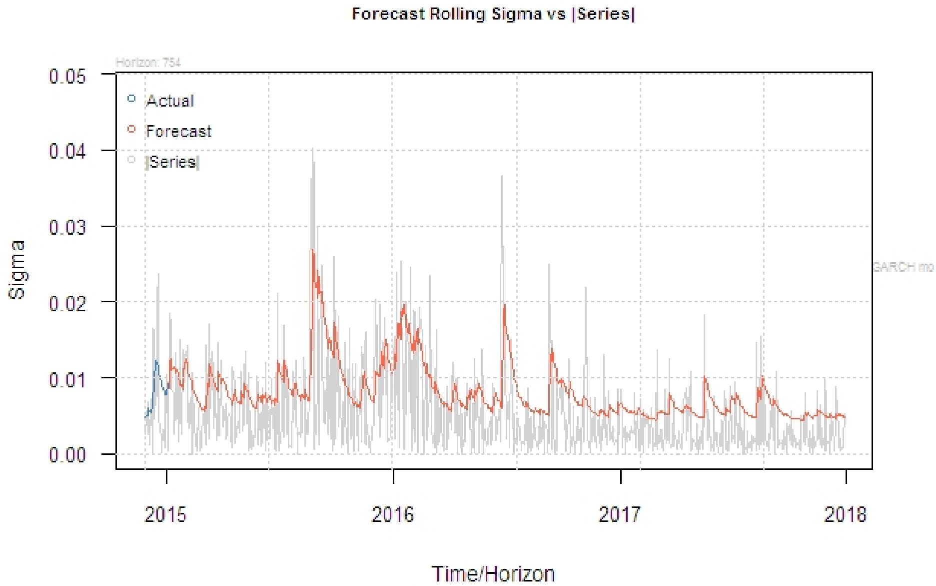
Predikcije se formiraju nakon što se ocene parametri modela. Kod predikcija postoje dva pristupa. U prvom pristupu formiraju se predikcije za buduće vrednosti, odnosno za ocenu modela se koristi cela vremenska serija a predviđaju se vrednosti za neki od budućih perioda. Tako na primer, ako se radi o vremenskoj seriji koja sadrži dnevne prinose predviđaju se vrednosti za sutra, prekosutra ili pak nekoliko dana unapred. Ako je se radi o mesečnim prinosima onda se predviđaju vrednosti vremenske serije za jedan ili nekoliko meseci unapred. Međutim, interesantno je videti koliko dobro model predviđa i zbog toga su potrebne opservacije iz vremenske serije kako bi se mogle uporediti sa prognoziranim vrednostima. Naime, u drugom pristupu se vremenska serija deli na dva perioda. Uglavnom se deli tako da prvi period sadrži 80 % podataka a drugi period preostalih 20 % podataka. Prvi potpriod serije koristi se za ocenu modela. Drugi potperiod naziva se test period i za taj period se formiraju predikcije. Nakon fomiranja predikcija, porede se stvarne vrednosti iz vremenske serije sa formiranim predkcijama i na taj način se proverava koliko je dobra prediktivna moć modela, odnosno koliko dobro model predviđa. Ovaj pristup se mnogo više koristi u praksi pa će stoga biti primenjen i u ovom master radu.

Vremenska serija logaritamskih prinosa berzanskog indeksa S&P 500 deli se na dva potperioda. Prvi potperiod, koji sadrži 80 % podataka vremenske serije, je od 8. januara 2007. do 31. decembra 2014. godine i sadrži ukupno 2011 podataka. Test period sadrži preostale podatke počev od 2015. godine pa do kraja 2017. godine i on sadrži ukupno 754 opservacije. Pomoću GJR(1,1) modela sa studentovom-t raspodelom ocenjeni su parametri modela na osnovu podataka iz prvog potperioda vremenske serije. Nakon toga formirane su predikcije za test period. Predikcije su formirane za prinose, odnosno za kretanje prinosa vremenske serije, i za volatilnost, odnosno uslovnu standardnu devijaciju prinosa serije.

Na Slici 7.3 prikazane su predikcije kretanja prinosa berzanskog indeksa S&P 500. Predikcije su prikazane crvenom linijom, dok su stvarne vrednosti prinosa vremenske serije prikazane plavom linijom. X-osa je vremenska osa i na njoj su predstavljene godine za koje su formirane predikcije a y-osa predstavlja vrednosti logaritamskih prinosa vremenske serije. Sa datog grafika se vrlo jasno vidi da su sve predviđene vrednosti jednake nuli, odnosno model predviđa da će prinosi vremenske serije berzanskog indeksa S&P 500 biti nula. Ovaj zaključak se poklapa sa činjenicom da je u deskriptivnoj statistici očekivana vrednost logaritamskog prinosa serije bila jednaka nuli.



Slika 7.3: Predikcije prinosa berzanskog indeksa S&P 500



Slika 7.4: Predikcije uslovne standardne devijacije prinosa berzanskog indeksa S&P 500

Na Slici 7.4 prikazane su formirane predikcije uslovne standardne devijacije berzanskog indeksa S&P 500. X-osa ponovo predstavlja vremensku osu dok se na y-osi nalaze vrednosti sigme, odnosno uslovne standardne devijacije. Plavom linijom predstavljene su stvarne vrednosti a crvenom bojom predstavljene su predviđene vrednosti za sigmu. Za razliku od predikcija prinosa, predikcije uslovne standardne devijacije nisu jednake nuli, što ukazuje na činjenicu da rizik uvek postoji.

Bayes-ovsko ocenjivanje parametara

Tokom osamdesetih godina ARCH i GARCH modeli su veoma brzo prerasli u bogatu familiju empirijskih modela za predviđanje volatilnosti. Ovi modeli su široko rasprostranjeni i neophodan su alat u finansijskoj ekonometriji. Do nedavno za ocenu parametara ovih modela uglavnom su se koristile klasične tehnike maksimalne verodostojnosti. U poslednje vreme sve više je zastupljen Bayes-ov pristup ocenjivanja parametara. Bayes-ov pristup nudi atraktivnu alternativu koja omogućava dobijanje robusne ocene.
Izbor algoritma je prvo sporno pitanje sa kojim se suočava u radu sa MCMC metodama i to zavisi od prirode problema koji se ispituje. U programskom softveru R paket bayesGARCH koristi proceduru simulacije koja se oslanja na M-H algoritam u kojem se neki parametri modela ažuriraju po blokovima. Gustine su konstruisane iz pomoćnog ARMA modela za kvadratne opservacije. Ova metodologija izbegava trošenje vremena i komplikovan zadatak izbora i podešavanja algoritama za kreiranje uzoraka.

Metod Bayes-ove ocene primenjuje se na dnevne opservacije njujorškog berzanskog indeksa S&P 500. Kao i u klasičnom pristupu, za ocenjivaje parametara koristi se prvi potperiod vremenske serije koji obuhvata podatke od 8. januara 2007. do 31. decembra 2014. godine. Dakle ne koristi se cela vremenska serija nego samo prvih 2011 podataka. Fituje se jednostavan GARCH(1,1) model za podatke iz prvog potperioda vremenske serije uz pomoć funkcije bayesGARCH.
Za priorne raspodele GJR parametara biraju se odsečene trodimenzionalne normalne raspodele sa očekivanjem nula vektorom i dijagonalnom kovarijansnom matricom. U ugrađenoj funkciji bayesGARCH u R-u vrednosti varijanse su podešene na 1000 tako da se uvode priorne informacije u našu ocenu. Za priorni parametar stepena slobode postavljaju se hiperparametri $\lambda = 0.01$ i $\delta = 2$ pa je stoga priorno očekivanje 102 a priorna varijansa 10000. Vrednost hiperparametra δ određena tako da uslovna varijansa postoji.
Pokreću se dva lanca, svaki od njih ima po 1000 koraka. Treba naglasiti činjenicu da su jedino pozitivna ograničenja implementirana u M-H algoritmu; u proceduri simulacije nisu postavljeni uslovi stacionarnosti.
Nakon pokretanja MCMC algoritma dobija se niz od dva lanca iteracija i za svaku iteraciju ispisane su vrednosti parametara redom : $\alpha_0, \alpha_1, \beta, \nu$.

