Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Bojana Popović

Furijeova transformacija i neke primene u finansijama

Master rad

Mentor:

Prof. dr. Nenad Teofanov

2012, Novi Sad

Sadržaj

1 Uvod

Metode zasnovane na Furijeovoj transformaciji imaju raznoliku primenu u svim oblastima nauke i inžinjerstva. Furijeova transformacija se koristi u obradi signala, na primer prilikom kompresije slike ili digitalnog audio-zapisa. Sem toga, može pomoći u rešavanju diferencijalnih jednačina ili u praćenju dinamike tržišta i berze.

Kako je primena Furijeove transformacije koju želimo da izložimo postavljena u okvirima uopštenih funkcija (distribucija), u drugoj glavi izlaže se teorija uopštenih funkcija. Daju se osnovni pojmovi i definicije prostora test funkcija, prostora distribucija, prostora temperiranih distribucija. Kao što ćemo videti, prostori temperiranih distribucija predstavljaju prirodni okvir za delovanje Furijeove transformacije.

Treća glava je posvećena operaciji konvolucije, kao veoma bitnoj operaciji, sa velikom primenom u ovom radu. Izlaže se teorija: konvolucija funkcija, konvolucija distribucija i konvolucija temperiranih distribucija.

Četvrta glava je posvećena teoriji Furijeovih transformacija. U skladu sa istorijskim razvojem problema prvo je izložena teorija Furijeovih redova koja se primenjuje na periodične funkcije, a zatim teorija Furijeove transformacije namenjena analizi neperiodičnih funkcija.

Cilj ovog rada je da se prikaže primena Furijeove transformacije u finansijama, konkretno u računanju cena opcija. Zato je u petoj glavi izložena osnovna teorija opcija, i osnovna teorija vrednovanja takvih hartija od vrednosti.

Pošto smo postavili neophodne okvire, u šestoj glavi dajemo konkretnu primenu Furijeovih transformacija u računanju cena Evropskih opcija.

Sedma glava je dodatak u kojem smo naveli osnovne pojmove teorije verovatnoće i stohastičkih procesa, koji nisu tema ovog rada, ali su neophodni za njegovo razumevanje.

2 Uopštene funkcije (distribucije)

Uopštene funkcije ili distribucije predstavljaju uopštenje klasičnog koncepta funkcije. Da bismo ih definisali prvo moramo uvesti pojam prostora test funkcija (funkcija na koje distribucije deluju). Potom ćemo se posvetiti distribucijama i temperiranim distribucijama. Za izradu ove glave korišćene su knjige [1], [2], [9], [10], [11] i [15] iz spiska literature. Pretpostavlja se da je čitalac upoznat sa osnovnim pojmovima matematičke analize (pogledati [9] i [15] iz spiska literature).

Kada rešavamo konkretne fizičke probleme i za to koristimo funkcije definisane na klasičan način vidimo da one imaju mnoge nedostatke. Počnimo od njihove definicije. Funkcije su definisane kao preslikavanje jednog skupa u drugi, tako da za svaku tačku prvog skupa x imamo njenu sliku $y = f(x)$. Recimo da posmatramo funkciju $f(x)$ koja pretstavlja temperaturu u tački x u prostoriji. Uviđamo da je fizički nemoguće izmeriti temperaturu u jednoj tački; kako je vrh termometra određene veličine, u stvari se meri prosek temperatura tačaka na vrhu termometra. Tačnije, ono što se izmeri izgleda ovako:

$$\int f(x)\phi(x)dx,$$

gde je $\phi(x)$ težinska funkcija koja zavisi od osobina termometra. Kao što ćemo videti upravo na taj način definisane su uopštene funkcije.

Dalje, za opisivanje mnogih pojava javlja se potreba za funkcijom čiji bi integral bio 'koncentrisan' u jednoj tački, a takvu funkciju je nemoguće definisati na klasičan način, dok teorija uopštenih funkcija daje veoma elegantno rešenje zvano Dirakova delta distribucija.

Diferencijalne jednačine daju rešenje mnogih problema pri konkretnim primenama. Tu nastaje problem kada rešenje koje dobijemo ne predstavlja diferencijabilnu funkciju, opet u teoriji uopštenih funkcija takav problem neće postojati.

Detalji svih nedostataka klasičnih funkcija izloženi su u [10] i [11].

2.1 Prostor test funkcija

Sa $\mathbb{R}^n$ obeležavaćemo n-dimenzionalni Euklidov prostor čiji su elementi uređene n-torke realnih brojeva $(x_1, \ldots, x_n)$. $\mathbb{R}^n$ je snabdeven uobičajenom topologijom; Ω će označavati otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Posmatraćemo funkcije čiji je domen podskup od $\mathbb{R}^n$ a kodomen $\mathbb{C}$.

Sa $\mathbb{N}_0^n$ ćemo označiti podskup od $\mathbb{R}^n$ čiji elementi imaju koordinate cele nenegativne brojeve. Za $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$ stavljamo $|k| = k_1 + \ldots + k_n$. $\mathbb{N}_0^1$ kraće zapisujemo $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Definicija 2.1. Nosač neprekidne funkcije $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ je adherentan skup za skup $\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$. Što označavamo sa supp$\varphi$.

Drugim rečima nosač neprekidne funkcije je zatvaranje skupa tačaka u kojima je funkcija različita od nule.

Definicija 2.2. $C^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$ ili $m = \infty$, je skup funkcija koje su definisane nad Ω i imaju sve izvode neprekidne do reda m. $C_0^m(\Omega)$ je podskup od $C^m(\Omega)$ onih funkcija čiji su nosači kompaktni u Ω. Funkcije iz $C^\infty(\Omega)$ nazivaju se glatke funkcije.

Sa običnim sabiranjem i množenjem kompleksnih brojeva $C^m(\Omega)$ i $C_0^m(\Omega)$ su vektorski prostori nad poljem $\mathbb{C}$.

Primer 2.1. *Posmatrajmo funkciju*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1 \\ \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| < 1 \end{cases}, (|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2)\,.$$

Ona je elemenat iz $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ i njen nosač je zatvorena lopta sa centrom u 0 *poluprečnika* 1.

Sada definišemo funkciju $w(x) = c^{-1} f(x), x \in \mathbb{R}^n$, gde je $c = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$.
Funkcija w_ϵ definisana sa:

$$w_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} w(x\epsilon^{-1}), \epsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

ima sledeće osobine:

$$\int_{\mathbb{R}^n} w_\epsilon(x)dx = 1, \quad supp\ w_\epsilon(x) = \{x; |x| \leq \epsilon\} \quad i \quad w_\epsilon(x) \geq 0.$$

Navedene funkcije će nam biti korisne u daljem radu.

Teorema 2.1. *Ako je K kompaktan podskup od Ω, postoji $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ sa osobinom $0 \leq \phi \leq 1$ i $\phi(x) = 1$ u nekoj okolini skupa K.*

Dokaz. Konstruisaćemo funkciju ϕ i njenu okolinu K u kojoj je $\phi(x) = 1$.

Skupovi K i $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ su disjunktni. Kako u $\mathbb{R}^n$ važi da je rastojanje zatvorenog i kompaktnog skupa koji su disjunktni različito od nule, imamo da je $d(K, \mathbb{R}^n \backslash \Omega) = \delta > 0$. Odredimo ϵ i ϵ' tako da važi $0 < \epsilon' < \epsilon < \epsilon + \epsilon' < \delta$.

Neka je K_ϵ okolina od K, $K_\epsilon \equiv \{x \in \Omega; d(x, K) < \epsilon\}$. Definišimo funkciju:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_\epsilon \\ 0, & x \notin K_\epsilon. \end{cases}$$

Sada uvodimo funkciju ϕ:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= (u * w_{\epsilon'})(x) := (\epsilon')^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} u(t)w(\frac{x-t}{\epsilon'})dt = \\ &= \int_{|t|\leq 1} u(x-\epsilon' t)w(t)dt, \quad x\in\mathbb{R}^n.\end{aligned} \tag{2}$$

Kako u ima kompaktan nosač, a $w_\epsilon \in C_0^\infty$ sledi da i $\phi \in C_0^\infty$. Pokazaćemo da $\text{supp}\phi \subset \overline{K}_{\epsilon+\epsilon'}$.

Pretpostavimo da $x \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{K}_{\epsilon+\epsilon'}$, tada za $|t| \leq 1$, $x - \epsilon' t \in \Omega\backslash K_\epsilon$ pa je poslednji intagral u (2) nula, to jest imamo da je $\phi(x) = 0$, odnosno $\text{supp}\phi \subset \overline{K}_{\epsilon+\epsilon'}$.

Pretpostavimo da je $x \in K_{\epsilon+\epsilon'}$ i $|t| \leq 1$, tada $x - \epsilon' t \in K_\epsilon$ pa imamo da je

$$\phi(x) = \int_{|t|\leq 1} w(t)dt = 1.$$

$\square$

2.1.1 Topologija prostora $\mathcal{D}(K)$

Označimo sa $C_0^m(K)$, $m \in \mathbb{N}_0$ ili $m = \infty$, gde je K kompaktan podskup od Ω, potprostor od $C_0^m(\Omega)$ čiji elementi imaju nosače sadržane u K.

Definicija 2.3. Vektorski prostor je lokalno konveksan prostor ako ima bazu okolina nule sastavljenu od konveksnih skupova.

Potreban i dovoljan uslov da vektorski prostor bude lokalno konveksan prostor jeste da je njegova topologija zadata familijom seminormi.

U prostoru $C_0^m(K)$, gde je K kompaktan podskup od Ω definišemo niz normi $\{p_{K,m};\, m \in \mathbb{N}_0\}$:

$$p_{K,m}(\varphi) = \sum_{|j|\leq m} \sup_{x\in K} \left|\varphi^{(j)}(x)\right|. \tag{3}$$

Sa ovim normama $C_0^m(K)$ je lokalno konveksan prostor. Jednu bazu okolina nule čine skupovi:

$$V_{K,m,v} \equiv \{\phi \in C_0^m(K);\, p_{K,m}(\phi) < \frac{1}{v}\},\ v \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

Definicija 2.4. Vektorski prostor $C_0^m(K)$ snabdeven navedenom topologijom (lokalno konveksan prostor) je $\mathcal{D}(K)$.

U ovoj topologiji niz (ϕ_k) iz $\mathcal{D}(K)$ konvergira ka $\phi \in \mathcal{D}(K)$ ako i samo ako $(\phi_k^{(\alpha)})$ uniformno konvergira nad K ka $\phi^{(\alpha)}$ za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Teorema 2.2. *Ako je $f \in C^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$ ili $m = \infty$, tada za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$ postoji $f_K \in C_0^m(\Omega)$ tako da je $f(x) = f_K(x)$ u nekoj okolini od K koja leži u Ω.*

Dokaz. Neka je za dato K, ϕ funkcija iz teoreme 2.1. Tada $f_K = f\phi$ ima traženu osobinu. □

2.1.2 Topologija prostora $\mathcal{D}(\Omega)$

Za dva kompaktna skupa K_1 i K_2 znamo da ako je $K_1 \subset K_2$ tada sledi da $C_0^\infty(K_1) \subset C_0^\infty(K_2)$; i da se topologija u $\mathcal{D}(K_1)$ poklapa sa topologijom koju $\mathcal{D}(K_2)$ indukuje na $\mathcal{D}(K_1)$. Za otvoren neprazan skup $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ može se konstruisati niz (K_v) kompaktnih skupova za koje važi:

$$K_v \subset K_{v+1} \qquad \text{i} \qquad \bigcup_{v=1}^{\infty} K_v = \Omega.$$

Tada niz lokalno konveksnih prostora $(\mathcal{D}(K_v))$ u odnosu na indentička preslikavanja $i_s^m : \mathcal{D}(K_m) \to \mathcal{D}(K_s)$, $m \leq s$ obrazuje striktni induktivni spektar. Uvodimo u $C_0^\infty(\Omega)$ topologiju striktne induktivne granice u odnosu na navedeni induktivni spektar (to je najfinija lokalno konveksna topologija u $C_0^\infty(\Omega)$ za koju su indentička preslikavanja $i^m : \mathcal{D}(K_m) \to C_0^\infty(\Omega)$ neprekidna, pogledati [9] iz spiska litarature).

Definicija 2.5. Vektorski prostor $C_0^\infty(\Omega)$ snabdeven navedenom topologijom striktne indutkivne granice je prostor $\mathcal{D}(\Omega)$. Nazivamo ga prostor osnovnih ili test funkcija.

Ako iz svakog prostora $\mathcal{D}(K_v)$ izaberemo zaokruženu konveksnu okolinu nule $U_v \subset \mathcal{B}_v$, gde je $\mathcal{B}_v$ baza okolina nule u $\mathcal{D}(K_v)$, $v \in \mathbb{N}$, konveksna obvojnica U skupa $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_v$

$$U = \left\{ \phi \in C_0^\infty(\Omega);\ \phi = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi_j,\ \varphi_j \in U_{v_j},\ \beta_j \geq 0,\ \beta_1 + \ldots + \beta_n = 1 \right\} \quad (5)$$

je konveksna zaokružena okolina nule u topologiji prostora $\mathcal{D}(\Omega)$. Menjajući U_v iz baze $\mathcal{B}_v$ prostora $\mathcal{D}(K_v)$ i konačne skupove $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ dobijamo skupove U oblika (5) koji predstavljaju jednu bazu okolina nule u $\mathcal{D}(\Omega)$.

Teorema 2.3. *1. Linearno preslikavanje T prostora $\mathcal{D}(\Omega)$ u lokalno konveksni prostor E je neprekidno ako i samo ako je neprekidno nad $\mathcal{D}(K)$ za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$.*

2. Skup $A \subset \mathcal{D}(\Omega)$ je ograničen ako i samo ako postoji kompaktan skup $K \subset \Omega$ tako da $A \subset \mathcal{D}(K)$ i da je A ograničen u $\mathcal{D}(K)$.

3. Niz $(\phi_v) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ konvergira u $\mathcal{D}(\Omega)$ ako i samo ako postoji kompaktan skup K tako da je $(\phi_v) \subset \mathcal{D}(K)$ i da konvergira u $\mathcal{D}(K)$.

4. $\mathcal{D}(\Omega)$ je nizovno kompletan.

Dokaz. 1. Možemo pretpostaviti da K pripada nizu (K_v) koji definiše induktivnu granicu. Jer za dati niz (K'_v) postoji član K'_{v0} takav da je $K \subset K'_{v0}$. Zamenjujemo niz (K'_v) sa nizom $K_p = K, K'_{v0}, K'_{v0+1}, \ldots$. Induktivna granica se ne menja jer je novi niz sačuvao osobine $K_p \subset K_{p+1}$ i $\bigcup_p K_p = \Omega$.

Koristićemo sledeću činjenicu koju usvajamo bez dokaza (videti [9] iz spiska literature).

Neka je A podskup vektorskog prostora L nad poljem K; $\{(L_\alpha, \tau_\alpha), \alpha \in A\}$ familija lokalno konveksnih prostora nad istim poljem K i $\{g_\alpha; \alpha \in A\}$ familija linearnih preslkavanja iz $L_\alpha, \alpha \in A$ u vektorski prostor L, tako da je L linearno proširenje od $\bigcup_{\alpha \in A} g_\alpha(L_\alpha)$ (skup svih linearnih kombinacija iz te unije) važi:
Linearno preslikavanje f lokalno konveksnog prostora L u lokalno konveksni prostor E je neprekidno ako i samo ako za svako α, $f \circ g_\alpha : L_\alpha \to E$ neprekidno.

Primenom ove činjenice važi tvrđenje.

2. Pretpostavimo da je A ograničeno u $\mathcal{D}(\Omega)$. Pokažimo da su nosači elemenata iz A sadržani u nekom kompaktnom skupu. Pretpostavimo suprotno, tada postoji niz funkcija $(\phi_v) \subset A$ i niz (x_v) takav da $x_v \in K_v \backslash K_{v-1}$, $\phi_v(x_v) \neq 0$, $v \in \mathbb{N}$. Za kompaktan skup $K \subset \Omega$ postoji v_0 takvo da $K \subset K_{v_0}$, pa samo konačan broj $x_v \in K$. Nad $\mathcal{D}(K)$, za proizvoljan kompaktan skup K se izrazom:

$$p(\phi) := \sum_{v=1}^{\infty} v \frac{|\phi(x_v)|}{|\phi_v(x_v)|}, \quad \phi \in \mathcal{D}(K),$$

definiše neprekidna seminorma. Red na desnoj strani se svodi na konačnu sumu jer samo konačan broj tačaka x_v leži u K. Neprekidnost sledi iz činjenice da $|\phi(x_v)| \leq p_{K,0}(\phi)$.

Iz neprekidnosti seminorme p nad svakim $\mathcal{D}(K_v)$ i oblika okolina nule u $\mathcal{D}(\Omega)$ (5), sledi da je ona neprekidna nad $\mathcal{D}(\Omega)$ i $\{p(\phi); \phi \in A\}$ je ograničen u $\mathbb{R}$ nad A. Što je kondtradikcija sa $p(\phi_v) \geq v$.

Prema tome, postoji kompaktan skup $K \subset \Omega$ tako da je za svako $\phi \in A$, supp$\phi \subset K$.

Pokažimo da je A ograničen u $\mathcal{D}(K)$ (za svako $m \in \mathbb{N}_0$ postoji $C_m > 0$ tako da za $\phi \in A$ važi $p_{K,m}(\phi) \leq C_m$). Pretpostavimo suprotno, postoji niz (ϕ_v) u A i $m_0 \in \mathbb{N}_0$ tako da $p_{K,m_0}(\phi_v) > v$.

Za niz (K_v) formiran kao niz (K_p) u dokazu tvrđenja 1. $K = K_1, K_2, \ldots$, neka je okolina nule U u $\mathcal{D}(\Omega)$ oblika (5).

Za svako $v \in \mathbb{N}$ i svako $\phi \in A$ je: $p_{K_v,m_0}(\phi) = p_{K,m_0}(\phi)$, pa je: $p_{K_v,m_0}(\phi) > v$. Sada nije moguće naći $\lambda \neq 0$ takvo da $A \subset \lambda U$. Time smo dobili kontradikciju, pa je A ograničen u $\mathcal{D}(K)$.

Obratno, ako je $A \subset \mathcal{D}(K)$ i ako je ograničen u $\mathcal{D}(K)$, tada za $\phi \in A$ važi $p_{K_v,m}(\phi) = p_{K,m}(\phi)$ za svako $m \in \mathbb{N}_0$ i svako $v > v_0$ $(K_{v_0} \supset K)$, pa važi tvrđenje.

3. Pretpostavimo da je (ϕ_v) iz $\mathcal{D}(K)$ i da konvergira u $\mathcal{D}(K)$. Polazeći od baze okolina nule oblika (5) vidimo da konvergira i u $\mathcal{D}(\Omega)$.

   Obrnuto. Podsetimo se da je u vektorsko topološkom prtostoru dovoljno dokazati tvrđenje za niz koji konvergira ka nuli.

   Ako je niz (ϕ_v) iz $\mathcal{D}(\Omega)$ i konvergira u $\mathcal{D}(\Omega)$ ka nuli, on je i ograničen u $\mathcal{D}(\Omega)$. Na osnovu tvrđenja pod 2. postoji kompaktan skup K takav da je $(\phi_v) \subset \mathcal{D}(K)$. Neka je $m_0 \in \mathbb{N}_0$ i neka je V okolina nule u $\mathcal{D}(\Omega)$ data sa (5). Za svako $v \geq v_0$, $\phi_v \in V$, pa je $p_{K,m_0}(\phi_v) < \epsilon$, $v \geq v_0$. Odnosno ϕ_v konvergira nuli u $\mathcal{D}(K)$.

4. Ako je niz Košijev u $\mathcal{D}(\Omega)$, on je i ograničen u $\mathcal{D}(\Omega)$. Na osnovu tvrđenja pod 2. postoji kompaktan skup K takav da je $(\phi_v) \subset \mathcal{D}(K)$. Koristeći okoline oblika (5) i koristeći (4) pokazuje se da je niz (ϕ_v) Košijev u $\mathcal{D}(K)$. Kako je taj prostor kompletan, sledi da (ϕ_v) konvergira u $\mathcal{D}(K)$, a na osnovu 3. i u $\mathcal{D}(\Omega)$.

□

Teorema 2.4. *Zatvoren i ograničen skup u $\mathcal{D}(\Omega)$ je kompaktan.*

Dokaz ovog tvrđenja može se pronaći u [9] iz spiska literature.

2.1.3 Konvergencija na $\mathcal{D}(\Omega)$

Definicija 2.6. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega), j \in \mathbb{N}$. Kažemo da niz test funkcija $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ konvergira ka nuli ako i samo ako važi:

1. Postoji kompaktan podskup K od Ω tako da $\operatorname{supp} \varphi_j(x) \subset K$ za svako $j \in \mathbb{N}$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \qquad \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_k(x)| \to 0$ kada $k \to \infty$.

Sa $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ se označava multi indeks $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$, $j = 1, \ldots, n$.

Zahtevamo dakle da je konvergencija niza $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ i nizova svih njegovih izvoda uniformna. Prema tome, ako je $\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)$ u $\mathcal{D}(\Omega)$ onda je $\varphi^{(\alpha)}(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k^{(\alpha)}(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\forall x \in K$.

2.2 Prostor distribucija

Definicija 2.7. Neprekidna linearna funkcionela nad $\mathcal{D}(\Omega)$ naziva se distribucija ili uopštena funkcija. Prostor svih distribucija nad $\mathcal{D}(\Omega)$ označavamo sa $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Linearnost distribucije $f \in \mathcal{D}'$ znači:

$$\forall \varphi, \phi \in \mathcal{D} \quad i \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \langle f, \alpha\varphi + \beta\phi \rangle = \alpha\langle f, \varphi \rangle + \beta \langle f, \phi \rangle,$$

a neprekidnost da za svaki niz test funkcija $\{\varphi_k\}$ koji konvegira ka φ u $\mathcal{D}(\Omega)$ niz brojeva $\langle f, \varphi_k \rangle$ konvergira ka $\langle f, \varphi \rangle$.

