UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Bojana Čobanov

LEVIJEVI PROCESI U FINANSIJAMA I OSIGURANJU

-master rad-

Novi Sad, 2013.

Sadržaj

Predgovor

Istorija stvaranja i primene matematičkih modela u finansijama i osiguranju počinje još početkom 20-tog veka. 1900. Louis Bachelier pokazuje da je Braunovo kretanje osnov bilo kog projektovanja cena na finansijskom tržištu. U isto vreme, Filip Lundberg izvodi svoju tezu prema kojoj je homogeni Poasonov proces ključni model osiguranja.

Tema ovog rada je primena Levijevih procesa u određivanju cene finansijskih derivata i premije životnog osiguranja. Iza tog kratkog izvođenja cena leži mnoštvo teorija, dokaza i dodatnih izvođenja. Ovde ću se bazirati pre svega na dobrom razumevanju i definisanju teorije i pokušaću da razdvojim stvari koje su ključne za razumevanje problema.

Prirodne celine koje se nameću pri prvom susretu sa temom jesu: stohastička teorija i primena te teorije u finansijama i u osiguranju. Ovaj rad tako sam i podelila u dva dela, u okviru kojih teme razdvajam po poglavljima.

Teorija mere, realna i funkcionalna analiza, teorija verovatnoće i stohastike samo su neke od polaznih oblasti koje pružaju osnovu za definisanje Levijevih procesa. Zato na samom početku navodim definicije i objašnjenja osnovnih pojmova iz ovih oblasti.

Drugo poglavlje posvećeno je Levijevim procesima. Polazeći od najjednostavnijih primera uvodim novu klasu stohastičkih procesa, a zatim se nadovezujem sa osobinama koje karakterišu ove procese, kao i sa nabrajanjem specijalnih klasa među kojima je Poasonov proces, složen Poasonov proces i Braunovo kretanje.

Drugi deo rada posvećen je primeni prethodno definisanih procesa u finansijama i osiguranju. Kao što sam navela uvodne definicije za stohastičku teoriju tako u 3. glavi pričom upoznajem čitaoce sa osnovnim pojmovima vezanim za finansijsko tržište i finansijske derivate uopšte. Dalje, pomoću binomnog modela izvodim čuvenu Black-Scholes formulu i na kraju navodim nedostatke ovog popularnog modela što ujedno predstavlja i motivaciju za nov način određivanja cena finansijskih derivata.

U 4. glavi konačno dolazim do formule za cenu kol opcije. Najpre će biti objašnjeno kako da se dođe do ekvivalentne martingalske mere a zatim i zašto je tržište nekompletno. Eksplicitnu formulu za cenu kol opcije izvešću pomoću Laplasove transformacije, a zatim ću navesti i neke od modela koji se baziraju na Levijevim procesima.

Jedan od nedostataka Black-Scholes modela jeste pretpostavka o konstantnoj volatilnosti dok je ona stohastička. Rešenje ovog problema predstavila sam u 5. glavi. Suština je u tome da umesto da posmatramo Levijev proces u odnosu na vreme t, posmatramo ga u odnosu na proces koji modeluje protok vremena. Kroz Levijev proces uveli smo skokove, ali smo u isto vreme uveli i stohastičku volatilnost. Stohastička volatilnost koristi se kod modelovanja varijacije u ceni opcija za duži vremenski period, dok skokovi služe za *objašnjenje varijacije u kraćim rokovima.*

6. glava odnosi se na primenu Levijevih procesa u osiguranju. Prvo ću definisati principe premija kao jedan od osnovnih pojmova u teoriji osiguranja, a zatim ću pomoću stope mortaliteta doći do verovatnoće preživljavanja koja igra odlučujuću ulogu u određivanju cene ugovora.

Ovom prilokom želela bih da se zahvalim svom mentoru, dr Dori Seleši na svim savetima i pomoći, ne samo u procesu izrade ovog rada, nego u toku celog studiranja. Na predavanjima iz aktuarske matematike, konsultacijama u vezi ove, ali i drugih tema naučila me je na koji način mogu da primenim svoje znanje u brojnim oblastima kako finansija tako i aktuarstva.

Želela bih da se zahvalim i članovima komisije dr Danijeli Rajter-Ćirić i dr Sanji Rapajić na zanimljivim predavanjima i znanjem koje su mi pružile.

Bojana Čobanov

Stohastička teorija

1

Uvod u stohastičku teoriju

U ovom delu navodim osnovne pojmove, definicije i načela koja će mi kasnije omogućiti da proširim teoriju na nove klase procesa.

1.1 Osnovni pojmovi teorije mere

Definicija 1.1. Topološki prostor je par $(X, \mathcal{O})$ gde je $X \neq \emptyset$ i $\mathcal{O} \subset P(X)$ tako da važi:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{O}$;
2. $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \bigcap O_2 \in \mathcal{O}$;
3. $\forall \{O_i : i \in I\} \subset \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$ je *topologija* na X, $(X, \mathcal{O})$ je *topološki prostor*, a elementi $\mathcal{O}$ su *otvoreni skupovi.*

Definicija 1.2. σ*-algebra* na X je familija skupova $\mathcal{M} \subseteq P(X)$ sa osobinama:

1. $X \in \mathcal{M}$;
2. $\mathcal{A} \in \mathcal{M} \Rightarrow X \backslash \mathcal{A} \in \mathcal{M}$;
3. $\forall \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n \in \mathcal{M}$.

$\mathcal{M}$ je σ*-algebra* na X, $(X, \mathcal{M})$ je *prostor sa* σ *- algebrom*, a elementi $\mathcal{M}$ su *merljivi skupovi.*

Merljive funkcije su pojam koji zamenjuje pojam neprekidnih funkcija iz realne analize, ali ne zahtevaju topološku strukturu nego strukturu σ-algebri.

Definicija 1.3. Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa σ-algebrom i $(Y, \mathcal{O})$ topologija, funkcija $f : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \mathcal{O})$ je *merljiva* ako $f^{-1}(O) \in \mathcal{M}, \forall O \in \mathcal{O}$

Definicija 1.4. Borelova σ-algebra je najmanja σ-algebra koja sadrži zatvorene skupove proizvoljnog topološkog prostora. Sa $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ označava se Borelova σ-algebra na skupu realnih brojeva.

Definicija 1.5. Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa σ-algebrom. Mera μ na $\mathcal{M}$ je funkcija $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ za koju važi
Ako je $A_i \in \mathcal{M}, i \in \mathbb{N}$ disjunktna familija skupova, tada je $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ je *merljiv prostor* ili *prostor sa merom.*

Definicija 1.6. Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ proizvoljan merljivi prostor. Mera ν na prostoru $(X, \mathcal{M})$ je *apsolutno neprekidna* u odnosu na μ ako $\forall A \in \mathcal{F}$ i važi

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Mere μ i ν su *ekvivalentne* ako su međusobno apsolutno neprekidne tj. ako važi

$$\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \nu(A) = 0.$$

Definicija 1.7. Neka su $(X, \mathcal{M})$ i $(Y, \mathcal{N})$ prostori sa σ-algebrama. *Proizvod σ-algebri* $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ je σ-algebra na proizvodu $X \times Y$ koju generišu skupovi oblika $A \times B$, gde je $A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}$.

Definicija 1.8. Neka su $(X, \mathcal{M}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ prostori sa σ-algebrama $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ i konačnim merama μ i ν. Tada postoji jedinstvena mera η na $\mathcal{H} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ tako da je

$$\eta(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B)$$

za sve pravugaonike $A \times B, A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}$.

Definicija 1.9. *Konvoluciju mera* μ i ν na nekom skupu A označavamo

$$(\mu * \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}} \nu(A - x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x)\nu(dx).$$

Teorema 1.1 (Fubinijeva teorema). *Neka su $(X, \mathcal{M}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ prostori sa σ-algebrama i konačnim merama i neka je $\eta = \mu \otimes \nu$ mera na $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Ako je funkcija f na $X \times Y$ u $\mathbb{R}$ η-integrabilna, tada*

$$\int_X (\int_Y f_x d\nu) d\mu = \int_Y (\int_X f_y d\mu) d\nu = \int_{X \times Y} f d\eta.$$

Primer 1.1. (**Dirakova mera** koncetrisana u x_0.) Neka je $(X, \mathcal{M})$ σ-algebra i $x_0 \in X$. Za $\mathcal{A} \in M$ definiše se:

$$\mu(\mathcal{A}) = \begin{cases} 1, & x_0 \in \mathcal{A} \\ 0, & x_0 \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

Primer 1.2. (**Verovatnosna mera.**) Mera μ na $(X, \mathcal{M})$ koja ima osobinu da je $\mu(X) = 1$ se naziva verovatnosna mera ili mera verovatnoće

Primer 1.3. (**Levijeva mera.**) Mera μ je Levijeva mera na $\mathcal{M} - \{0\}$ ako

$$\int_{\mathcal{M} - \{0\}} (|y|^2 \wedge 1)\mu(dy) < \infty.$$

1.2 Osnovni pojmovi teorije verovatnoće

Ako bi merljive skupove poistovetili sa slučajnim iskodima tj. događajima u verovatnoći, skup X zamenili sa X=Ω, σ-algebru $\mathcal{M} = \mathcal{F}$, merljive funkcije sa slučajnim promenljivama, dobijamo sledeće definicije.

Definicija 1.10. *Prostor verovatnoća* je trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gde je $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor i P je verovatnosna mera na $\mathcal{F}$, što znači da P: $\mathcal{F} \to [0, 1]$ i važi:

1. $P(\Omega) = 1$;
2. $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, gde su $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, disjunktni skupovi.

Definicija 1.11. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća. Preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ takvo da $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{B}^n$ naziva se $\mathbb{R}^n$ - vrednosna *slučajna promenljiva* nad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Takođe, koristi se izraz X je $\mathcal{F}$ - *merljivo*.

Elementi prostora Ω su svi *mogući ishodi* nekog procesa, ili sva *moguća stanja*, a merljivi skupovi se nazivaju *događajima*.

Teorema 1.2 (Radon-Nikodym). *Ako su P i $\tilde{P}$ dve mere verovatnoće na prostoru $(\Omega, \mathcal{B})$ takva da je $\tilde{P}$ apsolutno neprekidna u odnosu na P, tada postoji nenegativna slučajna promenljiva Λ takva da za svako $C \in \mathcal{B}$ važi $\tilde{P}(C) = \int_C \Lambda dP$. Ova slučajna promeljiva zove se Radon-Nikodym izvod $\tilde{P}$ u odnosu na P i zapisujemo ga kao*

$$\Lambda = \frac{d\tilde{P}}{dP}$$

Iz prethodne teoreme možemo, praveći paralele u teoriji verovatnoće, zaključiti sledeće: Ako je X slučajna promenljiva sa apsolutno neprekidnom funkcijom raspodele p_x u odnosu na Lebegovu meru na $\mathbb{R}^d$ dobijamo funkciju gustine promenljive X

$$\varphi_x = \frac{dp_x}{dx}.$$

Definicija 1.12. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća. *Niz sub-σ-algebri* $\{\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}\}$, *je nezavisan* ako za bilo koju n-torku $i_1, i_2, ...i_n$ i bilo koje $A_{i_j} \in \mathcal{F}_j, 1 \leq j \leq n$, važi

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_n}) = \prod_{j=1}^{n} P(A_{i_j}.)$$

Definicija 1.13. *Niz slučajnih promenljivih* $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *je nezavisan* ako su odgovarajuće σ-algebre $\{\sigma(X_n), n \in \mathbb{N}\}$ nezavisne.

Slučajna promenljiva X i sub-σ-algebra $\mathcal{G}$ od $\mathcal{F}$ su nezavisne ako su $\sigma(X)$ i $\mathcal{G}$ nezavisne.

Nezavisnost događaja A i B se može zaključiti ako važi

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Takođe, na osnovu gore navedene, neformalne definicije, može se shvatiti da su slučajne promenljive $X_1, X_2, ...$ nezavisne ako su događaji $X_1^{-1}(S_1), X_2^{-1}(S_2), ...$ nezavisni za sve Borelove skupove $S_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i = 1, 2, ...$

Definicija 1.14. Funkcija $F(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$ definisana sa

$$F_x(x) = P(\omega \in \Omega | X(\omega) < x),$$

naziva se *funkcija raspodele* slučajne promenljive X.
Definisano u prostoru mera, funkcija raspodele slučajne promenljive X,F_x, se može zapisati na jedan od sledećih načina:

$$F(x) = P(X^{-1}(-\infty, x)) \text{ za svako } x \in \mathbb{R}, S \in \mathcal{B}^n.$$

Definicija 1.15. Slučajna promenljiva X ima *gustinu raspodele verovatnoća* $\varphi(x), x \in \mathbb{R}$, gde je φ nenegativna, integrabilna funkcija, ako važi

$$P(X \in B) = \int_B \varphi(x)dx,$$

za svaki skup $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definicija 1.16. *Matematičko očekivanje* slučajne promenljive X je njen integral po meri P je

$$E(X) = \int_\Omega XdP = \int_\mathbb{R} xdF(x).$$

Ako je $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, očekivanje slučajne promenljive $f(X)$ je

$$E(f(X)) = \int_\Omega f(X(\omega))P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)F_x(dx).$$

Definicija 1.17. Neka je X $\mathbb{R}^d$ dimenzionalna slučajna promenljiva, definisana na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zatim, neka je $\mathcal{G}$ sub-algebra od $\mathcal{F}$ tj. $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. *Uslovna verovatnoća* slučajne promenljive X u odnosu na σ-algebru $\mathcal{G}$ je preslikavanje $P_{X|\mathcal{G}} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \Omega \to [0,1]$ za koje važi

$$P_{X|\mathcal{G}}(B, \omega) = P(X^{-1}(B)|\mathcal{G})(\omega)$$

za svako $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \omega \in \Omega$.

Dakle, verovatnoća događaja A pod uslovom da se realizovao događaj B data je sa

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Definicija 1.18. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i neka je $\mathcal{G}$ σ-polje, $\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$. Ako je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ integrabilna slučajna promenljiva, definišemo uslovno očekivanje $E(X|\mathcal{G})$ kao proizvoljnu slučajnu promenljivu takvu da

1. $E(X|\mathcal{G})$ je $\mathcal{G}$-merljiva;
2. $\int_B XdP = \int_B E(X|\mathcal{G})dP$ za svako $B \in \mathcal{G}$

$$E(g \circ Y|\mathcal{G}) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)P_{Y|\mathcal{G}}(dy, \cdot)$$

U slučaju da su X i sub-σ-algebra $\mathcal{G}$ od $\mathcal{F}$ nezavisne važi:

$$E(X|\mathcal{G}) = E(X).$$

Definicija 1.19. Slučajna promenljiva pripada prostoru $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ako ima konačni p-ti momenat tj. $E(X^p) < \infty$.
Specijalno,za $p = 2$, prostor L^2 je *Hilbertov prostor* slučajnih promenljivih.

Definicija 1.20. *Karakteristična funkcija* slučajne promenljive X ili njene funkcije raspodele F je

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itX} dF(x), t \in \mathbb{R}^n.$$

Karakteristična funkcija postoji za svaku slučajnu promeljivu i ona je jedinstveno određuje.

Neke od najznačajnijih slučajnih promenljivih koje ću koristiti u radu, a svakako i polazna osnova za dalji rad sa stohastičkom teorijom su Poasonova i normalna slučajna promenljiva.

Pretpostavimo da neki eksperiment ponavljamo n puta i pri tome beležimo broj pojavljivanja tog događaja. Slučajna promenljiva koja predstavlja broj realizacija događaja zove se *Bernulijeva slučajna promenljiva* i ona ima *binomnu raspodelu* $B(n, p)$. Ako je n dovoljno veliko (u praksi se najčešće uzima da je n dovoljno veliko ako $np < 10$), uzimamo $\lambda = np$ i prelazimo na *Poasonovu raspodelu* $P(\lambda)$.

Normalna (Gausova) raspodela ima najveći značaj među raspodelama verovatnoća. Nemački matematičar Karl Fridrih Gaus analizirao je astronomske podatke pomoću ove raspodele i definisao je jednačinu funkcije gustine. Mnoge promenljive koje se pojavljuju mogu se aproksimirati normalnom raspodelom. Čak i ako promenljiva nema normalnu raspodelu, nekim transformacijama ona se može transformisati na normalnu. Zbog toga, kao i njenih dobrih osobina kao što su simetričnost, slučajne promenljive koje imaju ovu raspodelu su centrirane, efikasne itd. normalna raspodela ima veliku primenu kako u prirodnim tako i u društvenim naukama. Važnost normalne raspodele kao modela u matematičkoj statistici, finansijama ali i drugim oblastima njene primene, posledica je centralne granične teoreme koju ću navesti kasnije. Za $\mu = 0$ i $\sigma^2 = 1$ dobijamo *standardizovanu normalnu raspodelu.*

U sledećoj tabeli prikazane su raspodele zajedno sa svojim funkcijama raspodele, očekivanjima i karakterističnim funkcijama.

Naziv raspodele	Oblik raspodele	Očekivanje	Disperzija	Karakteristična funkcija
Binomna raspodela $X : B(n, p)$	$P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(pe^{it} + (1-p))^n$
Poasonova raspodela $X : \pi(\lambda)$	$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Normalna raspodela $.X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\varphi_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$e^{it\mu} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

Sledi izvođenje karakteristične funkcije Poasonove raspodele. Neka je $X : \pi(\lambda)$ slučajna promenljiva sa Poasonovom raspodelom. Karakterističnu funkciju dobijamo na sledeći način

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= E(e^{itx}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} P(X = k)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!}\\ &= e^{-\lambda} e^{e^{it}\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.\end{aligned}$$

Ovaj izvođenje će nam poslužiti za izvođenje karakteristične funkcije Poasonovog stohastičkog procesa.

U sledećoj teoremi navodim rezultat poznat kao klasična centralna granična teorema.
Teorema 1.3 **(Centralna granična teorema).** *Ako su $X_1, X_2, ...$ nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom i konačnom disperzijom $D(X_k) = \sigma^2, k = 1, 2, ...$, onda važi*

$$P\left\{ \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}} \right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad n \to \infty.$$

Postoji veoma važna veza između Levijevih procesa i pojma beskonačne deljivosti. Zbog toga najpre navodim definiciju tog pojma, a zatim pokazujem da normalna i Poasonova raspodela imaju ovu osobinu.

Definicija 1.21. Neka je X slučajna promenljiva sa funkcijom raspodele μ_X. X je *beskonačno deljiva* ako za sve $n \in \mathbb{N}$ postoji n nezavisnih, jednako raspodeljenih slučajnih promeljivih $X_1^{(1/n)}, ..., X_n^{(1/n)}$ tako da važi

$$X \stackrel{d}{=} X_1^{(1/n)} + ... + X_n^{(1/n)},$$

što je ekvivalentno sa sledećim zapisom

$$\mu_X = \underbrace{\mu_{X^{(1/n)}} * ... * \mu_{X^{(1/n)}}}_{\text{n puta}}.$$

S obzirom na nezavisnost slučajnih promenljivih $X_1^{(1/n)}, ..., X_n^{(1/n)}$, osobinu beskonačne deljivosti možemo utvrditi ako važi

$$\phi_X(t) = \big(\phi_{X^{(1/n)}}(t)\big)^n,$$

gde je ϕ_X karakteristična funkcija slučajne promenljive X.

Sledeći deo posvećujem dokazu da su Poasonova i normalna slučajna promenljiva beskonačno deljive.

- **Poasonova slučajna promenljiva** $X : \pi(\lambda)$

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \exp\big(\lambda(e^{it} - 1)\big) = \Big(\exp\big(\frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1)\big)\Big)^n\\ &= \big(\phi_{X^{(1/n)}}(t)\big)^n,\end{aligned}$$

gde je $X^{(1/n)} : \pi(\frac{\lambda}{n})$.

Slično sledi i dokaz beskonačne deljivosti normalne slučajne promenljive.

- **Normalna slučajna promenljiva** $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \exp(it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2) = \exp\Big(n(it\frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}t^2\frac{\sigma^2}{n})\Big) = \Big[\exp\big(it\frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}t^2\frac{\sigma^2}{n}\big)\Big]^n \\ &= \big(\phi_{X^{(1/n)}}(t)\big)^n,\end{aligned}$$

gde je $X^{(1/n)} : \mathcal{N}(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n})$.

1.3 Osnovni pojmovi stohastičke analize

Definicija 1.22. *Stohastički proces* $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ je familija slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Ako je I konačan skup tada jednostavno imamo konačno mnogo slučajnih promenljivih. Ako je I prebrojiv, govorimo o *stohastičkom nizu* ili *lancu*, a u slučaju da I nije prebrojiv, $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ je *stohastički proces*.

Stohastički proces zavisi od dve promenljive $t \in [t_0, T]$ i $\omega \in \Omega$, međutim promenljivu ω najčešće izostavljamo iz zapisa. Ako se fiksira $t \in \mathcal{T}$ dobija se slučajna promenljiva $X(\omega)$ koja se naziva *zasek* ili *sečenje*, a ukoliko se fiksira $\omega \in \Omega$ dobija se jedna realna funkcija $X(t)$ definisana na skupu $\mathcal{T}$ tzv. *trajektorija* stohastičkog procesa $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$. Ta slučajna promenljiva ima svoju funkciju raspodele:

$$F_1(t, x) = P(X(t) < x)$$

Definicija 1.23. *Konačno-dimenzionalne raspodele* stohastičkog procesa $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ su date sa:

$$\begin{gathered}F_t(x) = F_1(t; x) = P(X(t) < x) \\ F_{t_1,t_2}(x_1, x_2) = F_2(t_1, t_2; x_1, x_2) = P(X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2) \\ \vdots \\ F_{t_1,...t_n}(x_1, ...x_n) = F_2(t_1, ...t_n; x_1, ...x_n) = P(X(t_1) < x_1, ...X(t_n) < x_n) \\ \vdots\end{gathered}$$

gde su $t, t_1, t_2, ...t_n \in \mathcal{T}$, i $x_1, x_2, ...x_n \in \mathbb{R}$.