chain: 1 iteration: 10 parameters: 51.4712 0.3178 0.6842 35.6843
chain: 1 iteration: 20 parameters: 51.4712 0.3178 0.6988 25.6582
chain: 1 iteration: 30 parameters: 51.4712 0.3178 0.7066 20.1889
chain: 1 iteration: 40 parameters: 92.5404 0.3197 0.6979 23.6973
chain: 1 iteration: 50 parameters: 115.1513 0.3241 0.7225 20.8273
⋮
chain: 2 iteration: 9960 parameters: 99.8186 0.5687 0.4762 16.4937
chain: 2 iteration: 9970 parameters: 74.625 0.7023 0.3676 19.1406
chain: 2 iteration: 9980 parameters: 127.047 0.6461 0.4331 17.6043
chain: 2 iteration: 9990 parameters: 53.4131 0.6153 0.4472 17.1392
chain: 2 iteration: 10000 parameters: 86.807 0.5536 0.516 16.8506

MCMC algoritam kreira uzorak iz posteriorne raspodele a u našem interesu je da znamo da li je uzorak dovoljno blizu posteriorne raspodele koja se koristi prilikom analize. Postoji nekoliko načina za proveru ovoga, ali preporučuje se Gelman-Rubin-ova dijagnostika [8]. U osnovi, Gelman-Rubin procenjuje da li postoji značajna razlika između varijanse unutar nekoliko lanaca i varijanse između nekoliko lanaca. Vrednost kojom se to meri naziva se scale reduction factors (faktor smanjenja skale). Komanda gelman.diag u R-u daje faktor smanjenja skale za svaki parametar. Faktor 1 znači da su varijanse između lanaca i varijanse unutar lanca jednake, veće vrednosti znače da i dalje postoji značajna razlika između lanaca. Sve vrednosti ispod 1.2 su dobre.
U Tabeli 7.3 prikazana je Gelman-Rubin-ova dijagnostika.

	Donja granica	Gornja granica
α_0	1.00	1.00
α_1	2.13	4.68
β	2.16	4.75
ν	1.00	1.00

Tabela 7.3: Gelman-Rubin-ova dijagnostika za berzanski indeks S&P 500

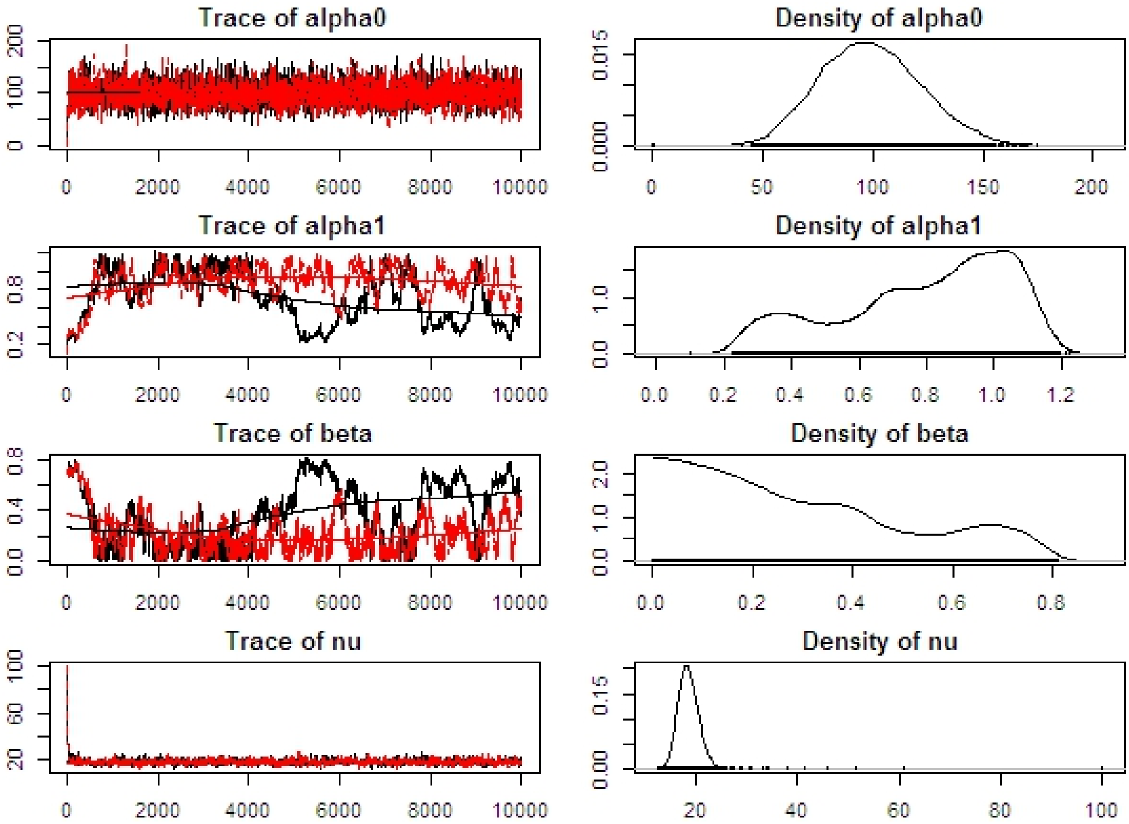
Iz prikazane tabele vidi se da je faktor smanjenja skale za parametre α_0 i ν ispod 1.2 što znači da su za te parametre varijanse između i unutar lanaca jednake, dok je za parametre α_1 i β ovaj pokazatelj mnogo veći od 1, stoga se za te parametre ne može zaključiti da su im varijanse jednake.

Od velikog značaja je ispitivanje autokorelacije. Autokorelacija je matematička reprezentacija stepena sličnosti između date vremenske serije i njenih prethodnih vrednosti u više vremenskih intervala. Prilikom izračunavanja autokorelacije mogu se dobiti vrednosti u opsegu od 1 do -1. Autokorelacija koja ima vrednost 1 predstavlja savršenu pozitivnu korelaciju (porast u jednom vremenskom nizu dovodi do porasta u drugom vremenskom nizu), dok vrednost od -1 ukazuje na savršeno negativnu korelaciju.
U Tabeli 7.4 data je autokorelaciona funkcija za MCMC. U našem slučaju to je jedna dijagonalna matrica.

	α_0	α_1	β	ν
Lag 0	1.00000000	1.0000000	1.0000000	1.00000000
Lag 1	0.74336720	0.9939801	0.9872830	0.86621503
Lag 5	0.24466018	0.9735729	0.9673951	0.61181832
Lag 10	0.08033197	0.9501114	0.9452330	0.41948166
Lag 50	-0.01028453	0.7940011	0.7939099	0.04287799

Tabela 7.4: Autokorelaciona matrica za berzanski indeks S&P 500

U ovoj matrici uočava se da što se više ide u prošlost vrednosti autokorelacije se sve više smanjuju. Za parametar α_0 čak se dostiže i negativna vrednost korelacije. Prva kolona ove tabele pokazuje koliko koraka unazad se ide u vremenskoj seriji. Pa tako na primer, Lag 1 znači da se pomera za jedan period unazad, a Lag 50 znači da se pomera 50 perioda unazad. Kako je u ovom radu reč o dnevnim kretanjima cena indeksa, jedan period predstavlja jedan dan. Autokorelacija za 1 korak unazad ima opseg od 0.74 za parametar α_0 do 0.99 za parametar α_1 , što je veoma visok stepen povezanosti.