Kako je $f \in \mathcal{D}'$ linearna, definicija neprekidnosti se može pojednostaviti:

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \Rightarrow \langle f, \varphi_k \rangle \to 0 \, , k \to \infty \, .$$

Distribuciju ćemo označavati sa f, a broj koji ona dodeljuje nekoj test funkciji sa $\langle f, \varphi \rangle$. $f : \varphi \to \langle f, \varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

U odnosu na operacije sabiranja i množenja kompleksnim brojem:

$$\langle f + g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle \, ,$$

$$\langle cf, \varphi \rangle = c \langle f, \varphi \rangle \, ,$$

skup distribucija čini vektorski prostor $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Teorema 2.5. *Linearna funkcionela $f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ je iz $\mathcal{D}'(\Omega)$ ako i samo ako za svaki niz $(\phi_v) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ koji konvergira ka nuli u $\mathcal{D}(\Omega)$ sledi da $\langle f, \phi_v \rangle$ konvergira ka nuli u skupu kompleksnih brojeva.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 2.3 pod 1. sledi da je $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ako i samo ako je $f \in \mathcal{D}'(K)$ za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$. Pošto su prostori $\mathcal{D}(K)$ prostori sa prebrojivom bazom okolina nule, neprekidnost i nizovna neprekidnost su ekvivalentne. $\square$

Teorema 2.6. *Potreban i dovoljan uslov da je linearna funkcionela $f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ distribucija, jeste da za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$ postoje konstante $C > 0$ i $m \in \mathbb{N}_0$ tako da za svako $\phi \in \mathcal{D}(K)$ važi:*

$$|\langle f, \phi \rangle| \leq C p_{K,m}(\phi). \tag{6}$$

Dokaz. Ako niz $(\phi_v) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ konvergira ka nuli, tada iz (6) sledi da niz $\langle f, \phi_v \rangle$ konvergira ka nuli u $\mathbb{C}$, pa je uslov (6) dovoljan za neprekidnost od f.

Pretpostavimo da je f neprekidno, a da uslov (6) ne važi. Tada je moguće konstruisati niz $(\phi_v) \subset \mathcal{D}(K)$ za neki kompaktan skup K, tako da je:

$$|\langle f, \phi_j \rangle| > j p_{K,j}(\phi_j), \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Uvodimo novi niz $\psi_j = \dfrac{\phi_j}{\langle f, \phi_j \rangle}$, $j \in \mathbb{N}$. Iz (7) sledi da je

$$p_{K,j}(\psi_j) = \frac{p_{K,j}(\phi_j)}{|\langle f, \phi_j \rangle|} \leq \frac{1}{j}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Niz (ψ_j) konvergira ka nuli u $\mathcal{D}(K)$ jer za svako $m \in \mathbb{N}$ važi

$$p_{K,m}(\psi_j) \leq p_{K,j}(\psi_j) \leq \frac{1}{j}, \qquad j \geq m.$$

Sa druge strane $\langle f, \psi_j \rangle = 1$ za svako $j \in \mathbb{N}$, pa niz $(\langle f, \psi_j \rangle)$ ne može da konvergira ka nuli, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je f neprekidno nad $\mathcal{D}(\Omega)$. $\square$

Napomenimo da se teorema 2.6 često uzima za definiciju distribucije.

Definicija 2.8. Funkcija je apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$ ako je $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$, to jest integral nad $\mathbb{R}$ od $|f(x)|$ postoji i konačan je.

Definicija 2.9. Neka $f(x) : \Omega \to \mathbb{R}$. Funkcija f je lokalno integrabilna ako je

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx \qquad \text{apsolutno konvergentan za sve } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Skup svih lokalno integrabilnih funkcija nad Ω označavamo sa $L^1_{loc}(\Omega)$.

Da bi funkcija bila lokalno integrabilna integral $\int_B |f(x)|dx$ mora biti konačan na svakom ograničenom skupu $B \subset \Omega$ koji ne preseca rub skupa Ω. Iz ovoga vidimo da je svaka apsolutno integrabilna funkcija i lokalno integrabilna, ali ne i obrnuto.

Svaka lokalno integrabilna funkcija definiše distribuciju na sledeći način:

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, lokalno integrabilna funkcija i neka $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Sada definišemo

$$\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx.$$

Broj $\langle f, \varphi \rangle$ linearno i neprekidno zavisi od φ, pa f možemo posmatrati kao linearnu, neprekidnu funkcionelu na prostoru svih test funkcija, dakle $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Preciznije, svaka lokalno integrabilna funkcija definiše distribuciju. Takve distribucije se zovu *regularne distribucije*.

Ako dve neprekidne funkcije generišu istu regularnu distribuciju onda su one identične. Dakle svaka test funkcija iz $\mathcal{D}(\Omega)$ jedinstveno određuje regularnu distribuciju u $\mathcal{D}'(\Omega)$, i obratno.

Ovu osobinu možemo proširiti na funkcije koje su lokalno integrabilne, bez pretpostavke o neprekidnosti. U Lebegovom integralu možemo izmeniti vrednosti funkcije $f(x)$ na skupu mere nula, a da ne promenimo odgovarajuću regularnu distribuciju:

Teorema 2.7. *Ako su $f(x)$ i $g(x)$ lokalno integrabilne funkcije sa istim regularnim distribucijama*

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

tada se $f(x)$ i $g(x)$ razlikuju najviše na skupu mere nula.

Primer 2.2. *Funkcije $g \equiv 0$ i*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

generišu istu distribuciju. To jest:

$$\int g(x)\varphi(x)dx = 0 \qquad i \qquad \int f(x)\varphi(x)dx = 0.$$

Primer 2.3. *Neka je μ mera verovatnoće na $\mathbb{R}^n$ (videti Dodatak 7.1). Možemo je tretirati kao distribuciju, kao što je to urađeno u [10] iz spiska literature, na sledeći način:*

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \int \varphi d\mu, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Uslov $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$ *zapisujemo* $\int 1 d\mu = 1$. *To jest*

$$\textit{Ako je} \lim_{k\to\infty} \varphi_k = 1 \quad \textit{tada} \quad \lim_{k\to\infty} \langle \mu, \varphi_k \rangle = 1.$$

Napomena 2.1. *Operacije kao što su diferenciranje, integracija i neki drugi granični procesi se mogu proširiti na skup* $\mathcal{D}'(\Omega)$. *Međutim, operacije kao što su množenje i kompozicija funkcija se ne mogu preneti na distribucije u opštem slučaju.*

2.2.1 Singularne distribucije

Distribucije koje nisu regularne su singularne.

Najpoznatija singularna distribucija je Dirakova delta distribucija. Neformalno je možemo opisati kao funkciju $\delta(x)$ čiji integral je koncentrisan u tački $x = 0$. To jest $\delta(x) = 0$ za sve $x \neq 0$, ali važi da je $\int \delta(x)dx = 1$ za bilo koji interval koji sadrži tačku $x = 0$.

Formalno je definišemo kao distribuciju koja zadovoljava

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Evo nekih korisnih identiteta koji važe za Dirakovu delta distribuciju.

- Neka je $\alpha \neq 0$. Važi: $\delta(\alpha x) = \dfrac{\delta(x)}{|\alpha|}$.

Definišimo $\delta(g(x)) = \sum_i \dfrac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}$ gde su x_i realne nule fukcije $g(x)$ (pretpostavljamo $g'(x) \neq 0$). Važi:

- $\delta(\alpha g(x)) = \dfrac{1}{|\alpha|}\delta(g(x))$.

Zapisan preko integrala gornji identitet izgleda ovako:

- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x))dx = \sum\limits_i \dfrac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$.

2.2.2 Nosač distribucije

Definicija 2.10. Nosač distribucije $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je skup tačaka iz Ω koje imaju okolinu u kojoj f nije jednaka sa distribucijom 0. Nosač distribucije označavamo da $\text{supp} f$.

Dakle, nosač distribucije $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je komplement unije svih otvorenih skupova u Ω nad kojim je $f = 0$. Iz definicije možemo zaključiti da je nosač distribucije zatvoren u Ω, jer je njegov komplement otvoren skup.

2.3 Izvod distribucije

Velika prednost analize distribucija u odnosu na klasičnu analizu leži u činjenici da svaka distribucija ima izvode bilo kog reda, pri čemu je diferenciranje neprekidna operacija. Definišimo prvo izvod za diferencijabilnu i integrabilnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f'\varphi dx = -\int\limits_{\mathbb{R}} f\varphi' dx \,,$$

gde je φ test funkcija. Kako φ jednako nuli izvan nekog ograničenog skupa granice integrala neće predstavljati problem. Tačnije parcijalnom integracijom dobijamo:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f'\varphi dx = f\varphi|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{\mathbb{R}} f\varphi' dx \,,$$

a kako je $\lim_{|x|\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$, dobijamo gornju formulu.

Definicija 2.11. Neka je S distribucija, njen izvod S' definišemo sa:

$$\langle S', \varphi \rangle = -\langle S, \varphi' \rangle.$$

Dakle, distribucija ima izvod ako ga ima test funkcija. Kako smo test funkcije definisali kao glatke funkcije sledi da sve distribucije imaju izvode (opštije ovo važi za izvode bilo kog reda).

Ova defincija predstavlja proširenje definicije izvoda, ali osobine izvoda i dalje važe; na primer, za $S, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ važi $(ST)' = S'T + ST'$.

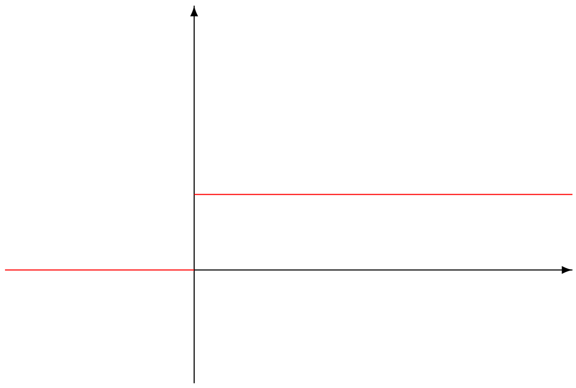
Primer 2.4. *Pokažimo da je Dirakova delta distribucija izvod distribucije koju definiše Hevisajdova funkcija:*

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Direktnim računanjem se dobija:

$$\langle \theta'(x), \varphi(x) \rangle = -\langle \theta(x), \varphi'(x) \rangle = -\int\limits_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle \,,$$

gde je $\varphi(\infty) = 0$ *jer* φ *kao test funkcija ima kompaktan nosač.*



Slika 2.1 Hevisajdova funkcija

Izvod od Dirakove delta distribucije je dat sa:

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0).$$

Opštije, imamo:

$$\langle \delta^{(\alpha)}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \varphi^{(\alpha)}(0).$$

Sledeća teorema daje nekoliko osnovnih operacija na distribucijama.

Teorema 2.8. *Neka su $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $s \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i $\alpha \neq 0$ tada važi:*

- $\langle f_1 + f_2, \varphi \rangle = \langle f_1, \varphi \rangle + \langle f_2, \varphi \rangle$,
- $\langle fs, \varphi \rangle = \langle f, s\varphi \rangle$,
- $\langle f(x-y), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(x+y) \rangle$,
- $\langle f(\alpha x), \varphi(x) \rangle = \dfrac{1}{\alpha} \langle f(x), \varphi(\dfrac{x}{\alpha}) \rangle$.

2.4 Primeri distribucija

Primeri koje sada navodimo biće nam korisni kada se počnemo baviti primenom Furijeove analize u finansijama.

Pre nego što se počnemo baviti primerima, definisaćemo pojam Košijeve glavne vrednosti integrala. Posmatraćemo funkciju $f(z)$ koja je holomorfna[1]

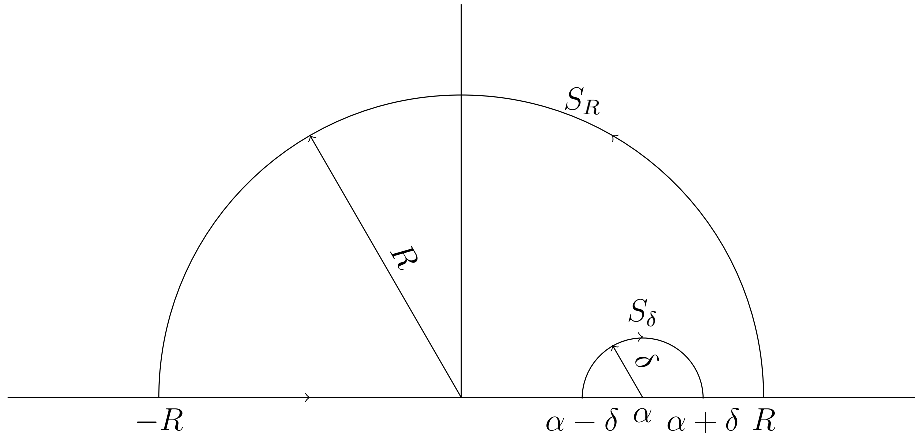
[1] Funkcija je holomorfna na nekom skupu Ω u $\mathbb{C}$ ako ima neprekidan prvi izvod u svakoj tački tog skupa. Njena restrikcija na $\Omega \cap \mathbb{R}$ je realna analitička funkcija. Podsetimo se, funkcija je realna analitička ako i samo ako je jednaka razvoju u Tejlorov red u okolini svake svoje tačke. Svaka realna analitička funkcija je glatka.

na gornjoj polovini kompleksne ravni, i važi da $|f(z)| \to 0$ kada $|z| \to \infty$ takođe na gornjoj polovini kompleksne ravni.

Posmatrajmo krivolinijski integral

$$\oint\limits_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz\,,$$

gde je C kriva prikazana na slici 2.2, a α realan broj.



Slika 2.2 Kontura C

Pošto je $f(z)$ analitička unutar oblasti ograničene krivom C i na njoj, to je i funkcija $\dfrac{f(z)}{z-\alpha}$. Sada imamo da je

$$\oint\limits_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = 0.$$

Ovo je posledica Koši-Gursatove teoreme koja glasi:
Neka je U otvoren povezan skup u $\mathbb{C}$, i neka je $f : U \to \mathbb{C}$ analitička funkcija, a $f'(z)$ neprekidna na U. Neka je C kriva na U čija se početna i krajnja tačka poklapaju. Tada je

$$\oint\limits_C f(z) dz = 0.$$

Sada ćemo gornji integral raspisati na sledeći način:

$$\oint\limits_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = \int\limits_{-R}^{\alpha-\delta} \frac{f(x)}{x-\alpha} dx + \int\limits_{S_\delta} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz + \int\limits_{\alpha+\delta}^{+R} \frac{f(x)}{x-\alpha} dx + \int\limits_{S_R} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = 0,$$

gde je δ je poluprečnik malog polukruga S_δ sa centrom u $x = \alpha$, a R je poluprečnik velikog polukruga S_R sa centrom u koordinatnom početku. δ možemo birati malo koliko želimo, a R možemo birati veliko koliko želimo.

Kada se posmatraju beskonačno male vrednosti za δ veličina

$$\int_{-R}^{\alpha-\delta} \frac{f(x)}{x-\alpha}dx + \int_{\alpha+\delta}^{+R} \frac{f(x)}{x-\alpha}dx$$

se naziva Košijeva glavna vrednost integrala $\dfrac{f(x)}{(x-\alpha)}$, i označava se sa

$$P\int_{-R}^{+R} \frac{f(x)}{x-\alpha}dx$$

ili kraće $p.v.f(x)$. Može se pokazati da važi

$$\lim_{R\to\infty} P\int_{-R}^{+R} \frac{f(x)}{x-\alpha}dx = -\lim_{\delta\to 0}\int_{S_\delta} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = -(-i\pi)f(\alpha) = i\pi f(\alpha).$$

Sada ćemo izložiti nekoliko specijalnih primera distribucija.

Primer 2.5. *Kao primer singularne distribucije posmatraćemo Košijevu glavnu vrednost divergentnog integrala*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Primetimo da $\dfrac{1}{x}$ *nije lokalno integrabilna u okolini nule. Po definiciji imamo*

$$\langle p.v.\frac{1}{x}, \varphi(x)\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

$$\begin{aligned}
\langle p.v.\frac{1}{x}, \varphi(x)\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)+\varphi(0)}{x}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx + \varphi(0)\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} \frac{1}{x}dx.
\end{aligned}$$

Pošto je $\frac{1}{x}$ *neparna funkcija drugi integral nestaje i imamo da je*

$$\langle p.v.\frac{1}{x}, \varphi(x)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx.$$

Primer 2.6. *Definišimo*

$$g^{+}(x) = \lim_{\epsilon\to 0^{+}} \frac{1}{x+i\epsilon}.$$

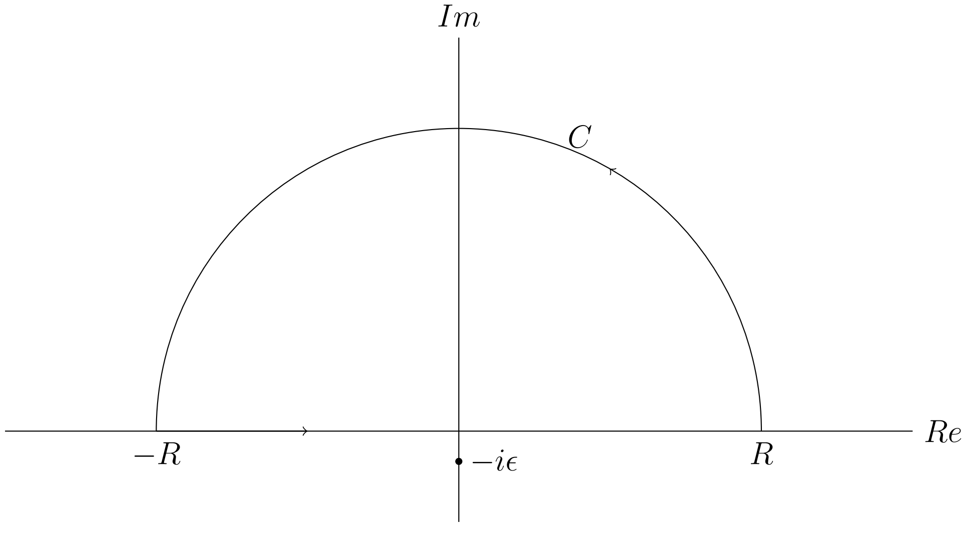
Sada računamo

$$\begin{aligned}
\langle g^{+}(x), \varphi(x)\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0^{+}} \int \frac{\varphi(x)}{x+i\epsilon}dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^{+}} \int \frac{\varphi(x)-\varphi(0)+\varphi(0)}{x+i\epsilon}dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^{+}} \int \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x+i\epsilon}dx + \varphi(0)\lim_{\epsilon\to 0^{+}} \int \frac{1}{x+i\epsilon}dx \\
&= \langle p.v.\frac{1}{x}, \varphi(x)\rangle + \varphi(0)\lim_{\epsilon\to 0^{+}} \int \frac{1}{x+i\epsilon}dx.
\end{aligned}$$

Posmatrajmo integral

$$\lim_{\epsilon\to 0^{+}} \int \frac{1}{x+i\epsilon}dx$$

i sliku 2.3



Slika 2.3 Kontura u primeru 2.6

Integral možemo posmatrati kao kompleksni integral na krivom C sa centrom u $z = i\epsilon$.

$$\oint_C \frac{1}{x+i\epsilon}dz = 0 = \int_{-R}^{R} \frac{1}{x+i\epsilon}dx + i\int_0^{\pi} \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}+i\epsilon}d\theta,$$

gde smo stavili da je $z = \rho e^{i\theta}$ i $\rho = |R|$. Kada $\epsilon \to 0$ i $\rho \to \infty$ dobija se:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+i\epsilon}dx = -i\int_0^{\pi} d\theta = -i\pi.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\langle g^+, \varphi(x)\rangle &= \langle p.v.\frac{1}{x}, \varphi(x)\rangle - i\pi\varphi(0)\\ &= \langle p.v.\frac{1}{x}, \varphi(x)\rangle - i\pi\langle\delta(x), \varphi(x)\rangle\\ &= \langle p.v.\frac{1}{x} - i\pi\delta(x), \varphi(x)\rangle.\end{aligned}$$

Prema tome:

$$g^+(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{x+i\epsilon} = p.v.\frac{1}{x} - i\pi\delta(x).$$

2.5 Temperirane distribucije (distribucije sporog rasta)

Temperirane distribucije predstavljaju potprostor od $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. One se definišu na skupu test funkcija koji je širi od $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Ovo proširenje klase test funkcija zove se prostor brzo opadajućih funkcija. Za razliku od $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, prostor brzo opadajućih funkcija je invarijantan u odnosu na Furijeovu transformaciju.

2.5.1 Prostor brzo opadajućih funkcija

Neka je $t \in \mathbb{R}^n$ i neka je $|t| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2}$.

Definicija 2.12. Kompleksna funkcija $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ koja zadovoljava da za sve nenegativne cele brojeve $m, k_1, \ldots, k_n$ važi:

$$|t|^m \left| \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\cdots\partial t_n^{k_n}}\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)\right| \le C_{m,k_1,k_2,\ldots,k_n}, \tag{8}$$

naziva se brzo opadajuća funkcija.

Nejednakost (8) kraće zapisujemo sa:

$$|t|^m \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi(t) \right| \leq C_{m,k}, \qquad t \in \mathbb{R}^n,\, k \in \mathbb{N}_0^n,\, m \in \mathbb{N}_0^n.$$

Funkcije $\varphi(t)$ iz gornje definicije su takve da kada $t \to \infty$, onda $\varphi(t)$ i svi njeni parcijalni izvodi opadaju ka nuli brzinom većom od $\frac{1}{|t|^m}$. Broj na desnoj strani nejednačine je konstanta koja zavisi od $m, k_1, \ldots, k_n$.

Skup brzo opadajućih funkcija označavamo sa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. U odnosu na uobičajene operacije $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ predstavlja vektorski prostor, i važi da ako je φ iz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ onda su i svi njeni parcijalni izvodi u $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Primetimo, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Sa druge strane, očigledno postoje funkcije u $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ koje nisu u $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, kao na primer $\exp(-|t^2|)$, jer nema kompaktan nosač.

Takođe, u $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je moguće uvesti topologiju, na primer uz pomoć konvergentnih nizova, slično kao što smo to uradili u $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, u poglavlju 2.1.

2.5.2 Prostor temperiranih distribucija

Definicija 2.13. Prostor neprekidnih i linearnih funkcionela nad $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ označavamo sa $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Elementi od $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se nazivaju temperirane distribucije ili distribucije sporog rasta.