Definicija 1.24. Za proces $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ kažemo da je proces sa *nezavisnim priraštajima* ako su slučajne promenljive (priraštaji):

$$X(t_0), X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), ...X(t_n) - X(t_{n-1})$$

nezavisni.

Definicija 1.25. Za stohastički proces $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ kažemo da je *stacionaran* ako važi:

$$F_{t_1+h,..t_n+h}(x_1, ...x_n) = F_2(t_1, ...t_n; x_1, ...x_n) =$$

za svako $h, t_1, ...t_n \in \mathcal{T}$ tj. ako slučajne promenljive $X(t_2+h) - X(t_1+h)$ i $X(t_2) - X(t_1)$ imaju istu funkciju raspodele za svako h i $t_1 < t_2$, tada je stohastički proces $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ *proces sa stacionarnim priraštajima.*

Veoma značajan deo u svetu stohastike, a naravno i finansija, što je i krajnja tema ovog rada, jeste teorija martingala. Ovde ću navesti samo osnovne koncepte i definicije koje će mi biti neophodne pretpostavke u daljem radu.

Jedna od pretpostavki bez kojih ni jedna teorija koju analiziram kasnije ne bi imala smisla je pretpostavka tzv. fer igre. Pomoću martingala moguće je da zamislimo tržište bez mogućnosti ostvarivanja arbitraže. Martingal se može predstaviti kao stohastički proces sa kojim je nemoguće doneti bilo koje pretpostavke o budućnosti, a da se ona bitno razlikuje od sadašnjosti.

Definicija 1.26. Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ prostor sa σ-algebrom. Niz σ-algebri $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ sadržanih u $\mathcal{F}$ se zove *filtracija* ako za svako $s, t \in I, s \leq t$ važi

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t.$$

Ovde $\mathcal{F}_t$ predstavlja naše znanje u trenutku t. Sa prolaskom vremena tj. kako t raste, raste i naše znanje.
Adaptiranost procesa datoj filtraciji u terminima mere predstavlja merljivost funkcije u odnosu na rastući niz σ-algebri.

Definicija 1.27. Niz stohastičkih procesa $\{X_i\}_{i \in I}$ je *adaptiran* filtraciji $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ ako je X_i $\mathcal{F}_i$ merljivo za sve $i \in I$.

Uslov u definiciji praktično znači da $\mathcal{F}_i$ sadrži sve informacije koje se mogu saznati iz stohastičkih procesa $X_1, X_2, ..., X_i$.

Definicija 1.28. Stohastički proces $\{X_i\}_{i \in I}$ se zove *martingal* u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ ako

1) je adaptiran ovoj filtraciji i

2) važi $E(X_{i+1}|X_i, X_{i-1}, ..., X_1) = X_i$.

Uslov 2) je ekvivalentan sa uslovom $E(X_i|\mathcal{F}_j) = X_j$ za sve $j < i$. Dakle, u vremenu $i+1$ (budućnosti) očekuje se vrednost kao u vremenu i (sadašnjosti). Možemo govoriti o martingalima kao o nepredvidivim procesima.

U sledećem delu dajem definicije Poasonovog procesa i nekih njegovih specijalnih oblika.

Definicija 1.29. Stohastički proces $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ je *proces prebrajanja* ako X_t predstavlja broj događaja koji se pojavljuju do trenutka t.

Definicija 1.30. Stohastički proces prebrajanja $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ se zove *Poasonov proces* sa stopom rasta λ, $X(t) \sim \pi(\lambda)$, $\lambda \geq 0$ ako važe uslovi:

i) $X(0) = 0$;

ii) proces ima nezavisne priraštaje;

iii) broj događaja u proizvoljnom vremenskom intervalu dužine t ima Poasonovu raspodelu sa srednjom vrednošću λt:

$$P(X(s+t) - X(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Uslov i) nam govori da sa slučajnim događajima počinjemo da brojimo u nultom vremenskom trenutku, uslov ii) da je broj događaja koji se desi u nekom vremenskom intervalu nezavisan od broja događaja koji se dese u nekom drugom, disjunktnom intervalu, a uslov iii) da Poasonov proces ima stacionarne priraštaje (raspodela broja događaja koji se pojavljuju u nekom intervalu zavisi samo od dužine tog intervala).

Sa T_1 ću označiti vreme koje protekne dok se ne pojavi prvi događaj, T_2 vreme između prvog i drugog događaja, ... sa T_n vreme između $n-1$. i n-tog događaja. Niz slučajnih promenljivih $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ naziva se *vreme zadržavanja u datom stanju.* Ono što se može primetiti je da važi

$$P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

tj. to znači da je verovatnoća da je za 1. događaj potrebno više od t vremena ista kao i verovatnoća da se do trenutka t nije desio ni jedan događaj. Lako se dobija funkcija raspodele slučajne promenljive T_1

$$F_{T_1} = P(T_1 < t) = 1 - P(T_1 \geq t) = 1 - P(T_1 > t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Vodeći se istom logikom dobija se da sve slučajne promenljive koje predstavljaju vreme zadržavanja u datom stanju imaju eksponencijalnu raspodelu sa srednjom vrednošću $\frac{1}{\lambda}$.

Slučajna veličina $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ predstavlja *vreme nastupanja n-tog događaja.* Može se pokazati da S_n ima gama raspodelu.

Na osnovu kratkog osvrta na slučajne veličine koje zavise od Poasonovog procesa zaključujemo da su trajektorije ovog procesa delimično konstantne sa 'skok' prekidima veličine 1 u slučajnom vremenu T_n.

Definicija 1.31. Poasonov proces $\{X(t), t \geq 0\}$ je *složeni Poasonov proces*, $X(t) \sim \pi(\lambda, \mu_Y)$ ako može biti predstavljen kao

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y^i \tag{1.1}$$

gde je $\{N(t), t \geq 0\}$ Poasonov proces, a $\{Y^i, i \geq 1\}$ familija nezavisnih, jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih koje su takođe nezavisne od $N(t)$ sa funkcijom raspodele μ_Y. Ovde možemo shvatiti $N(t)$ kao broj skokova, dok μ_Y predstavlja veličinu skoka.

Postoji još jedna vrsta Poasonovog procesa tzv. *kompenzovani Poasonov proces.* Ispod sledi definicija.

Definicija 1.32. Neka je $\{N(t), t \geq 0\}$ Poasonov proces sa parametrom λ. *Kompenzovani Poasonov proces* $\{\widetilde{N}(t), t \geq 0\}$ definišem na sledeći način

$$\widetilde{N}(t) = N(t) - \lambda t.$$

Definicija 1.33. Za stohastički proces $\widetilde{W_t}, t \geq 0$ se kaže da je *Braunovo kretanje* ako

i) $\widetilde{W_0} = 0$;

ii) $\widetilde{W_t}$ ima nezavisne priraštaje i stacionarne priraštaje;

iii) $\widetilde{W_t} - \widetilde{W_s} : \mathcal{N}(0, t-s)$, $t \geq s \geq 0$.

Specijalno, za $s = 0$ važi $\widetilde{W_t} : \mathcal{N}(0, t)$

Definicija 1.34. Stohastički proces $e^{\widetilde{W_t}}, t \geq 0$ predstavlja *geometrijsko Braunovo kretanje* gde je $\widetilde{W_t}$ Braunovo kretanje.

Definicija 1.35. Stohastički proces $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ je *Gausovski stohastički proces* ako su sve njegove konačno-dimenzionalne raspodele normalne (svako njegovo n-dimenziono sečenje je normalno raspodeljena slučajna promenljiva).

Kao što sam ranije napomenula sledi izvođenje karakterističnih funkcija Poasonovog procesa, kao i složenog i kompenzovanog Poasonovog procesa.

- **Poasonov proces** $N(t) : \pi(\lambda t)$
  Radi lakšeg zapisa, umesto $N(t)$, Poasonov proces označavaću sa N. Karakterističnu funkciju dobijamo

$$\begin{aligned}\phi_N(u) &= E(e^{iuN}) = \sum_{k=0}^{\infty} E(e^{iuN}|N=k)P(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} E(e^{iuk})\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \\ &= e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{iu}\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t}e^{e^{iu}\lambda t} = e^{\lambda t(e^{iu}-1)}.\end{aligned}$$

- **kompenzovan Poasonov proces** $\widetilde{N}(t) = N(t) - \lambda t$

$$\begin{aligned}\phi_{\widetilde{N}}(u) &= E(e^{iu\widetilde{N}}) = E(e^{iu(N-\lambda t)}) = e^{-iu\lambda t}E(e^{iuN}) = e^{-iu\lambda t}e^{\lambda t(e^{iu}-1)} \\ &= e^{\lambda t(e^{iu}-1-iu)}.\end{aligned}$$

- **složen Poasonov proces** $X(t) : \pi(\lambda t, \mu_Y)$
  Neka je $X(t)$ Poasonov proces dat jednačinom (1.1). Karakteristična funkcija procesa $X = X(t)$ dobijena je sledećim izvođenjem kao i pretpostavkom o nezavisnosti

događaja Y^i.

$$\begin{aligned}\phi_X(u) &= E(e^{iuX}) = E(e^{iu\sum_{i=1}^{N} Y^i}) = \sum_{k=0}^{\infty} E(e^{iu\sum_{i=1}^{N} Y^i}|N=k)P(N=k)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E(e^{iu\sum_{i=1}^{k} Y^i})\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{iux}\mu_Y(dx)\Big)^k\frac{(\lambda t)^k}{k!}\\ &= \exp(\lambda t\big(\int_{\mathbb{R}}(e^{iux}-1)\mu_Y(dx)\big)).\end{aligned}$$

2

Levijevi procesi

Radi intuitivnog shvatanja Levijevog procesa, najpre navodim jedan primer stohastičkog procesa tzv. *Levijev skok-difuzivni proces*. Zatim dajem definiciju Levijevog procesa. Međutim, ona sama po sebi ne govori mnogo drugačije od, na primer, definicije Poasonovog procesa ili Braunovog kretanja. Zato ću pokušati da kroz primere, kao i osobinu beskonačne deljivosti ukažem na specifičnosti koje karakterišu ove procese.

2.1 Analiza skokova

Pre nego što uopšte krenem sa definisanjem Levijevih procesa, potrebno je da spomenem neke klase funkcija. Tako na primer *cadlag* funkcije predstavljaju preslikavanja oblika $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ tako da za sve $t \in [a, b], f$ ima levu granicu i neprekidna je sa desne strane u t. Naravno, svaka neprekidna funkcija je i cadlag. Levu granicu definišemo kao $f(t-) = lim_{s\uparrow t} f(s)$, a skok u t kao $\triangle f(t) = f(t) - f(t-)$.

Slično kao i za funkcije uvodim skokove za procese (u ovom slučaju to će biti Levijevi procesi). Skok proces $\triangle L$ pridružen Levijevom procesu $\{L(t)\}_{0\leq t\leq T}$ dat je sa $\triangle L(t) = L(t) - L(t-)$. Iz neprekidnosti stohastičkog procesa sledi $\triangle L(t) = 0$ za svaki fiksirani vremenski trenutak. Takođe, moguće je

$$\sum_{s\leq t} |\triangle L(s)| = \infty,$$

dok uvek imamo

$$\sum_{s\leq t} |\triangle L(s)|^2 < \infty.$$

Broj skokova veličine A do vremena t možemo predstaviti *slučajnom merom skoka*:

$$\mu^L(\omega; t, A) = \#\{0 \leq s \leq t; \triangle L(s, \omega) \in A\} = \sum_{s\leq t} 1_A(\triangle L(s, \omega)),$$

gde je $\mu^L(\cdot, A)$ Poasonov proces, μ^L Poasonova slučajna promenljiva, a $\nu(A) = E(\mu^L(1, A))$ parametar Poasonovog procesa a često se mera ν^L naziva *kompenzator skok mere u odnosu na* μ^L, koji predstavlja i Levijevu meru (strana 15). Možemo definisati i slučajnu promenljivu

$$\mathcal{L} = \int_A x\mu^L(t, dx) = \sum_{s \leq t} \triangle L(s) 1_A(\triangle L(s)). \tag{2.1}$$

Stohastički proces koji odgovara slučajnoj promenljivoj (2.1) je

$$\Big\{\mathcal{L}(t) = \int_0^t \int_A x\mu^L(ds, dx)\Big\}_{0 \leq t \leq T}, \tag{2.2}$$

gde je $\mu^L(ds, dx) = \mu(dx)ds$.

Radi jednostavnijeg zapisa sa $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t)$ označavaću stohastički proces (2.2). Postoji teorema koja pokazuje da je ovaj proces u stvari složen Poasonov proces[1]. On je određen karakterističnom funkcijom

$$\phi_{\mathcal{L}}(u) = \exp\big(t \int_A (e^{iux} - 1)\nu(dx)\big) \tag{2.3}$$

i očekivanjem i disperzijom

$$E(\mathcal{L}) = t \int_A x\nu(dx) \quad i \quad Var(\mathcal{L}) = t \int_A |x|^2 \nu(dx).$$

2.2 Početni primer Levijevog procesa

Neka je $W = \{W(t) : \mathcal{N}(0, t), 0 \leq t \leq T\}$ standardno Braunovo kretanje,
$N = \{N(t) : \pi(\lambda t), 0 \leq t \leq T\}$ Poasonov proces i $Y = \{Y^i\}_{i \geq 0}$ jednako raspodeljene, nezavisne slučajne promenljive sa funkcijom raspodele μ_Y i očekivanjem $E(Y) = \kappa$. Tada mogu definisati stohastički proces sabiranjem ovih procesa na sledeći način:

$$L(t) = bt + \sigma W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} Y^i - t\lambda\kappa,$$

gde su svi procesi međusobno nezavisni. Karakteristična funkcija procesa $L = L(t)$ je

$$\begin{aligned} \eta_L(u) = E(e^{iuL}) &= E\big[\exp\big(iu(bt + \sigma W + \sum_{i=1}^{N} Y^i - t\lambda\kappa)\big)\big] \\ &= \exp(iubt) E\big[\exp\big(iu\sigma W\big) \exp\big(iu(\sum_{i=1}^{N} Y^i - t\lambda\kappa)\big)\big] \end{aligned}$$

i zbog nezavisnosti procesa

$$= \exp(iubt) E\big[\exp\big(iu\sigma W\big)\big] E\big[\exp\big(iu(\sum_{i=1}^{N} Y^i - t\lambda\kappa)\big)\big]. \tag{2.4}$$

[1] *An Introduction to Levy Processes with Applications in Finance*, Antonis Papapantoleon (str 12)

Dalje, znamo da ako $W : \mathcal{N}(0,t)$ važi $E(e^{iuW}) = e^{-\frac{u^2 t}{2}}$, pa je $E\big[\exp\big(iu\sigma W\big)\big] = e^{-\frac{u^2\sigma^2 t}{2}}$, pa iz izraza (2.4) izvodim a 3. činilac:

$$E\big[\exp\big(iu(\sum_{i=1}^{N} Y^i - t\lambda\kappa)\big)\big] = E(e^{iu\sum_{i=1}^{N} Y^i} e^{-iut\lambda\kappa}) = e^{-iut\lambda\kappa} e^{\lambda t(\int_{\mathbb{R}}(e^{iux}-1)\mu_Y(dx))}$$

$$= \exp\big(\lambda t(\int_{\mathbb{R}}(e^{iux}-1)\mu_Y(dx) - iu\kappa)\big)$$

a kako je $E(Y) = \kappa$

$$= \exp\Big(\lambda t\big(E(e^{iuY}-1) - iuE(Y)\big)\Big)$$

$$= \exp\Big(\lambda t\big(E(e^{iuY}-1-iuY)\big)\Big)$$

$$= \exp\Big(\lambda t\big(\int_{\mathbb{R}}(e^{iux}-1-iux)\mu_Y(dx)\big)\Big).$$

Konačno,

$$\eta_L(u) = \exp(iubt)\exp(-\frac{u^2\sigma^2 t}{2})\exp\big(\int_{\mathbb{R}}(e^{iux}-1-iux)\mu_Y(dx)\big)$$

$$= \exp\Big(t\big(iub - \frac{u^2\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}}\lambda(e^{iux}-1-iux)\mu_Y(dx)\big)\Big) \tag{2.5}$$

2.3 Levijev proces i njegove osobine

Definicija 2.1. Stohastički proces $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ se zove *Levijev proces* ako

1. $X(0) = 0$;
2. X ima nezavisne i stacionarne priraštaje;
3. X je stohastički neprekidno tj. za sve $a > 0$ i za sve $s \geq 0$ važi:

$$\lim_{t\to s} P(|X(t) - X(s)| > a) = 0.$$

U uvodnom delu u teoriju verovatnoće objasnila sam pojam beskonačne deljivosti i dokazala tu osobinu kod Poasonove i normalne slučajne promenljive. Sledeća teorema daje potreban i dovoljan uslov za beskonačnu deljivost slučajne promenljive.

Teorema 2.1. *Raspodela slučajne promenljive L je beskonačno deljiva ako i samo ako postoji trojka (b, a, ν) tako da važi*

$$E(e^{iuL}) = exp\Big(t\big(ibu - \frac{u^2 a}{2} + \int_{\mathbb{R}}[e^{iux} - 1 - iux1_{0<|x|<1}(x)]\nu(dx)\big)\Big), \tag{2.6}$$

gde je $b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+$, a mera ν zadovoljava sledeća dva uslova $\nu(\{0\}) = 0$ i $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge |x|^2)\nu(dx) < \infty$.

Upoređujući (2.5) i (2.6) može se zaključiti da, ako sledeće vrednosti iz (2.6) $b = bt$, $a = \sigma^2 t, \nu = \lambda\mu_Y t$ zamenimo u (2.5), dobijamo indentične jednakosti.

$b \in \mathbb{R}$ se naziva *linearni drift parametar*, $a \in \mathbb{R}^+$ *Gausov* ili *difuzni koeficijent*, ν *Levijeva mera*, trojka (b, a, ν) se naziva *Levijeva karakteristična trojka* i eksponent

$$\eta(u) = ibu - \frac{u^2 a}{2} + \int_{\mathbb{R}} \big(e^{iux} - 1 - iux 1_{0<|x|<1}(x)\big)\nu(dx), \text{ za svako } t \geq 0, u \in \mathbb{R}^d \quad (2.7)$$

Levijev karakterističan eksponent.

Ako je Levijeva mera oblika $\nu(dx) = u(x)dx$, funkcija $u(x)$ naziva se *Levijeva gustina.* Levijeva gustina ima iste osobine kao funkcija gustine u verovatnoći, osim što ne mora biti integrabilna i mora imati nula masu na početku.

Neke od funkcija koje su vezane za Levijev proces a koriste su u finansijama a posebno u uključivanju stohastičke volatilnosti u model jesu *kumulativna funkcija* (2.8) i *kumulativna karakteristična funkcija* (2.9). One se definišu redom:

$$k(u) = \log E(e^{-ux}) = \log\phi(iu) \quad (2.8)$$

i

$$\psi(u) = \log E(e^{iux}) = \log\phi(u). \quad (2.9)$$

Iz poslednje jednačine se može zaključiti da je kumulativna karakteristična funkcija u principu Levijev karakterističan eksponent.

Teorema 2.2. *Ako je L Levijev proces, onda je $L(t)$ beskonačno deljiva za sve $t \geq 0$.*

Dokaz. Za Levijev proces $L = \{L(t), 0 \leq t \leq T\}$ iz jednakosti

$$L = L^{(\frac{t}{n})} + (L^{(\frac{2t}{n})} - L^{(\frac{t}{n})} + ... + (L^{(t)} - L^{(\frac{(n-1)t}{n})})$$

i na osnovu stacionarnosti i nezavisnosti Levijevog procesa sledi da su slučajne promenljive $\{L^{(\frac{tk}{n})} - L^{(\frac{t(k-1)}{n})}\}_{k\geq 1}$ nezavisne i jednako raspodeljene. Dakle, zaključujemo da je slučajna promenljiva $L(t)$ beskonačno deljiva $\forall t \geq 0$.

□

Teorema 2.3. *Svaki Levijev proces $L = \{L(t), 0 \leq t \leq T\}$ ima karakterističnu funkciju oblika:*

$$E(e^{iuL(t)}) = e^{t\eta(u)}, \quad (2.10)$$

gde je $\eta(u)$ Levijev karakteristični eksponent dat jednačinom (2.7).

Jednačina (2.10) poznata je kao Levi-Hinčin formula.

Pored osobine beskonačne deljivosti osobina koja govori o broju skokova na nekom vremenskom intervalu je osobina *konačne* ili *beskonačne aktivnosti.*

Definicija 2.2. Neka je L Levijev proces sa trojkom (b,c,ν). Skoro sve trajektorije Levijevog procesa imaju

1. *konačnu aktivnost* ako je $\nu(\mathbb{R}) < \infty$,

2. *beskonačnu aktivnost* ako je $\nu(\mathbb{R}) = \infty$.

(Bes)Konačna aktivnost znači da skoro sve trajektorije procesa L imaju (bes)konačan broj skokova na svakom kompaktnom intervalu.

Pojam (bes)konačne varijacije takođe zavisi od Levijeve mere.

