



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU



Bojana Mičić

Modeliranje operativnog rizika primenom kopula

Master rad

Mentor

dr Miloš Božović

Novi Sad, 2016.

PREDGOVOR

U ovom master radu je opisan model obračuna kapitalnih zahteva za operativne rizike koristeći višedimenzionalne raspodele i primenjujući kopule prilikom modeliranja zavisnih struktura.

U uvodnom delu rada su date definicije i osnovni statistički pojmovi koji su se koristili prilikom pravljenja modela za obračun kapitalnih zahteva. Prikazane su osnovne osobine raspodela slučajnih promenljivih i dat je kratak opis tehnika koje se koriste za odabir raspodele koja se koristi u modelu.

U drugom delu rada je dat kratak istorijat Bazelskog komiteta za bankarski nadzor i prikazan je način upravljanja operativnim rizicima u bankarskom sektoru sa opisanim ulogama i odgovornostima neophodnim za uspešno upravljanje ovom vrstom rizika. Ukratko su opisane tehnike koje se koriste za merenje izloženosti operativnom riziku.

Treći deo rada opisuje napredni pristup merenja operativnog rizika koji koristi pristup zasnovan na raspodeli gubitaka. U ovom poglavlju je korak po korak opisano kako izračunati kapitalne zahteve počevši od analiziranja frekvencije i uticaja događaja operativnog rizika preko Monte Karlo simulacije do samog obračuna kapitalnog zahteva za operativne rizike.

Četvrti deo rada predstavlja višedimenzionalnu analizu operativnog rizika zasnovanu na kopulama. U ovom delu su opisane prednosti korišćenja kopula prilikom opisivanja zavisnih struktura i njihov uticaj na obračun kapitala. Opisane su osnove karakteristike Gausove i Studentove kopule.

Ilustracija primene modela u praksi prikazana je u petom delu ovog rada gde su prethodno opisane tehnike primenjene na internim podacima banke. Programi korišteni prilikom izrade modela su *Statistica* i *MATLAB*.



Ovu priliku koristim da se zahvalim svom mentoru dr Milošu Božoviću na inspirativnim predavanjima i razvijanju ljubavi prema finansijama pre svega, potom na podršci, savetima i uputstvima prilikom izrade samog rada. Zahvaljujem se i dr Nataši Krejić na kvalitetnim predavanjima i građenju dobre matematičke osnove iz finansijske matematike i modeliranja. I posebna zahvalnost dr Nataši Spahić na savetima i pružanju podrške tokom studiranja, na inspiraciji pruženim savetima i motivaciji u pravim trenucima.

Hvala!

SADRŽAJ

SADRŽAJ	3
1 UVOD	7
1.1 Pregled literature	8
1.2 Matematički pojmovi	9
1.2.1 Osnovne numeričke karakteristike slučajne promenljive	10
1.2.2 Karakteristična funkcija	12
1.2.3 Raspodele slučajne promenljive	13
1.2.4 Ocena parametara	17
1.2.5 Test statistike	18
2 RIZICI U BANKARSTVU	20
2.1 Bazelski komitet	20
2.1.1 Bazel I	20
2.1.2 Bazel II	21
2.1.3 Bazel III	22
2.1.4 Implementacija bazelskih standarda u Srbiji	23
2.2 Upravljanje operativnim rizicima u bankarskom poslovanju	23
2.2.1 Uloge i odgovornosti	24
2.2.2 Kultura i svest o rizicima	26
2.2.3 Politike i procedure	26
2.2.4 Tipovi podataka	27
2.3 Pristupi merenja operativnog rizika	30
2.3.1 Pristup osnovnog indikatora	30
2.3.2 Standardizovani pristup	31
2.3.3 Napredni pristup merenja operativnog rizika	32
3 NAPREDNI PRISTUP MERENJA OPERATIVNOG RIZIKA - PRISTUP ZASNOVAN NA RASPODELI GUBITAKA	34
3.1 Modeliranje frekvencije	36
3.2 Modeliranje uticaja	36
3.3 Monte Karlo simulacija	37
3.4 Mere rizika	37
4 MODELIRANJE ZAVISNIH STRUKTURA KOPULAMA	39
4.1 Skalarova teorema i kopule	40

4.2	Gustina i kanonička reprezentacija	40
4.2.1	Normalna (Gausova) kopula	41
4.2.2	Studentova t-kopula	42
4.3	Obračun kapitalnih zahteva	45
5	PODACI	47
5.1	Deskriptivna statistika podataka	47
5.2	Modeliranje frekvencije	48
5.3	Modeliranje uticaja	49
5.4	Monte Karlo simulacija	52
5.5	Zavisnost i korelacija	53
5.5.1	Simuliranje kopulama	53
	ZAKLJUČAK	59
	PRILOZI	61
	Čoleski faktorizacija	61
	LITERATURA	62
	BIOGRAFIJA	64

POPIS SLIKA

Slika 1. Treći i četvrti moment slučajne promenljive	12
Slika 2. Poasonova raspodela	14
Slika 3. Negativna binomna raspodela	15
Slika 4. Funkcija gustine i funkcija raspodele Lognormalne raspodele za različite parametre.....	16
Slika 5. Funkcija raspodele i funkcija gustine Vejbulove raspodele za različite parametre	16
Slika 6. Grafik gustine za različite vrednosti parametara Gama raspodele	17
Slika 7. P-P dijagram	18
Slika 8. Primer KS testa	19
Slika 9. Struktura Bazel II kapitalnih zahteva	22
Slika 10. Gradivni elementi okvira upravljanja operativnim rizicima	24
Slika 11. Hijerarhija dokumenata	27
Slika 12. Ilustracija LDA pristupa	34
Slika 13. Raspodela gubitka	38
Slika 14. Funkcija gustina Normalne kopule za različite parametre korelacije	42
Slika 15. Funkcija gustine t-kopule za različite parametre korelacije	45
Slika 16. Box-plot	47
Slika 17. Histogram gubitaka po poslovnim linijama	48
Slika 18. Kernelova raspodela po presecima	48
Slika 19. Modeliranje frekvencije događaja	49
Slika 20. P-P prikaz Gama raspodele za dve poslovne linije	49
Slika 21. P-P prikaz Lognormalna raspodele za dve poslovne linije	50
Slika 22. P-P prikaz Vejbulove raspodele za dve poslovne linije	50
Slika 23. Modeliranje uticaja operativnog rizika po presecima matrice operativnih rizika	51
Slika 24. Rep raspodele uticaja događaja operativnog rizika za dve poslovne linije	53
Slika 25. Negativna binomna-Gama-Normalna kopula i Negativna binomna-Lognormalna-Normalna kopula	55
Slika 26. Negativna binomna-Vejbulova-Normalna kopula i Poasonova-Gama-Normalna kopula	55
Slika 27. Poasonova-Lognormalna-Normalna kopula i Poasonova-Vejbulova-Normalna kopula	55
Slika 28. Negativna binomna-Gama-t kopula i Negativna binomna-Lognormalna-t kopula	56
Slika 29. Negativna binomna-Vejbulova-t kopula i Poasonova-Gama- t kopula	57
Slika 30. Poasonova-Lognormalna-t kopula i Poasonova-Vejbulova-t kopula	57

POPIS TABELA

Tabela 1. Linije poslovanja	28
Tabela 2. Tipovi događaja operativnog rizika	29
Tabela 3. Razvrstavanje linija poslovanja	31
Tabela 4. Obračun kapitalnih zahteva primenom pristupa osnovnog indikatora i standardizovanog pristupa	32
Tabela 5. Deskriptivna statistika	47
Tabela 6. Ocena parametara Poasonove raspodele i p-vrednosti Kolmogorov-Smirnovog testa	48
Tabela 7. Ocena parametara Negativne binomne raspodele i p-vrednosti Kolmogorov-Smirnovog testa	49
Tabela 8. Ocena parametara Gama raspodele	50
Tabela 9. Ocena parametara Vejbulove raspodele	50
Tabela 10. Ocena parametara Lognormalne raspodele	51
Tabela 11. Sumarni prikaz ocene parametara	51
Tabela 12. VaR 90% i 90% za različite kombinacije raspodela slučajnih promenljivih	52
Tabela 13. ES 90% i 90% za različite kombinacije raspodela slučajnih promenljivih	52
Tabela 14. VaR 90% i 90% za različite marginalne raspodele Normalne kopule	54
Tabela 15. ES 90% i 90% za različite marginalne raspodele Normalne kopule	54
Tabela 16. VaR 90% i 90% za različite marginalne raspodele Studentove t kopule	56

Tabela 17. ES 90% i 90% za različite marginalne raspodele Studentove t kopule.....	56
Tabela 18. Odnos mera rizika pod pretpostavkom savršene korelacije i Normalne i t kopule	57

1 UVOD

Sprovođenjem testa nad reaktorom operateri su izvadili veliki broj šipki za regulaciju. Nakon što su ugasili turbogenerator došlo je do povećanja pritiska i temperature vode što je nekontrolisano povećalo snagu reaktora. Kako su izvadili šipke za regulaciju, operateri nisu imali čime da snize snagu reaktora. U 1:23 posle ponoći 26. aprila 1986. godine jezgro reaktora 4 nuklearne elektrane u Černobilju eksplodiralo je i izazvao najveću nuklearnu katastrofu u istoriji.¹

Ironično je to što je svrha testa bila pre svega povećanje sigurnosti reaktora. Testiranja nad reaktorom su vršena pod velikim pritiskom rukovodstva i operateri su zaobišli čitav niz sigurnosnih procedura. Test koji je trebao da se sprovede nije imao odobrenje organa koji su bili odgovorni za nuklearnu bezbednost reaktora u SSSR-u. U spletu nesrećnih okolnosti došlo je do nuklearne eksplozije. Prema podacima Međunarodne agencije za atomsku energiju oko 6,6 miliona ljudi je bilo izloženo radijaciji. Detaljni podaci o posledicama katastrofe su prikazani u izveštaju UNSECEAR objavljen 2011. godine.²

Ovakvoj vrsti rizika izložene su sve institucije. Ljudske greške predstavljaju sastavni deo poslovanja i ne mogu se u potpunosti izbeći već se određenim merama mogu svesti na minimum. Neretko se dešava da se u cilju bržeg obavljanja posla zaobiđu određene sigurnosne mere.

Neki od primera događaja operativnog rizika koju su prouzrokovale velike gubitke za finansijske institucije opisane su u nastavku.

Bargins banka

Bargins Banka, osnovana 1762. godine bila je najstarija investiciona banka u Britaniji koja je među svojim klijentima imala i samu kraljicu Elizabetu, ugašena je u februaru 1995. godine. Niki Lison, koje je bio šef službe za trgovanje i šef službe za podršku poslovanju u filijali Barings Fjučers Singapur (BFS), imao je mogućnost da ulaže značajnija sredstva u rizične derivate i sam knjiži svoje transakcije. On je pravio arbitražne transakcije pod raznim ugovorima sa SIMEX³-om i OSE koje je Bargins grupa nije smatrala visoko rizičnim. Lison je napravio nehedžovanu poziciju čije je nastale gubitke knjižio na račun za razlike (čuveni „88888-račun“) a koji je ublanasirao kroz račun za prihode van domašaja interne revizije. Kretanja na Singapurskoj i Japanskoj berzi bila su donekle predvidiva i stabilna tokom 1993. i 1994. godine, ali kada je tržište postalo nestabilno, Lison je tipovanjem na rast akcija ostvarivao sve veće gubitke, prikrivajući ih sve većim ulozima. Kao posledica velikih gubitaka u Japanskim deonicama i pada Nikkei indeksa usled Kobe zemljotresa u januaru 1995. godine, Lisonovi gubici su dostigli iznos od 1.3 milijarde dolara.

Daiva banka

U vremenskom periodu od 11 godina, sve do 1995. godine, Tošide Iguči, trgovac obveznicama Daiva banke u Njujorku je prouzrokovao i prikrilo gubitak u iznosu od 1.1 milijardu dolara koji je ostvario trgujući sa obveznicama Trezora SAD-a. Daiva banka nije imala odgovarajuće kontrole upravljanja, pa čak ni najobičnije interne kontrole koje bi odmah mogle da uoče sumnjive transakcije. Iguči je sam priznao da je odgovoran za gubitak i pitanje je kada bi bio otkriven da nije sam priznao

¹ Vesti b92 http://www.b92.net/zivot/nauka.php?nav_id=243312

² http://www.unscear.org/docs/reports/2008/11-80076_Report_2008_Annex_D.pdf

³ Singapurska internacionalna monetarna razmena

nemogavši da izdrži pritisak. Banka je postala nesolventna, S&P je snizio kreditni rejting banke sa A na BBB, sud u Osaki je naložio jedanaestorici postojećih i bivših članova odbora i najviših rukovodioca da plate odštetu u iznosu od 775 miliona dolara kao kompenzaciju akcionarima zbog pretrpljene štete⁴

Gospodin pet posto

Od 1986. do 1996. godine, glavni trgovac Sumitomo korporacije (Jasuo Hamanaka čiji je nadimak „Gospodin Pet Posto“ zbog udela u svetskom tržištu ugljem koje je on kontrolisao) načinio je gubitak u iznosu od 1.8 milijardi dolara preko lažnih transakcija. Njegove prevare koje su uticale na celo svetsko tržište ugljem jednostavno nisu bile kontrolisane od strane banke.⁵

Ovakvi i slični događaji predstavljaju operativne rizike i doveli su ovu vrstu rizika u rang sa tržišnim i kreditnim rizicima.

Ne postoji jedinstvena definicija šta tačno predstavlja operativni rizik s obzirom da operativni rizik obuhvata dugačak spisak na izgled nespojivih rizika poput prevarnih radnji, sistemskih grešaka, mane u proizvodima, diskriminaciju i slično. U odluci o upravljanju rizicima Narodne banke Srbije u članu 64. je definisano

Operativni rizik je rizik od mogućeg nastanka negativnih efekata na finansijski rezultat i kapital banke usled propusta (nenamernih i namernih) u radu zaposlenih, neodgovarajućih unutrašnjih procedura i procesa, neadekvatnog upravljanja informacionim i drugim sistemima u banci, kao i usled nastupanja nepredvidivih eksternih događaja.

Zbog specifičnih karakteristika samog operativnog rizika je upravljanje ovom vrstom rizika veoma složeno. Proces njegove identifikacije i mapiranja je veoma složen. Problem nerazumevanja operativnog rizika je čest problem u praksi što otežava njegovu identifikaciju i negativno se odražava na njegovo upravljanje.

Efikasnost upravljanja operativnim rizikom veoma zavisi od metoda koje se koriste da se oceni nivo izloženosti operativnom riziku, nadgledanje izloženosti operativnim riziku kao i tehnika koje se koriste za kontrolu operativnog rizika. Moderne statističke metode nam daju alate za merenje rizika i istraživanje posledica rizika u dnevnim aktivnostima poslovanja. Upotreba ovih tehnika može proširiti svest o operativnim rizicima kojima su finansijske institucije izložene tako što će ukazati na očekivane gubitke koji su posledica neuspelih operativnih procedura, identifikovaće moguć neočekivan gubitak i povezati rizike sa ključnim poslovnim procesima. Drugim rečima, statistički alati će pružiti mehanizme za procenu rizika, kapitala i profita.

Svrha ovog rada je da prikaže kako upotrebom različitih statističkih metoda možemo obračunati kapital neophodan da apsorbuje gubitke nastale kao posledica operativnog rizika a koji će u potpunosti oslikavati rizičan profil institucije na čijoj se bazi zasniva model.

1.1 [Pregled literature](#)

Nakon uvođenja Bazela II i uvođenja obaveze računanja kapitalnih zahteva za operativne rizike izašlo je dosta radova koji su se bavili temom operativnih rizika. Regulator je dao slobodu bankama da same razviju modele kojima će meriti izloženost operativnom riziku što je dovelo do širokog spektra različitih pristupa merenja operativnog rizika. Većina radova se bavi teoretskim pristupom dok se

⁴ BBC News 20. septembar 2000 videti <http://news.bbc.co.uk/2/hi/business/933834.stm>

⁵ DER SPIEGEL 26 jun 1996. videti <http://www.spiegel.de/spiegel/print/d-8939799.html>

samo nekolicina bavi samim razvojem modela nad realnim podacima. Iz literature korištene prilikom pisanja ovog rada bih posebno istakla sledeće:

- L.D. Valle, D.F. Fantazzini, P. Giudici - „*Copulae and Operational Risks*“ - U ovom radu je opisan uticaj primene kopula prilikom modeliranja zavisnosti poslovnih linija i tipova događaja operativnog rizika na obračun kapitalnih zahteva za operativne rizike. Prilikom modeliranja je korišteno 407 podataka zabeleženih tokom 72 meseca u dve poslovne linije za četiri tipa događaja.
- L.D. Valle - „*Bayesian Copulae Distributions, with Application to Operational Risk Management*“ - Ovaj rad predstavlja nastavak istraživanja prethodno spomenutog rada i uključuje primenu Bajesovih modela prilikom obračuna kapitalnih zahteva.
- S.A. Klugman, H.H. Panjer, G.E. Willmot- „*LOSS MODELS – From Data to Decisions*“ – U poglavlju 6 ove knjige je opisan model agregatnog gubitka gde je za primer uzet model troškova porodičnog zdravstvenog osiguranja.
- S. Scandizzo - „*The Operational Risk Manager’s Guide*“ – navodi najbolje primere iz prakse za uspešno upravljanje operativnim rizicima.
- R. Korn, E. Korn, G. Kroisandt - „*Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance*“ - U ovoj knjizi je opisana primena Monte Carlo metoda koja se koristi za simuliranje retkih događaja i primena kopula prilikom modeliranja zavisnih struktura u aktuarskim modelima.
- K. Dutta, J. Perry - „*A tale of tails: An empirical analysis of loss distribution models for estimating operational risk capital*“ - U ovom radu autori primenjuju teoriju ekstremne vrednosti prilikom modeliranja regulatornog kapitala za operativne rizike koristeći interne podatke sedam američkih finansijskih institucija sa više od 1000 događaja operativnog rizika
- S. Figini, L. Gao i P. Giudici – „*Bayesian operational risk models*“ – primenjuju rezultate dobijene iz upitnika za samoprocenu rizika u Bajesovoj analizi raspodele gubitaka kombinujući na taj način interne podatke i ekspertske mišljenje u obračunu kapitalnih zahteva za pokrivanje gubitaka nastalih kao posledica operativnog rizika.

1.2 Matematički pojmovi

U nastavku će biti objašnjeni osnovni matematički pojmovi koji će se koristiti u radu.

Neka je (Ω, \mathcal{F}, P) prostor verovatnoće, Ω skup elementarnih događaja, \mathcal{F} je σ -algebra događaja, a P je verovatnoća definisana na (Ω, \mathcal{F}) i neka je \mathcal{B} Borelova σ -algebra podskupova skupa realnih brojeva R .

Definicija 1.1.1 Funkcija $X: \Omega \rightarrow R$ je slučajna promenljiva (veličina) ako je merljiva u odnosu na σ -algebru \mathcal{F} i \mathcal{B} , odnosno ako za svaki Borelov skup $B \in \mathcal{B}$ važi

$$X^{-1}(B) = \{\omega: X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Drugim rečima slučajna promenljiva je promenljiva koja može imati neku vrednost sa određenom verovatnoćom.

Slučajna promenljiva koja može imati prebrojivo mnogo vrednosti, svaku sa određenom verovatnoćom se naziva **diskretna slučajna promenljiva**.

$$P[X = x_t] = p_t, x_t \in \{x_1, \dots, x_N\}$$

Slučajna promenljiva koja može imati bilo koju vrednost iz određenog intervala vrednosti se naziva **neprekidna slučajna promenljiva**. Ovo implicira da slučajna promenljiva može imati beskonačno mnogo vrednosti i verovatnoća da neprekidna slučajna promenljiva ima tačno određenu vrednost je skoro nemoguća zbog čega verovatnoću neprekidnih slučajnih promenljivih definišemo na određenom intervalu.

$$P[a < X < b] = p$$

Definicija 1.1.2 Funkcija $F_X: R \rightarrow R$ definisana sa

$$F_X(x) = P\{\omega: X(\omega) \leq x\}$$

je funkcija raspodele verovatnoća ili kraće, funkcija raspodele slučajne promenljive X .

Definicija 1.1.3 Funkcija raspodele \mathcal{F} slučajne promenljive X je apsolutno neprekidna ako postoji integrabilna funkcija $g: R \rightarrow R$ takva da za svaki realan broj x važi

$$F(x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt = P[X \leq x].$$

Funkcija g je gustina raspodele slučajne promenljive X .

Funkcija raspodele ima sledeće osobine:

1. $F(x)$ je uvek neopadajuća, tj. $\frac{d}{dx}F(x) \geq 0$;
2. $F(x) = 0$ kada je $x = -\infty$;
3. $F(x) = 1$ kada je $x = \infty$.

Za dve ili više slučajnih promenljivih definiše se pojam nezavisnosti.

Definicija 1.1.4 Slučajne promenljive X i Y na istom prostoru verovatnoće (Ω, \mathcal{F}, P) su nezavisne ako za svaka dva Borelova skupa A i B iz \mathcal{B} važi

$$P\{\omega: X(\omega) \in A, Y(\omega) \in B\} = P\{\omega: X(\omega) \in A\} \cdot P\{\omega: Y(\omega) \in B\}.$$

1.2.1 Osnovne numeričke karakteristike slučajne promenljive

Osnovna mera centralne tendencije slučajne promenljive je njena očekivana vrednost.

Definicija 1.1.5 Matematičko očekivanje $E(X)$ neprekidne slučajne promenljive X čija je gustina raspodele g je dato sa

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx,$$

pod uslovom da navedeni integral apsolutno konvergira. Ako to nije slučaj, matematičko očekivanje ne postoji.

Disperzija ili varijansa predstavlja očekivano srednje kvadratno odstupanje od očekivane vrednosti slučajne promenljive.

Definicija 1.1.6 Disperzija $D(X)$ ili varijansa $V(X)$ slučajne promenljive X je data sa

$$D(X) = E(X - E(X))^2$$

pod uslovom da navedena očekivanja postoje. U protivnom disperzija ne postoji. Pozitivna vrednost kvadratnog korena disperzije naziva se standardna devijacija i označava sa $\sigma(X)$ ili samo σ .

Mera linearne zavisnosti dve slučajne promenljive se dobija sledećom formulom

$$\sigma_{X,Y} = E[X - E[X]][Y - E[Y]],$$

pri čemu koeficijent korelacije koristimo kao meru jačine linearne zavisnosti dve slučajne promenljive koju računamo sledećom formulom

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Očekivana vrednost predstavlja specijalan slučaj funkcije momenta. U opštem slučaju moment obeležja je očekivana vrednost k-tog stepena obeležja i izračunavaju se na sledeći način

$$m_k = E(X^k).$$

Prvi moment populacije se računa:

$$m_1 = E[(X - \mu)^1].$$

Momenti mogu da se računaju i pomoću

$$m_k = E(\widehat{X}_k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^k.$$

Dakle, prvi momenat je u stvari prosek uzorka populacije

$$m_1 = E(\widehat{X}_1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{X}),$$

pri čemu je \bar{X} srednja vrednost populacije.