Na osnovu do sada rečenog može se dokazati da važi:

Teorema 2.9. *$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ je potprostor od $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Da bi lokalno integrabilna funkcija dodelila konačan broj $\langle f, \varphi \rangle$ funkciji $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ na sledeći način

$$\langle f, \varphi \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt, \tag{9}$$

ponašanje funkcije $f(t)$ kada $t \to \infty$ se mora ograničiti na takav način da integral konvergira za sve $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definicija 2.14. Funkcija $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se naziva sporo rastuća ako postoji $m \in \mathbb{Z}$ tako da:

$$\lim_{t \to \infty} |t|^{-m} f(t) = 0. \tag{10}$$

2.5 Temperirane distribucije (distribucije sporog rasta)

Temperirana distribucija definisana lokalno integrabilnom sporo rastućom funkcijom preko integrala (9) naziva se regularna temperirana distribucija.

Pošto sve funkcije iz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ zadovoljavaju uslov (10) one generišu regularne temperirane distribucije.

Takođe se može pokazati da su sve distribucije iz $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sa ograničenim nosačem temperirane distribucije. Te su stoga delta funkcionela i njeni izvodi temperirane distribucije.

Kako je $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ potprostor $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, operacije koje smo definisali na distribucijama iz $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ odnose se i na distribucije iz $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Međutim kada se neke primene na distribuciju iz $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ rezultat ne mora biti u $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ali kada to važi (na temperiranu distribuciju primenimo operaciju i opet nastane temperirana distribucija) kažemo da je prostor $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ zatvoren nad tom operacijom.
Operacije za koje to važi su:

- Sabiranje distribucija,
- Množenje distribucija konstantom,
- Translacija distribucija,
- Množenje nezavisne promenljive pozitivnom konstantom, to jest diletacija,
- Diferenciranje distribucija.

3 Konvolucija

Poznato je da nije moguće definisati proizvod dve proizvoljne distribucije. Kratko obrazloženje problema može se pronaći u [10], a u [18] su dati primeri koji pokazuju probleme pri pokušaju množenja dve distribucije. Stoga definišemo operaciju konvolucije, koja će biti ključni alat kada budemo izvodili formule za vrednovanje hartija od vrednosti.

Konvoluciju ćemo prvo definisati na funkcijama, a zatim na distribucijama i temperiranim distribucijama. Pri tome smo koristili [1], [9] i [16] iz spiska literature.

3.1 Konvolucija funkcija

Definicija 3.1. Konvolucija dve funkcije f i g na konačnom intervalu $[0, t]$ je data sa:

$$(f * g)(t) = \int\limits_0^t f(x)g(t-x)dx\,,$$

pri čemu se pretpostavlja da je integral na desnoj strani jednakosti dobro definisan.

Konvolucija na beskonačnom intervalu $(-\infty, \infty)$ sa promenljivom t je data sa:

$$(f * g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f(t-x)dx.$$

Da bi nesvojstveni integral konvergirao dovoljno je, na primer da su f i g apsolutno integrabilne funkcije.

Važan rezultat je da je konvolucija dve Gausovske funkcije opet Gausovska funkcija, to jest ako su:

$$f = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \quad \exp\left(\frac{-(t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right),$$

$$g = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \quad \exp\left(\frac{-(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

pri čemu su $\sigma_1, \sigma_2, \mu_1$ i μ_2 unapred zadati realni brojevi, onda je

$$f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \quad \exp\left(\frac{-(t-(\mu_1+\mu_2)^2)}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right).$$

U teoriji verovatnoće važi da je raspodela verovatnoća zbira dve nezavisne slučajne promenljive konvolucija njihovih individualnih raspodela. Preciznije, ako su X_1 i X_2 dve nezavisne slučajne promenljive sa gustinama $\varphi_{X_1}(x_1)$ i $\varphi_{X_2}(x_2)$ respektivno, onda je gustina slučajne promenljive $Y = X_1 + X_2$ data sa :

$$\varphi_Y(y) = \left(\varphi_{X_1} * \varphi_{X_2}\right)(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{X_1}(y - x_2)\varphi_{X_2}(x_2)dx_2.$$

Ove činjenice se mogu pronaći u [8] iz spiska literature.

Sada ćemo navesti neke osobine operacije konvolucije.
Neka su $f, g, h \in \mathbb{R}$ proizvoljne funkcije, a a konstanta. Tada važi:

- $f * g = g * f$, (komutativnost)
- $f * (g * h) = (f * g) * h$, (asocijativnost)
- $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$, (distributivnost)
- $a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$,
- $(f * g)' = f' * g = f * g'$.

3.2 Konvolucija brzo opadajuće funkcije i temperirane distribucije

Sada ćemo definisati konvoluciju proizvoljne brzo opadajuće funkcije $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)$ i temperirane distribucije $f \in \mathcal{S}'(\Omega)$.

Neka je $\psi \in \mathcal{S}(\Omega)$. Tada je

$$(\varphi * \psi)(x) = \int \varphi(x - y)\psi(y)dy.$$

Cilj: Definisati kako $\varphi * f$ deluje na $\psi \in \mathcal{S}(\Omega)$, ako $f \in \mathcal{S}'(\Omega)$ i ako $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)$.

Ispisujemo

$$\int (\varphi * f)(x)\psi(x)dx$$

kao

$$\begin{aligned} \int\int \varphi(x - y)f(y)\psi(x)dxdy &= \int \left[\int \varphi(x - y)\psi(x)dx\right] f(y)dy \\ &= \int (\check{\varphi} * \psi)(y)f(y)dy, \end{aligned}$$

gde je $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

Dakle, konvoluciju $\varphi * f$, $f \in \mathcal{S}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)$ definišemo kao distribuciju $\varphi * f \in \mathcal{S}'(\Omega)$ koja na test funkciju $\psi \in \mathcal{S}(\Omega)$ deluje na sledeći način:

$$\langle \varphi * f, \psi \rangle = \langle f, \check{\varphi} * \psi \rangle.$$

3.3 Konvolucija distribucija

Uvešćemo pojam direktnog proizvoda distribucija pomoću kojeg ćemo uvesti pojam konvolucije distribucija.

3.3.1 Direktan proizvod distribucija

Uvedimo prvo neke oznake.

Sa $\mathbb{R}_t$ označavaćemo jednodimenzioni Euklidski prostor koji se sastoji od svih realnih vrednosti za t; $\mathbb{R}_{x,y}$ je dvodimenzioni realni prostor koji se sastoji od svih realnih parova (x, y).

Sada će $\mathcal{D}_t$ biti prostor test funkcija definisanih na $\mathbb{R}_t$, a $\mathcal{D}_{t,\tau}$ prostor test funkcija definisanih nad $\mathbb{R}_{t,\tau}$. Isto važi i za prostore $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$.

Definicija 3.2. Neka su date dve distribucije $f(t) \in \mathcal{D}'_t$, $g(\tau) \in \mathcal{D}'_\tau$ i $\varphi(t, \tau) \in \mathcal{D}_{t,\tau}$. Direktan proizvod je definisan izrazom

$$\langle f(t) \times g(\tau), \varphi(t, \tau) \rangle \equiv \langle f(t), \langle g(\tau), \varphi(t, \tau) \rangle \rangle. \tag{11}$$

Pri tome, $\langle g(\tau), \varphi(t, \tau) \rangle$ je test funkcija iz $\mathcal{D}_t$.

Uočimo da smo direktan proizvod distribucija $f(t) \times g(\tau)$ definisali kao funkcionelu na prostoru $\mathcal{D}_{t,\tau}$.

Teorema 3.1. *Direktan proizvod dve distribucije $f(t)$ i $g(\tau)$ je distribucija $f(t) \times g(\tau)$ iz $\mathcal{D}'_{t,\tau}$.*

Dokaz. Treba pokazati da je $f(t) \times g(\tau)$ neprekidna linearna funkcionela na prostoru $\mathcal{D}'_{t,\tau}$.

Očigledno je da važi linearnost, a da bismo pokazali da je $f(t) \times g(\tau)$ neprekidna funkcionela pokazaćemo da niz brojeva

$$\{\langle f(t), \langle g(\tau), \varphi_n(t, \tau) \rangle \rangle\}_{n=1}^{\infty}$$

konvergira ka nuli kada god niz test funkcija $\{\varphi_n(t, \tau)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira ka nuli u $\mathcal{D}_{t,\tau}$ (to jest, $\varphi_n(t, \tau) \overset{\mathcal{D}_{t,\tau}}{\to} 0 \Rightarrow \langle f(t), \langle g(\tau), \varphi_n(t, \tau) \rangle \rangle \to 0$, $k \to \infty$).

Kako je $f(t)$ distribucija ovo će biti tačno ako pokažemo da niz test funkcija

$$\psi_n(t) \equiv \langle g(\tau), \varphi(t, \tau) \rangle$$

konvergira ka nuli u $\mathcal{D}_t$.

Kako je $\varphi(t,\tau)$ test funkcija, njen nosač je ograničen u $\mathbb{R}_{t,\tau}$, pa važi da je nosač $\psi_n(t)$ sadržan u ograničenom intervalu u $\mathbb{R}_t$.

Sada pokazujemo da $\psi_n^{(k)}(t)$ uniformno konvergira ka nuli na $\mathbb{R}_t$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo suprotno da postoji k, $\epsilon > 0$ i niz tačaka $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ tako da $|\psi_n^{(k)}(t_n)| \geq \epsilon$, to jest

$$|\psi_n^{(k)}(t_n)| = \left|\langle g(\tau), \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi_n(t,\tau)|_{t=t_n}\rangle\right| \geq \epsilon\,. \tag{12}$$

Sa druge strane imamo da $\{\varphi_n(t,\tau)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira ka nuli u $\mathcal{D}_{t,\tau}$, pa i funkcija

$$\lambda_n(\tau) \equiv \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi_n(t,\tau)|_{t=t_n},$$

koja je test funkcija iz $\mathcal{D}_t$, konvergira ka nuli u $\mathcal{D}_t$.

Kako je $g(\tau)$ distribucija imamo da

$$\psi_n^{(k)}(t_n) = \langle g(\tau), \lambda_n(\tau)\rangle \to 0 \quad \text{kada} \quad n \to 0, \tag{13}$$

što je u kontradikciji sa (12).

Time je teorema dokazana. □

Dokaz sledeće teoreme je analogan dokazu prethodne, pa je navodimo bez dokaza.

Teorema 3.2. *Ako je $f(t) \in \mathcal{S}'_t$ i $g(\tau) \in \mathcal{S}'_\tau$, tada je $f(t) \times g(\tau) \in \mathcal{S}'_{t,\tau}$. To jest direktan proizvod dve distribucije koje su temperirane je opet temperirana distribucija.*

Kada je funkcija $\varphi(t,\tau) \in \mathcal{D}_{t,\tau}$ oblika $\psi(t)\theta(\tau)$, gde su $\psi(t) \in \mathcal{D}_t$ i $\theta(\tau) \in \mathcal{D}_\tau$ izraz (11) može se zapisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}\langle f(t) \times g(\tau), \psi(t)\theta(\tau)\rangle &= \langle f(t), \langle g(\tau), \psi(t)\theta(\tau)\rangle\rangle \\ &= \langle f(t), \psi(t)\langle g(\tau), \theta(\tau)\rangle\rangle \\ &= \langle f(t), \psi(t)\rangle\langle g(\tau), \theta(\tau)\rangle,\end{aligned} \tag{14}$$

odnosno

$$\begin{aligned}\langle g(\tau) \times f(t), \psi(t)\theta(\tau)\rangle &= \langle g(\tau), \theta(\tau)\rangle\langle f(t), \psi(t)\rangle \\ &= \langle f(t) \times g(\tau), \psi(t)\theta(\tau)\rangle.\end{aligned} \tag{15}$$

Teorema 3.3. *Nosač direktnog proizvoda dve distribucije je Dekartov proizvod njihovih nosača. To jest ako je Ω_f nosač distribucije $f(t)$ i Ω_g nosač distribucije $g(\tau)$, tada je nosač distribucije $f(t) \times g(\tau)$ skup $\Omega_f \times \Omega_g$.*

Dokaz. Pretpostavimo da se tačka t_0 nalazi izvan nosača distribucije $f(t)$, i pokažimo da tada bilo koja tačka (t_0, τ_0) leži izvan nosača distribucije $f(t) \times g(\tau)$ bez obzira na tačku τ_0.

Znamo da postoji okolina Ω_{t_0} tačke t_0 takva da je $\langle f(t), \theta(t)\rangle$ indentički jednako nuli za svaku test funkciju $\theta(t)$ čiji je nosač sadržan u Ω_{t_0}.

Ako je $\phi(t, \tau)$ test funkcija čiji se nosač nalazi u $\Omega_{t_0} \times \mathbb{R}_\tau$ ($\phi(t, \tau)$ je nula kada god t nije u Ω_{t_0}) tada je

$$\theta(t) \equiv \langle g(\tau), \phi(t, \tau)\rangle$$

test funkcija i njen nosač je sadržan u Ω_{t_0}. Stoga

$$\langle f(t) \times g(\tau), \phi(t, \tau)\rangle = \langle f(t), \theta(t)\rangle = 0,$$

pa se tačka (t_0, τ_0) ne nalazi u nosaču distribucije $f(t) \times g(\tau)$.

Slično pokazujemo da kada se tačka τ_0 nalazi izvan nosača distribucije $g(\tau)$, tada se i tačka (t_0, τ_0) nalazi izvan nosača distribucije $f(t) \times g(\tau)$.

Neka se sada tačke t_0 i τ_0 nalaze u nosačima distribucija $f(t)$ i $g(\tau)$ respektivno. Tada za bilo koju okolinu tačke (t_0, τ_0) iz $\mathbb{R}_{t,\tau}$, možemo izabrati test funkciju $\psi(t)\theta(\tau)$ čiji se nosač nalazi u ovoj okolini i $\langle f(t) \times g(\tau), \psi(t)\theta(\tau)\rangle$ je različito od nule (ako posmatramo desnu stranu (14) prikladnim izborom $\psi(t)$ i $\theta(\tau)$ dobijamo vrednost različitu od nule). Stoga je nosač distribucije $f(t) \times g(\tau)$ skup $\Omega_f \times \Omega_g$. □

Sada ćemo pokazati da je direktan proizvod dve distribucije komutativna operacija.

Lema 3.1. *Prostor svih test funkcija oblika*

$$\phi(t, \tau) = \sum_n \psi_n(t)\theta_n(\tau), \tag{16}$$

gde je suma konačna i $\psi_n(t) \in \mathcal{D}_t$, $\theta_n(\tau) \in \mathcal{D}_\tau$, *je gust u* $\mathcal{D}_{t,\tau}$.

Teorema 3.4. *Neka su* $f(t) \in \mathcal{D}'_t$ *i* $g(\tau) \in \mathcal{D}'_\tau$ *tada*

$$f(t) \times g(\tau) = g(\tau) \times f(t),$$

odnosno

$$\langle f(t), \langle g(\tau), \phi(t, \tau)\rangle\rangle = \langle g(\tau), \langle f(t), \phi(t, \tau)\rangle\rangle. \tag{17}$$

Dokaz. Pokazali smo da su $f(t) \times g(\tau)$ i $g(\tau) \times f(t)$ distribucije, te stoga i neprekidne funkcionele na $\mathcal{D}_{t,\tau}$, pa je dovoljno da pokažemo da (17) važi na test funkcijama oblika (16), pošto je prostor ovakvih test funkcija gust u

$\mathcal{D}_{t,\tau}$, pri čemu koristimo Han-Banahovu teoremu o neprekidnom proširenju linearne funkcionele sa gustog skupa na ceo prostor.

Na osnovu (14) i (15) sledi:

$$\begin{aligned}\langle f(t) \times g(\tau), \sum_n \psi_n(t)\theta_n(\tau)\rangle &= \sum_n \langle f(t) \times g(\tau), \psi_n(t)\theta_n(\tau)\rangle \\ &= \sum_n \langle f(t), \psi_n(t)\rangle\langle g(\tau), \theta_n(\tau)\rangle.\end{aligned}$$

Slično za

$$\langle g(\tau) \times f(t), \sum_n \psi_n(t)\theta_n(\tau)\rangle = \sum_n \langle f(t), \psi_n(t)\rangle\langle g(\tau), \theta_n(\tau)\rangle.$$

□

Takođe važi da je direktan prizvod dve temperirane distribucije komutativna operacija.

3.3.2 Konvolucija distribucija

Neka su $f(t)$ i $g(\tau)$ neprekidne funkcije sa ograničenim nosačima, i $\varphi \in \mathcal{D}_\tau$. Posmatrajmo regularnu distribuciju $h(t)$ definisanu sa:

$$\langle h, \varphi\rangle = \langle f * g, \varphi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Uočimo da je podintegralna funkcija neprekidna i da ima ograničen nosač u (t,τ) ravni.

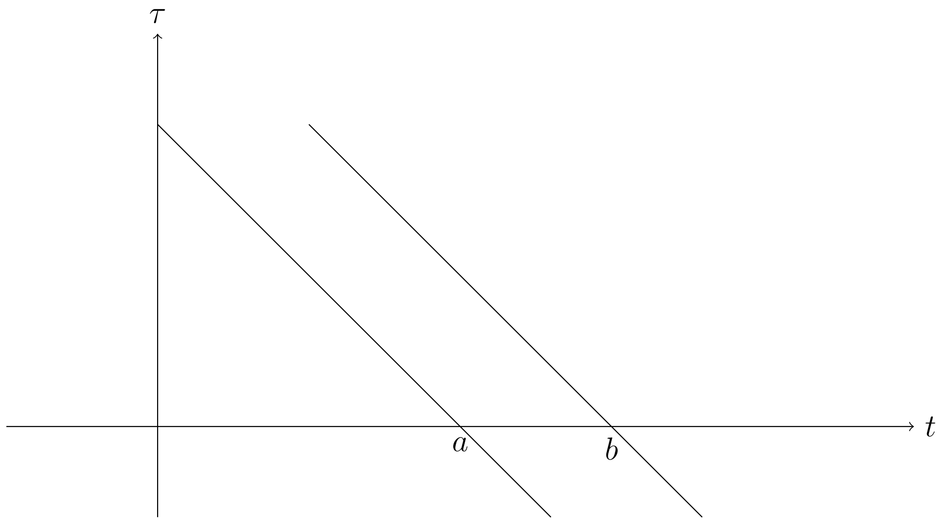
Smenom $\tau = x$, $t = x + y$, dobija se:

$$\langle f * g, \varphi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)\varphi(x+y)dxdy. \tag{18}$$

Sada definišemo konvoluciju distribucija $f(t)$ i $g(\tau)$ sa:

$$\langle f * g, \varphi\rangle \equiv \langle f(t) \times g(\tau), \varphi(t+\tau)\rangle \equiv \langle f(t), \langle g(\tau), \varphi(t+\tau)\rangle\rangle. \tag{19}$$

Iako je $\varphi(t+\tau)$ glatka funkcija, njen nosač nije ograničen u (t,τ) ravni, pa ona nije test funkcija. Preciznije, posmatrajmo funkciju $\varphi(x)$ koja je različita od nule samo na ograničenom skupu $x \in [a,b]$. Kada posmatramo φ kao funkciju od $x+y$, gde su $x, y \in \mathbb{R}$, tada je nosač funkcije φ deo ravni koji zadovoljava nejednačinu $a < x + y < b$. Tačnije ovo je beskonačna traka konačne širine čije su ivice paralelne sa pravom $x + y = 0$.



Slika 3.1 Nosač funkcije $\varphi(t+\tau), \quad t,\tau \in \mathbb{R}$

Dakle, potrebno je upotpuniti definiciju (19) uvođenjem restrikcije na nosače funkcija f i g.
Ako nosač od $f(t) \times g(\tau)$ preseca nosač od $\varphi(t+\tau)$ na ograničenom skupu Ω, tada definiciju (19) zamenjujemo sa

$$\langle f * g, \varphi \rangle \equiv \langle f(t) \times g(\tau), \lambda(t,\tau)\varphi(t+\tau) \rangle \tag{20}$$

gde je $\lambda(t,\tau)$ test funkcija iz $\mathcal{D}_{t,\tau}$ koja je jednaka 1 na nekoj okolini skupa Ω. Kako je $\lambda(t,\tau)\varphi(t+\tau)$ takođe test funkcija iz $\mathcal{D}_{t,\tau}$ sa (20) definišemo $f * g$ kao funkcionelu nad svim $\varphi \in \mathcal{D}_{t,\tau}$.

Mogli smo da izvršimo ovu zamenu zato što se vrednost test funkcije izvan okoline nosača od $f(t) \times g(\tau)$ može menjati bez uticaja na to koju vrednost $f(t) \times g(\tau)$ dodeljuje toj test funkciji.

Sledeća teorema daje uslove pod kojim je presek nosača $f(t) \times g(\tau)$ i $\varphi(t+\tau)$ ograničen za sve $\varphi \in \mathcal{D}$.

Teorema 3.5. *Neka su f i g distribucije iz $\mathbb{R}$ i neka je njihova konvolucija definisana sa* (19). *Tada je $f * g$ distribucija nad $\mathbb{R}$ ako je ispunjen bilo koji od sledećih uslova:*

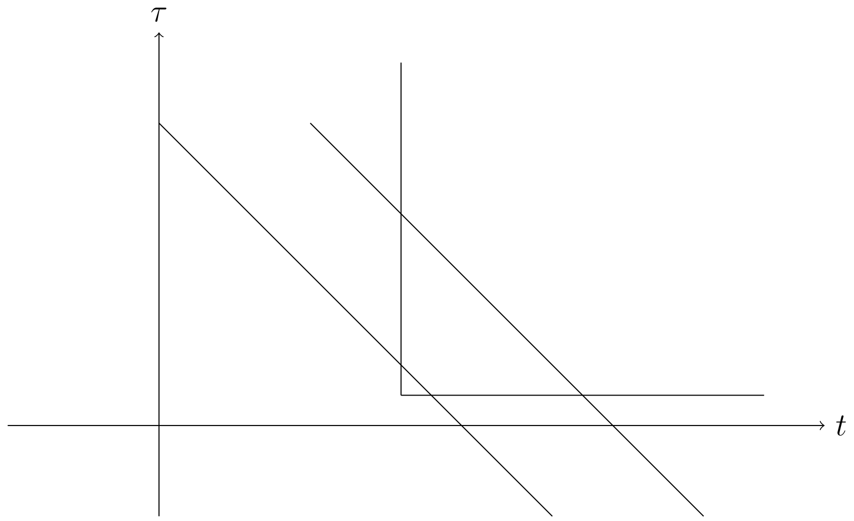
1. *Ili f ili g ima ograničen nosač.*
2. *I f i g imaju nosač ograničen sa leve strane.*
3. *I f i g imaju nosač ograničen sa desne strane.*

Dokaz. Označimo sa Ω_f i Ω_g nosače od $f(t)$ i $g(\tau)$ respektivno.
Posmatrajmo slučajeve definisane u teoremi:

1. $\Omega_f \times \Omega_g$ je sadržano ili u horizontalnoj ili u verikalnoj traci konačne širine u ravni (t, τ).