Definicija 2.3. Neka je L Levijev proces sa trojkom (b,c,ν). Skoro sve trajektorije Levijevog procesa imaju

1. *konačnu varijaciju* ako važi $c = 0$ i $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) < \infty$ za skoro sve trajektorije procesa L,

2. *beskonačnu varijaciju* ako važi $c \neq 0$ i $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) = \infty$ za skoro sve trajektorije procesa L,

Treća definicija koja objedinjuju pojmove u vezi Levijeve mere i veličine skokova navodim u nastavku.

Definicija 2.4. Neka je L Levijev proces sa trojkom (b,c,ν).

1. L ima konačan p-ti momenat za sve $p \in \mathbb{R}^+$ ako i samo ako $\int_{|x|\geq 1} |x|^p\nu(dx) < \infty$,

2. L ima konačan p-ti eksponencijalni momenat za sve $p \in \mathbb{R}^+$ ako i samo ako $\int_{|x|\geq 1} e^{px}\nu(dx) < \infty$.

Iz svega navedenog može se zaključiti da varijacija Levijevog procesa zavisi od malih skokova, osobine momenata od velikih skokova, dok aktivnost zavisnosi od skokova svih veličina.

Postoji i postupak koji Levijev eksponent razdvaja na karakteristične funkcije određenih procesa. Taj postupak naziva se *Levi-Itova dekompozicija.*

2.4 Levi-Itova dekompozicija

Ovde navodim jedan od ključnih rezultata u teoriji Levijevih procesa, takozvanu Levi-Itovu dekompoziciju koja razdvaja trajektorije procesa u neprekidan deo i deo sa skokovima.

Pretpostsvimo da imamo trojku $(b, a, \nu), b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+$ i neka za meru ν važi $\nu(\{0\}) = 0$ i $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge |x|^2)\nu(dx) < \infty$. Levijev proces $L = \{L(t), 0 \leq t \leq T\}$ sa karakterističnim eksponentom (2.5) može se razdvojiti na zbir 4 procesa: konstantnan drift, Braunovo kretanje, složen Poasonov proces i čiste skokove (martingale) sa prebrojivim brojem skokova veličine manje od 1 na svakom konačnom intervalu.

Najpre Levijev eksponent možemo da razdvojimo na 4 dela. Onda ću pokazati da je svaki od tih delova karakteristična funkcija nekih od procesa. Sa η označavaću Levijev eksponent

$$\eta(u) = \eta = iub - \frac{u^2a}{2} + \int_{\mathbb{R}}[e^{iux} - 1 - iux1_{0<|x|<1}(x)]\nu(dx) = \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \eta^{(3)} + \eta^{(4)},$$

gde je

$$\eta^{(1)} = iub, \qquad \eta^{(2)} = \frac{u^2a}{2},$$

$$\eta^{(3)} = \int_{|x|\geq 1} (e^{iux}-1)\nu(dx), \qquad \eta^{(4)} = \int_{|x|<1} (e^{iux}-1-iux)\nu(dx).$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}\phi_L(u) = E(e^{iuL}) = \exp(t\eta(u)) &= \exp(t(\eta^{(1)}+\eta^{(2)}+\eta^{(3)}+\eta^{(4)}))\\ &= \exp(t\eta^{(1)})\exp(t\eta^{(2)})\exp(t\eta^{(3)})\exp(t\eta^{(4)})\end{aligned}$$

$\exp(t\eta^{(1)}) = e^{iubt}$ je očigledno karakteristična funkcija linearnog procesa (drifta) sa parametrom b ($L^{(1)}$), a $\exp(t\eta^{(2)}) = \exp(\frac{u^2at}{2})$ je karakteristična funkcija Braunovog kretanja sa koeficijentom $\sqrt{a}$ ($L^{(2)}$). Treći deo odgovara složenom Poasonovom procesu sa parametrom $\lambda = \nu(\mathbb{R})\backslash(-1,1))$ i visinom skoka $\mu_Y(dx) = \frac{\nu(dx)}{\lambda=\nu(\mathbb{R}\backslash(-1,1))}1_{\{|x|\geq 1\}}$ ($L^{(3)}$). Ovaj proces definisan je jednačinom (2.2).
4. delu posvećujem posebnu pažnju. Najpre formiram kompenzovani složeni Poasonov proces (od složenog Poasonovog procesa oduzimam njegovo očekivanje). Neka je $\mathcal{L}^{(4,\epsilon)}(t)$ složeni Poasonov proces definisan na intervalu $(\epsilon, 1)$ na sledeći način

$$\mathcal{L}^{(4,\epsilon)}(t) = \sum_{s\leq t} \triangle L^{(4)}(s) 1_{\{\epsilon<\triangle L^{(4)}(s)<1\}}(\triangle L^{(4)}(s)), \tag{2.11}$$

gde je $\triangle L^{(4)}(s)$ odgovarajući skok proces u momentu s.
Definišem kompenzovani proces procesa (2.11) oduzimanjem očekivanja

$$\widetilde{\mathcal{L}}^{(4,\epsilon)}(t) = \mathcal{L}^{(4,\epsilon)}(t) - E(\mathcal{L}^{(4,\epsilon)}(t)) = \int_0^t \int_{\epsilon<|x|<1} x\mu^{L^{(4)}}(dx,ds) - t\Big(\int_{\epsilon<|x|<1} x\nu(dx)\Big).$$

Na osnovu (2.3) dobija se karakteristični eksponent procesa $\widetilde{\mathcal{L}}^{(4,\epsilon)} = \widetilde{\mathcal{L}}^{(4,\epsilon)}(t)$

$$\eta^{(4,\epsilon)}(u) = \int_{\epsilon<|x|<1} (e^{iux}-1-iux)\nu(dx).$$

Tada postoji Levijev proces $L^{(4)}$ tj. kvadrat integrabilan martingal koji se dobija kao granica $L^{(4,\epsilon)} \to L^{(4)}$ kada $\epsilon \to 0^+$. Takođe važi $\eta^{(4,\epsilon)} \to \eta^{(4)}, \epsilon \to 0^+$. $L^{(4)}$ nazivamo *čist martingalski skok.*

Iz svega navedenog može se zaključiti da se bilo koji Levijev proces može rastaviti na 4 nezavisna Levijeva procesa $L = L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} + L^{(4)}$ na sledeći način

$$L(t) = bt + \sqrt{a}W(t) + \int_0^t \int_{|x|\geq 1} x\mu^L(ds,dx) + \int_0^t \int_{|x|<1} x(\mu^L - \nu^L)(ds,dx),$$

gde je $L^{(1)}$ linearni drift, $L^{(2)}$ Braunovo kretanje, $L^{(3)}$ složen Poasonov proces i $L^{(4)}$ čist martingalski skok.

2.5 Neke klase Levijevog procesa

Levijeve procese možemo posmatrati kao Braunovo kretanje sa driftom b isprekidano sa skokovima proizvoljne veličine. Najjednostavniji Levijev proces je linearni drift tzv. deterministički proces. Jedini Levijev proces sa neprekidnom trajektorijom je Braunovo kretanje. Sledeći primeri Levijevog procesa su Poasonov proces i složen Poasonov proces.

Najjednostavniji oblik Levijevog procesa se dobije za $a = \nu = 0$. U tom slučaju imamo $L(t) = bt$ i tada se (2.10) pretvara u

$$E(e^{iuL(t)}) = e^{itbu},$$

gde vektor b određuje brzinu linearnog kretanja i naziva se *drift*.

Primer 2.1. Poasonov proces sa stopom rasta $\lambda > 0$ je Levijev proces N ako za svako $0 \leq t \leq T$ važi $N(t) : \pi(\lambda t)$. Tada je

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

za svako $n = 0, 1, 2, ...$ Poasonov proces je rastući čist skok proces sa veličinom skoka 1. Ovo znači da je Levijeva trojka koja karakteriše Poasonov proces jednaka $(0, 0, \lambda\delta(1))$, gde $\delta(1)$ predstavlja Dirakovu meru u tački 1, a vreme između skokova je eksponencijalna promenljiva srednje vrednosti $\frac{1}{\lambda}$.

Primer 2.2. Složen Poasonov proces $X(t) : \pi(\lambda t, \mu_Y)$ ima karakterističnu funkciju:

$$\begin{aligned} \phi_X(u) &= \exp\Big(\lambda t\big(\int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1)\mu_Y(dx)\big)\Big) \\ &= \exp\Big(\lambda t\big(\phi_Y - 1\big)\Big) \end{aligned}$$

Odavde se vidi da je Levijeva trojka složenog Poasonovog procesa $(\int_{|x|\leq 1} x\nu(dx), 0, \nu(dx)$.

Primer 2.3. Braunovo kretanje kao specijalni slučaj Levijevog procesa dobijamo u slučaju $a \neq 0, \nu = 0$. Dakle, dobijamo Braunovo kretanje sa drift parametrom b: $L(t) = bt + \sqrt{a}W(t)$, $b \in \mathbb{R}^d$. Pri tome za svako $t \geq 0$ važi $L(t) : \mathcal{N}(bt, at)$ i

$$E(e^{iuL(t)}) = e^{t(ibu - \frac{u^2 a}{2})}.$$

Specijalno za $b = 0$ i $a = 1$ dobija se standardno Braunovo kretanje.

Primer 2.4. Navodim dalje klasu Levijevog procesa za čiju trojku važi:

- $\nu(-\infty, 0) = 0$,
- $a = 0$,
- $\int_{(0,1)} x\nu(dx) < \infty$.

Ako sa b' označim tzv. *drift koeficijent* $b' = b - \int_{(0,1)} x\nu(dx) > 0$ tada Levijev eksponent $\eta(u)$ mogu zapisati

$$\eta(u) = iub' + \int_{(0,\infty)} (e^{iux} - 1)\nu(dx). \tag{2.12}$$

Levi-Itova dekompozicija formule (2.12) izgleda

$$L(t) = b't + \int_0^t \int_{(0,\infty)} x\mu^L(ds, dx).$$

Ovo predstavlja primer kada je Levijev proces *subordinator*. Subordinator je rastući Levijev proces. Od stohastičkih procesa subordinatori su Poasonov i inverzni Gausov proces ([1] strana 17).

Primer 2.5. U slučaju da Levijev proces ima skokove konačne varijacije tj. da važi $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) < \infty$ i ako iskoristim b' kao u prethodnom primeru dobijam $\eta(u)$

$$\eta(u) = (iub' - \frac{u^2 a}{2} + \int_{(0,\infty)} (e^{iux} - 1)\nu(dx))$$

i Levi-Itovu dekompoziciju

$$L(t) = b't + \sqrt{a}W(t) + \int_0^t \int_{(0,\infty)} x\mu^L(ds, dx).$$

Specijalno, ako je $\nu([-1, 1]) < \infty$ tj. $\nu(\mathbb{R}) < \infty$ tada skokovi procesa L odgovaraju složenom Poasonovom procesu ([1] strana 18).

Primer 2.6. Levijev proces ima konačan momenat prvog reda ako i samo ako važi $\int_{|x|\geq 1} |x|\nu(dx) < \infty$ i tada Levijev eksponent izgleda

$$\eta(u) = iu\tilde{b} - \frac{u^2 a}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux)\nu(dx),$$

gde je $\tilde{b} = b + \int_{|x|\geq 1} |x|\nu(dx)$. Levi-Itovom dekompozicijom dobija se sledeći Levijev proces

$$L(t) = \tilde{b}t + \sqrt{a}W(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x(\mu^L - \nu^L)(ds, dx).$$

Levijev proces sa komponentom Braunovog kretanja je beskonačne varijacije zato što je i Braunovo kretanje beskonačne varijacije, dok je Levijev proces bez komponente Braunovog kretanja beskonačne varijacije ako i samo ako $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) = \infty$.

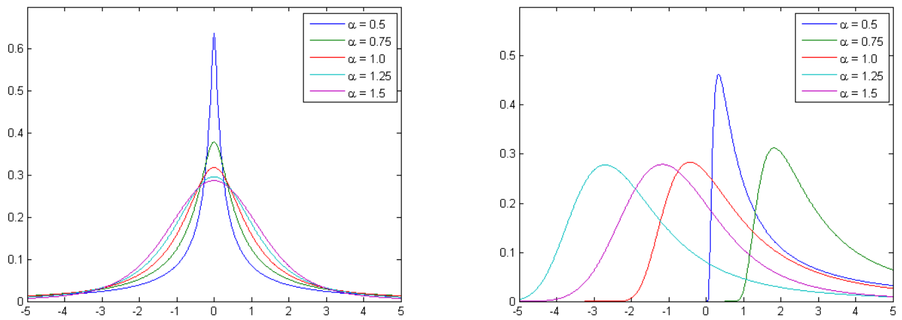
S obzirom na debljinu repa i asimetriju, stabilne funkcije dobri su kandidati za modele finansijskog tržišta, posebno ako se uzmu u obzir ekstremne vrednosti kao što su elementarne nepogode ili krah tržišta.

2.6 Stabilni procesi

α-stabilne funkcije zahtevaju četiri parametra: indeks stabilnosti (indeks repa ili karakteristični eksponent) $\alpha \in (0, 2]$, koeficijent simetrije $\beta \in [-1, 1]$, skalirajući parametar

$\sigma > 0$ i lokalni parametar $\mu \in \mathbb{R}$. Indeks repa α, kao što i samo ime kaže određuje debljinu repa. Za $\alpha = 2$ dobija se oblik Gausove funkcije gustine.

U zavisnosti od izbora ovih parametara dobijaju se sledeće karakteristike funkcija. Za $\alpha > 1$ očekivanje funkcije postoji i jednako je sa μ. Inače p-ti momenat stabilne slučajne promenljive postoji i konačan je ako i samo ako važi $p < \alpha$. Kada je $\beta > 0$ funkcija je asimetrična na desnu stranu, tj. desni rep je deblji. Za $\beta < 0$ funkcija je asimetrična nalevo. Za $\beta = 0$ dobija se funkcija simetrična oko μ. Kako se α približava dvojci, tako β gubi svoj efekat. σ određuje širinu a μ oštrinu vrha funkcije gustine. Za $\sigma = 1$ i $\mu = 0$ funkcija se naziva standardno stabilna. [2]



Slika 2.1: Funkcije gustina α-stabilnih funkcija za različite α, $\mu = 0$, $\sigma = 1$ i $\beta = 0$ (levo) i $\beta = 0.5$ (desno).

U prethodnom delu definisala sam Levijeve procese i dala određene primere, ali nisam spomenula da su upravo ovi procesi takozvani α-stabilni procesi. Spominjala sam i subordinatore. Ovde ću dati detaljniju analizu klasa ovih procesa.

Stabilne slučajne promenljive. Vratiću se na kratko na centralnu graničnu teoremu. Najpre definišem sumu

$$S_n = \frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n - b_n}{\sigma_n},$$

gde je $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ proizvoljni niz realnih brojeva, a $\{\sigma_n, n \in \mathbb{N}\}$ proizvoljni niz pozitivnih brojeva. Ono što nas zanima je granični slučaj kada postoji slučajna promenljiva X za koju

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n \leq x) = P(X \leq x), \tag{2.13}$$

važi za sve $x \in \mathbb{R}$. To znači da niz $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ konvergira ka X. Može se primetiti da, specijalno za $b_n = n\mu$ i $\sigma = \sqrt{n}\sigma$ važi centralna granična teorema prema kojoj je $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Definicija 2.5. Slučajna promenljiva je *stabilna* ako proizilazi kao granica nekog proizvoljnog niza slučajnih promenljivih kao što je slučaj u (2.13).

Dalje, postoje nizovi realnih brojeva $\{c_n, n \in \mathbb{N}\}$ i $\{d_n, n \in \mathbb{N}\}$ tako da za svako $c_n > 0$ važi

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n, \tag{2.14}$$

[2] Szymon Borak, Wolfgang Hardle, Rafal Weron, *Stable Distributions*

gde su $X_1, X_2, ..., X_n$ nezavisne slučajne promenljive sa raspodelom kao kod X.

Može se pokazati da jedini izbor c_n može biti oblika $\sigma n^{\frac{1}{\alpha}}, 0 < \alpha \leq 2$. Parametar α naziva se *indeks stabilnosti.*

Jednačina (2.14) može biti transformisana u jednačinu

$$\phi_X(u) = e^{iud_n}\phi_X(c_n u), \text{ za svako } u \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.4. *Ako je X stabilna realna slučajna promenljiva, tada važe jedan od dva slučaja*

- $\alpha = 2, \nu = 0$ *tada* $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*;*
- $\alpha \neq 2, \sigma = 0$ *tada*

$$\nu(dx) = \frac{A}{|x|^{\alpha+1}} 1_{x>0} + \frac{B}{|x|^{\alpha+1}} 1_{x<0}.$$

Sledi teorema koja pokazuje šta se dešava sa karakterističnom funkcijom slučajne promenljive u zavisnosti od izbora indeksa stabilnosti.

Teorema 2.5. *Slučajna promenljiva X je stabilna ako i samo ako postoje $\sigma > 0, -1 \leq \beta \leq 1$ i $\mu \in \mathbb{R}$ tako da za sve $u \in \mathbb{R}$ važi*

i) $\alpha = 2 \quad \Rightarrow \quad X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$\phi_X(u) = \exp\big(i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2\big);$$

ii) $\alpha \neq 1, 2$

$$\phi_X(u) = \exp\Big(iu\mu - \sigma^\alpha |u|^\alpha \big(1 - i\beta \text{ sgn}(u) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})\big)\Big);$$

Za $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$ dobija se Levijeva funkcija

$$\varphi_X(x) = \Big(\frac{\sigma}{2\pi}\Big)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x-\mu)^{\frac{3}{2}}} \exp\Big(-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\Big),$$

za $x > \mu$.

iii) $\alpha = 1$

$$\phi_X(u) = \exp\Big(iu\mu - \sigma|u|\big(1 + i\beta\frac{2}{\pi} \text{ sgn}(u) \log(|u|)\big)\Big).$$

Za $\alpha = 1, \beta = 0$ dobija se Košijeva funkcija

$$\varphi_X(x) = \frac{\sigma}{\pi((x-\mu)^2 + \sigma^2)}.$$

Može se pokazati da $E(X^2) < \infty$ ako i samo ako $\alpha = 2$ i $E(|X|) < \infty$ ako i samo ako $1 < \alpha \leq 2$.[3]

Stabilni procesi. Levijev proces X je *stabilan* ako je $X(t)$ stabilna slučajna promenljiva za svako $t > 0$. Tačnije, stohastički proces $\{X(t), t \geq 0\}$ je stabilan ako je svaka njegova konačno dimenzionalna raspodela stabilna.

[3] David Applebaum, *Levy Processes and Stohastic Calculus*

Za $1 < \alpha < 2$ karakteristična funkcija stabilnog procesa ima oblik

$$\phi_{X_t}(u) = \exp\Big(t\big(iu\mu + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux)\nu(dx)\big)\Big),$$

dok za $0 < \alpha < 1$ karakteristična funkcija izgleda

$$\phi_{X_t}(u) = \exp\Big(t\big(iu\mu + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1)\nu(dx)\big)\Big).$$

Ukoliko je $\alpha < 2$ postoje sledeće veze

$$\begin{aligned}
\sigma &= \big[-(A+B)\Gamma(-\alpha)\cos(\frac{\pi\alpha}{2})\big]^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{kada je } \alpha \neq 1,\\
\sigma &= \frac{\pi}{2}(A+B) \quad \text{kada je } \alpha = 1,\\
\beta &= \frac{A-B}{A+B}.
\end{aligned}$$

Primena stohastičke teorije u finansijama i osiguranju

3

Uvod u finansijsku teoriju

Ono što razlikuje tržište novca od tržišta roba je pre svega način na koji se trgovina obavlja. Naime, na berzama je trgovina novcem, a kasnije i drugim oblicima finansijskih sredstava koji se pojavljuju kao predmet razmene, bila podvrgnuta nekoj vrsti standardizacije kao što su količina, datum isporuke i sl. Tako nastaju prvi ugovori koji se vezuju za finansijska sredstva. S obzirom da ću značajan deo svog rada posvetiti upravo ovim ugovorima, tj. određivanjem njihove cene, sledi istorijat nastanka finansijskog tržišta, a zatim i objašnjenje osnovnih pojmova vezanih za finansijske instrumente.

3.1 Istorijski razvoj finansijskih tržišta

Neki istoričari smatraju da su srednjevekovni italijanski gradovi emitovali prve dužničke hartije od vrednosti kako bi pomirili stalne finansijske potrebe. Veliki deo trgovanja se odvijao u hotelu 'Placa de la Bourse' (nazvanom po familiji Van der Bourse) koje je postalo sininonim za organizovano tržište hartijama od vrednosti širom kontinentalne Evrope. U kući Burzovih se trgovalo uglavnom obveznicama i novcem i sve do 1 500. godine prestavljala je centar ove trgovine u velikoj meri zahvaljujući formiranjem velikih trgovačkih kompanija kao što je 'Hanseatic League' koju su zajedno činili oko 200 zapadnoevropskih gradova. Važno je takođe navesti da iako su se već u periodu od petnaestog veka pojavili tržištni materijali odnosno hartije od vrednosti kao što su menica i pojedini oblici akcija trgovačkih kompanija i rudnika i dalje se ne može govoriti o organizovanom tržištu. Trgovina se ovim hartijama odvijala na dogovorenim mestima širom Evrope zajedno sa različitim vrstama robe, po pre svega običajnim pravilima sve do sedamnaestog veka.

U Amsterdamu je osnovano prvo otvoreno akcionarsko društvo 'Dutch East India Company' oformljena da redovno šalje flotu brodova na istok radi trgovine. Ova kompanija je izdavala veliki broj akcija koje su davale jednak udeo u ostvarenom profitu kompanije, koji međutim nije imao siguran ishod i nije bio poznat do samog izvršenja (povratka flote) što je u velikoj meri ohrabrivalo i investitore i špekulante. Zbog mogućnosti većih špekulacija vlast je pokušala da zabrani ovakvu praksu ali nije uspela, tako je zahvaljujući 'Dutch East India Company' berzansko tržište počelo da dobija svoj moderan oblik.[1].