Drugi moment je standardna devijacija. Standardna devijacija je jedna od ključnih mera varijabilnosti koja ukazuje u kojoj su meri vrednosti udaljene od aritmetičke sredine.

$$\sigma = \sqrt{E(X - \mu)^2}$$

Treći i četvrti moment su koeficijent asimetrije (skewness) i spljoštenosti (kurtosis).

Koeficijent asimetrije će biti jednak nuli kada je distribucija simetrična, ako je koeficijent asimetrije negativan tada je distribucija nagnuta u desno a ako je vrednost pozitivna tada je distribucija nagnuta u levo.

$$m_3 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^3 p_i}{\sigma^3} \text{ za diskretne promenljive;}$$

$$m_3 = \frac{\int_{\min}^{\max} (x_i - \mu)^3 f(x) dx}{\sigma^3} \text{ za neprekidne promenljive.}$$

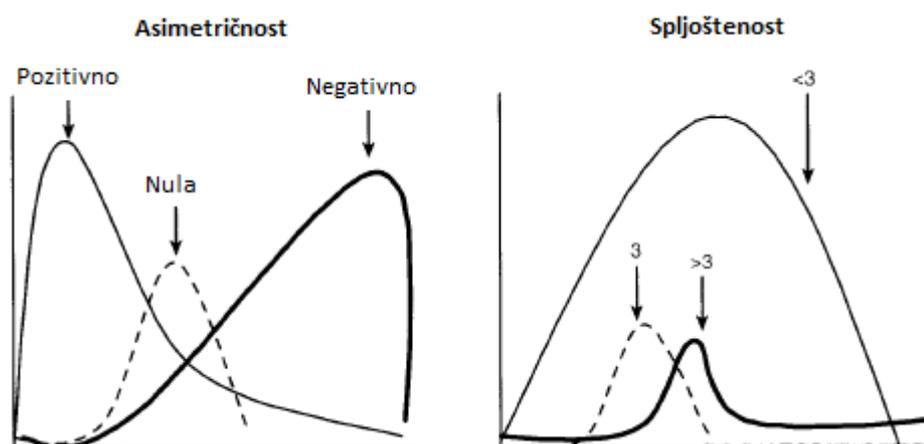
Kurtosis predstavlja spljoštenost distribucije i vrednost kurtosisa govori u kojoj su meri vrednosti koncentrisane oko aritmetičke sredine. Idealna distribucija ima vrednost kurtosisa 0, kod takozvanih spljoštenih distribucija vrednost kurtosisa je negativna a kod zašiljenih distribucija je pozitivna. Za

populacije sa velikom vrednošću kurtosisa kažemo da su leptokurične. Kurtosis računamo koristeći sledeće formule

$$m_4 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^4 p_i}{\sigma^4} \text{ za diskretne promenljive,}$$

$$m_4 = \frac{\int_{\min}^{\max} (x_i - \mu)^3 f(x) dx}{\sigma^4} \text{ za neprekidne promenljive.}$$

Naime, normalna raspodela ima koeficijent asimetrije jednak 0 a kurtosis jednak 3, distribucije sa debljim repom imaju kurtosis veći od 3. Na slici 1. su prikazani oblici za različite vrednosti asimetričnosti i kurtosisa.



Slika 1. Treći i četvrti moment slučajne promenljive

1.2.2 Karakteristična funkcija

Karakteristična funkcija slučajne promenljive X je funkcija $f_X(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ je da ta sa

$$f(t) = E(e^{itx}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi_X(x) dx, & \text{za neprekidne slučajne promenljive,} \\ \sum_j e^{itx_j} p(x_j), & \text{za diskretne slučajne promenljive.} \end{cases}$$

Definicija 1.2.1: Neka je X slučajna promenljiva. Njena funkcija generatrisa verovatnoće je data sa

$$P_X(z) = E(z^X),$$

Za one $z \in \mathbb{R}$ za koje očekivanje postoji, a njena finkcija generatrisa momenta je data sa

$$M_X(t) = E(e^{tX}),$$

za one $t \in \mathbb{R}$ za koje očekivanje postoji.

Pri čemu važi:

- 1) $M_X(t) = P_X(e^t)$;
- 2) $P_X(z) = M_X(\ln z)$;

3) X_1, \dots, X_n nezavisne, tada je

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(z) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(z) \text{ ako } M_{X_i} \text{ postoji za sve } i = 1, \dots, n;$$

4)

$$P_{\sum_{i=1}^n X_i}(z) = \prod_{i=1}^n P_{X_i}(z) \text{ ako } P_{X_i} \text{ postoji za sve } i = 1, \dots, n.$$

Znamo da važi

$$f(t) = E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi_X(x) dx = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_X(x))$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_X(x)) / \mathcal{F},$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \varphi_X(x).$$

Ako su X, Y nezavisne slučajne promenljive onda je

$$f_{X+Y}(t) = f_X(t) \cdot f_Y(t) / \mathcal{F}$$

$$\varphi_{X+Y}(t) = \mathcal{F}(f_X(t) \cdot f_Y(t)) = \mathcal{F}(f_X(t)) \cdot \mathcal{F}(f_Y(t))$$

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X * \varphi_Y.$$

1.2.3 Raspodele slučajne promenljive

Raspodele slučajne promenljive mogu biti parametarske i neparametarske. Parametarske raspodele slučajne promenljive mogu se opisati matematičkom funkcijom dok kod neparametarskih raspodela ovo nije moguće.

1.2.3.1 Neparametarske raspodele

Informacije o raspodeli verovatnoće možemo dobiti korišćenjem Kernelove metode glačanja krive. Ova tehnika opisuje podatke pomoću procene gustine neparametarskim pristupom. Svaka tačka slučajnog vektora $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ je uključena u Kernelovu ocenu gustine

$$f(x, h) = \frac{1}{nh} \sum_{k=1}^n K\left(\frac{x - x_k}{h}\right),$$

gde je h skalirajući faktor, a K odabrana Kernelova funkcija. Epanečnikov kernel je najčešći i definisan je sa

$$K(\eta) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - \eta^2), & \eta \in (-1, 1) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

gde je $\eta = (x - x_k)/h$.

Empirijska funkcija raspodele slučajne promenljive X za određeni uzorak $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ima sledeći oblik:

$$F_{ecdf}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(x_k \leq x),$$

gde je I jedinična funkcija definisana sa

$$I(x_k \leq x) = \begin{cases} 1 & , x_k \leq x, \\ 0 & , x_k > x. \end{cases}$$

Empirijska raspodela se koristi u okviru testova saglasnosti gde se vrednosti empirijske raspodele u određenim tačkama upoređuju sa vrednostima ocenjene raspodele gubitaka. Ako ocenjena raspodela približno prati empirijsku to implicira da je dobro urađeno ocenjivanje.

1.2.3.2 Parametarski pristup

Parametarska raspodela je funkcija raspodele određena specifičnom vrednosti koja se naziva parametar, ovih vrednosti može biti jedna ili više u zavisnosti od tipa raspodele. U nastavku će biti prikazane osnovne karakteristike neprekidnih raspodela koje se koriste za modeliranje frekvencije i visine gubitka događaja operativnog rizika.

1.2.3.2.1 Poasonova raspodela

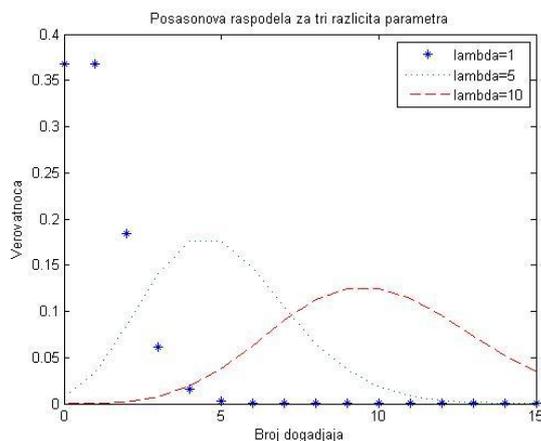
Poasonova raspodela je diskretna slučajna promenljiva koja opisuje verovatnoću da se određeni broj događaja desi u datom vremenskom periodu. Koristi se za modeliranje pojave retkih događaja u određenom vremenskom intervalu.

Raspodela verovatnoće je definisana sa

$$f(x; \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}.$$

Parametar λ se ocenjuje na osnovu željene frekvencije. Ako pretpostavimo da je vremenski okvir godinu dana, λ predstavlja godišnji prosek uzorka.

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$



Slika 2. Poasonova raspodela

Na slici 2 je prikazana Poasonova raspodela za različite vrednosti parametra lambda.

Srednja vrednost i varijansa Poasonove raspodele su isti i iznose λ .

1.2.3.2.2 Negativna binomna raspodela

Negativna binomna raspodela je opšti oblik Poasonove raspodele, pri čemu frekvencija λ nije konstanta već se pretpostavlja da dolazi iz Gama raspodele.

Kada je parametar r negativne binomne raspodele ceo broj tada je funkcija raspodele verovatnoća data sa

$$y = f(x|r, p) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x I(x),$$

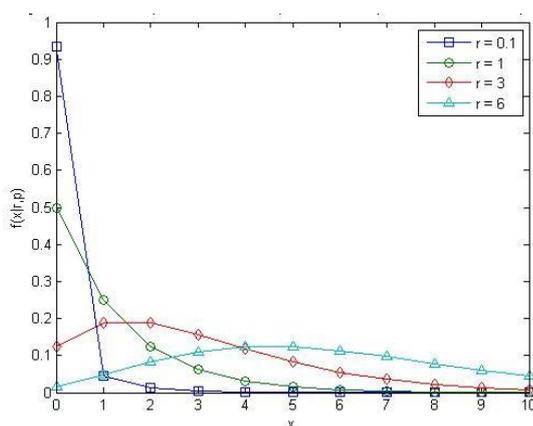
gde je $q = 1 - p$. Kada r nije ceo broj, binomni koeficijent u formuli se zameni sa

$$\frac{\Gamma(r+x)}{\Gamma(r)\Gamma(x+1)}$$

U svojoj jednostavnijoj formi (kada je r ceo broj), negativna binomna raspodela modelira broj neuspeha x pre nego što se dostigne određeni broj uspeha u nezavisnim serijama identičnih eksperimenata. Njeni parametri su verovatnoća uspeha u jednom pokušaju p , i broj potrebnih uspeha r . Specijalan slučaj negativne binomne raspodele kada je $r=1$ je geometrijska raspodela koja modelira broj neuspeha pre prvog uspeha.

Negativna binomna raspodela je uopštenija od Poasonove raspodele jer je njena varijansa veća, čineći je pogodniju za prebrojavanje podataka koji nemaju pretpostavke Poasonove raspodele.

Funkcija negativne binomne raspodele za različite parametre data je na slici 3.



Slika 3. Negativna binomna raspodela

1.2.3.2.3 Lognormalna raspodela

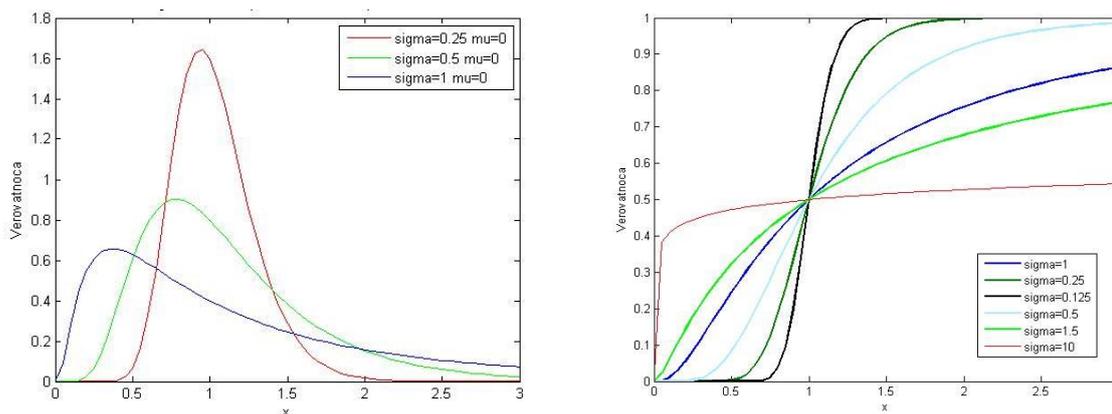
U teoriji verovatnoće, Lognormalna raspodela je neprekidna raspodela čiji je logaritam normalno raspoređen. Odnosno ako slučajna promenljiva X ima Lognormalnu raspodelu, onda $Y = \ln(X)$ ima normalnu raspodelu. Slično ako je Y normalne raspodele onda $X = \exp(Y)$ ima Lognormalnu raspodelu. Slučajna promenljiva Lognormalne raspodele ima samo pozitivne vrednosti.

Funkcija raspodele slučajna promenljive X log normalne raspodele sa parametrima μ i σ , gde je $-\infty < \mu < \infty$ i $\sigma > 0$. Funkcija gustine i funkcija raspodele su date sa

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left\{\frac{-(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}} \text{ i } F(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right); \quad x > 0$$

gde je $\Phi(x)$ funkcija raspodele standardizovane normalne slučajne promenljive X .

Srednja vrednost log normalne raspodele je $e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}$ a varijansa je $e^{(2\mu + \sigma^2)}(e^{\sigma^2} - 1)$.

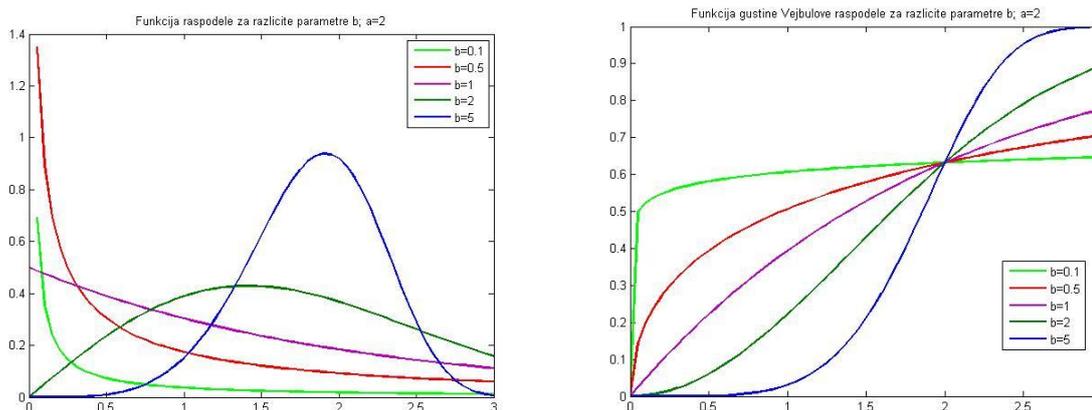


Slika 4. Funkcija gustine i funkcija raspodele Lognormalne raspodele za različite parametre

1.2.3.2.4 Vejbulova raspodela

Vejbulova funkcija raspodele je pozitivna za pozitivne vrednosti slučajne promenljiva, u ostalim slučajevima je jednaka nuli. Za strogo pozitivne vrednosti parametra oblika raspodele b i skalirajućeg parametra a , funkcija raspodele je data sa

$$f(x|a, b) = \frac{b}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} e^{-(x/a)^b}.$$



Slika 5. Funkcija raspodele i funkcija gustine Vejbulove raspodele za različite parametre

Srednja vrednost Vejbulove raspodele je $a\Gamma(1 + \frac{1}{b})$ a varijansa je $a^2 [\Gamma(1 + 2\frac{1}{b}) - \Gamma(1 + \frac{1}{b})^2]$.

1.2.3.2.5 Gama raspodela

Ova raspodela je uopštenje eksponencijalne raspodele i njena funkcija gustine je data sa

$$\varphi(x, a, b) = \begin{cases} \frac{b^{-a}}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

pri čemu je a parametar oblika a b parametar skaliranja.

Funkcija raspodele

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \gamma\left(a, \frac{x}{b}\right).$$

Napomena: Gama funkcija - Ako je α kompleksan broj sa pozitivnim realnim delom, onda je

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

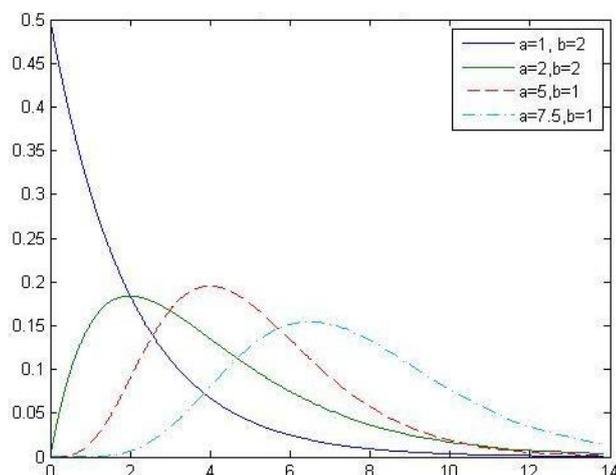
Ako je $\alpha \in \mathbb{N}$ onda je

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$$

Uvek važi

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha).$$

Srednja vrednost gama raspodele je ab a varijansa je ab^2 .



Slika 6. Grafik gustine za različite vrednosti parametara Gama raspodele

1.2.4 Ocena parametara

Prilikom ocene parametara koriste se 3 metode: metoda maksimalne verodostojnosti, metoda kvantila (percentila) i metoda momenta.

Metoda maksimalne verodostojnosti daje najtačnije vrednosti ocene i važi za najbolju metodu zbog čega će u ovom radu ona biti i korištena.

U ovoj metodi ocena za nepoznati parametar θ se uzima tako da verovatnoća realizacije uzorka (x_1, \dots, x_n) bude najveća.

Definicija 1.1.4.1: Neka je (X_1, \dots, X_n) prost uzorak obima n i neka je (x_1, \dots, x_n) realizovan uzotak. Označimo sa $\varphi(x; \theta)$ gustinu raspodele $f(x; \theta)$ obeležja X ako je X neprekidnog tipa, sa $P(X = x; \theta), x \in \{x_1, \dots, x_n\}$ ako je X diskretnog tipa. **Funkcija verodostojnosti** $L(\theta)$ definiše se kao

$$L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} p(x_1, \theta) \dots p(x_n, \theta) & \text{za diskretnu raspodelu} \\ \varphi(x_1, \theta) \dots \varphi(x_n, \theta) & \text{za neprekidnu raspodelu} \end{cases}$$

Neka je $\theta = \psi(x_1, \dots, x_n)$ vrednost parametra kojim se postiže maksimum funkcije $L(\theta)$ pri fiksiranim x_1, \dots, x_n . Statistika

$$\hat{\theta} = \psi(X_1, \dots, X_n)$$

Je ocena maksimalne verodostojnosti parametra θ .

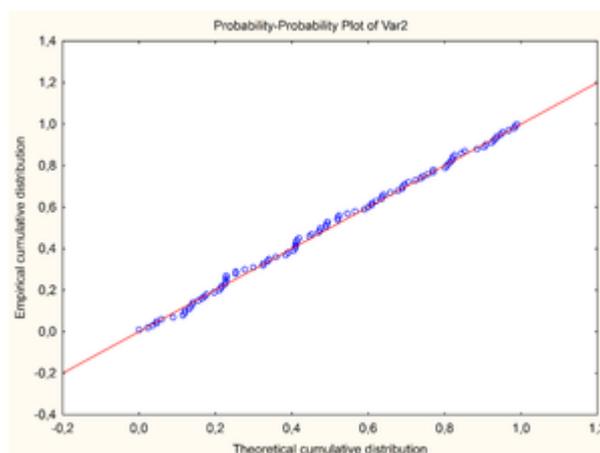
1.2.5 Test statistike

Postoji nekoliko statističkih testova koji se koriste za testiranje pretpostavke da izabrana raspodela za uticaj događaja operativnog rizika dobro opisuje podatke. U ovom radu će se koristiti najopštiji statistički testovi poput: grafika raspodele verovatnoće, PP grafika, Kolmogorov-Smirnov test. Posmatramo uzorak od N obzervacija uticaja slučajne promenljive X i testiramo hipotezu:

1. H_0 : Uzorak dolazi iz raspodele čiju hipotezu testiramo;
2. H_1 : Uzorak ne dolazi iz raspodele čiju hipotezu testiramo.

1.2.5.1 Grafici verovatnoće (P-P dijagram)

Lak način da se proveri da li podaci dolaze iz neke raspodele je pomoću PP dijagrama. Ukoliko se podaci nalaze na liniji (slika 7) ili su blizu nje znači da prate raspodelu čiju hipotezu testiramo, u suprotnom podaci ne dolaze iz izabrane raspodele.



Slika 7. P-P dijagram

Grafici verovatnoće nam daju odgovore

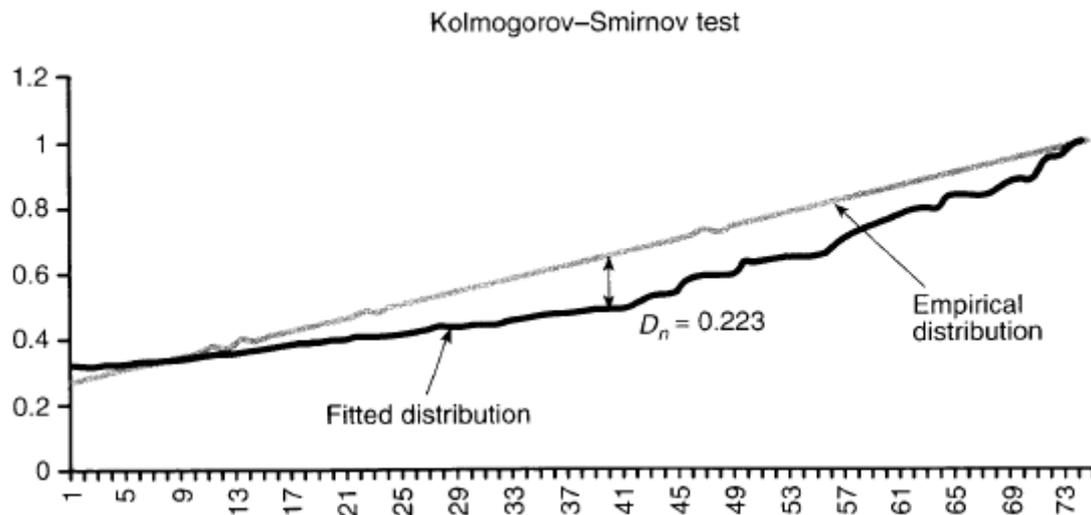
1. Da li odabrana raspodela dobro modelira podatke?
2. Koja je raspodela najbolja za podatke?
3. Koje su najbolje ocene parametara skaliranja i lokacije odabrane raspodele?

1.2.5.2 Kolmogorov-Smirnov test

Kolmogorov-Smirnova test (ks test) statistika je najveća apsolutna devijacija između funkcije gustine uzorka i funkcije gustine odabrane raspodele verovatnoće čiju hipotezu testiramo nad skupom slučajnih promenljivih

$$D_n = \max |F_N(x) - F(x)|$$

za svako x , pri čemu je empirijska funkcija gustine uzorka data sa $F_N(x)$, a $F(x)$ je funkcija gustine raspodele čiju hipotezu testiramo. Na slici 8 je ilustrovan način određivanja ks testa.



Slika 8. Primer KS testa

Mana KS testa je u tome što traži samo maksimalnu devijaciju u tački, ne uzimajući u obzir da li odabrana raspodela dobro modelira celu raspodelu.