Slika 7.5: Prikaz putanja dva lanca za četiri parametra modela generisanih pomoću M-H algoritma

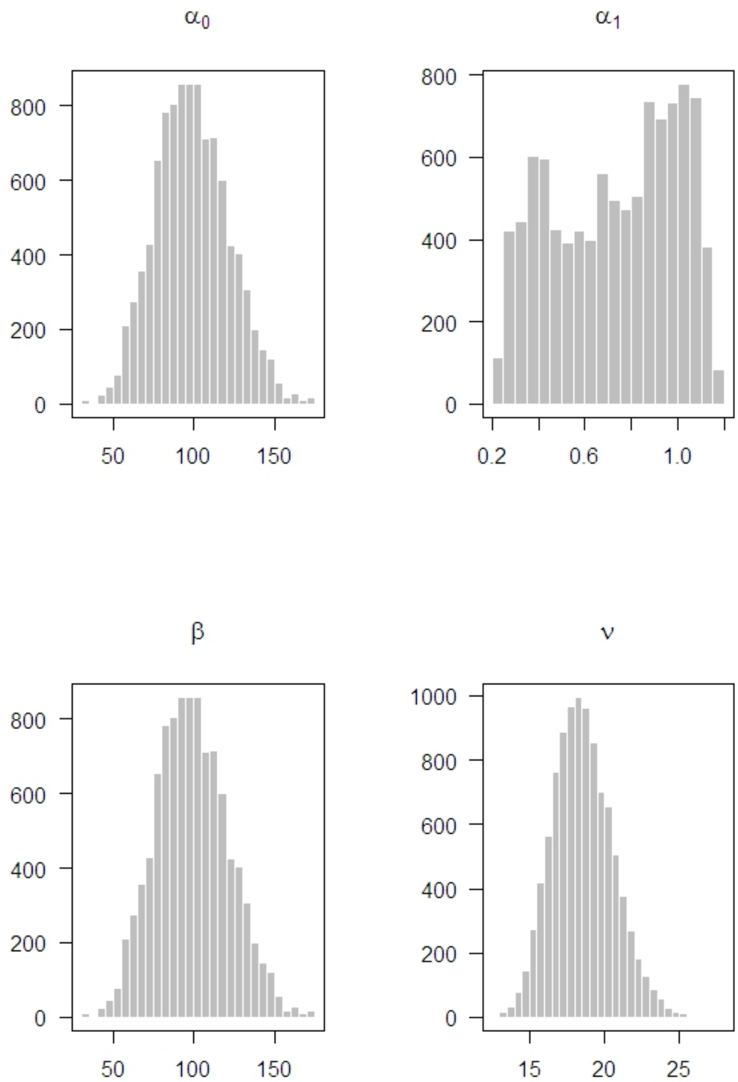
Na slici 7.5 sa leve strane prikazane su putanje dva lanca za parametre modela generisanih preko M-H algoritma. Crvenom bojom iscrtana je putanja jednog lanca dok je crnom bojom iscrtana putanja drugog lanca. Sa desne strane slike prikazane su gustine tih istih parametara.

Koristeći funkciju *formSmpl* formira se uzorak. Uzorak se formira tako što se prvih 5000 iteracija iz celokupnog MCMC output-a odbaci i spoje se dva lanca. Na taj način dobija se konačan uzorak dužine 10000. Odbacivanje prvih 5000 iteracija MCMC output-a i zadržavanje drugih 5000 se vrši kako bi se smanjila autokorelacija.

Posteriorna statistika se dobija primenom metode *summary* na formirani uzorak. Rezultati posteriorne statistike prikazani u Tabeli 7.5.

	Očekivaje	Standardna devijacija	Standardna devijacija vremenske serije
α_0	98.7017	22.5467	0.57860
α_1	0.7312	0.2649	0.07265
β	0.3505	0.2337	0.06528
ν	18.5515	2.0301	0.11208

Tabela 7.5: Posteriorna statistika berzanskog indeksa S&P 500



Slika 7.6: Marginalne posteriorne raspodele berzanskog indeksa S&P 500

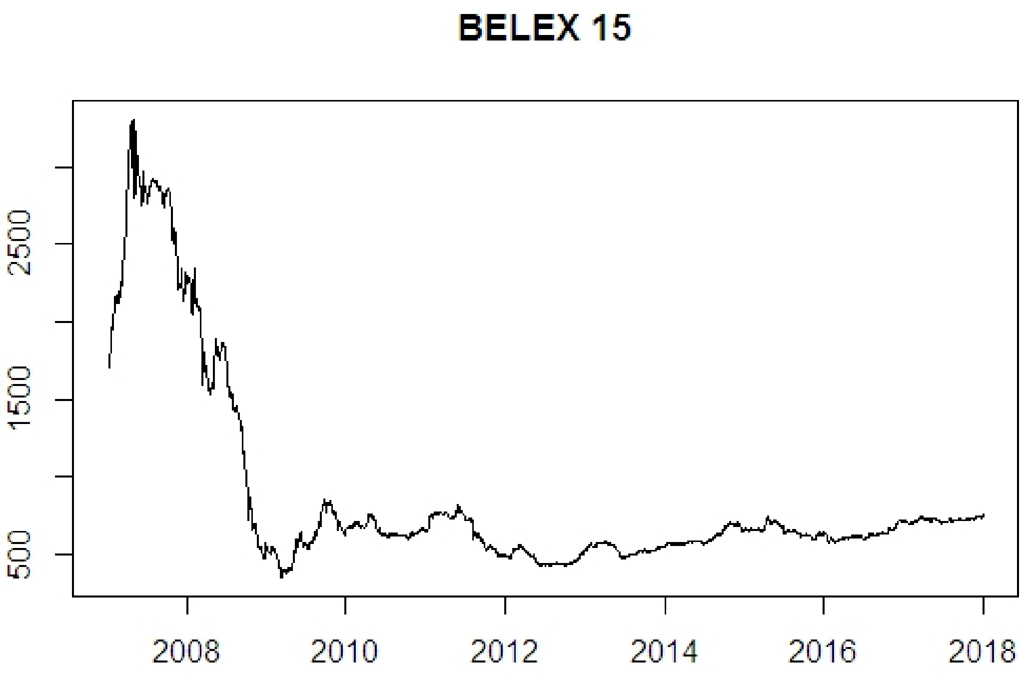
Marginalne raspodele parametara modela dobijaju se tako što se prvo uzorak transformiše u matricu a zatim se iskoristi funkcija *hist*, koja iscrtava histogram za svaki od parametara.

Na slici 7.6 prikazane su marginalne posteriorne raspodele za parametre modela. Za parametre α_0 , α_1 i β priorne raspodele su bile normalne raspodele, dok je za parametar ν priorna raspodela bila studentova-t raspodela. Nakon formiranja uzorka i dobijanja posteriornih raspodela za parametre modela primećuje se da se priorna i posteriorna raspodela za parametar α_1 ne poklapaju. Ako se uporede priorne i posteriorne raspodele parametara α_0, β i ν tu postoji poklapanje, odnosno parametri α_0 i β prate normalnu raspodelu dok parametar ν prati studentovu-t raspodelu.

BELEX 15

Nakon analize njujorškog berzanskog indeksa S&P 500, prelazi se na analizu beogradskog berzanskog indeksa BELEX 15.
Sada se posmatra druga vremenska serija, koja sadrži dnevna kretanja cena indeksa BELEX 15. Posmatra se vremska serija za period od 8. januara 2007. do 29. decembra 2017. godine[6]. Prilikom izbora perioda vremenskih serija vodilo se računa da obe vremenske serije budu izabrane tako da se poklapa vremenski interval, odnosno obe vremenske serije se posmatraju za period počev od januara 2007. pa do decembra 2017. godine. Jedino što se razlikuje kod ovih vremenskih serija jeste ukupan broj podataka. Naime, prva serija sadrži ukupno 2766 podataka dok druga vremenska serija ima ukupno 2775 podataka. To nepoklapanje je posledica nepoklapanja neradnih dana u SAD i u Srbiji. Vrednosti cena indeksa beleže se svakog radnog dana pri čemu se izuzimaju vikendi, državni praznici i zakonom propisani neradni dani.

U praksi, pre bilo kakve analize i iznošenja zaključaka, crta se cela vremenska serija i na osnovu crteža se analizira kretanje date serije. Tako se postupa i u ovom istraživanju.