[1]B. Mark Smith, *A History of the Global Stock Market: From Ancient Rome to Silicon Valley*, University of Chicago Press, 2004

Razvojem bankarskog sektora i osnivanjem banaka dolazi do razvoja finansijskog tržišta i banke počinju da drže svoje depozite u obliku obveznica i akcija trgovačkih kompanija.

U drugoj polovini prošlog veka dolazi do znatnog napretka u tehnologiji i komunikaciji, kao i do globalizacije finansijskog tržišta - 1962. godine formirano je Međunarodno udruženje berzi (international Federation of Stock Exchanges FIBV) dok je danas to Svetsko udruženje berzi (World Federation of Exchanges WFE). Poslednjih tridesetih godina svedoci smo drastičnih promena na polju telekomunikacije, pojavom kompjutera i interneta, što je u još većoj meri doprinelo globalizaciji. [2]

3.2 Osnovni pojmovi vezani za finansijske derivate

Finansijski derivati su hartije od vrednosti koje nemaju vrednost same po sebi nego je njihova vrednost izvedena iz osnovnog dobra (podloge). Najčešće se u ulozi podloge pojavljuju akcije i depoziti oročeni u banci tzv. nerizična aktiva. Cilj trgovine finansijskim derivatima (umesto njihovim podlogama) jeste zaštita od rizika, ali i ostvarivanje visokih profita, naravno. Prema tom cilju, razlikuju se dve osnovne grupe investitora: *hedžeri* i *špekulanti*. Hedžeri se kupovinom finansijskih derivata obezbeđuju od neželjenih promena cena, dok špekulantni, kao što i samo ime kaže, 'špekulišu' kupovinom i prodajom portfolia finansijskih derivata ne bi li ostvarili što veći profit.

Počeci trgovine finansijskim derivatima datiraju još sa početka devetnaestog veka kada su cene žitarica oscilovale od veoma niskih za vreme žetve, do veoma visokih u proleće. Usled toga, pojavili su se brojni sporovi između proizvođača i trgovaca. Da bi sebe obezbedili, i proizvođači i kupci, udružuju se 1842. godine i osnivaju poznatu Čikašku berzu. Shvatajući prednosti unapred dogovorene trgovine, oni počinju da ugovaraju cenu i količinu robe koja će biti isporučena u budućnosti. Takva vrsta ugovora naziva se *forvard*. Daljim razvojem tržišta dolazi do standardizacije ovih ugovora i tako nastaje *fjučers*.

Pored forvarda i fjučersa, sa razvojem tržišta, pojavljuju se *opcije*. Kupac opcija dobija pravo (ali ne i obavezu) da kupi ili proda podlogu opcije po unapred ugovorenoj ceni tzv. ceni izvršenja ili strajk ceni. Opcije koje daju pravo kupovine nazivaju se call, a one koje daju pravo prodaje put opcije. Takođe, u zavisnosti od vremena realizacije, razlikuju se evropske i američke opcije. Kod evropskih, opciju je moguće realizovati samo na datum dospeća, dok kod američkih opcija može da se realizuje u bilo kom trenutku pre dospeća. U ovom radu će se podrazumevati da se podloga opcije odnosi na akciju.

Uvodim sledeće oznake:

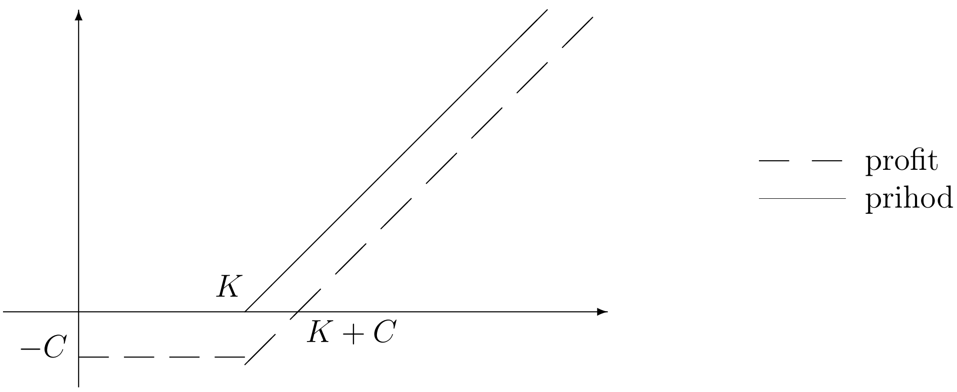
S_t - cena akcije kao podloge u trenutku t;
C_t - cena call opcije u trenutku t;
P_t - cena put opcije u trenutku t;
K - cena izvršenja;
T - datum izvršenja.

[2] mr Vladimir Jovanović, *Istorijski aspekti razvoja berze i finansijskih tržišta u svetu*

Pretpostavimo da imamo call opciju u trenutku $t = 0$. Radi lakšeg zapisa, neka je C cena opcije u trenutku $t = 0$ i K cena izvršenja u momentu dospeća te opcije. Ako x-osa sa grafika 1 predstavlja cenu akcije u momentu dospeća, a y-osa količinu novca koji nam preostaje može se zaključiti je cena opcije u trenutku $t = T$

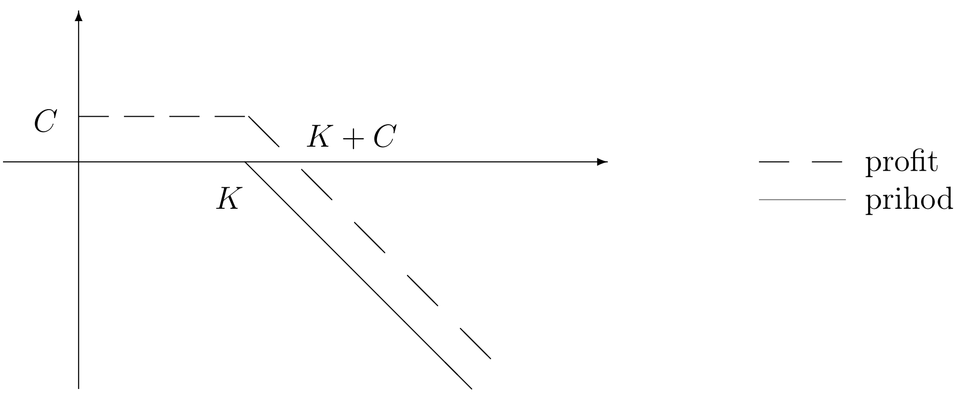
$$C_T = max\{S_T - K, 0\}.$$

Dakle, call opciju izvršavamo jedino u slučaju kad je cena akcije veća od strajk cene. U tom slučaju kupujemo opciju po strajk ceni i prodajemo je po redovnoj, tržišnoj. U slučaju kad je $S_T > K + C$ ostvarujemo profit, dok smo u slučaju $S_T = 0$ na nuli tj. kupujemo i prodajemo akciju po većoj ceni i taman nam preostaje toliko da naplatimo cenu kupljene opcije.



Prihod za kupca call opcije

Na grafiku 2 možemo videti kako izgleda prihod prodavca call opcije tj. njegov gubitak. Prodavac call opcije podlože gubitku jedino u slučaju izvršavanja opcije od strane kupca.

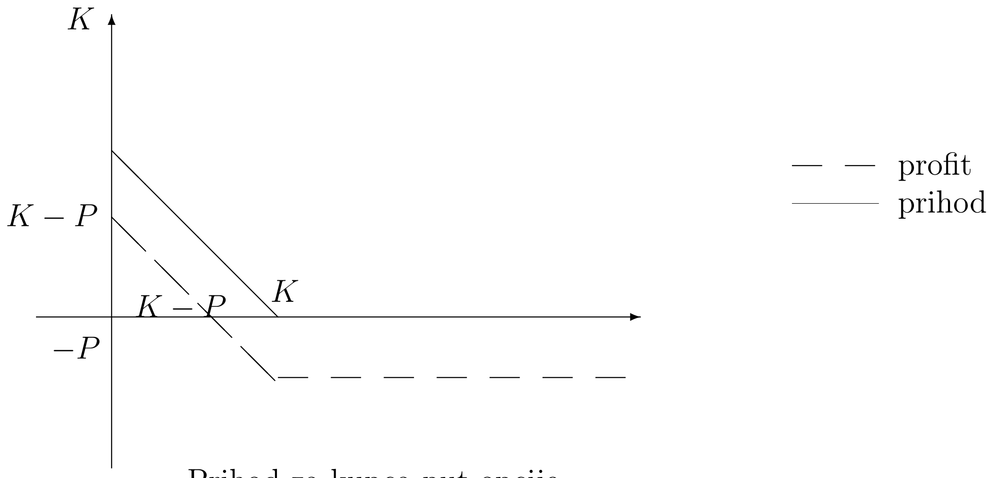


Prihod za prodavca call opcije

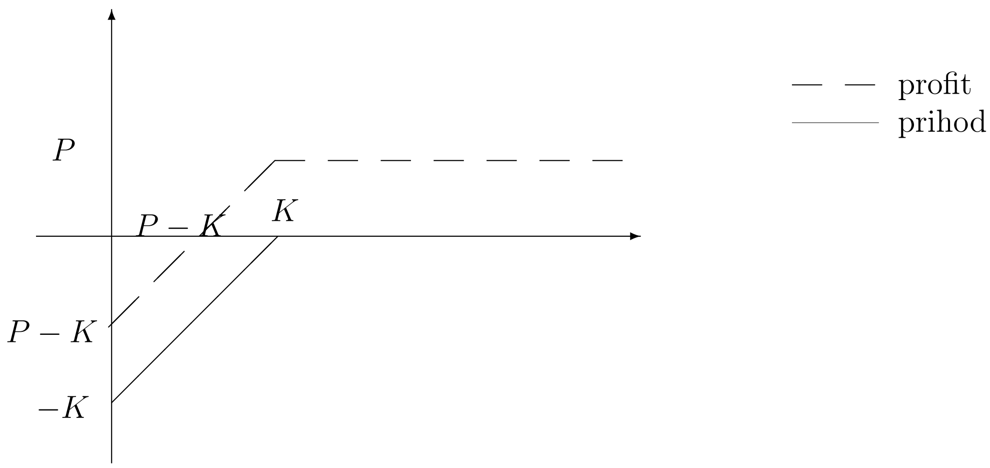
Analogno, prihodi prodavca i kupca put opcija mogu se grafički prikazati na graficima 3 i 4. Pri tome, vrednost put opcije izgleda

$$P_T = max\{K - S_T, 0\},$$

i ona se izvršava jedino u slučajevima kada je cena akcije manja od strajk cene (kupujemo akciju po redovnoj ceni, a prodajemo je po strajk).



Prihod za kupca put opcije



Prihod za prodavca put opcije

Sa grafika se može uočiti da je dobitak(gubitak) kupca(prodavca) call opcije neograničen, dok je dobitak(gubitak) kupca(prodavca) put opcije ograničen strajk cenom. Na osnovu ovoga možemo zaključiti: kada očekujemo rast cena akcije, kupujemo call opciju, a kada očekujemo pad cena put opciju.

U sledećem primeru ću pokazati zašto je opcija bolji izbor od akcije i sa stanovišta dobitka i sa stanovišta gubitka.

Primer 3.1. Neka je trenutna cena akcije $S_0 = 100$ i call opcije $C = 2$ sa strajk cenom $K = 100$. Posmatraćemo slučaj kada je cena akcije porasla (kad ostvarujemo dobitak) i kada je opala (kada ostvarujemo gubitak), a u okviru ta dva slučaja šta se dešava kad smo kupili akciju a šta ako smo kupili opciju.
1° $S_T = 110$

- Kupili smo akciju. Prodajemo akciju po ceni 110 i ostvarujemo dobit od 10 novčanih jedinica tj. stopa prinosa r iznosi

$$r = \frac{110 - 100}{100} = 0.1$$

- Kupili smo opciju. Izvršavamo opciju koja nam daje mogućnost da kupimo akciju po ceni od 100 novčanih jedinica, a prodajemo je za 110. Pri tome, ostvarujemo sledeću stopu prinosa

$$r = \frac{110 - 100}{2} = 5$$

2° $S_T = 90$

- Kupili smo akciju. Izgubili smo 10 novčanih jedinica.
- Kupili smo akciju. Izgubili smo 2 novčane jedinice.

Iz prethodnog primera vidimo da je ulaganje u opcije isplativije i sa stanovišta rizika, ali i u slučaju zarade.

Osnovna pretpostavka matematičkih modela u finansijama je odsustvo *arbitraže.* Pod arbitražom se podrazumeva mogućnost ostvarivanja profita bez ulaganja sopstvenih sredstava, odnosno ostvarivanje profita bez rizika (free lunch). Pretpostavimo da se ista akcija prodaje na berzama u Londonu i Njujorku. Neka je cena te akcije u Londonu manja od cene u Njujorku. Tada bi investitor mogao da kupi akciju po jeftinijoj ceni i odmah je prodar po skupljoj. Pretpostavimo još nepostojanje transakcionih troškova ili njihovo postojanje ali u visini manjoj od razlike u cenama, tako da kupovina i prodaja akcije na prethodno opisan način praktično donosi profit bez rizika. Ova situacija, naravno, nije realna, a i u slučaju da do nje dođe, u uslovima informisanosti učesnika na finansijskom tržištu, doći će do povećane tražnje za akcijom u Londonu, a samim tim i do povećanja njene cene. Ovo pravilo tj. odsustvo arbitraže, naziva se i *pravilo jedne cene.*

3.3 Black-Scholes model za utvrđivanje cene opcije

Klasični model za fluktuacije cena akcija na tržištu - Black-Scholes-ov model, zajedno sa idejom nepostojanja arbitraže primenjen je na brojnim poljima među kojima u Black-Scholes-ovoj formuli za određivanje cene evropske call opcije, ali i u formulama za hedžing strategije.

Svoj revolucionarni doprinos finansijskom tržištu i oblastima finansijske matematike, uprkos svojim nedostacima, doprineo je čuveni Black-Scholes kontinualni model za određivanje cene opcije. Kao prvo, predstaviću ukratko binomni model koji se bazira na ideji replikantnog portfolia, a zatim ću i na osnovu aktive koja prati geometrijsko Braunovo kretanje izvesti Black-Scholes model.

3.3.1 Binomni model

Pretpostavimo da na tržištu postoji jedna rizična i jedna nerizična aktiva. Njih možemo predstaviti sledećim grafikom

$$\begin{tikzcd}
 & uS_0 & & R \\
S_0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & 1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & dS_0 & & R
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

gde je R prinos koji se dobije kada se uloži 1 sa bezrizičnom kamatnom stopom r tj. $R = 1 + r$ i neka važe sledeće relacije $d < R < u$ (može se pokazati da u slučaju da to ne važi, dolazimo do arbitraže). U trenutku $t = 0$ cena aktive je S_0, dok u $t = 1$ može biti uS_0 i dS_0. Vrednost nerizične aktive u $t = 1$ je u oba slučaja R.

Sličnom logikom, dolazimo do sledećeg tumačenja cene opcije u trenutku $t = 0$ i $t = 1$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & max\{0, uS_0 - K\} = C_u \\ C_0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & max\{0, dS_0 - K\} = C_d \end{tikzcd}$$

Neka portfolia (3.1) predstavljaju replikantne portfolie pomoću kojih ćemo dobiti cenu C_0. Neka je x količina sredstava koje ulažemo u akciju S_0, a y količina sredstava koje ulažemo u nerizičnu investiciju. Formiramo replikantni portfolio tako da u trenutku $t = 1$ cena replikantnog portfolia bude jednaka sa cenom opcije u oba slučaja:

$$xuS_0 + yR = C_u \tag{3.2}$$

$$xdS_0 + yR = C_d. \tag{3.3}$$

Iz jednačina (3.2) i (3.3) dobijamo x i y, a C_0 dobijamo iz sledeće jednakosti

$$C_0 = xS_0 + y.$$

Izvođenjem dobijamo

$$C_0 = \frac{1}{R}(qC_u + (1 - q)C_d),$$

gde je

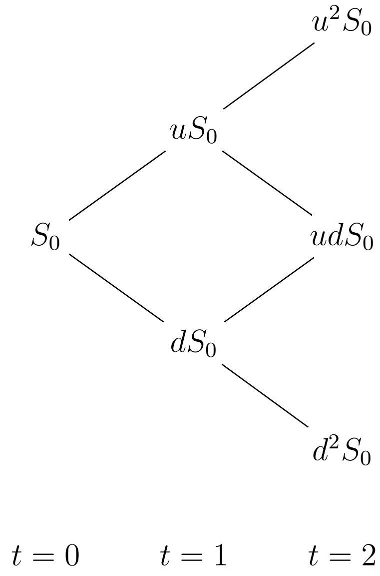
$$q = \frac{R - d}{u - d}. \tag{3.4}$$

C_0 možemo zapisati i u sledećem obliku $C_0 = \widetilde{E}(C)$, gde je

$$C : \begin{pmatrix} C_u & C_d \\ q & 1 - q \end{pmatrix}$$

S obzirom da $q \in (0, 1)$, q možemo posmatrati kao rizik neutralnu verovatnoću. Nazivamo je *rizik neutralna* jer smo q dobili ne vodeći računa o verovatnoći da S_0 postane uS_0 ili dS_0. Takvo razmišljanje naziva se rizik neutralnim, pa je C_0 rizik netralna, diskontovana, očekivana vrednost budućih prihoda.

U slučaju postojanja 3 vremenska trenutka imamo sledeću situaciju



Sada prvo pravimo replikantne portfolie u $t = 1$: (x_u, y_u) i (x_d, y_d) koji odgovaraju stanjima uS_0 i dS_0. Na taj način dobijamo cene opcija u trenutku $t = 1$, a na osnovu toga, analogno, dobijamo i početnu cenu opcije

$$C_0 = \frac{1}{R}\frac{q^2C_{uu} + 2(1-q)qC_{ud} + (1-q)^2C_{dd}}{R^2}. \tag{3.5}$$

Ovaj način se može uopštiti za n perioda:

$$C_0 = \frac{1}{R}\Big[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}(1-q)^k max\{u^{n-k}d^kS_0 - k, 0\}\Big] \tag{3.6}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$.

3.3.2 Geometrijsko Braunovo kretanje cene akcije

Označimo sa $S(y)$ cenu akcije u nekom budućem vremenu. Kažemo da kolekcija $\{S(y)\}$ $0 \leq y \leq \infty$ sledi geometrijsko Braunovo kretanje sa drift parametrom μ i volatilnošću σ ako je za sve nenegativne vrednosti y i t slučajna promenljiva

$$\frac{S(t+y)}{S(y)}$$

nezavisna od cena do momenta y i ako je još

$$\log\big(\frac{S(t+y)}{S(y)}$$

normalna slučajna promenljiva sa očekivanjem μt i varijansom σt.

Geometrijsko Braunovo kretanje količnika cena se može dobiti kao granična vrednost binomnog modela za više perioda na sledeći način.

Neka je $\triangle = \frac{t}{n}$, dakle ukupan period koji posmatramo je t, on se sastoji od n perioda dužine $\triangle$ ($t = \triangle n$).

Uvodim slučajne promenljive $X_i, i = 1, ..., n$ kao nezavisne, jednako raspodeljene slučajne promenljive

$$X_i = \begin{cases} 1, & q \\ 0, & 1-q \end{cases}$$

pa je prema tome

$$S(i) = \begin{cases} uS(i-1), & X_i = 1 \\ dS(i-1), & X_i = 0 \end{cases}$$

$i = 1, ..., n-1$.