2 RIZICI U BANKARSTVU

2.1 Bazelski komitet

Međunarodna banka za poravnanja je osnovana 1930. sa ciljem da pomogne u upravljanju kreditima za rekonstrukciju nakon Drugog Svetskog rata, ali se ubrzo pretvorila u telo koje omogućava monetarnu i finansijsku stabilnost pomoću statističkih analiza, ekonomskog istraživanja i redovnih sastanaka sa guvernerima centralnih banaka i globalnih finansijskih eksperata.

Bazelski komitet za superviziju banaka (BCBS) je osnovan od strane država članica G10⁶ grupe krajem 1974. godine, pri Međunarodnoj banci za poravnanja (BIS), Bazel. Godine 1975. BCBS počinje sa radom a danas ima ukupno 27 zemalja članica: Argentina, Australija, Brazil, Belgija, Kanada, Kina, Francuska, Nemačka, Hong Kong, Indija, Indonezija, Italija, Japan, Južna Koreja, Meksiko, Rusija, Saudijska Arabija, Luksemburg, Holandija, Singapur, Južna Afrika, Španija, Švedska, Švajcarska, Turska, Velika Britanija, Sjedinjene Američke Države.

Osnovni cilj BCBS je poboljšavanje ključnih supervizorskih izazova i unapređenje supervizija banaka širom sveta.

Međutim, BCBS nema autoritet kontrole i njegovi zaključci nemaju pravnu snagu u državama članicama. Ovo telo formuliše osnovne standarde supervizije i daje preporuke na osnovu najbolje prakse, u očekivanju da će ih supervizori širom sveta primeniti na način koji je pogodan za njihove nacionalne sisteme. Na taj način, BCBS obezbeđuje zajedničke standarde supervizije i iste principe u različitim zemljama.

Komitet za superviziju banaka je uspostavio pravila za finansijske institucije i državna regulatorna tela koja članice komiteta moraju da poštuju u cilju održanja stabilnosti svetskog tržišta.

2.1.1 Bazel I

Velika volatilnost na finansijskim tržištima, dužnička kriza, globalizacija, deregulacija, novi finansijski instrumenti tokom sedamdesetih i osamdesetih godina dvadesetog veka imali su za posledicu veliki pad kapitala velikih banaka širom sveta. Sve ovo je motivisalo Bazelski komitet da 1988. godine sastavi i objavi prvi međunarodni sporazum o kapitalu banaka (Basel Capital Accord) poznat kao Bazel I. Bazel I je uveden da bi se na jedinstven način izračunavala adekvatnost kapitala kako bi se ojačala finansijska stabilnost na svetskom tržištu. Ovim dokumentom su definisani elementi kapitala banke- osnovni i dopunski kapital, ponderi kreditnog rizika (ponderi rizika: 0%, 20%, 50% i 100%) i faktore kreditne konverzije za vanbilansne stavke (posle čega se primenjuju odgovarajući ponderi rizika), kao i odnos između kapitala i ukupne izloženosti banke (bilansne i vanbilansne) ponderisane kreditnim rizikom s ciljem izračunavanja pokazatelja adekvatnosti kapitala. Ovaj pokazatelj trebao bi da iznosi najmanje 8%, u Srbiji je koeficijent adekvatnosti na nivou od 12%.

Međutim, Bazelom I nisu bila propisane mere za upravljanjem i merenjem operativnog rizika od strane Bazelskog komiteta. Bazel I je predstavljao siguran i odgovarajući standard koji će zaštititi banke od nesolventnosti i minimalni kapitalni zahtevi će obezbediti standard ispod kojeg regulatori neće dozvoliti bankama da nastave poslovanje. Međutim, banke su ubrzo počele da ispituju da li su

⁶ Grupa od deset (SAD, Velika Britanija, Kanada, Francuska, Nemačka, Holandija, Belgija, Italija, Švedska i Japan) vodećih industrijskih zemalja u Međunarodnom monetarnom fondu. Još 1962. godine ove zemlje su sa MMF-om zaključile Opšti sporazum o kreditiranju, stavljanjem određenih sredstava na raspolaganje za slučaj platnobilansnih poremećaja.

propisima Bazela I obuhvaćeni i rizici sve komplikovanih finansijskih tržišta. Ubrzo su banke počela da „izigravaju“ sistem i da prebacuju aktivu na van bilans kako bi manipulirali svojim portfoliom i smanjili svoje kapitalne zahteve, dok ovim nisu nužno smanjili i svoju stvarnu izloženost riziku.⁷

2.1.2 Bazel II

Potreba za novim načinom obračuna kapitalnih zahteva dovela je do uvođenja Bazela II. Ovim dokumentom se zahteva da se u obračun kapitalnih zahteva uključi i kapitalni zahtevi za operativni rizik. Pored toga, sam način izračunavanja kapitalnog zahteva za kreditni rizik je pretrpeo znatne izmene. Bazelski standard II je podeljen u tri stuba: minimalni kapitalni zahtev, supervizorska procena i tržišna disciplina.

Stub 1: Minimalni kapitalni zahtevi- propisuje minimalne kapitalne zahteve za kreditni, tržišni i operativni rizik, ali pruža mogućnost da se razviju sofisticirani modeli i tehnike za njihovo izračunavanje. Bazel II zahteva od banaka da održavaju nivo kapitala za sredstva u celoj kompaniji kako bi sprečio izbegavanje obračuna kapitala manipulacijom aktive kroz korporativnu strukturu.

Kreditni rizik: Bazel II omogućava bankama sofisticiraniji pristup izračunavanja kapitalnih zahteva za kreditni rizik uzimajući u obzir specifičnost svake banke: standardizovani pristup, pristup zasnovan na internim rejtingima (FIRB) i napredni (IRB) pristup. Više o samim pristupima može se naći na sajtu narodne banke.

Tržišni rizik: Tretman tržišnog rizika je ostao nepromenjen u odnosu na Bazel I i zasniva se na VaR pristupu.

Operativni rizik: Novina koju Bazel II uvodi je obračunavanje kapitalnih zahteva za operativni rizik. Više o tome u odeljku 2.3.

Stub 2: Supervizorska procena: uvodi se proces interne procene adekvatnosti kapitala (ICAAP) koji ukazuje na stepen izloženosti rizicima kojima se banka izlaže u svom poslovanju i ukazuje na vezu sa optimalnim kapitalnim zahtevima čime se jača proces supervizije;

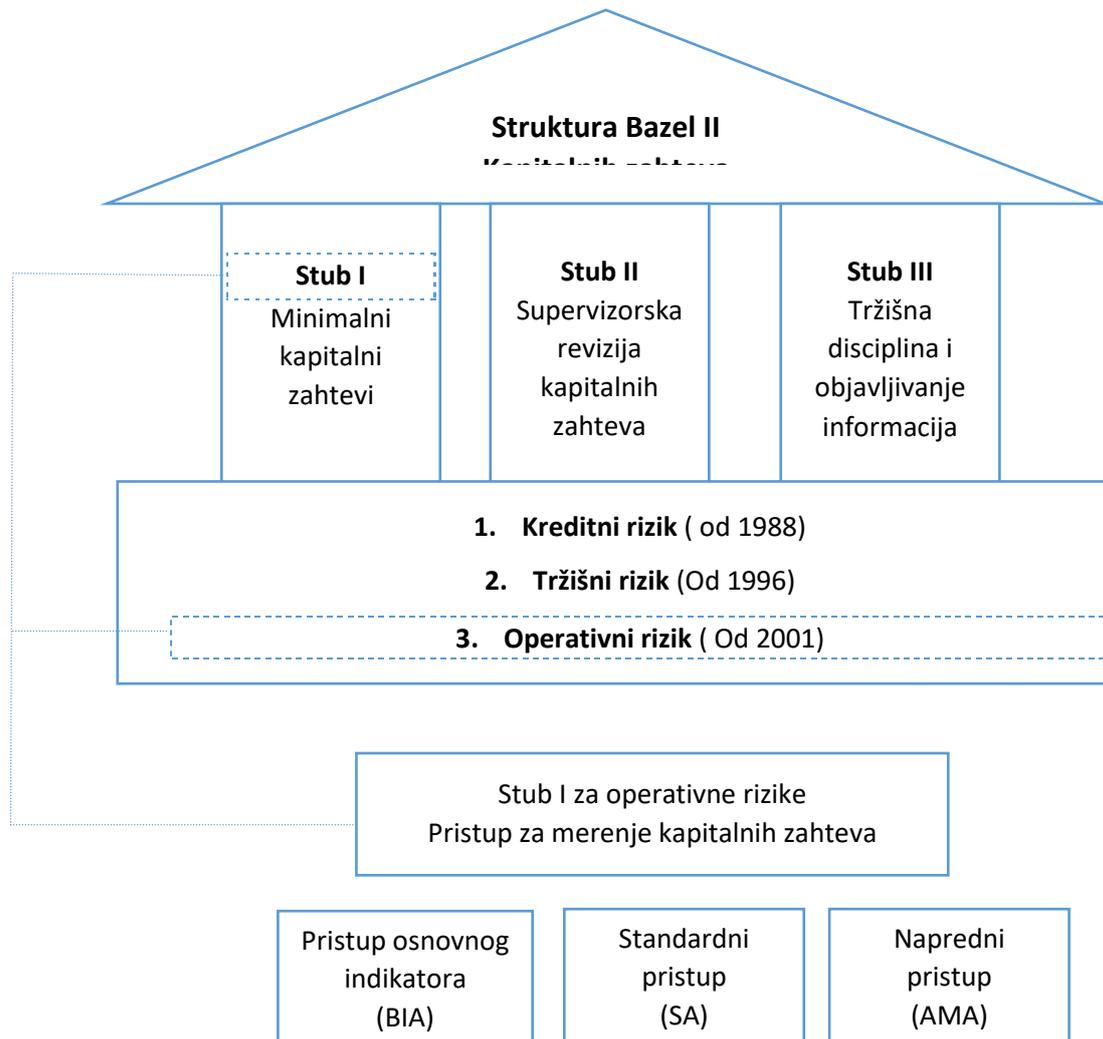
U cilju veće kontrole regulatora da li rukovodstvo banke na adekvatan način upravlja rizicima i dali je banka odvojila dovoljno kapitala u skladu sa svojom izloženosti rizicima regulator je uveo obavezu bankama da vrše procenu adekvatnosti kapitala za pokriće svih rizika kojima su u svom poslovanju izložene, uključujući i rizike koji nisu (u potpunosti) obuhvaćeni Stubom 1. Supervizor treba da analizira i proceni adekvatnost tog internog procesa banke kako bi odredio da li rukovodstvo banke primenjuje razboritu procenu svih rizika i da li je banka obezbedila adekvatan iznos kapitala u odnosu na obim i vrstu svojih poslovnih aktivnosti.

Stub 3: Tržišna disciplina- odnosi se na obavezu banaka da objave značajne informacije o kapitalu i izloženosti rizicima, proces upravljanja rizicima i, na kraju, na samu adekvatnost kapitala određene banke ili druge institucije u finansijskom sektoru što upotpunjuje vezu između Stuba I i Stuba II.

Osnovna svrha stuba 3 je da se drugim učesnicima omogući da pristupe ključnim informacijama o učesnicima na finansijskom tržištu kako bi svi učesnici na tržištu mogli da

⁷ Isto kao 1

analiziraju poslovanje banke, način na koji upravlja rizicima kojima je izložena kao i nivo adekvatnosti kapitala banke.



Slika 9. Struktura Bazel II kapitalnih zahteva

2.1.3 Bazel III

Nakon identifikovanja slabosti finansijskih sistema i nedostataka Bazel II standarda, akumuliranih tokom svetske finansijsko-ekonomske krize, započet je proces izmena ovih standarda. Kao odgovor na svetku finansijsku krizu uveden je Bazel III sa ciljem da se unapredi sposobnost finansijskih institucija da apsorbuju šokove koji proizilaze iz stresnih tržišnih situacija umanjujući rizik od preliivanja krize iz finansijskog sektora na svetsku ekonomiju.

Izmene standarda uvođenjem Bazela III se odnose na:

- Kvalitetniju kapitalnu osnovu banaka, na unapređenje kvaliteta kapitala i jačanje kapitalnih zahteva;
- Adekvatnije upravljanje rizikom koji se odnosi na uvođenje minimalnih standarda za upravljanje rizikom likvidnosti, čime se uvodi minimalni pokazatelj likvidnosti;
- uvođenje leveridž racija kao dodatnog pokazatelja poslovanja banaka koji nije zasnovan na stepenu rizičnosti aktive već predstavlja odnos između kapitala i ukupne izloženosti banke i određivanje njegovog maksimalnog nivoa;
- Uvođenje dva globalna standarda likvidnosti za međunarodno aktivne banke

- uvođenje niza mera u cilju formiranja što adekvatnijih rezervi kapitala (capital buffers) koji će obavezati banke da u dobrim vremenima izdvajaju više sredstava koja bi mogla da se koriste u periodima krize.

Regulatori su postavili prelazni period od 6 godina počevši od januara 2013. do januara 2019. godine, kako bi bankama dali dovoljno vremena za prikupljanje potrebnog kapitala.

2.1.4 Implementacija bazelskih standarda u Srbiji

Primena Bazela II u Srbiji je završena u junu 2011. kada je Narodna banka Srbije donela paket propisa koji se tiče usaglašavanja propisa banke sa standardima Bazela II.

Odlukom o adekvatnosti kapitala je implementiran Stub 1; Odlukom o upravljanju rizicima banke je implementiran Stub 2, a odlukom o objavljivanju podataka i informacija banke je implementiran Stub 3.

Izvršni odbor Narodne banke Srbije je usvojio Strategiju uvođenja Bazel III standarda u decembru 2013. čije se sprovođenje odvija u tri faze, a čija je poslednja faze predviđena za kraj 2015. Imajući u vidu da se sprovođenje Strategije za uvođenje standarda Bazela III u Srbiji odvija paralelno s drugim aktivnostima koje se odnose na unapređenje regulatornog okvira za poslovanje banaka, na sednici Izvršnog odbora Narodne banke Srbije održanoj 12. decembra 2014. godine, usvojena je odluka kojom je inicijalno predviđen rok za sprovođenje druge faze Strategije (do kraja 2014. godine) produžen do kraja 2015. godine.⁸

Analiziranjem regulative u Republici Srbiji ustanovljeno je da se važeća regulativa razlikuje u odnosu na propise Evropske unije kojima se uvode Bazel III. Razlike se odnose na zahteve u pogledu regulatornog kapitala, kapitalne zahteve za tržišne rizike i pokazatelje likvidnosti, dok manje razlike postoje u delovima propisa koji se odnose na kapitalne zahteve za kreditni rizik i za operativni rizik. Neophodno je usaglasiti regulatorni okvir Republike Srbije u vezi sa sekjuritizacijom, pokazateljem leveridža kao i zaštitnim slojevima kapitala, s obzirom da domaća regulativa ne propisuje navedene pojmove.

2.2 Upravljanje operativnim rizicima u bankarskom poslovanju

Operativni rizik može biti kreiran od strane širokog spektra različitih spoljnih događaja u rasponu od nestanka struje do poplava ili zemljotresa i terorističkih napada. Slično tome, operativni rizik može nastati usled unutrašnjih događaja kao što su potencijalni kvarovi ili mane u procesima i sistemima (npr. IT sistema, sistema upravljanja rizicima ili procesima upravljanja ljudskim resursima), ili iz aktivnosti koji su poverene trećim licima. Operativni rizik koji proizilaze iz upravljanja ljudskim resursima može se odnositi na niz pitanja, kao što su zloupotreba službenog položaja ili slaba obuka radnika, sklonost zaposlenih ka malverzacijama, sukob interesa, prevare i sl.

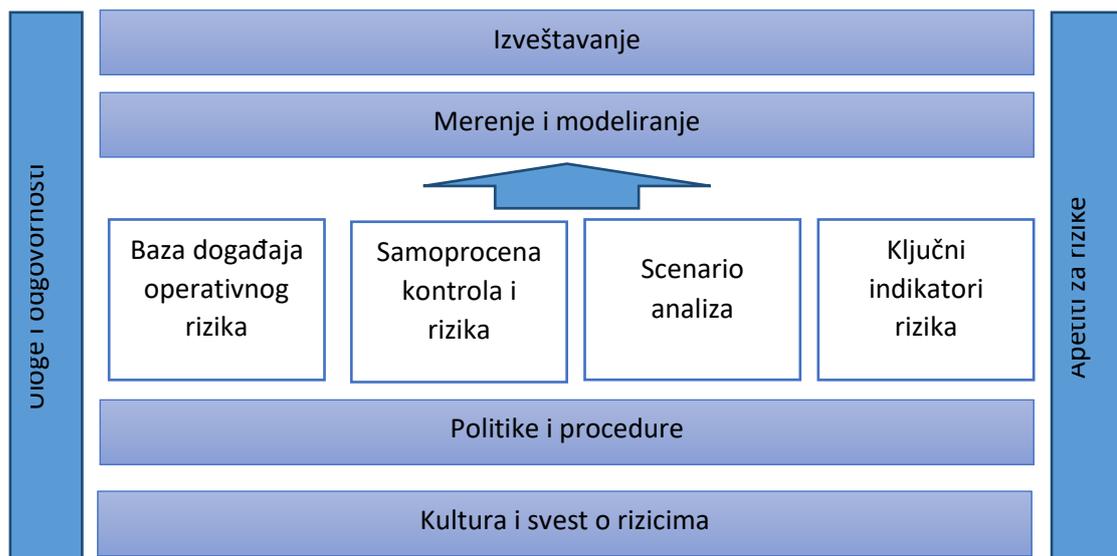
Postupak upravljanja operativnim rizicima u bankarskom poslovanju treba da obezbedi da se operativni rizik na pravilan način identifikuje, da se nadgleda njegov razvoj, da se kontroliše i ublažava. Bazelski komitet za superviziju banaka je obezbedio smernice za najbolju praksu upravljanja operativnim rizikom. Uspostavljanjem ovih standarda gradi se okvir upravljanja operativnim rizikom koji odgovara kulturi banke i oslikava praksu industrije u kojoj ona posluje. Glavni gradivni blokovi okvira upravljanja operativnim rizikom su:

- Baza događaja operativnog rizika

⁸ Preuzeto sa sajta Narodne banke Srbije

- Samoprocena kontrola i rizika u procesima
- Scenario analize
- Ključni indikatori rizika

Okvir za upravljanje operativnim rizikom treba da obezbedi smernice, politike i procedure, da podstiče promene u kulturi upravljanja rizikom, da obezbedi inpute za uspostavljanje apetita za preuzimanje rizika. Okvir treba da pruži podatke koji će služiti kao ulazni parametri za formiranje modela za obračun kapitalnih zahteva i za podatke za izveštavanje o izloženosti operativnom riziku.



Slika 10. **Gradivni elementi okvira upravljanja operativnim rizicima**

Osnova okvira za upravljanje operativnim rizikom predstavlja kultura i svest o operativnim rizicima i uloge i odgovornosti u upravljanju operativnim rizikom.

2.2.1 Uloge i odgovornosti

Model “Tri linije odbrane” u Banci opisuje višeslojni sistem internih kontrola. Sve relevantni učesnici (sa svojim ulogama i odgovornostima) koji su povezani sa upravljanjem rizikom se nalaze u okviru ovog modela.

Ključne uloge i odgovornosti glavnih učesnika povezanih sa upravljanjem operativnim rizikom Banke su:

- Prva linija odbrane (Poslovni menadžment) - Pod nadzorom članova Izvršnog odbora, poslovni menadžment je odgovoran za svakodnevno upravljanje operativnim rizikom. Ovo znači da su poslovne linije vlasnici operativnih rizika u okviru svojih poslovnih aktivnosti. One bi trebalo da stvore adekvatnu svest o operativnom riziku i kulturu koja obezbeđuje efikasno upravljanje operativnim rizikom u okviru svog poslovnog domena. Poslovne linije su odgovorne za pravilnu implementaciju i sprovođenje pravila Politike i sprovođenje svih smernica za efektivno upravljanje operativnim rizikom dobijenih od funkcije za upravljanje rizicima.
- Druga linija odbrane (Funkcija za upravljanje rizicima) –sastoji se od nekoliko funkcija koje obezbeđuju nezavisnu podršku i nadzor nad procesima za upravljanjem operativnim rizikom. Druga linija odbrane pruža podršku prvoj liniju u upravljanju operativnim rizikom. Razvija metodologije i smernice i izveštava upravni odbor i viši menadžment banke o stepenu izloženosti operativnom riziku.

- Treća linija odbrane (Interna revizija) - Interna revizija samostalno procenjuje kontrolno okruženje. Interna revizija će implicitno ili eksplicitno - kroz svoj izveštaj o radu koji je fokusiran na rizike - izraziti mišljenje o kvalitetu upravljanja faktorima rizika stavljajući ih u odnos sa odgovornostima. Interna revizija će adresirati svoje preporuke odgovornim osobama u poslovnim linijama, ali će takođe izvestiti i relevantnu funkciju za nezavisnu podršku i nadzor o strukturnim greškama i nedostacima u procesima i sistemima.

U okviru procesa upravljanja operativnim rizikom, sledeće organizacione jedinice igraju važnu ulogu:

2.2.1.1 Upravni odbor (BoD)

Upravni odbor je odgovora za:

- Preispitivanje Politike za upravljanje operativnim rizikom najmanje jednom godišnje, ali i češće ako se dešavaju značajne promene u rizičnom profilu Banke;
- Delegiranje autoriteta Izvršnom odboru Banke za sprovođenje Politike za upravljanje operativnim rizikom;
- Definisane sveobuhvatnog apetita za operativne rizike;

2.2.1.2 Izvršni odbor (ExCo)

ExCo ima sledeće odgovornosti:

- Nadzor nad sprovođenjem Politike za upravljanje operativnim rizikom;
- Odobranje i po potrebi, ali najmanje jednom godišnje, preispitivanje procedura i smernica za upravljanjem operativnim rizikom;
- Osiguravanje da je okvir za upravljanje operativnim rizikom inkorporiran u proces poslovnog odlučivanja;
- Osiguravanje da poslovni (biznis) menadžment preuzima neophodne korake za identifikaciju, merenje, nadzor i kontrolu operativnih rizika;
- Redovno testiranje, najmanje jednom godišnje, BCP i DRP uključujući i adekvatno dokumentovanje rezultata testiranja i njihovo uključivanje u izveštavanje Upravnog odbora.

2.2.1.3 Forum za operativne rizike (ORC)

Forum za operativne rizike je telo Banke koje ima nadzornu ulogu u aktivnostima u vezi operativnog rizika. On osigurava da su operativni rizici pravilno identifikovani i da se njima pravilno upravlja i odgovoran je za realizaciju Okvira upravljanja operativnim rizikom u celoj Banci.

Forum je odgovoran za sprovođenje strategija odobrenih od strane Upravnog odbora. Ovo uključuje obezbeđivanje odgovarajuće strukture upravljanja, procedura, metodologija, kontrola i infrastruktura kako bi se postigli željeni poslovni rezultati i efikasno upravljalo operativnim rizicima.