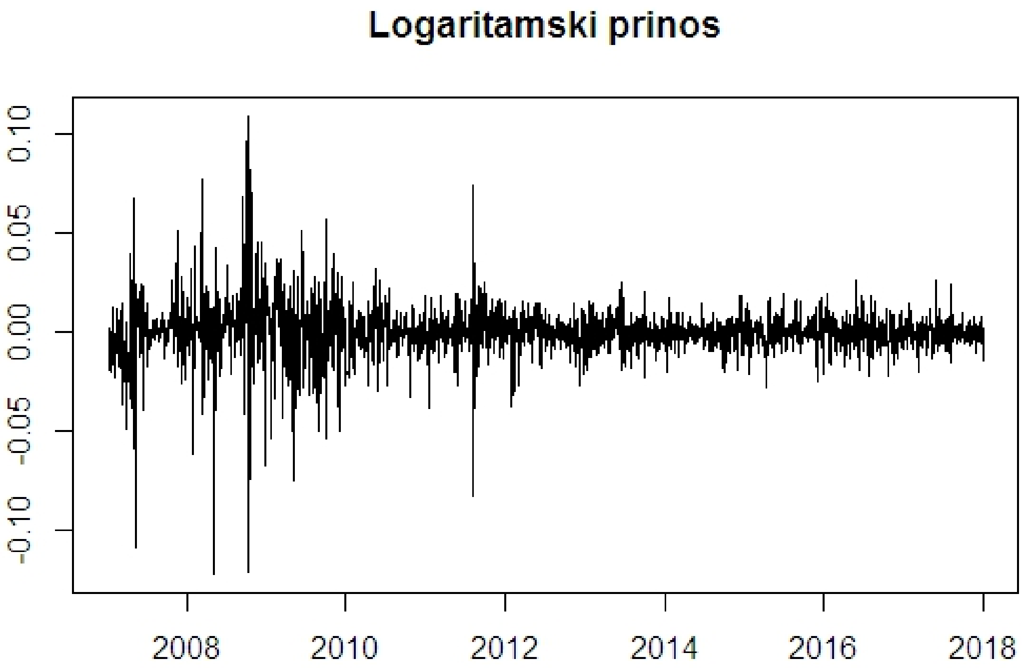


Slika 7.7: Kretanje berzanskog indeksa BELEX 15

Sa Slike 7.7 jasno se vidi kretanje cena domaćeg berzanskog indeksa u periodu od 8. januara 2007. do 29. decembra 2017. godine. Najveći rast ovog indeksa zabeležen je u maju 2007. godine dok je najveći pad zabeležen u martu 2009. godine.

[6]Podaci o dnevnim kretanjima cena indeksa BELEX 15 preuzeti su sa sajta http://www.belex.rs/trgovanje/indeksi/belex15/istorijski

Pre ocene modela mora se ispitati stacionarnost vremenske serije, jer se svi modeli koji su korišćeni u radu baziraju na pretpostavci o stacionarnosti. Stacionarnost je takođe neophodna i da bi se mogle odrediti predikcije.
Posmatrajući sliku 7.7 primećuje se da serija ima opadajući trend, što je jedan od pokazatelja nestacionarnosti vremenske serije. Nestacionarnost date vremenske serije potvrđuje i Duckey-Fuller-ov (DF) test. Dobijena p-vrednost ovog testa je 0.6894 što je veće od 0.05, a to implicira da je data vremenska serija nestacionarna. Diferenciranjem nestacionarna vremenska serija transformiše se u stacionarnu. Iz tog razloga date cene indeksa BELEX 15 iz ove serije se diferenciraju i transformišu se u logaritamske prinose.



Slika 7.8: Logaritamski prinos berzanskog indeksa BELEX 15

Na grafiku 7.8 prikazan je logaritamski prinos naše vremenske serije, odnosno kako vremenska serija izgleda nakon diferenciranja. Sa grafika se može primetiti da serija osciluje oko nule i da se ne uočavaju ni rastući ni opadajući trendovi pa se može zaključiti da je ova logaritamska vremenska serija prinosa stacionarna. Ovaj zaključak može se potvrditi i DF testom, jer je dobijena p-vrednost za seriju logaritamskih prinosa $0.01 < 0.05$. Dakle na osnovu DF testa zaključuje se da je vremenska serija logaritamskih prinosa stacionarna.

Iz ovog dela rada zaključuje se da je serija berzanskog indeksa BELEX 15 na logaritamskom nivou integrisana stepena 1, što znači da postaje stacionarna nakon prvog diferenciranja. Ovaj zaključak dalje implicira da će se za ocenu modela koristiti vremenska serija logaritamskih prinosa.

Statističke osobine indeksa BELEX 15

Kao i u slučaju prethodnog indeksa, prvi korak analize podataka podrazumeva ispitivanje statističkih osobina. Time se bavi deskriptivna statistika, koja služi za opisivanje prikupljenih podataka. Deskriptivna statistika prethodi statističkom zaključivanju i predviđanju.
Osnovne mere koje će se ovde koristiti a koje su ujedno i osnovne mere za opisivanje podataka su: očekivanje, medijana, standardna devijacija, minimalna i maksimalna vrednost, koeficijent asimetrije i koeficijent spljoštenosti.
U Tabeli 7.6 predstavljene su vrednosti deskriptivnih statistika za logaritamske prinose berzanskog indeksa BELEX 15.

	BELEX 15
Očekivanje	0
Medijana	0
Standardna devijacija	0.01
Min	-0.12
Max	0.11
Koeficijent asimetrije	-0.16
Koeficijent spljoštenosti	15.74
Jarque-Bera	28680
p vrednost	0.00

Tabela 7.6: Deskriptivna statistika za prinose berzanskog indeksa BELEX 15

Iz tabele se vidi da je očekvivanje logaritamskog prinosa berzanskog indeksa jednako nuli. Standardna devijacija iznosi 0.01, što je veoma blisko nuli. Vrednost standardne devijacije bliska nuli ukazuje da u proseku veoma mali broj elemenata u uzorku odstupa od očekivane vrednosti, odnosno odstupanje od očekivane vrednosti je minimalno.
Vrednosti za očekivanje, standardnu devijaciju i medijanu su potpuno iste kod obe vremenske serije.
Koeficijent asimetrije je -0.16. Negativna vrednost ovog koeficijenta ukazuje na to da je većina podataka u vremenskoj seriji manja od očekivane vrednosti, odnosno vremenska serija je asimetrična na levo. Kako ovaj koeficijent nije jednak nuli može se pretpostaviti da podaci ne prate standardnu normalnu raspodelu.
Koeficijent spljoštenosti iznosi 15.74. Ta vrednost je mnogo veća od tri, stoga se može zaključiti da raspodela ima debelje repove a to ukazuje na postojanje više outlier-a (ima dosta vrednosti u uzorku koje su značajno udaljene od ostalih vrednosti). KKoeficijent spljoštenosti je pokazatelj koji izražava koliko je neka raspodela spljoštena u odnosu na normalnu raspodelu.
Posmatranjem vrednosti koeficijenta asimetrije i koeficijenta spljoštenosti dolazai se do zaključka da podaci iz date vremenske serije vrlo verovatno ne prate standardnu normalnu raspodelu. Ovaj zaključak se može potvrditi Jarque-Bera (JB) testom normalnosti.
JB test normalnosti testira da li koeficijent asimetrije i spljoštenosti odgovaraju normalnoj raspodeli. Nulta hipoteza glasi da se podaci imaju koeficijent asimetrije jednak nula i koeficijent spljoštenosti jednak tri. Kako je registrovana p-vrednost (JB) statistike 0.00 a to je manje od 0.05 donosi se zaključak da se nulta hipoteza odbacuje, odnosno da vremenska serija indeksa BELEX 15 ne prati normalnu raspodelu.
Isti zaključak dobijen je i u slučaju indeksa S&P 500.

Ocena parametara linearnog GJR(1,1) modela sa studentovom-t raspodelom

Za ocenjivanje parametara modela, ponovo, neće se koristiti cela vremenska serija već samo njen prvi potperiod koji obuhvata podatke za vremenski interval od 8. januara 2007. do 31. decembra 2014. godine. Na tom vremenskom podintervalu biće ocenjen model a za drugi podinterval formiraće se predikcije.
Prvo će se oceniti parametri modela pomoću klasičnog pristupa, odnodno koristiće se metoda maksimalne verodostojnosti.

Ocenjuju se parametri GJR(1,1) modela, koji je dat formulom:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1}$$

U Tabeli 7.7 prikazani su ocenjeni koeficijenti GJR(1,1) modela sa studentovom-t raspodelom. Koeficijenti su ocenjeni metodom maksimalne verodostojnosti što je uobičajena tehnika kod klasičnog pristupa ocene parametara.