Rekli smo već da je $R = 1 + r$, a ako posmatramo ceo period onda je $R = 1 + \triangle r$. Prema (3.4) dobijamo

$$q = \frac{1 + r\triangle - d}{u - d}. \tag{3.7}$$

Biramo specijalne u i d, $u = e^{\sigma\sqrt{\triangle}}, d = e^{-\sigma\sqrt{\triangle}}$. Ako iskoristimo Tejlorov razvoj 2. reda za u i d dobijamo $u = e^{\sigma\sqrt{\triangle}} \approx 1 + \sigma\triangle + \frac{\sigma^2\triangle}{2}$ i $d = e^{-\sigma\sqrt{\triangle}} \approx 1 - \sigma\triangle + \frac{\sigma^2\triangle}{2}$, a to kada uvrstimo u (3.7) dobijamo

$$\begin{aligned} q &= \frac{1 + \sigma\triangle - 1 + \sigma\sqrt{\triangle} - \frac{\sigma^2\triangle}{2}}{1 + \sigma\triangle + \frac{\sigma^2\triangle}{2} - 1 + \sigma\sqrt{\triangle} - \frac{\sigma^2\triangle}{2}} \\ &= \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})\triangle + \sigma\sqrt{\triangle}}{2\sigma\sqrt{\triangle}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\sqrt{\triangle}}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Ako uvedemo oznaku $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$ za q se dobije

$$q = \frac{1}{2}\left(1 + \mu\frac{\sqrt{\triangle}}{\sigma}\right). \tag{3.8}$$

Dalje,

$$S(t) = S(n\triangle) = S(0)u^{\sum_{i=1}^n X_i} d^{(n - \sum_{i=1}^n X_i)},$$

$$\frac{S(t)}{S(0)} = d^n \left(\frac{u}{d}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i},$$

$$\log\frac{S(t)}{S(0)} = n\log d + \sum_{i=1}^n X_i \log\frac{u}{d}. \tag{3.9}$$

S obzirom da je $\log d = \log e^{-\sigma\sqrt{\triangle}} = -\sigma\triangle$, a $\log \frac{u}{d} = \log e^{2\sigma\sqrt{\triangle}} = 2\sigma\sqrt{\triangle}$ jednačinu (3.9) možemo zapisati

$$\log \frac{S(t)}{S(0)} = -n\sigma\sqrt{\triangle} + 2\sigma\sqrt{\triangle}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$= -\frac{\sigma t}{\sqrt{\triangle}} + 2\sigma\sqrt{\triangle}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Promenljive X_i su nezavisne i imaju istu raspodelu, pa na osnovu centralne granične teoreme sledi da je $\sum_{i=1}^{n} X_i$ normalna slučajna promenljiva jer $n \to \infty$ kada $\triangle \to 0$. Dalje sledi da je i $\log \frac{S(t)}{S(0)}$ normalna slučajna promenljiva i važi

$$E\left[\log \frac{S(t)}{S(0)}\right] = -\frac{t\sigma}{\sqrt{\triangle}} + 2\sigma\sqrt{\triangle}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$= -\frac{t\sigma}{\sqrt{\triangle}} + 2\sigma\sqrt{\triangle}\, nq$$

$$= -\frac{t\sigma}{\sqrt{\triangle}} + 2\sigma\sqrt{\triangle}\,\frac{t}{\triangle}\frac{1}{2}\left(1 + \mu\frac{\sqrt{\triangle}}{\sigma}\right)$$

$$= \mu t. \tag{3.10}$$

$$Var\left[\log \frac{S(t)}{S(0)}\right] = 4\sigma^2 \triangle\, Var(\sum_{i=1}^{n} X_i)$$

$$= 4\sigma^2 \triangle n\, q(1-q).$$

S obzirom da $q \to \frac{1}{2}$ kada $\triangle \to 0$ iz (3.11) sledi

$$Var\left[\log \frac{S(t)}{S(0)}\right] = \sigma^2 t, \tag{3.11}$$

pa je prema tome

$$\log \frac{S(t)}{S(0)} : \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t).$$

Da bi konačno došli do cene akcije $S(t)$ uvodim slučajne promenljive W i Z

$$W := \log \frac{S(t)}{S(0)}$$

pa je

$$S(t) = S(0)e^{W} \tag{3.12}$$

i

$$Z := \frac{W - \mu t}{\sigma\sqrt{t}} : \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow W = Z\sigma\sqrt{t} + \mu t.$$

Kada tako dobijeno W uvrstimo u (3.12) dobije se

$$S(t) = S(0)e^{\mu t + \sigma\sqrt{t}Z}.$$

3.3.3 Black-Scholes formula

Na osnovu ranijih razmatranja dobili smo $C = \frac{1}{R}\widetilde{E}\big[(S(t) - K)^{+}\big]$. Sledi čuvena Black-Scholes formula koja daje fer cenu opcije bez arbitraže.

Teorema 3.1 (**Black-Sholes**). *Neka je s početna cena podloge koja prati geometrijsko Braunovo kretanje, C opcija na tu podlogu sa dospećem u vremenu t i strajk cenom K. Neka su parametri geometrijskog Braunovog kretanja μ i σ. Tada se može odrediti cena call opcije na sledeći način*

$$C(s,t,K,\sigma,r) = s\Phi(\omega) - Ke^{-rt}\Phi(\omega - \sigma\sqrt{t}) \tag{3.13}$$

gde je

$$\omega = \frac{rt + \sigma^2\frac{t}{2} - \log(\frac{k}{s})}{\sigma\sqrt{t}},$$

a Φ funkcija raspodele za standardnu normalnu slučajnu promenljivu.

U uslovima nepostojanja arbitraže, cenu opcije možemo prikazati u sledećem obliku $C = e^{-rt}\widetilde{E}\big[(S(t) - K)^{+}\big]$. Pretpostavili smo da cena podloge predstavlja log-normalnu slučajnu promenljivu sa parametrima μt i $\sigma^2 t$ pri čemu je $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$.

Da bih dokazala formulu (3.13) prethodno ću izvesti par pomoćnih lema. Prvo uvodim indikator promenljivu:

$$I = \begin{cases} 1, & S(t) \geq K \\ 0, & S(t) < K. \end{cases}$$

Lema 3.1.

$$I = \begin{cases} 1, & Z \geq \sigma\sqrt{t} - \omega \\ 0, & Z < \sigma\sqrt{t} - \omega. \end{cases}$$

Dokaz.

$$S(t) \geq K$$

$$se^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\sqrt{t}Z} \geq K$$

$$(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\sqrt{t}Z \geq \log\frac{K}{s}$$

$$Z \geq \frac{\log\frac{K}{s} + \frac{\sigma^2}{2}t - rt}{\sigma\sqrt{t}} = \sigma\sqrt{t} - \omega.$$

$\square$

Lema 3.2. $E[I] = \Phi(\omega - \sigma\sqrt{t})$.

Dokaz.

$$\begin{aligned} E[I] &= P(Z \geq \sigma\sqrt{t} - \omega) \\ &= P(Z \leq \omega - \sigma\sqrt{t}) \\ &= \Phi(\omega - \sigma\sqrt{t}). \end{aligned}$$

□

Lema 3.3. $e^{-rt}E[IS(t)] = s\Phi(\omega)$.

Dokaz. Uvodim oznaku $c = \omega - \sigma\sqrt{t}$ radi lakšeg zapisa.

$$\begin{aligned} E[IS(t)] &= \int_c^\infty se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma\sqrt{t}x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= \frac{s}{\sqrt{2\pi}}e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t}\int_c^\infty e^{-\frac{1}{2}(x^2-2\sigma\sqrt{t}\pm\sigma^2 t)} \\ &= \frac{s}{\sqrt{2\pi}}e^{rt}\int_c^\infty e^{-\frac{(x-\sigma\sqrt{t})^2}{2}} \\ &= |\text{smena: } y = x - \sigma\sqrt{t}| \\ &= \frac{s}{\sqrt{2\pi}}e^{rt}\int_{-\omega}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\ &= se^{rt}\int_{-\infty}^\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\ &= se^{rt}\Phi(\omega). \end{aligned}$$

□

Konačno, koristeći se prethodno dokazanim lemama, mogu izvesti i Black-Scholes formulu.

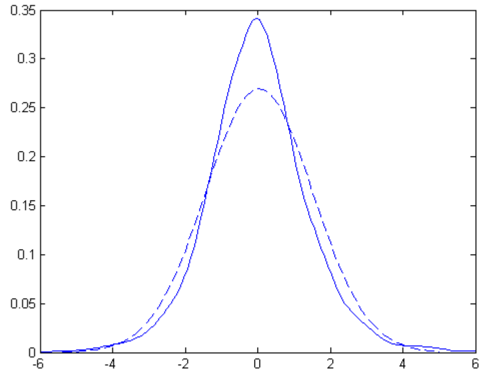
Dokaz. (Black-Scholes)

$$\begin{aligned} C &= e^{-rt}\widetilde{E}\big[(S(t)-K)^+\big] = e^{-rt}\widetilde{E}\big[I(S(t)-K)\big] = e^{-rt}\widetilde{E}\big[IS(t)\big] - Ke^{-rt}\widetilde{E}\big[I\big] \\ &= s\Phi(\omega) - Ke^{-rt}\Phi(\omega - \sigma\sqrt{t}). \end{aligned}$$

□

3.3.4 Nedostaci Black-Sholes modela

Nedostaci ovog revolucionarnog modela leže pre svega na jakim pretpostavkama koje su dovele do njega. Jedna od osnovnih pretpostavki je svakako nepostojanje arbitraže. Dalje pretpostavljamo da ne postoje transakcioni troškovi, takse, da nema ograničenja na kratku prodaju, svi učesnici u transakcijama su racionalni... Zapravo, teško je utvrditi da li su u pitanju nedostaci Black-Scholes modela ili je tržište jednostavno neefikasno. Iako ne postoji zvaničan dokaz koji tvrdi da ovaj model nudi mogućnosti za arbitražu, pretpostavka je da je u pitanju pogrešna podloga i da ona dovodi do nepodudaranja sa stvarnim cenama opcije.

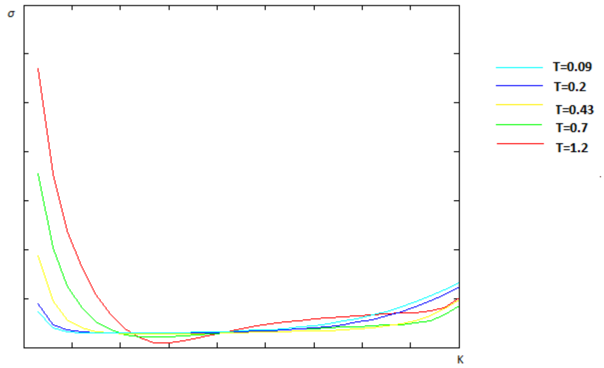


Slika 3.1: Kernelova aproksimacija funkcije gustine (puna linija) i funkcija gustine normalne raspodele sa parametrima dobijenim metodom najmanjih kvadrata (isprekidana linija) na osnovu dnevnih log-prihoda IBM-a ([18]). Za ove podatke koeficijent asimetrije je -0.3329, dok je koeficijent spoljštenosti 18.2116.

Prvi nedostaci modela mogu se uočiti kada se iz istorijskih podataka (berzanskih indeksa) dobiju odgovarajuće statistike, a zatim se one uporede sa poznatim osobinama normalne raspodele (slika 3.1). Konkretno, za različite periode dobijaju se koeficijenti spljoštenosti veći od 3. Normalnu raspodelu karakteriše koeficijent spljoštenosti koji je jednak sa 3. Uopšteno, raspodele čiji su koeficijenti spljoštenosti veći od 3, dakle ovi konkretni podaci, imaju oštriji oblik funkcije raspodele, viši vrh (što znači veću verovatnoću ekstremnih vrednosti) i tanje repove (vrednosti su usko skoncetrisane jedna oko druge). To znači da se u realnosti vrlo mala i ogromna pomeranja u ceni dešavaju češće, dok mala i srednja pomeranja ređe. Druga važna razlika u samom izgledu funkcije raspodele je koeficijent asimetrije koja pokazuje stepen asimetrije u odnosu na normalnu raspodelu (kod normalne raspodele ovaj koeficijent je nula). Kod posmatranih podataka dobija se negativan koeficijent asimetrije (asimetrija na levo) koji pokazuje da je većina vrednosti smeštena sa desne strane očekivane vrednosti sa ekstremnim vrednostima na desnoj strani. Takođe značajan pokazatelj nepodudaranja normalne raspodele i raspodele konkretnih podataka koja prati kretanje cene akcija, dobija se nekim od statističkih testova kao što je χ^2-test.

Pored drugih, jedna od činjenica koja je izostavljena kod davanja pretpostavki je stohastička volatilnost procesa kretanja cena akcija. Pretpostavka o konstantnoj volatilnosti može biti vrlo lako opovrgnuta ako posmatramo *istorijsku volatilnost*. Naravno tu su i istorijski događaji, krahovi berzi, inflacije, elementarne nepogode i druge katastrofe koje direktno ili indirektno utiču na drastičnu promenu cena. Sa rastom cena dolazi i do porasta njihove varijacije i obrnuto. Kada iz Black-Scholes formule, gde je cena opcije $C = C(s, T, K, r, \sigma)$, izvučemo podatak o volatilnosti kao funkciji $\sigma = \sigma(s, T, K, r, C)$, a da smo pri tom za cenu opcije uzeli tržišnu cenu, dobijamo *implicitnu volatilnost*. Međutim, ne postoji način da se implicitna volatilnost eksplicitno izrazi, pa se u zavisnosti od različitih izbora vremena dospeća T dobijaju različiti stohastički modeli, što naravno dovodi u pitanje tačnost modela. [3] Radi jednostavnosti prikaza pretpostavimo da implicitna volatinost zavisi samo od dva parametra: $\sigma = \sigma(T, K)$. Na slici 3.2 može se

[3]Wim Schoutens, *Lévy Processes in Finance*, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium



Slika 3.2: Implicitna volatilnost sa različitim izborom vremena dospeća.

primetiti različit oblik funkcije volatilnosti kako se menja jedan od parametara.

4

Primena Levijevih procesa u finansijama

Nedostaci Black-Scholes-ovog modela predstavljaju ujedno i motivaciju za uvođenje drugog, realnijeg modela tj. modela koji će vernije prikazati stvarno stanje i ponašanje tržišta. Da bi to i ostvarili, procesi koji prate kretanje finansijskih sredstava na tržištu, moraju sadržati delove koji reprezentuju skokove. Takođe, volatilnost ne sme biti konstantna tokom vremena.

Neka je $\{L_t, t \geq 0\}$ Levijev proces. Sada će cena akcije izgledati

$$S_t = S_0 e^{L_t}.$$

Razlog za uvođenje difuzivnog elementa u kretanje cene akcija jeste potreba da se uhvate mala, ali česta pomeranja. Naime, većina procesa navedenih u glavi (2) su Levijevi procesi beskonačne aktivnosti tj. za njih važi $\int_{-\infty}^{\infty} \nu(dx) = \infty$ i oni su sposobni da obuhvate i retke velike skokove kao i česte male.

Najpre ću napraviti kratki osvrt na ekvivalentnu martingalsku meru na finansijskom tržištu.

4.1 Ekvivalentna martingalska mera i nekompletnost tržišta

Definicija 4.1. Verovatnosna mera Q na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je ekvivalentna martingalska mera ako važi

i) Q i P su ekvivalentne mere (definicija 1.6 u poglavlju 1.1) i

ii) diskontovani proces cena akcije $\tilde{S} = \{\tilde{S}(t) = e^{-rt}S(t), t \geq 0\}$ je martingal u odnosu na meru Q.

Odsustvo arbitraže garantuje nam egzistenciju ekvivalentne, rizik-neutralne mere. Za razliku od tržišta na kojima cene aktiva prate Braunovo kretanje ili Poasonov proces, tržišta kod kojih su procesi cena određeni Levijevim procesima su nekompletna. To znači da ekvivalentne mere postoje ali nisu jedinstvene. Dakle, u tom slučaju nemoguće je naći ekvivalentnu meru koja bi mogla da reprezentuje realnu sliku tržišta kao što je bio slučaj u prošlom poglavlju.

Jedan od načina da se pronađe ekvivalentna martingalska mera jeste *Ešerova transformacija*. Posmatram model kretanja cena akcija $\{X(t), t \geq 0\}]$ sa funkcijom gustine $\varphi_t(x)$ i definišem funkciju gustine $\varphi_t^{(\theta)}(x)$ za neko $\theta \in \{\theta \in \mathbb{R} | \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta y}\varphi_t(y)dy < \infty\}$ na sledeći način

$$\varphi_t^{(\theta)}(x) = \frac{\exp(\theta x)\varphi_t(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\theta y)\varphi_t(y)dy},$$

gde θ biram tako da je diskontovani proces cena akcije $\{e^{-(r-q)t}S(t), t \geq 0\}$ martingal tj. važi

$$S(0) = e^{-(r-q)t}E^{(\theta)}(S(t)),$$

gde je očekivanje u odnosu na funkciju gustine $\varphi_t^{(\theta)}(x)$. Neka je $\phi(u) = E(e^{iuX})$ karakteristična funkcija procesa $X = \{X(t), t \geq 0\}$. Može se pokazati da je diskontovani proces cena akcije martingal ako važi

$$e^{r-q} = \frac{\phi(-i(\theta+1))}{\phi(-i\theta)}.$$

Rešenje prethodne jednačine θ^* predstavlja Ešerovu transformaciju martingalske mere date funkcijom gustine $\varphi_t^{(\theta^*)}(x)$.

Ešerova transformacija predstavlja jedan od mnogobrojnih načina dolaženja do jedinstvene martingalske mere koja je ekvivalentna u realnom svetu. Neki od drugih načina su korekcija martingalske mere u odnosu na srednju vrednost ([2], strana 79), minimalna martingalska mera (Esce and Schweizer 2005) itd.

Neka je $\tilde{P}$ rizik neutralna mera, proces $\tilde{L}$ Levijev proces koji reprezentuje kretanje nerizične aktive, a $(\tilde{b}, \tilde{a}, \tilde{\nu})$ Levijeva trojka za koju važi

$$L(t) = \tilde{b}t + \sqrt{\tilde{a}}\tilde{W}(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x(\mu^L - \tilde{\nu}^L)(ds, dx).$$

$\tilde{W}$ je $\tilde{P}$-Braunovo kretanje, dok je $\tilde{\nu}^L\tilde{P}$ kompenzator u odnosu na skok meru μ^L.

Može se pokazati (Eberlein, Papapantoleon and Shiryaev (2008)) da drift parametar $\tilde{b}$ uzima sledeći oblik

$$\tilde{b} = r - \frac{\tilde{a}}{2} - \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1 - x)\tilde{\nu}(dx), \tag{4.1}$$

gde je r nerizična stopa.

Pretpostavimo da su mere P i $\tilde{P}$ redom realna i rizik-neutralna mera sa trojkama (b, a, ν) i $(\tilde{b}, \tilde{a}, \tilde{\nu})$ i da su ekvivalentne. Na osnovu Girsanove teoreme ([1] strana 23) znamo da važi: $\tilde{a} = a$ i $\tilde{\nu} = Y\nu$ i

$$\tilde{b} = b + a\beta + x(Y-1) * \nu. \tag{4.2}$$

Sa druge strane, iz jednačine (4.1) imamo

$$\tilde{b} = r - \frac{\tilde{a}}{2} - (e^x - 1 - x) * \tilde{\nu}. \tag{4.3}$$

Izjednačavajući jednačine (4.2) i (4.3) dobijamo

$$b = r - a(\beta + \frac{1}{2}) - \big((e^x - 1)Y - x\big) * \nu. \tag{4.4}$$

Dakle, imamo jednu jednačinu i dve nepoznate, β i Y. Svaki par rešenja (β, Y) odgovara različitoj ekvivalentnoj martingalskoj meri što upravo objašnjava zašto je tržište nekompletno. Parametar β naziva se *tržišna cena za rizik*, dok Y nazivamo *tržišna cena za skok rizike.*

U nastavku navodim primere kompletnosti kod Braunovog kretanja i kod Poasonovog procesa a zatim i jedan jednostavni primer nekompletnosti i za te primere izvodim β i Y.

Primer 4.1. Pretpostavimo najpre da je ν=0. Najpoznatiji primer u tom slučaju je svakako Black-Scholes model gde cena akcije prati Braunovo kretanje $L(t) = bt + \sqrt{a}W(t)$, $S(t) = S(0)e^{L(t)}$. Jedinstveno rešenje jednačine (4.4) je

$$\beta = \frac{r-b}{a} - \frac{1}{2}.$$

Dakle, dobili smo jedinstvenu martingalsku meru što znači da je tržište jedinstveno.

Primer 4.2. Kao i kod Braunovog kretanja, i kod Poasonovog procesa dobijamo jedinstveno rešenje jednačine (4.4). Neka cena akcije prati Poasonov proces sa parametrom λ $L(t) = bt + \alpha N(t)$, gde je α veličina skoka i $\nu(dx) = \lambda 1_{\{\alpha\}}(dx)$. Dobija se jedinstveno rešenje

$$Y = \frac{r - b + \alpha\lambda}{(e^\alpha - 1)\lambda}.$$

Koristeći $\tilde{\lambda} = Y\lambda$ i prethodnu jednačinu u (4.2) dobija se

$$\tilde{b} = r - (e^\alpha - 1 - \alpha)\tilde{\lambda}.$$

Ako ujedinim ova dva primera u jedan model dobijam nekompletno tržište.

Primer 4.3. Pretpostavimo da cena akcije prati sledeći proces $L(t) = bt + \sqrt{a}W(t) + \alpha N(t)$. Na osnovu prethodna dva primera možemo zaključiti da je rešenje jednačine (4.4):

$$\beta_\epsilon = \epsilon\frac{r-b}{a} - \frac{1}{2} \qquad \text{i} \qquad Y_\epsilon = \frac{(1-\epsilon)(r-b) + \alpha\lambda}{(e^\alpha - 1)\lambda}.$$

Možemo primetitii da β_ϵ i Y_ϵ zadovoljavaju (4.4) za svako $\epsilon \in (0, 1)$. Upravo ovo nam ukazuje na nejedinstvenost martingalske mere i nekompletnost tržišta.

Pre nego što pređem na konkretne modele koji se primenjuju kod procena cena opcija, navešću način da se pomoću Furijeve ili Laplasove transformacije dođe do konkrentne cene opcije.

4.2 Laplasova transformacija kod utvrđivanja cena opcija

S obzirom da u uvodnom delu nisam definisala Furijeve redove i Laplasovu transformaciju, u prvom delu ovog poglavlja posvećujem se upravo ovim pojmovima. Oni će mi pomoći kasnije da izvedem eksplicitnu formulu za cenu kol opcije.

Definicija 4.2. *Laplasova transformacija* funkcije h definiše se na sledeći način

$$\mathfrak{L}_h(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zx} h(x) dx,$$

gde je $z \in \mathbb{C}$.

Definicija 4.3. Ako sa $H(z)$ označimo Laplasovu transformaciju funkcije h, *inverzna Laplasova transformacija* može se dobiti sledećom formulom

$$\mathfrak{L}^{-1}\{H(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{R-i\infty}^{R+i\infty} e^{zx} H(x) dx.$$

Teorema 4.1. *Laplasova transformacija konvolucije je jednaka proizvodu Laplasovih transformacija faktora.*

Dokaz. Neka su ϕ i ψ proizvoljne funkcije. Za funkciju $\varphi = \psi * \phi$ Laplasova transformacija ima oblik

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_\varphi(z) = \mathfrak{L}_{\psi*\phi}(z) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-zx} (\psi * \phi)(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-zx} \psi(x) dx \int_{\mathbb{R}} e^{-zx} \phi(x) dx \\
&= \mathfrak{L}_\psi(z) \mathfrak{L}_\phi(z).
\end{aligned}$$

□

Za razliku od Black-Scholes modela gde sam cenu opcije relativno lako izvela koristeći se uopštavanjem diskretnog modela, u ovom slučaju izvodim cenu opcije na, ne tako, očigledan način.