Forum za operativne rizike bi trebalo da obezbedi odgovarajući nivo podrške za akcione planove koji su dizajnirani da spreče ponavljanje gubitaka kao posledice operativnih rizika ili da ublaže uočene operativne rizike i unaprede kvalitet upravljanja operativnim rizikom. ORC je takođe zadužen za preispitivanje sudskih sporova trećih lica protiv Banke. Pravni predmeti mogu biti direktno povezani sa trenutnim gubicima po osnovu operativnog rizika ili mogu da izazovu finansijski gubitak u budućnosti za koji je procena, u smislu potencijalne izloženosti i računovodstvenog tretmana, neophodna. Popis pravnih predmeta je u nadležnosti Pravne službe.

2.2.1.4 Poslovni menadžment

Poslovni menadžment čine direktori sektora i menadžeri organizacionih jedinica (službi, timova) u banci.

Poslovni menadžment je odgovoran za:

- Implementaciju Okvira za upravljanje operativnim rizikom;
- Identifikaciju i upravljanje operativnim rizikom u okviru poslovnih aktivnosti za koje su nadležni uključujući dizajn i implementaciju ključnih kontrola i akcionih planova za upravljanje operativnim rizikom;
- Osiguranje da su poslovne politike i procedure usklađene sa Okvirom za upravljanje operativnim rizikom;
- Komuniciranje svih neophodnih informacija u vezi operativnih rizika funkciji za upravljanje rizicima.

2.2.1.5 *Sektori, službe i timovi*

Sektori, službe i timovi su organizacioni delovi specijalizovani u određenim oblastima bankarskih aktivnosti, grupisani prema specifičnim zajedničkim karakteristikama i specijalizovani u pojedinim oblastima pratećih aktivnosti koje obezbeđuju uslove za poslovanje Banke.

Uspešna implementacija Okvira za upravljanje operativnim rizikom predstavlja odgovornost svakog organizacionog dela. Okvir za upravljanje operativnim rizikom treba dosledno da se primenjuje unutar cele Banke, a zaposleni na svim nivoima su dužni da na pravilan način razumeju svoja prava i obaveze u odnosu na operativni rizik kojem je Banka izložena.

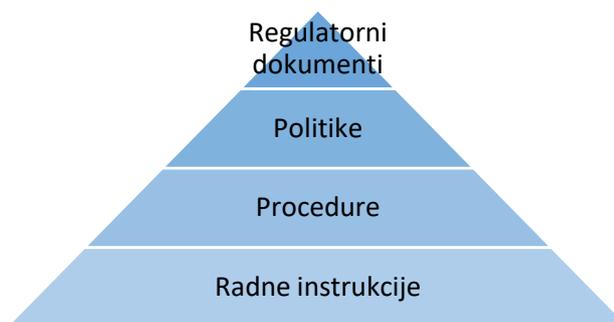
Zaposleni u sektorima, službama i timovima su direktno odgovorni za identifikovanje, procenu, praćenje i kontrolu operativnih rizika u svom organizacionom delu, a u skladu sa Okvirom za upravljanje operativnim rizikom, ali su takođe dužni i da osiguraju da akcije za ublažavanje rizika odobrene od strane Foruma za upravljanje operativnim rizicima budu adekvatno primenjene. Zaposleni u sektorima, timovima i službama su takođe odgovorni, da preko imenovanih koordinatora, izveštavaju funkciju za upravljanje rizicima o događajima operativnog rizika nastalim u njihovom domenu obavljanja aktivnosti.

2.2.2 *Kultura i svest o rizicima*

Nakon što se definišu uloge i odgovornosti sledeći korak u izgradnji okvira za upravljanje operativnim rizikom je proaktivno uspostavljanje kulture i podizanja svesti o riziku. Uspešna implementacija okvira za upravljanje operativnim rizikom počiva na odgovornosti i svesti zaposlenih o prisutnosti operativnog rizika i spremnosti za preduzimanjem preventivnih mera u cilju ublažavanja operativnog rizika. Operativni rizik se nalazi u svim poslovnim procesima i reakcija zaposlenog može biti najbolje koju je praksa do sada pokazala ili potpuna indiferentnost prema riziku, reakcija u potpunosti zavisi od razvijene svesti i kulture kod zaposlenog.

2.2.3 *Politike i procedure*

Dobro uspostavljen okvir za upravljanje operativnim rizikom ima precizno napisane i smislene procedure koje opisuju potrebe svakog od gradivnog bloka okvira upravljanja operativnim rizikom. Postoji nekoliko dokumenata koji propisuju upravljanje operativnim rizicima pri čemu su najopštiji regulatorni dokumenti dok su radne instrukcije i smernice dokumenti napisani sa ciljem da daju detaljne instrukcije prilikom upravljanja operativnim rizikom. Grafički prikaz hijerarhije dokumenata prikazan je na slici 11.



Slika 11. Hijerarhija dokumenata

2.2.4 Tipovi podataka

U cilju da se izgradi efikasan okvir za upravljanje operativnim rizikom neophodno je definisati tehnike za prikupljanje podataka o gubicima koji nastaju kao posledica operativnog rizika, o tehnikama sprovođenja samoprocene rizika, o izgradnji scenario analiza i o ključnim indikatorima rizika.

2.2.4.1 Baza događaja operativnog rizika.

Analizom gubitaka po osnovi operativnih rizika može se vršiti grupisanje na osnovu uzroka, tipa operativnog događaja, efekta koji operativni gubitak ima na banku i po poslovnim linijama gde se desio događaj operativnog rizika. U cilju obezbeđivanja opšte klasifikacije gubitaka po osnovu događaja operativnog rizika Bazelski komitet za superviziju banaka je definisao četiri osnovne kategorije uzroka nastanka događaja operativnog rizika, sedam tipova događaja operativnog rizika i osam poslovnih linija organizacije banke.

Uzroci nastanka događaja operativnog rizika:

- Ljudi-loši ugovori o radu, neetičnost zaposlenih, loša edukovanost zaposlenih, neadekvatna zaštita na radu, neprikladne klauzule u rešavanju radnih sporova;
- Procesi- Nejasni zadaci, neusklađenost internih akata, neadekvatnost ovlašćenja, neprecizne šeme knjiženja, neadekvatno čuvanje podataka;
- Sistemi-Neadekvatna aplikativna podrška, neadekvatan integritet podataka, neadekvatna zaštita o kompjuterskih virusa, loše telekomunikacijske linije, loše napajanje strujom;
- Spoljni faktori-problemi sa dobavljačima, neadekvatna zaštita od požara, neadekvatna zaštita od poplava, neadekvatna fizička zaštita, nejasna regulativa.

U Tabeli 1 su prikazane linije poslovanja i opis poslovnih aktivnosti za svaku pojedinačnu liniju.

Linija poslovanja	Poslovne aktivnosti
Finansiranje privrednih subjekata	Poslovi pokrovitelja emisije finansijskih instrumenata
	Usluge koje se odnose na poslove pokrovitelja
	Investiciono savetovanje
	Konsultantske usluge u vezi sa strukturom kapitala, poslovnim strategijama i povezanim aktivnostima, kao i pružanje usluga koje se odnose na sticanje akcija i udela u drugim društvima i druga značajna ulaganja
Trgovina i prodaja	Poslovi investicionog istraživanja i finansijske analize, kao i ostale vrste savetodavnih usluga koje se odnose na transakcije finansijskim instrumentima
	Trgovina za sopstveni račun
	Poslovi povezani s tržištem novca
	Prijem i obrada naloga koji se odnose na jedan ili više finansijskih instrumenata

	Izvršavanje naloga za račun klijenta
	Plasiranje finansijskih instrumenata bez obaveze otkupa
	Upravljanje multilateralnim sistemom trgovanja
Brokerski poslovi s fizičkim licima	Prijem i obrada naloga koji se odnose na jedan ili više finansijskih instrumenata
	Izvršavanje naloga za račun klijenata
	Plasiranje finansijskih instrumenata bez obaveze otkupa
Bankarski poslovi s privrednim društvima	Primanje depozita i drugih povratnih sredstava
	Kreditiranje
	Finansijski lizing u skladu sa odredbama posebnog zakona
	Izdavanje garancija i drugih oblika jemstava
Bankarski poslovi s fizičkim licima	Primanje depozita i drugih povratnih sredstava
	Kreditiranje
	Finansijski lizing u skladu sa odredbama posebnog zakona
	Izdavanje garancija i drugih oblika jemstava
Platni promet	Usluge povezane s transferom novca
	Izdavanje instrumenata plaćanja i upravljanje
Agencijske usluge	Čuvanje finansijskih instrumenata za račun klijenata, uključujući i sa ovim povezane usluge kao što je upravljanje gotovinom i sredstvima obezbeđenja, kao i upravljanje tim instrumentima
Upravljanje imovinom	Upravljanje portfoliom
	Upravljanje fondovima
	Ostali oblici upravljanja imovinom

Tabela 1. Linije poslovanja

Svi bankarski poslovi trebaju da se mapiraju u predložene linije poslovanja. Bilo koja bankarska aktivnost koja se eksplicitno ne može mapirati u predloženih osam linija poslovanja, a predstavlja dopunski posao glavnom poslu koji pripada nekoj od linija poslovanja mora se locirati u liniju poslovanja kojoj pripada glavni posao. Viši menadžment je odgovoran za proces mapiranja i proces mapiranja mora biti predmet nezavisne revizije.

Tipovi događaja operativnog rizika se mogu svrstati u skladu sa tabelom 2 gde su opisane karakteristike svakog tipa događaja.

Tip događaja	Opis
Interne prevare	Gubici usled pronevere, nepravednog prisvajanja imovine ili pokušaja da se zaobiđu propisi, zakon ili politika kompanije (isključujući politike koje se bave diskriminacijom) koji uključuju bar jednog zaposlenog banke.
Eksterne prevare	Gubici usled pronevere, nepravednog prisvajanja imovine ili pokušaja da se zaobiđe zakon, od strane trećeg lica.
Praksa zaposlenih i bezbednost radnog mesta	Gubici usled aktivnosti neusklađenih sa zakonima ili sporazumima o zapošljavanju, zdravlju ili bezbednosti, usled plaćanja uzrokovanih povredom na radu, ili usled diskriminacije zaposlenih.

Klijenti, proizvodi & poslovna praksa	Gubici usled neuspeha (nenamerno ili usled nemara) da se ispuni profesionalna obaveza prema klijentima ili usled prirode ili dizajna proizvoda.
Oštećenje imovine	Gubici usled potpunog ili delimičnog oštećenja imovine prouzrokovani prirodnom katastrofom ili drugim događajima.
Prekid poslovanja i rada sistema	Gubici proistekli iz prekida poslovanja ili rada sistema.
Upravljanje procesima	Gubici usled neuspele obrade transakcije ili upravljanja procesima (uključujući odnos sa vendorima ili drugom ugovornom stranom).

Tabela 2. Tipovi događaja operativnog rizika

Kontinuirano evidentiranje podataka po uzrocima, poslovnim linijama i tipovima događaja preduslov je za formiranje baze podataka koja će se koristiti za formiranje i jačanje svesti menadžmenta o ukupnoj izloženosti operativnom riziku. Ovako formirana baza pružiće podatke za empirijsku analizu i procenu operativnog rizika kao i za merenje izloženosti banke operativnom riziku.

2.2.4.2 Samoprocena kontrola i rizika u procesima

Dok nam podaci o gubicima koji nastaju kao posledica događaja operativnog rizika govore o tome šta se već dogodilo, samoprocena kontrola i rizika je dizajnirana tako da nam pomogne da shvatimo sa kojim se to rizicima trenutno suočavamo. Samoprocena je jedan od najvažnijih gradivnih elemenata okvira jer ona identifikuje, procenjuje, kontroliše i ublažava izloženost operativnom riziku.

Podaci o gubicima koji nastaju kao posledica operativnog rizika nam omogućavaju da identifikujemo i ocenimo operativni rizik koji se već desio i da razmislimo kako da ga kontrolišemo i ublažimo u budućnosti, dok nam samoprocena nam daje mogućnost da identifikujemo sve rizike, ne samo one koji su se već materijalizovali.

2.2.4.3 Scenario analiza

Za razliku od samoprocene kontrola i rizika koji su fokusirani na izloženost očiglednim i čestim rizicima, scenario analiza se fokusira na retke i katastrofalne rizike kojima banka može da bude izložena. Scenario analiza stresira okvir za upravljanje operativnim rizicima i tera učesnike da razmišljaju „van kutije“. Scenario analiza je fokusirana na to šta bi moglo da se desi ukoliko postoji nekoliko zastoja u kontrolama ili se desi kombinacija više rizika koji mogu ozbiljno da nanesu štetu banci.

2.2.4.4 Ključni indikatori rizika

Banka koristi Ključne indikatore rizika (u nastavku: KRI) kao sredstvo procene, praćenja i kontrole operativnog rizika, kao preventivni mehanizam za sprečavanje gubitka po osnovu operativnog rizika i kao upravljački mehanizam, koji se koristi u procesu donošenja odluka za poboljšavanje performansi poslovnih procesa i efikasnosti kontrola.

Ključni indikatori pružaju informaciju o promenama izloženosti operativnom riziku i predmet su proaktivne intervencije menadžera.

2.2.4.5 *Merenje i modeliranje*

Nakon što su uspostavljeni gradivni blokovi koji utiču na kvalitet podataka o operativnim rizicima pristupamo postupku merenja i modeliranja operativnog rizika. Pristup za merenje operativnog rizika biće objašnjeni u odeljku 2.3.

2.2.4.6 *Izveštavanje*

Svi prethodno objašnjeni elementi okvira za upravljanje operativnim rizikom predstavljaju ulazne podatke za izveštavanje o izloženosti operativnom riziku. Izveštavanje sakuplja sve informacije koje su sakupljene i izanalizirane kroz proces evidentiranja događaja operativnog rizika, samoprocene kontrola i rizika, scenario analize, kroz procese merenja i modeliranja operativnog rizika i daje smisao podacima.

Kvalitet izveštavanja operativnog rizika je ključan za uspešno uspostavljen okvir za upravljanje operativnim rizikom. Izveštaj treba da podstakne razmišljanje ili da ukaže da je nešto od velike važnosti.

2.2.4.7 *Apetiti za rizike*

Ceo okvir operativnog rizika je zasnovan na uspostavljenom apetitu za operativne rizike. Obično je potrebno vreme da okvir za operativne rizike dostigne nivo na osnovu kojeg će moći da se diskutuje i složi o uspostavljenom apetitu za operativne rizike.

Efikasno upravljanje operativnom riziku je jasno komuniciranje apetita za operativne rizike i apetiti za rizike može biti uspostavljen samo kada je jasna podala uloga i odgovornosti.

2.3 Pristupi merenja operativnog rizika

Nakon odluke Bazelskog komiteta za superviziju banaka da kao deo obavezne kapitalne rezerve predstavljaju i kapitalni zahtevi za operativne rizika javila gomila pitanja počev od identifikacije preko upravljanja i merenja operativnog rizika.

Kroz Bazel II usvojena su tri pristupa merenja operativnog rizika.

Pristupi opisani u nastavku razlikuju se po svojoj složenosti i osetljivosti na rizike kao i po načinu obračuna kapitala za operativne rizike.

2.3.1 *Pristup osnovnog indikatora*

Kapitalni zahtev za operativne rizike izračunat primenom osnovnog indikatora (BIA „*The basic indicator approach*“) je najjednostavniji način za obračun kapitalnih zahteva za operativne rizike.

Kapitalni zahtev za operativni rizik izračunat primenom pristupa osnovnog indikatora jednak je iznosu trogodišnjeg proseka indikatora izloženosti pomnoženog stopom kapitalnog zahteva od 15%. Trogodišnji prosek indikatora izloženosti predstavlja aritmetičku sredinu vrednosti tog indikatora za prethodne tri godine. Ako je za bilo koju od prethodne tri godine indikator izloženosti bio negativan ili jednak nuli, taj iznos se ne uključuje u izračunavanje trogodišnjeg proseka, već se ovaj prosek izračunava kao odnos zbira pozitivnih vrednosti indikatora izloženosti i broja godina u kojima su ostvarene te vrednosti.

Kapitalni zahtevi primenom osnovnog indikatora se računaju po sledećoj formuli:

$$K_{BIA} = \frac{\alpha}{Z} \sum_{i=1}^3 \max(GI^i, 0)$$

gde je $Z = \sum_{i=1}^3 I_{(GI^i > 0)}$, GI^i predstavlja neto zaradu u godini i , a α je određeno od strane Bazelskog komiteta na osnovu sprovedene kvantitativne analize.

BIA pristup je pogodan samo u veoma ograničenom obimu za merenje i kontrolu operativnih rizika. Procena operativnog rizika se vrši paušalno. Adekvatno upravljanje operativnim rizikom u smislu adekvatnosti uspostavljenih kontrola se skoro i ne uzima u obzir jer se kapitalni zahtevi ne računaju pomoću stvarnog operativnog rizika već uz pomoć nivoa neto prihoda od kamata i ukupnog neto prihoda. Osnovno pretpostavka je da se veći prihod može postići prihvatanjem većeg (operativnog) rizika. Međutim, veći prinos ostvaren većim operativnim rizikom je legitimna samo u ograničenom broju slučajeva, jer se bolje performanse mogu ostvariti i boljim upravljanjem rizicima. Sve u svemu, gruba procena rizika pomoću BIA teško da daje podsticaj banci za detaljniju analizu operativnih rizika ili za unapređenje upravljanja operativnim rizicima.

2.3.2 Standardizovani pristup

U poređenju sa BIA, standardizovani pristup je napredniji metod za obračun kapitala za operativne rizike.

Kapitalni zahtev za operativni rizik dobijen primenom standardizovanog pristupa se računa tako što se poslovne aktivnosti razvrstaju u linije poslovanja u skladu sa sledećem tabelom (Tabela 3) i za svaku od tih linija izračunava indikator izloženosti.

Linija poslovanja	Stopa kapitalnog zahteva
Finansiranje privrednih subjekata	18%
Trgovina i prodaja	18%
Brokerski poslovi s fizičkim licima	12%
Bankarski poslovi s privrednim društvima	15%
Bankarski poslovi s fizičkim licima	12%
Platni promet	18%
Agencijske usluge	15%
Upravljanje imovinom	12%

Tabela 3. Razvrstavanje linija poslovanja⁹

Kapitalni zahtev za operativni rizik izračunat primenom standardizovanog pristupa jednak je trogodišnjem proseku godišnjih kapitalnih zahteva za sve linije poslovanja.

Kapitalni zahtev za pojedinačne linije poslovanja jednak je proizvodu indikatora izloženosti izračunatog za tu liniju poslovanja i odgovarajuće stope kapitalnog zahteva utvrđene u tabeli (Tabela 3). Sumiranjem tako dobijenih ponderisanih rezultata po linijama poslovanja, dobija se finalni kapitalni zahtev za operativni rizik za konkretnu godinu.

Konačan kapitalni zahtev za operativni rizik izračunat primenom standardizovanog pristupa jednak je trogodišnjem proseku ovako izračunatih kapitalnih zahteva za sve linije poslovanja.

Formula za računanje kapitalnih zahteva primenom standardizovanog pristupa data je sa

$$K_{SA} = \frac{\sum_{i=1}^3 \max(\sum_{j=1}^8 \beta_j GI^i, 0)}{3}$$

⁹ Preuzeto iz Odluke o adekvatnosti kapitala NBS

Razlikovanje poslovnih linija je pogodan korak da se podigne osetljivost rizika u izračunavanju kapitalnih zahteva za operativne rizike. Međutim pokazatelj neto prihoda od kamata i ukupnih neto prihoda samo obuhvataju obim poslovanja u svakoj poslovnoj liniji ali ne i nivo operativnog rizika. Kapitalni zahtevi dobijeni ovim pristupom su više osetljivi na rizike nego oni dobijeni pomoću BIA, ali je adekvatnost rizika ograničena jer se gubici specifični za poslovanje banke ne uzimaju u prilikom obračuna. Iz ovog razloga je teško utvrditi efikasnost kontrola operativnog rizika. Štaviše, potencijalan efekat diversifikacije poslovnih linija se ne uzima u obzir prilikom sumiranja rezultata.

Primer obračuna kapitalnih zahteva primenom osnovnog indikatora i standardizovanog pristupa dat je u tabeli 4.

Poslovna linija	Pristup osnovnog indikatora (BIA)				Standardizovan pristup (SA)		
	t-3	t-2	t-1	Beta	t-3	t-2	t-1
	Neto zarada (GI) u milionima						
Finansiranje privrednih subjekata	20.00 €	-14.00 €	-1.00 €	18%	3.60 €	-2.52 €	-0.18 €
Trgovina i prodaja	19.00 €	3.00 €	18.00 €	18%	3.42 €	0.54 €	3.24 €
Brokerski poslovi s fizičkim licima	14.00 €	-15.00 €	18.00 €	12%	1.68 €	-1.80 €	2.16 €
Bankarski poslovi s privrednim društvima	16.00 €	10.00 €	11.00 €	15%	2.40 €	1.50 €	1.65 €
Platni promet	17.00 €	-8.00 €	10.00 €	18%	3.06 €	-1.44 €	1.80 €
Agencijske usluge	18.00 €	13.00 €	13.00 €	15%	2.70 €	1.95 €	1.95 €
Upravljanje imovinom	16.00 €	4.00 €	-4.00 €	12%	1.92 €	0.48 €	-0.48 €
Bankarski poslovi s fizičkim licima	12.00 €	5.00 €	6.00 €	12%	1.44 €	0.60 €	0.72 €
Banka	132.00 €	-2.00 €	71.00 €		20.22 €	-0.69 €	10.86 €
Bez negativnog prihoda	132.00 €		71.00 €		20.22 €	- €	10.86 €
Prosek za 3 godine bez negativnog prihoda			101.50 €				
Alfa			15%				
Kapitalni zahtevi (BIA)			15.23 €		Kapitalni zahtevi (SA)		10.36 €

Tabela 4. Obračun kapitalnih zahteva primenom pristupa osnovnog indikatora i standardizovanog pristupa

Kao što možemo primetiti kapitalni zahtevi obračunati standardizovanim pristupom su manji od kapitalnih zahteva dobijenim primenom pristupa osnovnog indikatora. Međutim ovo ne mora uvek da važi.

Kapitalni zahtevi obračunati primenom BIA pristupa su veći od kapitalnih zahteva dobijenih primenom standardizovanog pristupa ukoliko je ispunjena sledeća nejednakost:

$$K_{BIA} > K_{SA} \leftrightarrow \alpha GI > \sum_{i=1}^8 \beta_i GI_i$$

Odnosno

$$\alpha > \frac{\sum_{i=1}^8 \beta_i GI_i}{GI}$$

2.3.3 Napredni pristup merenja operativnog rizika

Napredni pristup merenja operativnog rizika daje bankama slobodu da sami razviju interne modela za procenu kapitala neophodnog da apsorbuje gubitke nastale kao posledice događaja operativnog rizika, ali pod uslovom da su ispunjene pretpostavke. Više o pretpostavkama u [23].

Međutim, da bi banke koristile interno razvijene modele za merenje operativnog rizika neophodno je da dobiju dozvolu regulatornog tela.

Napredni pristup merenja operativnog rizika se ogleda u prikupljanju podataka o svakom tipu događaja operativnog rizika na osnovu kojeg se razvija model. Kapitalni zahtevi se računaju sa za period od godinu dana i nivoom poverenja od 99.9%.