2. $\Omega_f \times \Omega_g$ se sadrži u četvrtini ravni (t, τ) ograničenoj sa donje strane horizontalnom linijom, i vertikalnom sa leve.

3. $\Omega_f \times \Omega_g$ se sadrži u četvrtini ravni (t, τ) ograničenoj sa gornje strane horizontalnom linijom i vertikalnom sa desne.



Slika 3.2 Kada obe distribucije imaju nosač ograničen sa leve strane

U sva tri slučaja presek $\Omega_f \times \Omega_g$ sa nosačem od $\varphi(t+\tau)$, $\varphi \in \mathcal{D}$, biće ograničen skup.

Stoga zaključujemo da je konvolucija dobro definisana i određuje $f * g$ kao funkcionelu u $\mathcal{D}_{t,\tau}$. $\square$

Lako se vidi da je konvolucija dve distribucije komutativna operacija.

Primer 3.1. *Pokažimo da važe jednakosti:*

$$\langle f * \delta, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$
$$\langle \delta^{(m)} * f, \varphi \rangle = \langle f^{(m)}, \varphi \rangle.$$

Koristimo osobinu komutativnosti konvolucija distribucija:

$$\langle \delta * f, \varphi \rangle = \langle f * \delta, \varphi \rangle.$$

Sada imamo:

$$\langle f * \delta, \varphi \rangle = \langle f(t), \langle \delta(\tau), \varphi(t+\tau) \rangle \rangle = \langle f(t), \varphi(t) \rangle.$$

Dakle $\delta * f = f$.
Sada pokazujemo:

$$\begin{aligned}\langle \delta^{(m)} * f, \varphi \rangle &= \langle f * \delta^{(m)}, \varphi \rangle \\ &= \langle f(t), \langle \delta^{(m)}(\tau), \varphi(t+\tau) \rangle \rangle \\ &= \langle f(t), (-1)^m \varphi^{(m)}(t) \rangle \\ &= \langle f^{(m)}(t), \varphi(t) \rangle.\end{aligned}$$

3.4 Konvolucija temperiranih distribucija

Neka su $f(x)$ i $g(y)$ dve distribucije iz $\mathcal{S}'_x$ i $\mathcal{S}'_y$ respektivno.
Definisaćemo konvoluciju $f * g$ kao distribuciju na $\mathcal{S}_{x,y}$ preko direktnog proizvoda dve regularne distribucije:

$$\begin{aligned}\langle f * g, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) \varphi(t) dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) \varphi(x+y) dx dy \\ &= \langle f(x) \times g(y), \varphi(x+y) \rangle, \qquad (21)\end{aligned}$$

gde smo u drugom redu napravili smenu $\tau = x$ i $t = x + y$.

Iako je φ funkcija iz $\mathcal{S}_x$, funkcija $\varphi(x+y)$ nije funkcija iz $\mathcal{S}_{x,y}$. $\varphi(x+y)$ zadovoljava

$$|x+y|^m \left| \frac{\partial^{k_1} \partial^{k_2} \varphi(x+y)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \right| = |x+y|^m |\varphi^{(k)}(x+y)| \leq C_{mk}$$

za $k = k_1 + k_2$. A da bi $\varphi(x+y) \in \mathcal{S}_{x,y}$ treba da važi

$$\sqrt{(x^2+y^2)^m} \left| \frac{\partial^{k_1} \partial^{k_2} \varphi(x+y)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \right| \leq C_{mk_1k_2}$$

Zato ćemo uvesti novi skup test funkcija defnisanih na $\mathbb{R}^2$.

Neka je $\widehat{\mathcal{S}}_{x,y}$ skup svih funkcija $\psi(x,y)$ čija je vrednost kompleksan broj koje zadovoljavaju nejednakost

$$|x+y|^m \left| \frac{\partial^{k_1} \partial^{k_2} \psi(x+y)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \right| \leq C_{mk_1k_2} \qquad (22)$$

za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, gde je $C_{mk_1k_2}$ konstanta koja zavisi od m, k_1, k_2.

Ako ovu definiciju uporedimo sa definicijom brzo opadajućih funkcija na $\mathbb{R}^2$ vidimo da je norma $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ zamenjena sa normom $|x + y|$, a kako je $|x + y| \leq \sqrt{2}\sqrt{(x^2 + y^2)}$ važi da je $\mathcal{S}_{x,y} \subset \widehat{\mathcal{S}}_{x,y}$.

$\widehat{\mathcal{S}}_{x,y}$ je vektorski prostor, i ako je $\varphi \in \mathcal{S}_x$, onda je $\varphi(x + y) \in \widehat{\mathcal{S}}_{x,y}$.

Za niz $\{\psi_n(x, y)\}_{n=1}^{\infty}$ kažemo da konvergira u $\widehat{\mathcal{S}}_{x,y}$ ako za svaku funkciju $\psi_n \in \widehat{\mathcal{S}}_{x,y}$ i za sve nenegativne cele brojeve m, k_1, k_2 niz

$$\left\{ |x + y|^m \frac{\partial^{k_1} \partial^{k_2} \psi_n(x + y)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

uniformno konvergira na celom $\mathbb{R}^2$.

Iz konvergencije u $\mathcal{S}_{x,y}$ sledi konvergencija u $\widehat{\mathcal{S}}_{x,y}$.

Sa $(\widehat{\mathcal{S}}_{x,y})'$ označićemo skup svih distribucija na $\widehat{\mathcal{S}}_{x,y}$. Važi da je $(\widehat{\mathcal{S}}_{x,y})' \in \mathcal{S}'_{x,y}$.

Posmatrajmo sada apsolutno integrabilnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i Hevisajdovu funkciju $\theta(y) = \mathbb{I}_{[0,\infty)}(y)$. Važi da $f \in \mathcal{S}'_x$ i $\theta \in \mathcal{S}'_y$.

Lema 3.2. *Neka je $\psi \in \widehat{\mathcal{S}}_{x,y}$. Tada*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\theta(y)\psi(x, y)| dy dx < \infty.$$

Dokaz. Kako je $\psi \in \widehat{\mathcal{S}}_{x,y}$ na osnovu (22) postoji $C_{000} > 0$ tako da je

$$|\psi(x, y)| \leq C_{000}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Sada posmatramo integral iz leme:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\theta(y)\psi(x, y)| dy dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(y)|f(x)||\psi(x, y)| dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} |f(x)||\psi(x, y)| dy dx. \end{aligned}$$

Definišimo sada za fiksno $K > 0$:

$$D_K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad y \geq 0, \quad |x+y| \leq K\},$$

$$\overline{D}_K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad y \geq 0, \quad |x+y| > K\}.$$

Sada imamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} |f(x)||\psi(x,y)|dydx = \iint_{D_K} |f(x)||\psi(x,y)|\,dydx + \iint_{\overline{D}_K} |f(x)||\psi(x,y)|\,dydx. \tag{23}$$

Posmatrajmo sada integral:

$$\begin{aligned}
\iint_{D_K} |f(x)||\psi(x,y)|\,dydx &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left(\int_{max(-K-x,0)}^{max(K-x,0)} |\psi(x,y)|dy \right) dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left(\int_{max(-K-x,0)}^{max(K-x,0)} C_{000}dy \right) dx \\
&= C_{000} \int_{-\infty}^{\infty} \left(max(K-x,0) - max(-K-x,0)\right) |f(x)|dx \\
&\leq C_{000} \int_{-\infty}^{\infty} \left(K - x - (-K-x)\right) |f(x)|dx \\
&= 2KC_{000} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty. \qquad (24)
\end{aligned}$$

Pretpostavimo $m > 1$ i posmatrajmo integral:

$$\iint_{\overline{D}_K} |f(x)||\psi(x,y)|\,dydx \leq \iint_{\overline{D}_K} |f(x)| \frac{C_{m00}}{|x+y|^m}\,dydx$$

$$= C_{m00} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left(\int_{0}^{max(-x-K,0)} \frac{1}{|x+y|^m}dy + \int_{max(K-x,0)}^{\infty} \frac{1}{|x+y|^m}dy \right) dx. \tag{25}$$

Za $x \leq -K$ imamo da je:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{max(-x-K,0)} \frac{1}{|x+y|^m} dy &= \int\limits_0^{-x-K} \frac{1}{(-x-y)^m} dy \\ &= \frac{1}{m-1}\frac{1}{K^{m-1}} - \frac{1}{m-1}\frac{1}{(-x)^{m-1}}. \end{aligned} \tag{26}$$

Za $x > -K$:

$$\int\limits_0^{max(-x-K,0)} \frac{1}{|x+y|^m} dy = 0. \tag{27}$$

Za $x > K$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{max(K-x,0)}^{\infty} \frac{1}{|x+y|^m} dy &= \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{(x+y)^m} \\ &= \frac{1}{m-1}\frac{1}{x^{m-1}}. \end{aligned} \tag{28}$$

A za $x \leq K$ imamo:

$$\begin{aligned}\int\limits_{max(K-x,0)}^{\infty} \frac{1}{|x+y|^m} dy &= \int\limits_{K-x}^{\infty} \frac{1}{(x+y)^m} \\ &= \frac{1}{m-1}\frac{1}{K^{m-1}}. \end{aligned} \tag{29}$$

Kada ubacimo vrednosti iz (26), (27), (28) i (29) u (25) dobijamo:

$$\iint\limits_{\overline{D}_K} |f(x)||\psi(x,y)|\, dydx$$

$$\leq \frac{C_{m00}}{m-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left[\left(\frac{1}{K^{m-1}} - \frac{1}{(-x)^{m-1}} \right) \mathbb{I}_{\{x \leq -K\}} + \frac{1}{x^{m-1}} \mathbb{I}_{\{x > K\}} + \frac{1}{K^{m-1}} \mathbb{I}_{\{-K < x \leq K\}} \right] dx$$

$$\leq \frac{C_{m00}}{m-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left[\left(\frac{1}{K^{m-1}} + \frac{1}{K^{m-1}} \right) \mathbb{I}_{\{x \leq -K\}} + \frac{1}{x^{m-1}} \mathbb{I}_{\{x > K\}} + \frac{1}{K^{m-1}} \mathbb{I}_{\{-K < x \leq K\}} \right] dx$$

$$\leq \frac{C_{m00}}{m-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left[\frac{2}{K^{m-1}} \mathbb{I}_{\{x \leq -K\}} + \frac{1}{K^{m-1}} \mathbb{I}_{\{x > K\}} + \frac{1}{K^{m-1}} \mathbb{I}_{\{-K < x \leq K\}} \right] dx$$

$$\leq \frac{2C_{m00}}{(m-1)K^{m-1}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty. \tag{30}$$

Iz (23), (24) i (30) sledi tvrđenje. $\square$

Ako je $\{\psi_n(x,y)\}_{n=1}^{\infty}$ niz iz $\widehat{\mathcal{S}}_{x,y}$ koji u $\widehat{\mathcal{S}}_{x,y}$ konvergira ka nuli, pošto $\psi_n(x,y)$ uniformno konvergira na $\mathbb{R}^2$ važi:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\theta(y)\psi_n(x,y)|dydx \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Dakle važi da je $f(x)\theta(y) \in (\widehat{\mathcal{S}}_{x,y})'$, pa konvoluciju $f * \theta$ možemo definisati kao distribuciju na $\mathcal{S}_{x,y}$ preko formule (21).

Kako je naš cilj primena Furijeovih transformacija u računanju cena opcija potrebno je da definišemo konvoluciju verovatnoće $\mathbb{P}$ i Hevisajdove funkcije.

Ako je f gustina rapodele verovatnoće, na osnovu upravo dokazanog, možemo definisati konvoluciju verovatnoće $\mathbb{P}$ (čija je gustina f) i funkcije θ sa:

$$\mathbb{P} * \theta \equiv f * \theta.$$

Konvolucija između verovatnoće $\mathbb{P}$ i funkcije θ može se definisati i na sledeći način:

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{P} * \theta \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(d\tau)\theta(t-\tau)\varphi(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(dx)\theta(y)\varphi(x+y)dy,\end{aligned}$$

gde je $\varphi \in \widehat{\mathcal{S}}_{x,y}$.

4 Furijeova transformacija

U ovoj glavi ćemo prvo definisaćemo Furijeovu tranformaciju funkcija, a zatim Furijeovu transformaciju uopštenih funkcija. Na kraju ćemo dati neke korisne primere Furijeovih transformacija uopštenih funkcija. Pri tome je korišćeno [1], [2], [9], [10] i [11] iz spiska literature.

Prvo ćemo predstaviti teoriju Furijeovih redova koja se odnosi na periodične funkcije, a zatim ćemo izložiti teoriju Furijeovih transformacija koja se odnosi na neperiodične funkcije.

4.1 Razvoj u Furijeov red

Furijeov red neku periodičnu funkciju predstavlja kao beskonačnu sumu sinusnih i kosinusnih funkcija. Pri tom se koristi činjenica da sinusne i kosinusne funkcije čine ortonormiran sistem u $L^2[-\pi, \pi]$ prostoru (funkcije čiji je kvadrat integrabilan nad $[-\pi, \pi]$), čime se dobija konvergencija u normi. Uz jače pretpostavke, moguće je dobiti uniformnu konvergenciju. Taj rezultat navodimo u ovom poglavlju.

Neka je data funkcija sa osnovnim periodom 2π:

$$f(x) = f(x + 2k\pi), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pretpostavićemo da je f definisana nad $[-\pi, \pi]$. Razložićemo ovu funkciju na proste periodične funkcije oblika:

$$a \cos nx + b \sin nx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Za funkciju f potrebno je odrediti konstante $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ tako da važi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \tag{31}$$

Pretpostavimo da se funkcija može rastaviti na unifomno konvergentan red (31). Tada se integraljenjem od $-\pi$ do π (gde desnu stranu možemo integraliti sabirak po sabirak zbog osobine uniformne konvergencije) dobija:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx = a_0\pi.$$

Ako prvo jednačinu pomnožimo sa $\cos kx$, a zatim izvršimo integraljenje dobijamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kxdx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos kx dx = a_k\pi.$$

Analogno ako pomnožimo sa $\sin kx$ i integralimo od $-\pi$ do π dobijamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = b_k\pi.$$

Pri tome smo koristili:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \sin kx dx = \pi\delta_{kn}, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos kx dx = \pi\delta_{kn},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos kx dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx = 0,$$

gde je $k, n \neq 0$ i δ_{kn} Kronekerov simbol:

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Na osnovu prethodnih razmatranja, uvodimo definiciju Furijeovog reda.

Definicija 4.1. Neka je $f(x)$ funkcija sa periodom 2π koja na intervalu $[-\pi, \pi]$ ima konačan broj tačaka prekida prve vrste[2]. Furijeov red funkcije $f(x)$ je dat sa:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

gde je:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

[2] Ako postoje konačne granične vrednosti $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ i $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ ali su različite.

Pre nego što proširimo teoriju na funkcije proizvoljnog perioda, razmotrićemo uslove pod kojim Furijeov red konvergira odgovarajućoj funkciji f.

Neka je X pred-Hilbertov prostor[3] po delovima neprekidnih funkcija na $[-\pi, \pi]$ sa skalarnim proizvodom

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx, \quad f, g \in X.$$

Definišimo novi skup X' na sledeći način: $f \in X$ pripada skupu X' ako i samo ako u svakoj tački $x \in [-\pi, \pi]$ postoje odgovarajući *desni izvodi*

$$\exists \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f_+(x)}{h}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi)$$

gde je $f_+(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(x+\epsilon)$ desna granična vrednost funkcije f u x i *levi izvodi*

$$\exists \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x-h) - f_-(x)}{h}, \quad \forall x \in (-\pi, \pi]$$

gde je $f_-(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(x-\epsilon)$ leva granična vrednost funkcije f u x.

Teorema 4.1 (Dirihleova teorema)**.** *Neka je $f \in X'$. Tada za $\forall x \in (-\pi, \pi)$ Furijeov red funkcije f konvergira ka*

$$\frac{f_-(x) + f_+(x)}{2},$$

a u tačkama $x = \pm\pi$ konvergira ka

$$\frac{f_-(\pi) + f_+(-\pi)}{2}.$$

Ako funkcija f zadovoljava uslove Dirihleove teoreme tada Furijeov red funkcije f u neprekidnim tačkama funkcije konvergira ka funkciji $f(x)$, a u tački prekida konvergira ka srednjoj vrednosti jednostranih limesa funkcije f u toj tački.

Funkcije sa proizvoljnim periodom $2l$ prevodimo na period 2π pomoću smene.

Stavimo da je $x = al$ dobija se funkcija $f(al)$ sa periodom $\dfrac{2l}{a}$.

Ako je $\dfrac{2l}{a} = 2\pi$ $(a = \dfrac{l}{\pi})$, smenom $x = \dfrac{lt}{\pi}$ dobija se funkcija $f(\dfrac{lt}{\pi})$ čiji je period 2π.

[3] Uređeni par(X,$(\cdot, \cdot)$) gde je X vektorski prostor, a $(\cdot, \cdot)$ skalarni proizvod.

4.1 Razvoj u Furijeov red

Pretpostavimo da je funkcija f apsolutno integrabilna na $[-l, l]$, da na tom intervalu ima konačno mnogo tačaka prekida prve vrste, da se može razviti u uniformno konvergentan red, i da važi da za zadato $t \in \mathbb{R}$:

$$f(\frac{lt}{\pi}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt,$$

onda je:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\frac{lt}{\pi}) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\frac{lt}{\pi}) \cos ntdt, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\frac{lt}{\pi}) \sin ntdt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ako sada vratimo smenu $t = \frac{\pi x}{l}$, $dt = \frac{\pi}{l} dx$ dobijamo Furijeov red funkcije f koja je $2l$ periodična:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dt.$$

Ako je funkcija definisana na intervalu $[0, 2l]$ imamo:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int\limits_{0}^{2l} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dt.$$

Pojam Furijeovih redova možemo proširiti i na kompleksne koeficijente.

Posmatrajmo funkciju:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx}.$$

Sada računamo:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}dx &= \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx}e^{-imx}dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\left[(n-m)x\right] + i\sin\left[(n-m)x\right]dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n 2\pi\delta_{mn} \\
&= A_m 2\pi,
\end{aligned}$$

dobijamo

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

ili

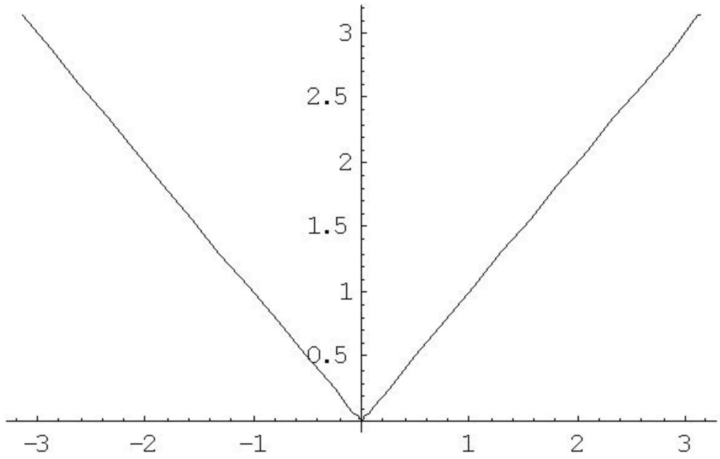
$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos[nx] - i\sin[nx])dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos[nx] + i\sin[nx])dx, & n < 0 \\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, & n = 0 \\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos[nx] - i\sin[nx])dx, & n > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n + ib_n), & n < 0 \\ \frac{1}{2}a_0, & n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & n > 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Za funkciju periodičnu na $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$ imamo:

$$
f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp\left(i(\frac{2\pi nx}{l})\right),
$$

$$
A_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l/2}^{l/2} f(x)\exp\left(-i(\frac{2\pi nx}{l})\right)dx.
$$

Primer 4.1. *Odredićemo Furijeov red funkcije $f(x) = |x|$ na $[-\pi, \pi]$.*



Slika 1: Grafik funkcije $f(x) = |x|$

Koeficijenti Furijeovog reda su dati sa:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx) dx = \begin{cases} -4/\pi n^2, & \text{ako je } n \text{ neparan broj;} \\ 0, & \text{ako je } n \text{ paran broj.} \end{cases}$$

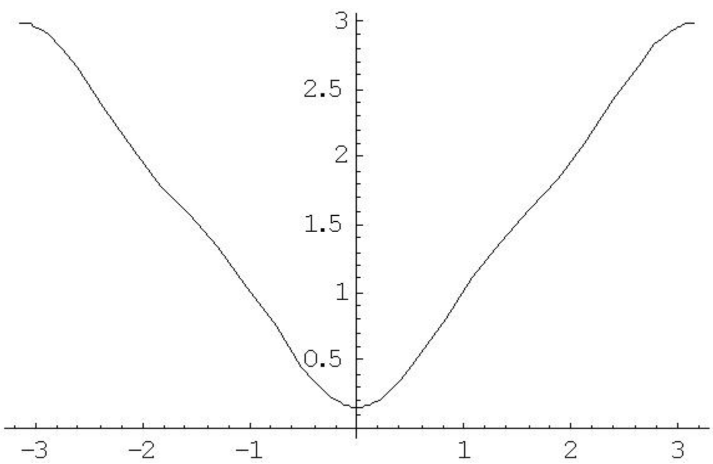
Za svako $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$ *zato što je* $f(x)$ *parna funkcija, pa kada je pomnožimo sa neparnom funkcijom,* $\sin nx$*, dobijamo neparnu funkciju koja se integrali na* $[-\pi, \pi]$.
Sada dobijamo Furijeov red:

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x.$$

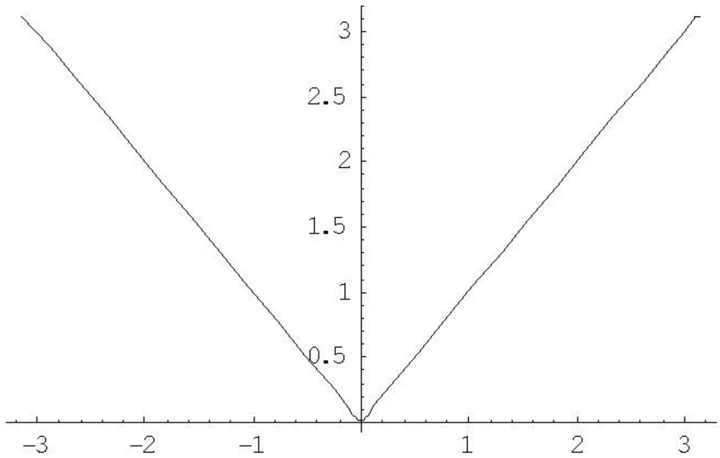
U programskom paketu Matematika smo nacrtali:

$$f = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

i za različite vrednosti m *dobijamo:*



Slika 2: $m = 2$



Slika 3: $m = 20$

4.2 Furijeova transformacija

Furijeova transformacija predstavlja uopštenje (granični slučaj) Furijeovih redova, a inverzna Furijeova transformacija uopštenje Furijeovih koeficijenata. Sada ćemo detaljnije definisati oba pojma.