Parametar	**Ocena**	**Standardna greška**	**T-statistika**
μ	0.000068	0.000411	0.16608
ω	0.000056	0.000056	4.51094
α_1	0.439703	0.055295	7.95202
β_1	0.644760	0.031592	20.40921
γ_1	-0.170928	0.061222	-2.79193

Tabela 7.7: Ocena parametara GJR(1,1) modela sa studentovom t-raspodelom

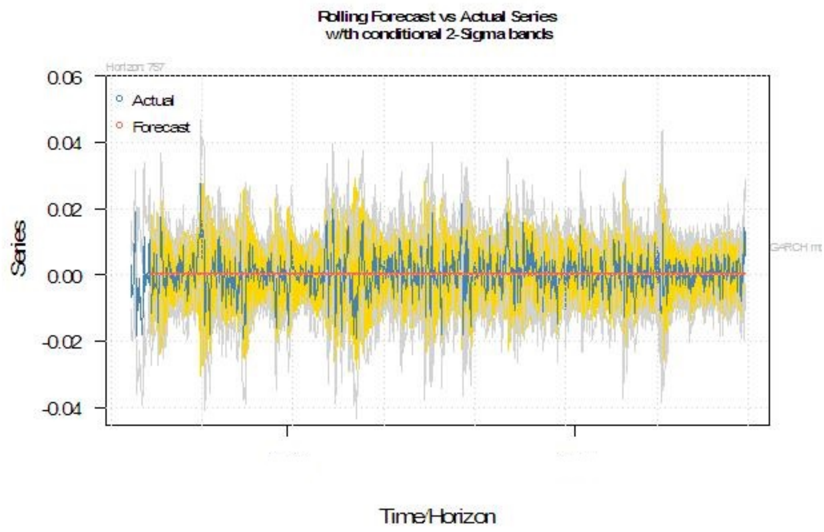
U tabeli su date ocenjene vrednosti parametara, standardne greške ocene i vrednosti test statistike. Može se primetiti da standardne greške ovih ocena imaju vrednosti veoma bliske nuli. Dakle standardne greǩe su veoma male.
Vrednost test statistike za svaki od ovih parametara je veća od 0.05, odnosno svi koeficijenti su statistički značajni na nivou značajnosti 0.05. Prema tome svi parametri se uključuju u model. Stoga se naš model može opisati formulom:

$$\sigma_t^2 = 0.000056 + 0.439703\varepsilon_{t-1}^2 + 0.644760\sigma_{t-1}^2 - 0.170928\varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1}$$

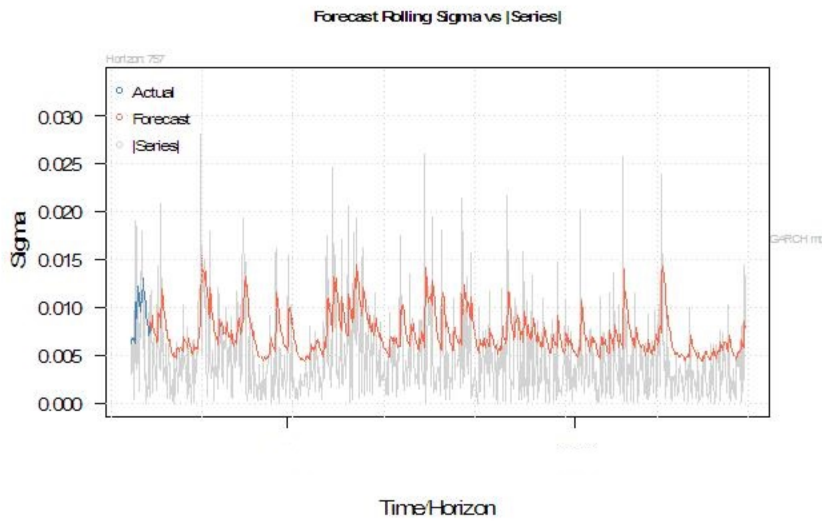
Za razliku od prethodnog modela, u kojem su se koristili podaci prinosa berzanskog indeksa S&P 500, kod koga parametar α_1 nije bio uključen u model jer nije bio statistički značajan, u ovom modelu svi ocenjeni parametri su statistički značajni.
U poređenju dva ocenjena modela metodom maksimalne verodostojnosti za različite berzanske indekse primećuje se još jedna razlika. U oceni parametra γ_1 kod njujorškog indeksa dobijena je pozitivna vrednost dok je kod domaćeg beogradskog indeksa dobijena negativna vrednost.

Predikcije

Nakon što se oceni model prelazi se na formiranje predikcija. Metodologija formiranja predikcija je ista kao i za berzanski indeks S&P 500. Dakle ponovo se deli vremenska serija logaritamskih prinosa na dva potperioda i određuju se predikcije za kretanje prinosa i za rizik za test period.



Slika 7.9: Predikcije prinosa berzanskog indeksa BELEX 15



Slika 7.10: Predikcije uslovne standardne devijacije prinosa berzanskog indeksa BELEX 15

Na Slici 7.9 prikazane su predikcije za logaritamske prinose berzanskog indesa BELEX 15. Ponovo su predviđeni prinosi za test period jednaki nuli, kao i kod indeksa S&P 500. Zaključuje se da se predikcije prinosa za ova dva berzanska indeksa poklapaju. Na Slici 7.10 predstavljene su predikcije uslovne standardne devijacije za test period. Primećuje se da ni jedna predikcija uslovne standardne devijacije nije jednaka nuli ali su veoma blizu nule. Za razliku od predikcija za indeks S&P 500, u slučaju berzanskog indeksa BELEX 15 predviđene vrednosti rizika su nešto niže, odnosno model predviđa niži rizik za prinose berzanskog indeksa BELEX 15 u odnosu na berzanski indeks S&P 500.

Bayes-ovsko ocenjivanje parametara

Nakon klasične ocene parametara metodom maksimalne verodostojnosti sledi Bayes-ovsko ocenjivanje parametara GJR(1,1) modela sa studentovom-t raspodelom.
Metod Bayes-ove ocene primenjuje se na dnevne opservacije beogradskog berzanskog indeksa BELEX 15. Kao i u klasičnom pristupu za ocenu parametara koristi se prvi potperiod vremenske serije koji obuhvata vremenski interval od 8. januara 2007. do 31. decembra 2014. godine. Dakle ne koristi se cela vremenska serija nego samo prvih 2018 podataka. Fituje se jednostavan GARCH(1,1) model za podatke iz prvog potperioda vremenske serije uz pomoć funkcije bayesGARCH.

Za priorne raspodele GJR parametara biraju se odsečene trodimenzionalne normalne raspodele sa očekivanjem nula vektorom i dijagonalnom kovarijansnom matricom. U ugrađenoj funkciji bayesGARCH u R-u vrednosti varijanse su podešene na 1000 tako da se uvode priorne informacije u našu ocenu. Za priorni parametar stepena slobode postavljaju se hiperparametri $\lambda = 0.01$ i $\delta = 2$ pa je stoga priorno očekivanje 102 a priorna varijansa 10000. Vrednost hiperparametra δ određena tako da uslovna varijansa postoji.

Pokreću se dva lanca, svaki od njih ima po 1000 koraka. Treba naglasiti činjenicu da su jedino pozitivna ograničenja implementirana u M-H algoritmu; u proceduri simulacije nisu postavljeni uslovi stacionarnosti.
Nakon pokretanja MCMC algoritma dobija se niz od dva lanca iteracija i za svaku iteraciju ispisane su vrednosti parametara redom : $\alpha_0, \alpha_1, \beta, \nu$.

```
chain: 1 iteration: 10 parameters: 67.8996 0.2994 0.6991 28.5217
chain: 1 iteration: 20 parameters: 108.6377 0.3377 0.6633 25.1224
chain: 1 iteration: 30 parameters: 125.0694 0.4444 0.5896 19.7332
chain: 1 iteration: 40 parameters: 95.5449 0.4553 0.5879 21.0378
chain: 1 iteration: 50 parameters: 63.5825 0.5267 0.5211 18.0395
chain: 1 iteration: 60 parameters: 52.869 0.5386 0.4656 21.3578
⋮
chain: 2 iteration: 9950 parameters: 82.3885 1.1091 3e-04 18.3529
chain: 2 iteration: 9960 parameters: 73.0063 1.0744 1e-04 23.3275
chain: 2 iteration: 9970 parameters: 97.7084 1.0891 8e-04 21.3077
chain: 2 iteration: 9980 parameters: 108.4972 1.1045 0.004 21.128
chain: 2 iteration: 9990 parameters: 73.7832 1.1128 0.0083 20.2891
chain: 2 iteration: 10000 parameters: 104.1566 1.0879 0.0079 18.6781
```

MCMC algoritam kreira uzorak iz posteriorne raspodele a u našem interesu je da znamo da li je uzorak dovoljno blizu posteriorne raspodele koja se koristi prilikom analize. U cilju ispitivanja osobina dobijenog MCMC output-a koristiće se Gelman-Rubinov-a dijagnostika. Gelman-Rubin procenjuje da li postoji značajna razlika između varijanse unutar nekoliko lanaca i varijanse između nekoliko lanaca. Ponovo se posmatra vrednost scale reduction factor-a za svaki od ocenjenih parametara. Faktor 1 znači da su varijanse između lanaca i varijanse unutar lanca jednake, vrednosti veće od 1 znače da i dalje postoji značajna razlika između lanaca. Sve vrednosti ispod 1.2 su dobre.