Banka koja planira da koristi napredni pristup merenja operativnog rizika treba da dokaže preciznost svog modela na nivou elemenata matrice propisane u Bazelu II (osam poslovnih linija x sedam tipova opisanih u odeljku 2.2.2.4.1), koji su relevantni za banku i da zadovolji određene kriterijume. Neki od kriterijuma su

- Korišćenje internih podataka, relevantnih eksternih podataka, scenario analiza i faktora koji oslikavaju poslovno okruženje i sistem internih kontrola
- Scenario analize koje su kreirali eksperti u svojim oblastima
- Mera rizika koja se koristi za obračun kapitala treba da odgovara nivou poverenja od 99,9% za period od godinu dana
- Smanjenje kapitalnog zahteva kao posledice osiguranja je dozvoljeno na nivou od 20%

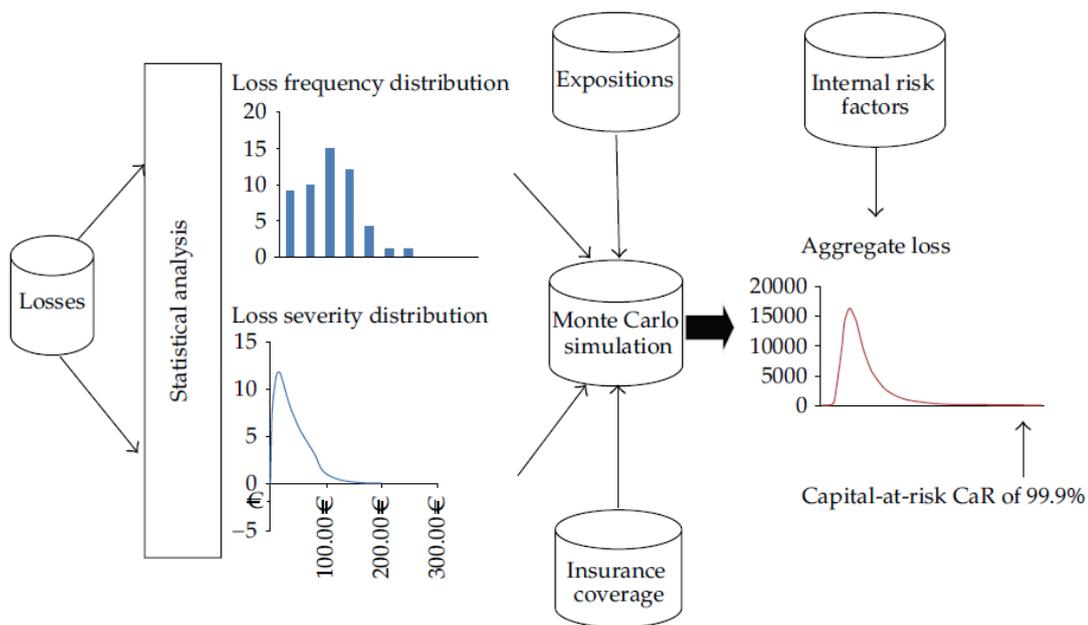
Modeli koji se koriste za napredni pristup merenja operativnog rizika mogu se klasifikovati u nekoliko sledećih grupa.

- Pristup zasnovan na raspodeli gubitaka („*Loss Distribution Approach*“)
- Pristup zasnovan na internim merama (*Internal Measurement Approach*)
- Pristup zasnovan na scenarijima („*Scenario-Based Approach*“)
- Pristup zasnovan na rezultatima (*Scorecard Approach*)

U ovom radu će detaljnije biti opisan pristup zasnovan na raspodeli gubitaka.

3 NAPREDNI PRISTUP MERENJA OPERATIVNOG RIZIKA - PRISTUP ZASNOVAN NA RASPODELI GUBITAKA

Pristup zasnovan na raspodeli gubitaka (LDA) koristi statističku teoriju koja posmatra frekvenciju gubitaka i uticaj gubitaka kao nezavisne slučajne promenljive s obzirom da uspostavljanje kontrolne mogu da utiču samo na uticaj rizika ali ne i na njegovu učestalost i obrnuto. LDA model koristi interne podatke kao direktne parametre modela dok ostale tri grupe podataka (eksterne podatke, scenario analizu, poslovno okruženje) koristi u svrhe stres testova i alokacije kapitala.



Slika 12. Ilustracija LDA pristupa¹⁰

Prednost ovog modela je što se zasniva na istorijskim podacima koji su relevantni za banku. Po Bazel II Banke moraju da imaju minimum tri godine istorijskih podataka kako bi mogle da primene ovaj pristup obračuna kapitala.

Mana ovog pristupa je u tome što period prikupljanja podataka je relativno kratak i verovatno neće obuhvatiti događaje koji se nalaze u debelom repu raspodele a za koje je obračunom kapitala predviđeno da budu pokriveni. Sigurno nećemo imati 1000 godina podataka a opet model bi trebao da omogući 99,9% nivo poverenja. Pored toga, moguće je da je došlo do promene u poslovanju banke tako da istorijski podaci ne moraju nužno da budu relevantni za banku.

LDA karakteriše kategorizaciju gubitaka u jednu od 56 ćelija matrice operativnih gubitaka (8 BL x 7 ET). Svaki element matrice je definisan poslovnom linijom (BL) u kojoj se desio gubitak i tipom događaja (ET). Za svaki element matrice se ocenjuju parametri raspodele frekvencije i uticaja gubitka i potom računa ukupan gubitak.

Za svaki presek i ($i = 1, \dots, 56$) za dati vremenski period t , ukupan gubitak operativnog rizika na nivou ćelije matrice operativnih gubitaka može da se definiše kao suma slučajnih n_i gubitaka (X_{ij}):

$$S_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in_i}$$

¹⁰ Preuzeto iz Operational risk i Financial Sectors E. Karam and F Planchet

Osnovne pretpostavke LDA pristupa su:

1. Individualni gubici $\{X_{ij}\}$ su nezavisni i imaju jednaku raspodelu;
2. Raspodela frekvencije n_i je nezavisna od raspodele uticaja X_{ij}

Teorema: Raspodela verovatnoće gubitaka S_i je data sa

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} p(i) \times F^{i*}(x), & \text{ako je } x > 0 \\ p(i), & \text{ako je } x = 0 \end{cases}$$

pri čemu je $F(x)$ verovatnoća da je agregatna količina gubitka i -tog događaja x , $*$ je operator konvolucije funkcije F , i F^{i*} je i -ta konvolucija funkcije F sa samom sobom.

Dokaz:

Neka je $f(x) = P_S(z)$ a $p(n) = P\{N = n\}$ i $F^{n*}(x) = P\{X_1 + X_2 + \dots + X_n = k\}$. Tada imamo da je

$$P_S(z) = E(z^S) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot P\{S = k\}.$$

S obzirom da ne znamo kolika je frekvencija pravimo hipoteze za N

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} \cdot P\{S = k | N = n\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} \cdot P\{X_1 + X_2 + \dots + X_n = k\} \end{aligned}$$

kako su $X_i, i = 1, \dots, n$ nezavisne i imaju istu raspodelu, imamo da važi

$$P_{\sum_{i=1}^n X_i}(z) = \prod_{i=1}^n P_{X_i}(z) = [P_X(z)]^n.$$

Odnosno ,možemo zapisati

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot P\{X_1 + X_2 + \dots + X_n = k\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} \cdot (P_X(z))^n. \end{aligned}$$

$(P_X(z))^n$ možemo zapisati kao z^k , pa je ovo celo po definiciji $E(z^N)$ odnosno $P_N(z)$

$$= P_N(P_X(z))$$

$$M_S(t) = P_S(e^t) = P_N(P_X(e^t)) = P_N(M_X(t)).$$

□

U skladu sa regulativom, svaka finansijska institucija može da izabere različite funkcionalne forme za distribuciju funkcije za frekvenciju i uticaj za svaki tip događaja i svaku poslovnu liniju.

Problem koji se javlja je taj što se raspodela gubitaka ne može dobiti analitički već je potrebno koristiti neke numeričke metode poput Panjerovog rekurzivnog algoritma ili Monte Karlo simulacije. Međutim Panjerov rekurzivni algoritam ima ograničenje. Moguće ga je primeniti samo na diskretne slučajne promenljive koje opisuju frekvenciju događaja operativnog rizika dok bi za uticaj događaja morala da se uradi diskretizacija. Drugi problem koji se javlja prilikom korišćenja Panjerovog rekurzivnog algoritma je taj što je računanje konvolucije kompleksno i zahteva mnogo vremena i bilo bi gotovo nemoguće da se izračuna ukoliko bi bilo mnogo događaja operativnog rizika u vremenskom intervalu. Za više informacija o Panjerovom rekurzivnom algoritmu pogledati [12]. U ovom radu koristićemo metodu Monte Karlo simulacije.

Da sumiramo, Implementacija pristupa zasnovanog na raspodeli gubitaka se dakle zasniva na sledećim koracima:

1. Procena raspodele frekvencije događaja operativnog rizika;
2. Procena raspodele uticaja događaja operativnog rizika;
3. Obračun kapitalnih zahteva.

3.1 [Modeliranje frekvencije](#)

Prva stvar prilikom razvijanja modela očekivanih događaja operativnog rizika je da definišemo verovatan broj događaja u godini. Ovo predstavlja frekvenciju događaja. U zavisnosti od tipa događaja, operativni gubici se dešavaju skoro svakodnevno (greške u sistemima, ljudske greške i sl.) do jako retko poput poplava i požara.

Najpopularnija raspodela za modeliranje frekvencije je Poasonova raspodela. U Poasonovoj raspodeli postoji samo jedan parametar (λ) koji predstavlja prosečan broj događaja u datoj godini. Kod ove raspodele i srednja vrednost i standardna devijacija su λ te je moguće lakše proveriti da li posmatrani uzorak dolazi iz Poasonove raspodele.

U kompleksnijim slučajevima bi mogli koristiti Negativnu binomnu raspodelu kod koje imamo različite vrednosti srednje vrednosti i standardne devijacije. Ukoliko uzorak ima varijansu veću od očekivane vrednosti Negativna binomna raspodela bi bila bolji izbor za modeliranje podataka od Poasonove.

3.2 [Modeliranje uticaja](#)

Sledeći korak modeliranja očekivanog gubitka kao posledice operativnog rizika je da definišemo verovatnu veličinu gubitka događaja operativnog rizika. Ovo predstavlja uticaj događaja operativnog rizika.

Za razliku od frekvencije, uticaj ne mora da bude ceo broj već bilo koja neprekidna vrednost. Odabir raspodele za modeliranje uticaja događaja operativnog rizika je veoma važan zadatak s obzirom da ima najveći uticaj na obračun kapitala. Prvi korak je da se izabere neka od osnovnih klasa raspodela i da se ocene parametri koji najviše odgovaraju internim podacima o gubicima.

Najčešći i najmanje kompleksni načini modeliranja uticaja je pomoću Lognormalne distribucije, iako mala frekvencija se možda bolje „fituje“ sa drugim raspodelama poput Vejbulove.

Koju god raspodelu da uzmemo funkcija raspodele verovatnoće će imati debeli rep, odnosno veoma veliki događaji će se pre desiti nego kod normalne raspodele.

3.3 Monte Karlo simulacija

Nakon što smo odredili raspodelu frekvencije i uticaja, sledeći korak je da iskoristimo ove raspodele kako bi kreirali što više podataka u cilju ostvarivanja kapitalnog zahteva obezbeđivanja 99,9% nivoa poverenja da su procenjeni gubici u vremenskom periodu od godinu dana pokriveni procenjenim kapitalom.

Monte Karlo metod simulacije je metod koji omogućuje da se raspodela frekvencije i uticaja kombinuju da proizvedu što više podataka koje će imati iste karakteristike kao one iz baze.

Prvo, tačke podataka uzimamo iz raspodele frekvencije. Ovo nam daje broj događaja koji predviđamo da će da se desi u vremenskom periodu od godinu dana. Vrednosti blizu srednje vrednosti raspodele frekvencije će biti češće uzete nego vrednosti daleko od srednje vrednosti. Pretpostavimo da smo izabrali broj 50. Dakle, u godinu dana model pretpostavlja da će se desiti 50 događaja operativnog rizika.

Sledeće, uticaj za svaki od ovih 50 događaja uzimamo iz raspodele uticaja. Isto kao i kod frekvencije, vrednosti sa većom verovatnoćom u raspodeli uticaja će češće biti izabrani od onih sa manjom verovatnoćom. Ovim putem ćemo doći do 50 gubitaka u vremenskom periodu od godinu dana.

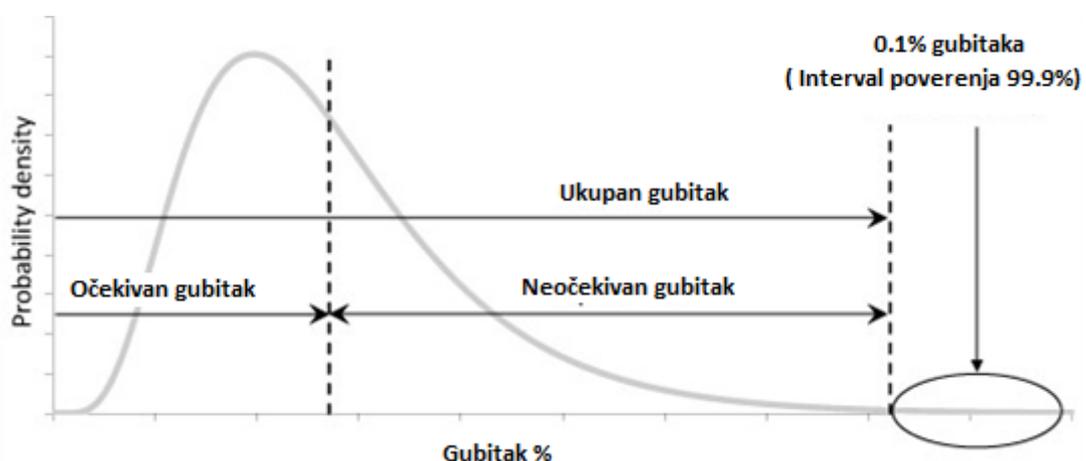
Vrednosti 50 gubitaka potom saberemo čime dolazimo do ukupnog gubitka koji pretpostavljamo da će se desiti u godinu dana.

Ovaj proces se ponavlja za sledeću godinu, i tako redom milion puta čime se obezbeđuje dovoljno dodatnih godina reprezentativnih podataka.

3.4 Mere rizika

Ukoliko pretpostavimo da smo dobili podatke o raspodeli frekvencije i uticaja događaja operativnog rizika računamo kapitalne zahteve za operativne rizike na sledeći način. Prvo izračunamo ukupne gubitke na nivou ćelije a potom na nivou cele matrice. Regulatorom je propisano da se ukupni kapitalni zahtevi za operativne rizike dobijaju sumiranjem očekivanih i neočekivanih gubitaka na nivou svake ćelije, odnosno drugačije zapisano

$$KZ_i = OG_i + NG_i$$



Slika 13. Raspodela gubitka

Pri čemu za očekivani gubitak možemo koristiti medijalnu vrednost na nivou ćelije, dok neočekivani gubitak treba da obuhvati rep raspodele. Neočekivani gubici predstavljaju razliku α -tog kvantila raspodele i očekivane vrednosti, odakle sledi da kapitalni zahtevi za operativne rizike u stvari predstavljaju upravo α -ti kvantil raspodele koji se naziva VaR.

Definicija 3.4.1: *VaR sa nivoom poverenja α predstavlja α -ti kvantil raspodele gubitaka za i -ti presek matrice:*

$$\begin{aligned} VaR(S_i; \alpha) &= \inf\{l \in \mathbb{R}: P(S_i > l) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{l \in \mathbb{R}: F_{S_i} \geq \alpha\} = F_{S_i}^{-1}(\alpha) \\ VaR(S_i; \alpha): \quad P(S_i \geq VaR) &\leq \alpha \end{aligned}$$

Pri čemu je $1 - \alpha$ nivo poverenja a F_{S_i} je neprekidna strogo rastuća funkcija raspodele gubitka.

Dakle 1% VaR je definisan kao prvi percentil raspodele F_i . Međutim sam VaR nam ne daje informaciju o gubicima koji premašuju vrednost pod rizikom. Alternativna mera rizika je očekivani gubitak ili *expected shortfall*.

Definicija 3.4.2: *Expected shortfall (ES) sa nivoom poverenja α je definisan kao očekivani gubitak za elemenat matrice i , pod pretpostavkom da je gubitak premašio VaR sa nivoom poverenja α :*

$$\begin{aligned} ES(S_i; \alpha) &\equiv E[S_i | S_i \geq VaR(S_i; \alpha)] \\ ES &= -\frac{1}{1 - \alpha} \int_{-∞}^{VaR} xf(x)dx. \end{aligned}$$

ES sa nivoom poverenja od $1 - \alpha$ u datom vremenskom periodu predstavlja očekivani gubitak koji premašuje određeni kvantil dobijen pomoću VaR-a. Na primer, očekivani gubitak sa nivoom poverenja od 1% predstavlja portfolio prosečnih gubitaka pod uslovom da je gubitak premašio 99. percentil raspodele gubitaka dobijen pomoću 99% VaR-a. Dakle, za razliku od VaR-a, ES daje informaciju o prosečnom nivou gubitka koji bi se mogao desiti u određenom vremenskom periodu, pod pretpostavkom da je gubitak premašio određeni nivo poverenja.

Nakon što se odredi mera rizika za svaki presek i , dobija se globalni VaR kao suma svakog individualnog gubitka pod pretpostavkom savršene korelacije različitih gubitaka.

Savršena korelacije je previše stroga pretpostavka i pretpostavlja da ukoliko se događaj desi u jednom poslovnoj liniji simultano će se desiti i u drugim poslovnim linijama što i nije realistična procena. Pored toga ova pretpostavka implicira da gubici dolaze iz istog slučajnog procesa, a ne iz 56 različitih. Kapitalni zahtevi izračunati pod pretpostavkom savršene korelacije mogu biti precenjeni i u velikoj većini slučajeva i veći od kapitalnih zahteva dobijenih jednostavnijim pristupom. Potrebno je analizirati zavisne strukture poslovnih linija i tipova događaja operativnog rizika kako bi se oslabila pretpostavka savršene korelacije. U nastavku će biti prikazana analiza zavisnih struktura.

4 MODELIRANJE ZAVISNIH STRUKTURA KOPULAMA

Sada uvodimo statistički alat koji se koristi u finansijama, a koji nam omogućava da izrazimo stvarnu korelacijsku strukturu promenljivih- kopule. Suština kopula leži u činjenici da se zajednička raspodela više slučajnih promenljivih može predstaviti kao funkcija marginalnih raspodela tih promenljivih. Kopule možemo posmatrati kao funkcije koje spajaju zajedničku raspodelu više promenljivih sa njihovim jednodimenzionim marginalnim funkcijama raspodele ili ih možemo posmatrati kao raspodele više promenljivih čije su marginalne raspodele uniformne na intervalu $(0,1)$.

Dakle kopula je funkcija koja kada se primeni na jednodimenzionalne marginalne raspodele, daje odgovarajuću višedimenzionalnu raspodelu. Ovaj pristup je pogodan jer ne postoje ograničenja u izboru marginalne raspodele, pored toga moguće je odvojeno posmatrati deo koji opisuje zavisnu strukturu slučajnih promenljivih i deo koji opisuje samo marginalne raspodele.

Odnosno, kopule su pridružene raspodele standardnih uniformnih slučajnih promenljivih i možemo ih predstaviti:

$$C(u, v) = P(U_1 \leq u, U_2 \leq v).$$

Znamo iz verovatnoće da su transformacije slučajnih promenljivih X i Y , $X \rightarrow F_1(X)$, $Y \rightarrow F_2(Y)$ imaju standardnu uniformnu raspodelu $U_i, i = 1, 2$:

$$F_1(X) \sim U_1, \quad F_2(Y) \sim U_2.$$

Analogno i transformacija koja odgovara F_i^{-1} standardne uniformne raspodele ima raspodelu kao F_i

$$F_i^{-1}(U_i) \sim F_i.$$

Kako su kopule pridružene funkcije raspodele standardne uniformno raspoređene slučajne promenljive, kopula u $F_1(x), F_2(y)$ daje pridruženu funkciju raspodele u tački (x, y) :

$$\begin{aligned} C(F_1(x), F_2(y)) &= P(U_1 \leq F_1(x), U_2 \leq F_2(y)) \\ &= P(F_1^{-1}(U_1) \leq x, F_2^{-1}(U_2) \leq y) \\ &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= F(x, y). \end{aligned}$$

Definicija 4.1: Neka su X_1, \dots, X_r slučajne promenljive i H njihova zajednička raspodela. Kopula koja odgovara raspodeli H je funkcija raspodele $C: [0,1]^r \rightarrow [0,1]$ slučajnih promenljivih X_1, \dots, X_r sa standardnim uniformnim marginalnim raspodelama F_1, \dots, F_r sa sledećim osobinama:

1. $\forall (u_1, \dots, u_r) \in [0,1]^r$, tada $C(u_1, \dots, u_r) = 0$ ako je bar jedna koordinata (u_1, \dots, u_r) jednaka 0;
2. $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ za sve $u_i \in [0,1], (i = 1, \dots, r)$.

4.1 Skalarova teorema i kopule

Skalarova teorema objašnjava ulogu kopula u vezi višedimenzionalnih funkcija raspodele i njihovih marginalnih raspodela.

Teorema 4.1: Neka je F N - dimenzionalna funkcija raspodele koja ima neprekidne marginalne raspodele F_1, \dots, F_N . Tada postoji jedinstvena kopula C takva da za svako $x \in R^N$ važi

$$F(x_1, \dots, x_n, \dots, x_N) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n), \dots, F_N(x_N)).$$

Obrnuto, ako je C kopula, a F_1, \dots, F_N funkcije raspodele tada je funkcija $F(x_1, \dots, x_n, \dots, x_N) = (F_1(x_1), \dots, F_n(x_n), \dots, F_N(x_N))$ N -dimenzionalna funkcija raspodele čije su marginalne raspodele F_1, \dots, F_N .

Posledica 4.1: Neka $F_1^{(-1)}, \dots, F_n^{(-1)}$ predstavljaju inverzne funkcije marginalnih funkcija raspodele, tada postoji jedinstvena kopula $C: [0,1] \times \dots \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ tako da

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)).$$

Dakle, marginalne distribucije i struktura zavisnosti n -dimenzionalnog slučajnog vektora mogu biti strogo razdvojene. Dok je marginalna raspodela određena jednodimenzionalnom funkcijom raspodele, struktura zavisnosti je određena kopulom.

Napomena 4.1:

Neka su X_1, \dots, X_n realne slučajne promenljive.

- a) Ako su X_1, \dots, X_n nezavisne, tada je kopula generisana njihovom zajedničkom raspodelom data sa

$$C(z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n z_i \text{ Nezavisna kopula;}$$

- b) *Invarijantnost transformacije:* Neka su h_1, \dots, h_n strogo monotone rastuće (opadajuće) funkcije i neka je $Y_i = h_i(X_i)$ transformacija slučajne promenljive. Tada je kopula koja odgovara zajedničkoj funkciji raspodele X_1, \dots, X_n jednaka kopuli čija je zajednička funkcija raspodele opisana promenljivima Y_1, \dots, Y_n .