Neka je $C_T(S, K)$ cena kol opcije sa strajk cenom K i cenom podloge S u momentu T. Dalje, $g(S_T) = (S_T - K)^+$ je funkcija isplate pod nerizičnom merom P, sa istom merom definišem i Levijev proces L_T čija je funkcija gustine ρ. U većini slučaja funkcija gustine nije poznata tako da ću uvođenjem drugih funkcija svesti izračunavanje cene opcije na korišćenje onoga što je poznato, a to je najčešće karakteristična funkcija. U odsustvu arbitraže imamo sledeću formulu

$$\begin{aligned}
C_T(S, K) = e^{-rT} E\big(g(S_T)\big) &= e^{-rT} \int_{\Omega} g(S_T) dP \\
&= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} g(S_0 e^x) dP_{L_T}(x) = e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} g(S_0 e^x) \rho(x) dx.
\end{aligned}$$

Uvodim funkciju i promenljivu u oznakama $\pi(x) = g(e^{-x})$ i $\zeta = -\log S_0$. Sada je

$$g(S_0 e^x) = g(e^x e^{\log S_0}) = g(e^x e^{-\zeta}) = g(e^{-(\zeta - x)}) = \pi(\zeta - x)$$

i

$$C = C_T(S, K) = e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} \pi(\zeta - x)\rho(x)dx = e^{-rT}(\pi * \rho)(\zeta). \tag{4.5}$$

Najpre ću primeniti Laplasovu transformaciju na (4.5), a zatim inverznom Laplasovom transformacijom dobijamo cenu opcije u obliku koji je pogodan za analitička izračunavanja. Koristeći teoremu (4.1) dobijamo Laplasovu transformaciju cene opcije (4.5)

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_C(z) &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} e^{-zx}(\pi * \rho)(x)dx \\ &= e^{-rT}\mathfrak{L}_\pi(z)\mathfrak{L}_\rho(z).\end{aligned}$$

Ako je ϕ_{L_T} karakteristična funkcija Levijevog procesa L_T, može se lako izvesti sledeća jednakost

$$\phi_{L_T}(iR - u) = E(e^{i(iR-u)L}) = E(e^{-(R+iu)L}) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(R+iu)x}\rho(x)dx = \mathfrak{L}_\rho(R + iu). \tag{4.6}$$

Sada kada znamo oblik Laplasove transformacije cene opcije i na osnovu (4.6) možemo da izvedemo inverznu transformaciju cene opcije. Prema definiciji (4.2) dobija se

$$\begin{aligned}C_T(S, K) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{R-i\infty}^{R+i\infty} e^{\zeta z}\mathfrak{L}_C(z)dz \\ &= |\text{smena:} \quad z = R + iu| \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{\zeta(R+iu)}\mathfrak{L}_C(R + iu)du \\ &= \frac{e^{\zeta R}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{\zeta iu}e^{-rT}\mathfrak{L}_\pi(R + iu)\mathfrak{L}_\rho(R + iu)du \\ &= \frac{e^{-rT+\zeta R}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{\zeta iu}\mathfrak{L}_\pi(R + iu)\phi_{L_T}(iR - u)du.\end{aligned}$$

Odavde vidimo da cena opcije zavisi direktno od funkcije isplate i karakteristične funkcije Levijevog procesa koji prati kretanje cene podloge.

4.3 Popularni modeli

U ovom poglavlju baviću se popularnim modelima u matematici finansija koji se baziraju na Levijevim procesima. Kako sam u poglavlju (2) navela neke od klasa Levijevih procesa, tako ću sada definisati modele koji se koriste prethodno definisanim klasama. Black-Scholes modelu kao specijalnoj klasi Levijevog procesa posvetila sam čitavo poglavlje u kojem sam detaljno izvela i Black-Sholes formulu za dobijanje cene opcije. Ipak, ovde navodim ukratko osnovne osobine modela pa isto tako ponavljam i osobine Black-Scholes modela kao prvog koji se počeo upotrebljavati u finansijama.

Primer 4.4. Levijev proces oblika $L_t = \mu t + \sigma W_t$ jeste *Black-Scholes model* čija trajektorija prati normalnu slučajnu promenljivu $L : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sa funkcijom gustine

$$\varphi_L(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(- \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)$$

i karakterističnom funkcijom

$$\phi_L I(u) = \exp\big(i\mu u - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\big).$$

Levijeva trojka ovog modela je $(\mu, \sigma^2, 0)$.

Primer 4.5. *Gama model* je određen gama procesom čija je trajektorija gama slučajna promenljiva $X : Gamma(a, b)$ data funkcijom gustine

$$\varphi_x(x; a, b) = \frac{(xb)^a e^{-xb}}{x\Gamma(a)},$$

gde je $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt, a > 0$.

Karakteristična funkcija ima oblik

$$\phi_x(u; a, b) = \Big(1 - \frac{iu}{b}\Big)^{-a}.$$

Jasno, gama proces $\{X(t), t \geq 0\} : Gamma(at, b)$ je stohastički proces koji kreće od nule, sa stacionarnim i nezavisnim priraštajima koji su gama raspodeljeni. Levijeva trojka za gama proces data je sa $(\frac{a(1-e^{-b})}{b}, 0, ae^{-bx}x^{-1}1_{\{x>0\}}dx)$.

Primer 4.6. *Mertonov model.* Neka je L_t Levijev proces

$$L_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} J_k,$$

gde $J_k : \mathcal{N}(\mu_J, \sigma_J^2), k = 1, 2, ...$ Karakteristična funkcija Levijevog procesa za $k = 1$ je

$$\phi_L(u) = \exp\big(i\mu u - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \lambda(e^{i\mu_J u - \frac{\sigma_J^2 u^2}{2}} - 1)\big).$$

Kao što se može naslutiti Levijeva trojka je $(\mu, \sigma^2, \lambda \times \varphi_J)$, gde je φ_J funkcija gustine slučajne promenljive J. Očekivanje i disprezija ovog modela slede u nastavku

$$E(L) = \mu + \lambda\mu_J \qquad \text{i} \qquad Var(L) = \sigma^2 + \lambda\mu_J^2 + \lambda\sigma_J^2.$$

Primer 4.7. Model sličan Mertonovom modelu je *Kou model* koji je istog oblika kao prethodan primer ali različite funkcije gustine za J. .

$$L_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} J_k,$$

gde je $\varphi_J(x) = p\theta_1 e^{-\theta_1 x} 1_{\{x<0\}} + (p)\theta_2 e^{-\theta_2 x} 1_{\{x>0\}}$. Sada je karakteristična funkcija trajektorije Levijevog procesa L jednaka

$$\phi_L(u) = \exp\Big(i\mu u - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \lambda\Big(\frac{p\theta_1}{\theta_1 - iu} - \frac{(1-p)\theta_2}{\theta_2 + iu} - 1 \Big)\Big)$$

Levijeva trojka je ista kao kod prethodnog modela, dakle $(\mu, \sigma^2, \lambda \times \varphi_J)$, očekivanje i disperzija su

$$E(L) = \mu + \frac{\lambda p}{\theta_1} - \frac{\lambda(1-p)}{\theta_2} \qquad \text{i} \qquad Var(L) = \sigma^2 + \frac{\lambda p}{\theta_1^2} + \frac{\lambda(1-p)}{\theta_2^2}.$$

Da bih nastavila sa nabrajanjem modela najpre ću definisati Bezelove funkcije.

Definicija 4.4. Bezelove funkcije prve vrste $J_\nu(\vartheta)$, druge vrste $N_\nu(\vartheta)$i treće vrste $H_\nu^{(1)}(\vartheta)$ i $H_\nu^{(2)}(\vartheta)$ su rešenja diferencijalne jednačine:

$$\vartheta^2 \frac{d^2 w}{d\vartheta^2} + \vartheta \frac{dw}{d\vartheta} + (\vartheta^2 - \nu^2) w = 0.$$

Bezelova funkcija prve vrste je oblika

$$J_\nu(\vartheta) = \Big(\frac{\vartheta}{2}\Big)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{-\vartheta^2}{4})^k}{k!\Gamma(\nu + k + 1)},$$

druge vrste

$$N_\nu(\vartheta) = \frac{J_\nu(\vartheta) cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(\vartheta)}{sin(\nu\pi)}$$

i treće vrste

$$H_\nu^{(1)}(\vartheta) = J_\nu(\vartheta) + iN_\nu(\vartheta)$$
$$H_\nu^{(2)}(\vartheta) = J_\nu(\vartheta) - iN_\nu(\vartheta).$$

Primer 4.8. Prvo definišem slučajnu promenljivu sa *generalizovano hiperboličkom raspodelom.* Slučajna promenljiva $L : GH(\alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda)$ ima karakterističnu funkciju

$$\phi_{GH}(u) = e^{iu\mu} \Big(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + iu)^2} \Big)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2})}{K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})},$$

gde je K_λ Bezelova funkcija treće vrste sa indeksom λ. $\alpha > 0$ određuje oblik, β, $0 \le |\beta| < \alpha$ određuje asimetriju, $u \in \mathbb{R}$ je lokacija, $\delta > 0$ skalirajući parametar, dok $\lambda \in \mathbb{R}$ određuje težinu repa raspodele.

Levijev proces određen generalizovano hiberboličkom funkcijom predstavlja se u sledećem obliku

$$L_t = tE(L) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x(\mu^L - \nu^{GH})(ds, dx).$$

Levijeva trojka je $(E(L), 0, \nu^{GH})$, gde je

$$\nu^{GH}(x) = \frac{e^{\beta x}}{|x|} \Big(\int_0^\infty \frac{\exp(-\sqrt{2y + \alpha^2}|x|)}{\pi^2 y (J_{|\lambda|}^2(\delta\sqrt{2y}) + Y_{|\lambda|}^2(\delta\sqrt{2y})} dy + \lambda e^{-\alpha|x|} 1_{\{\lambda \ge 0\}} \Big),$$

gde su J_λ i Y_λ Bezelove funkcije prve i druge vrste sa indeksom λ. Speecijalne vrste GH funkcija, kao njene granične vrednosti su normalna, eksponencijalna, gama, normalna inverzna Gausova itd.

Primer 4.9. *Inverzna Gausova* slučajna promenljiva $X : IG(a,b)$ data je funkcijom gustine

$$\varphi_x(x;a,b) = \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}}\exp\Big(ab - \frac{1}{2}(a^2x^{-1} + b^2x)\Big),$$

dok su Levijeva mera i njena karakteristična funkcija date redom

$$\nu^{IG}(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}ax^{-\frac{3}{2}}\exp(-\frac{1}{2}b^2x)1_{\{x>0\}}$$

i

$$\phi_x(u;a,b) = \exp\big(-a(\sqrt{-2iu+b^2} - b)\big).$$

IG proces $\{X(t), t \geq 0\} : IG(at,b)$ je stohastički proces koji kreće od nule, sa stacionarnim i nezavisnim priraštajima koji su IG raspodeljeni.

Primer 4.10. *Normalna inverzna Gausova* slučajna promenljiva (NIG) ima još jedan parametar δ pored parametara koji karakterišu IG slučajnu promenljivu. Ako slučajna promenljiva ima NIG raspodelu $X : NIG(a,b,\delta)$ njena karakteristična funkcija izgleda

$$\phi_x(u;a,b) = \exp\big(-\delta(\sqrt{a^2-(b+iu)^2} - \sqrt{a^2-b^2})\big).$$

Ovaj model specijalan je slučaj GH (generalizovano hiberboličkog) modela za $\lambda = -\frac{1}{2}$. Slično kao i kod GH modela, Levijev proces određen NIG slučajnom promenljivom može se prikazati

$$L_t = tE(L) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x(\mu^L - \nu^{NIG})(ds,dx),$$

gde je Levijeva mera ν^{NIG} prikazana

$$\nu^{NIG}(x) = e^{\beta x}\frac{\delta\alpha}{\pi|x|}K_1(\alpha|x|).$$

Primer 4.11. Levijev proces oblika

$$L_t = tE(L) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x(\mu^L - \nu^{GGMY})(ds,dx)$$

naziva se $GGMY$ proces.

$$\phi_L(u) = \exp\Big(tC\Gamma(-Y)\big((M-iu)^Y + (G+iu)^Y - M^Y - G^Y\big)\Big)$$

je njegova karakteristična funkcija i

$$\nu^{GGMY}(x) = C\frac{e^{-Mx}}{x^{1+Y}}1_{\{x>0\}} + C\frac{e^{Gx}}{x^{1+Y}}1_{\{x<0\}}$$

je Levijeva mera i pri tom je $C > 0, G > 0, M > 0, Y < 2$.

5

Stohastička volatilnost u Levijevim modelima

Jedna od nedostataka Levijevih modela je činjenica da se volatilnost menja stohastički tokom vremena. Do sad nisam posmatrala volatilnost kao stohastički proces, međutim činjenica je da se faktori rizičnosti neprestano menjaju. Postoji više načina da se efekat volatilnosti uključi u modele predviđanja cena na finansijskom tržištu. Jedan od njih ću opisati u ovom poglavlju. Naime, ubrzavanjem ili usporavanjem protoka vremena ostvaruje se povećanje ili smanjivanje nesigurnosti koja se meri volatilnošću.

Visoka rizičnost povlači za sobom i veće prinose, pa samim tim vreme 'brže' protiče i obrnuto, sa manje rizika ostvarujemo ujedno i manje prihode i 'sporiji' protok vremena. Prinosi koji se u stohastičkom poslovnom vremenu ostvaruju za par dana, ostvariće se u uslovima povećane volatilnosti za jedan dan. U uslovima manje volatilnosti za jedan dan se ostvaruju prinosi koji bi se ostvarili za samo jedan deo tog dana u poslovnom vremenu.

Primena stohastičkog protoka vremena radi određivanja cene aktive datira još iz 1973. godine kada je cena aktive modelovana kao geometrijsko Braunovo kretanje koje je podržano od strane nezavisnog Levijevog subordinatora. Da bih predstavila teoriju, potrebno je da definišem posebnu klasu tzv. OU procesa.

5.1 OU procesi

Pre same definicije, ukratko ću navesti još jednu klasu Levijevih procesa čija osobina se podjednako koristi za opisivanje volatilnosti u finansijama.

Neka je ϕ karakteristična funkcija slučajne promenljive X. X je *samodekomponujuća* slučajna promenljiva ako

$$\phi(u) = \phi(cu)\phi_c(u),$$

za sve $u \in \mathbb{R}$ i $c \in (0,1)$ i za neku familiju karakterističnih funkcija $\{\phi_c : c \in (0,1)\}$.

Definicija 5.1. *OU (Ornstein-Uhlenbeck) procesi* se mogu predstaviti sledećom stohastičkom diferencijalnom jednačinom:

$$dy_t = -\lambda y_t d + dz_{\lambda_t}, \qquad y_0 > 0, \tag{5.1}$$

gde je z_t subordinator i u literaturi se može naći pod oznakom BDLP (Background Driving Levy Process).

Neka je D granična raspodela procesa $y = \{y_t, t \geq 0\}$. [1] D-OU proces je OU proces y čija je granična funkcija raspodele D.

Teorema 5.1. [2] *D-OU proces postoji ako i samo ako je D samodekomponujuća funkcija.*

Standardni rezultat za SDE (5.1) izgleda

$$\begin{aligned} y_t &= \exp(-\lambda t)y_0 + \int_0^t \exp(-\lambda(t-s))dz_{\lambda_t} \\ &= \exp(-\lambda t)y_0 + \exp(-\lambda t)\int_0^{\lambda_t} \exp(s)dz_s. \end{aligned}$$

Još jedna klasa Levijevog procesa je *integrabilni OU* proces koji se dobija, kao što i samo ime kaže, izračunavanjem integrala procesa y_t.

Definicija 5.2. Integrabilni OU proces $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ se dobija na sledeći način

$$\begin{aligned} Y_t &= \int_0^t y_s ds \\ &= \lambda^{-1}(1 - \exp(-\lambda t))y_0 + \lambda^{-1}\int_0^t (1 - \exp(-\lambda(t-s)))dz_{\lambda_s}. \end{aligned}$$

Ono što je interesantno za ove procese jeste da $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ ima neprekidne trajektorije dok procesi $z = \{z_t, t \geq 0\}$ i $y = \{y_t, t \geq 0\}$ imaju skokove.

Na kraju definicija navodim još jedno pravilo koje dovodi u direktnu vezu Levijevu gustinu $BDLP$ i funkcije D. Neka je Levijeva mera $BDLP$ u trenutku $t = 1$ $W(dx) = w(x)dx$, gde je $w(x)$ Levijeva gustina za $BDLP$ i $u(x)$ Levijeva gustina samodekompunujuće funkcije D. Tada je veza između u i w prikazana sledećom jednačinom

$$w(x) = -u(x) - xu'(x). \tag{5.2}$$

5.1.1 Gama-OU proces

Od ranije znamo da Gama proces ima Levijevu gustinu

$$u(x) = a\frac{e^{-bx}}{x}1_{\{x>0\}}.$$

Koristeći (5.2) BDLP z ima Levijevu gustinu

$$\begin{aligned} w(x) = -u(x) - xu'(x) &= -a\frac{e^{-bx}}{x}1_{\{x>0\}} - x\bigg(-ab\frac{e^{-bx}}{x}1_{\{x>0\}} - a\frac{e^{-bx}}{x^2}1_{\{x>0\}}\bigg) \\ &= abe^{-bx}1_{\{x>0\}}. \end{aligned}$$

[1] D je granična raspodela procesa y_t ako za svako t i početno y_0 D predstavlja funkciju raspodele te slučajne promenljive.

[2] Wim Schoutens, *Levy Processes in Finance*

Dalje, kumulativna funkcija je data sa

$$k(u) = \frac{-au}{b+u}.$$

Odavde se može zaključiti da je BDLP za Gama-OU proces složen Poasonov proces

$$z_t = \sum_{n=1}^{N_t} x_n,$$

gde je $N = \{N_t, t \geq 0\}$ Poasonov proces sa parametrom a, a $\{x_n, n = 1, 2, ...\}$ je nezavisan, jednako raspodeljen niz tako da važi $x_n : Gamma(1, b)$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

5.1.2 IG-OU proces

Levijeva gustina za $IG(a, b)$ proces je

$$u(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} a x^{-\frac{3}{2}} \exp(-\frac{1}{2} b^2 x) 1_{\{x>0\}}.$$

Na isti način kao za Gama proces možemo izračunati Levijevu gustinu za odgovarajući BDLP

$$w(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} a(x^{-1} + b^2) x^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2} b^2 x) 1_{\{x>0\}}.$$

Kumulativna funkcija data je

$$k(u) = -uab^{-1}(1 + 2ub^{-2})^{-\frac{1}{2}}.$$

Kao što se za BDLP Gama-OU procesa dalo zaključiti da je to složen Poasonov proces, tako se može primetiti i da se za IG-OU proces BDLP može prikazati kao zbir dva nezavisna Levijeva procesa $z = z^{(1)} + z^{(2)}$, gde je $z^{(1)}$ IG Levijev proces sa parametrom $\frac{a}{2}$ i b, a $z^{(2)}$ je oblika

$$z_t^{(2)} = b^{-2} \sum_{n=1}^{N_t} \nu_n^2,$$

gde je $N = \{N_t, t \geq 0\}$ Poasonov proces sa parametrom $\frac{ab}{2}$ i $\{\nu_n, n = 1, 2, ...\}$ je niz nezavisnih, jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih, gde svaka ν_n prati standardizovanu Normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0, 1)$ nezavisnu od Poasonovog procesa N.

5.2 Stohastička promena vremena

Jedan od načina uvođenja stohastičke volatilnosti je da se uvede sothastički parametar u Black-Scholes-ov model. Taj parametar volatilnosti može da prati Braunovo kretanje ili OU procese čiji je BDLP subordinator (takvi modeli nazivaju se BNS modeli nazvani po Barndorff-Nielsen i Shephard). Ono što je karakteristično za BNS modele jeste što su oni bez arbitraže ali nekompletni što znači da postoji više od jedne ekvivalentne martingalske mere.

Vraćam se na razlog uvođenja procesa opisanih u prethodnom odeljku. Naime, drugi način uključivanja stohastičke volatinosti u model jeste modelovanje vremena kao stohastičkog procesa. Da bi to uradili, potrebni su nam procesi koji će prikazati stopu po kojoj protiče vreme. Jedan od primera su upravo Gama-OU i IG-OU procesi.

Neka je $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ proces koji će modelovati naše poslovno vreme. To može između ostalog biti i integralni OU proces koji se pojavljuje kao rešenje SDE

$$dy_t = -\lambda y_t dt + dz_{\lambda_t},$$

gde je $z = \{z_t, t \geq 0\}$ specijalna klasa Levijevih procesa - subordinator. Ako sa t označimo kalendarsko vreme, poslovno vreme dobijamo rešavanjem integrala

$$Y_t = \int_0^t y_s ds.$$

U ulozi procesa $y = \{y_t, t \geq 0\}$ mogu se, kao što sam već napomenula, pojaviti i Gama-OU i IG-OU procesi.