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Furijeovu transformaciju definišemo sa:

$$F(k) = F_x[f(x)](k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i k x} dx.$$

Dakle ako postoji nesvojstveni integral sa desne strane funkcija F predstavlja Furijeovu transformaciju funkcije f.

Označimo sa $G(\mathbb{R})$ familiju apsolutno integrabilnih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koje su uz to i deo po deo neprekidne. Funkcija je deo po deo neprekidna na celom $\mathbb{R}$ ako je deo po deo neprekidna na svakom konačnom intervalu $[a, b]$. Funkcija može imati beskonačan broj tačaka prekida, ali samo konačan broj na svakom konačnom intervalu.

$G(\mathbb{R})$ je vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Iz definicije sledi da je Furijeova transformacija funkcije $f \in G(\mathbb{R})$ definisana za svako $k \in \mathbb{R}$.

Definišimo formulu koja radi obrnuto, uzima Furijeovu transformaciju i, pod izvesnim uslovima, vraća orginalnu funkciju:

$$f(x) = F_k^{-1}[F(k)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-2\pi i k x} dk.$$

Ovo nazivamo inverznom Furijeovom transformacijom.

Treba napomenuti da definicija Furijeovih i inverznih Furijeovih transformacija nije jedinstvena, pa se tako u literaturi može naći obrnuta definicija od naše, to jest Furijeova transformacija predstavlja inverznu i obrnuto.

Takođe se može naći Furijeova transformacija definisana u terminima ugaone frekvencije $\omega = 2\pi\nu$ umesto u terminima frekvencije ν.

Tada formule izgledaju ovako:

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iyt} dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-iyt} dy.$$

Definiciju možemo dati i koristeći proizvoljne konstante a i b:

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ib\omega t} dt,$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1+a}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-ib\omega t} d\omega.$$

Navedene normalizacije ne utiču na teorijske rezultate, nego samo na izgled formula koje se koriste u radu.

Kako bilo koju funkciju možemo podeliti na njen parni i neparni deo na sledeći način:

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = P(x) + N(x),$$

sledi da Furijeovu transformaciju možemo izraziti kao:

$$F_x[f(x)](k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(x) \cos(2\pi kx) dx + i \int\limits_{-\infty}^{\infty} N(x) \sin(2\pi kx) dx.$$

Sledeća teorema daje odgovor na pitanje da li je

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-2\pi ikx} dk,$$

to jest da li kada na Furijeovu transformaciju primenimo inverznu Furijeovu transformaciju dobijamo orginalnu funkciju?

Teorema 4.2 (o inverznoj Furijeovoj transformaciji)**.** *Ako je $f \in G(\mathbb{R})$ onda za svaku tačku $x \in \mathbb{R}$ u kojoj postoje jednostrani izvodi funkcije f važi:*

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-2\pi ikx}dk.$$

Posledica 4.1. *Ako je f neprekidna funkcija, i ako je f' deo po deo neprekidna funkcija onda važi:*

$$f(x) = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-2\pi ikx}dk, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sada ćemo navesti neke korisne osobine Furijeovih transformacija.

Teorema 4.3. *Neka su $f, g \in G(\mathbb{R})$, i neka su njihove Furijeove transformacije označne sa F i G, respektivno. Tada važi:*

1. $F[af(x) + bg(x)](k) = aF(k) + bG(k)$ *(Linearnost),*
2. $F[f * g] = F[f]F[g]$,
3. $F[fg] = F[f] * F[g]$,
4. $F^{-1}[F[f]F[g]] = f * g$,
5. $F^{-1}[F[f] * F[g]] = fg$.

Dokaz. Dokazaćemo da važi 1. i 2.

1.

$$\begin{aligned} F[af(x) + bg(x)](k) &= \int_{-\infty}^{\infty} [af(x) + bg(x)]e^{2\pi ikx}dx \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi ikx}dx + b\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{2\pi ikx}dx \\ &= aF(k) + bG(k). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
F[f*g] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ikx} f(x')g(x-x')dx'dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{2\pi ikx'} f(x')dx')(e^{2\pi ik(x-x')} g(x-x')dx) \\
&= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ikx'} f(x')dx'\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ikx''} g(x'')dx''\right) \\
&= F[f]F[g]
\end{aligned}$$

gde je $x'' = x - x'$ i $dx'' = dx$.

□

Autokorelaciona funkcija $C(t)$ funkcije $E(t)$ je:

$$C(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{E}(\tau)E(t+\tau)d\tau$$

gde ge $\overline{E}$ kompleksno konjugovana funkcija funkcije E.
Sledeća formula daje vezu između Furijeove transformacije i autokorelacione funkcije:

$$F_k[|F(k)|^2](x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f}(\tau)f(x+\tau)d\tau.$$

Teorema 4.4. *Ako je f n-puta diferencijabilna, i $f^{(n)} \in G(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, tada važi:*

$$F[f^{(n)}(x)](k) = (-2\pi ik)^n F[f(x)](k).$$

Dokaz. Pokazaćemo prvo da formula važi za prvi izvod.

$$F[f'(x)](k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{2\pi ikx}dx.$$

Parcijalnom integracijom dobijamo

$$f(x)e^{2\pi ikx}|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)2\pi ike^{2\pi ikx}dx.$$

Ako je funkcija f ograničena tako da važi:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

(što važi ako je f apsolutno integrabilna funkcija) prvi izraz nestaje i dobijamo

$$F[f'(x)](k) = -2\pi ik \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi ikx}dx = -2\pi ikF[f(x)](k).$$

Ponavljajući ovaj proces n puta dobijamo formulu za n-ti izvod funkcije:

$$F[f^{(n)}(x)](k) = (-2\pi ik)^n F[f(x)](k).$$

□

Furijeova transformacija funkcije $f(x)$ ima osobinu pomeranja:

$$\begin{aligned} F[f(x-x_0)](k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)e^{2\pi ikx}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)e^{2\pi ik(x-x_0)}e^{2\pi ikx_0}d(x-x_0) \\ &= e^{2\pi ikx_0}F(k). \end{aligned}$$

Sada pokazujemo da važi:

$$F[f(ax)](k) = |a|^{-1}F(\frac{k}{a}), \qquad a \neq 0.$$

Direktnim računanjem se dobija:

$$\begin{aligned} F[f(ax)](k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{2\pi ikx}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{2\pi ik\frac{u}{a}}\frac{1}{|a|}du \\ &= \frac{1}{|a|}F(\frac{k}{a}). \end{aligned}$$

Sledeća teorema je poznata kao Parsevalova jednakost.

Teorema 4.5. *Ako su lokalno integrabilne funkcije $f(x)$ i $g(x)$ apsolutno integrabilne na $-\infty < x < \infty$, tada važi:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)F[g(k)]dx = \int_{-\infty}^{\infty} F[f(x)]g(k)dk.$$

Dokaz. Pod pretpostavkom da je dozvoljena razmena graničnih procesa važi:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)F[g(k)]dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{2\pi ikx}dk\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(k)e^{2\pi ikx}dkdx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(k)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi ikx}dx\right)dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(k)F[f(x)]dk.
\end{aligned}$$

□

4.3 Furijeova transformacija uopštenih funkcija

Prvo ćemo izložiti neke teoreme koje važe za Furijeove transformacije na prostoru brzo opadajućih funkcija, a zatim pomoću Parsevalove jednakosti definisati Furijeovu transformaciju na prostoru temperiranih distribucija.

4.3.1 Furijeove transformacije brzo opadajućih funkcija

Teorema 4.6. *Furijeova transformacija je linearno i neprekidno preslikavanje $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ u $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Teorema 4.7. *Inverzna Furijeova transformacija je linearno i neprekidno preslikavanje $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ u $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Neka su $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i neka je sa p označen proizvoljan polinom. Na primer, $p(x) = a_o + a_1x_1x_2 + a_2x_1^2x_3$, gde je $x = (x_1, x_2, x_3)$, važi da je $p(\frac{\partial}{\partial x}) = a_o + a_1\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + a_2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial}{\partial x_3}$. U nastavku ćemo koristiti skraćenu oznaku $p(\frac{\partial}{\partial x})$.

4.3 Furijeova transformacija uopštenih funkcija

Na osnovu rezultata iz prethodne sekcije, s obzirom da je $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset G(\mathbb{R}^n)$ zaključujemo da važi:

Funkcija $f(x)$	Furijeova transformacija $F[f](k)$
$f(x+y)$	$e^{-2\pi iyk}F(k)$
$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$	$-2\pi k_j F(k)$
$f * g(x)$	$F[f](k)F[g](k)$
$f(x)g(x)$	$F[f] * F[g](k)$
$x_j f(x)$	$\frac{-i}{2\pi}\frac{\partial}{\partial k_j}F(k)$
$p(x)f(x)$	$p(-i\frac{\partial}{\partial k})F(k)$

Pokažimo da ako $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tada i $F[\phi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Pokažimo prvo da važi:

$$|F[\phi](k)| \leq \int |\phi(x)|dx \tag{32}$$

za sve ϕ koje su integrabilne.

$$\begin{aligned} |F[\phi](k)| &= \left| \int \phi(x)e^{2\pi ixk}dx \right| \\ &\leq \int \left|\phi(x)e^{2\pi ixk}\right| dx \end{aligned}$$

Kako je $|e^{2\pi ixk}| = 1$ sledi (32).

Neka je sada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pokažimo da je $F[\phi]$ brzo opadajuća funkcija, to jest $p(k)F[\phi](k)$ ostaje ograničeno za bilo koji polinom p.
Iz tabele imamo

$$p(k)F[\phi](k) = F[p(i\frac{\partial}{\partial x})\phi(x)],$$

pa je

$$|p(k)F[\phi](k)| \leq \int \left|p(i\frac{\partial}{\partial x})\phi(x)\right| dx.$$

Kako smo pretpostavili da je $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $p(i\frac{\partial}{\partial x})\phi(x)$ je brzo opadajuća funkcija. Gornji integral je konačan, pa imamo da je $F[\phi](k)$ brzo opadajuća funkcija.

Ali moramo pokazati i da su svi izvodi bilo kog reda od $F[\phi](k)$ brzo opadajuće funkcije.

Iz tabele vidimo da je :

$$p(\frac{\partial}{\partial k})F[\phi](k) = F[p(ix)\phi(x)]$$

to jest bilo koji izvod Furijeove transformacije funkcije ϕ je Furijeova transformacija proizvoda polinoma i te funkcije. Znamo da je $g(x) = p(ix)\phi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pa je $F[g](k)$ brzo opadajuća funkcija, iz gornje jednakosti sledi da je i $p(\frac{\partial}{\partial k})F[\phi](k)$ brzo opadajuća funkcija.

4.3.2 Furijeove transformacije temperiranih distribucija

Parsevalovu jednakost:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)F[g(x)]dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F[f(x)]g(x)dx$$

ćemo zapisivati i u notaciji $\langle f(x), F[g(x)]\rangle = \langle F[f(x)], g(x)\rangle$.

Definicija 4.2. Neka je $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ i $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Furijeova transformacija od f, $F(f(x))$, definisana je sa:

$$\langle F[f(x)], \phi(x)\rangle := \langle f(x), F[\phi(x)]\rangle.$$

Furijeovu transformaciju temperirane distribucije, $F[f]$, definišemo kao funkcionelu na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, koja svakoj test funkciji $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dodeljuje isti broj koji f dodeljuje $F[\phi]$.

Teorema 4.8. *Ako je f temperirana distribucija, tada je i njena Furijeova transformacija, $F[f]$, temperirana distribucija.*

Definišimo sada $F[f] = g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ i $F[\phi] = \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pomoću Parsevalove jednakosti dobijamo definiciju inverzne Furijeove transformacije temperiranih distribucija:

$$\langle F^{-1}[g], \phi\rangle = \langle g, F^{-1}[\psi]\rangle.$$

Dakle, $F^{-1}[g]$ je takođe temperirana distribucija.

Važi da je:

$$\langle F^{-1}[F(f)], \phi\rangle = \langle F(f), F^{-1}(\phi)\rangle = \langle f, F[F^{-1}(\phi)]\rangle = \langle f, \phi\rangle,$$

to jest $F^{-1}[F(f)] = f$ $(F[F^{-1}(f)] = f)$.

Dakle Furijeova transformacija i inverzna Furijeova transformacija predstavljaju injektivno preslikavanje $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Takođe je $F(f) = 0$ ako i samo ako $f = 0$.

Napomena 4.1. *Znamo da ako $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tada i $F[\phi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Međutim to ne važi i za test funkcije, ako je $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $F[\varphi]$ ne mora biti u $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Zbog toga je nemoguće definisati Furijeovu transfromaciju za sve $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Zato smo definicije dali na prostoru brzo opadajućih test funkcija.*

Sledeću teoremu navodimo bez dokaza, dokaz se može pronaći u [9].

Teorema 4.9. *Furijeova transformacija i inverzna Furijeova transformacija su neprekidna linearna preslikavanja $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Sada ćemo navesti neke korisne osobine Furijeovih transformacija:

1. Posmatrajmo izraz:

$$F^{-1}(F[f])(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(x-y)k} dk \right) dy,$$

   gde je $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Uočimo da je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixk} dk = F^{-1}[1] = \delta,$$

   pa možemo zapisati da je

$$F^{-1}F[f] = f * \delta = f.$$

2. Ako red:

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_i,$$

   konvergira u $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ka g, tada se Furijeova transformacija može primeniti član po član i dobijamo:

$$F[g] = \sum_{i=1}^{\infty} F[g_i],$$

   red koji opet konvergira u $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

3. Ako meru verovatnoće, μ, tretiramo kao temperiranu distribuciju, njenu Furijeovu transformaciju definišemo na sledeći način:

$$F[\mu](k) = \langle \mu, e^{2\pi ixk} \rangle = \int e^{2\pi ixk} d\mu(x).$$

4.4 Primeri Furijeovih transformacija

Primer 4.2. *Nađimo Furijeovu transformaciju Delta funkcije, δ.*

$$\begin{aligned}\langle F[\delta],\phi\rangle &= \langle \delta, F[\phi]\rangle\\ &= F[\phi(0)]\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i0x}\phi(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 1\phi(x)dx = \langle 1,\phi(x)\rangle.\end{aligned}$$

Pa imamo da je $F[\delta]=1$.

Primer 4.3. *Sada ćemo izvesti Furijeovu transformaciju Hevisajdove funkcije.*

Niz temperiranih distribucija

$$\left(\theta(x)e^{-2\pi x/n}\right), \qquad n\in\mathbb{N} \tag{33}$$

konvergira u $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ka $\theta(x)$ kada $n\to\infty$. To sledi iz majoracije:

$$\begin{aligned}\int \left|\left(\theta(x)e^{-2\pi x/n}-\theta(x)\right)\phi(x)dx\right| &\le \int_0^{\infty}\left|e^{-2\pi x/n}-1\right||\phi(x)|dx\\ &\le \int_0^{A}\left|e^{-2\pi x/n}-1\right||\phi(x)|dx + 2\int_A^{\infty}|\phi(x)|dx,\end{aligned}$$

jer za svako $\phi\in\mathcal{S}$ i $\epsilon>0$ postoji $A=A(\epsilon,\phi)>0$ tako da su sabirci u poslednjoj nejednakosti manji od $\frac{\epsilon}{2}$ za $n\ge n_0(\epsilon,A)$.

Za svako $n\in\mathbb{N}$ važi:

$$\begin{aligned}F\left[\theta(t)e^{-2\pi t/n}\right](x) &= \int_0^{\infty} e^{2\pi xt}e^{-2\pi t/n}dt\\ &= \int_0^{\infty} e^{2\pi t(x+i/n)}dt\\ &= \frac{i}{2\pi}\frac{1}{x+i/n}.\end{aligned}$$

Iz konvergencije niza datog u (33) *sledi da niz* $\frac{i}{2\pi}\frac{1}{x+i/n}$ *konvergira u* $\mathcal{S}'$ *ka* $F[\theta(t)]$*. To jest*

$$F\left[\theta(t)\right](x)=\frac{i}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{x+i\epsilon}.$$

Podsetimo se da smo u primeru 2.6. pokazali da je:

$$g^+(x)=\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{x+i\epsilon}=p.v.\frac{1}{x}-i\pi\delta(x),$$

pa je:

$$F\left[\theta(t)\right](x)=\frac{i}{2\pi}\left(p.v.\frac{1}{x}-i\pi\delta(x)\right).$$

Primer 4.4. *Odredimo Furijeovu transformaciju funkcije*

$$f(x)=e^{-a|x|},\qquad a>0,\qquad -\infty<x<\infty.$$

Direktnim računanjem i na osnovu primera 4.3. dobijamo:

$$\begin{aligned}
F[f(x)](k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}e^{2\pi ikx}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{ax}e^{2\pi ikx}dx+\int_{0}^{\infty} e^{-ax}e^{2\pi ikx}dx \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+2\pi ik)x}dx+\int_{0}^{\infty} e^{-(a-2\pi ik)x}dx \\
&= \frac{1}{a+2\pi ik}+\frac{1}{a-2\pi ik}=\frac{2a}{a^2+4\pi^2k^2}.
\end{aligned}$$

Primer 4.5 (Primena Furijeovih transformacija na diferencijalne jednačine)**.** *Razmotrićemo problem pronalaženja funkcije* $f(x)\in L^2(-\infty,\infty)$ *(*$f(x)$ *je Lebeg-merljiva nad* $(-\infty,\infty)$ *i važi* $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2<\infty$*) koja zadovoljava:*

$$f''(x)-f(x)=-g(x),\qquad -\infty<x<\infty,$$

gde je $g(x)\in L^2(-\infty,\infty)$*.*

Ako primenimo Furijeovu transformaciju na jednačinu, i iskoristimo osobinu

$$F[f^{(n)}(x)](k)=(-2\pi ik)^nF[f(x)](k).$$

dobijamo

$$(-2\pi ik)^2F[f(x)] - F[f(x)] = -F[g(x)].$$

Dakle, primenom Furijeove transformacije smo diferencijalnu jednačinu sveli na algebarsku jednačinu. Dalje imamo

$$F[f(x)](-4\pi^2k^2 - 1) = -F[g(x)],$$

$$F[f(x)] = \frac{F[g(x)]}{4\pi^2k^2+1}.$$

Sada primenom osobina Furijeovih transformacija i prethodnog primera dobijamo:

$$\begin{aligned} f(x) &= F^{-1}\left[F[f(x)]\right] \\ &= F^{-1}\left[\frac{1}{4\pi^2k^2+1}\cdot F[g(x)]\right] \\ &= F^{-1}\left[\frac{1}{4\pi^2k^2+1}\right] * F^{-1}\left[F[g(x)]\right] \\ &= \frac{e^{-|x|}}{2} * g(x) \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|}g(t)dt. \end{aligned}$$

5 Opcije

Kako opcije predstavljaju jednu vrstu finansijskih derivata, predstavićemo prvo osnovne pojmove finansijskih derivata, u okviru čega će se izložiti i osnovni pojmovi teorije opcija.

Zatim ćemo izneti osnovnu teoriju vrednovanja u odsustvu arbitraže da bismo na osnovu te teorije mogli da vrednujemo finansijske derivate i izveli osnovne formule za vrednovanje opcija. Pri tome smo koristili [1], [6] i [7] iz spiska literature.

5.1 Finansijski derivati

Finansijski derivati su hartije od vrednosti čija je vrednost izvedena iz podloge, to jest zavisi od vrednosti nekog drugog dobra ili hartije od vrednosti. Osnovne vrste finansijskih derivata su terminski ugovori: *forvardi*, *fjučeri* i *opcije*. Njima se trguje na terminskim tržištima. Učesnike terminskih tržišta delimo na hedžere - žele da se zaštite od rizika i promene cena; i špekulante - prihvataju rizik, radi ostvarivanja profita od promene cena. Dakle, cilj trgovine finansijskim derivatima je zaštita od nepovoljnih kretanja cena sa jedne strane, i ostvarivanja profita sa druge.

Napomenimo još da je uobičajna terminologija tržišta da kada kupimo neku aktivu zauzimamo dugu poziciju, a kada prodajemo kratku. To jest kažemo da kupac zauzima dugu, a prodavac kratku poziciju.

Forvard ugovori se sklapaju direktno između dve zainteresovane strane. Kod forvard ugovora kupac (prodavac) preuzima obavezu da kupi (proda) podlogu, pri čemu su tačno određeni: trenutak trgovine (*datum dospeća*), količina podloge, i cena koja se ugovara u momentu sklapanja ugovora, a važi na datum dospeća.

Fjučers ugovori takođe podrazumevaju obavezu da se kupi (proda) podloga: na datum dospeća, u određenoj količini i po određenoj ceni, ali su standardizovani u pogledu vrste robe, količine, kvaliteta i datuma dospeća. Stoga se za razliku od forvard ugovora, fjučers ugovorima trguje na berzama. Ova trgovina podrazumeva prodaju (kupovinu) **prava na kupovinu (prodaju)** predmeta ugovora, a ne samog dobra koje je predmet ugovora, to jest prava i obaveze se mogu prodavati i kupovati pre roka dospeća ugovora.
Dakle imalac fjučer ugovora može da čeka datum dospeća i da kupi podlogu ugovora, po dogovorenim uslovima, ili može da proda ugovor nekom drugom pre datuma dospeća (na ovaj način većina špekulanata izvrši likvidiranje preuzetih pozicija, jer njihov cilj nije isporuka robe, već ostvarivanje profita).