Zbog invarijantnosti transformacije kopula možemo se koncentrisati na standardizovane slučajne promenljive koje su povezane sa kopulama.

4.2 Gustina i kanonička reprezentacija

Primenjujući Skalarevu teoremu i koristeći relacije između raspodele i funkcija gustine, možemo da izvedemo funkciju gustine kopule $c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n), \dots, F_N(x_N))$ koja odgovara funkciji kopule $C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n), \dots, F_N(x_N))$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n C(F_1(x_1), \dots, F_N(x_N))}{\partial F_1(x_1), \dots, \partial F_N(x_N)} \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i),$$

gde

$$c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i(x_i)}.$$

U nastavku ćemo nesvesti osnovne karakteristike dva tipa kopula koje ćemo koristiti u radu.

4.2.1 Normalna (Gausova) kopula

Neka je Σ simetrična, pozitivno definitna matrica sa jedinicama na dijagonali i neka je Φ_r standardizovana n-dimenzionalna normalna raspodela sa korelacionom matricom Σ . Normalna ili Gausova kopula je kopula višedimenzionalne normalne raspodele data sa

$$C_G(u_1, \dots, u_n) = \Phi_n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)).$$

Gde je sa C_G označena normalna kopula, Φ_n označava zajedničku raspodelu n standardnih normalnih raspodela a Φ^{-1} označava inverznu funkciju standardne normalne raspodele jedne promenljive.

Neka je $\zeta' = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$ vektor inverznih funkcija normalne raspodele, gde je $u_i = \Phi(x_i)$ za $i = 1, \dots, n$ i neka je Σ matrica korelacije, tada je funkcija gustine normalne kopule data sa

$$\begin{aligned} c(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)) &= \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i(x_i)} = \frac{\frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}'(\Sigma^{-1} - I_r) \mathbf{x}\right)}{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_i^2\right)} \\ &= \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \zeta'(\Sigma^{-1} - I_n) \zeta\right). \end{aligned}$$

Da bi konstruisali normalnu kopulu neophodno je da ocenimo matricu korelacije.

Funkcija verodostojnosti je data sa

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}), \dots, F_n(x_{nt})) + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n \ln f_j(x_{jt}),$$

gde je θ skup svih parametara i marginalnih raspodela i kopule.

U slučaju da su $\mathfrak{X} = \{x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}\}_{t=1}^T$ uzorak matrice korelacije onda funkciju verodostojnosti možemo da predstavimo

$$l(\theta) = -\frac{T}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \zeta'(\Sigma^{-1} - I_n) \zeta,$$

gde θ predstavlja skup svih parametara: Σ i $\zeta' = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$.

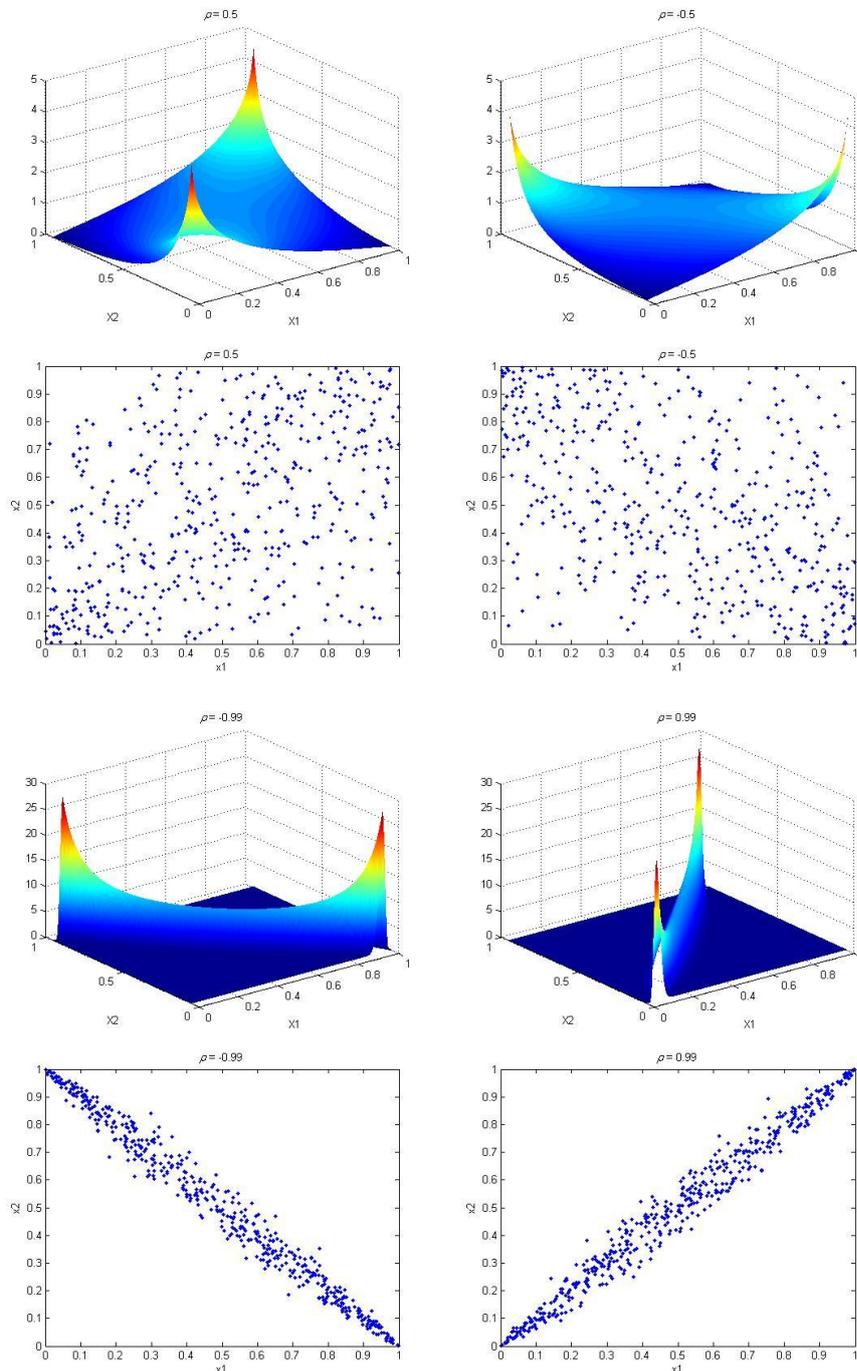
Pretpostavimo da važe opšti uslovi regularnosti, rešavanjem jednačine

$$\frac{dl(\theta)}{d\theta} = 0.$$

Dolazimo do ocene parametra.

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \zeta_t' \zeta_t.$$

Gustina dvodimenzionalne Normalne kopule za različite korelacije ρ prikazana je na slici 14. Ne možemo nacrtati gustinu za čitavu oblast jer teoretske vrednosti u uglovima pri vrhovima iznose beskonačno. Funkcija gustine je simetrična i ima različitu visinu za različite korelacije.



Slika 14. Funkcija gustina Normalne kopule za različite parametre korelacije

4.2.2 Studentova t -kopula

Studentova t -kopula je kopula višedimenzionih Studentovih t -raspodela i može biti prikazana na sledeći način

$$C_T(u_1, \dots, u_r) = t_{r,v}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_r)),$$

gde smo sa C_t označili Studentovu t kopulu, v predstavlja broj stepeni slobode, $t_{r,v}$ predstavlja zajedničku funkciju raspodele r -dimenzione studentove t raspodele i t_v^{-1} predstavlja inverznu funkciju raspodele Studentove t raspodele.

Neka je $\mathbf{x}' = (t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_r))$ vektor inverznih funkcija Studentove t raspodele, gde za $u_i = t_v(x_i)$ za $i = 1, \dots, r$ i Σ matrica korelacije, tada je funkcija gustine Studentove t kopule data sa

$$c(t_v(x_1), \dots, t_v(x_r)) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i(x_i)} = \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)} \right]^r \frac{\left(1 + \frac{\mathbf{x}'\Sigma^{-1}\mathbf{x}}{v}\right)^{-\frac{v+r}{2}}}{\prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{x_i^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}}$$

Da bi generisali slučajan vektor od t kopulu C_T prvo je neophodno da ocenimo broj stepeni slobode v i matricu korelacija Σ a nakon toga implementiramo algoritam za simuliranje Studentove t -kopule.

Studentova t -kopula se najčešće koristi umesto Normalne kopule kada je poznato da marginalne raspodele imaju deblji rep od normalne raspodele.

Funkcija verodostojnosti je definisana na sledeći način:

$$\begin{aligned} l^{Studentova}(v, \Sigma) &= -T \ln \frac{\Gamma\left(\frac{v+r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} - T r \ln \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} - \frac{T}{2} \ln |\Sigma| \\ &\quad - \frac{v+r}{2} \sum_{t=1}^T \ln \left(1 + \frac{\mathbf{x}'\Sigma^{-1}\mathbf{x}}{v}\right) + \frac{v+1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^r \ln \left(1 + \frac{x_{it}^2}{v}\right). \end{aligned}$$

U ovom slučaju nemamo nikakav analitički pristup za računanje maksimuma funkcije verodostojnosti i neophodno je koristiti numerički pristup maksimiranja funkcije. Ovo čak može da bude veoma zahtevno pa čak i nemoguće u slučaju velikog broja događaja operativnog rizika.

IFM¹¹ metod ocene parametra

Ocena parametra metodom maksimalne verodostojnosti se može razdvojiti u dva koraka.

Prvi korak je ocena parametara marginalne raspodele θ_1 :

$$\widehat{\theta}_1 = \text{ArgMax} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n \ln f_j(x_{jt}; \theta_1).$$

Sledeći korak je da se za dato $\widehat{\theta}_1$ oceni parametar kopule θ_2

$$\widehat{\theta}_2 = \text{ArgMax} \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}), \dots, F_n(x_{nt}); \widehat{\theta}_1, \theta_2).$$

Ocenjen parametar IFM metodom je definisan kao vektor

$$\widehat{\theta}_{IFM} = (\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)'$$

¹¹ Inference function for margin

Sa l označavamo celu funkciju verodostojnosti dok sa l_j označavamo funkciju verodostojnosti j -te marginalne raspodele i sa l_c funkcija verodostojnosti kopule. IFM ocenjen parametar dobijamo rešavanjem jednačine:

$$\left(\frac{\partial l_1}{\partial \theta_{11}}, \frac{\partial l_2}{\partial \theta_{12}}, \dots, \frac{\partial l_n}{\partial \theta_{1n}}, \frac{\partial l_c}{\partial \theta_2} \right) = 0'.$$

CML metod

Ovaj metod zasniva se na transformaciji uzorka $\{x_{1t}x_{2t}, \dots, x_{nt}\}_{t=1}^T$ u uniformne slučajne promenljive $\{u_{1t}u_{2t}, \dots, u_{nt}\}_{t=1}^T$ i potom ocenjivanjem parametara kopule. Ovaj metod se može opisati na sledeći način.

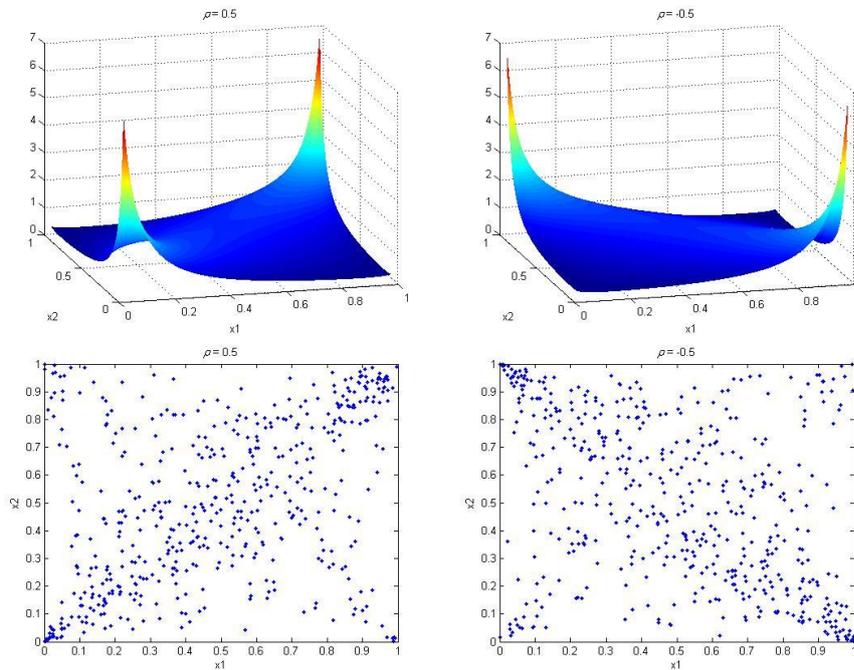
Prvo oceniti marginalnu raspodelu koristeći empirijsku raspodelu (bez pretpostavki o parametrima svake marginalne raspodele) tj. $\hat{F}_i(x_{it})$ za $i = 1, \dots, n$.

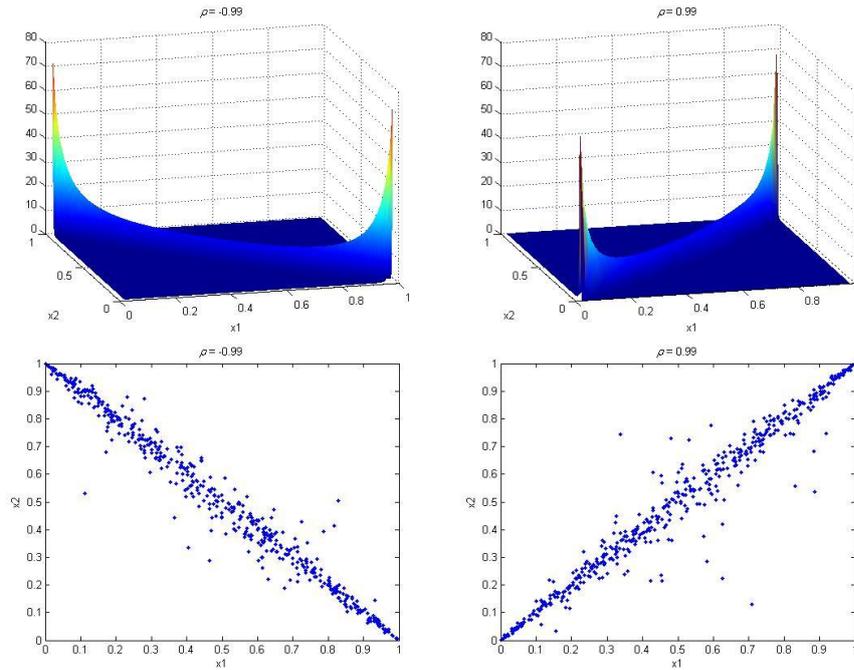
Metodom maksimalne verodostojnosti oceniti parametre

$$\hat{\theta}_2 = ArgMax \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{F}_1(x_{1t}), \dots, \hat{F}_n(x_{nt}); \theta_2).$$

Ovaj metod naziva se Kanonični metod maksimalne verodostojnosti (CML).

Grafička reprezentacija gustine 2-dimenzione t-kopule za različite korelacije prikazana je na slici 15. Važe ista ograničenja kao kod Gausove kopule tj. vrednosti u uglovima pri vrhovima iznose beskonačno. Možemo primetiti da t kopula izgleda isto kao i Gausova kopula osim što je ova gustina manje spljoštena ali ostaje simetrična.





Slika 15. Funkcija gustine t-kopule za različite parametre korelacije

Napomena 4.2: Ako broj stepeni slobode v dostiže beskonačnost, tada t-kopula teži ka Gausovoj. Iz formule za gustinu možemo zaključiti da za identičku matricu Σ , gustina ne postaje gustina nezavisne kopule. U stvari, nezavisnu kopulu nikada ne možemo dobiti kad god da koristimo t-kopulu.

Gausova i Studentova kopula spadaju u familiju Eliptičnih kopula. Pored Eliptičnih kopula postoje i Arhimedove kopule, međutim one imaju nekoliko ograničenja i modeliraju pozitivne zavisnosti (ili samo delom negativne zavisnosti), dok njihove višedimenzionalna proširenja zahtevaju stroga ograničenja zbog čega ih nećemo koristiti u ovom radu.

4.3 [Obračun kapitalnih zahteva](#)

Imajući u vidu translatornu invarijantnost kopula možemo se fokusirati na standardizovane slučajne promenljive. Da bi koristili funkciju kopule, prvo moramo da dobijemo višedimenzionalni slučajni vektor za posebnu kopulu C čije su marginalne raspodele uniformno raspoređene na intervalu $[0,1]$. Dakle, invertujemo uniformnu raspodelu sa agregatnom funkcijom gubitaka F_i dobijajući scenario gubitka za svaki element i matrice gubitaka. Kako F_i nije neprekidna funkcija, prethodno generisana Monte Karlo metodom, moramo da koristimo opštu inverznu funkciju F_i^{-1} datu sa

$$F_i^{-1}(u) = \inf\{x: F_i(x) \geq u\}.$$

Potom sumiramo gubitke S_i za svaki element matrice operativnih gubitaka čime dobijamo globalni scenario gubitka. Ponavljamo prethodno veliki broj puta i izračunamo meru rizika VaR ili *Expected Shartfall*.

Postupak simuliranja kopula zasniva se u sledećim koracima:

1. Oceniti marginalne raspodele F_1, \dots, F_n od X_1, \dots, X_n pomoću istorijskih podataka;
2. Odlučiti se za familiju kopula C_θ ;
3. Odrediti parametar θ koji odgovara najboljoj kopuli iz parametarske familije ocenjivanjem karakteristika izabrane familije kopula;
4. Izračunati VaR i ES.

5 PODACI

Podaci koji su se koristili u ovom radu su interni podaci male banke u Srbiji podeljene u dve poslovne linije. Zbog zaštite podataka ne navode se poslovne linije već samo vrednosti. Svi iznosi gubitaka su pomnoženi konstantom u cilju anonimizacije.

Sa statističke tačke gledišta broj podataka je mali da bi se dobio precizan model, ali banke moraju da pruže bar neke informacija o izloženosti operativnom riziku i ne mogu da čekaju da se sagradi baza sa dovoljno velikim brojem podataka. Mali broj podataka je realistična slika stvarnosti sa kojim se bankari susreću i ograničavajući faktor prilikom modeliranja.

5.1 Deskriptivna statistika podataka

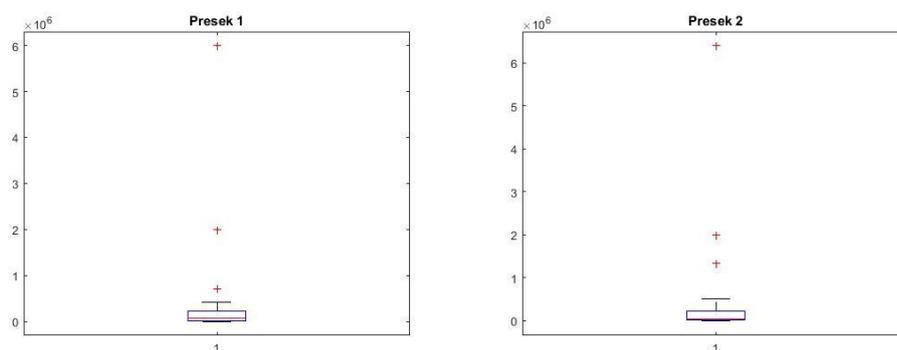
Osnovne informacije o uticaju događaja operativnog rizika na kojima se zasnivaju hipoteze o raspodelama slučajnih promenljivih i na osnovu kojih se biraju odgovarajući statistički modeli su prikazani u tabeli.

	Valid N	Mean	Minimum	Maximum	Std.Dev.	Skewness	Kurtosis
Presek2	33.00	376,213.53	394.27	6,407,115.00	1,157,623.03	4.79	24.64
Presek1	25.00	423,992.29	205.00	6,000,000.00	1,232,598.10	4.26	19.15

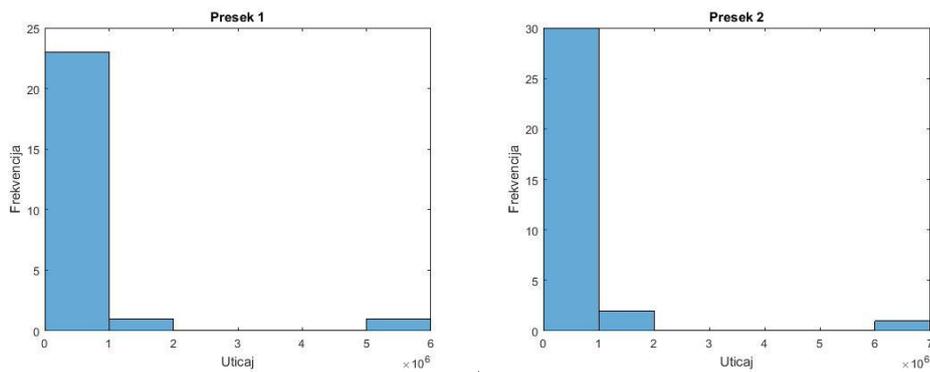
Tabela 5. Deskriptivna statistika

Normalna distribucija očigledno neće dobro modelirati podatke s obzirom da je skup podataka leptokuričan i da je koeficijent asimetrije pozitivan. Velike razlike u srednjoj vrednosti i standardnoj devijaciji su posledica debelog repa. Veliki koeficijent spljoštenosti ukazuje da je velika standardna devijacija posledica velikog broja outlajera. Iz ovih razloga je za modeliranje raspodele uticaja događaja operativnog rizika bolje odabrati raspodele sa debljim repom. Iz iskustva i znamo da su događaji operativnog rizika i mali i veoma veliki. Mali gubici se generišu događajima velike frekvencije a malog uticaja i ovi događaji generišu telo raspodele. Veliki gubici se stvaraju događajima male frekvencije a velikog uticaja i ovi događaji formiraju rep raspodele.

Zaključci dobijeni iz deskriptivne statistike mogu se uočiti i iz histograma i boxplot-ova.

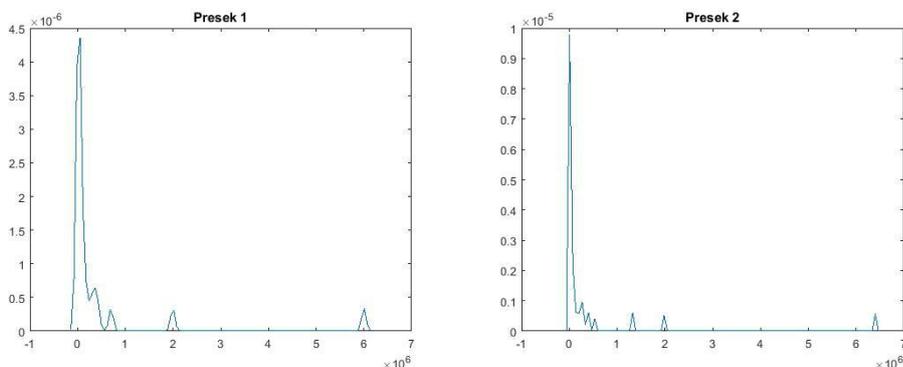


Slika 16. Box-plot



Slika 17. Histogram gubitaka po poslovnim linijama

U cilju dobijanja preliminarne ideje o ponašanju gubitaka prikazaćemo empirijska funkcija gustine. Kako možemo primetiti, raspodela je asimetrična što potvrđuje pretpostavke dobijene iz deskriptivne statistike.