Rizik-neutralan proces cena $S = \{S_t, t \geq 0\}$ modelujemo na sledeći način

$$S_t = S_0 \frac{\exp(rt)}{E\big(\exp(X_{Y_t})|y_0\big)} \exp(X_{Y_t}),$$

gde je $X = \{X_t, t \geq 0\}$ Levijev proces prikazan karakterističnom funkcijom

$$\phi_x(u) = \exp(t\eta(u)),$$

a $\eta(u)$ je karakteristični eksponent Levijevog procesa.

Neka je ϕ_Y karakteristična funkcija od Y_t, a $\phi = \phi_{\log S_t}$ karakteristična funkcija log-cene akcije.

$$\phi(u) = \exp(iu(rt + \log S_0)) \frac{\phi_Y(-i\eta(u))}{\phi_Y(-i\eta(-i))^{iu}}.$$

Pored volatilnosti, i ostale Levijeve karakteristike se mogu posmatrati kao stohastički procesi koji se menjaju u vremenu. Postoje dva načina da se uključi stohastičnost u Levijeve karakteristike $(\mu_t, \sigma_t^2, \nu_t)$. Neka je $X = \{X_t, t \geq 0\}$ Levijev proces, tada možemo koristiti jedan od sledeća dva postupka

1. Primena promene vremena $X_t \to X_{Y_t}, Y_t = \int_0^t y_s ds$. U ovom slučaju pretpostavili smo da su procesi stohastički, ali proporcionalni istom izvoru varijacije: y_s.

2. Ukoliko želimo da sve komponente variraju, ali da varijaju odvojeno, tada je neophodno da razbijemo proces na tri odvojena procesa. Potom primenjujemo različite promene u vremenu na različite Levijeve procese: X_t^1 sa Levijevom trojkom $(\mu, 0, 0)$, X_t^2 sa Levijevom trojkom $(0, \sigma^2, 0)$ i X_t^3 sa Levijevom trojkom $(0, 0, \nu)$.[3]

[3] *Applying stohastic time changes to Levy processes*, Liuren Wu

6

Primena Levijevih procesa u osiguranju

Stopa smrtnosti koja za sobom povlači rizik smrti kod životnog osiguranja može se modelovati nekim stohastičkim procesima. Rizik osiguranja ne može se eliminisati ili smanjiti povećanjem portfolia i primenom zakona velikih brojeva. Zato ću ovde opisati tehnike procene rizika, ali i cena ugovora koje su karakteristične za nekompletno tržište.

6.1 Principi premije

Kao što je u finansijama polazni problem bio utvrđivanje cene opcije, tako se u osiguranju ovaj problem bazira na ceni premije koju osiguravajuća kuća naplaćuje osiguranicama. Princip obračuna premije je funkcija koja svakom ugovoru H pripisuje određeni broj koji predstavlja *premiju*. Neki od primera su sledeći principi

1. *princip očekivane premije*
$$\tilde{u}_1(H) = E(H)(1+\theta),$$
gde je $\theta \geq 0$ poznat kao *faktor opterećenja premije*. Specijalan slučaj tzv. *neto premije* dobija se za $\theta = 0$, kada se dobija princip $\tilde{u}_1(H) = E(H)$.

2. *princip očekivane korisnosti*
$$u(C - \tilde{u}_2(H)) = E(u(C - H)),$$
dobija se rešavanjem ove jednačine gde je C početni kapital, a u funkcija korisnosti osiguravajuće kuće.

3. *princip varijanse*
$$\tilde{u}_3(H) = E(H) + aVar(H).$$

4. *princip standardne devijacije*
$$\tilde{u}_4(H) = E(H) + a\sqrt{Var(H)}.$$

5. *Ešerov princip*
$$\tilde{u}_5(H) = \frac{E(He^{aH})}{e^{aH}}.$$

Ograničavajući faktor kod prethodno nabrojanih principa jeste odsustvo tržišta. Za razliku od finansijskih tržišta gde se trgovina (relizacija derivata ili bilo koja druga transakcija na tržištu) može obaviti bilo kada od momenta zaključivanja ugovora do momenta isteka istog, kod ovakvih principa premija, premija se izračunava u momentu $t = 0$, dok u momentu $t = T$ osiguravač isplaćuje osiguraniku ugovorenu naknadu. Između ta dva perioda ne postoje nikakve transakcije. Najjednostavniji primer koji svedoči o nepodudaranju finansijskog tržišta i tržišta osiguranja jeste poređenje cene akcije i zahteva u vremenskom trenutku $t = T$. Neka su te dve cene jednake i iznose H. Tada se, primenom teorije o nepostojanju arbitraže, može lako doći do početne cene akcije u trenutku $t = 0$. Odmah se vidi da cena zahteva u istom početnom trenutku nije ista kao kod akcije. Naime, cena zahteva predstavlja jednu od principa premija. Iz ove činjenice čini se nemoguće povući paralelu između ova dva tržišta.

Međutim, ovaj problem može se prevazići stvaranjem novog iznosa naknade $H = (U_T + Y_T - K)^+$, gde je U_T agregatni iznos zahteva u periodu $[0, T]$, Y_T finansijski gubitak, a K nivo ograničavanja. Ovakvi ugovori poznati su kao *finansijski stop-loss* ugovori i oni kombinuju i finansijski i osiguravajući rizik pa na taj način stvaraju pokriće i za velike gubitke na osnovu osiguravajućih portfolia ali i gubitke na finansijskom tržištu. Primena aktuarskih principa za utvrđivanje premije potpuno zanemaruje mogućnost trgovine ovim ugovorima na finansijskom tržištu, a samim tim se umanjuje i finansijski rizik. Rešenje jeste kombinovanje ova dva različita pristupa primenom finansijskih transformacija na aktuarske principe premija.

Neka je H visina zahteva, a $\tilde{u}_1(H)$ i $\tilde{u}_2(H)$ princip varijanse i standardne devijacije redom. Modifikacije $\tilde{u}_1$ i $\tilde{u}_2$ mogu se izvesti uvođenjem slučajne promenljive $Y = -H$ koja se može posmatrati kao finalno bogatstvo u vremenskom trenutku T dobijeno prodajom zahteva H. Sada se dobija nova funkcija $u_i(Y) = -\tilde{u}_i, i = 1, 2$.

$$u_1(Y) = E(Y) + aVar(Y), \quad u_2(Y) = E(Y) + a\sqrt{Var(Y)}.$$

Funkcije $u_1(Y)$ i $u_2(Y)$ opisuju preference osiguravača. Za H i Y posmatramo kao diskontavane vrednosti zahteva i bogatstva retrospektivno. [1]

6.2 Stohastička stopa mortaliteta

Broj pojedinaca koji se osiguravaju označavamo sa n_x zato što je reč o pojedincima iste starosne dobi od x godina. Osiguravajuća kuća naplaćuje premije P, a za uzvrat, u slučaju smrti (govorimo o životnom osiguranju), isplaćuje iznos koji se predstavlja funkcijom $F_s = F(Y_s, N_s)$ u trenutku s. N_t predstavlja *broj umrlih* u trenutku t. Ideja je da se broj umrlih prikaže pomoću indikator promenljive, a da bi se to izvelo potrebno je da uvedem još jednu promenljivu a to je preostalo vreme preživljavanja $T_i, i = 1, ..., n_x$. Sa μ_t^x označiću intezitet procesa T_i u trenutku t za individuu starosti x u trenutku $t = 0$. μ_t^x predstavlja stopu mortaliteta koja je predvidivi proces u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{G}_t : t \geq 0\}$ takvu da važi $\int_0^t \mu_s^x ds < \infty$ i

$$P(T_i > t | \mathcal{G}_{T^*}) = e^{-\int_0^t \mu_s^x ds} \quad 0 \leq t \leq T^*.$$

[1] Thomas Moller, *Indifference Pricing of Insurance Contracts ina a Product Space Model*

Broj umrlih se može prikazati kao zbir indikator slučajnih promenljivih

$$N_t = \sum_{i=1}^{n_x} I(T_i \le t).$$

Verovatnoća da idividua sa $x+t$ godina prezivi do $x+s$-te godine označava se

$$_{s-t}p_{x+t} = E\Big(\exp(-\int_t^s \mu_u^x du)|\mathcal{G}_t\Big). \tag{6.1}$$

Dalje se pretpostavlja da je stopa mortalita μ_t^x zbir determinističkog dela $\mu_x(t)$ koji se dobija procenom parametara na osnovu demografskih podataka i slučajne promenljive Y_t koja predstavlja slučajan deo tabele smrtnosti

$$\mu_t^x = \mu_x(t) + Y_t$$

i

$$dY_t = a(b - Y_t)dt + \sigma dZ_t, \tag{6.2}$$

gde su a i b konstante i Z_t Levijev proces čijom se dekompozicijom dobija

$$Z_t = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} z J_z(dt, dz).$$

Iz prethodnog oblika se vidi da Z_t ne sadrži linearan i Braunov deo, tj. $b=0$ i $a=0$ tj. Z_t je subordinator. (videti iz definicije Levijevog procesa, glava (**??**)

Kada obe strane jednačine (6.2) pomnožimo sa e^{as} dobija se

$$-\sigma e^{as} dZ_s = a e^{as}(b - Y_s)ds - e^{as} dY_s. \tag{6.3}$$

Uvodim slučajnu promenljivu

$$\eta_s = e^{as}(b - Y_s) \tag{6.4}$$

pa se jednakost (6.3) svodi na

$$d\eta_s = a e^{as}(b - Y_s)ds - e^{as} dY_s = -\sigma e^{as} dZ_s.$$

Dalje dobijamo

$$\eta_s = \eta_t - \sigma \int_t^s e^{a\theta} dZ_\theta. \tag{6.5}$$

Iz jednačina (6.4) i (6.5) dobija se

$$\begin{aligned} Y_s = b - e^{-as}\eta_s &= b - e^{-as}\Big(\eta_t - \sigma \int_t^s e^{a\theta} dZ_\theta\Big) \\ &= b - e^{-as}\eta_t + \sigma \int_t^s e^{-a(s-\theta)} dZ_\theta \\ &= b - e^{-as}e^{at}(b - Y_t) + \sigma \int_t^s e^{-a(s-\theta)} dZ_\theta \\ &= \Big(1 - e^{-a(s-t)}\Big)b + e^{-a(s-t)}Y_t + \sigma \int_t^s e^{-a(s-\theta)} dZ_\theta. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Kada znamo kako proces Y_s može biti zapisan za sve $s > t$, i uzimajući u obzir dva dela stope mortaliteta, jednakost (6.1) sada izgleda

$$_{s-t}p_{x+t} = \underbrace{\exp\Big(-\int_t^s \mu_x(u)du\Big)}_{_{s-t}\tilde{p}_{x+t}} \underbrace{E\Big(\exp\Big(-\int_t^s Y_u du\Big)|\mathcal{G}_t\Big)}_{ADJ(t,s,Y_t)},$$

gde je $_{s-t}\tilde{p}_{x+t}$ verovatnoća preživljavanja povezana sa determinističkom stopom mortaliteta i $ADJ(t,s,Y_t)$ regulatorni faktor koji uzima u obzir buduće kretanje mortaliteta.

Sada na osnovu (6.6) možemo dalje izračunatai $\Lambda_{t,s} = \int_t^s Y_u du$

$$\begin{aligned}\int_t^s Y_u du &= \int_t^s bdu + (Y_t - b)\int_t^s e^{-a(u-t)}du + \sigma\int_t^s\Big(\int_t^s e^{-a(u-\theta)}du\Big)dZ_\theta\\ &= b(s-t) + \frac{1}{a}(Y_t - b)\Big(1 - e^{-a(s-t)}\Big) + \frac{\sigma}{a}\int_t^s \Big(1 - e^{-a(s-\theta)}\Big)dZ_\theta.\end{aligned}$$

Karakteristična funkcija procesa $\Lambda_{t,s}$ data je

$$\begin{aligned}E(\exp(iu\Lambda_{t,s})|\mathcal{F}_t) =&\exp\bigg(iu\Big(b(s-t) + (Y_t - b)\big(1 - e^{-a(s-t)}\big)\frac{1}{a}\Big)\bigg)\\ &E\bigg(\exp\Big(iu\frac{\sigma}{a}\int_t^s \big(1 - e^{-a(s-\theta)}\big)dZ_\theta\Big)|\mathcal{F}_t\bigg)\end{aligned} \tag{6.7}$$

Može se primetiti da je karakteristična funkcija procesa $\Lambda_{t,s}$ za $u = i$ jednaka sa $ADJ(t,s,Y_t)$ faktorom.

Definicija 6.1. *Kumulativna transformacija* subordinatora Z_t data je sa

$$k(\theta) = \log E(\exp(\theta Z)).$$

Može se pokazati da pri tom za svaku sa leve strane neprekidnu funkciju $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ važi

$$E\bigg(\exp\Big(\int_0^t f(\theta)dZ_\theta\Big)\bigg) = \exp\Big(\int_0^t k(f(\theta))d\theta\Big). \tag{6.8}$$

6.3 Temporalni α-stabilni subordinatori

Temporalno stabilni procesi dobijaju se deljenjem stabilnih procesa Levijevom merom sa neopadajućim eksponentom na obe polovine realne ose:

$$\nu(dx) = \frac{c_+e^{-\lambda_+x}}{x^{1+\alpha}}1_{x>0} + \frac{c_-e^{-\lambda_-x}}{x^{1+\alpha}}1_{x<0},$$

gde je $c_- > 0, c_+ > 0, \lambda_- > 0, \lambda_+ > 0$ i $0 < \alpha < 2$. [2]

Subordinatori. Rastući Levijev proces $\{\xi_t\}_{t\geq 0}$ sa osobinom $\xi_0 = 0$ je *subordinator* ako važe sledeće pretpostavke. ξ ima nula drift i Levijevu meru

$$\nu(dx) = g(x)dx, \quad x > 0,$$

gde je $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ i važi

[2] Jeremy Poirot, Peter Tankov, *Monte Carlo option pricing for tempered stable (GGMY) processes*

1. $g > 0$ i $\int_1^\infty g(x)dx < \infty$ i
2. postoji $g_0 \geq 0$ i $\zeta : [0,1] \to \mathbb{R}$ takvo da

$$g(x) = \frac{g_0}{x} + \zeta(x), \qquad \forall x \in [0,1] \quad \text{i} \quad \int_0^1 |\zeta(x)|dx < \infty.$$[3]

Ako sa T označim odgovarajući subordinator, onda je njegov Levijev simbol dat sa

$$\eta(u) = ibu + \int_0^\infty (e^{iux} - 1)\nu(dx).$$

Za subordinatore važi

$$E(e^{-uT(t)}) = \exp(t\Psi(u)),$$

gde je

$$\Psi(u) = -\eta(iu) = bu + \int_0^\infty (e^{-ux} - 1)\nu(dx)$$

i naziva se *Laplasov eksponent.*

Laplasov eksponent za Poasonov proces sa parametrom $c > 0$ je

$$\Psi(u) = c(1 - e^{-u}).$$

Kao što sam već spomenula u 2. glavi, Levijeva mera α-stabilnih subordinatora je

$$\nu(z) = \frac{c}{z^{\alpha+1}} 1_{z>0}, \quad \alpha \in [0,1).$$

Temporalno stabilni proces karakteriše mera koja se dobija deljenjem Levijeve mere stabilnog procesa sa neopadajućim eksponentom

$$\frac{ce^{-\lambda z}}{z^{1+\alpha}} 1_{z>0}, \quad \text{gde je } \alpha \in [0,1).$$

Na osnovu jednakosti (6.7) i (6.8) dobijamo

$$\begin{aligned} ADJ(t,s,Y_t) = E(\exp(-\Lambda_{t,s})|\mathcal{F}_t) =& \exp\Big(iu\Big(b(s-t) + (Y_t - b)\big(1 - e^{-a(s-t)}\big)\frac{1}{a}\Big)\Big) \\ & \exp\Big(\int_t^s k\Big(-\frac{\sigma}{a}\big(1 - e^{-a(s-\theta)}\big)\Big)d\theta\Big), \end{aligned}$$

gde je $k(.)$ kumulativna transformacija data jednačinom (6.8).

[3]Max-K. Von Renesse, Marc Yor, Lorenco Zambotti, *Quasi-Invariance Properties of a Class of Subordinators*

Da bih dobila tzv. standardni stabilni subordinator tj. subordinator sa indeksom $\alpha \in (0,1)$ najpre ću izvesti jednakost

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (1-e^{-ux})x^{-1-\alpha}dx &= -\int_0^\infty \bigg(\int_0^x ue^{-uy}dy\bigg)x^{-1-\alpha}dx \\ &= -\int_0^\infty \bigg(\int_y^\infty x^{-1-\alpha}dx\bigg)ue^{-uy}dy \\ &= \frac{u}{\alpha}\int_0^\infty e^{-uy}y^{-\alpha}dy = \frac{u^\alpha}{\alpha}\int_0^\infty e^{-x}x^{-\alpha}dx \\ &= \frac{u^\alpha}{\alpha}\Gamma(1-\alpha).\end{aligned}$$

Laplasov eksponent $\Psi(u) = u^\alpha$ sada je jednak

$$\Psi(u) = u^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty (1-e^{-ux})x^{-1-\alpha}dx.$$

Levijev subordinator $\{T(t), t \geq 0\}$ se može tumačiti kao vreme nastupanja prvog događaja za standardno Braunovo kretanje $\{B(t), t \geq 0\}$ na sledeći način

$$T(t) = \inf\bigg\{s > 0, B(s) = \frac{t}{\sqrt{2}}\bigg\}.$$

Zamenom Braunovog kretanja Gausovim procesom $C(t) = B(t) + \gamma t$ generišemo *inverzni Gausov subordinator* koji se tako zove jer generalizuje Gausov proces i ima oblik

$$T(t) = \inf\bigg\{s > 0, C(s) = \delta t\bigg\}, \delta > 0.$$

Za $\alpha = \frac{1}{2}$ subordinator se naziva inverzni Gausov proces čiji je faktor prilagođavanja sada jednak

$$\begin{aligned}ADJ(t,s,Y_t) =&\exp\bigg(-\Big(b(s-t) + (Y_t - b)\big(1-e^{-a(s-t)}\big)\frac{1}{a}\Big)\bigg) \\ &\exp\bigg(-2c\sqrt{\pi}\int_t^s \Big(\lambda + \frac{\sigma}{a}(1-e^{-a(s-\theta)})\Big)^{\frac{1}{2}}d\theta\bigg) \\ &\exp\big(2c\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda}(s-t)\big).\end{aligned}$$

Gama proces je subordinator koji se dobija za $\alpha = 0$, jer su njegovi priraštaji Gama slučajne promenljive. Neka je $\{T(t), t \geq 0\}$ Gama proces sa parametrima $c, \lambda > 0$, funkcijom gustine

$$\varphi_T(x) = \frac{\lambda^{ct}}{\Gamma(ct)}x^{ct-1}e^{-\lambda x}$$

i očekivanjem i varijansom

$$E(T) = \frac{ct}{\lambda} \qquad \text{i} \qquad Var(T) = \frac{ct}{\lambda^2}.$$

Faktor prilagođavanja (ADJ) sada je jednak

$$ADJ(t,s,Y_t) = \exp\Big(-\Big(b(s-t)+(Y_t-b)\big(1-e^{-a(s-t)}\big)\frac{1}{a}\Big)\Big)$$
$$\exp\Big(-c\int_t^s \log\Big(1+\frac{\sigma}{a\lambda}(1-e^{-a(s-\theta)})\Big)d\theta\Big).$$

Za Gama proces Laplasov eksponent izgleda[4]

$$\Psi(u) = \int_0^\infty (1-e^{-ux})ax^{-1}e^{-bx}dx.$$

6.4 Indiferentno određivanje cena

Pretpostavimo da osiguravajuća kuća raspolaže nekim bogatstvom W_s. Ovaj model bazira se na preferencama osiguravača, preciznije, on se zasniva na poređenju dve mogućnosti: ili će osiguravajuća kuća biti spremna na rizik, naplatiti određene premije i investirati na finansijskom tržištu ili će jednostavno zarađivati na bazi naplaćenih premija. Cena osiguranja će tada predstavljati premiju po kojoj je osiguravač indiferentan između ove dve opcije. Funkcija korisnosti osiguravača predstavlja se eksponencijalnom funkcijom korisnosti

$$U(W_s) = -\frac{1}{\rho}e^{-\rho W_s},$$

gde je ρ koeficijent averzije prema riziku. Koeficijent apsolutne averzije prema riziku $AR = -\frac{U''(w)}{U'(w)} = \rho$ je konstantan, dakle cena premije osiguranja ne zavisi od bogatstva osiguravajuće kuće.

Pretpostavimo da osiguravač može početno bogatstvo W_t u trenutku t uložiti po nerizičnoj stopi r do vremenskog trenutka s. To će značiti da u vremenskom trenutku s osiguravač raspolaže bogatstvom $W_s = W_t e^{r(s-t)}$ što se dobija kao rešenje jednačine

$$dW_t = rW_t dt.$$

Posmatrajmo sada vremenski interval $[t,s]$ tj. neka osiguravač počinje sa količinom bogatstva W_t a završava sa W_s. Onda će funkcija korisnosti izgledati

$$\begin{aligned} V_1(t,W_t) &= E(U(W_s)|\mathcal{F}_t) \\ &= -\frac{1}{\rho}\exp(-\rho W_t e^{r(s-t)}). \end{aligned}$$

Ovo je slučaj kada osiguravač ne prihvata nikakav rizik. Drugi slučaj odnosi si se na osiguranje n_x pojedinaca.

Sada je funkcija korisnosti

$$\begin{aligned} V_2(t,W_t',Y_t,N_t) &= E(U(W_s-F_s)|\mathcal{F}_s) \\ &= -\frac{1}{\rho}\exp(-\rho W_t' e^{r(s-t)})E(\exp(\rho F_s)|\mathcal{F}_t), \end{aligned} \tag{6.9}$$

[4] Jean Bertoin, *Subordinators: Examples and Applications*

gde je $W_t' = W_t + P$. Izraz (6.9) izračunava se pomoću dinamičkog programiranja i PDE.

Po izračunavanju V_2 indiferentna premija P se dobija izjednačavanjem ove dve funkcije korisnosti

$$V_1(t, W_t) = V_2(t, W_t + P).$$

Specijalno u slučaju jednog člana ($n_x = 1$) i pod pretpostavkom da on preživi do $x+s$-te godine, funkcija isplate F_s dobija se

$$F_s = (1 - N_s)K,$$

gde je K kapital u trenutku s, dok je očekivana korisnost člana

$$\begin{aligned} V_2(t, W_t + P, Y_t, 0) = & -\frac{1}{\rho}\exp\Big(-\rho e^{r(s-t)}(W_t + P)\Big) \\ & \Big(1 -_{s-t} p_{x+t}(1 - \exp(\rho K))\Big). \end{aligned}$$

Zaključak

Postoje brojni radovi i proučavanja u vezi procene kvaliteta predviđanja cena na finansijskom tržištu, gde bih izvodila konkretne modele kao što je Black-Scholes-ov i Levijev model i na osnovu različitih parametara izvodila poređenje njihove uspešnosti predviđanja. Kako je to tema sama po sebi složena i obimna, ovaj rad posvetila sam pre svega definicijama i objašnjenjima njihovih razlika i uvođenjem nove klase.

Prinosi finansijske aktive su rezultat kumuliranja velikog broja informacija i individualnih odluka. Rezultat Centralne Granične Teoreme jeste činjenica da suma velikog broja nezavisnih, jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih konačnih varijacija jeste normalno raspoređena slučajna promenljiva. Upravo ovo je glavni razlog korišćenja normalne slučajne promenljive kod određivanja cena opcije. Na kraju poglavlja (3.3) navodim nedostatke popularnog Black-Scholes modela među kojima je i debljina repova kod empirijske raspodele (raspodele koja se dobija statističkim metodama na osnovu istorijskih podataka). Prema shvatanju mnogih, jedan od razloga zašto je došlo do finansijske krize jeste činjenica da su se analitičari ograničili na Gausovske modele. Dakle, realnost nas navodi da se okrenemo drugim modelima koji će vernije prikazati stvarna kretanja na tržištu.

Dodatak

Matlab kod za sliku 2.1 (stabilne funkcije)

```
function p = stblpdf(x,alpha,beta,gam,delta,varargin)
% [1] J. P. Nolan (1997)
%     "Numerical Calculation of Stable Densities and Distribution
%     Functions"  Commun. Statist. - Stochastic Modles, 13(4), 759-774
% [2] G Samorodnitsky, MS Taqqu (1994)
%     "Stable non-Gaussian random processes: stochastic models with
%      infinite variance"  CRC Press

if nargin < 5
error('stblpdf:TooFewInputs','Requires at least five input arguments.');
end

if alpha <= 0 || alpha > 2 || ~isscalar(alpha)
error('stblpdf:BadInputs',' "alpha" must be a scalar which lies in the interval (0,2]
end

if abs(beta) > 1 || ~isscalar(beta)
error('stblpdf:BadInputs',' "beta" must be a scalar which lies in the interval [-1,1]
end

if gam < 0 || ~isscalar(gam)
error('stblpdf:BadInputs',' "gam" must be a non-negative scalar');
end

if ~isscalar(delta)
error('stblpdf:BadInputs',' "delta" must be a scalar');
end


quick = false;

tol = [];

for i=1:length(varargin)
   if strcmp(varargin{i},'quick')
```

```
        quick = true;
   elseif islogical(varargin{i})
        quick = varargin{end};
   elseif isscalar(varargin{i})
        tol = varargin{i};
   end
end

if isempty(tol)
    if quick
        tol = 1e-8;
    else
        tol = 1e-12;
    end
end

if alpha == 2
    x = (x - delta)/gam;
    p = 1/sqrt(4*pi) * exp( -.25 * x.^2 );
    p = p/gam;

elseif alpha==1 && beta == 0
    x = (x - delta)/gam;
    p = (1/pi) * 1./(1 + x.^2);
    p = p/gam; %rescale

elseif alpha == .5 && abs(beta) == 1
    x = (x - delta)/gam;
    p = zeros(size(x));
    if  beta ==1
        p( x <= 0 ) = 0;
        p( x > 0 ) = sqrt(1/(2*pi)) * exp(-.5./x(x>0)) ./...
                                                x(x>0).^1.5;
    else
        p(x >= 0) = 0;
        p(x < 0 ) = sqrt(1/(2*pi)) * exp(.5./x(x<0)  ) ./...
                                            ( -x(x<0) ).^1.5;
    end
    p = p/gam;

elseif abs(alpha - 1) > 1e-5
    xold = x;
    x = (x - delta)/gam - beta * tan(alpha*pi/2);
    p = zeros(size(x));
    zeta = - beta * tan(pi*alpha/2);
    theta0 = (1/alpha) * atan(beta*tan(pi*alpha/2));
    A1 = alpha*theta0;
    A2 = cos(A1)^(1/(alpha-1));
```

```
exp1 = alpha/(alpha-1);
alpham1 = alpha - 1;
c2 = alpha ./ (pi * abs(alpha - 1) * ( x(x>zeta) - zeta) );
V = @(theta) A2 * ( cos(theta) ./ sin( alpha*(theta + theta0) ) ).^exp1.*...
    cos( A1 + alpham1*theta ) ./ cos(theta);

if any(x > zeta)
    xshift = (x(x>zeta) - zeta) .^ exp1;
    if beta == -1 && alpha < 1
        p(x > zeta) = 0;
    elseif ~quick
        g = @(theta) xshift(:) .* V(theta) - 1;
        R = repmat([-theta0, pi/2 ],numel(xshift),1);
        if abs(beta) < 1
            theta2 = bisectionSolver(g,R,alpha);
        else
            theta2 = bisectionSolver(g,R,alpha,beta,xshift);
        end
        theta2 = reshape(theta2,size(xshift));
        theta2shift1 = 2*(theta2 + theta0);
        theta2shift2 = 2*(pi/2 - theta2);
        g1 = @(theta)  xshift .* ...
            V(theta2shift1 * theta - theta0);
        g2 = @(theta)  xshift .* ...
            V(theta2shift2 * (theta - .5) + theta2);
        zexpz = @(z) max(0,z .* exp(-z));
        p(x > zeta) = c2 .* ...
            (theta2shift1 .* quadv(@(theta) zexpz( g1(theta) ),...
                                  0 , .5, tol) ...
           + theta2shift2 .* quadv(@(theta) zexpz( g2(theta) ),...
                                 .5 , 1, tol) );

    else
        g = @(theta) xshift * V(theta);
        zexpz = @(z) max(0,z .* exp(-z));
        p( x > zeta ) = c2 .* quadv(@(theta) zexpz( g(theta) ),...
                                  -theta0 , pi/2, tol );
    end
    p(x > zeta) = p(x>zeta)/gam;
end
if any( abs(x - zeta) < 1e-8 )
    p( abs(x - zeta) < 1e-8 ) = max(0,gamma(1 + 1/alpha)*...
        cos(theta0)/(pi*(1 + zeta^2)^(1/(2*alpha))));
    p( abs(x - zeta) < 1e-8 ) = p( abs(x - zeta) < 1e-8 )/gam;
end
if any(x < zeta)
    p( x < zeta ) = stblpdf( -xold( x<zeta ),alpha,-beta,...
                    gam , -delta , tol , quick);
```

```
    end
else
    x = (x - (2/pi) * beta * gam * log(gam) - delta)/gam;
    piover2 = pi/2;
    twooverpi = 2/pi;
    oneoverb = 1/beta;
    theta0 = piover2;
    logV = @(theta) log(twooverpi * ((piover2 + beta *theta)./cos(theta))) + ...
                 ( oneoverb * (piover2 + beta *theta) .* tan(theta) );
    c2 = 1/(2*abs(beta));
    xterm = ( -pi*x/(2*beta));
    if ~quick
        logg = @(theta) xterm(:) + logV(theta) ;
        R = repmat([-theta0, pi/2 ],numel(xterm),1);
        theta2 = bisectionSolver(logg,R,1-beta);
        theta2 = reshape(theta2,size(xterm));
        theta2shift1 = 2*(theta2 + theta0);
        theta2shift2 = 2*(pi/2 - theta2);
        logg1 = @(theta)  xterm + ...
            logV(theta2shift1 * theta - theta0);
        logg2 = @(theta)  xterm + ...
            logV(theta2shift2 * (theta - .5) + theta2);
        zexpz = @(z) max(0,exp(z) .* exp(-exp(z)));
        p = c2 .* ...
            (theta2shift1 .* quadv(@(theta) zexpz( logg1(theta) ),...
                                    0 , .5, tol) ...
           + theta2shift2 .* quadv(@(theta) zexpz( logg2(theta) ),...
                                   .5 , 1, tol) );
    else
        logg = @(theta) xterm + logV(theta);
        zexpz = @(z) max(0,exp(z) .* exp(-exp(z)));
        p = c2 .* quadv(@(theta) zexpz( logg(theta) ),-theta0 , pi/2, tol );
    end
    p = p/gam;
    end
p = real(p);
end


function X = bisectionSolver(f,R,alpha,varargin)

if nargin < 2
    error('bisectionSolver:TooFewInputs','Requires at least two input arguments.');
end
noSolution = false(size(R,1));
tol = 1e-6;
maxiter = 30;
[N M] = size(R);
```

```
if M ~= 2
    error('bisectionSolver:BadInput',...
        '"R" must have 2 columns');
end
a = R(:,1);
b = R(:,2);
X = (a+b)/2;
try
    val = f(X);
catch ME
    error('bisectionSolver:BadInput',...
        'Input function inconsistint with rectangle dimension')
end

if size(val,1) ~= N
    error('bisectionSolver:BadInput',...
        'Output of function must be a column vector with dimension of input');
end
val = inf;
iter = 0;
while( max(abs(val)) > tol && iter < maxiter )
    X = (a + b)/2;
    val = f(X);
    l = (val > 0);
    if alpha > 1
        l = 1-l;
    end
    a = a.*l + X.*(1-l);
    b = X.*l + b.*(1-l);
    iter = iter + 1;
end

if any(noSolution)
    X(noSolution) = (R(1,1) + R(1,2))/2;
end
end
```

MATLAB kod za sliku 3.1 (normalna raspodela)

MATLAB ima funkcije koje na osnovu datih podataka aproksimiraju očekivanje i disperziju, a zatim na osnovu toga može se nacrtati i funkcija gustine.

```
mu=mean(data);
sg=std(data);
x=linspace(-5.5,5);
pdfx=1/sqrt(2*pi)/sg*exp(-(x-mu).^2/(2*sg^2));
plot(x,pdfx,'--');hold on;
```

```
kde(data,2^7,-6,6);
```

Funkcija `kde` daje Kernelovu aproksimaciju funkcije gustine.

```
function [bandwidth,density,xmesh,cdf]=kde(data,n,MIN,MAX)
data=data(:);
if nargin<2
    n=2^14;
end
n=2^ceil(log2(n));
if nargin<4
    minimum=min(data); maximum=max(data);
    Range=maximum-minimum;
    MIN=minimum-Range/10; MAX=maximum+Range/10;
end
R=MAX-MIN; dx=R/(n-1); xmesh=MIN+[0:dx:R]; N=length(unique(data));
initial_data=histc(data,xmesh)/N;  initial_data=initial_data/sum(initial_data);
a=dct1d(initial_data);
I=[1:n-1]'.^2; a2=(a(2:end)/2).^2;
try
    t_star=fzero(@(t)fixed_point(t,N,I,a2),[0,.1]);
catch
    t_star=.28*N^(-2/5);
end
a_t=a.*exp(-[0:n-1]'.^2*pi^2*t_star/2);
if (nargout>1)|(nargout==0)
    density=idct1d(a_t)/R;
end
bandwidth=sqrt(t_star)*R;
if nargout==0
    figure(1), plot(xmesh,density)
end
if nargout>3
    f=2*pi^2*sum(I.*a2.*exp(-I*pi^2*t_star));
    t_cdf=(sqrt(pi)*f*N)^(-2/3);    a_cdf=a.*exp(-[0:n-1]'.^2*pi^2*t_cdf/2);
    cdf=cumsum(idct1d(a_cdf))*(dx/R);
end

end

function  out=fixed_point(t,N,I,a2)
l=7;
f=2*pi^(2*l)*sum(I.^l.*a2.*exp(-I*pi^2*t));
for s=l-1:-1:2
    K0=prod([1:2:2*s-1])/sqrt(2*pi);  const=(1+(1/2)^(s+1/2))/3;
    time=(2*const*K0/N/f)^(2/(3+2*s));
    f=2*pi^(2*s)*sum(I.^s.*a2.*exp(-I*pi^2*time));
end
out=t-(2*N*sqrt(pi)*f)^(-2/5);
```

```
end

function out = idct1d(data)
[nrows,ncols]=size(data);
weights = nrows*exp(i*(0:nrows-1)*pi/(2*nrows)).';
data = real(ifft(weights.*data));
out = zeros(nrows,1);
out(1:2:nrows) = data(1:nrows/2);
out(2:2:nrows) = data(nrows:-1:nrows/2+1);
end

function data=dct1d(data)
[nrows,ncols]= size(data);
weight = [1;2*(exp(-i*(1:nrows-1)*pi/(2*nrows))).'];
data = [ data(1:2:end,:); data(end:-2:2,:) ];
data= real(weight.* fft(data));
end \footnote{\emph{www.mathworks.com}}
```

Matlab kod za sliku 3.2 (implicitna volatilnost)

```
sigma=0.25;
rho=0.0;
k=2;
r=0;
theta=0.4;
lamda=0;
smax=90;
vmax=1;
dt=0.001;
T=0.9630;
K=30;
m=30;
n=80;
ds=smax/m;
dv=vmax/n;
u=zeros(m+1,n+1,T/dt+1);
for i=1:m+1
for j=1:n+1
for t=T/dt+1
if (i-1)*ds<K
u(i,j,t)=0;
else
u(i,j,t)=(i-1)*ds-K;
end
end
end
```

```
end
for t=T/dt:-1:1
for i=2:m
u(i,1,t)=(1-k*theta*dt/dv)*u(i,1,t+1)+(k*theta*dt/dv)*u(i,1,t+1);
end
for i=2:m
for j=2:n
u(i,j,t)=dt*(u(i,j,t+1)*(1/dt-(j-1)*dv*((i-1)*ds)^2/(ds)^2-(j-1)*dv*sigma^2/(dv)^2-r)
end
end
for j=1:n
u(m+1,j,t)=u(m,j,t)+ds;
end
for i=2:m+1
u(i,n+1,t)=u(i,n,t);
end
end
F=zeros(m+1,1);
for i=1:m+1
F(i,1)=blsimpv((i-1)*ds,K,r,T,u(i,33,1));
end
i=1:m+1;
plot((i-1)*ds,F); \footnote{ Vassilis Galiotos, \emph{Stohastic Volatility and the Vo
```

Literatura

[1] Antonis Papapantoleon: An Introduction to Levy Processes. Vienna University of Technology, 2008.

[2] Wim Schoutens: Levy Processes in Finance. Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 2003.

[3] David Applebaum: Levy Processes and Stohastic Calculus. Cambridge University Press, 2009.

[4] Donatien Hainaut, Pierre Devolder: Mortality modelling with Levy processes. Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 2007.

[5] Luenberger, D. G.: Investment Science. Oxford University Press. New York, 1997.

[6] Sheldon M. Ross: Introduction to Probability Models Academic Press, 9th ed., 2007.

[7] Robert B.Cooper: Introdoction to Queueing Theory.

[8] Natacha Brouhns, Michel Denuit, Jeroen K. Vermunt:Measuring The Longevity Risk In Mortality Projections.

[9] Jeremy Poirot, Peter Tankov: Monte Carlo option pricing for tempered stable (GGMY) processes. Universiteit Paris.

[10] Szymon Borak, Wolfgang Hardle, Rafal Weron: Stable Distributions. Collaborative Research Center 649: Economic Risk, Himboldt University Berlin, 2005.

[11] Thomas Moller: Indifference Pricing of Insurance Contracts in a Product Space Model. University of Copenhagen, 2002.

[12] Max-K. Von Renesse, Marc Yor, Lorenco Zambotti: Quasi-Invariance Properties of a Class of Subordinators.

[13] Jean Bertoin: Subordinators: Examples and Applications, 1997.

[14] Liuren Wu: Applying stohastic time changes to Levy processes, Zicklin School of Business, Baruch College.

[15] Vassilis Galiotos: Stohastic Volatility and the Volatility Smile, Department of Mathematics, Uppsala University.

[16] *http://www.mathworks.com*

[17] *http://www.math.bu.edu*

[18] *http://faculty.chicagobooth.edu/ruey.tsay/teaching/fts/*

[19] Programski paket MATLAB 7.6.0 (R2008a)

Kratka biografija

Rođena sam 25. novembra 1989. u Novom Sadu. Završila sam Osnovnu školu *Kosta Trifković* u Novom Sadu, kao nosilac *Vukove diplome*, a zatim Srednju školu *Svetozar Miletić* u Novom Sadu, takođe kao nosilac *Vukove diplome*. 2008. godine sam upisala osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer primenjena matematika. Osnovne studije sam završila u julu 2011. godine sa prosečnom ocenom 9.60. Iste godine na istom fakultetu upisujem master studije primenjene matematike. Zaključno sa aprilskim ispitnim rokom 2013. godine, položila sam sve ispite sa prosečnom ocenom 9.64. Od decembra 2012. godine radim u IT sektoru Credit Agricole banke.

Novi Sad, septembar 2013. godine

Bojana Čobanov

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*
TD

Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*
TZ

Vrsta rada: *Master rad*
VR

Autor: *Bojana Čobanov*
AU

Mentor: *Dr Dora Seleši*
MN

Naslov rada: *Levijevi procesi u finansijama i osiguranju*
NR

Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP

Jezik izvoda: *srpski/engleski*
JI

Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*
ZP

Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP

Godina: *2013.*
GO

Izdavač: *Autorski reprint*
IZ

Mesto i adresa: *Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4*
MA

Fizički opis rada: *6 poglavlja / 57 strana / 19 lit.citata / 4 slike / 1 tabela*

FO

Naučna oblast: *Matematika*
NO

Naučna disciplina: *Finansijska i aktuarska matematika*
ND

Predmetna odrednica/ ključne reči: *Normalna raspodela, Levijev proces, Black-Scholes model, stohastička volatilnost, stabilni procesi, ekvivalentna martingalska mera, principi premije, stohastička stopa mortaliteta*
PO

UDK

Čuva se: *U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku*
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: *Tema ovog rada je primena Levijevih procesa u određivanju cene finansijskih derivata i premije životnog osiguranja. Na početku navodim definicije i objašnjenja osnovnih pojmova iz oblasti teorije mere, verovatnoće i stohastike. Drugo poglavlje posvećeno je Levijevim procesima. Drugi deo rada posvećen je primeni stohastičkih procesa u finansijama i osiguranju. Najpre definišem Black-Scholes model i navodim njegove nedostatke. Zatim izvodim formulu za cenu kol opcije pomoću Laplasove transformacije i navodim neke od modela koji se baziraju na Levijevim procesima. Kroz Levijev proces uveli smo skokove, ali smo u isto vreme uveli i stohastičku volatilnost. 6. glava odnosi se na primenu Levijevih procesa u osiguranju.*
IZ

Datum prihvatanja teme od NN veća: 12.04.2013.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: *Dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

Član: *Dr Sanja Rapajić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

Mentor: *Dr Dora Seleši, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: *Monograph publication*
DT

Type of record: *Textual printed material*
TR

Content code: *Master thesis*
CC

Author: *Bojana Čobanov*
AU

Mentor: *Dora Seleši, PhD*
MN

Title: *Levy process in finance and insurance*
TI

Language of text: *Serbian*
LT

Language of abstract: *Serbian (Latin)*
LA

Country of publication: *Republic of Serbia*
CP

Locality of publication: *Vojvodina*
LP

Publication year: *2013*
PY

Publisher: *Author's reprint*
PU

Publication place: *Novi Sad, Faculty of Science and Mathematics, Dositeja Obradovića 4*
PP

Physical description: *6 chapters / 57 pages / 19 references / 4 pictures / 1 table*
PD

Scientific field:: *Mathematics*
SF

Scientific discipline: *Financial and actuarial mathematics*
SD

Subject key words: *Normal distribution, Levy process, Black-Scholes model, stochastic volatility, stable processes, the equivalent martingale measure, premium principles, stochastic mortality*
SKW

UC

Holding data: *In library of Department of Mathematics and Informatics*
HD

Note
N

Abstract: *This paper is dedicated to application of Levy process in pricing financial derivatives and premium life insurance. Definitions and explanations of the basic terms from measure theory, probability and stochastic analysis are presented at the beginning. Second chapter is devoted to Levy process. Second part of the paper deals with application of stochastic processes in finance and insurance. First are defined Black-Scholes model and its imperfections. From Laplace transformation is given formula for call option and provided some of models that are based on Levy processes. Levy processes provides jumps, but also stochastic volatility. Applications in insurance is given at the end of the paper.*
AB

Accepted by the Scientific Board on: 12.04.2013
AS

Defended:
DE

Thesis Defend board:
DB

President: *Danijela Rajter-Ćirić, PhD, full professor at Faculty of Science in Novi Sad*

Member: *Sanja Rapajić, PhD, associate professor at Faculty of Science in Novi Sad*

Mentor: *Dora Seleši, PhD, associate professor at Faculty of Science in Novi Sad*