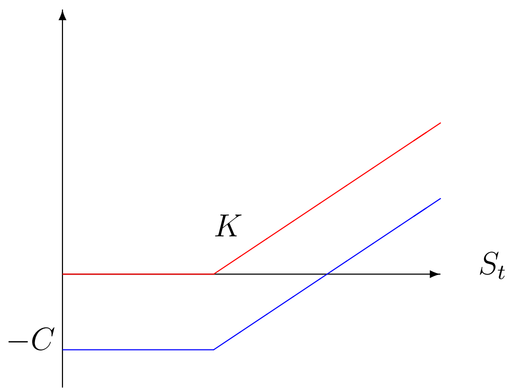
Opcije su nešto komplikovanije hartije od vrednosti od forvarda i fjučera. Vlasnik opcije ima pravo, ali ne i obavezu da proda ili kupi podlogu po unapred utvrđenoj ceni. Evropske opcije se mogu izvršiti samo na datum dospeća, dok Američke opcije mogu izvšiti i pre datuma dospeća. Mi ćemo se baviti samo Evropskim opcijama.

Evropska kupovna opcija daje vlasniku opcije pravo, ali ne i obavezu, da na datum dospeća T kupi podlogu po ugovorenoj ceni izvršavanja K (strajk cena). Druga strana, pisac opcije, ima obavezu da proda podlogu ako vlasnik opcije želi da je kupi. Za ovo pravo da kupi podlogu vlasnik opcije je dužan da plati određenu premiju. Vrednost opcije u nekom trenutku t označavaćemo sa $C(S_t, t)$, gde je S_t vrednost podloge u momentu t, a premiju koju vlasnik plaća u trenutku sklapanja ugovora sa C.
U momentu izvršenja opcije moguće su dve situacije:

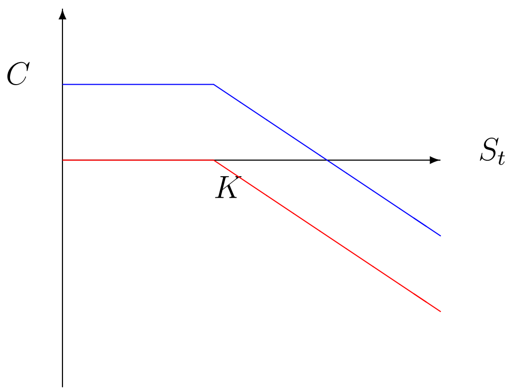
- $S_t > K$, tada vlasnik opcije koristi svoje pravo kupuje podlogu po ceni K, i ako je u tom trenutku proda na tržistu ima prihod od $S_t - K$. Pri tom pisac opcije ima gubitak od $K - S_t$.
- $S_t < K$, vlasnik opcije neće izvršiti opciju, te je njegov prihod nula.

Predstavićemo u tabeli prihod i profit vlasnika i pisca evropske kupovne opcije.

	vlasnik opcije	pisac opcije
prihod	$C(S_t, t) = max\{S_t - K, 0\}$	$min\{K - S_t, 0\}$
profit	$max\{S_t - K, 0\} - C$	$min\{K - S_t, 0\} + C$



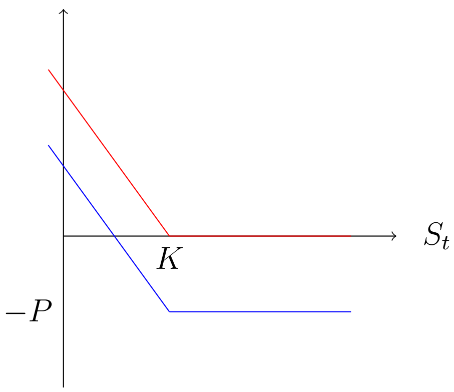
Slika 5.1 Prihod i profit vlasnika evropske kupovne opcije



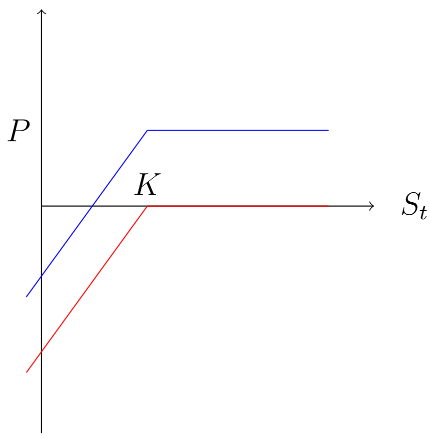
Slika 5.2 Prihod i profit pisca evropske kupovne opcije

Evropska prodajna opcija daje vlasniku pravo, ali ne i obavezu, da na datum dospeća T proda podlogu po ugovorenoj ceni izvršavanja K, dok je pisac opcije obavezan da kupi podlogu ako vlasnik želi da je proda. Vrednost prodajne opcije u trenutku t označavaćemo sa $P(S_t, t)$, a premiju koju vlasnik plaća u trenutku sklapanja ugovora sa P.
Za prodajne opcije važi sledeća tabela:

	vlasnik opcije	pisac opcije
prihod	$P(S_t, t) = max\{K - S_t, 0\}$	$min\{S_t - K, 0\}$
profit	$max\{K - S_t, 0\} - P$	$min\{S_t - K, 0\} + P$



Slika 5.3 Prihod i profit vlasnika evropske prodajne opcije



Slika 5.4 Prihod i profit pisca evropske prodajne opcije

Zaključujemo da, ako investitor smatra da će cena neke aktive rasti onda će kupiti kupovnu opciju ili napisati prodajnu. A ako očekuje da će cena aktive pasti kupuje prodajnu ili piše kupovnu opciju.

Uočimo još jednu osobinu opcija: za vlasnika opcije je gubitak ograničen, dok su prihod i profit neograničeni.

Uvešćemo još podelu opcija u nekom trenutku t u odnosu na to da li bi dovele do prihoda da se izvrše u tom trenutku.

- Opcija je ITM (in-the-money) ako bi dovela do pozitivnog prihoda da se odmah izvrši.
- Opcija je ATM (at-the-money) nula prihoda da se odmah izvrši.
- Opcija je OTM (out-the-money) negativan prihod da se odmah izvrši.

5.2 Vrednovanje u odsustvu arbitraže

Arbitraža predstavlja mogućnost zarade bez rizika. Na primer imamo dva portfolija koja će u nekom trenutku u budućnosti imati istu cenu, a danas imaju različitu. Tada imamo mogućnost profita bez rizika ako zauzmemo dugu poziciju na jeftinijem i kratku na skupljem portfoliju. Prema tome, ako dva portfolia imaju istu vrednost u nekom trenutku, tada oni moraju imati istu vrednost i u bilo kom drugom trenutku ili postoji mogućnost arbitraže. Osnovna pretpostavka efikasnog tržista je da nema mogućnosti arbitraže.

Razmotrimo prvo APT (*arbitrage pricing theory*) teoriju vrednovanja. Osnovne pretpostavke ovog modela su da cene bilo koje aktive predstavljaju linearnu funkciju konačnog broja rizičnih faktora; i da na tržistu postoji

nerizična aktiva koja daje prinos sa određenom stopom bez rizika.
Tada se prinos neke aktive i može predstaviti funkcijom:

$$r_i = a_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j,$$

gde je a_i specifična komponenta prinosa direktno vezana za posmatranu aktivu, a f_j, $j = 1, ..., m$ su faktori rizika koji na investiciju utiču sa koeficijentima b_{ij}. Pretpostavljamo da su komponente a_i nezavisne od faktora rizika, i da faktori rizika imaju očekivanje jednako nuli.

Označimo sa r prinos koji donosi nerizična aktiva.

Razmotrimo prvo model sa jednim faktorom rizika. Ako uzmemo bilo koje dve aktive možemo napraviti portfolio čiji je koeficijent izloženosti riziku b_i, jednak nuli. Ovakav portfolio zbog uslova odsustva arbitraže mora imati prinos jednak prinosu aktive bez rizika. Na osnovu toga se očekivani prinos aktive i može izraziti formulom:

$$E(r_i) = r + \lambda b_i.$$

Kada imamo m faktora rizika sledeća formula daje očekivani prinos investicije

$$E(r_i) = r + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j b_{ij},$$

gde se veličina λ_j naziva cena rizika za faktor f_j. Ovaj model se može više približiti realnosti ako uključimo i mogućnost greške što ćemo označavati sa ε_i, pa će formula za prinos izgledati ovako:

$$r_i = a_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j + \varepsilon_i.$$

Pri tome, pretpostavljamo da je $E(\varepsilon_i) = 0$, i da su ε_i nezavisne od faktora rizika.

Naš osnovni aparat pri izračunavanju vrednosti cena određenih aktiva je promena mere. U nastavku ćemo videti odakle se javlja potreba za tom promenom mere i kratak opis takvog postupka. Pri tome smo sledili pristup izložen u [1] iz spiska literature.

Iz APT modela vidimo kako se bilo koja aktiva može dekomponovati na nerizičan prinos i rizičnu premiju. Modelirajmo sada rizičnu premiju kao određeni stohastički poremećaj:

$$r_i = r + \epsilon_i,$$

gde poremećaj ima očekivanje jednako rizičnoj premiji. Prikladnom promenom mere mogli bismo da promenimo očekivanje poremećaja na nulu. Tačnije za neku novu meru Q važi $E^Q(\epsilon_i) = 0$. Tada postoji Radon-Nikodimov izvod μ tako da važi (videti dodatak 7.1.5):

$$\int \epsilon_i \mu \, dP = 0.$$

Jedna od fundamentalnih teorema finansija kaže da ovakva promena mere postoji ako i samo ako ne postoji mogućnost arbitraže. U opštem slučaju ovakva mera nije jedinstvana, a ako je to slučaj kažemo da je tržiste kompletno. Mera Q se naziva *rizik neutralna* zato što pod uslovom odsustva arbitraže sve aktive izračunate ovom merom daju isti nerizičan prinos.

Posmatrajmo sada vrednost neke rizične aktive $S_i(t) = e^{X_i(t)} = e^{X_{i,t}}$ koju ćemo diskontovati pomoću nerizične aktive $B(0,T)$, čija je dinamika:

$$dB(t,T) = rB(t,T)dt \ , \ \ r > 0,$$

Važi da je:

$$Z_{i,t} \equiv \frac{S_{i,t}}{B(t,T)} = S_{i,t}e^{-r(T-t)} = e^{X_{i,t}-r(T-t)}.$$

Ako sada primenimo uslov odsustva arbitraže na logaritam prinosa pod rizik neutralnom merom dobijamo:

$$E^Q(d \ \ln Z_{i,t}) = E^Q(dX_{i,t}) - rdt = (E^Q(r_i) - r)dt = 0.$$

Dakle buduća vrednost bilo koje rizične aktive diskontovana nerizičnom kamatnom stopom ima očekivani prinos nula za svako $T \geq t$ pod merom Q, to jest očekivanje buduće vredosti je sadašnja vrednost. Procese sa ovakvom osobinom zovemo martingali.

Sada možemo zaključiti da na tržitu ne postoji mogućnost arbtraže ako i samo ako postoji mera Q pod kojom su cene svih aktiva diskontovanih nerizičnom kamatnom stopom martingali. Ostaje još da osiguramo da nova mera ne menja skup aktiva koje su pod starom merom bile jednake nuli, to jest mere moraju biti ekvivalentne, te se stoga nova mera naziva *ekvivalentna martingalna mera* (EMM).

Dakle, ako pretpostavimo nemogućnost arbitraže i kompletno tržište, za datu meru verovatnoća kretanja cena aktive postoji jedinstvena njoj ekvivalentna mera u odnosu na koju je proces kretanja cena martingal. Ovo su upravo pretpostavke na osnovu kojih ćemo u glavi šest dati cene Evropskih opcija.

Sada opisujemo postupak promene mere.

Svaki proces možemo posmatrati kao slučajnu promenljivu na prostoru trajektorija. Konkretno, posmatraćemo kadlag procese definisane na prostoru $\Omega = D([0,T])$, sa σ-algebrom $\mathcal{F}$ na osnovu koje ćemo davati procene za trajektorije (videti dodatak 7.2). Raspodela verovatnoće procesa $(X_t)_{t\geq 0}$ tada definiše meru verovatnoće P^X na ovom prostoru trajektorija. Neka je $(Y_t)_{t\geq 0}$ neki drugi kadlag proces sa raspodelom P^Y na prostoru trajektorija Ω.

Za P^X i P^Y kažemo da su ekvivalentne mere verovatnoća ako definišu isti skup mogućih ishoda ($P^X(A) = 1 \Leftrightarrow P^Y(A) = 1$). Tada stohastički modeli X i Y definišu isti skup mogućih trajektorija.

Postupak pravljenja novog procesa na istom skupu trajektorija sa novim verovatnoćama događaja, nazivamo promena mere.

Sada ćemo pokazati jedan od načina na koji možemo promeniti meru.

Neka je data mera verovatnoće P na prostoru trajektorija Ω, i neka je data slučajna promenljiva $Z > 0$ na Ω tako da $E^P(Z) = 1$ nova mera verovatnoće definisana sa:

$$\frac{dQ}{dP} = Z, \qquad \text{to jest} \quad (\forall A \in \mathcal{F}) \quad (Q(A) = E^P(Z\mathbb{I}_A))$$

je ekvivalentna meri P.

Ako se ograničimo na događaje koji su se dogodili između 0 i t, tada je svaka trajektorija određena sa:

$$Z_t(\omega) = E(Z|\mathcal{F}_t), \qquad \text{to jest} \quad (\forall A \in \mathcal{F}_t) \qquad (Q(A) = E^P(Z_t\mathbb{I}_A)).$$

Po svojoj konstrukciji $(Z_t)_{t\geq 0}$ je striktno pozitivan martingal za koji je $E^P(Z_t) = 1$.

5.3 Vrednovanje finansijskih derivata

Videli smo da prihod finansijskih derivata zavisi od podloge, neke rizične aktive. Kako pretpostavljamo odsustvo arbitraže, konstruisaćemo portfolio koji daje isti prihod kao finansijski derivat, i vrednovati taj portfolio.

Ako takav portfolio postoji on se naziva dostižan, a ako su sve aktive na tržištu dostižne kažemo da je tržište kompletno (što podrazumeva postojanje jedinstvene rizik neutralne mere).

Primer 5.1. *Posmatrajmo forvard ugovor sa prihodom $S_T - F$ u trenutku T. Isti prihod bismo ostvarili i kupovinom S_t (duga pozicija +) i prodajom (kratka pozicija -) $B(t,T)F$. Ovo predstavlja replikantni portfolio za forvard.*

Vidimo da trgovina forvardom podrazumeva investiranje u jednu aktivu zadužujući se u drugoj. Ako je tržište kompletno vrednost forvard ugovora jednaka je replikantnom portfoliju u svim mogućim stanjima (slučajni ishodi). U suprotnom tržište je nekompletno.

Prihod forvard ugovora predstavlja linearnu funkciju, pa se može napraviti portfolio koji važi za sve datume dospeća. Kada prihod ne predstavlja linearnu funkciju, što je slučaj kod opcija, konstrukcija replikantnog portfolija je komplikovanija.

Posmatrajmo Evropske kupovne opcije čiji je prihod u trenutku T dat funkcijom $max(S_T - K)$. Replikantni portfolio predstavlja funkcija:

$$\Delta S_t - B(t,T)W,$$

pri čemu zauzimamo dugu poziciju na S_t u količini Δ i kratku poziciju na nerizičnu aktivu.

Neka je Q ekvivalentna martingalna mera. Važi:

$$E_t^Q(max\{S_T - K, 0\}) = \Delta S_t - B(t,T)W.$$

Ako pretpostavimo da je Q takvo da se opcija izvršava sa verovatnoćom 1 (opcija je ITM), ovo predstavlja forvard ugovor pa je $\Delta = 1$, a $W = K$. Ako se opcija ne izvrši cena će biti nula, pa je $\Delta = W = 0$. Mogući dug nam predstavljaju vrednosti od nula do K. Sada možemo formulu zapisati ovako:

$$E_t^Q(max\{S_T - K, 0\}) = \Delta S_t - \alpha B(t,T)K,$$

gde su α i Δ iz $[0,1]$.

Replikantni portfolio za prodajnu opciju dobijamo iz put-call pariteta, po kome važi da je

$$C + B(t,T)K = P + S_t,$$

pa je replikantni portfolio prodajne opcije dat sa:

$$E_t^Q(max\{K - S_T, 0\}) = -(1-\Delta)S_t + (1-\alpha)B(t,T)K.$$

5.3.1 Opcije

Definišimo fiktivni instrument koji plaća jednu novčanu jedinicu ako je podloga u trenutku T iznad (kupovna opcija) ili ispod (prodajna opcija) nekog određenog praga. Ovakve ugovore ćemo nazivati *digitalne opcije.*

Da bi ih doveli u vezu sa Evropskim opcijama posmatraćemo skup digitalnih opcija koje imaju isti datum dospeća, a čije su strajk cene različite.

Pretpostavimo da strajk cena ima kontinuum. Posmatrajmo spred strategiju (kombinaciju) digitalnih prodajnih opcija:

$$\frac{P(K+h)-P(K)}{h},$$

gde $P(x)$ predstavlja prodajnu opciju u trenutku t, sa strajk cenom x. Kupujemo $\frac{1}{h}$ opcija sa strajk cenom $K+h$ i prodajemo $\frac{1}{h}$ opcija sa strajk cenom K.

U graničnom slučaju kada $h \to 0$ na datum dospeća prihod spreda konvergira Hevisajdovoj funkciji koju ćemo označavati sa

$$\theta(-\ln(\frac{S_T}{K})) = \begin{cases} 1, & S_T \leq K, \\ 0, & S_T > K. \end{cases}$$

Na osnovu martinagalne teorije vrednovanja sledi da je cena digitalne opcije:

$$\begin{aligned} P_{CON}(K) &= B(t,T)E_t^Q(\theta(-\ln(\frac{S_T}{K}))) \\ &= B(t,T)Q(S_T \leq K). \end{aligned}$$

Indeks CON u P_{CON} označava da se radi o keš ili ništa opciji (cash-or-nothing option) koje imaju prihod $B \cdot \theta(S_T - K)$, gde je $\theta(.)$ Hevisajdova funkcija, to jest prihod je jednak nuli ako je $S_T > K$, a jednak je B ako je $S_T < K$. U ovom slučaju B je jednako 1. Ove opcije se mogu interpretirati kao direktna opklada na cenu aktive.

S obzirom da važi:

$$\lim_{h\to 0} \frac{P(K+h)-P(K)}{h} = \frac{\partial P(K)}{\partial K},$$

sledi da je:

$$P_{CON}(K) = \frac{\partial P(K)}{\partial K} = B(t,T)Q(S_T \leq K).$$

Analogno, cena digitalne kupove opcije koja plaća jednu novčanu jedinicu u slučaju da je $S_T > K$ je:

$$C_{CON}(K) = -\frac{\partial C(K)}{\partial K} = B(t,T)(1 - Q(S_T \leq K)).$$

Posmatrajmo sada takozvani butterfly spread (kombinaciju):

$$\frac{P(K+h) - 2P(K) + P(K-h)}{h}.$$

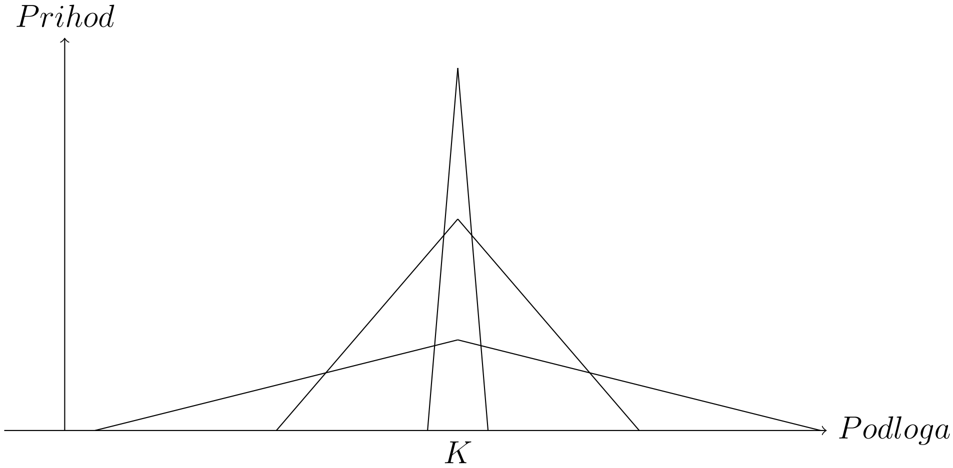
Kada $h \to 0$ dobijamo:

$$\lim_{h\to 0} \frac{P(K+h) - 2P(K) + P(K-h)}{h} = \frac{\partial^2 P(K)}{\partial K^2}.$$

Kako je prvi izvod prodajne opcije diskontovana vrednost funkcije raspodele ($F_X(x)$), njen izvod ako postoji mora biti diskontovana vrednost gustine rapodele verovatnoća ($\varphi_X(x)$).

Što se tiče prihoda kada $h \to 0$ on postaje Dirakova delta funkcija, beskonačne visine u K i nula u svim drugim tačkama. Računamo ga po funkciji

$$prihod = max\{S_T - (K+h), 0\} - 2max\{S_T - K, 0\} + max\{S_T - (K-h), 0\}.$$



Slika 5.5 Prihod butterfly spreda kada $h \to 0$

Ovo odgovara definiciji Arrow-Debreu hartija[4]. Sledi da je cena Arrow-Debreu hartija diskontovana gustina raspodele.

Finansijski sitem cena je jedinstveno određen skupom funkcija raspodela ili odgovarajućim gustinama raspodela. U okvirima Furijeove analize bilo koji skup cena je jedinstveno određen karakterističnim funkcijama.

Drugim rečima, sistem cena se može predstaviti *jezgrom cena*, što predstavlja skup cena digitalnih opcija u svakom trenutku t.

Jezgro cena			
Instrument	Prihod	Aproksimacija	Cena
Digitalna opcija	Hevisajdova funkcija	Prodajni(Kupovni) spred	Diskontovana $F_X(x)$
Arrow-Debreu	Dirakova delta funkcija	Butterfly spred	Diskontovana $\varphi_X(x)$

[4]Fiktivni instrument koji u stanju S (neki mogući ishod) plaća jednu monetarnu jedinicu, a u svim ostalim nula.

5.3.2 Evropske opcije i digitalne opcije

Dali smo cenu CON digitalnih opcija koje plaćaju jedinicu novca na datum dospeća:

$$O_{CON} = B(t,T)E_t^Q[\theta(w\ln(\frac{S_T}{K}))] = \begin{cases} B(t,T)(1-Q(K)), & w=1, \\ \\ B(t,T)Q(K), & w=-1. \end{cases}$$

Za $w = 1$ dobijamo formulu za kupovne opcije, a za $w = -1$ formulu za prodajne opcije.