Slika 18. Kernelova raspodela po presecima

5.2 Modeliranje frekvencije

Metodom maksimalne verodostojnosti smo ocenili parametre Poasonove i Negativne binomne raspodele za obe poslovne linije. U tabeli 6 su prikazani vrednosti parametara i njihove p vrednosti kao i rezultati Kolmogorov-Smirnovog testa.

	Poasonova raspodela		
	Ocena parametra		K-S test
	Λ	p	K-S
Presek 1	2.75	0.2823	0.272
Presek 2	2.27273	0.1284	0.3372

Tabela 6. Ocena parametara Poasonove raspodele i p-vrednosti Kolmogorov-Smirnovog testa

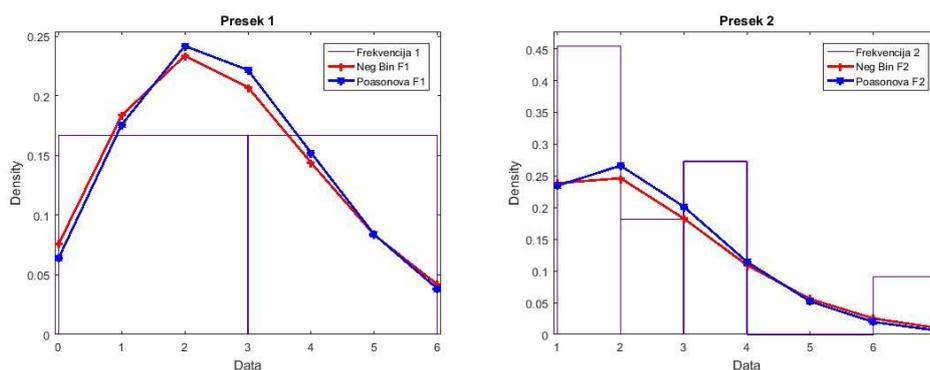
	Negativna binomna raspodela			
	Ocena parametra		K-S test	
	R	P	p	K-S
Presek 1	20.4801	0.881619	0.3298	0.2606

Presek 2 11.6842 0.837161 0.0823 0.3638

Tabela 7. Ocena parametara Negativne binomne raspodele i p-vrednosti Kolmogorov-Smirnovog testa

Možemo primetiti da smo bolje rezultate dobili modeliranjem Negativne binomne raspodele posmatrajući vrednosti K-S testa.

Grafički prikaz Poasonove i Negativne binomne raspodele sa ocenjenim parametrima prikazani su na slici 19.

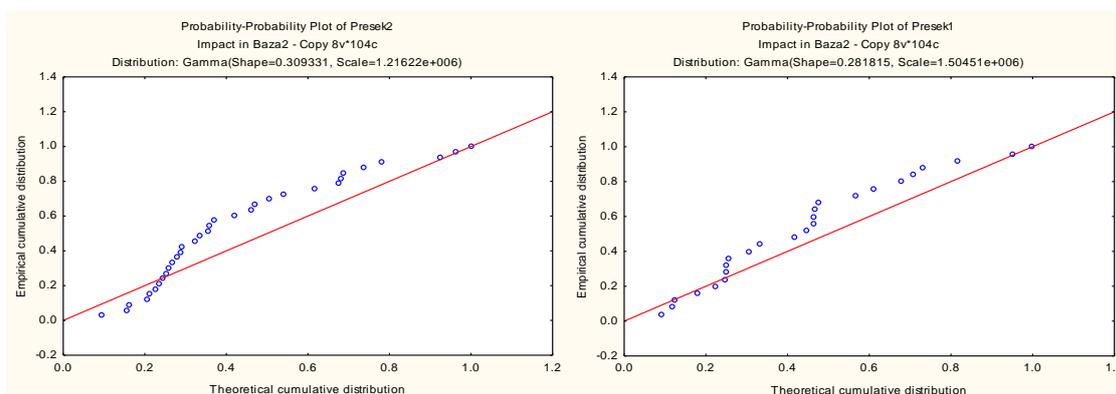


Slika 19. Modeliranje frekvencije događaja

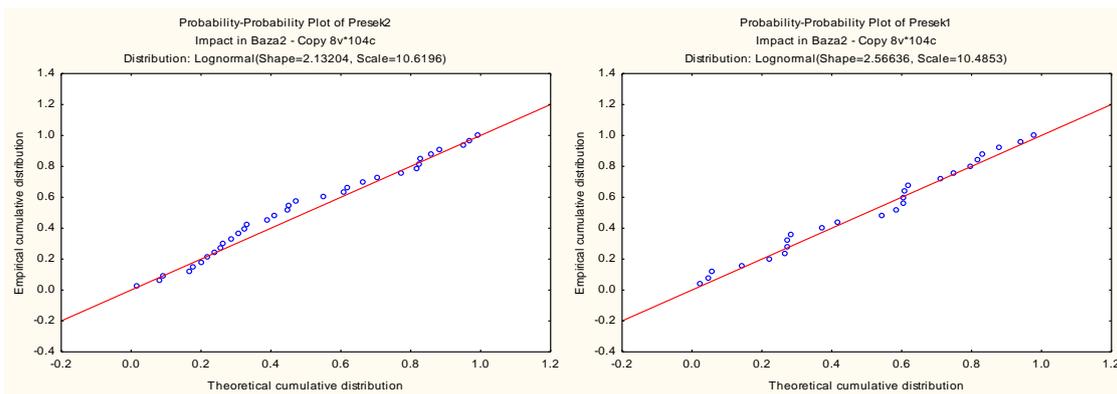
5.3 Modeliranje uticaja

Uticaj događaja operativnog rizika je mnogo teže modelirati od frekvencije i zahteva mnogo više informacija. Izbor raspodela za modeliranje uticaja događaja operativnog rizika ima mnogo veći uticaj na kapital nego sam izbor frekvencije događaja.

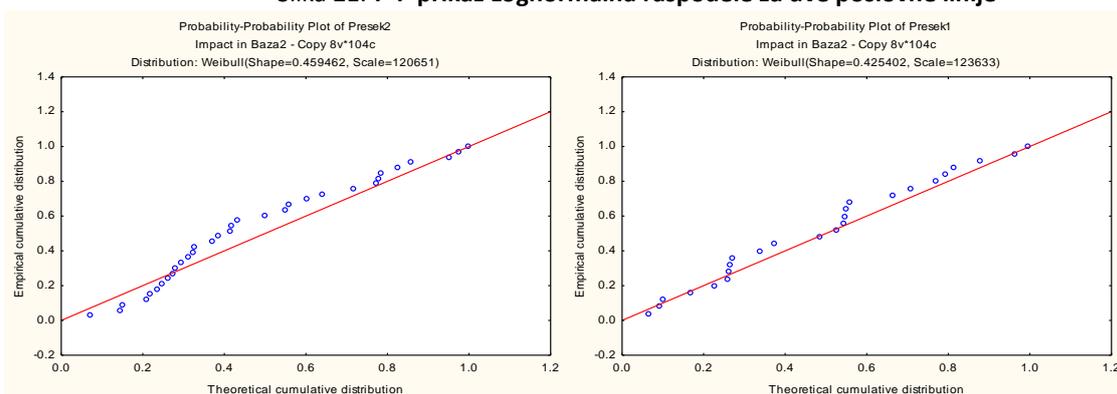
Da bi odabrali kojom raspodelom ćemo da modeliramo uticaj događaja operativnog rizika koristimo P-P prikaz raspodela i podataka.



Slika 20. P-P prikaz Gama raspodele za dve poslovne linije



Slika 21. P-P prikaz Lognormalna raspodele za dve poslovne linije



Slika 22. P-P prikaz Vejbulove raspodele za dve poslovne linije

Sa PP grafika možemo zaključiti da podatke najbolje opisuje Lognormalna raspodela.

Ocene parametara raspodela kojima smo modelirali uticaj u ovom radu primenom metode maksimalne verodostojnosti prikazane su u tabelama 8-10.

	Gama raspodela			
	Ocena parametra		K-S test	
	A	b	p	K-S
Presek 1	0.281793	1504620	0.2122	0.2051
Presek 2	0.309308	1216310	0.1021	0.207

Tabela 8. Ocena parametara Gama raspodele

	Vejbulova raspodela			
	Ocena parametra			K-S test
	a	b	p	K-S
Presek 1	123633	0.425402	0.8083	0.122
Presek 2	120650	0.45946	0.4549	0.1444

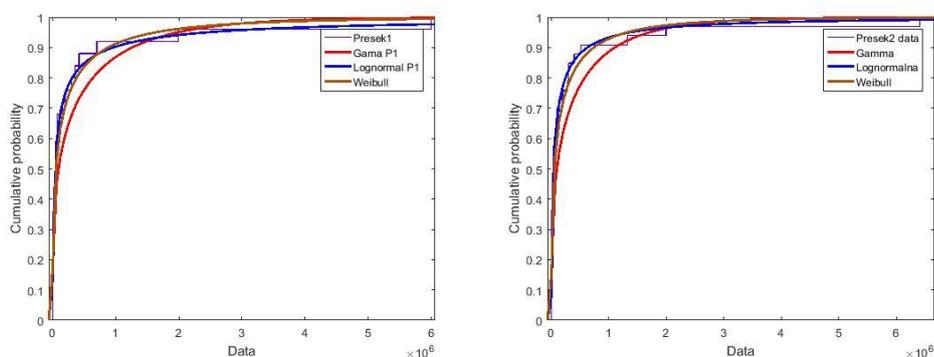
Tabela 9. Ocena parametara Vejbulove raspodele

Lognormalna raspodela				
	Ocena parametra		K-S test	
	a	b	p	K-S
Presek 1	10.4853	2.56636	0.9262	0.1036
Presek 2	10.6196	2.13204	0.8122	0.1063

Tabela 10. Ocena parametara Lognormalne raspodele

Možemo primetiti da se podaci dobro modeliraju Lognormalnom i Weibulovom raspodelom dok Gama raspodela za nijansu više odstupa od empirijske vrednosti. Rezultati Kolmogorov-Smirnovog testa pokazuju bolje rezultate kod Lognormalne raspodele.

Grafički prikaz raspodela uticaja sa ocenjenim parametrima prikazan je na slici 23.



Slika 23. Modeliranje uticaja operativnog rizika po presecima matrice operativnih rizika

Ako sumiramo podatke, najbolji izbor raspodela sa ocenjenim parametrima na osnovu K-S testa prikazan je u tabeli 11.

	Ocena parametara		Uticaj	
	Frekvencija			
Presek 1	Negativna binomna		Lognormalna	
	20.4801	0.881619 (0.3298)	10.4853	2.56636 (0.9262)
Presek 2	Poonsonova		Lognormalna	
	2.27273	(0.1284)	10.6196	2.13204 (0.8122)

Tabela 11. Sumarni prikaz ocene parametara

5.4 Monte Karlo simulacija

Nakon ocene parametra za frekvenciju i uticaj događaja operativnog rizika sprovodimo postupak Monte Karlo simulacije sa 5 000 simulacija. Za svaku poslovnu liniju smo simulirali N podataka za raspodelu frekvencije i N iznosa gubitaka iz raspodele impakta i potom sumirali rezultate. Suma predstavlja moguć iznos godišnjeg gubitka za datu poslovnu liniju. Ovaj postupak je ponovljen 5 000 puta da bi se dobio veći uzorak za iznos gubitka na nivou ćelije. Pod pretpostavkom savršene korelacije između poslovnih linija sumiramo iznose gubitka na nivou poslovne linije da bi dobili agregatni gubitak. Rezultati Monte Karlo simulacije prikazani su u tabelama 12-13.

Imajući u vidu mali broj podataka ne možemo dobiti veliku preciznost zbog čega ćemo umesto 99,9 % VaR-a računati 90% i 95% VaR i ES za svaku od kombinacija raspodela.

	VaR 90%	VaR 95%
Poasonova/Gama	36,618,918 RSD	40,860,172 RSD
Poasonova/Lognormalna	78,716,228 RSD	124,370,298 RSD
Poasonova/Vejbulova	32,601,986 RSD	38,538,935 RSD
Negativna binomna/Gama	36,782,718 RSD	41,246,092 RSD
Negativna binomna/Lognormalna	78,366,370 RSD	124,513,009 RSD
Negativna binomna/Vejbulova	32,620,106 RSD	38,832,545 RSD

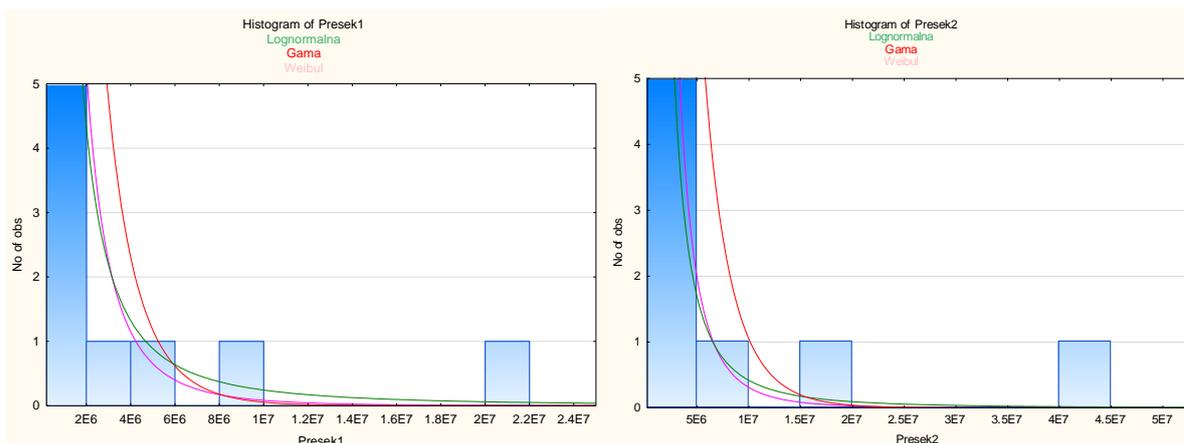
Tabela 12. VaR 90% i 95% za različite kombinacije raspodela slučajnih promenljivih

	ES 90%	ES95%
Poasonova/Gama	41,761,443 RSD	45,305,597 RSD
Poasonova/Lognormalna	150,236,150 RSD	210,598,212 RSD
Poasonova/Vejbulova	39,988,080 RSD	45,143,340 RSD
Negativna binomna/Gama	42,365,670 RSD	46,126,192 RSD
Negativna binomna/Lognormalna	153,411,329 RSD	217,547,723 RSD
Negativna binomna/Vejbulova	40,283,490 RSD	45,756,690 RSD

Tabela 13. ES 90% i 95% za različite kombinacije raspodela slučajnih promenljivih

Možemo primetiti da kombinacija Poasonove raspodele i Lognormalne raspodele daje veće vrednosti od ostalih kombinacija raspodela frekvencije i uticaja. Najniže kapitalne zahteve dobili smo kombinacijom Poasonove i Vejbulove raspodele. Pored toga uočavamo sličnost rezultata ukoliko frekvenciju događaja modeliramo Poasonovom ili Negativnom binomnom raspodelom što nam ukazuje da mere rizika zavise od izbora raspodele za uticaj događaja operativnog rizika.

Uzrok većih kapitalnih zahteva primenom Lognormalne raspodele za modeliranje uticaja događaja operativnog rizika je debljina repa raspodele. Na slici 24 je prikazan deo raspodele od 95. percentila pa naviše gde se može lepo uočiti debljina repa Lognormalne raspodele.



Slika 24. Rep raspodele uticaja događaja operativnog rizika za dve poslovne linije

Pretpostavka savršene korelacije između agregatnih gubitaka na nivou ćelija matrice operativnog rizika implicira da će se gubici iz različitih kombinacija poslovnih linija desiti u isto vreme za posmatrani period. Ovakva situacija i ne oslikava realnost. Štaviše, kapital dobijen pod pretpostavkom savršene korelacije između ćelija matrice operativnog rizika je često precenjen i viši od kapitala dobijenog Standardnim pristupom ili Pristupom osnovnog indikatora. Postavlja se pitanje opravdanosti uvođenja Naprednog pristupa koji banke uvode u cilju smanjenja kapitalnog zahteva za operativne rizike.

Implementacija nove tehnike obračuna kapitalnih zahteva sprovodi se sa ciljem smanjenja kapitalnih zahteva, s obzirom da su kapitalni zahtevi predstavljaju rezervu koja predstavlja trošak finansijske institucije. U nastavku sledi ocena zavisnosti i korelacije podataka dve poslovne linije.

5.5 Zavisnost i korelacija

Osnovne pretpostavke LDA pristupa govore o nezavisnosti slučajnih promenljivih raspodele frekvencije događaja operativnog rizika i slučajnih promenljivih uticaja operativnog rizika. Agregatni gubici mogu imati 56 izvora slučajnosti ali njihova korelacija nije opisana pretpostavkama. Korelacija koju želimo da ispitamo je korelacija između ćelija matrice operativnih gubitaka. Korelaciju možemo ispitivati na nivou uticaja, frekvencije i agregatnog gubitka.

5.5.1 Simuliranje kopulama

U ovom delu ćemo prikazati podatke za obračun kapitalnih zahteva uzimajući u obzir ocenu zavisnosti među ćelijama matrice operativnih gubitaka (u našem slučaju imamo samo dve ćelije) na nivou agregatnog gubitka pomoću Normalne i t kopule i uporediti ih sa podacima dobijenim pod pretpostavkom savršene korelacije među ćelijama matrice.

Algoritam za simuliranje podataka Normalnom kopulom

Neka su F_1, \dots, F_n željene marginalne raspodele i Σ $n \times n$ korelaciona matrica željene Gausove kopule.

1. Izračunati Čoleski dekompoziciju matrice Σ kao $\Sigma_{Chol} \cdot \Sigma_{Chol}^t = \Sigma$.
2. Simulirati n nezavisnih slučajnih promenljivih $Y_i \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. Postaviti $\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \Sigma_{Chol} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$.

4. Slučajne promenljive X_i sa željenom raspodelom dobijamo iz

$$X_i = F_i^{-1}[\Phi(Z_i)]$$

Φ je standardna normalna funkcija raspodele, a F_i^{-1} inverzna funkcija željene marginalne raspodele.

Mere rizika dobijene pomoću normalne kopule i odgovarajućih marginalnih raspodela prikazane su u tabelama 14-15.

	VaR 90%	VaR 95%
Poasonova/Gama	20,862,608 RSD	20,903,690 RSD
Poasonova/Lognormalna	18,447,311 RSD	18,531,937 RSD
Poasonova/Vejbulova	15,363,609 RSD	15,425,311 RSD
Negativna binomna/Gama	20,833,141 RSD	20,891,719 RSD
Negativna binomna/Lognormalna	18,732,783 RSD	18,836,844 RSD
Negativna binomna/Vejbulova	15,122,587 RSD	15,171,589 RSD

Tabela 14. VaR 90% i 90% za različite marginalne raspodele Normalne kopule

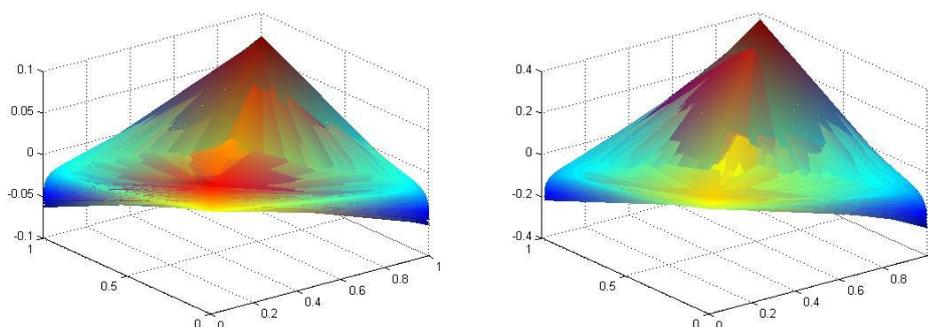
	ES 90%	ES95%
Poasonova/Gama	20,896,435 RSD	20,915,242 RSD
Poasonova/Lognormalna	18,516,383 RSD	18,550,833 RSD
Poasonova/Vejbulova	15,413,032 RSD	15,436,638 RSD
Negativna binomna/Gama	20,880,493 RSD	20,903,716 RSD
Negativna binomna/Lognormalna	18,816,619 RSD	18,861,325 RSD
Negativna binomna/Vejbulova	15,162,653 RSD	15,182,813 RSD

Tabela 15. ES 90% i 90% za različite marginalne raspodele Normalne kopule

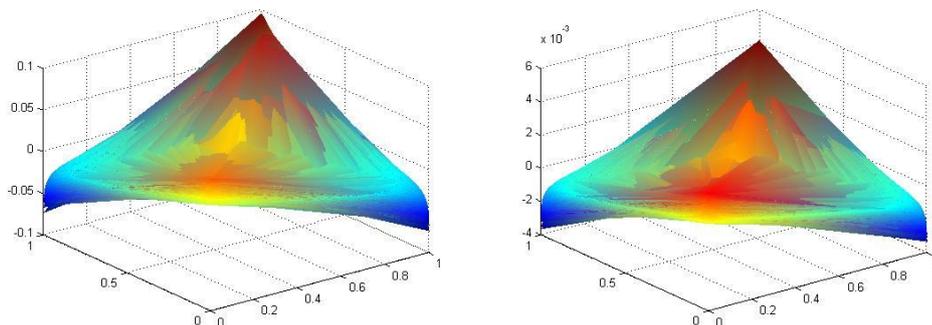
Kao i što smo očekivali, dobijene mere rizika su mnogo niže nego pod pretpostavkom savršene korelacije između poslovnih linija.

Primećujemo da se i u ovom slučaju najniži kapitalni zahtevi dobijaju korišćenjem Poasonove raspodele za modeliranje frekvencije događaja operativnog rizika i Vejbulove raspodele za modeliranje uticaja događaja operativnog rizika i da izbor raspodele za uticaj događaja operativnog rizika utiče na visinu kapitala.

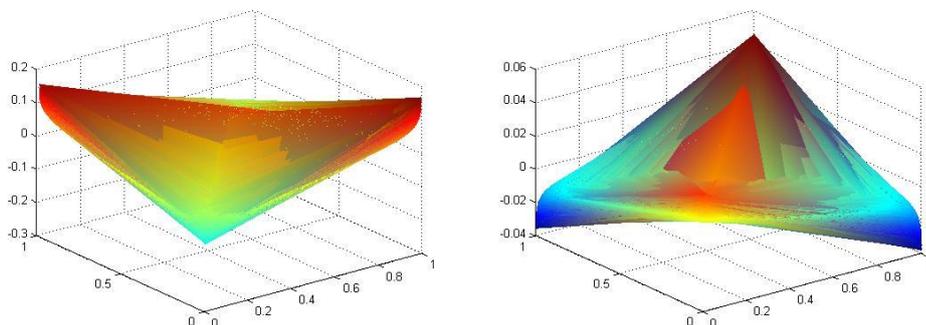
Funkcije raspodele verovatnoće za različite kombinacije marginalnih raspodele Normalne kopule prikazane su na slikama



Slika 25. Negativna binomna-Gama-Normalna kopula i Negativna binomna-Lognormalna-Normalna kopula



Slika 26. Negativna binomna-Vejbulova-Normalna kopula i Poasonova-Gama-Normalna kopula



Slika 27. Poasonova-Lognormalna-Normalna kopula i Poasonova-Vejbulova-Normalna kopula

Ukoliko želimo da koristimo Studentovu t kopulu za objašnjavanje zavisnih struktura dve poslovne linije koristićemo sledeći algoritam:

Algoritam simuliranja Studentovom t kopulom

Neka su F_1, \dots, F_n željene marginalne raspodele i Σ $n \times n$ korelaciona matrica t -kopule sa m stepeni slobode.