	Donja granica	Gornja granica
α_0	1.00	1.00
α_1	1.01	1.03
β	1.05	1.08
ν	1.01	1.02

Tabela 7.8: Gelman-Rubin-ova dijagnostika za berzanski indeks BELEX 15

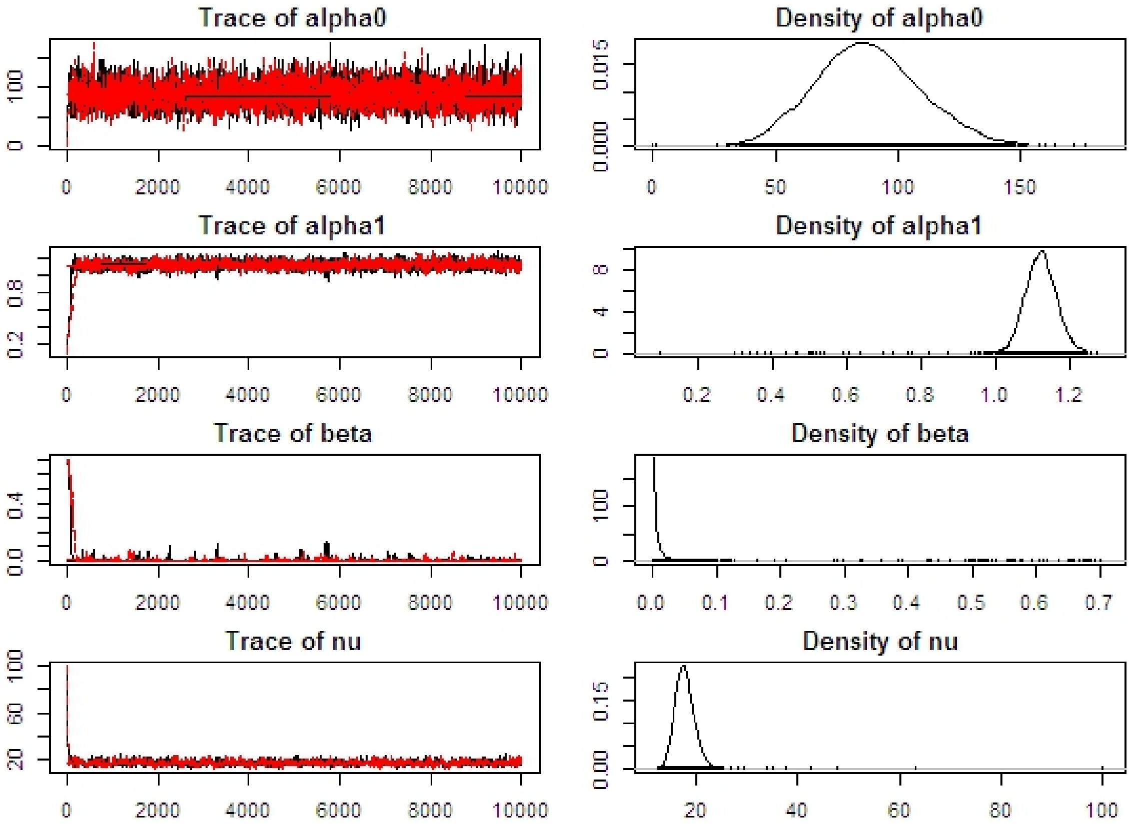
U Tabeli 7.8 prikazana je Gelman-Rubin-ova dijagnostika. Iz prikazane tabele uočava se da je scale reduction factor za sve parametre manji od 1.2. Štaviše, vrednost gornje granice ovog faktora ni za jedan parametar nije veća od 1.1. Ovo je veoma značajan rezultat, koji ukazuje da su varijanse između lanaca i varijanse unutar lanca jednake i to važi za sva četiri parametra, a to znači da je postignuta približna konvergencija za sva četiri parametra.
U poređenju sa indeksom S&P 500, gde su faktori za parametre α_1 i β bili daleko iznad 1, odnosno za te parametre nije dijagnostikovana približna konvergencija, za indeks BELEX 15 dobijen je mnogo bolji rezultat Gelman-Rubin-ove dijagnostike.

Sledeća vrlo bitna osobina koja se ispituje jete autokorelacija. Autokorelacija meri koliko i u kom stepenu su povezane sadašnje i prethodne vrednosti iz vremenske serije u više vremenskih intervala. Prilikom izračunavanja autokorelacije mogu se dobiti vrednosti u opsegu od 1 pa do -1. Vrednost 1 ukazuje na pozitivnu korelaciju, odnosno porast u jednom vremenskom intervalu dovodi do porasta u drugom, dok vrednost -1 ukazuje na negativnu korelaciju.

	α_0	α_1	β	ν
Lag 0	1.00000000	1.0000000	1.0000000	1.00000000
Lag 1	0.660513214	0.8958858	0.9897641	0.8554376
Lag 5	0.154832928	0.7505220	0.9506595	0.5901483
Lag 10	0.040622174	0.6857214	0.8984760	0.3915666
Lag 50	-0.006716552	0.3570999	0.4698519	0.0331477

Tabela 7.9: Autokorelaciona matrica za berzanski indeks BELEX 15

U Tabeli 7.9 prikazane su vrednosti autokorelacione funkcije za sva četiri parametra. U našem slučaju, output je zapravo jedna dijagonalna matrica.
Prva kolona ove tabele pokazuje koliko koraka unazad se ide u vremenskoj seriji. Pa tako Lag 1 znači da se pomeramo jedan korak unazad, dok Lag 50 predstavlja pomeranje 50 koraka unazad. Kako se ovde radi o vremenskoj seriji dnevnih prinosa, jedan korak predstavlja jedan dan.
Posmatrajući ovu matricu primećuje se da što se više pomera u prošlost vrednosti autokorelacije se sve više smanjuju. Stoga su vrednosti Lag 0 za sve parametre iste i iznose 1, odnosno postoji savršena pozitivna korelacija. Kako se ide više u prošlost vrednosti polako opadaju, a za parametar α_0 za Lag 50 dobija se čak negativna korelacija.
Autokkorelacija za 1 korak unazad ima opseg od 0.66 za parametar α_0 pa do 0.99 za parametar β, što je veoma visok stepen povezanosti.
Autokorelaciona matrica za indeks BELEX 15 i za indeks S&P 500 su veoma slične i kod njih se ne uočavaju veće razlike. Njihovo ponašanje je identično, prvo se dobijaju vrednosti 1 a zatim se postepeno smanjuju.



Slika 7.11: Prikaz putanja dva lanca za parametre modela generisanih pomoću M-H algoritma

Slika 7.11 podeljena je na dva dela. Na levoj strani slike na graficima predstavljene su putanje lanaca M-H algoritma za svaki od parametara. Putanja jednog lanca predstavljena je crvenom bojom dok je putanja drugog lanca predstavljena crnom bojom. Na desnoj strani slike predstavljene su gustine za sve parametare modela.
U poređenju sa figurom 7.5 uočava se da su za parametre α_0 i ν putanje i gustine jednake, dok se za preostale parametre α_1 i β putanje lanaca kao i gustine potpuno razlikuju.