Posmatrajmo sada instrument koji plaća jednu jedinicu podloge u slučaju da je ona iznad (kupovna), ili ispod (prodajna) strajk cene. Ovakav instrument označavamo sa AON (asset-or-nothing) digitalne opcije. U skladu sa prethodnom formulom cenu ovog instrumenta možemo zapisati sa:

$$O_{AON} = B(t,T)E_t^Q[S_T\theta(w\ln(\frac{S_T}{K}))].$$

Sada ćemo pomoću digitalnih AON i CON opcija dobiti cenu za Evropske opcije.

Ako su Q i Q^* dve ekvivalnente martingalne mere tada važi:

$$E_t^Q[Y] = E_t^{Q^*}\left[Y\frac{dQ}{dQ^*}\right]E_t^Q\left[\frac{dQ^*}{dQ}\right],$$

za sve slučajne promenljive Y. Ako izaberemo da je:

$$\frac{dQ^*}{dQ} = \frac{B(0,T)S_T}{E_0^Q(B(0,T)S_T)} = \frac{B(0,T)S_T}{S_0},$$

dobijamo:

$$\begin{aligned} &B(t,T)E_t^Q[S_T\theta(w\ln(\frac{S_T}{K}))] \\ &= B(t,T)E_t^{Q^*}\left[\frac{S_0}{B(0,T)}\theta(w\ln(\frac{S_T}{K}))\right]E_t^Q\left[\frac{B(0,T)S_T}{S_0}\right] \\ &= B(t,T)E_t^{Q^*}\left[\theta(w\ln(\frac{S_T}{K}))\right]E_t^Q\left[S_T\right]. \end{aligned}$$

Kako u rizik-neutralnoj meri važi $S_t = B(t,T)E_t^Q(S_T)$ imamo da je:

$$O_{AON} = S_tE_t^{Q^*}[\theta(w\ln(\frac{S_T}{K}))] = \begin{cases} S_t(1-Q^*(K)), & w=1, \\ \\ S_tQ^*(K), & w=-1. \end{cases}$$

Vrednost AON opcije zavisi od spot cene podloge i vrednosti CON opcije pod novom merom Q^*.

Posmatrajmo sada sledeći portfolio: duga pozicija na AON digitalnu kupovnu opciju, kratka pozicija na K CON digitalnih kupovnih opcija sa istom strajk cenom K i datumom dospeća T. Prihod takvog portfolia u trenutku T iznosi $max(S_T - K)$.

Ovaj portfolio predstavlja replikanti portfolio Evropske kupovne opcije, pa je:

$$C = C_{AON} - KC_{CON}.$$

Uporedimo ga sa portfoliom koji smo ranije dobili:

$$C = \Delta S_t - \alpha B(t,T)K.$$

Sledi da je $C_{AON} = \Delta S_t$ i $C_{CON} = \alpha B(t,T)$.

Ubacujući cenu digitalnih opcija u formulu dobijamo formulu za cenu Evropskih kupovnih opcija:

$$C = S_t(1 - Q^*(K)) - B(t,T)(1 - Q(K))K.$$

Primenom put-call pariteta dobijamo i formulu za cenu prodajnih opcija:

$$P = -Q^*(K)S_t + B(t,T)Q(K)K.$$

Dakle, pod pretpostavkom odsustva arbitaže uspeli smo da napravimo replikanti portfolio, i dođemo do formula za Evropsku prodajnu i kupovnu opciju. Ove formule će nam biti polazna tačka kada u poslednjoj glavi formule za vrednovanje Evropskih opcija budemo izvodili u okvirima Furijeove analize.

6 Primena Furijeovih transformacija u računanju cena opcija

Videli smo da ceo sistem cena može biti predstavljen jezgrom cena (skup digitalnih opcija u svakom trenutku t), i da je cena digitalne opcije ustvari diskontovana vrednost funkcije raspodele verovatnoća.

Kako svakoj funkciji raspodele odgovara tačno jedna karakteristična funkcija, u okvirima Furijeove analize sistem cena je jednistveno određen karakterističnim funkcijama.

Sada ćemo iskoristiti tu vezu i cene opcija dati u okvirima Furijeove analize. Prvo ćemo dati cenu digitalnih CON opcija, zatim digitalnih AON opcija, i na kraju cene Evropskih opcija. Pri tome smo koristili knjigu [1] iz spiska literature.

Što se tiče dinamike cene aktive koristimo Levijeve procese za njihovo predstavljanje, zbog činjenice da je svaki Levijev proces određen svojom karakterističnom funkcijom.

Uvedimo oznake kako bi definisali prihod opcije.
$m \equiv \dfrac{B(t,T)K}{S_t}$ skalirana vredost strajk cene (cena izvršavanja) u odnosu na podlogu (govori nam da li je opcija IT, AT ili IN).
$k = \ln(m)$ promenljiva koja predstavlja strajk cenu (u trenutku T, $k = \ln(\dfrac{K}{S_T})$).
$X_t = \ln(\dfrac{S_t}{B(t,T)})$ logaritam diskontovane vrednosti podloge.
Definišimo Hevisajdovu funkciju $\theta(\omega(X_T - X_t - k))$ koja za $\omega = -1$ definiše događaj $\{S_T \leq K\}$, a za $\omega = 1$ događaj $\{S_T > K\}$.

Dakle zanimaće nas verovatnoća promenljive $u = X_T - X_t$, to jest priraštaji procesa između t i T.

6.1 CON Opcije

Polazimo od formule koju smo dobili u prethodnoj glavi:

$$O_{CON} = B(t,T)E_t^Q[\theta(\omega(X_T - X_t - k))] = \begin{cases} B(t,T)(1 - Q(k)), & w = 1, \\ B(t,T)Q(k), & w = -1. \end{cases}$$

Za $\omega = -1$ imamo

$$Q(k) = E_t^Q[\theta(k-u)] = \int_{-\infty}^{\infty} Q(du)\theta(k-u)$$

Zaključujemo da verovatnoću raspodele Q i prihod možemo tretirati kao uopštene funkcije, a formulu za vrednovanje kao konvoluciju distribucija. To jest:

$$Q(k) = Q * \theta(k)$$

Što se tiče raspodele pretpostavljamo da nam je poznata karakteristična funkcija. Karakterističnu funkciju ćemo definisati malo drugačije od uobičajnog:

$$\phi_X(v) = E(e^{i2\pi v X_T}) = \int Q(du) e^{i2\pi vu} = F[Q].$$

Podsetimo se da smo izračunali da je Furijeova transformacija Hevisajdove funkcije

$$\begin{aligned} F[\theta](v) &= \frac{i}{2\pi}\left(p.v.\frac{1}{v} - i\pi\delta(v)\right) \\ &= \frac{1}{2}\delta(v) + \frac{i}{2\pi}p.v.(\frac{1}{v}). \end{aligned}$$

Ako iskoristimo osobinu Furijeovih transformacija:

$$f * g = F^{-1}\left[F[f]F[g]\right]$$

dobijamo:

$$Q(k) = \int e^{-2\pi iku}\phi_X(u)\left(\frac{1}{2}\delta(u) + \frac{i}{2\pi}p.v.(\frac{1}{u})\right) du.$$

Kada sredimo izraz dobijamo

$$Q(k) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi}\int \frac{du}{u}\left(e^{-2\pi iku}\phi_X(u) - 1\right).$$

Ova formula nam daje vezu između karakteristične funkcije i funkcije raspodele verovatnoća.

Sada imamo da je cena digitalne CON prodajne opcije data sa:

$$P_{CON} = B(t,T)\left\{\frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi}\int \frac{du}{u}\left(e^{-2\pi iku}\phi_X(u) - 1\right)\right\}.$$

Ako izrazimo

$$\begin{aligned} 1 - Q(k) &= 1 - \int Q(du)\theta(k-u) \\ &= 1 - \left\{\frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi}\int \frac{du}{u}\left(e^{-2\pi iku}\phi_X(u) - 1\right)\right\}, \end{aligned}$$

onda dobijamo vrednost CON kupovnih opcija:

$$C_{CON} = B(t,T)\left\{\frac{1}{2} - \frac{i}{2\pi}\int \frac{du}{u}\left(e^{-2\pi iku}\phi_X(u) - 1\right)\right\}.$$

6.2 AON opcije

Videli smo da su cene povezane promenom mere jednačinom

$$B(t,T)E^Q(S_T 1_{[S_T \le K]}) = S_t Q^*(k).$$

Radon-Nikodimov izvod koji povezuje dve mere je S_T, pa možemo zapisati:

$$Q^*(du) = Q(du)e^u.$$

Karakterističnu funkciju mere Q^* označićemo sa:

$$\phi^*_X(k) = \int Q^*(du)e^{2\pi iku}.$$

Vezu karakterističnih funkcija mera Q i Q^* možemo izraziti na sledeći način

$$\begin{aligned}\phi^*_X(k) &= \int Q(du)e^u e^{2\pi iku} \\ &= \int Q(du)e^{2\pi i(k-i/2\pi)u} \\ &= \phi_X(k - \frac{i}{2\pi}),\end{aligned}$$

pa možemo zapisati da je:

$$P_{AON} = S_t \left\{ \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \int \frac{du}{u} \left(e^{-2\pi iku}\phi_X(u - \frac{i}{2\pi}) - 1 \right) \right\},$$

$$C_{AON} = S_t \left\{ \frac{1}{2} - \frac{i}{2\pi} \int \frac{du}{u} \left(e^{-2\pi iku}\phi_X(u - \frac{i}{2\pi}) - 1 \right) \right\}.$$

6.3 Evropske opcije

Uočimo da su u predhodnim formulama sve informacije o dinamici podloge S sadržane u funkciji

$$d(k,\alpha) \equiv \int \frac{du}{u} \left(e^{-2\pi iku}\phi_X(u-\alpha) - 1 \right),$$

gde je $\alpha = 0$ za CON opcije, i $\alpha = \frac{i}{2\pi}$ za AON opcije. Ova funkcija se naziva *karakteristični integral aktive S.*

Verovatnoću raspodele koju smo koristili u gornjim formulama možemo označiti sa:

$$D(k,\alpha,\omega) = \frac{1}{2} - \omega \frac{i}{2\pi} d(k,\alpha),$$

gde je $\omega = -1$ za prodajne opcije i $\omega = 1$ za kupovne opcije.

Sada gornje formule primenjujemo na formule za cenu Evropskih opcija koje smo dali u glavi 2 i dobijamo da je cena Evropske kupovne opcije:

$$C = S_t D(k, \frac{i}{2\pi}, 1) - B(t,T) K D(k, 0, 1),$$

a da je cena Evropske prodajne opcije:

$$P = -S_t D(k, \frac{i}{2\pi}, -1) + B(t,T) K D(k, 0, -1),$$

odnosno uopštenu formulu za vrednovanje Evropskih opcija možemo zapisati ovako:

$$O(S_t; K, T, \omega) = \omega \left[S_t D(k, \frac{i}{2\pi}, \omega) - B(t,T) K D(k, 0, \omega) \right].$$

7 Dodatak

U ovoj glavi izlažemo osnovne pojmove teorije verovatnoće i osnovne pojmove stohastičkih procesa. S obzirom da smo u ovom radu posmatrali kretanje cena kao slučajne stohastičke procese, poznavanje ove teorije je neophodno za razumevanje rada. Korištena je litaratura [1], [8], [12], [13] i [14].

7.1 Osnovni pojmovi teorije verovatnoće

7.1.1 Elementi teorije mere

Neka je $\Omega \neq \emptyset$ i $\mathcal{P}(\Omega)$ partitivni skup.

Definicija 7.1. Familija skupova $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ sa osobinama:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F} \quad (gde\ je\ \overline{A} = \Omega \setminus A)$;
3. $A_n \in \mathcal{F},\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

je σ-algebra na skupu Ω.

Elementi skupa $\mathcal{F}$ zovu se *merljivi skupovi*, a uređena dvojka $(\Omega, \mathcal{F})$ je *merljiv prostor.*
Navedimo neke primere σ-algebre.

1. $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ je trivijalna σ-algebra.
2. $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$.
3. $\mathcal{F}_3 = \mathcal{P}(\Omega)$.

Ako je $\mathcal{A}$ familija podskupova od $\mathcal{P}(\Omega)$, najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{A}$ zove se σ-algebra generisana sa $\mathcal{A}$. Ako je $\Omega = \mathbb{R}$ najmanja σ-algebra koja sadrži sve podintervale od $\mathbb{R}$ zove se Borelova σ-algebra, $\mathcal{B}$.
Mera je funkcija koja svakom merljivom skupu dodeljuje realan broj.

Definicija 7.2. Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor. Mera je funkcija $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ za koju važi:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;

2. ako je $\{A_n\}_{n\geq 1}$ disjunktan niz skupova $\mathcal{F}$ tada je

$$\mu(\bigcup_{n\geq 1}) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

Mera μ je konačna ako je $\mu(\Omega) < +\infty$, a beskonačna ako je $\mu(\Omega) = +\infty$. Merljiv skup $A \in \mathcal{F}$ za koji važi $\mu(A) = 0$ zovemo skup mere nula.

Za meru μ na Borelovoj σ-algebri $\mathcal{B}$ kažemo da je lokalno konačna ako za svaki kompaktan skup $B \in \mathcal{B}$ ako važi $\mu(B) < +\infty$.

Definicija 7.3. Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor. Za realnu funkciju $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kažemo da je merljiva ako za svaki Borelov skup $A \in \mathcal{B}$ važi:

$$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}.$$

Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor sa merom μ. Dve merljive funkcije f i g su jednake μ-skoro svuda ako i samo ako $\mu(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Mera μ koja zadovoljava $\mu(\Omega) = 1$ zove se *mera verovatnoće* i označava sa $\mathbb{P}$, a prostor verovatnoće označavamo sa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Elementi prostora Ω su svi mogući ishodi nekog procesa, ili sva moguća stanja, a merljivi skupovi se nazivaju događajima. Nosač od $\mathbb{P}$ je događaj $A \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(A) = 1$. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ prostor verovatnoće, tada važi:

- ako je $A \in \mathcal{F}$, tada je $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
- ako su $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subset B$ tada je $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
- ako su $A, B \in \mathcal{F}$, tada je $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Definicija 7.4. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ prostor verovatnoće i $A, B \in \mathcal{F}$, pri čemu je $\mathbb{P}(B) > 0$. Uslovna verovatnoća $\mathbb{P}(A|B)$ (verovatnoća događaja A pod uslovom da se realizovao događaj B) je:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Definicija 7.5. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ prostor verovatnoće. $A, B \in \mathcal{F}$ su nezavisni događaji ako važi:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Definicija 7.6. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ prostor verovatnoće. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ su nezavisni ako za svako k i svako $i_1, i_2, \ldots, i_k$:

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ prostor verovatnoće. *Slučajna promenljiva* je merljiva funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Funkcija

$$\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}\{X \in A\} = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$

ja dobro definisana za svaki realan Borelov skup A, i zove se *raspodela verovatnoća slučajne promenljive* X.

Teorema 7.1. *Neka je X slučajna promenljiva nad prostorom verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada X definiše novi prostor verovatnoća $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$, gde je $\mathbb{P}_X$ raspodela verovatnoća slučajne promenljive X.*

Funkcija $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, definisana sa:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x])$$

zove se *funkcija raspodele slučajne promenljive* X.

Za slučajnu promenljivu X kažemo da je *diskretna* ako je njen skup slika najviše prebrojiv. Zakon raspodele diskretne slučajne promenljive najčešće zapisujemo da sledeći način:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots \end{pmatrix}$$

gde su $\{x_1, x_2, \ldots\}$ moguće vrednosti slučajne promenljive, a $p(x_k) = \mathbb{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$

Definicija 7.7. Slučajna promenljiva X je apsolutno neprekidna ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $\varphi_X(x)$, $-\infty < x < \infty$ takva da je, za svaki skup $A \in \mathcal{B}$,

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A \varphi_X(x)dx.$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ zove se gustina raspodele verovatnoća slučajne promenljive X.

Ako stavimo $A = [-\infty, x]$ dobijamo:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)dt, \quad \text{za svako} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Iz toga sledi da u svakoj tački neprekidnosti gustine $\varphi_X(x)$ važi:

$$F'_X(x) = \varphi_X(x).$$

Za dve slučajne promenljive X i Y, definisane na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kažemo da su jednake $\mathbb{P}$-skoro sigurno ako i samo ako $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

Slučajne promenljive $X_1, \ldots, X_n$ definisane na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ su nezavisne ako i samo ako

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in A_n)$$

za sve realne Borelove skupove $A_1, \ldots, A_n$.

7.1.2 Integracija

Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor sa merom μ. Ako je f nenegativna prosta funkcija ($f(\Omega)$ je konačan skup), to jest važi $f = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}$,

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in \overline{A}, \end{cases}$$

$$A_i = \{\omega | f(\omega) = x_i\}, \qquad \Omega = \sum_{i=1}^{n} A_i,$$

gde su $x_i \geq 0$ za sve $i = 1, \ldots n$, tada je integral definisan na sledeći način:

$$\int_\Omega f(x)\mu\,(dx) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(A_i).$$

Za nenegativnu merljivu funkciju f, integral definišemo na sledeći način:

$$\int_\Omega f(x)\mu\,(dx) = sup\{\int_\Omega g(x)\mu\,(dx) : \; g\, je\; prosta\; funkcija\; takva\; da\; g \leq f\}.$$

Za merljivu funkciju f posmatrajmo njen pozitivan i negativan deo:

$$f^+ = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

$$f^- = \begin{cases} -f(x), & f(x) \leq 0, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

Funkcije f^+ i f^- su nenegativne i merljive. Za funkciju $f = f^+ - f^-$ definišemo integral sa:

$$\int_\Omega f(x)\mu\,(dx) = \int_\Omega f^+(x)\mu\,(dx) - \int_\Omega f^-(x)\mu\,(dx). \tag{34}$$

Kada je $\int\limits_{\Omega} f^{+}(x)\mu(dx) = \int\limits_{\Omega} f^{-}(x)\mu(dx) = +\infty$ kažemo da funkcija f nije integrabilna.
Kada su $\int\limits_{\Omega} f^{+}(x)\mu(dx)$ i $\int\limits_{\Omega} f^{-}(x)\mu(dx)$ konačne vrednosti, f je integrabilna funkcija i njen konačan integral je dat izrazom (34).
U slučaju da je

$$\int\limits_{\Omega} f^{+}(x)\mu(dx) = +\infty, \quad \text{a} \quad \int\limits_{\Omega} f^{-}(x)\mu(dx) < +\infty$$

$$\left(\int\limits_{\Omega} f^{+}(x)\mu(dx) < +\infty, \quad \text{a} \quad \int\limits_{\Omega} f^{-}(x)\mu(dx) = +\infty\right)$$

f nije integrabilna funkcija, ali joj se u skladu sa (34) dodeljuje vrednost integrala $+\infty$ $(-\infty)$.

Evo nekih osnovnih osobina integrala:

1. Neka su f i g dve integrabilne funkcije. Ako je $f = g$ μ-skoro svuda tada je $\int\limits_{\Omega} f(x)\mu(dx) = \int\limits_{\Omega} g(x)\mu(dx)$.
2. Neka su f i g dve integrabilne funkcije, i važi $f \geq g$ μ-skoro svuda tada je $\int\limits_{\Omega} f(x)\mu(dx) \geq \int\limits_{\Omega} g(x)\mu(dx)$.
3. Neka su f i g dve integrabilne funkcije i $a, b \in \mathbb{R}$. Tada je $af + bg$ integrabilna funkcija i $\int\limits_{\Omega}(af(x) + bg(x))\mu(dx) = a\int\limits_{\Omega} f(x)\mu(dx) + b\int\limits_{\Omega} g(x)\mu(dx)$.
4. $|\int\limits_{\Omega} f(x)\mu(dx) - \int\limits_{\Omega} g(x)\mu(dx)| \leq \int\limits_{\Omega} |f(x) - g(x)|\mu(dx)$.

Sada ćemo definisati neke numeričke karakteristike slučajnih promenljivih.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ prostor verovatnoće, a X slučajna promenljiva. Integral

$$\int\limits_{\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega),$$

kada je definisan, zove se *očekivanje slučajne promenljive* X, i označava sa $E^{\mathbb{P}}(X)$ (ili sa $E(X)$). Kako očekivanje slučajne promenljive zavisi samo od raspodele slučajne promenljive, slučajne promenljive sa istom rapodelom imaju isto očekivanje.
Za $k \in \mathbb{N}$, $E(|X|^k) < +\infty$, vrednost $E(X^k)$ zove se k-ti momenat slučajne promenljive X. Kako važi $|x|^j \leq 1 + |x|^k$ za $j \leq k$, ako slučajna promenljiva ima k-ti momenat, onda ima i j-ti.

Definicija 7.8. Skup svih slučajnih promenljivih za koje važi $E(X^p) < +\infty$, $p \geq 1$, označavamo sa L^p. Na njemu je definisana razdaljina dve slučajne promenljive sa $d(X,Y) = (E(X-Y)^p)^{1/p}$.

Centralni momenat reda k slučajne promenljive X definiše se sa:

$$E[(X - E(X))^k].$$

Drugi momenat slučajne promenljive X zove se *varijansa slučajne promenljive* X, i važi da je:

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2.$$

7.1.3 Karakteristične funkcije

Karakteristične funkcije su po značaju i funkciji veoma bliske funkcijama raspodela. Svakoj funkciji raspodele odgovara tačno jedna karakteristična funkcija. Ono što je za nas zanimljivo je da je karakteristična funkcija apsolutno neprekidne slučajne promenljive zapravo Furijeova transformacije funkcije gustine.

Definicija 7.9. Neka je X slučajna promenljiva sa funkcijom gustine $\varphi_X(x)$, tada njenu karakterističnu funkciju $\phi_X(t)$, $\phi_X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, definišemo sa:

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi_X(dx), \quad t \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1.$$

Karakteristična funkcija ima sledeće osobine:

- Neka su X i Y nezavisne sličajne promenljive, važi $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$.
- Karakteristična funkcija jedinstveno određuje raspodelu.
- $X_n \xrightarrow{r} X$ ako i samo ako $\phi_{X_{n(t)}} \to \phi_X(t)$ za sve t.