1. Izračunati Čoleski dekompoziciju matrice Σ kao $\Sigma_{chol} \cdot \Sigma_{chol}^t = \Sigma$.
2. Simulirati n nezavisnih slučajnih promenljivih $\tilde{Y}_i \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. Postaviti $\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \Sigma_{chol} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{Y}_n \end{pmatrix}$.
4. Simulirati n nezavisnih slučajnih promenljivih $\tilde{Z}_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ i postaviti

$$Z = \tilde{Z}_1^2 + \dots + \tilde{Z}_m^2$$
5. Slučajne promenljive X_i sa željenom raspodelom dobijamo uz pomoć:

$$X_i = F_i^{-1} \left[t_m \left(\sqrt{m} \cdot \frac{Y_i}{\sqrt{Z}} \right) \right]$$

Gde je t_m Studentova raspodele sa m stepeni slobode.

Konačni rezultati mera rizika dobijene Studentovom t kopulom prikazani su u tabelama 16-17.

	VaR 90%	VaR 95%
Poasonova/Gama	37,449,343 RSD	41,499,585 RSD
Poasonova/Lognormalna	39,488,461 RSD	58,689,767 RSD
Poasonova/Vejbulova	31,769,995 RSD	36,915,494 RSD
Negativna binomna/Gama	36,133,808 RSD	40,358,541 RSD
Negativna binomna/Lognormalna	85,499,821 RSD	117,879,324 RSD
Negativna binomna/Vejbulova	32,017,587 RSD	38,012,311 RSD

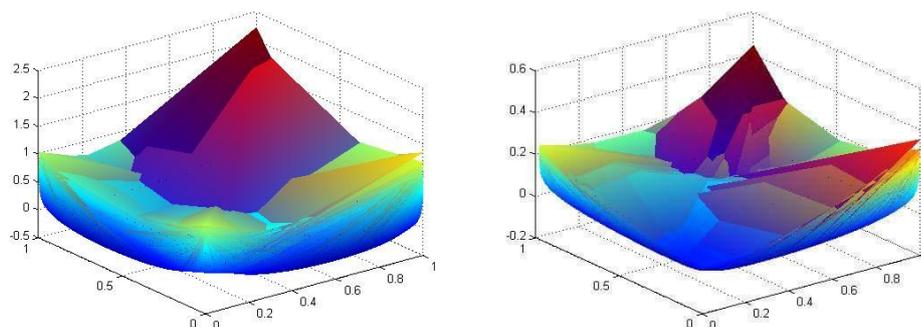
Tabela 16. VaR 90% i 90% za različite marginalne raspodele Studentove t kopule

	ES 90%	ES95%
Poasonova/Gama	41,738,145 RSD	45,555,513 RSD
Poasonova/Lognormalna	64,385,488 RSD	88,382,587 RSD
Poasonova/Vejbulova	38,051,390 RSD	43,823,319 RSD
Negativna binomna/Gama	40,660,811 RSD	44,754,284 RSD
Negativna binomna/Lognormalna	137,399,725 RSD	193,229,254 RSD
Negativna binomna/Vejbulova	38,774,652 RSD	44,879,806 RSD

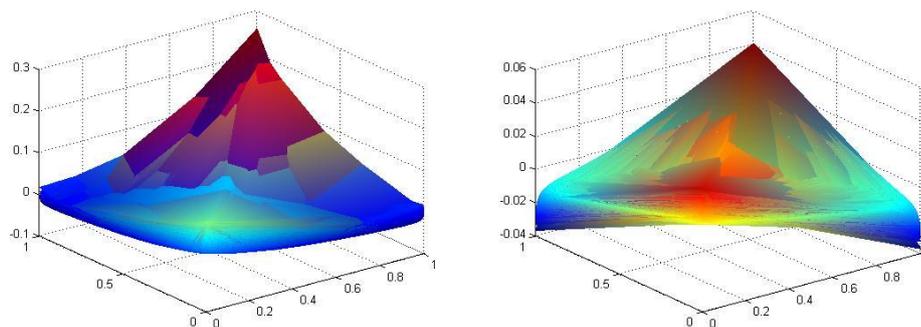
Tabela 17. ES 90% i 90% za različite marginalne raspodele Studentove t kopule

Možemo primetiti da su rezultati za obračun kapitalnih zahteva za operativne rizike veći od rezultata dobijenim modeliranjem zavisnosti korišćenjem Normalne kopule što je posledica debljeg repa t kopule. Mnogo veće odstupanje se javlja ukoliko za modeliranje uticaja koristimo Negativnu binomnu raspodelu za modeliranje frekvencije i Lognormalnu raspodelu za modeliranje uticaja događaja operativnog rizika što je ponovo posledica debljeg repa Lognormalne raspodele.

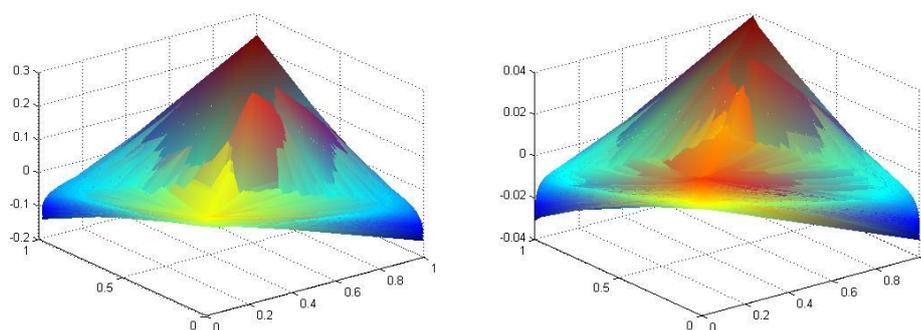
Funkcije raspodele verovatnoće za različite kombinacije marginalnih raspodela t kopule prikazane su na slikama.



Slika 28. Negativna binomna-Gama-t kopula i Negativna binomna-Lognormalna-t kopula



Slika 29. Negativna binomna-Vejbulova-t kopula i Poasonova-Gama- t kopula



Slika 30. Poasonova-Lognormalna-t kopula i Poasonova-Vejbulova-t kopula

U tabeli 18 je prikazan odnos mera rizika pod pretpostavkom savršene korelacije i ocenom zavisnosti korišćenjem kopula, pri čemu negativan znak predstavlja niži rizika pa samim tim manje obračunatog kapitala.

	VaR 90%	VaR 95%	ES 90%	ES 95%
Savršena korelacija vs Normalna kopula				
Poasonova/Gama	-43.03%	-48.84%	-49.96%	-53.84%
Poasonova/Lognormalna	-76.56%	-85.10%	-87.68%	-91.19%
Poasonova/Vejbulova	-52.88%	-59.97%	-61.46%	-65.81%
Negativna binomna/Gama	-43.36%	-49.35%	-50.71%	-54.68%
Negativna binomna/Lognormalna	-76.10%	-84.87%	-87.73%	-91.33%
Negativna binomna/Vejbulova	-53.64%	-60.93%	-62.36%	-66.82%
Savršena korelacija vs t kopula				
Poasonova/Gama	2.27%	1.56%	-0.06%	0.55%
Poasonova/Lognormalna	-49.83%	-52.81%	-57.14%	-58.03%
Poasonova/Vejbulova	-2.55%	-4.21%	-4.84%	-2.92%
Negativna binomna/Gama	-1.76%	-2.15%	-4.02%	-2.97%
Negativna binomna/Lognormalna	9.10%	-5.33%	-10.44%	-11.18%
Negativna binomna/Vejbulova	-1.85%	-2.11%	-3.75%	-1.92%

Tabela 18. Odnos mera rizika pod pretpostavkom savršene korelacije i Normalne i t kopule

Možemo videti da su kapitalni zahtevi za operativne rizike uvek manji ukoliko se korelacije ocenjuje normalnom kopolom dok su kapitalni zahtevi ukoliko se korelacija ocenjuje t kopolom skoro uvek manji od kapitalnih zahteva dobijenim pod pretpostavkom savršene korelacije poslovnih linija. Prednost modeliranja operativnih rizika kopolama je izuzetno izražena ukoliko se za modeliranje uticaja događaja operativnog rizika i njegove frekvencije koristi Lognormalna raspodela odnosno Poasonova raspodela gde su kapitali zahtevi 76% manji u slučaju da se korelacija modelira normalnom kopolom odnosno preko 49% manji ukoliko se korelacija modelira studentovom kopolom.

ZAKLJUČAK

Do skoro su kreditni i tržišni rizik bili dva najveća tipa rizika za finansijske institucije. Međutim događaji operativnog rizika koji su uzrokovali velike štete kod nekoliko banaka doveli su operativne rizike u rang sa kreditnim i tržišnim rizicima.

Merenje operativnog rizika je poprilično zahtevan posao. Istorija podataka o operativnim rizicima je kratka i malo je podataka na osnovu kojeg može da se napravi precizan model. Kultura o operativnim rizicima u mnogim finansijskim institucijama je niska, zbog čega su sami podaci često nepotpuni i pogrešni što doprinosi nepreciznosti modela.

Uspešno upravljanje operativnim rizikom direktno je povezan sa nivoom razvijenosti kulture ponašanja u odnosu na operativne rizike. Zaposleni se često suočavaju sa operativnim rizicima a da o tome nisu svesni ili ne znaju da prepoznaju ili su jednostavno uplašeni da prijave ličnu grešku usled straha od nekakve kazne. Zbog svega ovoga je podizanje svesti o izloženosti operativnom riziku jedna od prioritarnih stvari u upravljanju operativnim rizikom.

Primena modela zasnovanog na raspodeli gubitaka po poslovnim linijama i tipu događaja zahteva preciznu klasifikaciju događaja operativnog rizika. Međutim, granice između različitih tipova događaja nisu jasne, često se desi da određeni događaj operativnog rizika spada u više kategorija i stvar je lične interpretacije kojoj kategoriji on zaista pripada. Nekonzistentnost može nastati i usled različitih interpretacija istog tipa događaja ali u različitim poslovnim linijama poput interpretacije interne prevare u poslovima sa stanovništvom i poslovima sa trgovinom i prodajom.

S obzirom da je operativni rizik u različitim oblastima bankarske organizacije, svaka analiza gubitaka potencijalno je izložena nekonzistentnim ukoliko ne postoji jasna klasifikacija. Adekvatna praksa zahteva od banaka da sprovedu rigorozne mere i detaljnu klasifikaciju proizvoda, funkcija i procesa u cilju da se usvoji jasna kategorizacija.

Pored rizika od lošeg kvaliteta samih podataka, kapitalni zahtevi za operativne rizike su veoma osetljivi i na izbor raspodele za modeliranje, ocene parametara, korelacije i sl. Veoma mala razlika u izboru parametara može da dovede do velike razlike u kapitalnim zahtevima.

Međutim, sami modeli ne predstavljaju kristalnu kuglu koji će da kažu šta će da se desi u budućnosti već pokušavaju u određenoj meri da nagoveste šta nam budućnost može doneti. Cilj modela nije da predvide buduće gubitke već da generišu određena scenarija koja bi mogla da nas zadese sa određenim stepenom verovatnoće. Stalnim ažuriranjem modela sa najsvežijim podacima kao i zdravorazumskom procenom u izboru verovatnih scenarija, modeli u određenoj meri mogu da nam daju informacije o budućim događajima i da nas učine spremnijim za buduće događaje. Zato prilikom korišćenja rezultata uvek treba biti svestan neizvesnosti koje model nosi.

U ovom radu smo posmatrali operativne rizike u dve poslovne linije i odvojeno modelirali frekvenciju i uticaj događaja operativnog rizika za svaku poslovnu. Pretpostavka jake korelacije između dve poslovne linije nije realistična ali to nije razlog da se pretpostavi da ne postoji nikakva korelacija. U nastavku smo analizirali zavisni strukturu ove dve poslovne linije u zavisnosti od raspodele koje smo izabrali za modeliranje i uočili da, nezavisno od izbora raspodele za modeliranje gubitaka kao posledice operativnog rizika, postoji veoma mala korelacija između ove dve poslovne linije. Posledica male korelacije samim tim je dovela i do manjih kapitalnih zahteva za pokrivanje

gubitaka nastalih kao posledica operativnih rizika što smo i uporedili sa rezultatima pod pretpostavkom savršene korelacije.

Skup podataka nad kojim je razvijen model u ovom radu je veoma mali i veoma osetljiv na pretpostavke zbog čega smo i mere rizika računali na nivou poverenja od 90% i 95%.

Ukoliko bi baza bila veća i postajalo više podataka za svaku poslovnu liniju i tip događaja operativnog rizika, u model bi se mogla uključiti i teorija ekstremne vrednosti koja bi se bavila analizom retkih ali događaja koji donose velike gubitke pa bi se nivo poverenja mogao posmatrati i na regulatornom nivou od 99.9%. Pored toga, mogla bi se analizirati zavisna struktura na nivou svake ćelije matrice operativnih rizika gde bi se mogla uočiti gde postoji a gde ne postoji veza između različitih tipova događaja i različitih poslovnih linija.

Uključivanjem eksternih podataka bi se mogla raditi preciznija ocena repa raspodele, mogli bi se i korigovati određeni parametri raspodela u različitim ćelijama matrice operativnog rizika u kojima ne postoji dovoljno podataka na osnovu kojih bi uradila precizna ocena.

Pored toga, uključivanjem informacija o ključnim indikatorima rizika i scenario analizama zajedno sa mišljenjem eksperata bi se mogle vršiti određene kvalitativne korekcije nad parametrima raspodele frekvencije, parametrima raspodele uticaja događaja operativnog rizika, korelaciji pa i nad samim kapitalom neophodnim za pokriće događaja operativnog rizika.

PRILOZI

Čoleski faktorizacija

Čoleski metoda se koristi za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina sa simetričnom matricom sistema.

Simetričnu matricu možemo da predstavimo kao proizvod dve međusobno transponovane matrice, tj. $A = T * T^t$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}, T^t = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Formule za dobijanje matrice T odnosno T^t su sledeće:

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}}, j > 1;$$

$$t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2}, 1 < i \leq n,$$

$$t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}}, i < j$$

$$t_{ij} = 0, i > j.$$

LITERATURA

- [1] U. Cherubini, E. Luciano, W. Vecchiato, *Copula methods in finance*, John Wiley & Sons 2004;
- [2] M.G. Cruz, *Modeling, Measuring and Hedging Operational Risk*, John Wiley & Sons 2002;
- [3] D.C.M. Dickson, *Insurance risk and ruin*, Cambridge University Press 2010;
- [4] K. Dutta, J. Perry, *A tale of tails: An empirical analysis of loss distribution models for estimating operational risk capital*, FED 2007;
- [5] D. Đorić, J. Mališić, V. Jevremović, E. Nikolić-Đorić, *Atlas raspodela*;
- [6] D. Fantazzini, *The Econometrics Modelling of Copulas: A Review with Extension*, Department of Econometrics and Quantitative Methods, University of Pavia;
- [7] S. Figini, L. Gao i P. Giudici – „*Bayesian operational risk models*“, The Journal of Operational Risk 2016;
- [8] P. Girling, *Operational Risk Management* John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey 2013;
- [9] D.N. Gujarati, *Basic Econometrics*, Mc Graw Hill New York 2003;
- [10] J.C. Hull, *Risk Management and Financial Institutions* Wiley 2007;
- [11] E. Karam, E. Planchet, *Operational Risks in Financial Sectors*, Hindawi Publishing Corporation, 2012;
- [12] S.A. Klugman, H.H. Panjer, G.E. Willmot, *LOSS MODELS – From Data to Decisions*, Wiley Interscience, 2004;
- [13] R. Korn, E. Korn, E.G. Kraisandt, *Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance*, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series 2010;
- [14] Z. Lozanov-Crvenković, *Statistika*, Univerzitet u Novom Sadu 2012;
- [15] Nigel Da Costa Lewis, *Operational risk with Excel and VBA Applied Statistical Methods for Risk Management*, John Wiley & Sons 2004;
- [16] S. Promislow, *Fundamentals of Actuarial Mathematics*, Wiley 2011;
- [17] D. Rajter-Ćirić, *Verovatnoća*, Prirodno matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, 2009;
- [18] S. Scandizzo, *The Operational Risk Manager's Guide*, Risk books 2010;
- [19] L.D. Valle, *Bayesian Copulae Distributions, with Application to Operational Risk Management*, Springer Science 2008;
- [20] L.D. Valle, D.F. Fantazzini, P. Giudici, *Copulae and Operational Risks*, Department of Statistics, Univerzitet u Milanu;
- [21] *Guidelines on Operational Risk Management*, Oesterreichische Nationalbank i Austrian Financial Market Authority;

- [22]Radna grupa za upravljanje rizicima, *Metodologija za evidentiranje i praćenje operativnog rizika*, Udruženje banaka Srbije 2006;
- [23]Basel Committee on Banking Supervision (2011), Operational Risk- Supervisory Guidelines for the Advanced Measurement Approaches, <http://www.bis.org/>;
- [24]Basel Committee on Banking Supervision (2011), Principles for the Sound Management of Operational Risk, <http://www.bis.org/>;
- [25]Basel Committee on Banking Supervision (2009), Observed range of practice in key elements of Advanced Measurement Approaches (AMA), <http://www.bis.org/>;
- [26]Basel Committee on Banking Supervision (2009), Results from the 2008 Loss Data Collection Exercise for Operational Risk, <http://www.bis.org/>;
- [27]Basel Committee on Banking Supervision (2006), International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, <http://www.bis.org/>;
- [28] Sajt Narodne banke Srbije <http://www.nbs.rs/>.

BIOGRAFIJA



Bojana Mičić rođena je 1991. godine u Zrenjaninu. Osnovnu školu je završila u Banatu u Vojvoda Stepi i redovno učestvovala na školskim takmičenjima iz matematike što je dovelo do toga da i upiše Prirodno-matematički smer gimnazije u Zrenjaninu. Godine 2010. upisala je osnovne akademske studije primenjene matematike smer Matematika finansija na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu a odmah nakon toga i master studije primenjene matematike na istom fakultetu.

Tokom svog studiranja bila je angažovana na stručnom usavršavanju u OTP banci u odeljenju za odobravanje kredita gde se bavila projekcijom bilansa stanja privrednih subjekata. Trenutno je zaposlena u Telenor banci kao saradnik u odeljenju za Kontrolu rizika i modeliranje gde je njeno angažovanje usmereno na kontrolu operativnog rizika.

Novi Sad, 2016.

**UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET****KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA**

<i>Redni broj:</i>	
RBR	
<i>Identifikacioni broj:</i>	
IBR	
<i>Tip dokumentacije:</i>	Monografska dokumentacija
TD	
<i>Tip zapisa:</i>	Tekstualni štampani materijal
TZ	
<i>Vrsta rada:</i>	Master rad
VR	
<i>Autor:</i>	Bojana Mičić
AU	
<i>Mentor:</i>	dr Miloš Božović
MN	
<i>Naslov rada:</i>	Modeliranje operativnog rizika primenom kopula
NR	
<i>Jezik publikacije:</i>	srpski (latinica)
JP	
<i>Jezik izvoda:</i>	srpski/engleski
JI	
<i>Zemlja publikovanja:</i>	Republika Srbija
ZP	
<i>Uže geografsko područje:</i>	Vojvodina
UGP	
<i>Godina:</i>	2016.
GO	
<i>Izdavač:</i>	Autorski reprint
IZ	
<i>Mesto i adresa:</i>	Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA	
<i>Fizički opis rada:</i>	5 poglavlja, 67strana, 28 lit. citat, 18 tabela, 30 grafika, 1 prilog
FO	
<i>Naučna oblast:</i>	Matematika
NO	
<i>Naučna disciplina:</i>	Primenjena matematika
6 ND	
<i>Predmetna odrednica/ ključne reči:</i>	Operativni rizik, kapitalni zahtevi, kopule, pristup zasnovan na raspodeli gubitaka
PO	
UDK	
<i>Čuva se:</i>	Biblioteka departmana za matematiku i informatiku, PMF-a u Novom Sadu
ČU	
<i>Važna napomena:</i>	nema
VN	
<i>Izvod:</i>	Cilj rada je da se istraži u kojoj meri primena modela zasnovanog na raspodeli gubitaka utiče na smanjenje kapitalnih zahteva za operativne rizike. Pored toga analizira se uticaj modeliranja zavisnih struktura primenom kopula na obračunat kapital.
IZ	
<i>Datum prihvatanja teme od NN veća:</i>	16.oktobar 2015.
DP	
<i>Datum odbrane:</i>	
DO	

Članovi komisije:

KO

Predsjednik:

dr Nataša Krejić, redovni profesor

Član:

dr Nataša Spahić, vanredni profesor

Mentor:

dr Miloš Božović, docent

**UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS**

KEY WORDS DOCUMENTATION

<i>Accession number:</i>	
ANO	
<i>Identification number:</i>	
INO	
<i>Document type:</i>	Monograph publication
DT	
<i>Type of record:</i>	Textual printed material
TR	
<i>Content code:</i>	Final paper
CC	
<i>Author:</i>	Bojana Mićić
AU	
<i>Mentor/comentor:</i>	dr Miloš Božović
MN	
<i>Title:</i>	
TI	
<i>Language of text:</i>	Serbian (Latin)
LT	
<i>Language of abstract:</i>	English
LA	
<i>Country of publication:</i>	Republic of Serbia
CP	
<i>Locality of publication:</i>	Vojvodina
LP	
<i>Publication year:</i>	2016
PY	
<i>Publisher:</i>	Author's reprint
PU	
<i>Publication place:</i>	Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
PP	
<i>Physical description:</i>	5 sections, 67 pages, 28 reference, 18 tables, 30 graphs, 1 appendix
PD	
<i>Scientific field:</i>	Mathematics
SF	
<i>Scientific discipline:</i>	Applied Mathematics
SD	
<i>Subject/ Key words:</i>	Operational risk, capital requirements, copula, loss distribution model
SKW	
UC	
<i>Holding data:</i>	Library of Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad Trg Dositeja Obradovića 4
HD	
<i>Note:</i>	none
N	
<i>Abstract:</i>	The aim of the study was to investigate to what extent the application of loss distributions model impact on reducing the capital requirements for operational risks. In addition, the study investigate effects of modelling dependent structures by applying copula and measuring the regulatory capital when dealing with multivariate operational risks.
AB	
<i>Accepted by the Scientific Board:</i>	16th October 2015.
ASB	

Defended on:

DE

Thesis defend board:

DB

President:

PhD Nataša Krejić, full professor

Member:

PhD Nataša Spahić, associate professor

Member:

PhD Miloš Božović, docent