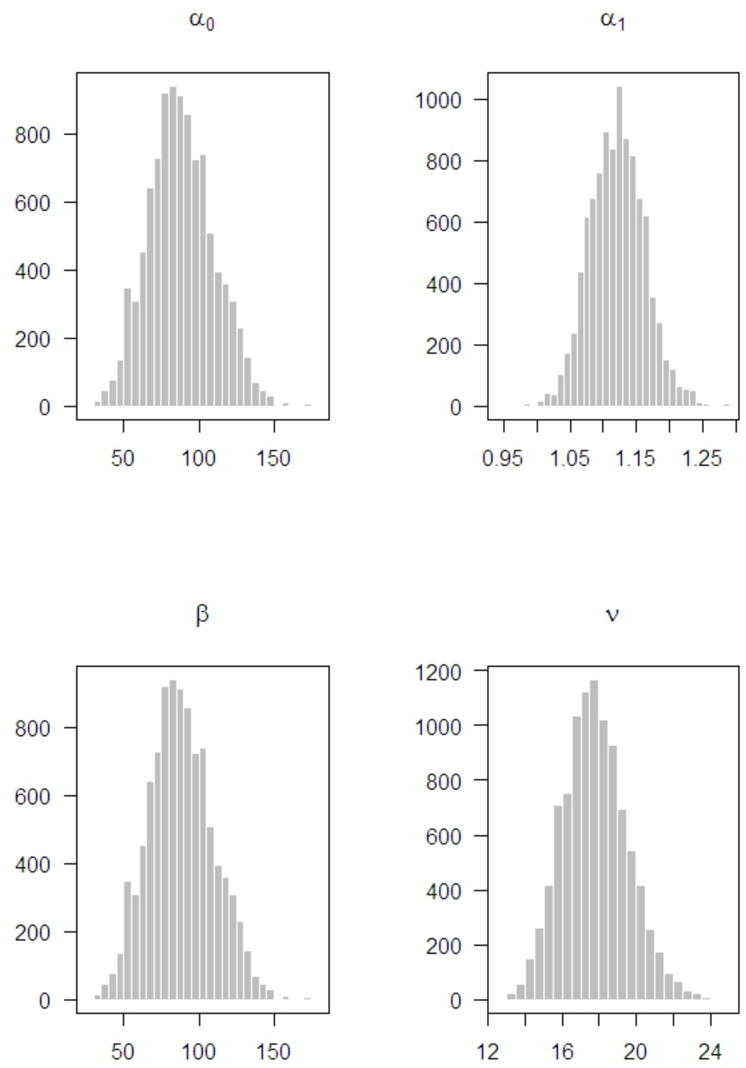
Nakon izvršavanja MCMC algoritma sledeći korak je formiranje uzorka. Uzorak se formira pomoću ugradjene funkcije u R-u *formSmpl*. Uzorak se formira tako što se prvih 5000 iteracija iz celokupnog MCMC output-a odbaci i spoje se dva lanca. Na taj način dobija se konačan uzorak dužine 10000 elemenata.
Nakon izvršavanja funkcije *formSmpl* dobija se uzorak koji se sastoji samo iz jednog lanca čija je dužina 10000.

Posteriorna statistika dobija se primenom ugrađene funkcije *summary* na dobijeni uzorak. Rezultati posteriorne statistike dati su u Tabeli 7.10.

	Očekivaje	Standardna devijacija	Standardna devijacija vremenske serije
α_0	88.212269	21.79350	0.486772
α_1	1.121066	0.04206	0.001686
β	0.008286	0.01220	0.001048
ν	17.772794	1.76967	0.088733

Tabela 7.10: Posteriorna statistika berzanskog indeksa BELEX 15

Marginalne raspodele pojedinačnih parametara dobijaju se tako što se prvo uzorak transformiše u matrični oblik a zatim se iskoristi komanda u R-u *hist* koja iscrtava histogram za svaki od parametara.



Slika 7.12: Marginalne posteriorne raspodele berzanskog indeksa BELEX 15

Slika 7.12 predstavljene su posteriorne marginalne raspodele za parametre modela. Priorne raspodele parametara α_0 , α_1 i β su bile normalne raspodele, dok je priorna raspodela parametra ν bila studentova-t raspodela. Nakon uzorkovanja i obrade posteriorne statistike dobijene su marginalne posteriorne raspodele koje su prikazane histogramima na slici 7.12. Posmatrajući dobijene posteriorne marginalne raspodele parametara, može se zaključiti da se priorne i posteriorne raspodele svih parametara modela poklapaju. Dakle posteriorne raspodele za parametre α_0 , α_1 i β približno konvergiraju normalnoj raspodeli, dok posteriorna raspodela parametra ν približno konvergira Studentovoj-t raspodeli.

Zaključak

U modernoj ekonomsoj literaturi gotovo je nemoguće govoriti o bilo kakvom vidu poslovanja a da se u obzir ne uzmu rizici i posledice koje oni mogu doneti. Jedan od najpoznatjih oblika rizika je tržišni rizik. U stručnoj terminologiji koristi se reč volatilnost za za direktno opisivanje rizika promene vrednosti akcije. Sa matematičkog gledišta, volatilnost predstavlja uslovnu standardnu devijaciju a analitički modeli koji se koriste da bi je prikazali su GARCH modeli. Ovi modeli se široko primenjuju u analizi podataka vremenskih serija u kojima je prisutna heteroskedastičnost.

GARCH modeli su široko rasprostranjeni i predstavljaju neophodan alat u matematičkom modeliranju rizika. Do nedavno parametri ovih modela su u velikoj meri bili ocenjivani metodom maksimalne verodostojnosti. Međutim u modernom dobu sa tehnološkim razvojem sve više se prevazilaze klasične metode i prelazi se na Bayes-ovski pristup ocene parametara. Tema ovog master rada je Bayes-ovsko ocenjivanje parametara GARCH modela i njegovih modifikacija.

U uvodnom delu rada definisani su osnovni pojmovi iz verovatnoće i stohastičke analize koji su neophodni za razumevanje problematike kojom se bavi rad. Zatim je izložen koncept Bayes-ovske statistike i detaljno objašnjen pristup Bayes-ovog zaključivanja. Neophodan alat za izvođenje Bayes-ovog zaključivanja su MCMC algoritmi, koji se koriste za generisanje uzorka. MCMC metode predstavljaju klasu algoritama koji se koriste za generisanje uzoraka slučajnih promenljivih sa željenom raspodelom. Ovi algoritmi se grubo mogu podeliti na dve grupe. To su Gibbs-ovi algoritmi i Metropolis-Hastings algoritmi. Oba algoritma su prikazana i objašnjena u radu. Centralni deo master rada posvećen je Bayes-ovskoj oceni parametara GARCH modela kao i njegovim modifikacijama. Prvo je ocenjen GARCH(1,1) model sa normalnom raspodelom. Zatim je ovaj jednostavni model nadograđen kako bi se objasnila asimetrična kretanja između uslovne varijanse i osnovnog procesa. Ocenjeni su parametri modifikovanog GJR(1,1) modela sa normalnim rezidualima. Na kraju je uveden linearni regresijski GJR(1,1) model sa rezidualima koji imaju studentovu-t raspodelu i pomoću Bayes-ovog pristupa ocenjeni su njegovi parametri. Ovaj model sa modifikacijom raspodele uvodi se iz razloga što je jedan od ciljeva modela za upravljanje finansijskim rizikom merenje i procena ozbiljnijih gubitaka, tj. događaja koji se pojavljuju u repovima raspodele a studentova raspodela za razliku od normalne uključuje teške repove u modeliranje.

Osnovni cilj istraživanja je upoređivanje ocene parametara metodom maksimalne verodostojnosti i Bayes-ovim pristupom. Istraživanje je sprovedeno na stvarnim podacima uz pomoć softverskog paketa RStudio. U istraživanju su korišćene dve vremenske serije; prva vremenska serija sa podacima o kretanjima cena američkog berzanskog indeksa S&P 500, a druga sa podacima o kretanjima cena beogradskog berzanskog indeksa BELEX 15. Za obe serije urađena je kompletna statistička analiza, deskriptivna statistika, ocena parametara metodom masksimalne verodostojnosti, predikcije i ocena parametra pomoću Bayes-ovog pristupa, prilikom čega je korišćen linearni GJR(1,1) model sa rezidualima koji imaju studentovu-t raspodelu. Ovaj model je izabran iz razloga što najbolje modelira kretanja berzanskih indeksa.

Osnovni rezultat istraživanja je zaključak da Bayes-ova ocena parametara GARCH modela ima mnoge prednosti u odnosu na klasičan pristup ocenjivanja parametara. Prvo, računske metode zasnovane na MCMC proceduri izbegavaju problem nalaženja lokalnih maksimuma. Drugo, ispitivanje zajedničke posteriorne raspodele daje potpunu sliku parametara što se ne može postići klasičnim pristupom. Na osnovu sprovedenog istraživanja zaključeno je da Bayes-ov pristup dovodi do brzog, potpuno automatizovanog i efikasnog postupka ocene parametara. Svi ovi razlozi motivišu upotrebu Bayes-ovog pristupa prilikom ocene parametara GARCH modela.

Literatura

[1] Ardia D., *Financial Risk Managment with Bayesian Estimation of GARCH Models*, Springer, 2008.

[2] Bollerslev T., *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, 1986.

[3] Engle R.F., *Risk and Volatility: Econometric Models and Financial Practice*, The American Economic Review, 2004.

[4] Rajter-Ćirić D., *Verovatnoća*, Prirodno-matematički fakultet, UNS, 2009.

[5] Nešić A., *MCMC metoda u Bayes-ovskoj statistici*, Master rad, Beograd: Elektrotehnički fakultet u Beogradu, 2010.

[6] Bobar B., *Bejzova statistika i njena primena u aktuarskom kredibilitetu*, Master rad, Novi Sad: Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, 2016.

[7] Hastings W.K., *Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and their Applications*, Biometrika, 1970.

[8] Gelman A., Rubin D.B., *Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences*, Statistical Science, 1992.

[9] Roberts G.O., Smith A.F.M., *Simple Conditions for Convergence of Gibbs Sampler and Metropolis-Hastings Algorithm*, Stochastic Processes and their Applications, 1994.

[10] Nakatsuma T., *A Markov-Chain Sampling Algorithm for GARCH Models*, Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics Algorithm nr.1, 1998.

[11] Nakatsuma T., *Bayesian Analysis of ARMA-GARCH Models: A Markov Chain Sampling Approach*, Journal of Econometrics, 2000.

[12] Chib S., Greenberg E., *Bayes Inference in Regression Models with ARMA(p,q) Errors*, Journal of Econometrics, 1994.

[13] Nelson D.B., *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*, Econometrica, 1991.

[14] Glosten L.R., Jaganathan R., Runkle D.E., *On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*, Journal of Finance, 1993.

[15] Black F., *The Pricing of Commodity Contracts*, Journal of Financial Economics, 1976.

[16] Geweke J.F., *Bayesian Treatment of the Independent Student-t Linear Model*, Journal of Applied Econometrics, 1993.

[17] Deschamps P.J., *A Flexible Prior Distribution for Markov Switching Autoregressions with Student-t Errors*, Journal of Econometrics, 2006.

[18] Lozanov-Crvenković Z., *Statistika*, Prirodno-matematički fakultet, UNS

[19] Tsay R.S., *Analysis of Financial Time Series*, second edition, Wiley-Interscience, 2005.

[20] Koop G., *Bayesian Econometrics*, Wiley-Interscience, London, UK, first edition, 2003.

[21] Metodologija za izračunavanje indeksa BELEX 15, Beogradska berza, avgust 2012.

[22] Kapital Magazin. Dostupno preko:
https://www.kapitalmagazin.rs/berzanski-indeksi/

[23] https://journal.r-project.org/archive/2010-2/

Biografija

Bojana Soro rođena je 23. novembra 1992. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu “Jožef Atila ”završila je u Novom Sadu 2007. godine kao nosilac “Vukove diplome ”. Iste godine upisala je gimnaziju “Jovan Jovanović Zmaj ”, društveno-jezički smer u Novom Sadu. Gimnaziju završava 2011. godine sa skroz odličnim uspehom. Nakon završetka gimnazije iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer Primenjena matematika, modul Matematika finansija. Osnovne studije uspešno završava u septembru 2015. godine. Iste godine upisuje se na master akademske studije Primenjene matematike, modul Matematika finansija, na istom fakultetu. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija u novembru 2017. godine sa prosečnom ocenom 8,10. Za vreme studija učestvovala je na konferenciji “Spring School on Optimization and Data Science ”. Takođe, pohađala je i uspešno završila kurs “Uvod u R ”, na kome je savladala tehnike statističkog modeliranja u programskom paketu R.

Novi Sad, jul 2018. Bojana Soro

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: *monografska dokumentacija*
TD
Tip zapisa: *tekstualni štampani materijal*
TZ
Vrsta rada: *master rad*
VR
Autor: Bojana Soro
AU
Mentor: *prof. dr Zagorka Lozanov-Crvenković*
MN
Naslov rada: *Bayes-ovsko ocenjivanje parametara GARCH modela*
NR
Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP
Jezik izvoda: *s/e*
JI
Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*
ZP
Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP
Godina: *2018.*
GO
Izdavač: *autorski reprint*
IZ
Mesto i adresa: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
MA
Fizički opis rada: *7 poglavlja, 77 strana, 23 lit. citata, 13 slika, 11 tabela*
FO
Naučna oblast: *matematika*
NO
Naučna disciplina: *primenjena matematika*
ND

Ključne reči: *Bayes, ocena parametara, GARCH, GJR, MCMC, vremenske serije*
PO
UDK
Čuva se: *u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, u Novom Sadu*
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: *Master rad se bavi Bayes-ovskim ocenjivanjem parametara GARCH modela. Gotovo je nemoguće govoriti o bilo kakvom vidu poslovanja a da se u obzir ne uzmu rizici i posledice koje oni donose. Stoga je od izuzetne važnosti modelirati rizik i predvideti njegova kretanja. Matematički modeli koji se koriste za opisivanje rizika su GARCH modeli. Da bi se mogao odrediti model potrebno je oceniti njegove parametre. U ovom master radu korišćen je Bayes-ov pristup ocene parametara. Osnovni cilj istraživanja je modeliranje rizika pomoću GARCH modela za dve vremenske serije berzanskih indeksa: S&P 500 i BELEX 15. Istraživanje je sprovedeno na stvarnim podacima uz pomoć softverskog paketa RStudio. Osnovni rezultat istraživanja je zaključak da Bayes-ova ocena parametara GARCH modela ima mnoge prednosti u odnosu na klasičan pristup ocenjivanja parametara. Brojne prednosti Bayes-ovg pristupa motivišu upotrebu Bayes-ovskog ocenjivanja parametara GARCH modela.*
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *15.05.2018.*
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: *dr Ljiljana Gajić, redovni profesor*
Član: *dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor*
Član: *dr Ivana Štajner-Papuga, redovni profesor*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: *monograph type*
DT
Type of record: *printed text*
TR
Contents code: *Master thesis*
CC
Author: *Bojana Soro*
AU
Mentor: Prof. Zagorka Lozanov-Crvenković, PhD
MN
Title: *Bayesian estimation of GARCH models parameters*
XI
Language of text: *Serbian (latin)*
LT
Language of abstract: *s/e*
LA
Country of publication: *Republic of Serbia*
CP
Locality of publication: *Vojvodina*
LP
Publication year: *2018.*
PY
Publisher: *author's reprint*
PU
Publ. place: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
PP
Physical description: *7 sections, 77 pages, 23 references, 13 figures, 11 table*
PD
Scientific field: *mathematics*
SF
Scientific discipline: *applied mathematics*
SD

Key words: *Bayes, parameter estimation, GARCH, GJR, MCMC, time series*
UC
Holding data: *Department of Mathematics and Informatics' Library, Faculty of Sciences, Novi Sad*
HD
Note:
N

Abstract: *Master thesis concerning with Bayesian estimation of GARCH model parameters. It is almost impossible to talk about any kind of business without taking into account the risks consequences that they have brought. Therefore it is of rarely importance to model risk and to predict its course. The mathematical models used to describe risk are GARCH models. In order to determine the model it is necessary to evaluate its parameters. In this master thesis is used Bayesian approach to parameter estimation. The main goal of the research is risk modeling with GARCH model for two time series of stock exchange indexes: S&P 500 and BELEX 15. The research was passed on real data with help of the software package RStudio. The basic result of the research is the conclusion that Bayesian estimation parameters of the GARCH model has many advantages over the classic approach to parameter estimation. The numerous advantages of the Bayesian approach are motivated by the use of the Bayesian estimation of the GARCH model parameters.*
AB

Accepted by the Scientific Board on: *15.05.2018.*
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
DB
President: *Prof. Ljiljana Gajić, PhD*
Member: *Prof. Zagorka Lozanov-Crvenković, PhD*
Member: *Prof. Ivana Štajner-Papuga, PhD*