Sledeća osobina daje vezu između karakteristične funkcije i momenata slučajne promenljive. Ako je $E(|X|^n) < +\infty$ tada važi:

$$E(X^k) = \frac{1}{i^k} \frac{\partial^k \phi_X(0)}{\partial t^k} \qquad \forall k = 1, \ldots, n.$$

7.1.4 Konvergencije nizova slučajnih promenljivih

Neka su slučajne promenljive $X, X_1, X_2, \ldots$ definisane na istom prostoru verovatnoća. U teoriji verovatnoće posmatraju se uglavnom četiri vrste konvergencije niza slučajnih promenljivih $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ka slučajnoj promenljivoj X.
Niz $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira skoro sigurno ka X, u oznaci $X_n \stackrel{s.s.}{\to} X$, ako:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} X_n = X\right) = 1.$$

Niz $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u L^p ka X, $X_n \stackrel{L^p}{\to} X$, ako:

$$\lim_{n\to+\infty} E\left(|X_n - X|^p\right) = 0.$$

Ova konvergencija je konvergencija na metričkom prostoru L^p. Kako je L^p kompletan prostor, svaki Košijev niz slučajnih promenljivih X_n konvergira u L^p ka $X \in L^p$.
Niz $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u verovatnoći ka X, $X_n \stackrel{p}{\to} X$, ako za svako $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0.$$

Niz $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u raspodeli ka X, $X_n \stackrel{r}{\to} X$, ako

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$$

za svako $t \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ za koje je F_X neprekidna funkcija.

7.1.5 Radon-Nikodimov izvod

Neka su dve mere μ i ν definisane nad istim merljivim prostorom $(\Omega, \mathcal{F})$. Ako za svako $A \in \mathcal{F}$ važi $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$, tada kažemo da je ν apsolutno neprekidno u odnosu na μ. To znači da su svi skupovi mere nula za μ i skupovi mere nula za ν.

Teorema 7.2. *Ako je ν apsolutno neprekidno u odnosu na μ onda postoji merljiva funkcija $Z : \Omega \to [0, +\infty)$ takva da za svako $A \in \mathcal{F}$ važi:*

$$\nu(A) = \int_A Z(\omega)\mu(d\omega).$$

Funkcija Z se naziva *Radon-Nikodimov izvod* mere ν u odnosu na meru μ, i označava se sa $\dfrac{d\nu}{d\mu}$.
Za svaku funkciju f integrabilnu u meri ν važi:

$$\int_\Omega f(\omega)\nu(d\omega) = \int_\Omega f(\omega)Z(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega f(\omega)\frac{d\nu}{d\mu}(\omega)\mu(d\omega).$$

Ako je i μ apsolutno neprekidno u odnosu na ν, što znači da imaju iste skupove mere nula, kažemo da su μ i ν ekvivalentne mere. Tačnije važi:

Definicija 7.10. Dve mere μ i ν definisane nad istim merljivim prostorom $(\Omega, \mathcal{F})$ su ekvivalentne ako važi:

$$\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \nu(A) = 0, \quad A \in \mathcal{F}.$$

7.1.6 Uslovno očekivanje

Definicija 7.11. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ prostor verovatnoća, i neka je $\mathcal{A}$ jedna σ-algebra, $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Definišemo slučajnu promenljivu $E(X|\mathcal{A})$, koju zovemo uslovno očekivanje slučajne promenljive X za datu σ-algebru $\mathcal{A}$, za koju važe sledeći uslovi:

1. $E(X|\mathcal{A})$ je $\mathcal{A}$-merljiva i integrabilna;

2. $E(X|\mathcal{A})$ zadovoljava jednačinu:

$$\int_A E(X|\mathcal{A})d\mathbb{P} = \int_A X\, d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Dokažimo postojanje takve slučajne promenljive. Razmatrajmo prvo slučaj nenegativne slučajne promenljive X. Definišimo meru ν na $\mathcal{A}$ sa $\nu(A) = \int_A X\mathbb{P}(d\omega)$. Ova mera je konačna, pošto je X integrabilna i apsolutno neprekidna u odnosu na $\mathbb{P}$. Iz teoreme Radon-Nikodima sledi da postoji funkcija Y, $\mathcal{A}$-merljiva, takva da $\nu(A) = \int_A Y(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$. Ovakva funkcija Y zadovoljava uslove 1. i 2. Ako X nije nenegativna, tada $E(X^+|\mathcal{A}) - E(X^-|\mathcal{A})$ zadovoljava navedene uslove.
Očigledno važi $E(X|\{\emptyset, \Omega\}) = E(X)$ i $E(X|\mathcal{F}) = X$ skoro sigurno (sa verovatnoćom 1).
$E(X|\mathcal{A})(\omega)$ možemo shvatiti na sledeći način: Date su nam informacije iz σ-algebre $\mathcal{A}$ na osnovu kojih možemo da napravimo procene za slučajnu promenljivu X, dakle $E(X|\mathcal{A})(\omega)$ je očekivanje za X kada znamo za svako $A \in \mathcal{A}$ da li sadrži tačku ω. Uslov 1. zahteva da se $E(X|\mathcal{A})$ može konstruisati na osnovu informacija iz $\mathcal{A}$. Uslov 2. zahteva da naše procene budu

konzistentne sa X, bar što se tiče usrednjavanja X po događajima iz $\mathcal{A}$.

Osobine uslovnog očekivanja
Neka su X, Y i X_n integrabilne slučajne promenljive.

1. Ako je $X = a$ skoro sigurno, tada je $E(X|\mathcal{A}) = a$.
2. Za konstante a, b važi $E(aX + bY|\mathcal{A}) = aE(X|\mathcal{A}) + bE(Y|\mathcal{A})$.
3. Ako je $X \leq Y$ skoro sigurno, tada $E(X|\mathcal{A}) \leq E(Y|\mathcal{A})$.
4. $|E(X|\mathcal{A})| \leq E(|X||\mathcal{A})$.
5. Ako je $X_n = X$, $n \to +\infty$, skoro sigurno i $|X_n| \leq Y$, tada je
$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n|\mathcal{A}) = E(X|\mathcal{A})$$
skoro sigurno.
6. Ako je X $\mathcal{A}$-merljivo i XY integrabilno, tada je $E(XY|\mathcal{A}) = XE(Y|\mathcal{A})$ skoro sigurno.
7. Ako su $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ σ-algebre, tada $E[E(X|\mathcal{A}_2)|\mathcal{A}_1] = E(X|\mathcal{A}_1)$ skoro sigurno.
8. Ako je X nezavisno od $\mathcal{A}$, tada je $E(X|\mathcal{A}) = E(X)$.
9. (*Jensenova nejednakost*)
Ako je ϕ konveksna realna funkcija i $\phi(X)$ integrabilno, tada važi:
$$\phi(E(X|\mathcal{A})) \leq E(\phi(X)|\mathcal{A}).$$

7.2 Osnovni pojmovi Stohastičkih procesa

Definicija 7.12. Stohastički proces $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ ($(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$) je familija slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Skup T se zove parametarski skup.

Mi ćemo pretpostaviti da je $\mathcal{T} = [0, +\infty)$ ili $\mathcal{T} = [0, T]$ i posmatraćemo t kao vremensku promenljivu. Stohastički proces možemo shvatiti kao funkciju dve promenljive $X(t, \omega) : \mathcal{T} \times \Omega \to S$, gde je S skup stanja na kojem proces prima vrednosti, i mi ćemo uvek pretpostaviti da je to $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{R}^d$. Za fiksirano $\omega \in \Omega$ funkcija $t \to X(t, \omega)$ opisuje realizacije procesa X kroz vreme, i nazivamo je *trajektorija.*
Dakle proces možemo posmatrati kao slučajnu promenljivu koja vrednosti uzima iz skupa funkcija. Ove trajektorije mogu biti neprekidne ili sa skokovima, u nekom trenutku $t \geq 0$:

$$\triangle X = X_{t^+} - X_{t^-} = \lim_{h\downarrow 0} X_{t+h} - \lim_{h\downarrow 0} X_{t-h}. \tag{35}$$

Ako su sve trajektorije neprekidne, osim na skupu mere nula, kažemo da je proces neprekidan i njegov skup stanja označavamo sa $C(\mathcal{T})$, prostor realnih neprekidnih funkcija.
Za procese koji nemaju neprekidne trajektorije pretpostavićemo da (35) uvek postoji za svako $t \geq 0$, i da je $X_{t^+} = X_t$. Ovakvi procesi se nazivaju *kadlag* (francuska skraćenica za: desno neprekidan sa levim limesom).
U kadlag procesima su skokovi ograničeni. Kako smo pretpostavili postojanje limesa na intervalu $[0, T]$, važi da za svako $b > 0$ broj skokova većih od b je konačan, a broj ukupnih skokova je najviše prebrojiv. Dakle na intervalu $[0, T]$ bilo koja kadlag trajektorija ima konačan broj velikih skokova, i najviše prebrojiv broj malih skokova. Prostor realnih kadlag funkcija označavamo sa $D(\mathcal{T})$.

Filtracija

Definicija 7.13. Neka je dat prostor verovanoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Familija σ-algebri $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ na Ω naziva se filtracija ako je:

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \qquad \text{za sve} \quad t \geq s \geq 0.$$

Prostor verovatnoća koji ima filtraciju naziva se *filtrirani prostor verovatnoća.* σ-algebra $(\mathcal{F}_t)$ predstavlja skup svih događaja koji su se dogodili do trenutka t, uključujući i t, dakle predstavlja informacije dostupne u trenutku t. Kako t raste tih događaja je sve više. Po definiciji $(\mathcal{F}_t)$-meljiva slučajna promenljiva je slučajna promenljiva čija je vrednost poznata u trenutku t.

Za proces $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ kažemo da je *adaptiran filtraciji* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ($(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$-adaptiran) ako je slučajna promenljiva X_t $(\mathcal{F}_t)$-merljiva za svako $t \in \mathcal{T}$. To jest vrednost procesa u trenutku t je poznata na osnovu informacija iz $(\mathcal{F}_t)$.

Filtracija $(F_t^X)_{t\in\mathcal{T}}$ generisana procesom X_t zove se *prirodna filtracija* za dati proces, to jest, F_t^X je najmanja σ-algebra u odnosu na koju je proces X_t adaptiran.

Pretostavićemo da su svi skupovi mere nula sadržani u $\mathcal{F}_0$, sto znači da već u trenutku nula znamo koje trajektorije su nemoguće za dati proces.

Vreme zaustavljanja

Za dati stohastićki proces $(X_t)_{t\geq 0}$ zanima nas prvi trenutak u kom dati proces premašuje neku zadatu granicu b, matematički rečeno:

$$\tau_b = inf\{t \geq 0 : X_t > b\}. \tag{36}$$

Ako je $X_0 < b$, onda je τ_b je slučajna promenljiva.

Slučajno vreme τ je slučajna promenljiva koja uzima vrednosti iz skupa $\mathcal{T}$, i predstavlja trenutak u kome se neki događaj desio. Za datu filtraciju $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ postavlja se pitanje da li su informacije dostupne u trenutku t dovoljne da odredimo da li se određeni događaj već dogodio $(\tau \leq t)$ ili nije $(\tau > t)$.

Definicija 7.14. Neka je dat filtrirani prostor verovatnoće. Slučajna promenljiva τ sa vrednostima iz $\mathcal{T}$ je vreme zaustavljanja ako za svako $t \geq 0$, događaj $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Za dati adaptirani stohastički proces $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ i vreme zaustavljanja τ, proces koji se zaustavlja u τ se definiše na sledeći način:

$$X_{t\wedge\tau} = \begin{cases} X_t, & t < \tau \\ X_\tau, & t \geq \tau. \end{cases}$$

Za datu filtraciju $(\mathcal{F}_t)_{t\in\tau}$ i vreme zaustavljanja τ (slučajna promenljiva definisana u (36)), informacije poznate u trenutku τ predstavljaju σ-algebru generisanu sa svim adaptiranim procesima posmatranim do trenutka τ, to jest

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : \forall t \in \mathcal{T}, A \cup \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

7.2.1 Martingali

Definicija 7.15. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ filtrirani prostor verovatnoća, sa filtracijom $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Kadlag proces $(X_t)_{t\geq 0}$ je martingal ako je : $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptiran,

$E(|X_t|)$ je konačno za svako $t \in [0, T]$ i

$$\forall s < t, \qquad E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s.$$

Iz definicije se vidi da je za martingal najbolje predviđanje buduće vrednosti sadašnja vrednost, i da ima konstantno očekivanje ($\forall t \geq 0, E(X_t) = E(X_0)$).

Teorema 7.3. *Ako je $(M_t)_{t\geq 0}$ martingal tada postoji jednistveni stohastički proces $(\widetilde{M_t})_{t\geq 0}$ čije se kadlag trajektorije podudaraju sa trajektorijama procesa $(M_t)_{t\geq 0}$ sa verovatnoćom 1.*

Martingal $(M_t)_{t\geq 0}$ za koji važi $E(M_t^2) < +\infty$ zovemo kvadrat integrabilan martingal. Prostor svih kvadrat integrabilnih martingala označavamo sa $\mathcal{M}^2$.

Jedan od načina da konstruišemo martingal je sledeći: Neka je data slučajna promenljiva H tako da je $E(|H|) < +\infty$, proces definisan sa $M_t = E(H|\mathcal{F}_t)$ je martingal.

Teorema 7.4. *Neka je $(M_t)_{t\geq 0}$ martingal takav da $\sup\limits_{t\geq 0} E(M_t^2) < +\infty$, tada postoji slučajna promenljiva H, $E(|H|) < +\infty$, tako da $M_t \to H, t \to +\infty$ skoro sigurno.*

Teorema 7.5. *Neka je $(M_t)_{t\geq 0}$ martingal i τ vreme zaustavljanja. Ako je $\sup\limits_{t\geq 0} E(M_t^2) < +\infty$ tada je proces koji se zaustavlja u τ, $M_{t\wedge\tau}$, takođe martingal i važi $E(M_t) = E(M_0)$.*

Teorema 7.6. *Neka je $(M_t)_{t\geq 0}$ kvadrat integrabilan martingal. Tada važi:*

$$E\left(sup\{M_s^2 : 0 \leq s \leq t\}\right) \leq 4E(M_t^2).$$

7.2.2 Levijevi procesi

Definicija 7.16. Neka je $X = (X_t)_{t>0}$ stohastički proces definisan na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Kažemo da je on Levijev proces ako ima sledeće osobine:

1. X ima nezavisne priraštaje: slučajne promenljive $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ su nezavisne za sve $n \geq 0$ i $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$.

2. X ima stacionarne priraštaje: $X_{t+h} - X_t$ ima istu rapodelu kao i X_h za sve $h, t \geq 0$, to jest raspodela $X_{t+h} - X_t$ zavisi samo od h.

3. $X(0) = 0$ skoro sigurno.

4. X ima kadlag trajektorije skoro sigurno.

Teorema 7.7 (Levi-Hinčinova formula)**.** *Neka je* $(X_t)_{t>0}$ *Levijev proces, tada postoje parametri* $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$ *i lokalno konačna mera* ν *na* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *koja zadovoljava* $\int_{-\infty}^{\infty} \min(1, x^2)\nu(dx) < \infty$ *tako da važi:*

$$\phi_{X_t}(u) = E(e^{iuX_t}) = e^{-t\psi(u)},$$

gde je

$$\psi(u) = -iau + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - iux\mathbb{I}_{|x|\leq 1}\right) \nu(dx) \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Svaki Levijev proces je jedinstveno određen trojkom (a, σ^2, ν), a se zove koeficijent drifta, σ^2 Braunov koeficijent, a ν Levijeva mera ili mera skoka. $\psi(u)$ se zove *karakteristični eksponent* Levijevog procesa.

Primer 7.1. *Karakteristični eksponent normalno raspoređene slučajne promenljive* $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *je:* $\psi(u) = \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - i\mu u$,
za slučanu promenljivu koja ima Poasonovu raspodelu $\mathcal{P}(\lambda)$ *imamo:* $\psi(u) = \lambda(1 - e^{iu})$,
a za Variance-Gamma raspodelu važi: $\psi(u) = \frac{1}{\nu} \log\left(1 - i\theta\nu u + \frac{1}{2}\sigma^2\nu u^2\right)$.

8 Zaključak

U matematici finansija osnova za vrednovanje finansijskih derivata je poznati Black-Scholes model koji pretpostavlja da cena podloge prati model geometrijskog Braunovog kretanja. Mana ovakvog predstavljanja dinamike cena jeste da se pretpostavlja da su cene svih aktiva konzistentne sa istim parametrom difuzije σ. U literaturi se mogu naći različiti načini prevazilaženja ovog problema. Jedan od njih je da se dinamika cena predstavi Levijevim procesima.

Ovaj rad iskorištava činjenicu da se u ovakvom pristupu, s obzirom da se svaki Levijev proces može predstaviti svojom karkterističnom funkcijom, može uspostaviti veza između ove teorije i teorije Furijeove analize.

Stoga teorija distribucija i Furijeovih transformacija predstavljaju osnov ovog rada, kao temelj na kome je data primena računanja cena opcija.

Literatura

[1] Umberto Cherubini, Giovanni Della Lunga, Sabrina Mulinacci, Pietro Rossi - Fourier transform methods in finance, John Wiley and sons, 2010.

[2] N. Teofanov - Predavanja iz primenjene analize, Zavod za udžbenike Beograd, 2011.

[3] Peter Carr, Dilip B. Madan - Option valuation using the fast Fourier transform, The Journal of Comutational Finance, 2(4):61-73, 1999.

[4] Gurdip Bakshi, Dilip B. Madan - Spanning and derivate-security valuation, Journal of Financial Economics 55(2):205-238, 2000.

[5] Joseph Beyene - Uses of the fast Fourier transform (FFT) in exact statistical inference, University of Toronto, 2001.

[6] Dora Seleši - Modeli finansijske matematike, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, 2002.

[7] Nataša Krejić - Finansijska matematika II, beleške sa predavanja, 2010.

[8] Danijela Rajter-Ćirić - Verovatnoća, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, 2008.

[9] Stevan Pilipović, Bogoljub Stanković - Prostori distribucija, Srpska akademija nauka i umetnosti, Ogranak u Novom Sadu, 2000.

[10] Robert S. Strichartz - A guide to distribution theory and Fourier transforms, World scientific publishing , 2003.

[11] Steven G. Johnson - When function have no value(s): Delta functions and distributions, MIT course 18.303 notes, 2011.

[12] Danijela Rajter-Ćirić - Stohastička analiza, beleške sa predavanja, 2009.

[13] Rudiger Kiesel - Levy Finance, 2008.

[14] Jan Kallsen - Levy Processes in Finance, 2007.

[15] Olga Hadžić, Stevan Pilipović - Uvod u funkcionalnu analizu, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, 1996.

[16] A.H. Zemanian - Distribution theory and transform analisis, Dover publications, New York, 1987.

[17] www.mathworld.wolfram.com

[18] Roland Steinbauer - Distributional mathods in general relativity, 2000

Kratka biografija

Bojana Popović je rođena 8. januara 1987. godine u Novom Sadu. Završila je Osnovnu školu Jovan Grčić Milenko u Beočinu 2002. godine a potom, 2006. godine, gimnaziju Svetozar Marković u Novom Sadu. Odmah po završetku srednje škole upisuje studije na Prirodno - matematičkom fakultetu u Novom Sadu, Departman za matematiku i informatiku, smer matematika finansija. U septembru 2010. godine diplomira sa prosečnom ocenom 7, 97 i stiče stručni naziv Diplomirani matematičar. Iste godine upisuje master studije na istom fakultetu, smer primenjena matematika, modul finansijska matematika. Zaključno sa oktobrom 2011. godine, položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*
TD

Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*
TZ

Vrsta rada: *Master rad*
VR

Autor: *Bojana Popović*
AU

Mentor: *dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu*
MN

Naslov rada: *Furijeova transformacija i neke primene u finansijama*
NR

Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP

Jezik izvoda: *srpski/engleski*
JI

Zemlja publikovanja: *Srbija*
ZP

Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP

Godina: *2012*
GO

Izdavač: *Autorski reprint*
IZ

Mesto i adresa: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
MA

Fizički opis rada: *(7/86/0/4/13/0/0)*
(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO

Naučna oblast: *matematika*
NO

Naučna disciplina: *Teorija distribucija*
ND

Predmetna odrednica/ključne reči: *Distribucije, test funkcije, nosač funkcije, konvergencija, singularne distribucije, izvod distribucije, temperirane distribucije, konvolucija, direktan proizvod distribucija, Furijeova transformacija, Furijeov red, finansijski derivati, opcije, vrednovanje finansijskih derivata, ekvivalentna martingalna mera, hevisajdova funkcija, dirakova delta distribucija*
PO

UDK:

Čuva se: *u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku*
ČU

Važna napomena: *nema*
VN

Izvod: *Tema ovog rada je teorija distribucija, teorija Furijeovih transformacija i primena ovih teorija u računanju cena Opcija.*
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *27.03.2012.*
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: *dr Ljiljana Gajić, redovni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

Član: *dr Dora Seleši, docent Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

Mentor: *dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: *Monograph type*
DT

Type of record: *Printed text*
TR

Contents Code: *Master's thesis*
CC

Author: *Bojana Popović*
AU

Mentor: *Dr. Nenad Teofanov, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad*
MN

Title: *Fourier transform and some applications in finance*
TI

Language of text: *Serbian*
LT

Language of abstract: *Serbian/English*
LA

Country of publication: *Serbia*
CP

Locality of publication: *Vojvodina*
LP

Publication year: *2012*
PY

Publisher: *Author's reprint*
PU

Publication place: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
PP

Physical description: *(7/86/0/4/13/0/0)*

PD

Scientific field: *Mathematics*
SF

Scientific discipline: *Distribution theory*
SD

Subject/Key words: *Distributions, test functions, support of a function, convergence, singular distributions, distribution derivative, slow growth distributions, convolution, the direct product of distribution, Fourier transform, Fourier series, contingent claims, option, pricing contingent claims, equivalent martingale measure, Heavyside function, Dirac delta distribution*
SKW

UC:

Holding data: *In library of Department of Mathematics and Informatics*
HD

Note: *none*
N

Abstract: *Subject of this master's thesis are distribution theory, Fourier transform theory and application in pricing Options.*
AB

Accepted by Scientific Board on: *27.03.2012.*
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: *Dr. Ljiljana Gajić, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad*

Member: *Dr. Dora Seleši, Docent, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad*

Mentor: *Dr. Nenad Teofanov, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad*