UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU

Teorija kredibiliteta sa zavisnim rizicima

- master rad -

Autor:
Bojana Bojić

Novi Sad, oktobar 2012.

Sadržaj:

Strana

Strana

Oznake i osnovni pojmovi

Jednakost u raspodeli ($=_d$):

Slučajne promenljive X i Y su jednake u raspodeli ako imaju istu raspodelu, odnosno ako je $P\{X \leq x\} = P\{Y \leq x\}$, za $\forall x$.

Poredak količnika verodostojnosti ($\preccurlyeq_{LR}$):

Neka su X i Y slučajne promenljive sa gustinama $f(t)$ i $g(t)$, takve da $\frac{g(t),}{f(t)}$ raste u uniji nosača promenljivih X i Y. Tada je X manje u smislu količnika verodostojnosti od Y.

Stohastička dominacija ($\preccurlyeq_{ST}$):

Slučajna promenljiva Y je stohastički dominantnija od slučajne promenljive X ako važi $P\{X > x\} \leq P\{Y > x\}$, za $\forall x \in \mathbb{R}$.

Poredak supermodularne zavisnosti ($\preccurlyeq_{SM}$):

Slučajni vektor $\boldsymbol{X}$ je manji od slučajnog vektora $\boldsymbol{Y}$ u smislu supermodularnog poređenja ako je $E\big(f(\boldsymbol{X})\big) \leq E\big(f(\boldsymbol{Y})\big)$ za sve supermodularne funkcije f takve da očekivanja postoje.

Funkcija $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ je supermodularna ako važi $f(x \vee y) + f(x \wedge y) \geq f(x + y)$, za $\forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

Definicija 1

Funkcija $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ koja zadovoljava uslove:

1) $P(\omega) = 1$ (normiranost)
2) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, za $\forall A_1, A_2, \ldots$ takve da je $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$

naziva se verovatnoća na $(\omega, \mathcal{F})$.

Definicija 2

Preslikavanje $X: \omega \to \mathbb{R}$ je slučajna promenljiva na prostoru $(\omega, \mathcal{F}, P)$ ako za svaki Borelov skup $S \in \mathcal{B}$ važi $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$, odnosno X je $\mathcal{F}$-merljivo.

Definicija 3

Familija $\{X(t), t \in I\}$ realnih slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoće $(\omega, \mathcal{F}, P)$ naziva se stohastički proces. Skup I se naziva skup parametara, a realni prostor $\mathbb{R}^d$ prostor stanja procesa.

Definicija 4

Niz slučajnih promenljivih sa istim skupom stanja $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$ je lanac Markova ako za proizvoljno $r \in \mathbb{N}$, $n > k_r > k_{r-1} > \cdots > k_2 > k_1$ važi

$$P\{X_n = x_n | X_{k_1} = x_1, X_{k_2} = x_2, \dots, X_{k_r} = x_r\} = P\{X_n = x_n | X_{k_r} = x_r\}$$

Drugim rečima, verovatnoća da se sistem nađe u stanju x_n u trenutku n zavisi samo od sadašnjeg trenutka k_r, a ne i od prošlosti.

Definicija 5

Frechetov prostor $\mathcal{R}_n(F_1, F_2, \dots, F_n)$ se sastoji od svih n-dimenzionalnih funkcija raspodele $F_{\boldsymbol{X}}$ slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$ koje imaju marginalne funkcije raspodele $F_1, F_2, \dots, F_n$, odnosno, $F_i(x) = P\{X_i \leq x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $i = 1,2, \dots, n$.

Definicija 6

n-dimenzionalni slučajni vektor $\boldsymbol{X}$ je komonoton (kontramonoton) ako i samo ako važi

$$(X_1, \dots, X_n) =_d \left(F_{X_1}^{-1}(U), \dots, F_{X_n}^{-1}(U)\right)$$

gde je U uniformno raspoređena slučajna promenljiva na jediničnom intervalu. Drugim rečima, slučajni vektor je je komonoton ako se slaže u raspodeli sa slučajnim vektorom kome su sve komponente neopadajuće (nerastuće).

Definicija 7

Podskup $\mathcal{S}$ od $\mathbb{R}^n$ nazivamo mrežom ako su za sve x i y u $\mathcal{S}$, $x \vee y$ i $x \wedge y$ takođe u $\mathcal{S}$.

Definicija 9

Neka je $f: X \to \mathbb{R}$ realna funkcija. Definišemo skup $\{x: f(x) \neq 0\}$, nosač funkcije, koji je zatvaranje skupa tačaka u kojima je funkcija različita od nule.

Cauchy - Schwarzova nejednakost:

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \geq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$$

Lipschitzov uslov:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, K \geq 0$$

Chapman - Kolmogorovljeve jednačine:

$$p_{i,j}(n+m) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(n) p_{k,j}(m), \quad \forall n, m \geq 0, \forall i, j$$

Gde $p_{i,k}(n)$ i $p_{k,j}(m)$ predstavljaju verovatnoće prelaska, odnosno verovatnoće da će proces, polazeći iz stanja i, stići u stanje j u $n + m$ prelaza, preko staze koja ga dovodi u međustanje k u n koraka.

Funkcija verodostojnosti:

$$L(\theta_1, \dots, \theta_p; x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} P\{X = x_i | \theta_1, \dots, \theta_p\} \\ \prod_{i=1}^{n} \varphi_X(x_i | \theta_1 \dots \theta_p) \end{cases}$$

Gde su $P\{X = x_i | \theta_1, \dots, \theta_p\}$ verovatnoće, u slučaju kada slučajna promenljiva ima diskretnu raspodelu, a $\varphi_X(x_i | \theta_1 \dots \theta_p)$ funkcije gustine kada slučajna promenljiva ima neprekidnu raspodelu.

Poissonova raspodela:

Slučajna promenljiva $X: \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, odnosno $P\{N = n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, $n = 0,1,2, \dots$

Eksponencijalna raspodela:

Slučajna promenljiva $X: \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$, odnosno $\varphi_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$.

Normalna raspodela:

Slučajna promenljiva $X: \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, odnosno $\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Lognormalna raspodela:

Slučajna promenljiva $X: log\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, odnosno $\varphi_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}}$, gde je $Z = \frac{\ln X - \mu}{\sigma} : \mathcal{N}(0,1)$.

Pareto raspodela:

Slučajna promenljiva $X: Par(\alpha, \theta)$, $\alpha, \theta > 0$, odnosno $\varphi_X(x) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}}$, $x \geq \theta$.

Gama raspodela:

Slučajna promenljiva $X: Gam\left(\alpha, \frac{1}{\theta}\right)$, odnosno $\varphi_X(x) = \frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha e^{-\frac{x}{\theta}}}{x\Gamma(\alpha)}$, $x \geq 0$, gde je $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$.

1. UVOD

Elementi osiguranja javljaju se još pre četiri milenijuma u Vavilonu, u vidu šteta vezanih za brodove. Ukoliko bi došlo do gubitka broda, vlasniku se nadoknađivala šteta, a ako brod stigne na destinaciju, vlasnik je bio dužan da isplati određeni deo dobiti. Pisani tragovi o osiguranju postoje i u Hamurabijevom zakonu iz 2250. godine p.n.e. u vidu uredbe o međusobnoj obavezi učesnika trgovačkog karavana da nadoknade štetu koja bi nastala u slučaju pljačke. Prva sačuvana polisa potiče iz XII veka. Iz perioda od XII do XV veka sačuvano je više od 400 polisa, ali u to vreme polisa osiguranja nije uvek bila garancija dobijanja nadoknade, naročito u slučaju gubitka broda. Prvi zakoni u ovoj oblasti donose se u XV veku. U XVII veku holandski državnik i matematičar Jan de Vitu postavio je matematičke osnove odredivanja životne rente. Dostignuća Newtona, Leibnitza i Pascala našla su veliku primenu u oblasti osiguranja. Engleska akademija nauka je krajem XVIII veka stvorila pretpostavke za razvoj modemog osiguranja.

Kao važan deo aktuarske matemaike, teorija kredibiliteta služi kao alat za izračunavanje premije na osnovu istorijskih podataka pri čemu se osiguranici dele u grupe u kojima se identifikuju rizici. Kako svaki osiguranik generiše niz broja zahteva, tema ovog rada je određivanje premije kada su ove slučajne promenljive međusobno zavisne, odnosno kada su grupe heterogene.

Moderne finansije i rizik u osiguranju su suočeni sa mnoštvom različitih faktora. Otuda je potreba za modelima zavisnosti izvan višedimenzionalne normalnosti postala ključna u mnogim aplikacijama.

Centralni korak u analizi rizika je konstrukcija statističkog modela koji prikazuje postojanje slučajnog faktora. Dugo se statističko modeliranje u aktuarskoj nauci i finansijama, u osnovi, zasnivalo na pojednostavljenim pretpostavkama. Normalna raspodela je dominirala u proučavanju višedimenzionalnih raspodela. Koristila se zbog njene matematičke upotrebe i lakoće korišćenja. U ovom slučaju, povezanosti između slučajnih ishoda je mogla biti u potpunosti opisana znajući samo marginalne raspodele i dodatni parametar kao što je koeficijent korelacije. Tokom godina, statistika je počela da prepoznaje potrebu za utvrđivanjem alternativa normalnoj raspodeli. Ovo je svakako korisno za aktuarske primere gde normalna raspodela ne obezbeđuje adekvatne aproksimacije za mnogo podataka (na primer, slučajne promenljive u životnom osiguranju ili kod zahteva za odštetu gde promenljive imaju velik rep).

Proučavanje pozitivne zavisnosti slučajnih promenljivih je dovelo do brojnih korisnih rezultata, kako u teoriji statistike, tako i u primeni. Zainteresovanost za primenu ovih koncepata u aktuarstvu je u skorije vreme povećana. Cilj je da se formalizuje pojam pozitivne zavisnosti koji postoji između rizika (odnosno. činjenica da su velike vrednosti jednog rizika uglavnom povezane sa velikim vrednostima drugih rizika).

Skoro do kraja XX veka teorija kredibiliteta je najviše bila skoncentrisana na uslovna očekivanja sa naglaskom na procese sa normalnom raspodelom i lineranom specifikacijom. Kretanjem van uslovnih očekivanja, sledeći korak je bio razmatranje uslovne varijanse, koja se naveliko razvila u finasijama. Međutim, najprirodnije je da se razmotri cela uslovna raspodela i niz prediktivnih raspodela. U tom pogledu, ispostavilo se da su konstrukcije uz pomoć kopula interesantne za aktuare.

U ovom radu su obrađeni Poissonovi modeli za učestalost zahteva. Ovi modeli ustvari, govore da slučajne promenljive koje predstavljaju broj podnetih zahteva od strane jednog osiguranika, imaju Poissonovu raspodelu. Ti modeli mogu biti statični (koji zanemaruje starost zahteva) i dinamični (kada uzmemo u obzir da se slučajni efekti, koji uzrokuju podnošenje zahteva, razvijaju tokom vremena). Kod dinamičnog Poissonovog kredibilnosnog modela predviđanje zahteva zavisi od kašnjenja između datuma predviđanja i datuma podnošenja zahteva. Oba ova modela daju vrlo dobre procene kada se radi o zahtevima za automobilske nesreće.

Takođe je obrađen i koncep zavisnosti - asociran rizik, koji je vrlo koristan za određivanje posledica mogućih zavisnosti iznosa premija. Odnosno, kažemo da su slučajne promenljive asocirane ukoliko važi da im je kovarijansa, od nekih neopadajućih funkcija, veća ili jednaka nuli. Asociranost primenjena na normalnu raspodelu je veoma dobar pokazatelj gubitka

Ono što čini osnovu teorije kredibiliteta jeste i mešovita raspodela. Zavisnost uz mešovitu raspodelu izaziva jaku pozitivnu zavisnost pod dodatnim predpostavkama za marginalne raspodele.

Još jedan model, koji je obrađen u radu je linearni kredibilnosti model. Odnosno, prošle opservacije podnetih zahteva su linaerne i kao takve se koriste u Buhlmanovom modelu za predviđanje budućih karakteristika zahteva.

2. Modeliranje zavisnosti

Ovo poglavlje se zasniva na modeliranju zavisnosti između nekoliko rizika korišćenjem koncepta kopula. Najznačajnije kod principa kopula je to da zajednička raspodela slučajnih promenljivih može biti izražena kao funkcija marginalnih funkcija raspodela.

Istorijski gledano, mnoge višedimenzionalne raspodele su se razvile kao neposredne ekstenzije jednodimenzionalnih raspodela, na primer, dvodimenzionalna Pareto, gama i druge. Mogući nedostaci ovih tipova raspodela su: to što je za svaku marginalnu raspodelu potrebna različita familija, kao i često pojavljivanje mera povezanosti kod marginalnih raspodela. Sledeća dva primera ilustruju ove činjenice.

Primer 2.1 (*Marshall - Olkinova dvodimenzionalna eksponencijalna raspodela*)

Pretpostavimo da imamo model od dve promenljive koje predstavljaju ostatak života za koje sumnjamo da su predmet zajedničke katastrofe ili „šoka“ koji može da izazove zavisnost između života. Pretpostavimo da su $\boldsymbol{Y_1}$ i $\boldsymbol{Y_2}$ dva nezavisna životna veka sa funkcijama gustine $\boldsymbol{H_1}$ i $\boldsymbol{H_2}$. Dalje, pretpostavimo da postoji nezavisna slučajna promenljiva $\boldsymbol{Z}: \boldsymbol{\mathcal{E}(\lambda)}$ koja predstavlja vreme do zajedničke katastrofe. Kako su oba života predmeti zajedničke katastrofe, vreme smrti odnosno promenljive $\boldsymbol{X_1}$ i $\boldsymbol{X_2}$ su date sa:

$$\boldsymbol{X_1 = min\{Y_1, Z\}} \text{ i } \boldsymbol{X_2 = min\{Y_2, Z\}}$$

Pretpostavimo sada da $\boldsymbol{Y_1}: \boldsymbol{\mathcal{E}(\lambda_1)}$ i $\boldsymbol{Y_2}: \boldsymbol{\mathcal{E}(\lambda_2)}$. Označimo sa $\boldsymbol{\overline{F}_1}$ i $\boldsymbol{\overline{F}_2}$ funkcije repa za slučajne promenljive $\boldsymbol{X_1}$ i $\boldsymbol{X_2}$. Očigledno je:

$$\boldsymbol{\overline{F}_1(x_1) = P\{Y_1 > x_1\}P\{Z > x_1\} = e^{-((\lambda+\lambda_1)x_1)}}$$

i

$$\boldsymbol{\overline{F}_2(x_2) = P\{Y_2 > x_2\}P\{Z > x_2\} = e^{-((\lambda+\lambda_2)x_2)}}$$

Dakle, $X_1: \mathcal{E}(\lambda + \lambda_1)$ i $X_2: \mathcal{E}(\lambda + \lambda_2)$. Primetimo da je zajednička funkcija repa para $X = (X_1, X_2)$ data sa

$$\begin{aligned}\overline{F}_X(x) &= P\{Y_1 > x_1, Y_2 > x_2, Z > max\{x_1, x_2\}\} \\ &= e^{-\lambda_1 x_1} e^{-\lambda_2 x_2} e^{-\lambda max\{x_1, x_2\}} \\ &= \overline{F_1}(x_1)\overline{F_2}(x_2) min\{e^{\lambda x_1} e^{\lambda x_2}\}\end{aligned}$$

pa je zajednička funkcija raspodele za $\boldsymbol{X}$:

$$F_X(\boldsymbol{x}) = F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1 + \overline{F_1}(x_1)\overline{F_2}(x_2)\, min\{e^{\lambda x_1} e^{\lambda x_2}\} \tag{2.1}$$

Ovaj primer ilustruje nedostatak koji je gore pomenut. Da bismo dobili dvodimenzionalnu raspodelu sa eksponencijalnim marginalnim raspodelama morali smo da izaberemo eksponencijalno raspoređene X_1, X_2 i Z. Ova konstrukcija se ne može lako izvesti sa drugim raspodelama kao što su lognormalne marginalne raspodele.

Zavisnost je ovde izazvana zajedničkim faktorom Z za obe promenljive X_1 i X_2. Jačina zavisnosti zavisi od parametra λ. Ovaj parametar se pojavljuje i u marginalnim i

u zajedničkim raspodelama, što njegovu interpolaciju čini još težom.

Primer 2.2 (*Dvodimenzionalna Pareto raspodela*)

Posmatrajmo odštetne zahteve, odnosno slučajnu promenljivu X koja je za dato $\mathbf{\Theta} = \theta$ raspoređena prema $\mathcal{E}(\theta)$ raspodeli.

Kao što je dobro poznato u teoriji kredibiliteta ako $\mathbf{\Theta}: Gam(\alpha, \lambda)$ tada X: $Par(\alpha, \lambda)$. Ovo važi i zbog:

$$F_X(x) = 1 - \int_0^{+\infty} e^{-\theta x} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda x} d\theta = 1 - \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}$$

Pretpostavimo uslovno, da su $\Theta = \theta$, $X_1: \mathcal{E}(\theta)$, $X_2: \mathcal{E}(\theta)$ nezavisne slučajne promenljive. Ako dele isti slučajni efekat postaju zavisne i zajednička funkcija raspodele za $X = (X_1, X_2)$ je dobijena na sledeći način:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - \overline{F}_{X_1}(x_1) - \overline{F}_{X_2}(x_2) + \overline{F}_X(x) \\ &= 1 - \left(1 + \frac{x_1}{\lambda}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{x_2}{\lambda}\right)^{-\alpha} + \int_0^{+\infty} e^{-\theta(x_1+x_2)} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda\theta} d\theta \\ &= 1 - \left(1 + \frac{x_1}{\lambda}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{x_2}{\lambda}\right)^{-\alpha} + \left(1 + \frac{x_1 + x_2}{\lambda}\right)^{-\alpha} \end{aligned}$$

pa je onda

$$F_X(x) = F_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) - 1 + \left(\left(\overline{F}_{X_1}(x_1)\right)^{-\frac{1}{\alpha}} + \left(\overline{F}_{X_2}(x_2)\right)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^{-\alpha} \quad (2.2)$$

Zavisnost je u ovom primeru uzrokovana zajedničkim modelom sa mešovitim raspodelama. U teoriji kredibiliteta ova konstrukcija je uobičajeni primer za računanje rezidualne heterogenosti.

Primer 2.2. ističe neke nedostatke direktne konstrukcije višedimenzionalnih raspodela. Nije jasno da li možemo generisati dvodimenzionalne raspodele sa bilo kojim marginalnim raspodelama na ovaj način, na primer eksponencijalne marginalne raspodele se ne mogu dobiti preko zajedničkih mešovitih raspodela. Višedimenzionalne ekstenzije su jednostavne. Zavisnost je prouzrokovana sa $\mathbf{\Theta}$, a jačina se kontroliše sa α, koje se pojavljuje i u marginalnim i u zajedničkoj raspodeli.

Konstrukcija višedimenzionalnih raspodela zasnovana na kopulama ne podleže malopre pomenutim manama. Korišćenje kopula kao osnov za konstrukciju višedimenzionalnih modela je mnogo fleksibilnije jer nema restrikcija na marginalnim raspodelama. Sa kopulama definisanim u Sklarovoj teoremi, biramo različite marginalne raspodele za svaki ishod. Na primer, ukoliko radimo sa dvodimenzionalnim ishodom povezanim sa gubitkom i troškovima povezanim sa administriranjem imovine i uobičajenim odštetnim zahtevima, mogli bismo da koristimo lognormalnu raspodelu za zahteve sa raspodelama sa dugačkim repom (kao što je Pareto) za gubitke vezane za zahteve. Tada je dovoljno da ubacimo ove marginale u pogodnu kopulu kako bismo dobili dvodvodimenzionalnu raspodelu. Dakle, konstrukcija kopulama ne ograničava izbor marginalnih raspodela.

Iako su kopule posebno korisne pri modeliranju zavisnosti između neprekidnih slučajnih promenljivih, to nije slučaj kada se radi o njihovoj primeni na diskretnim slučajnim promenljivama. U ovom poglavlju ćemo pretpostaviti da su sve slučajne promenljive neprekidne, osim ako nije striktno navedeno drugačije.

2.1. SKLAROVA TEOREMA

2.1.1. KOPULE

Ukoliko imamo datu dvodimenzionalnu funkciju raspodele $F_{\boldsymbol{X}}$ sa jednodimenzionalnim marginalnim funkcijama raspodele F_1 i F_2 možemo povezati tri broja sa svakim parom realnih brojeva $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$: $F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$ i $F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$. Naravno, svaki od ovih brojeva leži u jediničnom intervalu $[0,1]$. Drugim rečima, svaki par x realnih brojeva vodi do tačke $\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big)$ u jediničnom kvadratu i ovaj par odgovara broju $F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ u $[0,1]$. Videćemo da ovo pridruživanje koje dodeljuje vrednost zajedničke funkije raspodele svakom paru vrednosti pojedinačnih funkcija raspodele zaista jeste funkcija. Takve funkcije nazivamo kopule.

Reč kopula je prvi put, u statističkom smislu, uveo Sklar (1959) u teoremi koja sada nosi njegovo ime. Osnovna ideja je bila da se podeli zajednička funkcija raspodele na deo koji opisuje zavisna struktura (kopula) i delove koji opisuju samo ponašanje marginalnih raspodela. Jednostavno rečeno, kopula je funkcija koja povezuje višedimenzionalnu funkciju raspodele sa njenim jednodimenzionalnim marginalnim raspodelama.

Definišimo sada pojam kopule u dvodimenzionalnom slučaju. U suštini, kopula je zajednička funkcija raspodele za dvodimenzionalni slučajni vektor sa marginalnim $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$ raspodelama.

Definicija 2.1.1.1

Dvodimenzionalna kopula C je funkcija koja preslikava jedinični kvadrat $[0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$ u jedinični interval $[0,1]$ koji je neopadajući, neprekidan na desnoj strani i zadovoljava sledeće uslove:

1) $\lim_{u_i \to 0} C(u_1, u_2) = 0$ za $i = 1,2$
2) $\lim_{u_1 \to 1} C(u_1, u_2) = u_2$ i $\lim_{u_2 \to 1} C(u_1, u_2) = u_1$
3) C je supemodularno, odnosno nejednakost

$$C(v_1, v_2) - C(u_1, v_2) - C(v_1, u_2) + C(u_1, u_2) \geq 0$$

   važi za bilo koje $u_1 \leq v_1$ i $u_2 \leq v_2$.

2.1.2. SKLAROVA TEOREMA ZA NEPREKIDNE MARGINALNE RASPODELE

Sklarova teorema je centralna u teoriji kopula i osnova je većini aplikacija. Takođe, razjašnjava koju ulogu imaju kopule u odnosu između višedimenzionalnih funkcija raspodele i njihovih jednodimenzionalnih marginalnih raspodela.

Prvo ćemo definisati pomoćna tvrđenja koja će nam biti potrebna kako bismo dokazali Sklarovu teroemu.

Lema 2.1.2.1

Za bilo koji realan broj x i verovatnoću p, važi:

1) ${F_X}^{-1}(p) \leq x \quad <=> \quad p \leq F_X(x)$
2) $x \leq F_X^{-1}(p) \quad <=> \quad P\{X < x\} = F_X(x) \leq p$

Lema 2.1.2.2

Ako slučajna promenljiva X ima neprekidnu funkciju raspodele $F_X(x)$ onda $F_X(x): \mathcal{U}(0,1)$.

Dokaz:

Sledi iz leme 2.1.2.1.(1), za $\forall\ 0 < u < 1$:

$$P\{F_X(x) \geq u\} = P\{X \geq {F_X}^{-1}(u)\} = \overline{F}_X\left({F_X}^{-1}(u)\right) = 1 - u$$

Pa odavde sledi da $F_X(x): \mathcal{U}(0,1)$.

Teorema 2.1.2.3 (Sklarova teorema)

Neka $F_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ ima neprekidne marginalne funkcije raspodele F_1 i F_2. Tada postoji jedinstvena kopula C takva da za $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$ važi:

$$F_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) = C\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big) \tag{2.3}$$

Obrnuto, ako je C kopula i F_1 i F_2 funkcije raspodele, onda je funkcija $F_{\boldsymbol{X}}$ definisana sa (2.3), dvodimenzionalna funkcija raspodele sa marginalnim raspodelama F_1 i F_2.

Dokaz:

Pošto su F_i neprekidne, iz leme 2.1.2.2 sledi da obe funkcije $F_1(X_1)$ i $F_2(X_2)$ imaju $\mathcal{U}(0,1)$. Neka je C zajednička funkcija raspodele para $\big(F_1(X_1), F_2(X_2)\big)$ odnosno,

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= P\{F_1(X_1) \leq u_1, F_2(X_2) \leq u_2\} \\ &= P\{X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), X_2 \leq F_2^{-1}(u_2)\} \\ &= F_X(F_1^{-1}(u_1),) \end{aligned}$$

Tada (2.3) važi:

$$\begin{aligned} F_X(x_1, x_2) &= P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} \\ &= P\{F_1(X_1) \leq F_1(x_1), F_2(X_2) \leq F_2(x_2)\} \\ &= C\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big) \end{aligned}$$

■

Iz (2.3) možemo videti da C „vezuje“ marginalne funkcije raspodele F_1 i F_2 sa zajedničkom raspodelom $F_{\boldsymbol{X}}$ para $\boldsymbol{X}$. Zavisnost je u potpunosti opisana sa C i odvojena je od marginalnih raspodela F_1 i F_2. Odavde sledi da je način po kom se X_1 i X_2 “kreću“ zajedno obuhvaćen kopulom, bez obzira na skalu po kojoj se promenljive mere.

Kako je već istaknuto, fokus u ovom poglavlju je matematički lako obradiv slučaj u kom su sve F_i neprekidne. Dokaz Sklarove dekompozicije u opštem slučaju dat je u teoremi 2.1.5.5.

Slučajne promenljive $F_1(X_1)$ i, $F_2(X_2)$ se često nazivaju rangovi od X_1 i X_2, čime je kopula zajednička funkcija rangova.

Napomena:

Primetimo da smo u teoremi 2.1.2.3 dobili izraz za kopulu C u jednakosti (2.3), kada su marginalni neprekidni, odnosno

$$C(u) = F_X\left(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)\right), \boldsymbol{u} \in [0,1]^2 \qquad (2.4)$$

Sada ćemo dati nekoliko elementarnih primera koji ilustruju dekompoziciju (2.3).

Primer 2.1.2.4 (*Nezavisna kopula C_I*)

Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne promenljive sa funkcijama raspodele F_1 i F_2. Njihova zajednička funkcija raspodele je data sa $F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = F_1(x_1)F_2(x_2)$, pa je kopula koja podleže ovoj strukturi

$$C_I(u_1, u_2) = u_1 u_2, \ \boldsymbol{u} \in [0,1]^2$$

Ovo se obično naziva nezavisna kopula i prikazana je na slici 2.1 (b). Takođe, odgovara konstantnoj funkciji raspodele jednakoj 1 na jediničnom kvadratu.
Ukoliko X_1 i X_2 zadovoljavaju uslov (2.3) tada su one nezavisne ako i samo ako je $C \equiv C_I$.

Primer 2.1.2.5 (*Frechetova gornje granična kopula C_U*)

Frechetova gornje granična kopula se označava sa C_U i važi

$$C_U(u_1, u_2) = min\{u_1, u_2\}, \boldsymbol{u} \in [0,1]^2$$

Ova kopula je predstavljena na slici 2.1 (a). Frechetova gornje granična kopula predstavlja jedinično masovno širenje nad glavnom dijagonalom $u_1 = u_2$ jediničnog kvadrata.

Ukoliko X_1 i X_2 zadovaljavaju uslov (2.3) tada je X_2 neopadajuća funkcija od X_1 ako i samo ako je $C \equiv C_U$. Dakle, par (X_1, X_2) je komonoton ako i samo ako je $C \equiv C_U$.

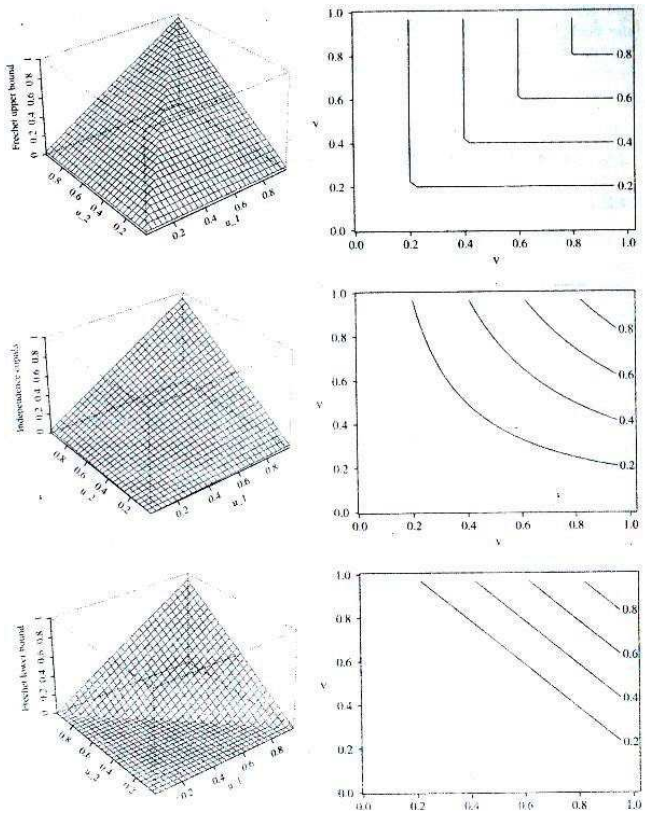
Primer 2.1.2.6 (*Frechetova donje granična kopula C_L*)

Frechetova donje granična kopula C_L je

$$C_L(u_1, u_2) = max\{0, u_{1+}u_{2-1}\}, \boldsymbol{u} \in [0,1]^2$$

Na slici 2.1 (c) je predstavljena ova kopula. Ovaj tip kopule predstavlja jedinično masovno širenje nad sporednom dijagonalom $u_1 = 1 - u_2$ jediničnog kvadrata.

Ako X_1 i X_2 zadovoljavaju funkciju raspodele (2.3) onda je X_2 nerastuća funkcija od X_1 ako i samo ako je $C \equiv C_L$. Dakle, par (X_1, X_2) je kontramonoton ako i samo ako je $C \equiv C_L$.



Slika 2.1. *Frechetova gornje granična kopula C_U, Nezavisna kopula C_I, Frechetova donje granična kopula C_L,*

Kako su kopule dvodimenzionalne funkcije raspodele sa jediničnim uniformnim marginalnim raspodelama, znamo da nejednakost

$$C_L(u_1, u_2) \leq C(u_1, u_2) \leq C_U(u_1, u_2), \text{ za } \forall \boldsymbol{u} \in [0,1]^2$$

važi za svaku kopulu C. Odavde sledi da je grafik svake kopule ograničen od dole sa dva trougla koji zajedno čine površ od C_L, a od gore sa dva trougla koji čine površ od C_U.

Primer 2.1.2.7 (*Dvodimenzionalna Pareto kopula*)

Za ilustraciju ćemo koristiti dvodimenzionalnu Pareto raspodelu opisanu u primeru 2.1.2. imajući u vidu izraz (2.2) za zajedničku funkciju raspodele, vidimo da je odgovarajuća kopula:

$$C(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + \left((1-u_1)^{-\frac{1}{\alpha}} + (1-u_2)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^{-\alpha}, \boldsymbol{u} \in [0,1]^2$$

Primer 2.1.2.8 (*Marshall - Olkinova dvodimenzionalna eksponencijalna raspodela*)

Vratimo se na dvodimenzionalnu Marshall - Olkinovu raspodelu spomenutu u primeru 2.1 i definisanu zajedničku funkciju raspodele (2.1). Odgovarajuću kopulu nije moguće direktno videti. Pa kako bismo pronašli tačan izraz, zapisaćemo zajedničku funkciju repa na sledeći način:

$$\overline{F}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \overline{F}_1(x_1)\overline{F}_2(x_2)min\left\{\left(\overline{F}_1(x_1)\right)^{-\frac{\lambda}{\lambda_1+\lambda}}, \left(\overline{F}_2(x_2)\right)^{-\frac{\lambda}{\lambda_2+\lambda}}\right\}$$
$$= min\left\{\overline{F}_2(x_2)\left(\overline{F}_1(x_1)\right)^{1-\frac{\lambda}{\lambda_1+\lambda}}, \overline{F}_1(x_1)\left(\overline{F}_2(x_2)\right)^{-\frac{\lambda}{\lambda_2+\lambda}}\right\}$$

Pa jednakost (2.3) iz Sklarove teoreme za

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = 1 - \overline{F}_1(x_1) - \overline{F}_2(x_2) + \overline{F}_X(x) = C\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big)$$

važi u (2.1) sa

$$C(u_1, u_2) = 1 - (1 - u_1) - (1 - u_2) + min\{(1 - u_2)(1 - u_1)^{1-\alpha_1}, (1 - u_1)(1 - u_2)^{1-\alpha_2}\}$$

gde je $\boldsymbol{u} \in [0,1]^2$, $\alpha_1 = \frac{\lambda}{\lambda_1+\lambda}$ i $\alpha_2 = \frac{\lambda}{\lambda_2+\lambda}$.

2.1.3. USLOVNE RASPODELE DOBIJENE IZ KOPULA

Uslovne raspodele mogu biti izvedene iz izraza (2.3). Zbog toga, treba da pokažemo da parcijalni izvodi $\frac{\partial}{\partial u_1}C$ i $\frac{\partial}{\partial u_2}C$ kopule C postoje. Prvo ćemo dokazati lemu koja će nam biti potrebna iz više tehničkih razloga.

Lema 2.1.3.1

Neka je $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ sa nosačem $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$. Neka su x_1 i x_2 u $\mathcal{S}_1$ i važi $x_1 \leq x_2$, a neka su y_1 i y_2 u $\mathcal{S}_2$ i važi $y_1 \leq y_2$. Tada je funkcija koja preslikava $t \to F_{\boldsymbol{X}}(t, y_2) - F_{\boldsymbol{X}}(t, y_1)$ neopadajuća na $\mathcal{S}_1$ a funkcija $t \to F_{\boldsymbol{X}}(x_2, t) - F_{\boldsymbol{X}}(x_1, t)$ je neopadajuća na $\mathcal{S}_2$.

Dokaz:

Neka je $t_1 \leq t_2 \in \mathcal{S}_1$, tada važi

$$\big(F_{\boldsymbol{X}}(t_2, y_2) - F_{\boldsymbol{X}}(t_2, y_1)\big) - \big(F_{\boldsymbol{X}}(t_1, y_2) - F_{\boldsymbol{X}}(t_1, y_1)\big) = P\{\boldsymbol{X} \in (t_1, t_2] \times (y_1, y_2]\} \geq 0$$ ■

Sledeća teorema dokazuje neprekidnost kopula preko Lipschitzovog uslova.

Teorema2.1.3.2

Neka su $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$. Tada važi

$$|C(u_1, u_2) - C(v_1, v_2)| \leq |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|$$

Odavde sledi da je C uniformno neprekidna na $[0,1]^2$.

Dokaz:

Pokažimo da za dato $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ sa nosačem $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ i za bilo koje tačke x i y iz $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ važi nejednakost

$$|F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}) - F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})| \leq |F_1(y_1) - F_1(x_1)| + |F_2(y_2) - F_2(x_2)| \qquad (2.5)$$

Iz nejednakosti trougla imamo

$$|F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}) - F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})| \leq |F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}) - F_{\boldsymbol{X}}(x_1, y_2)| + |F_{\boldsymbol{X}}(x_1, y_2) - F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})|$$

Pretpostavimo sada da je $x_1 \leq y_1$, pa iz leme 2.1.3.1 dobijamo

$$0 \leq F_X(y) - F_X(x_1, y_2) \leq \lim_{y_2 \to +\infty} \big(F_X(y) - F_X(x_1, y_2)\big) = F_1(y_1) - F_1(x_1)$$

Analogno, važi i za $y_1 \leq x_1$.

Pa odavde dobijamo da za $\forall x_1, y_1 \in \mathcal{S}_1$ važi

$$|F_X(y) - F_X(x_1, y_2)| \leq |F_1(y_1) - F_1(x_1)|$$

Slično, za $\forall x_2, y_2 \in \mathcal{S}_2$ važi

$$|F_X(x_1, y_2) - F_X(x)| \leq |F_2(y_2) - F_2(x_2)|$$

Iz poslednje dve nejednakosti i nejednakosti trougla dobijamo da izraz (2.5) važi. ■

Sledeća teorema je direktna posledica leme 2.1.3.1 i teoreme 2.1.3.2.

Posledica 2.1.3.3

Neka je C kopula i u_0 bilo koji broj iz [0,1]. Tada važi:

1) Horizontalni deo kopule C u u_0 je funkcija iz [0,1] → [0,1] data sa $t \to C(t, u_0)$.
2) Vertikalni deo kopule C u u_0 je funkcija iz [0,1] → [0,1] data sa $t \to C(u_0, t)$.
3) Dijagonalni deo kopule C u u_0 je funkcija iz [0,1] → [0,1] data sa $t \to C(t, t)$.

Horizontalni, vertikalni i dijagonalni delovi kopule C su neopadajuće i uniformno neprekidne funkcije na [0,1].

Izložimo sada teoremu koja se tiče parcijalnih izvoda kopule.

Teorema 2.1.3.4

Neka je C kopula i za $\forall u_2 \in [0,1]$ parcijalni izvod $\frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2)$ postoji skoro svuda[1] i za svaki par tačaka (u_1, u_2) u kojima izvod postoji važi

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) \leq 1 \qquad (2.6)$$

Analogno, za $\forall u_1 \in [0,1]$ parcijalni izvod $\frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2)$ postoji skoro svuda i za svaki par tačaka (u_1, u_2) u kojima izvod postoji važi

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2) \leq 1 \qquad (2.7)$$

Štaviše, funkcije koje preslikavaju $u_1 \to \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2)$ i $u_2 \to \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2)$ su definisane i neopadajuće skoro svuda na [0,1].

[1] Pod skoro svuda, smatramo svuda osim na prebrojivom skupu tačaka.

Dokaz:

Parcijalni izvodi $\frac{\partial}{\partial u_1}C(u_1,u_2)$ i $\frac{\partial}{\partial u_2}C(u_1,u_2)$ postoje, pošto su monotone funkcije (horizontalni i vertikalni deo) diferencijabilne skoro svuda. Nejednakosti (2.6) i (2.7) slede iz posledice 2.1.3.3. Ako je $v_1 \leq v_2$ tada iz leme 2.1.3.1 sledi da je funkcija koja preslikava $u \to C(u,v_2) - C(u,v_1)$ neopadajuća. Odavde sledi da je $\frac{\partial}{\partial u}\big(C(u,v_2) - C(u,v_1)\big)$ definisan i ne-negativan skoro svuda na [0,1], pa sledi da je funkcija koja preslikava $u_2 \to \frac{\partial}{\partial u_1}C(u_1,u_2)$ definisana i neopadajuća skoro svuda.
Slično se dokazuje i za $\frac{\partial}{\partial u_2}C(u_1,u_2)$ ■

Tehnički rezultati koje smo izneli u prethodnoj teoremi, u suštini govore da parcijalni izvodi kopule postoje i da su nalik funkciji raspodele.

Teorema 2.1.3.5

Definišimo $C_{2|1}$ i $C_{1|2}$ na sledeći način

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{\partial}{\partial u_1}C(u_1,u_2) \quad \text{i} \quad C_{1|2}(u_1|u_2) = \frac{\partial}{\partial u_1}C(u_1,u_2)$$

Tada za dati slučajni par $\boldsymbol{X}$ sa funkcijom raspodele oblika (4.3) identiteti

$$P\{X_2 \leq x_2|X_1 = x_1\} = C_{2|1}\big(F_2(x_2)\big|F_1(x_1)\big)$$

i

$$P\{X_1 \leq x_1|X_2 = x_2\} = C_{1|2}\big(F_1(x_1)\big|F_2(x_2)\big)$$

važe za $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$.

Dokaz:

Neka je (U_1,U_2) slučajni par sa zajedničkom funkcijom raspodele C. Uslovna funkcija raspodele za dato $U_1 = u_1$ je data sa

$$\begin{aligned} P\{U_2 \leq u_2|U_1 = u_1\} &= \lim_{\Delta u_1 \to 0} \frac{P\{u_1 \leq U_1 \leq u_1 + \Delta u_1,\ U_2 \leq u_2\}}{P\{u_1 \leq U_1 \leq u_1 + \Delta u_1\}} \\ &= \lim_{\Delta u_1 \to 0} \frac{C(u_1 + \Delta u_1,\ u_2) - C(u_1,\ u_2)}{\Delta u_1} \\ &= C_{2|1}(u_2|u_1) \end{aligned}$$

Dalje, uslovnu funkciju raspodele od X_2 za dato $X_1 = x_1$ dobijamo zamenom u_i sa $F_i(x_i)$ za $i = 1,2$. ■

2.1.4 FUNKCIJA GUSTINE KOPULA

Teorema koju ćemo sada predstaviti tvrdi sledeće, da pod odgovarajućim uslovima zajednička funkcija gustine može biti zapisana kao proizvod marginalnih funkcija gustine i gustine kopule. Postaće jasno da gustina kopule uobličava sve informacije o zavisnosti između X_i, pa se iz tog razloga gustina kopule ponekad naziva i

funkcija zavisnosti. Primetimo da iz teoreme 2.1.3.4 sledi da $\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2)$ postoji skoro svuda na $[0,1]^2$ (odnosno, skoro svuda osim na skupovima Lebesgueove mere nula).

Teorema 2.1.4.1

Ako su marginalne funkcije raspodele F_1 i F_2, sa gustinama φ_1i φ_2, neprekidne, tada zajednička funkcija gustine od $\boldsymbol{X}$ može biti zapisana na sledeći način

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)c\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$$

gde je gustina kopule c data sa

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2), \boldsymbol{u} \in [0,1]^2$$

Mešoviti izvod kopule, $\boldsymbol{C}$ kada postoji, može se interpretirati kao mera lokalne zavisnosti. Zaista, funkcija gustine za $\boldsymbol{X}$ u tački $\boldsymbol{x}$ može biti raščlanjena na sledeći način

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \underbrace{\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)}_{\substack{zajednička\ funkcija \\ gustine\ koja\ odgovara \\ nezavisnosti}} \quad c\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big)$$

Odavde je zajednička funkcija gustine u $\boldsymbol{x}$ jednaka funkciji gustine koja odgovara nezavisnosti procenjene u $\boldsymbol{x}$ pomnožena sa $c\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big)$. Ovaj faktor uništava nezavisnost kako bi izazvao stvarnu strukturu zavisnosti: zajednička funkcija gustine $\varphi_{\boldsymbol{X}}$ je dobijena iz nezavisne funkcije gustine $\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$ ponovo razmatrane u $\boldsymbol{x}$ uz $c\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big)$. Specijalno, ako su X_i nezavisne, tada je $c \equiv 1$ i zajednička funkcija gustine $\varphi_{\boldsymbol{X}}$ se faktoriše na proizvod marginalnih funkcija φ_1 i φ_2.

2.1.5. KOPULE SA SINGULARNIM KOMPONENTAMA

Gustina kopule može da definiše apsolutno – neprekidnu komponentu A_C kao i singularnu komponentu kopule S_C.

Definicija 2.1.5.1

Bilo koja kopula može biti rastavljena na sledeći način

$$C(\boldsymbol{u}) = A_C(\boldsymbol{u}) + S_C(\boldsymbol{u})$$

gde je A_C apsolutno - neprekidna komponenta od C data sa

$$A_C(\boldsymbol{u}) = \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} c(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2$$

a S_C je singularni deo od C dat sa

$$S_C(\boldsymbol{u}) = C(\boldsymbol{u}) - A_C(\boldsymbol{u})$$

Uopšteno, za razliku od dvodimenzionalnih raspodela, marginalne raspodele kopule su neprekidne. Ako je $C \equiv A_C$ na $[0,1]^2$ tada je C apsolutno – neprekidna, ali ako je $C \equiv S_C$ na $[0,1]^2$ (odnosno, ako je $c = 0$ skoro svuda na $[0,1]^2$) tada je C singularna. U suprotnom, C ima apsolutno – neprekidnu komponentu A_C i singularnu komponentu S_C. U tom slučaju, ni A_C ni S_C nisu kopule (pošto nemaju marginalne $\mathcal{U}(0,1)$ raspodele). Kada je C singularna, tada je njen nosač Lebesgueove mere nula.

Primer 2.1.5.2

Nosač od C_U je glavna dijagonala na $[0,1]^2$ (odnosno, na grafiku $u_1 = u_2$ na $[0,1]^2$) tako da je C_U singularna. Primetimo da je $\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C_U = 0$ svuda na $[0,1]^2$ osim na glavnoj dijagonali.
Slično, nosač od C_L je druga dijagonala na $[0,1]^2$ (odnosno, na grafiku $u_2 = 1 - u_1$ na $[0,1]^2$) pa je C_L, takođe, singularna.

Primer 2.1.5.3

Kopula C_I je apsolutno - neprekidna pošto je mešoviti izvod od C_I uniformno jednak sa 1 i

$$A_{C_I}(\boldsymbol{u}) = \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} d\xi_1 \, d\xi_2 = C_I(\boldsymbol{u})$$

i $S_{C_I} = 0$.

Primer 2.1.5.4 (*Marshal - Olkinova kopula*)

Marshal - Olkinova kopula je izvedena iz Marshall - Olkinove dvodimenzionalne eksponencijalne raspodele iz primera 2.1. Štaviše, ova dvodimenzionalna kopula se definiše kao

$$C(u_1, u_2) = min\{u_1^{1-\alpha_1} u_2, u_1 u_2^{1-\alpha_2}\} = \begin{cases} u_1^{1-\alpha_1} u_2, \text{ako } u_1^{\alpha_1} \geq u_2^{\alpha_2} \\ u_1 u_2^{1-\alpha_2}, \text{ako } u_1^{\alpha_1} < u_2^{\alpha_2} \end{cases}$$

Uslovna kopula je data sa

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \begin{cases} (1-\alpha_1) u_1^{-\alpha_1} u_2, \text{ako } u_1^{\alpha_1} > u_2^{\alpha_2} \\ u_2^{1-\alpha_2}, \qquad \text{ako } u_1^{\alpha_1} < u_2^{\alpha_2} \end{cases}$$

Tada je gustina kopule

$$c(u_1, u_2) = \begin{cases} (1-\alpha_1) u_1^{-\alpha_1}, \text{ako } u_1^{\alpha_1} \geq u_2^{\alpha_2} \\ (1-\alpha_2) u_2^{-\alpha_2}, \text{ako } u_1^{\alpha_1} < u_2^{\alpha_2} \end{cases}$$

Tako da je

$$A_C(\boldsymbol{u}) = C(\boldsymbol{u}) - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2} \left(min\{u_1^{\alpha_1}, u_2^{\alpha_2}\}\right)^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2}}$$

i

$$S_C(\boldsymbol{u}) = C(\boldsymbol{u}) - A_C(\boldsymbol{u}) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2} \left(min\{u_1^{\alpha_1}, u_2^{\alpha_2}\}\right)^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2}}$$

Singularna komponenta se gomila oko prave $u_1^{\alpha_1} = u_2^{\alpha_2}$ na $[0,1]^2$.

2.1.6. OPŠTI SLUČAJ SKLAROVE FORMULE

Jednakost (2.3) ukazuje na to da kopulu povezanu sa $\boldsymbol{X}$ interpretiramo kao da je zavisna struktura. Ovo ima smisla u slučaju kada su sve F_i neprekidne, a kopula jedinstvena kao u teoremi 2.1.2.3. U diskretnom slučaju, postoji više od jednog načina zapisivanja zavisne strukture. Ako F_1 i F_2 ne bi bile neprekidne, tada bi Sklarova teorema osigurala da kopula od $F_{\boldsymbol{X}}$ važi i dalje, ali u ovom slučaju C ne bi više bila jedinstvena i postala bi samo moguća kopula za $F_{\boldsymbol{X}}$. Radi kompletnosti, prvo ćemo preformulisati teoremu 2.1.2.3 na sledeći način:

Teorema 2.1.5.5

Neka $F_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ ima marginalne funkcije raspodele F_1 i F_2. Tada postoji kopula C, ne neophodno jedinstvena, na jediničnom kvadratu $[0,1]^2$, takva da formula (2.3) važi za $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$. Ipak, C je jedinstveno definisano na $Range(F_1) \times Range(F_2)$.

Dokaz:

Dokaz ćemo podeliti u dva koraka:

1) Neka je $F_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$. Jasno je da skup određenih parova $\left\{\left(\left(F_1(x_1), F_2(x_2)\right), F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\right), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2\right\}$ definiše realnu funkciju D čiji je domen $Range(F_1) \times Range(F_2)$. Primetimo da ako F_i ima prekide, tada D nije definisana na celom jediničnom kvadratu $[0,1]^2$, već samo na njegovom podskupu $Range(F_1) \times Range(F_2)$. Iz osobina funkcije $F_{\boldsymbol{X}}$ sledi da D zadovoljava sledeće uslove:

$$D(0, u_2) = D(u_1, 0) = 0, \text{ za } \forall u_1, u_2$$

i

$$D(u_1, 1) = u_1, \quad D(1, u_2) = u_2, \text{ za } \forall u_1, u_2.$$

Odavde se lako vidi da je

$$D(u_1, u_2) = F_X\left(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)\right)$$

za $u_1 \in Range(F_1)$ i $u_2 \in Range(F_2)$.

2) Bilo koja funkcija D, kao što je funkcija iz prvog koraka može biti proširena sa $Range(F_1) \times Range(F_2)$ na $[0,1]^2$, odnosno postoji kopula C takva da je $C(u_1, u_2) = D(u_1, u_2)$ za $\forall (u_1, u_2) \in Range(F_1) \times Range(F_2)$.
Neka je (u_1, u_2) tačka iz jediničnog kvadrata. Za $i = 1,2$ neka su $\underline{u}_i$ i $\overline{u}_i$ najmanji i najveći element iz $Range(F_i)$ koji zadovoljavaju uslov $\underline{u}_i \leq u_i \leq \overline{u}_i$. Primetimo da ako $u_i \in Range(F_i)$, tada je $\underline{u}_i = u_i = \overline{u}_i$. Sada ćemo definisati

$$\lambda_i(u_i) = \begin{cases} \dfrac{u_i - \underline{u}_i}{\overline{u}_i - \underline{u}_i}, & \text{ako je } \underline{u}_i < \overline{u}_i \\ 1, & \text{ako je } \underline{u}_i = \overline{u}_i \end{cases}$$

Kao i

$$\begin{aligned} C(u_1,u_2) = &\big(1-\lambda_1(u_1)\big)\big(1-\lambda_2(u_2)\big)D\big(\underline{u}_1,\underline{u}_2\big) \\ &+\big(1-\lambda_1(u_1)\big)\lambda_2(u_2)D\big(\underline{u}_1,\overline{u}_2\big) \\ &+\lambda_1(u_1)\big(1-\lambda_2(u_2)\big)D\big(\overline{u}_1,\underline{u}_2\big) \\ &+\lambda_1(u_1)\lambda_2(u_2)D(\overline{u}_1,\overline{u}_2) \end{aligned}$$

Ova formula je interpolacija funkcije D na $[0,1]^2$ koja je linearna u u_1 i u_2. Kako bismo pokazali da je C, definisana na ovaj način, zaista kopula dovoljno je da proverimo da li su uslovi iz definicije 4.2.1 zadovoljeni. Uslovi (1) i (2) su očigledno tačni, dok se iscrpnim dokazivanjem, koje ovde nećemo izvoditi, može pokazati da je i uslov (3) zadovoljen.

Sada možemo zaključiti, iz koraka (1) i (2), da kopula definisana jednačinom (2.3) postoji. ■

Napomena:

Kada govorimo o kopuli para slučajnih promenljivih $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$, mislimo na kopulu čije postojanje nam garantuje Sklarova teorema, korišćenjem bilinearnih interpolacija ako jedna ili obe slučajne promenljive imaju prekidnu funkciju raspodele. Podsetimo se da, ukoliko su obe funkcije raspodele neprekidne kopula od $\boldsymbol{X}$ je jedinstveno određena bez potrebe za dokazivanjem interpolacije.

2.2. FAMILIJE DVODIMENZIONALNIH KOPULA

Neke od najuobičajenijih kopula i njihove karakteristike su:

Claytonova kopula

Claytonova kopula je definisana za $\boldsymbol{u} \in [0,1]^2$ na sledeći način

$$C_\alpha(u_1, u_2) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-\frac{1}{\alpha}}, \alpha > \mathbf{0} \tag{2.8}$$

Parametar α je mera jačine zavisnosti između u_i, što potvrđuje i

$$\lim_{\alpha \to +\infty} C_\alpha(u_1, u_2) = min\{u_1, u_2\} = C_U(\boldsymbol{u})$$

Pa se zavisna struktura približava svom maksimumu (odnosno, tada je komonotona) kada α raste ka $+\infty$. Sa druge strane,

$$\lim_{\alpha \to 0} C_\alpha(u_1, u_2) = u_1 u_2 = C_I(\boldsymbol{u})$$

Dakle, nezavisnost se postiže kada $\alpha \to 0$.

Uslovne raspodele se lako izvode iz parcijalnih izvoda Claytonove kopule. Odnosno, korišćenjem teoreme 2.1.3.5 dobijamo $C_{1|2}$ i $C_{2|1}$ na sledeći način

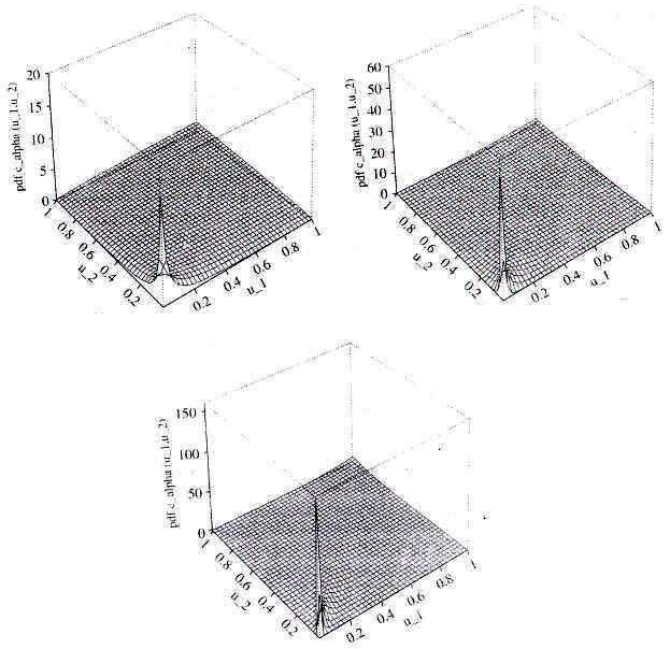
$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{\partial}{\partial u_1} C_\alpha(u) = \left(1 + u_1^\alpha (u_2^{-\alpha} - 1)\right)^{1-\frac{1}{\alpha}}$$

Slično se dobija i $C_{1|2}$.

Funkcija gustine Claytonove kopule je data sa

$$c_\alpha(u) = \frac{1+\alpha}{(u_1 u_2)^{\alpha+1}} (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-2-\frac{1}{\alpha}}$$

Ova funkcija gustine je prikazana na slici 2.2 za različite vrednosti α. Na slici se vidi kako funkcija pravi vrh oko originala. Što je α veće, veći je i vrh.



Slika 2.2. *Funkcija gustine Claytonove kopule za rastuće pozitivne vrednosti α*

Frankova kopula

Za $\boldsymbol{u} \in [0,1]^2$ Frankova kopula je data sa

$$C_\alpha(u_1, u_2) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}{e^{-\alpha} - 1}\right), \alpha \neq 0$$

Granični slučajevi C_α uključuju C_L, C_U i C_I. Specijalno,

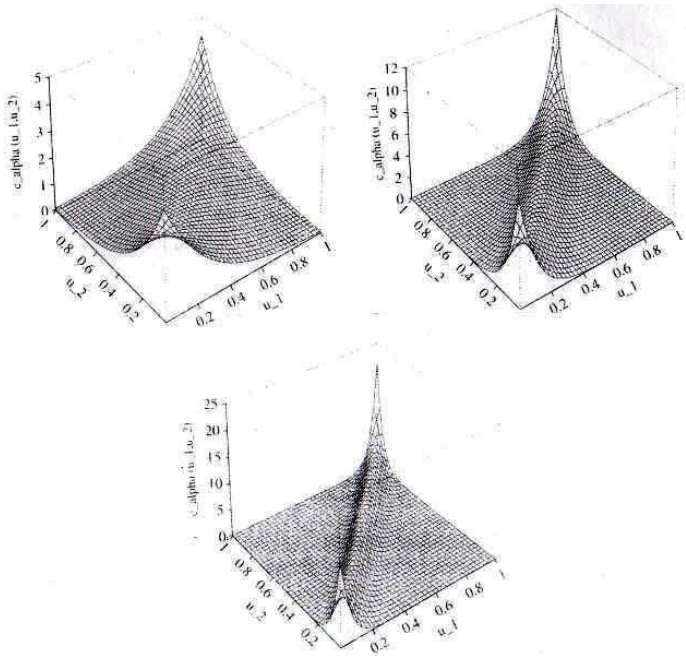
$$\lim_{\alpha \to -\infty} C_\alpha = C_L, \qquad \lim_{\alpha \to +\infty} C_\alpha = C_U, \qquad \lim_{\alpha \to 0} C_\alpha = C_I$$

Uslovna raspodela Frankove kopule je

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{e^{-\alpha u_2} - e^{-\alpha(u_1+u_2)}}{1 - e^{-\alpha} - (1 - e^{-\alpha u_1})(1 - e^{-\alpha u_2})}$$

Funkcija gustine Frankove kopule je prikazana na slici 2.3, a zapisuje se kao

$$c_\alpha(u) = \frac{\alpha e^{-\alpha(u_1+u_2)}(1 - e^{-\alpha})}{(e^{-\alpha(u_1+u_2)} - e^{-\alpha u_1} - e^{-\alpha u_2} + e^{-\alpha})^2}$$



Slika 2.3. *Funkcija gustine Frankove kopule za rastuće pozitivne vrednosti* α

Normalna kopula

Normalna (Gaussova kopula) opisuje zavisnu strukturu koja proističe iz dvodimenzionalne normalne raspodele. Bez gubitka opštosti, možemo je definisati kao kopulu koja je rezultat Sklarove dekompozicije (2.3) primenjene na zajedničku funkciju raspodele para (X_1, X_2) sa $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom i kovarijasom α. Pozivanjem na (2.4) dobijamo normalnu kopulu:

$$C_\alpha(u_1, u_2) = H_\alpha\big(\phi^{-1}(u_1), \phi^{-1}(u_2)\big), \alpha \in (-1,1)$$

gde je ϕ funkcija raspodele jednodimenzionalne $\mathcal{N}(0,1)$ raspodele, a H_α je dvodimenzionalna standardna normalna funkcija raspodele sa kovarijansom α. Pa je normalna kopula, ustvari data sa

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} e^{\frac{-(\xi_1^2 - 2\alpha\xi_1\xi_2 + \xi_2^2)}{2(1-\alpha^2)}} d\xi_1\, d\xi_2$$

Odgovarajuća funkcija gustine se dobija na sledeći način:

$$c_\alpha(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} e^{\frac{-(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1\zeta_2 + \zeta_2^2)}{2(1-\alpha^2)}} \frac{d}{du_1}\phi^{-1}(u_1) \frac{d}{du_2}\phi^{-1}(u_2)$$

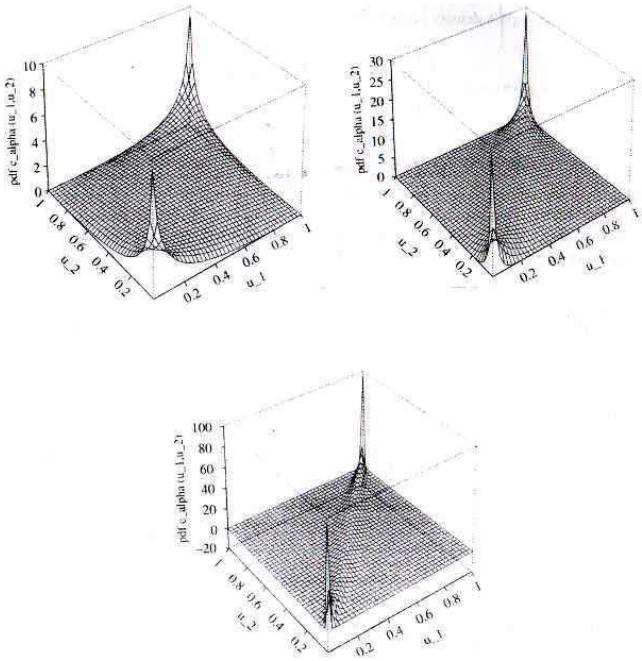
gde je $\zeta_i = \phi^{-1}(u_i)$, $i = 1,2$. Ako sa $\varphi = \phi'$ funkciju gustine standardizovane normalne raspodele imamo:

$$\frac{d}{du_i}\phi^{-1}(u_i) = \frac{1}{\varphi\big(\phi^{-1}(u_i)\big)} = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\zeta_i^2}{2}}$$

Pa je onda funkcija gustine Gaussove kopule

$$c_\alpha(u_1,u_2)=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}e^{\frac{-(\zeta_1^2-2\alpha\zeta_1\zeta_2+\zeta_2^2)}{2(1-\alpha^2)}}e^{\frac{\zeta_1^2+\zeta_2^2}{2}}$$

Ova funkcija gustine je prikazana na slici 2.4 za rastuće pozitivne vrednosti α. Jasno je da sa povećanjem parametra $\boldsymbol{\alpha}$ raste i jačina zavisnosti.



Slika 2.4. *Funkcija gustine normalne kopule za rastuće pozitivne vrednosti* α

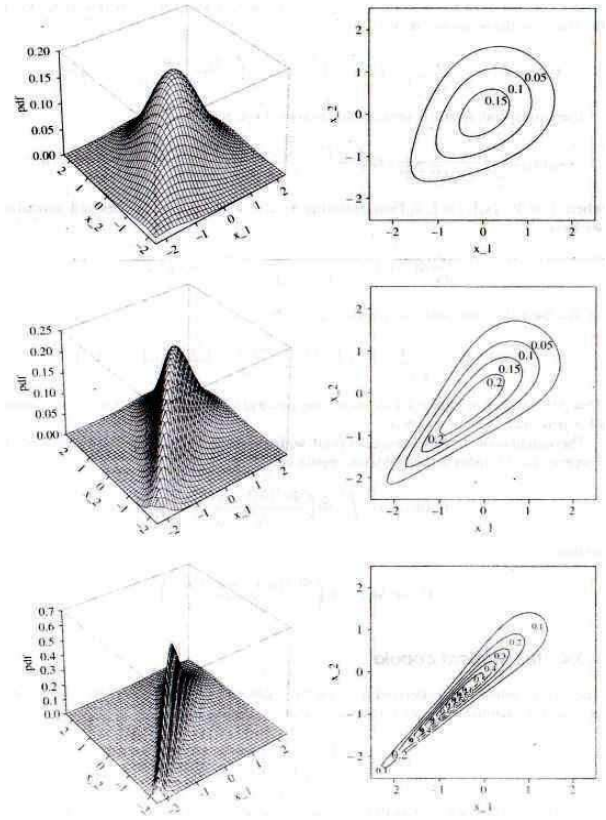
Napomena:

Sve dvodimenzionalne kopule koje smo ispitali zadovoljavaju uslov simetrije $C(u_1,u_2)=C(u_2,u_1)$.

2.2.1. PRAVLJENJE VIŠEDIMENZIONALNIH RASPODELA SA DATIM MARGINALNIM RASPODELAMA OD KOPULA

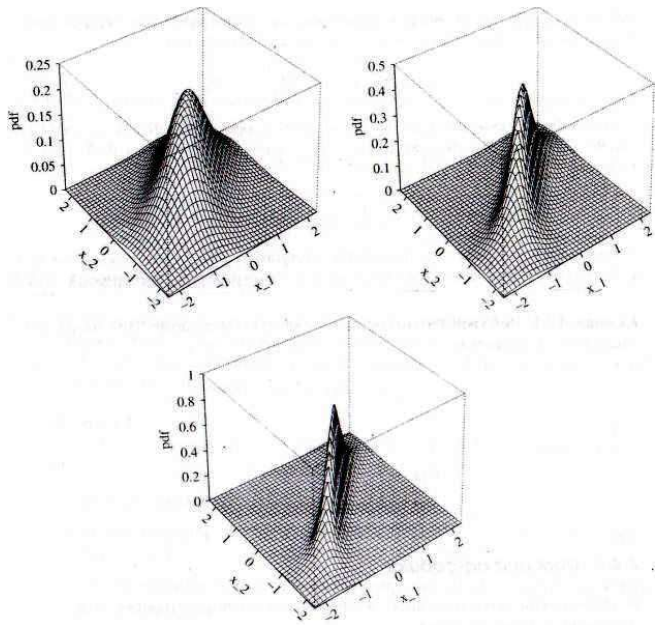
2.2.1.1. VIŠEDIMENZIONALNE RASPODELE SA NORMALNIM MARGINALNIM RASPODELAMA

Na slici 2.5 je prikazana funkcija gustine slučajnog para sa $\mathcal{N}(0,1)$ marginalnim raspodelama i Claytonova kopula za rastuće α. Konturni grafik prikazuje eliptične karakteristike dvodimenzionalne normalne raspodele.



Slika 2.5.

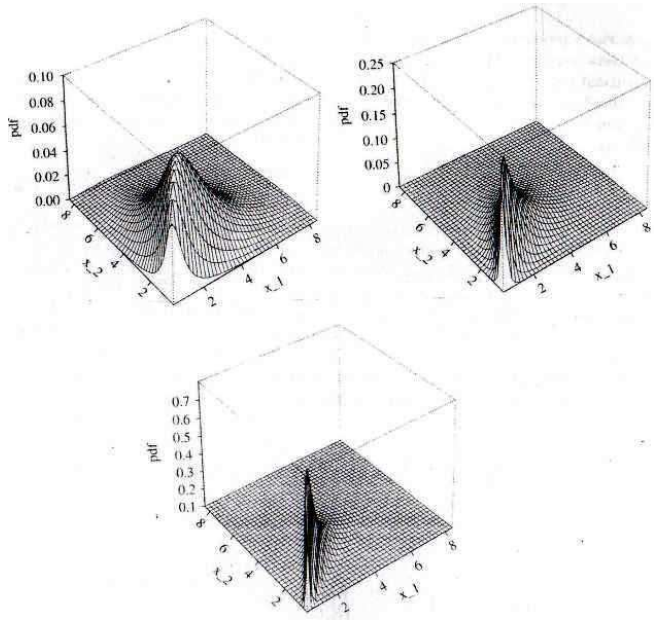
Uključivanjem normalnih marginalnih raspodela u Frankovu kopulu dolazimo do druge višedimenzionalne raspodele sa normalnim marginalnim raspodelama, koja je različita od višedimenzionalne normalne raspodele.



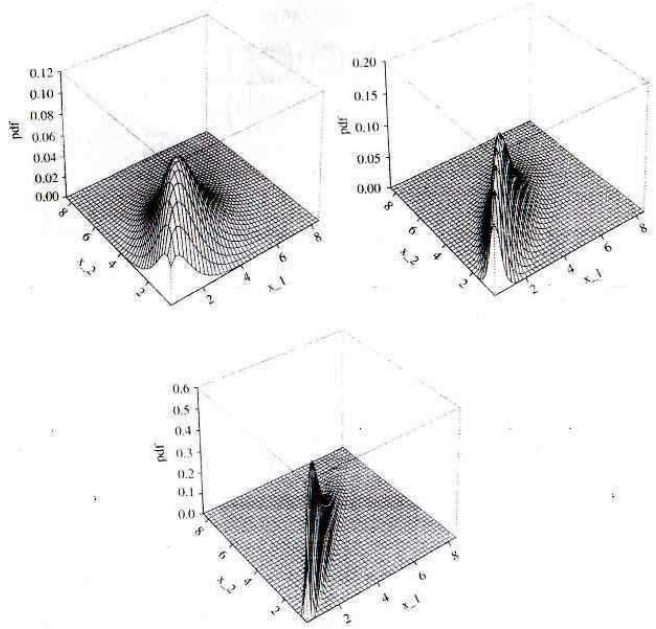
Slika 2.6. *Grafik funkcije gustine slučajnog para sa* $\mathcal{N}(0,1)$ *marginalnim raspodelama i Frankove kopula za rastuće* α.

2.2.1.2. VIŠEDIMENZIONALNE RASPODELE SA GAMA MARGINALNIM RASPODELAMA

Glavna prednost kopula je u tome da ne postoji ograničenost prilikom izbora marginalnih raspodela. Primer ovoga možemo videti na slici 2.7 koja prikazuje gustine slučajnog para sa $Gam(3,1)$ marginalnim raspodelama i Claytonovu kopulu za rastuće α, dok se na slici 2.8 ograničavamo na pozitivne rastuće vrednosti parametra zavisnosti α funkcije gustine slučajnog para sa $Gam(3,1)$ marginalnim raspodelama i normalnom kopulom.



Slika 2.7.



Slika 2.8.

2.3. OSOBINE KOPULA

2.3.1. KOPULE PREŽIVLJAVANJA

Definicija 2.3.1.1

Ako je C kopula, tada je $\bar{C}$ definisano za $u \in [0,1]^2$

$$\bar{C}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1$$

funkcija zvana kopula preživljavanja povezana sa C.

Ovako definisana kopula $\bar{C}$ u potpunosti zadovoljava uslove iz definicije 2.1.1.1. Računanjem u $(1 - u_1, 1 - u_2)$ postiže se da je verovatnoća dve jedinične uniformno raspoređene slučajne promenljive sa kopulom C veća od u_1 i u_2, redom.

Ne treba mešati kopulu preživljavanja $\bar{C}$ sa zajedničkom funkcijom repa za dve slučajne promenljive (U_1, U_2) sa $\mathcal{U}(0,1)$ raspodelama, čija je zajednička funkcija raspodele kopula C. Matematički gledano,

$$P\{U_1 > u_1, U_2 > u_2\} = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2) \neq \bar{C}(u_1, u_2)$$

Međutim,

$$P\{U_1 > u_1, U_2 > u_2\} = \bar{C}(1 - u_1, 1 - u_2)$$

Kako je $\bar{C}$ kopula, tada za $\forall u \in [0,1]^2$ važi nejednakost

$$C_L(u_1, u_2) \leq \bar{C}(u_1, u_2) \leq C_U(u_1, u_2)$$

Za nezavisnost i Frechetove granične kopule, kopule i kopule preživljavanja dodatno važi

$$\overline{C}_L = C_L,\ \overline{C}_I = C_I \text{ i } \overline{C}_U = C_U$$

Takođe, na kopule preživljavanja može biti primenjena i Sklarova teorema. Specijalno, kopule preživljavanja mogu biti iskorišćene za prikazivanje funkcija repa $\overline{F}_{\boldsymbol{X}}$ od X pod uslovom da su $\overline{F}_1$ i $\overline{F}_2$ funkcije marginalne raspodele repa. Tada je

$$\overline{F}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \bar{C}\left(\overline{F}_1(x_1), \overline{F}_2(x_2)\right)$$

$\bar{C}$ povezuje zajedničku funkciju repa sa njenim jednodimenzionalnim raspodelama $\overline{F}_1$ i $\overline{F}_2$ na apsolutno isti način kao što kopula povezuje zajedničku funkciju raspodele F_X sa njenim marginalnim raspodelama F_1 i F_2.

Primer 2.3.1.2 (*Pareto kopula preživljavanja*)

Koristeći dvodimenzionalnu Pareto raspodelu iz primera 2.2 imamo da je

$$\overline{F}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \bar{C}\left(\overline{F}_1(x_1), \overline{F}_2(x_2)\right)$$

za $\bar{C}(\boldsymbol{u}) = \left(u_1^{-\frac{1}{\alpha}} + u_2^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^{-\alpha} - 1.$

2.3.2. DUALNE I KO-KOPULE

Uz kopulu C, pored kopule preživljavanja $\bar{C}$, vezujemo i dualnu kopulu $\tilde{C}$, kao i ko-kopulu C^*.

Definicija 2.3.2.1

Ko-kopula C^* vezana za kopulu C je data sa

$$C^*(u_1, u_2) = 1 - C(1 - u_1, 1 - u_2),\ u \in [0,1]^2$$

dok je dual $\tilde{C}$ kopule C

$$\tilde{C}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - C(u_1, u_2),\ u \in [0,1]^2$$

Važno je napomenuti da ni ko - kopula ni dual nisu kopule. Međutim, oni predstavljaju verovatnoću da je $X_1 > x_1$ ili $X_2 > x_2$, kao i verovatnoću da je $X_1 \leq x_1$ ili $X_2 \leq x_2$

$$P\{X_1 > x_1, X_2 > x_2\} = C^*\left(\overline{F}_1(x_1), \overline{F}_2(x_2)\right)$$

$$P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} = \tilde{C}\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big)$$

Možemo primetiti da je ko-kopula ko-kopule originala kopula, odnosno

$$(C^*)^* = C$$

Ko-kopule koje se odnose na nezavisnost i Frechetove granične kopule su

$$C_L^*(u_1, u_2) = min\{u_1 + u_2, 1\}$$
$$C_I^*(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - u_1 u_2$$
$$C_U^*(u_1, u_2) = max\{u_1, u_2\}$$

2.3.3. FUNKCIONALNA INVARIJANTNOST

Korisnost kopula proizilazi iz činjenice da je striktna monotona transformacija slučajnih promenljivih kopule ili invarijantna ili promenljiva na predvidiv način. Sledeća teorema predstavlja kopule kao zajedničke funkcije raspodele ranga.

Teorema 2.3.3.1

Neka su X_1 i X_2 neprekidne slučajne promenljive sa kopulom C, a t_1 i t_2 neprekidne monotone funkcije:

1) Ako su t_1 i t_2 neopadajuće funkcije, tada $\big(t_1(X_1), t_2(X_2)\big)$ ima kopulu C.
2) Ako je t_1 neopadajuća, a t_2 nerastuća funkcija, tada $\big(t_1(X_1), t_2(X_2)\big)$ ima kopulu $u_1 - C(u_1, 1 - u_2)$.
3) Ako je t_1 nerastuća, a t_2 neopadajuća funkcija, tada $\big(t_1(X_1), t_2(X_2)\big)$ ima kopulu $u_2 - C(1 - u_1, u_2)$.
4) Ako su t_1 i t_2 nerastuće funkcije, tada $\big(t_1(X_1), t_2(X_2)\big)$ ima kopulu $\bar{C}$.

Možemo primetiti da je svaka od formi kopule od $\left(t_1(X_1), t_2(X_2)\right)$ nezavisna od pojedinačnog izvora t_1 i t_2. U slučaju kada su obe funkcije t_1 i t_2 neopadajuće, kopula (koja je zajednička funkcija raspodele rangova) je ista za par (X_1, X_2) i $\left(t_1(X_1), t_2(X_2)\right)$. Razlog tome je to što se rangovi od X_1 i X_2 podudaraju sa rangovima od $t_1(X_1)$ i $t_2(X_2)$. U ostalim slučajevima kopule su modifikovane prema monotonosti funkcija t_1 i t_2, ali one stvarno ne zavise od izbora t_1 i t_2. Iz ovoga sledi da kopula računata za sve zavisne strukture između neprekidnih slučajnih premenljivih očuvava način zajedničkog „kretanja“ X_1 i X_2, bez obzira na skalu po kojoj su promenljive merene.

Primer 2.3.3.2

Za ilustraciju osobina iz teoreme 2.3.3.1 pretpostavimo da imamo model sa višedimenzionalnim raspodelama za zavisne osigurane gubitke raznih vrsta. Ako odlučimo da naš interes leži u modeliranju algoritma za ove gubitkem kopula se neće promenuti. Slično, ukoliko pređemo sa modela procentnih povrata nekoliko finansijskih skupova na model logaritamskih kopula se ni tada neće promenuti, samo marginalne raspodele će pretrpeti promene.

Iz ponašanja kopule sa monotonim transformacijama iz prethodne teoreme, a posebno iz činjenice da je kopula invarijanta, dok marginalne raspodele mogu biti modifikovane po volji, možemo zaključiti da se broj posledica smanjuje. Odnosno, bilo koja funkcionalnost ili osobina zajedničke funkcije raspodele dve slučajne promenljive je invarijantna pod strogo rastućom transformacijom slučajne promenljive ili osobinom njihovih kopula.

2.3.4. ZAVISNOST NA REPU

U aktuarstvu, devijacije normalnosti su često uzrokovane „debelim“ repom. Kod višedimenzionalnih promenljivih problem „debelog“ repa može nastati iz pojedinačnih marginalnih raspodela i iz zajedničke verovatnoće velikih gubitaka. Ovaj koncept se naziva zavisnost na repu.

Kako bismo mogli da opišemo zavisnost na repu, koristićemo verovatnoću posmatranih neobičnih, velikih gubitaka za datu polisu i gubitaka koji nastaju iz neobičnih velikih gubitaka iz druge polise. Formalnije, koeficijent (gornje) zavisnosti na repu λ_U za slučajan par (X_1, X_2) sa kopulom C je definisan kao:

$$\begin{aligned}\lambda_U &= \lim_{v\to 0} P\{X_1 > \bar{F}_1^{-1}(v) | X_2 > \bar{F}_2^{-1}(v)\} \\ &= \lim_{v\to 0} \frac{P\{X_1 > \bar{F}_1^{-1}(v) | X_2 > \bar{F}_2^{-1}(v)\}}{P\{X_2 > \bar{F}_2^{-1}(v)\}}\end{aligned}$$

Imenilac možemo zapisati i kao:

$$\begin{aligned}P\left\{X_1 > \overline{F}_1^{-1}(v) \,\middle|\, X_2 > \overline{F}_2^{-1}(v)\right\} = 1 - P\left\{X_1 \le \overline{F}_1^{-1}(v)\right\} - P\left\{X_2 \le \overline{F}_2^{-1}(v)\right\} \\ + P\left\{X_1 \le \overline{F}_1^{-1}(v), X_2 \le \overline{F}_2^{-1}(v)\right\}\end{aligned}$$

Pa odavde sledi,

$$\lambda_U = \lim_{v \to 0} \frac{1 - 2(1 - v) + C(1 - v, 1 - v)}{v}$$

Što obezbeđuje neprekidnost F_1 i F_2.

Definicija 2.3.3.3

Koeficijent zavisnosti na repu λ_U za slučajan par (X_1, X_2) sa kopulom C je

$$\lambda_U = \lim_{v \to 1} \frac{1 - 2v + C(v, v)}{1 - v}$$

Ako je $\lambda_U > 0$, tada su X_1 i X_2 asimptotski zavisne u gornjem repu, a ako je $\lambda_U = 0$, tada su asimptotski nezavisne.

Koeficijent za donju zavisnost na repu se definiše na sličan način.

Primer 2.3.3.4

Gaussova kopula se ne izlaže zavisnosti na repu, osim ako je $\alpha = 1$

$$\lambda_U = \begin{cases} 0, \text{ako je } \alpha < 1 \\ 1, \text{ako je } \alpha = 1 \end{cases}$$

Ovo znači da je skoro nemoguće posmatrati ekstremne gubitke za obe komponente dvodimenzionalnih rizika.

3. Merenje zavisnosti

Ovo poglavlje razmatra vezu između kopula i mera zavisnosti za kopule slučajnih promenljivih. Ove mere za cilj imaju da objasne da je verovatnoća da se dobiju velike (ili male) vrednosti za obe komponente velika, dok je verovatnoća da se istovremeno dobije velika vrednost za prvu komponentu i mala vrednost za drugu komponentu, ili obrnuto, mala. U ovom poglavlju ćemo proučiti Pearsonov, Kendallov i Spearmanov koeficijente korelacije. Takođe je predstavljeno i nekoliko struktura zavisnosti, uključujući zavisnosti pozitivnog kvadranta i njegove multivarijantne ekstenzije, uslovni rast i totalnu pozitivnost.

Očigledno je da je konstrukcija kopula usko povezana sa merama zavisnosti. Kratko ćemo objasniti veze između ovih koncepata. Marginalne raspodele F_1 i F_2 mogu biti umetnute u bilo koju kopulu, tako da ne nose direktne informacije o uparivanju. Istovremeno, bilo koji par marginalnih raspodela može da bude umetnut u C, tako da C ne nosi direktne informacije o marginalnim raspodelama. S obzirom na to, može se očekivati da su veze između marginalnih raspodela F_X definisane samo sa C i da se bilo koje pitanje u vezi sa strukturom zavisnosti može objasniti isključivo znanjem o C. Međutim, situacija nije baš tako jednostavna. Problemi proizilaze iz činjenice da kopule nisu jedinstvene kada je bar jedna marginalna raspodela neprekidna.

Iz narednog primera proizilazi da postoje kopule koje za rezultat daju Frechetovu gornju granicu za neke parove marginalnih raspodela i Frechetovu donju granicu za druge parove.

Primer 3.1

Razmatramo kopulu C, koja ima masu raspoređenu linijski, $u_2 = u_1$ za $0 \leq u_1 \leq \frac{1}{3}$, $u_2 = u_1 + \frac{1}{3}$ za $\frac{1}{3} \leq u_1 \leq \frac{2}{3}$ i $u_2 = u_1 - \frac{1}{3}$ za $\frac{2}{3} \leq u_1 \leq 1$. Ova kopula se podudara sa Frechetovom donjom granicom u oblasti $\frac{2}{3} \leq u_1, u_2 \leq 1$. Tako da, ako je oblast raspodela F_1 i F_2 ograničena na oblast $0 \leq u_1, u_2 \leq \frac{1}{3}$, onda će $F_X(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$ da bude Frechetova gornja granica. S druge strane, ako je oblast od F_1 i F_2 ograničena na oblast $\frac{2}{3} \leq u_1, u_2 \leq 1$, F_X će biti Frechetova donja granica. U zavisnosti od marginalnih raspodela, ova kopula može da da Frechetovu gornju granicu ili Frechetovu donju granicu.

Ova vrsta ekstremnog ponašanja se događa samo zato što su uključene neprekidne raspodele. Kopula C je konstruisana da pokaže različite osobine na različitim delovima njenog domena. Zbog ovoga oblast marginalnih raspodela drastično utiče na osobine zajedničkih raspodela.

Sada ćemo pokazati da ne postoji nekonstantna mera zavisnosti koja zavisi isključivo od kopule.

Teorema 3.2

Neka je η mera zavisnosti i F_X bivarijantna funkcija raspodele sa kopulom C. Tada je $\eta(F_X) = \eta(C_X)$ za svako F_X, pa sledi da je η konstantno.

Problemi proizilaze iz nekontinuirane prirode slučajnih promenljivih. U ovom poglavlju ćemo da vidimo šta dobijamo ako pretpostavimo neprekidnost.

Svrha ovog poglavlja je dvostruka. Prvo ispitujemo neke klasične skalarne mere snage zavisnosti koja postoji između para rizika. U tom smislu, ovo poglavlje za cilj ima da prikupi i razjasni osnovne ideje o merama zavisnosti (linearna korelacija i rang korelacije). Drugo, razmatramo različite strukture zavisnosti za korelisane rizike, odnosno, zavisnost pozitivnog kvadranta, uslovni rast i totalnu pozitivnost.

3.1. SAGLASNOST MERA

Mere saglasnosti ustvari mere povezanost između dve slučajne promenljive, pod uslovom da promenljive poseduju određene poželjne osobine. Intuitivna ideja koja leži u osnovi koncepta o saglasnosti je sledeća: dve slučajne promenljive X_1 i X_2 su saglasne kada velike vrednosti od X_1 idu zajedno sa velikim vrednostima od X_2.

Definicija 3.1.1

Funkcionalna dodela realnog broja, $r(\cdot,\cdot)$, bilo kom paru slučajnih promenljivih realne vrednosti X_1 i X_2 je mera saglasnosti ako zadovoljava sledeće osobine:

P1) $r(X_1, X_2) = r(X_2, X_1)$ - simetrija
P2) $-1 \leq r(X_1, X_2) \leq 1$ - normalizacija
P3) $r(X_1, X_2) = 1$ ako i samo ako su X_1 i X_2 komonotone
P4) $r(X_1, X_2) = -1$ ako i samo ako su X_1 i X_2 kontramonotone
P5) Za $t: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, strogo monotono

$$r(t(X_1), X_2) = \begin{cases} r(X_1, X_2), ako\ je\ t\ rastuće. \\ -r(X_1, X_2), ako\ je\ t\ opadajuće. \end{cases}$$

Napomena:

Postoje i druge poželjne osobine. One su, međutim najčešće nekompatibilne sa aksiomima P1 - P5 iz definicije 3.1.1. Na primer, jedna od interesantnih osobina bi mogla da bude

$$r(X_1, X_2) = 0 \text{ ako i samo ako su } X_1 \text{ i } X_2 \text{ nezavisni.} \qquad (3.1)$$

Nažalost, ovo je u kontradikciji sa P5: specijalno, postoji netrivijalna mera zavisnosti koja zadovoljava P5 i (3.1). Da bismo dokazali ovu tvrdnju, neka (X_1, X_2) ima uniformnu raspodelu na jediničnom krugu $\mathbb{R}^2$, odnosno, $(X_1, X_2) = (\cos Z, sin\, Z)$, sa $Z: \mathcal{U}(0,2\pi)$. S obzirom na to da je $(-X_1, X_2) =_d (X_1, X_2)$, dobijamo

$$r(-X_1, X_2) = r(X_1, X_2) = -r(X_1, X_2)$$

što implicira da je $r(X_1, X_2) = 0$ i da su X_1 i X_2 očigledno zavisni.

Postoje razni načini da se izdiskutuje i izmeri zavisnost. Prvi i najvažniji je Parsonov koeficijent korelacije koji pokazuje linearnu zavisnost između kopula slučajnih promenljivih, ali koja nije invarijantna pod uslovima monotone transformacije osa koordinatnog sistema. Ustvari, u sledećem delu ćemo videti da Pearsonov koeficijent korelacije zadovoljava samo P1 i P2, te s toga nije mera saglasnosti. Kao što ćemo videti, druge mere su skalirno invarijantne, odnosno ostaju nepromenjene pod strogo rastućim transformacijama slučajnih promenljivih. U delu 3.1.2. i 3.1.3. ćemo videti da rang koeficijenata korelacije zadovoljava P1 - P5 ako su X_1 i X_2 neprekidni.

3.1.1. PEARSONOV KOEFICIJENT KORELACIJE

Pearsonov koeficijent korelacije je mera povezanosti za dve slučajne promenljive koja pokazuje stepen linearne veze. Definisan je na sledeći način.

Definicija 3.1.1.1

Za slučajan par (X_1, X_2) koji ima marginalne sa konačnim varijansama, *Pearson*-ov koeficijent korelacije r_P je definisan sa

$$r_P(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$$

Napomena:

Varijanse od X_1 i X_2 moraju da budu konačne da bi Pearsonov linearni koeficijent korelacije bio definisan. Ovo je mana mera zavisnosti i izaziva probleme kada se radi sa raspodelama debelih repova.

3.1.1.1. OSOBINE

<u>Funkcionalna invarijantnost</u>

Velika mana Personovog koeficijenta korelacije je to što r_P nije invarijantno pod strogo rastućim transformacijama t_1 i t_2, to jest, za dve slučajne promenljive X_1 i X_2, uopšteno dobijamo

$$r_P\big(t_1(X_1), t_2(X_2)\big) \neq r_P(X_1, X_2) \tag{3.2}$$

Međutim, r_P se ponaša na predvidiv način kad su i t_1 i t_2 linearni. Specijalno, r_P ispunjava osobinu linearnosti

$$r_P(a_1X_1 + b_1, a_2X_2 + b_2) = sign(a_1a_2)r_P(X_1, X_2)$$

gde je $a_1, a_2 \neq 0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ i $sign(x) = 1$ ako je $x > 0$, i -1 ako je $x < 0$. Dakle, r_P je invarijantno za strogo rastuće linearne transformacije.

<u>Značaj Pearsonovog koeficijenta korelacije i jačine zavisnosti</u>

Poznato je da postoji mogućnost da vrednost r_P ne bude jak indikator jačine zavisnosti. Prvo, zavisnost dve slučajne promenljive implicira da su one nekorelisane (odnosno. $r_P = 0$), ali suprotno generalno ne važi, kao što ćemo pokazati u narednom primeru.

Primer 3.1.1.1.1 (*Dve zavisne promenljive sa korelacijom nula*)

Neka je Y slučajna promenljiva koja uzima vrednosti $0, \frac{\pi}{2}$ i π sa jednakom

verovatnoćom $\frac{1}{3}$. Tada je lako videti da su $X_1 = sin\,Y$ i $X_2 = cos\,Y$ nekorelisani (odnosno. $r_P(X_1, X_2) = 0$). Međutim, nisu nezavisni s obzirom na to da su X_1 i X_2 funkcionalno povezani (relacijom $X_1^2 + X_2^2 = 1$).

Za neprekidan kontraprimer, uzimamo da je $Z: \mathcal{U}(0,2\pi)$ i $X_1 = sin\,Z\,, X_2 = cos\,Z$. Tada je

$$E|X_1| = E|X_2| = E|X_1X_2| = 0$$

tako da su X_1 i X_2 nekorelisani, ali ne i nezavisni pošto važi relacija $X_1^2 + X_2^2 = 1$.

Prema tome, postoje situacije u kojima su korelacije nula, međutim i dalje postoje jake nelinearne veze između slučajnih promenljivih. Samo u specijalnim slučajevima, recimo, dvoparametarske raspodele, nekorelisanost implicira nezavisnost.

3.1.1.2. KOPULE i r_P

Kao što smo videli u (3.2), r_P nije invarijantno za rastuće nelinearne transormacije. Ova jedinstvenost nije iznenađujuća ako je r_P predstavljeno formom

$$r_P(X_1, X_2) = \frac{1}{\sqrt{Var|X_1|Var|X_2|}} \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1u_2)\, dF_1^{-1}(u_1) dF_2^{-1}(u_1)$$

Tako da r_P zavisi ne samo od kopule, već i od marginalnih raspodela.

Primer 3.1.1.2.1

Da bismo objasnili ovaj fenomen, razmatraćemo Farlie - Gumbel -Morgenstern-ovu kopulu zadatu sa

$$C_\alpha(u) = u_1u_2\big(1 + \alpha(1 - u_1)(1 - u_2)\big),\ \ \alpha \in [-1,1]$$

Može se pokazati da je granica za r_P za ovu familiju $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ i da se maksimum dobija kad su obe marginalne raspodele $\mathcal{U}(0,1)$. Sve druge marginalne raspodele će rezultirati korelacijom manjom od $\frac{1}{3}$. Na primer, ako umetnemo $\mathcal{E}(1)$ marginalne raspodele u Farlie - Gumbel - Morgensternovu kopulu, granica za r_P je $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

3.1.1.3. DOPUSTIV SKUP

<u>Kolinearnost</u>

Na osnovu Cauchy - Schwarzove nejednakosti, r_P se uvek nalazi u granicama $[-1,1]$ tako da je P2 zadovoljeno. Pearsonov koeficijent korelacije sadrži informacije o jačini i pravcu linearne veze između dve slučajne promenljive:

$$r_P(X_1, X_2) = sign(a) \Leftrightarrow P\{X_2 = aX_1 + b\} = 1$$

za neke konstante a ($a > 0$ ako $r_P(X_1, X_2) = 1$ i $a < 0$ ako $r_P(X_1, X_2 = -1)$ i $b \in \mathbb{R}$. Ako linearna veza između X_1 i X_2 nije moguća, dozvoljene granice za $r_P(X_1, X_2)$ su još više ograničene.

Česta zabuna u vezi sa Pearsonovim koeficijentom korelacije i zavisnošću je sledeća: za dve proizvoljne marginalne funkcije raspodele F_1 i F_2 od X_1 i X_2, sve linearne korelacije između -1 i 1 se mogu postići podesnom specifikacijom zajedničkih raspodela. Ovo nije tačno i vrlo je jednostavno konsruisati kontraprimere, kao što je pokazano narednom osobinom.

Teorema 3.1.1.3.1

Neka su X_1 i X_2 slučajne promenljive sa nosačem na $\mathbb{R}^+$, odnosno. takve da je $F_1(x) < 1$ i $F_2(x) < 1$ za svako $x > 0$. Tada je $r_P(X_1, X_2) > -1$.

Dokaz:

Pretpostavimo suprotno da je $r_P(X_1, X_2) = -1$, što implicira da je $X_2 = aX_1 + b, a < 0, b \in \mathbb{R}$.
Sledi da je za sve $x_2 < 0$,

$$F_2(x_2) = P\left\{X_1 \geq \frac{x_2 - b}{a}\right\} \geq P\left\{X_1 > \frac{x_2 - b}{a}\right\} = \overline{F_1}\left(\frac{x_2 - b}{a}\right) > 0$$

jer je krajnja desna tačka nosača od F_i jednaka $+\infty$. Ovo je očigledno u kontradikciji sa pretpostavkom da je $F_2(0) = 0$. ■

<u>Granice Pearsonovog koeficijenta korelacije</u>

Dalje ćemo ispitivati koje korelacije su moguće s obzirom na granične raspodele. Ukoliko se marginalne raspodele dve slučajne promenljive razlikuju samo u lokaciji i/ili parametrima veličine, onda su granice Pearsonovog r_P manje nego $[-1,1]$ i zavise od marginalnih funkcija raspodele F_1 i F_2.

Teorema 3.1.1.3.2

Za bilo koje $\boldsymbol{X}$ iz $\mathcal{R}_2^+(F_1, F_2)$, $r_p(F_1, F_2)$ je ograničeno sa

$$r_P^{min}(F_1, F_2) \leq r_p(X_1, X_2) \leq r_P^{max}(F_1, F_2) \tag{3.3}$$

gde su za neko $U: \mathcal{U}(0,1)$

$$r_P^{min}(F_1, F_2) = \frac{Cov\left(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(1-U)\right)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$$

i

$$r_P^{max}(F_1, F_2) = \frac{Cov\left(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U)\right)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$$

Teorema 3.1.1.3.2. pokazuje da se vrednost ± 1 za r_P generalno ne može dobiti na $\mathcal{R}_2^+(F_1, F_2)$. Sledeći primer pokazuje da možemo dobiti korelaciju proizvoljno blizu nule, kao i savršenu zavisnost.

Primer3.1.1.3.3

Posmatramo slučajan par $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_2^+(F_1, F_2)$ gde $X_i: Log\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$, $i = 1,2$. Koristeći teoremu 3.1.1.3.2 i činjenicu da je

$$F_1^{-1}(U) = e^{\left(\mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(U)\right)}$$

i

$$F_1^{-1}(1-U) = e^{\left(\mu_i - \sigma_i \Phi^{-1}(U)\right)}$$

dobijamo sledeći rezultat:

1) Ako su X_1 i X_2 komonotone, onda je korelacija maksimalna i jednaka je

$$r_P^{max} = \frac{e^{\sigma_1 \sigma_2} - 1}{\sqrt{e^{\sigma_1^2} - 1}\sqrt{e^{\sigma_2^2} - 1}}$$

2) Ako su X_1 i X_2 kontramonotone, onda je korelacija minimalna i jednaka je

$$r_P^{min} = \frac{e^{-\sigma_1 \sigma_2} - 1}{\sqrt{e^{\sigma_1^2} - 1}\sqrt{e^{\sigma_2^2} - 1}}$$

Specijalno, ako je $(\mu_1, \sigma_1) = (0,1)$ i $(\mu_2, \sigma_2) = (0, \sigma)$, maksimalan koeficijent korelacije se dobija za $X_2 = X_1^{\sigma}$ i jednak je

$$r_P^{max} = \frac{e^{\sigma} - 1}{\sqrt{e^{\sigma^2} - 1}\sqrt{e - 1}}$$

Dok se minimalni koeficijent korelacije dobija za $X_2 = X_1^{-\sigma}$ i jednak je

$$r_P^{min} = \frac{e^{-\sigma} - 1}{\sqrt{e^{\sigma^2} - 1}\sqrt{e - 1}}$$

Dalje imamo,

$$\lim_{\sigma \to +\infty} r_P^{max}(\sigma) = \lim_{\sigma \to +\infty} r_P^{min}(\sigma) = 0$$

Kao posledicu, moguće je imati slučajan par gde je korelacija skoro nula iako su komponente komonotone ili kontramonotone (odatle i najjača vrsta zavisnosti moguća za ovaj par marginalnih raspodela). Ovo je u kontradikciji sa intuitivnim stavom da mala korelacija implicira slabu zavisnost.

<u>Ekstremne vrednosti r_P i savršena zavisnost</u>

Sledeći rezultat pokazuje da kada su granice u (3.3) dobijene, X_1 i X_2 moraju da budu komonotone/kontramonotone.

Teorema 3.1.1.3.4

Neka je $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_2^+(F_1, F_2)$ i $U: \mathcal{U}(0,1)$. Tada važi sledeća ekvivalencija:

$$r_P(X_1, X_2) = r_P^{max}(F_1, F_2) \Leftrightarrow \boldsymbol{X} =_d \left(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U)\right) \qquad (3.4)$$

i

$$r_P(X_1, X_2) = r_P^{min}(F_1, F_2) \Leftrightarrow \boldsymbol{X} =_d \left(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(1-U)\right) \qquad (3.5)$$

Dokaz:

Krenućemo od (3.4). Deo ekvivalncije $\Leftarrow$ je jednostavan, tako da ćemo razmatrati jedino implikaciju $\Rightarrow$. Lako se uočava da $r_P(X_1, X_2) = r_P^{max}(F_1, F_2)$ daje

$$E(X_1X_2) = E\left(F_1^{-1}(U)F_2^{-1}(U)\right)$$

Formula $E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \int_{x_1=0}^{+\infty}\int_{x_2=0}^{+\infty}\dots\int_{x_n=0}^{+\infty}\overline{F}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\, dx_1dx_2 \dots dx_n$ tada daje

$$0 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(F_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) - W_2(x_1, x_2)\right) dx_1dx_2$$

Kako je $F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \leq W_n(\boldsymbol{x})$, deo pod integralom je nepozitivan za svako x_1 i x_2, tada zaključujemo da jednakost $F_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) = W_2(x_1, x_2)$ uvek važi, čime zaključujemo dokaz za (3.4). Analogno se dokazuje i (3.5) ■

3.1.1.4. PERASONOV KOEFICIJENT KORELACIJE I FAMILIJE LOKACIJA - SKALE

U nekim okolnostima, pretpostavka o ne-negativnosti uključena u teoremu 3.1.1.3.4 može da se zanemari. To je slučaj, na primer, ako su marginalne raspodele F_1 i F_2 pripadaju istoj familiji raspodela lokacija - skale, odnosno ako postoji funkcija raspodele G, realne konstante μ_1 i μ_2 i pozitivne realne konstante σ_1 i σ_2 tako da relacija

$$F_i(x) = G\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right) \text{ važi za bilo koje } x \in \mathbb{R} \text{ i } i = 1,2$$

U ovom slučaju možemo da zaključimo da je

$$F_i^{-1}(p) = \sigma_i G^{-1}(p) + \mu_i,\ i = 1,2 \ \text{ i } \ p \in (0,1)$$

tako da je

$$\boldsymbol{X} =_d \left(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U)\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{X} =_d (\sigma_1 G^{-1}(U) + \mu_1, \sigma_2 G^{-1}(U) + \mu_2)$$

Prema tome,

$$r_P(X_1, X_2) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{X} =_d (\sigma_1 G^{-1}(U) + \mu_1, \sigma_2 G^{-1}(U) + \mu_2) \qquad (3.6)$$

U ovakvom slučaju, dobija se maksimalna vrednost 1, bez obzira na marginalne raspodele. Prema tome, $\boldsymbol{X}$ komonotono, implicira da je $r_P(X_1, X_2) = 1$. Takođe važi i obrnuto. Zaista, ako je $r_P(X_1, X_2) = 1$, onda postoje realne konstante $a > 0$ i b takve da je $(X_1, X_2) =_d (X_1, aX_2 + b)$ što znači da je $\boldsymbol{X}$ komonotono. Možemo da zaključimo da u Frechetovom prostoru $\mathcal{R}_2(F_1, F_2)$, gde F_1 i F_2 pripadaju istoj familiji lokacija - skale, važi sledeća ekvivalencija:

$$\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2) \text{ je komonotono} \Leftrightarrow r_P(X_1, X_2) = 1$$

Slično, možemo da dokažemo da u takvom Frechetovom prostoru važi

$$\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2) \text{ je kontramonotono} \Leftrightarrow r_P(X_1, X_2) = -1$$

Primer 3.1.1.4.1

Kao specijalan slučaj, nalazimo da je u Frechetovom prostoru $\mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ sa normalnim marginalnim raspodelama F_i, komonotonim za $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ ekvivalentna sa $r_P(X_1, X_2) = 1$. Takođe nalazimo i da je

$$F_i^{-1}(p) = \mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(p)$$

gde su μ_i i σ_i^2 očekivane vrednosti i disperzije od F_i, respektivno, i Φ je kumulativna funkcija raspodele povezana sa standardnom normalnom raspodelom.

3.1.2. KENDALLOV RANG KOEFICIJENT KORELACIJE

Kovarijansa generalno neće dati informacije o strukturi zavisnosti slučajnog para. Stoga, treba da budemo svesni drugih koncepata zavisnosti kao što je rang korelacije. Kendallov rang koeficijent korelacije (često nazivan Kendallovo tau) je neparametarska mera povezanosti bazirana na broju slaganja ili neslaganja na uzorku uparenih posmatranja. Slaganje se dešava kada parovi posmatranja zajedno variraju, a neslaganje kada parovi posmatranja variraju različito.

Par posmatranja je saglasan ako je posmatranje sa višom vrednošću za X_1 takođe ima višu vrednost za X_2. Par nije saglasan ako posmatranje sa višom vrednošću za X_1 ima manju vrednost za X_2. Ako su (X_1, X_2) i (X'_1, X'_2) nezavisni i imaju istu raspodelu, onda kažemo da su u saglasnosti ako je $(X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) > 0$. Kažemo da parovi nisu saglasni kada obrnuta nejednakost važi. Od sad koristimo oznake

$$P\{saglasnost\} = P\{(X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) > 0\}$$

i

$$P\{neslaganje\} = P\{(X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) < 0\}$$

Ideja o korišćenju verovatnoća saglasnosti i nesaglasnosti proizilazi iz činjenice su verovatnoće događaja koji uključuju samo veze nejednakosti između dve slučajne promenljive invarijantne u odnosu na rastuće transformacije ovih promenljivih. Prema tome, definisanje mera zavisnosti uz pomoć ovih verovatnoća garantuje da će one zavisiti isključivo od kupole u osnovi.

Kada smo definisali pojmove saglasnosti i nesaglasnosti, možemo da uvedemo Kendallov rang koeficijent korelacije.

Definicija 3.1.2.1

Kendallov rang koeficijent korelacije za slučajan par (X_1, X_2) je definisan kao

$$r_K(X_1, X_2) = P\{saglasnost\} - P\{neslaganje\}$$

Ako su marginalne raspodele od X_1 i X_2 neprekidne, onda r_K možemo da napišemo i kao

$$r_K(X_1, X_2) = 2P\{(X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) > 0\} - 1$$

gde je (X'_1, X'_2) nezavisna kopija od (X_1, X_2), odnosno $(X_1, X_2) =_d (X'_1, X'_2)$ i dva slučajna para su međusobno nezavisna.

3.1.2.1. OSOBINE

Invarijantnost Kendallovog ranga koeficijent korelacije pod strogo monotonim transformacijama je očigledna: ako su t_1 i t_2 neopadajuće neprekidne funkcije na nosaču od X_1 i X_2, respektivno, onda

$$r_K\big(t_1(X_1), t_2(X_2)\big) = r_K(X_1, X_2) \tag{3.7}$$

Ovo direktno sledi iz činjenice da $t_1(X_1) - t_1(X'_1)$ i $X_1 - X'_1$ imaju isti znak. Isto važi i za $t_2(X_2) - t_2(X'_2)$ i $X_2 - X'_2$.

Ako su X_1 i X_2 međusobno nezavisni, onda je $r_K(X_1, X_2) = 0$. Ovo se lako uočava iz

$$\begin{aligned} r_K(X_1, X_2) &= 2P\{(X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) > 0\} - 1 \\ &= 2(P\{X_1 - X'_1 > 0, X_2 - X'_2 > 0\} + P\{X_1 - X'_1 < 0, X_2 - X'_2 < 0\}) - 1 \\ &= 2\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) - 1 = 0 \end{aligned}$$

3.1.2.2. KOPULE i KENDALLOV RANG KOEFICIJENAT KORELACIJE

Specijalno, (3.7) pokazuje da kada X_i ima neprekidne marginalne funkcije raspodele F_1 i F_2, važi

$$r_K\big(F_1(X_1), F_2(X_2)\big) = r_K(X_1, X_2)$$

tako da vrednost Kendallovog koeficijent korelacije zavisi samo od ranga od X_1 i X_2, stoga i od kopule za (X_1, X_2). Kako sa (X'_1, X'_2) označavamo nezavisnu kopiju od (X_1, X_2) i pod pretpostavkom da ima neprekidne marginalne raspodele Kendallov rang koeficijenta korelacije se tada može zapisati kao

$$\begin{aligned} r_K(X_1, X_2) &= 2P\{(X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) > 0\} - 1 \\ &= 4P\{X_1 \le X'_1, X_2 \le X'_2\} - 1 \end{aligned}$$

Prema tome, r_K za slučajan par (X_1, X_2) neprekidnih slučajnih promenljivih sa kopulom C može da se zapiše kao

$$\begin{aligned} r_K(X_1, X_2) &= 4\int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2)\, d\, C(u_1, u_2) - 1 \\ &= E\big(C(U_1, U_2)\big) - 1 \end{aligned} \tag{3.8}$$

gde (U_1, U_2) označava par od $\mathcal{U}(0,1)$ slučajnih promenljivih sa zajedničkom funkcijom raspodele C.

3.1.2.3. DOPUSTIV SKUP

Za sve raspodele, r_K postoji i uzima vrednosti iz $[-1,1]$. Maksimalna vrednost 1 se dobija kada $X_2 = t(X_1)$ gde je t rastuće. Kendallov rang koeficijent korelacije je tada zadat kao

$$r_K\big(X_1, t(X_1)\big) = 2P\big\{(X_1 - X'_1)\big(t(X_1) - t(X'_1)\big) > 0\big\} - 1 = 1$$

pošto su $X_1 - X'_1$ i $t(X_1) - t(X'_1)$ očigledno istog znaka. Slično, vrednost -1 za r_K se dobija kada je $X_2 = t(X_1)$ za neku opadajuću funkciju t.

Sada ćemo da pokažemo da je $r_K(X_1, X_2) = \pm 1$ ako i samo ako se raspodela slučajnog para $\boldsymbol{X}$ podudara sa jednom od Frechetovih granica.

Teorema 3.1.2.3.1

Neka $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ gde su F_1 i F_2 neprekidne i strogo rastuće i neka je $U: \mathcal{U}(0,1)$. Onda važi sledeća ekvivalencija:

$$r_K(X_1, X_2) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{X} =_d \left(F_1^{-1}(U) F_2^{-1}(U)\right) \tag{3.9}$$

i

$$r_K(X_1, X_2) = -1 \Leftrightarrow \boldsymbol{X} =_d \left(F_1^{-1}(U) F_2^{-1}(1-U)\right) \tag{3.10}$$

Dokaz:

Smer $\Leftarrow$ i u (3.9) i u (3.10) je vrlo jednostavan, tako da ćemo razmatrati samo smer $\Rightarrow$. Neka je C kopula za $\boldsymbol{X}$ i neka je (U_1, U_2) slučajan par sa zajedničkom funkcijom raspodele C. Treba da pokažemo da je

$$r_K(X_1, X_2) = 1 \Longrightarrow (U_1, U_2) =_d (U, U)$$

$E\big(C(U_1, U_2)\big) \leq E\big(C_U(U_1, U_2)\big)$ važi pošto je$C \leq C_U$. Dalje, kako $min\{U_1, U_2\} \leq U_1$ očigledno važi, dobijamo i da je $E\big(C_U(U_1, U_2)\big) \leq E\big(C_U(U, U)\big)$. Kombinujući ove nejednakosti dobijamo da je

$$E\big(C(U_1, U_2)\big) \leq E\big(C_U(U_1, U_2)\big) \leq E\big(C_U(U, U)\big)$$

tako da iz (3.8) zaključujemo da je

$$r_K(U_1, U_2) = r_K(U, U) \Leftrightarrow E\big(C(U_1, U_2)\big) = E\big(C_U(U, U)\big)$$

Ovo dalje implicira

$$E\big(C_U(U_1, U_2) - C(U, U)\big) = \int_0^1 \int_0^1 \underbrace{\big(C_U(u_1, u_2) - C(u_1, u_2)\big)}_{\geq 0\ \forall u_1, u_2 \in [0,1]} d\, C(u_1, u_2) = 0$$

tako da je $C \equiv C_U$; što nam je dokaz za (3.9).

Da bismo dobili (3.10) dovoljno je da vidimo da $E\big(C_L(U, 1-U)\big) \leq E\big(C_L(U_1, U_2)\big)$ važi jer je $C_L \leq C$.

Dalje, pošto je $max\{U_1 + U_2 - 1, 0\} \geq 0$, takođe dobijamo da je $E\big(C_L(U_1, U_2)\big) \leq E\big(C_L(U_1, U_2)\big)$. Kombinovanjem ovih nejednakosti dobijamo

$$E\big(C_L(U,1-U)\big) \le E\big(C_L(U_1,U_2)\big) \le E\big(C(U_1,U_2)\big)$$

Dokaz tada sledi kao i za (3.9). ■

3.1.3 SPEARMANOV RANG KOEFICIJENT KORELACIJE

Spearmanov rang koeficijent korelacije za par slučajnih promenljivih X_1 i X_2 (generalno nazivan Spearmanovo ro) se obično definiše kao Pearsonovo r_P za rangove $F_1(X_1)$ i $F_2(X_2)$.

Definicija 3.1.3.1

Spearmanov rang koeficijent korelacije r_S za par neprekidnih slučajnih promenljivih X_1 i X_2 je isti kao i Pearsonov koeficijent korelacije za rangove od F_1 i F_2:

$$r_S(X_1,X_2) = r_P\big(F_1(X_1),F_2(X_2)\big)$$

Spearmanov rang koeficijenta korelacije može da se zapiše kao

$$r_S(X_1,X_2) = 3\left(P\big((X_1-X_1^{\perp})(X_2-X_2^{\perp})>0\big) - P\big((X_1-X_1^{\perp})(X_2-X_2^{\perp})<0\big)\right)$$

gde je $(X_1^{\perp},X_2^{\perp})$ nezavisna verzija od (X_1,X_2), to jest, $(X_1^{\perp},X_2^{\perp})$ je slučajan vektor sa nezavisnim komponentama, tako da su $X_1 =_d X_1^{\perp}$, $X_2 =_d X_2^{\perp}$ i (X_1,X_2) i $(X_1^{\perp},X_2^{\perp})$ uzajamno nezavisni. To dolazi direktno od

$$\begin{aligned} r_S(X_1,X_2) &= 3\big(2P\big((X_1-X_1^{\perp})(X_2-X_2^{\perp})>0\big)-1\big) \\ &= 3(4P(X_1<X_1^{\perp},X_2<X_2^{\perp})-1) \\ &= 12F_X(X_1^{\perp},X_2^{\perp})-3 \\ &= 12\int_0^1\int_0^1 C(u_1,u_2)\,du_1du_2-3 \\ &= 12\int_0^1\int_0^1 u_1u_2\,dC(u_1,u_2)-3 \\ &= 12E(U_1U_2)-3 \end{aligned} \tag{3.11}$$

gde (U_1,U_2) definisano kao gore, ima istu kopulu C kao $\boldsymbol{X}$ i $\mathcal{U}(0,1)$ marginalne raspodele. Spearmanov rang koeficijent korelacije je prema tome proporcionalan verovatnoći saglasnosti minus verovatnoća nesaglasnosti za par slučajnih vektora sa istim marginalnim raspodelama, gde jedna od njih ima nezavisne komponente.

3.1.3.1. OSOBINE

Baš kao r_K, i r_S je invarijantno pod strogo monotonim transformacijama, odnosno, ako su t_1 i t_2 strogo rastuće (ili opadajuće) funkcije na nosačima od X_1 i X_2, respektivno, onda je

$$r_S\big(t_1(X_1),t_2(X_2)\big) = r_S(X_1,X_2). \tag{3.12}$$

Dalje, ako su X_1 i X_2 međusobno nezavisni, onda je $r_S(X_1, X_2) = 0$.

Kao što smo gore već istakli, Spearmanov rang koeficijent korelacije je prosto Pearsonovo r_P za rangove. Stoga, pretpostavljajući da su marginalne funkcije raspodele F_1 i F_2 neprekidne i definišući $U_1 = F_1(X_1)$ i $U_2 = F_2(X_2)$, $r_S(X_1, X_2)$ može da se zapiše kao

$$r_S(X_1, X_2) = r_P(U_1, U_2) = \frac{E(U_1U_2) - \frac{1}{4}}{\frac{1}{12}} \tag{3.13}$$

3.1.3.2. KOPULE i SPEARMANOV RANG KOEFICIJENT KORELACIJE

Vraćajući se na izraz izveden iz Pearsonovog koeficijenta korelacije, nalazimo da je

$$r_S(X_1, X_2) = r_P\big(F_1(X_1), F_2(X_2)\big) = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1u_2)\, du_1 du_2$$

3.1.3.3. DOPUSTIV SKUP

Sada ćemo da dokažemo da je Spearmanov koeficijent korelacije analogan tvrdjenju 3.1.2.3.1.

Teorema 3.1.3.3.1

Neka $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$, sa neprekidnim i strogo rastućim F_1 i F_2 i $U: \mathcal{U}(0,1)$. Tada važe sledeće ekvivalencije:

$$r_S(X_1, X_2) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{X} =_d (F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U)) \tag{3.14}$$

i

$$r_S(X_1, X_2) = -1 \Leftrightarrow \boldsymbol{X} =_d (F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(1 - U)) \tag{3.15}$$

Dokaz:

Smer ekvivalnecije $\Leftarrow$ od (3.14) i (3.15) je vrlo jednostavan, tako da ćemo da razmatramo samo smer $\Rightarrow$. Dovoljno je da pokažemo da je

$$r_S(U_1, U_2) = 1 \Rightarrow (U_1, U_2) =_d (U, U)$$

gde je (U_1, U_2) par $\mathcal{U}(0,1)$ slučajnih promenljivih sa istom kopulom kao i (X_1, X_2). Dobijamo da je

$$r_P(U_1, U_2) = r_P\left(F_{U_1}(U_1), F_{U_2}(U_2)\right) = r_S(U_1, U_2) = 1$$

što sa (3.6) implicira da je $P(U_1 = U_2) = 1$. Prema tome, sledi da je $(U_1, U_2) =_d (U, U)$.
Izraz (3.15) se dokazuje na isti način. ■

3.1.4. VEZE IZMEĐU KENDALLOVOG I SPEARMANOVOG KOEFICIJENTA KORELACIJE

Vrednosti od r_S i r_K su često izuzetno različite. Sledeći rezultat određuje koliko različiti r_S i r_K mogu da budu.

Teorema 3.1.4.1

Nejednakost

$$\frac{3r_K-1}{2} \leq r_S \leq \frac{1+2r_K-r_K^2}{2} \text{ važi za } r_K \geq 0$$

i

$$\frac{r_K^2+2r_K-1}{2} \leq r_S \leq \frac{1+3r_K}{2} \text{ važi za } r_K \leq 0.$$

3.1.5 DRUGE MERE ZAVISNOSTI

<u>Ginijev koeficijent korelacije</u>

Ginijev koeficijent se primenjuje u ekonomiji da bi se izmerile razlike prihoda između dve populacije. Tehnički, to je vrsta „udaljenosti“ između strukture zavisnosti vektora $\boldsymbol{X}$ i monotone zavisnosti kao što je predstavljeno Frechetovim gornjim i donjim graničnim kopulama.

Definicija 3.1.5.1

Za dato $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$, Ginijev koeficijent korelacije je definisan kao

$$r_G(X_1, X_2) = r_G\big(F_1(X_1), F_2(X_2)\big) = 2\int_0^1\int_0^1 (|u_1+u_2-1| - |u_1-u_2|)dC(u_1,u_2)$$

gde je C kopula para (X_1, X_2).

Teorema 3.1.5.2

Neka je $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ i $U: \mathcal{U}(0,1)$. Tada važe sledeće ekvivalncije:

$$r_G(X_1, X_2) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{X} =_d \left(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U)\right) \tag{3.16}$$

i

$$r_G(X_1, X_2) = -1 \Leftrightarrow \boldsymbol{X} =_d \left(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(1-U)\right). \tag{3.17}$$

Dokaz:

Smer $\Leftarrow$ je trivijalan i za (3.16) i za (3.17). Ostaje da pokažemo da je

$$r_G(U_1, U_2) = 1 \Rightarrow (U_1, U_2) =_d (U, U)$$

gde je (U_1, U_2) par sa $\mathcal{U}(0,1)$ marginalnim raspodelama i kopulom C. Pošto je

$$r_G(U_1,U_2) = 4\int_0^1\int_0^1 C(u_1,u_2)dC_U(u_1,u_2) + 4\int_0^1\int_0^1 C(u_1,u_2)dC_L(u_1,u_2) - 2$$

$r_G(U_1,U_2) = r_G(U,U)$ implicira da je

$$\int_0^1\int_0^1 \underbrace{\left(C_U(u_1,u_2) - C(u_1,u_2)\right)}_{\geq 0\ \forall u_1,u_2\in[0,1]} dC_U(u_1,u_2) + \int_0^1\int_0^1 \underbrace{\left(C_U(u_1,u_2) - C(u_1,u_2)\right)}_{\geq 0\ \forall u_1,u_2\in[0,1]} dC_L(u_1,u_2) = 0$$

što implicira da je $C \equiv C_U$, čime zaključujemo dokaz za(3.16).
Dokaz za (3.17) dobijamo na isti način. ■

Blomqvistov koeficijent korelacije

Još jedna mera saglasnosti jeste Blomqvistov koeficijent korelacije, poznat kao i prosečni koeficijent korelacije.

Definicija 3.1.5.3

Za dato $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_2(F_1,F_2)$, Blomqvistov koeficijent korelacije je definisan kao

$$r_B(X_1,X_2) = P\left(\left(X_1 - F_1^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)\left(X_2 - F_2^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) > 0\right) - P\left(\left(X_1 - F_1^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)\left(X_2 - F_2^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) < 0\right)$$
$$= 4F_X\left(F_1^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right), F_2^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) - 1$$

gde je $F_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ medijana od $X_i,\ i = 1,2$.

Sledeći rezultat važi za r_B.

Teorema 3.1.5.4,

Neka je $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_2(F_1,F_2)$ i $U{:}\,\mathcal{U}(0,1)$. Tada važe naredne implikacije:

$$\boldsymbol{X} =_d \left(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U)\right) \Rightarrow r_B(X_1,X_2) = 1 \tag{3.18}$$

$$\boldsymbol{X} =_d \left(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(1-U)\right) \Rightarrow r_B(X_1,X_2) = -1 \tag{3.19}$$

$$\boldsymbol{X} =_d (X_1^{\perp}, X_2^{\perp}) \Rightarrow r_B(X_1,X_2) = 0. \tag{3.20}$$

Obrnuto od (3.18), (3.19) i (3.20), generalno ne važi.

Dokaz:

Osobine (3.18) - (3.20) su očigledne. One lako slede iz činjenice da je

$$r_B(X_1,X_2) = r_B(U_1,U_2) = 4C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) - 1$$

Dakle, Blomqvistov koeficijent korelacije koristi samo jednu vrednost kopule. Prema tome, lako je dati primere u kojima obrnute implikacije ne važe. Razmotrićemo na primer, parametarsku familiju. Za

$$C(u_1,u_2)=\begin{cases} max\left\{0,u_1+u_2-\frac{1}{2}\right\}, & za\ 0\le u_1,u_2\le\frac{1}{2},\\ max\left\{\frac{1}{2},u_1+u_2-1\right\}, & za\ \frac{1}{2}\le u_1,u_2\le 1\\ C_U(u_1,u_2), & inače\end{cases}$$

vidimo da je $r_B(U_1,U_2)=1$, ali C nije saglasno sa C_U, što je u kontradikciji sa obrnutim smerom u (3.18). S druge strane, za

$$C(u_1,u_2)=\begin{cases} max\left\{0,u_1+u_2-\frac{1}{4}\right\}, & za\ 0\le u_1,u_2\le\frac{1}{4},\\ max\left\{\frac{1}{4},u_1+u_2-1\right\}, & za\ \frac{1}{4}\le u_1,u_2\le 1\\ C_U(u_1,u_2), & inače\end{cases}$$

vidimo da je $r_B(U_1,U_2)=0$, ali da je $C\neq C_L$, što je u kontradikciji sa obrnutim smerom u(3.20). Konačno ćemo da razmotrimo član

$$C(u_1,u_2)=\begin{cases} max\{0,u_1+u_2-\theta\}, & za\ (u_1,u_2)\in[0,1-\theta]\times[0,1],\\ max\{u_1+\theta-1,u_2\}, & za\ (u_1,u_2)\in[1-\theta,0]\times[0,\theta]\\ C_L(u_1,u_2), & inače\end{cases}$$

što odgovara $\theta=\frac{1}{2}$. Tada dobijamo da je $r_B(U_1,U_2)=-1$, ali $C\neq C_L$, što je u kontradikciji sa obrnutim smerom od(3.19).

3.2. STRUKTURE ZAVISNOSTI

3.2.1. POZITIVNA KVADRANT ZAVISNOST

Intuitivno govoreći, pozitivne vrednosti mera saglasnosti ukazuju na pozitivne zavisnosti između ishoda X_1 i X_2. U ovom poglavlju ćemo detaljnije razjasniti kocept pozitivne zavisnosti. Nećemo se osloniti samo na generalne skalarne vrednosti, već ćemo i da ispitamo vrstu zavisnosti koju lokalno pokazuju slučajni parovi.

Koncept pozitivne kvadrant zavisnosti je definisan na sledeći način.

Definicija 3.2.1.1

Za slučajan par $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ kažemo da je pozitivno kvadrant zavistan (*PQD*) ako

$$X_1 \preccurlyeq_{ST} (X_1 | X_2 > x_2) \text{ za svako } x_2 \text{ takvo da je } \bar{F}_2(x_2) > 0$$

i

$$X_2 \preccurlyeq_{ST} (X_2 | X_1 > x_1) \text{ za svako } x_1 \text{ takvo da je } \bar{F}_1(x_1) > 0$$

Prvi kocept pozitivne zavisnosti je definisan sa $\preccurlyeq_{ST}$. To pokazuje da svaka komponenta slučajnog para postaje veća (u smislu $\preccurlyeq_{ST}$) kada druga komponenta prelazi neki prag. Ovo se podudara sa intuitivnim sadržajem "pozitivne zavisnosti".

Definicija pozitivne kvadrant zavisnosti može da se da na nekoliko ekvivalentnih načina.

Teorema 3.2.1.2

Neka je $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ slučajan par u $\mathcal{R}_2(F_1, F_2)$. Tada važi, $\boldsymbol{X}$ je *PQD* ako i samo ako je ispunjen jedan od narednih ekvivalentnih uslova:

1) $\bar{F}_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) \geq \bar{F}_1(x_1)\bar{F}_2(x_2)$ za svako $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
2) $F_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) \geq F_1(x_1)F_2(x_2)$ za svako $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
3) $P(X_2 > x_2 | X_1 > x_1) \geq \bar{F}_2(x_2)$ za svako $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tako da je $\bar{F}_1(x_1) > 0$.
4) $P(X_1 > x_1 | X_2 > x_2) \geq \bar{F}_1(x_1)$ za svako $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tako da je $\bar{F}_2(x_2) > 0$.

Iz ove definicije vidimo da kada je $\boldsymbol{X}$ *PQD*, njegove komponente X_1 i X_2 imaju veću verovatnoću da budu veće zajedno, ili da budu manje zajedno, u poređenju sa teorijskom situacijom u kojoj su X_1 i X_2 nezavisni. Uslovi (3) i (4) imaju intuitivnu interpretaciju s obzirom na to da ti uslovi znače da kada je X_1 veće (odnosno. $X_1 > x_1$), to povećava verovatnoću da i X_2 bude veće.

3.2.1.1. OSOBINE

Pozitivna kvadrant zavisnost ima sledeće invarijantne osobine:

Teorema 3.2.1.1.1

Ako je (X_1, X_2) je *PQD*, tada je i $\big(t_1(X_1), t_2(X_2)\big)$ *PQD* za bilo koje neopadajuće neprekidne funkcije t_1 i t_2.

Dokaz:

Zaista,

$$P(t_1(X_1) \le x_1, t_2(X_2) \le x_2) = P\big(X_1 \le t_1^{-1}(x_1), X_2 \le t_2^{-1}(x_2)\big)$$
$$\ge P\big(X_1 \le t_1^{-1}(x_1)\big)P\big(X_2 \le t_2^{-1}(x_2)\big) = P(t_1(X_1) \le x_1)P(t_2(X_2) \le x_2)$$

čime je osobina dokazana. ■

Teorema 3.2.1.1.1 pokazuje da je teorija o pozitivnoj kvadrant zavisnosti karakteristična za kopulu u osnovi, kao što je pokazano u narednoj posledici.

Posledica 3.2.1.1.2

Neka je $\boldsymbol{X}$ slučajan par sa kopulom C. Tada je $\boldsymbol{X}$ *PQD* ako i samo ako je

$$C(u) \ge C_I(u) \text{ za svako } u \in [0,1]^2$$

3.2.1.2. POZITIVNA KVADRNAT ZAVISNOST I KOEFICIJENTI KORELACIJE

Teorema 3.2.1.2.1

Razmatramo $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$. Ako je (X_1, X_2) *PQD*, onda je $r_P(X_1, X_2) \ge 0$. Obrnuto generalno ne važi, osim u dvodimenzionalnom normalnom slučaju.

Sada ćemo da ispitamo rang koeficijent korelacije. Implikacija iz teoreme 3.2.1.2.1 i dalje važi za ove mere zavisnosti.

Teorema 3.2.1.2.2

Ako je (X_1, X_2) *PQD*, onda je $r_K(X_1, X_2) \ge 0$ i $r_S(X_1, X_2) \ge 0$.

Dokaz:

Iz posledice 3.2.1.1.2 znamo da je pozitivna kvadrant zavisnost osobina kopule u osnovi. S druge strane, Kendallov i Spearmanov rang koeficijenti korelacije zavise samo od kopule. Neka je (U_1, U_2) slučajan par sa $\mathcal{U}(0,1)$ marginalnim raspodelama i istom kopulom kao i (X_1, X_2). Rezultat tada sledi iz (3.8) za Kendallov rang koeficijent korelacije kao

$$r_K(X_1, X_2) \ge 4E(U_1, U_2) - 1 \ge 4E(U_1)E(U_2) - 1 = 0$$

gde nejednakost proizilazi iz činjenice da su U_1 i U_2 pozitivno korelisani iz teoreme 3.2.1.2.1. Rezultat za Spearmanov rang koeficijent korelacije sledi slično iz (3.13).

Naredni rezultat pokazuje vezu između nezavisnosti i nekorelisanosti u *PQD*.

Ali pre toga ćemo definisati pomoćno tvrđenje

Lema 3.2.1.2.3

Za date dve slučajne promenljive X i Y kovarijansa je

$$C(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(P(X > x, Y > y) - \overline{F}_X(x)\overline{F}_Y(y)\right)\, dxdy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(P(X \le x, Y \le y) - F_X(x)F_Y(y)\right)\, dxdy$$

Teorema 3.2.1.2.4

Neka je $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ *PQD*. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

1) $\boldsymbol{X}$ ima nezavisne komponente
2) $r_P(X_1, X_2) = 0$
3) $r_K(X_1, X_2) = 0$
4) $r_S(X_1, X_2) = 0$

Dokaz:

Ekvivalencija (1) i (2) je direktna posledica teoreme 1.6.13. Za ekvivalenciju (1) i (3) ćemo bez gubitka opštosti, razmatrati slučaj kada su marginalne raspodele $\mathcal{U}(0,1)$. Reći da je (U_1, U_2) *PQD*, znači da njihova zajednička funkcija raspodele C zadovoljava $C \ge C_I$. Iz $E(C(U_1, U_2)) \ge E(C_I(U_1, U_2)) \ge E(C_I(U_1^\perp, U_2^\perp))$ sledi da je $E(C(U_1, U_2)) = E(C_I(U_1, U_2))$, jer $E(C(U_1, U_2)) = E(C_I(U_1^\perp, U_2^\perp))$ važi po pretpostavci. Stoga,

$$E(C(U_1, U_2)) - E(C_I(U_1, U_2)) = \int_0^1\int_0^1 \underbrace{\left(C(u_1, u_2) - C_I(u_1, u_2)\right)}_{\ge 0\ \forall u_1, u_2 \in [0,1]}\, dC(u_1, u_2) = 0$$

daje $C \equiv C_I$. Dokaz za ekvivalenciju (1) i (4) je sličan. ■

Sledeći rezultat sledi iz teorema 3.2.1.1.1 i 3.2.1.2.1.

Teorema 3.2.1.2.5

Slučajan par X je *PQD* ako i samo ako

$$Cov(t_1(X_1), t_2(X_2) \ge 0 \tag{3.21}$$

za bilo koje neopadajuće funkcije t_1 i t_2, pod uslovom da očekivanja postoje.

Kao što je pokazano u sledećem rezultatu, teorija pozitivne kvadrant zavisnosti može da se iskoristi za razmatranje efekata pretpostavke o nezavisnosti, kada su rizici ustvari pozitivno zavisni.

Teorema 3.2.1.2.6

Ako su rizici X_1 i X_2 *PQD*, tada imamo da je

$$X_1^\perp + X_2^\perp \preccurlyeq_{SL+} X_1 + X_2$$

Tvrđenje pokazuje da ako su date marginalne raspodele, i ako su X_1 i X_2 *PQD*, pretpostavka o nezavisnosti će uvek da potceni stvarne *stop-loss* premije.

Napomena:

Postoje dva tipa procedura za testiranje pozitivne kvadrant zavisnosti. Prva procedura je bazirana na specifikaciji kocepata preko funkcija raspodele, dok drugi istražuje reprezentacije kopula. Za svaku specifikaciju je razvijen test udaljenosti, kao i test presek - unija za ograničenja nejednakosti, za podatke koji su zavisni od vremena.

Slična teorija, asimptotska zavisnost, je empirijski analizirana i odogovara tačno pozitivnoj kvadrant zavisnosti, ali za verovatnoće gubitka koje teže nuli. Koncepti asimptotskih zavisnosti imaju upotrebu u oblastima kao što su selekcija portfolija i rizik mendžment, valuacija opcija i analiza kreditnog rizika. Većina ostaje važeća u *PQD* slučaju, ali za manje ekstremne rizike. Primetimo, međutim, da dve asimptotski nezavisne promenljive mogu da pokažu *PQD* ponašanje (slučaj Gaussovske kopule), pa bi prema tome pozitivne kvadrant zavisnosti trebalo da budu primarni objekat fokusa. Čak i rizici koji su daleko od ekstrema, mogu da dovedu do ozbiljnih šteta.

3.2.1.3. ŽIVOTNO OSIGURANJE

Iz teoreme 3.2.1.2, jednostavno je zaključiti da kada je $\boldsymbol{X}$ *PQD*, stohastičke nejednakosti

$$min(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}) \preccurlyeq_{ST} min(X_1, X_2) \text{ i } max(X_1, X_2) \preccurlyeq_{ST} max(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}) \qquad (3.22)$$

važe. Formula (3.22) objašnjava koliko je korisna pozitivna kvadrant zavisnost u velikom broju različitih situacija, s obzirom na to da predlaže prirodan način generisanja granica koje mogu da se izračunaju za maksimum ili minimum *PQD* rizika.

Primer 3.2.1.3.1

Razmatramo životne statuse (x_1) i (x_2) sa preostalim životnim vekom $T_{(x_1)}$ i $T_{(x_2)}$, respektivno. Zajednički životni status (x_1, x_2) postoji dok god svi pojedinačni statusi postoje. Ovaj status ima preostali životni vek

$$T_{(x_1,x_2)} = min\{T_{(x_1)}, T_{(x_2)}\}$$

Status poslednjeg preživelog $\overline{(x_1, x_2)}$ postoji dok god je bar jedan od individualnih statusa živ. Njegov preostali životni vek je zadat sa

$$T_{\overline{(x_1,x_2)}} = max\{T_{(x_1)}, T_{(x_2)}\}$$

Dalje pretpostavljamo da je $T = \{T_{(x_1)}, T_{(x_2)}\}$ *PQD*. Uvešćemo i sledeću notaciju:

$$T^{\perp}_{(x_1,x_2)} = min\{T^{\perp}_{(x_1)}, T^{\perp}_{(x_2)}\}$$

i

$$T^{\perp}_{\overline{(x_1,x_2)}} = max\{T^{\perp}_{(x_1)}, T^{\perp}_{(x_2)}\}$$

Iz (3.22) sledi da je

$$T^{\perp}_{(x_1,x_2)} \preccurlyeq_{ST} T_{(x_1,x_2)} \text{ i } T_{\overline{(x_1,x_2)}} \preccurlyeq_{ST} T^{\perp}_{\overline{(x_1,x_2)}}$$

što za uzvrat implicira sledeće nejednakosti za čistu premiju životnog anuiteta:

$$\ddot{a}^{\perp}_{(x_1,x_2)} \leq \ddot{a}_{(x_1,x_2)} \text{ i } \ddot{a}_{\overline{(x_1,x_2)}} \leq \ddot{a}^{\perp}_{\overline{(x_1,x_2)}}$$

gde $\perp$ služi da pokaže da je anuitet baziran na $T^{\perp}_{(x_1,x_2)}$ ili $T^{\perp}_{\overline{(x_1,x_2)}}$. To znači da za *PQD* preostali životni vek, pretpostavka o nezavisnosti (dok marginalne funkcije raspodele ostaju nepromenjene) dovodi do potcenjivanja neto premije (i rezervi) zajedničkog životnog anuiteta. Suprotan zaključak važi za anuitet poslednjeg preživelog. Slični zaključci se mogu izvući i za celokupno životno osiguranje.

3.2.1.4. POZITIVNE *STOP - LOSS* ZAVISNOSTI

Sada ćemo da uvedemo drugi koncept pozitivne zavisnosti koji se naziva stop - loss zavisnost. Ideja je da zamenimo $\preccurlyeq_{SL}$ za $\preccurlyeq_{ST}$ u definiciji pozitivne kvadrant zavisnosti.

Definicija 3.2.1.4.1

Za rizike X_1 i X_2 kažemo da su pozitivno *stop - loss* zavisni (*PSLD*) ako

$$X_1 \preccurlyeq_{SL} (X_1|X_2 > t_2) \text{ i } X_2 \preccurlyeq_{SL} (X_2|X_1 > t_1)$$

za sve $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$.

Primetimo da su rizici X_1 i X_2 *PSLD* ako važe nejednakosti

$$E((X_1 - t_1)_+|X_2 > t_2) \geq E((X_1 - t_1)_+)$$

i

$$E((X_2 - t_2)_+|X_1 > t_1) \geq E((X_2 - t_2)_+)$$

za sve $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$. Ekvivalentan uslov dajemo sledećim rezultatom.

Teorema 3.2.1.4.2

X_1 i X_2 su *PSLD* ako i samo ako nejednakosti

$$E\big((X_1 - t_1)_+ I(X_2 > t_2)\big) \geq E((X_1 - t_1)_+)P(X_2 > t_2)$$

i

$$E(I(X_1 - t_1)(X_2 - t_2)_+) \geq P(X_1 - t_1)E((X_2 > t_2)_+)$$

važi za sve $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$.

Dokaz:

Primenimo uopštenu jednakost $E(Y) = E(Y|A)P(A) + E\big(Y\big|\overline{A}\big)P\big(\overline{A}\big)$ na slučajnu promenljivu $Y = (X_1 - t_1)_+ I(X_2 - t_2)$ i događaj $A = (X_2 - t_2)$. Dalje, koristimo

$$E(Y|A) = E((X_1 - t_1)_+|X_2 > t_2)$$

da bismo završili dokaz. ■

Sada ćemo uvesti podskup $\mathcal{R}_2(F_1, F_2; c)$ skupa $\mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ koji se sastoji od svih elemenata $\mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ sa zadatim kovarijansama c (ili Pearsonovim linearnim koeficijentom korelacije r). Specijalno, neka je

$$\mathcal{R}_2(F_1, F_2; c) = \{X \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)|Cov(X_1, X_2) = c\}$$

gde je c dopustiva vrednost za kovarijansu između članova $\mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ (odnosno. c zadovoljava uslov iz teoreme 3.2.1.2.5). $\mathcal{R}_2(F_1, F_2; c)$ nazivamo Frechetovim potprostorom. Primetimo da ako X i Y oboje pripadaju $\mathcal{R}_2(F_1, F_2; c)$, tada

$$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + c = Var(Y_1 + Y_2)$$

To znači da je unutar $\mathcal{R}_2(F_1, F_2; c)$

$$X_1 + X_2 \preccurlyeq_{SL=} Y_1 + Y_2 \Rightarrow X_1 + X_2 =_d Y_1 + Y_2$$

Prema tome, ni red konveksnosti, ni *stop-loss* red nije pogodan da bi se uporedila rizičnost agregatnih zahteva u Frechetovom potprostoru.

Primetimo da je činjenica da stop-loss red nije pogodan u $\mathcal{R}_2(F_1, F_2; c)$ slična činjenici da stohastička dominantnost nije pogodna u $\mathcal{R}_2(F_1, F_2)$. Zaista, u $\mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ važi da je

$$X_1 + X_2 \preccurlyeq_{ST} Y_1 + Y_2 \Rightarrow X_1 + X_2 =_d Y_1 + Y_2$$

jer je $E(X_1 + X_2) = E(Y_1 + Y_2)$.

Zbir dve komponente Frechetovog potprostora možemo da uporedimo uz pomoć reda opreznosti $\preccurlyeq_{PRUD}$ (za koji su dva prva momenta slučajnih promenljivih jednaka, odnosno. $X \preccurlyeq_{PRUD} Y$ ako i samo ako $E\big(g(X)\big) \leq E\big(g(Y)\big)$ za sve funkcije g takve da je $g^{(3)} \geq 0$, pod uslovom da očekivanja postoje).

Red opreznosti pripada klasi reda *s*-konveksnosti. Za $s = 1$ imamo da je $\preccurlyeq_{ST}$, za $s = 2$ imamo da je $\preccurlyeq_{SL=}$ i za $s = 3$ znamo da odgovara redu opreznosti. Red opreznosti je koristan za upoređivanje raspodela verovatnoća sa jednakim očekivanjima i disperzijama.

Teorema 3.2.1.4.3

Ako su rizici X_1 i X_2 *PSLD*, tada

$$X_1^{\perp} + X_2^{\perp} \preccurlyeq_{PRUD} X_1 + X_2$$

3.2.1.5. PROŠIRENJE DO *n* RIZIKA

Definicija 3.2.1.5.1

Slučajne promenljive $X_1, X_2, \dots, X_n$ su kumulativno zavisne (*CD*) ako su slučajne kopule $(\sum_{i=1}^{j=1} X_i, X_j)$ *PQD* za $j = 2,3, \dots, n$.

Zainteresovanost za kumulativnu zavisnost u aktuarskoj nauci potiče od narednog rezultata.

Teorema 3.2.1.5.2

Ako je $\boldsymbol{X}$ *CD*, onda važi stohastička nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^{\perp} \preccurlyeq_{SL=} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Dokaz:

Bez gubitka opštosti, slučajni vektori $\boldsymbol{X}^{\perp}$ i $\boldsymbol{X}$ mogu se smatrati nezavisnima. Nastavljamo indukcijom. Prvo, $X_1^{\perp} \preccurlyeq_{SL=} X_1$ trivijalno važi. Sada pretpostavljamo da

$$X_1^{\perp} + X_2^{\perp} + \cdots + X_k^{\perp} \preccurlyeq_{SL=} X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

važi za $k = 1,2, \dots, n-1$. Tada, zatvaranjem $\preccurlyeq_{SL=}$ pod konvolucijom, dobijamo stohastičku nejednakost

$$X_1^{\perp} + X_2^{\perp} + \cdots + X_{n-1}^{\perp} + X_n^{\perp} \preccurlyeq_{SL=} X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n^{\perp} \qquad (3.23)$$

Sada, pošto je $\boldsymbol{X}$ *CD* i X_n i $X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}$ su *PQD*, iz tvrđenja 3.2.1.2.6 dobijamo da je

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n^{\perp} \preccurlyeq_{SL=} X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n \qquad (3.24)$$

Kombinujući (3.23) i (3.23) dobijamo traženi rezultat osobinom tranzitivnosti za $\preccurlyeq_{SL=}$.

■

Iz teoreme 3.2.1.5.2 sledi da pretpostavka o uzajamnoj nezavisnosti između komponenata *CD* rizika *X* dovodi do potcenjivanja stop-loss premija. To znači da osiguravač ustvari ne zasniva svoje odluke na realnim agregatnim zahtevima, već na manje rizičnim agregatnim zahtevima, što je, naravno, vrlo opasna strategija.

3.2.2. USLOVNI NIZOVNI RAST

Sledeća struktura zavisnosti, koju nazivamo uslovnim nizovnim rastom, dobijamo pod uslovom da uslovne raspodele rastu u smislu $\preccurlyeq_{ST}$ sa vrednostima uslovnih promenljivih. Ovo formalno dajemo narednom definicijom.

Definicija 3.2.2.1

Za slučajan vektor $\boldsymbol{X}$ kažemo da uslovno nizovno raste (*CIS*) ako za sve $i = 2,3, \dots, n$

$$(X_i | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}) \preccurlyeq_{ST} (X_i | X_1 = y_1, X_2 = y_2, \dots, X_{i-1} = y_{i-1})$$

za sve $x_1 \le y_1, x_2 \le y_2, \dots, x_{i-1} \le y_{i-1}$ u nosaču od X_i.

Teorema 3.2.2.2

Ako je ili *X* ili *Y CIS*, $X_i \preccurlyeq_{ST} Y_i$ i

$$[X_i | X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}] \preccurlyeq_{ST} [Y_i | Y_1 = x_1, \dots, Y_{i-1} = x_{i-1}]$$

za svako $x_j,\ j = 1,2, \dots i-1$, tada je $X \preccurlyeq_{ST} Y$.

Preostaje nam da definišemo jači koncept zavisnosti koji je usko povezan sa uslovnim nizovnim rastom.

Definicija 3.2.2.3

Za n-dimenzionalni slučajni vektor $\boldsymbol{X}$ kažemo da uslovno raste (*CI*) ako je $(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \dots, X_{\pi(n)})$ *CIS* za sve permutacije π od $\{1,2,\dots,n\}$, odnosno. ako je za bilo koje i

$$\left(X_i | X_j = x_j,\ \ j \in J\right) \preccurlyeq_{ST} \left(X_i | X_j = x_j',\ \ j \in J\right)$$

kad god je $x_j \leq x_j'$, gde $J \in \{1,2,\dots,n\}$ i $i \notin J$.

Primetimo da, suprotno od uslovnog nizovnog rasta, uslovni rast je simetričan koncept zavisnosti.

Napomena:

Da bismo videli da je implikacija

$$\boldsymbol{X} \text{ je } CI \Rightarrow \boldsymbol{X} \text{ je } CIS$$

uzimamo da $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ ima uniformnu raspodelu na $(1,1), (1,2), (2,1)$ i $(2,3)$. Tada je $\boldsymbol{X}$ *CIS*, ali

$$P(X_i \geq 0 | X_2 = 1) = \frac{1}{2} > 0 = P(X_1 \geq 2 | X_2 = 2)$$

tako da *X* nije *CI*.

3.2.2.1. USLOVNI RAST I KOPULE

Proveravanje uslovnog rasta je lako u dvodimenzionalnom slučaju, kada kompletna karakterizacija *CI* kopula postoji.

Teorema 3.2.2.1.1

Dvodimenzionalna kopula C je *CI* ako i samo ako je C konkavna u svakoj promenljivoj kada je druga fiksirana.

Teorema 3.2.2.1.2

Multivarijantan normalan slučajan vektor $\boldsymbol{X}$ sa matricom varijansi - kovarijansi $\boldsymbol{\Sigma}$ je *CI* ako i samo ako je $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ M - matrica, odnosno njeni elementi koji nisu na dijagonali su nenegativni.

3.2.3. VIŠEDIMENZIONALNA TOTALNA POZITIVNOST REDA 2

3.2.3.1. DVODIMENZIONALNA TOTALNA POZITIVNOST REDA 2

Prvo ćemo da definišemo koncept zavisnosti za slučajne parove, poznate kao totalna pozitivnost reda 2. Cilj je da se formalizuje pozitivna zavisnost koja postoji između dve komponente slučajnog para (odnosno. činjenica da velike vrednosti jedne

komponente teže da budu povezane sa velikim vrednostima druge).

Definicija 3.2.3.1.1

Za slučajan par $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ kažemo da je totalno pozitivan reda 2 (TP_2) ako važi $(X_2|X_1 = x_1) \preccurlyeq_{LR} (X_2|X_1 = x_1')$ za sve $x_1 \leq x_1'$ i $(X_1|X_2 = x_2) \preccurlyeq_{LR} (X_1|X_2 = x2'$ za sve $x2 \leq x2'$.

TP_2 koncept nameće $\preccurlyeq_{LR}$ rast jedne komponente slučajnog para za vrednost druge komponente. Ovaj pojam zavisnosti je, prema tome, više intutitivnog karaktera, s obzirom na to da se vrednost jedne od komponenata povećava za vrednost druge komponente, u $\preccurlyeq_{LR}$ smislu.

Primetimo da je par $\boldsymbol{X}$ neprekidnih slučajnih promenljivih TP_2

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) f_{\boldsymbol{X}}(x_1', x_2') \geq f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2') f_{\boldsymbol{X}}(x_1', x_2) \text{ za bilo koje } x_1 \leq x_1' \text{ i } x_2 \leq x_2'$$

Primetimo da ova nejednakost poseduje intuitivnu interpretaciju u smislu verovatnoće. Pretpostavimo da su vrednosti slučajnog para $\boldsymbol{X}$ i njegove nezavisne kopije X', x_1, x_2, x_1' i x_2'. Tada je verovatnije da jedan od dva slučajna para pretpostavi dve najveće vrednosti, a drugi da pretpostavi dve najmanje vrednosti. Ovo izražava činjenicu da je verovatnije da su obe komponente od $\boldsymbol{X}$ istovremeno velike ili male. Dve celobrojne slučajne promenljive M_1 i M_2 su TP_2 ako i samo ako nejdnakosti

$$\begin{aligned} P(M_1 = k_1, M_2 = k_2) P(M_1 = k_1', M_2 = k_2') \\ \geq P(M_1 = k_1, M_2 = k_2') P(M_1 = k_1', M_2 = k_2) \end{aligned}$$

važi za bilo koje $k_1 \leq k_1'$ i $k_2 \leq k_2'$. M_1 i M_2 su TP_2 ako su njihove diskretne funkcije gustine TP_2.

3.2.3.2. VIŠEDIMENZIONALNA PROŠIRENJA

Definicija 3.2.3.2.1

Pretpostavimo da slučajan vektor $\boldsymbol{X}$ ima neprekidnu ili diskretnu funkciju gustine $f_{\boldsymbol{X}}$. Tada za $\boldsymbol{X}$ kažemo da je višedimenzionalno totalno pozitivan reda 2 (MTP_2) ako je lnf_X supermodularno, odnosno. ako nejednakost

$$f_X(x) f_X(y) \leq f_X(x \vee y) f_X(x \wedge y)$$

važi za bilo koje x, y u $\mathbb{R}^n$.

Ova definicija pretpostavlja da slučajan vektor $\boldsymbol{X}$ poseduje raspodelu verovatnoće koja je apsolutno neprekidna u odnosu na neke sigma - konačne proizvode u $\mathbb{R}^n$. Primetimo da se višedimenzionalna totalna pozitivnost reda 2 prirodno pojavljuje u velikom broju primenjenih modela verovatnoće.

Sledeća fundamentalna osobina višedimenzionalne totalne pozitivnosti reda 2, poznata kao osnovna formula za mešovitu raspodelu, će da igra glavnu ulogu u mnogim dokazima.

Teorema 3.2.3.2.2

Za date funkcije $h_1: \mathcal{S} \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ i $h_2: \mathcal{T} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ definišemo funkciju h_3 kao

$$h_3(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{u}) = \int_{T \in \mathcal{T}} h_1(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) h_2(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u})\, d\sigma(\boldsymbol{t})$$

Ako je h_1 *MTP₂* na $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ i h_2 *MTP₂* na $\mathcal{T} \times \mathcal{U}$, onda je h_3 *MTP₂* na $\mathcal{S} \times \mathcal{U}$.

Lako je povezati višedimenzionalnu verziju $\preccurlyeq_{LR}$ sa višedimenzionalnom totalnom pozitivnošću reda 2.

Teorema3.2.3.2.3

Slučajan vektor $\boldsymbol{X}$ je MTP_2 ako i samo ako je $\boldsymbol{X} \preccurlyeq_{LR} \boldsymbol{X}$.

Teorema 3.2.3.2.4

Pretpostavimo da je nosač od $\boldsymbol{X}$ mreža. Tada je $\boldsymbol{X}$ *MTP₂* ako i samo ako je njegova funkcija raspodele *TP₂* za svaki par promenljivih za ostalih $n-2$ fiksiranih, odnosno,

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, x_n) \\ \geq f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_j, \dots, x_n) f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \dots, x_i, \dots, y_j, \dots, x_n)$$

za svako $x_i \leq y_i$ i $x_j \leq y_j$.

Primer 3.2.3.2.5

Ako $X: \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ raspodelu, onda je *MTP₂* ako svaka vandijagonalna komponenta matrice $R = \Sigma^{-1}$ nije pozitivna.

Ovo sledi iz teoreme 3.2.3.2.3 pošto je

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} ln f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right) = -\frac{1}{2} r_{ij}$$

za $\forall i \neq j$. Svi mešoviti izvodi drugog reda od $ln f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ su ne - negativni zbog $r_{ij} \leq 0$ za $\forall i \neq j$.

Ako je $\boldsymbol{X}$ *MTP₂*, tada je za $k = 1,2, \dots, n$ $E(g(X_1, X_2, \dots, X_k) | X_{k+1} =$ *xk+1,Xk+2=xk+2,...,Xn=xn* neopadajuće u *xk+1,xk+2,...,xn* za bilo koju neopadajuću funkciju $g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Štaviše, važi implikacija

$$\boldsymbol{X}\ MTP_2 \Rightarrow \boldsymbol{X}\ CI$$

Ako je $\boldsymbol{X}$ *MTP₂*, onda je bilo koji slučajan vektor dimenzije $k \leq n$ formiran uz pomoć komponenata od $\boldsymbol{X}$ takođe *MTP₂*. Nezavisni rizici su očigledno *MTP₂*.

4. POISSONOVI KREDIBILNOSNI MODELI

4.1. POISSONOVI KREDIBILNOSNI MODEL ZA UČESTALOST ZAHTEVA

4.1.1. POISSONOV STATIČAN KREDIBILNOSNI MODEL

Pretpostavimo da imamo n polisa i da svaku posmatramo kroz T_i perioda. Neka je N_{it} (sa očekivanjem $E(N_{it}) = \lambda_{it}$) broj zahteva podnetih od strane i-tog osiguranika u periodu t, za $i = 1,2, \dots, n$ i $t = 1,2, \dots, T_i$. Svaki osiguranik generiše niz broja zahteva $\boldsymbol{N}_i = (N_{i1}, N_{i2}, \dots, N_{iT_i})'$. Razumno je pretpostaviti nezavisnost između promenljivih $N_1, N_2, \dots, N_n$ ali ova pretpostavka je veoma diskutabilna za svako $\boldsymbol{N}_i$.

Neka su $N_{i\cdot} = \sum_{t=1}^{T_i} N_{it}$ i $\lambda_{i\cdot} = \sum_{t=1}^{T_i} \lambda_{it}$ broj ukupnih posmatranih zahteva i očekivani broj zahteva za i - tog osiguranika kroz T_i perioda. $N_{i\cdot}$ predstavlja izabrane istorijske podatke. Uobičajeno je pretpostaviti da N_{it} ima Poissonovu raspodelu. Zaista, *Poisson*-ova raspodela je „zakon malih brojeva“ i dobro opisuje događaje kao što su automobilske nesreće. Ovo nas vodi do sledećeg modela.

Definicija 4.1.1.1

U Poissonovom statičnom kredibilnosnom modelu polisa i-tog osiguranika, $i = 1,2, \dots, n$ je predstavljena nizom $(\boldsymbol{\Theta}_\mathbf{i}, \mathbf{N}_\mathbf{i})$ gde je $\boldsymbol{\Theta}_\mathbf{i}$ pozitivna slučajna promenljiva sa jediničnim očekivanjem koja predstavlja neobjašnjenu heterogenost. Štaviše,

A1) Za dato $\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{i}} = \theta$, slučajne promenljive N_{it}, $i = 1,2, \dots$ su nezavisne i imaju $\mathcal{P}(\lambda_{it}\theta)$ raspodelu.
A2) Za sve polise se pretpostavlja da su nizovi $(\boldsymbol{\Theta}_\mathbf{i}, \mathbf{N}_\mathbf{i})$, $i = 1,2, \dots, n$ nezavisni.

Napomena:

Da bi se osigurala identifikacija modela, pretpostavljamo da je $E(\boldsymbol{\Theta}_\mathbf{i}) = 1$. Ovo takođe, garantuje da je $E(N_{it}) = \lambda_{it} E(\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{i}}) = \lambda_{it}$.

Napomena:

U definiciji 4.1.1.1 zavisnost između godišnjeg broja zahteva je posledica heterogenosti grupe osiguranika (odnosno, $\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{i}}$). Ako bismo znali sve karakteristike polisa, onda bi $\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{i}}$ postalo determinističko i ne bi više postojala nezavisnost između N_{it} za fiksirano i. Ove istorije modifikuju raspodelu slučajne promenljive $\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{i}}$, pa samim tim i premiju.

Dokažimo sada da u kredibilnosnom modelu u definiciji 4.1.1.1 $\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{i}\cdot}$ predstavlja detaljan pregled istorije podnetih zahteva u prošlosti.

Lema 4.1.1.2

Neka su $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ , X_n)'$ i $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \ , Y_n)'$ dva slučajna vektora sa

funkcijama gustine φ_X i φ_Y u uslovnim funkcijama raspodele $\varphi_{X|Y}(x|y)$ i $\varphi_{Y|X}(y|x)$ $\varphi_{Y|X}(y|x)$ koje su definisane na sledeći način: $\varphi_{X|Y} = \frac{g(x,y)}{\varphi_Y(y)}$, gde je $g(x,y)$ vrednost zajedničke funkcije gustine za $\forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$. Tada za $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ takvo da je $\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) > 0$ važi:

$$\varphi_{Y|X}(y|x) = \frac{\varphi_{X|Y}(x|y)\varphi_Y(y)}{\int_{t\in\mathbb{R}^n} \varphi_{X|Y}(x|t)\varphi_Y(t)\, dt}$$

Povrh toga, za datu merljivu funkciju $\psi: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ uslovno očekivanje za $\psi(X,Y)$ za dato $\boldsymbol{Y}$ je definisano kao funkcija slučajnog vektora $\boldsymbol{Y}$:

$$E(\psi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})|\boldsymbol{Y} = y) = \int_{x\in\mathbb{R}^n} \psi(x,y)\, \varphi_{X|Y}\, dx$$

Teorema 4.1.1.3

U Poissonovom statičkom kredibilnosnom modelu iz definicije 4.1.1.1, preditktivna raspodela slučajne promenljive $\boldsymbol{\Theta_i}$ zavisi samo od $\boldsymbol{N_i}$. odnosno, važi jednakost u raspodeli

$$\left(\boldsymbol{\Theta}_i|N_{i1},N_{i2},\dots,N_{iT_i}\right) =_d \left(\boldsymbol{\Theta_i}|\boldsymbol{N}_{i\cdot}\right)$$

Dokaz:

Neka je $f_{\boldsymbol{\Theta}}\left(\cdot|n_{i1},n_{i2},\dots,n_{iT_i}\right)$ uslovna funkcija gustine za $\boldsymbol{\Theta}_i$, za dato $N_{i1} = n_{i1}$, $N_{i2} = n_{i2}$, ..., $N_{iT_i} = n_{iT_i}$. Koristeći teoremu 1.8.1 imamo:

$$f_{\boldsymbol{\Theta}}\left(\theta|n_{i1},n_{i2},\dots,n_{iT_i}\right) = \frac{P\left\{N_{i1} = n_{i1}, N_{i2} = n_{i2},\dots,N_{iT_i} = n_{iT_i}|\boldsymbol{\Theta_i} = \theta\right\}\varphi_{\boldsymbol{\Theta}}(\theta)}{P\left\{N_{i1} = n_{i1}, N_{i2} = n_{i2},\dots,N_{iT_i} = n_{iT_i}\right\}}$$
$$= \frac{e^{-\theta\lambda_{i\cdot}}\theta^{n_{i\cdot}}\varphi_{\boldsymbol{\Theta}}(\theta)}{\int_0^{+\infty} e^{-\xi\lambda_{i\cdot}}\xi^{n_{i\cdot}}\varphi_{\boldsymbol{\Theta}}(\xi)\, d\xi}$$

i zavisi samo od $n_{i\cdot}$. ■

Ovaj rezultat ima važnu praktičnu posledicu: Poassonov statični kredibilnosni model ne uzima u obzir koliko je star odštetni zahtev podnet od strane osiguranika. Pa ovo ponekad može krivo da utiče na stvarno stanje.

Kada $\boldsymbol{\Theta_i}: Gam(a,a)$ tako da je $E(\boldsymbol{\Theta_i}) = 1$, poznato je da posteriorna raspodela za $\boldsymbol{\Theta_i}$ (odnosno, raspodela za $\boldsymbol{\Theta_i}$data istorijom prošlih zahteva) ostaje gama raspodela. Detaljnije, u ovom slučaju imamo:

$$(\theta_i|N_{i\cdot}) =_d Gam(a + N_{i\cdot}, a + \lambda_{i\cdot})$$

Za date prošle očekivane frekvencije zahteva $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{iT_i}$ važi da se posteriorna raspodela povećava u prošlim zahtevima, u $\preccurlyeq_{LR}$ (red količnika verodostojnosti) smislu, odnosno, $(\boldsymbol{\Theta_i}|N_{i\cdot} = n) \preccurlyeq_{LR} (\boldsymbol{\Theta_i}|N_{i\cdot} = n)$ kada je $n \leq n'$. Ova osobinaje veoma korisna pošto odražava povećanu opasnost koja je svojstvena osiguranicima koji podnose zahteve. Dalje ćemo ispitati da li ova osobina važi i kada uzmemo druguraspodelu za Θ_i. Takođe ćemo pokazati da ova osobina ostaje zadovoljena za bilo koji Poissonov mešoviti model. Druga korisna karakteristika Poisson - gama modela je to da je teoretski

bonus - malus koeficijent dat sa

$$E\left(\boldsymbol{\Theta}_i \middle| N_{i1}, N_{i2}, \dots, N_{iT_i}\right) = \frac{a + N_{i.}}{a + \lambda_{i.}}$$

Ovaj koeficijent je veći od jedan ako je $N_{i.} > \lambda_{i.}$, odnosno ako i-ti osiguranik podnese više zahteva nego što se očekuje. Obrnuto, koeficijent je manji od jedan ako je $N_{i.} < \lambda_{i.}$, odnosno ako je podneto manje zahteva nego što je očekivano. Možemo primetiti da se bonus - malus koeficijent teoretski očigledno povećava u prošlim zahtevima $N_{i.}$. Sa druge strane, pokazali smo da ovo važi bez obzira na mešovitu raspodelu. Da sumiramo, u modelu A1-A2 iz definicije 4.1.1.1 intuitivno, možemo izvesti sledeća tri zaključka:

S1) $\boldsymbol{\Theta}_i$ „raste“ u prošlim zahtevima $N_{i.}$
S2) $\mathrm{N}_{i,T_{i+1}}$ „raste“ u prošlim zahtevima $N_{i.}$
S3) $\mathrm{N}_{i,T_{i+1}}$ i $N_{i.}$ su pozitivno zavisne.

4.1.2. POISSONOV DINAMIČNI KREDIBILNOSNI MODELI

Dozvoliti nepoznatim slučajnim parametrima da se razvijaju tokom vremena je opravdano, pošto neuočljivi faktori koji, na primer kod vozača, utiču na sposobnost vozača nisu konstanti. Mogli bi se uzeti u obzir i šokovi izazvani događajima kao što su razvod braka ili nervni slom ili trajne izmene koje nastaju, na primer, usled efekata učenja.

Drugi razlog da se dopuste vremenski promelnjivi slučajni efekti koji se odnose na moralni hazard. Zaista, individualni napori osiguranika da spreči nesreću se ne mogu posmatrati i vremenski su zavisni. Osiguranici mogu sprovesti svoje mere kako bi sprečili nastanak štete prema svojim iskustvima sa prošlim zahtevima, iznosom premije i svesti o budućim posledicama nesreće.

Glavni tehnički razlog da se dozvoli razvijanje slučajnih efekata tokom vremena je taj što se u obzir uzima datum podnošenja zahteva. Ovo se odražava na činjenicu da mogućnost predviđanja zahteva zavisi od njegove starosti, odnosno skoriji zahtev je lošiji znak za osiguravača od nekog starijeg. Suprotno od statičkog modela, ukupan broj zahteva $\boldsymbol{N_{i.}}$ podnetih u prošlosti nije više potpun pregled osiguranikove istorije. Tačnije, niz $\boldsymbol{N_i}$ godišnjeg broja zahteva sada treba da bude zapamćen za određivanje budućih premija.

Pretpostavićemo da su nepoznate karakteristike i-tog osiguranika u godini t predstavljene slučajnom promenljivom Θ_{it}. Takođe, pretpostavimo da su godišnji zahtevi $N_{i1}, N_{i2}, \dots$ nezavisni za dati niz slučajnih efekata $\boldsymbol{\Theta_i} = (\Theta_{i1}, \Theta_{i2}, \dots)$.

Dinamični kredibilnosni model je definisan na sledeći način:

Definicija 4.1.2.1

U Poissonovom dinamičnom frekventnom kredibilnosnom modelu *i*-ta polisa, $i = 1,2,\dots,n$ je predstavljena nizom $(\boldsymbol{\Theta_i}, \boldsymbol{N_i})$, gde je $\boldsymbol{\Theta_i}$ pozitivan slučajan vektor koji predstavlja neobjašnjenu heterogenost. Štaviše važi:

A1) Za dato $\boldsymbol{\Theta_i} = \theta_i$ slučajne promenljive N_{it}, $t = 1,2,\dots,T_i$ su nezavisne i imaju $\mathcal{P}(\lambda_{it}\theta_{it})$ raspodelu, odnosno

$$P\{\boldsymbol{N}_i = k_i | \boldsymbol{\Theta_i} = \theta_i\} = \prod_{t=1}^{T_i} e^{-\lambda_{it}\theta_{it}} \frac{(\lambda_{it}\theta_{it})^{k_{it}}}{k_{it}!}, \quad k_i \in \mathbb{N}^{T_i}$$

A2) Za niz $(\boldsymbol{\Theta_i}, \boldsymbol{N_i})$, $i = 1,2,\dots,n$ pretpostavimo da je nezavisan. Štaviše, Θ_{it} su ne-negativne slučajne promenljive sa jediničnim očekivanjem ($E(\Theta_{it}) = 1$, za $\forall i, t$). Definišimo $T_{max} = max\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ tako da $\boldsymbol{\Theta_i}$ ima istu raspodelu kao i prvih T_i komponenti istog stacionarnog slučajnog vektora $(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{T_{max}})$.

Ako pretpostavimo da je $\lambda_{it} = \lambda_{it+h}$ za neki broj *h* stacionarnih slučajnih efekata definisanih u uslovu A2 definicije 4.1.2.1 implicira:

$$\begin{aligned} &P\{N_{i,t+h+1} = k_{t+1} | N_{i,h+1} = k_1, \dots, N_{i,h+t} = k_t\} \\ &= P\{N_{i,t+1} = k_{t+1} | N_{i,1} = k_1, \dots, N_{i,t} = k_t\} \end{aligned}$$

za bilo koje brojeve $k_1, \dots, k_{t+1}$. Stoga, mogućnost predviđanja zahteva će zavisiti samo od razlike između datuma predviđanja i datuma kada je zahtev podnet, odnosno starosti zahteva.

U modelu A1 - A2 definicije 4.1.2.1 intuitivno možemo zaključiti sledeće:

S1) N_{it} su pozitivno zavisne.
S2) $\boldsymbol{\Theta_i}$ „raste“ u zahtevu N_i.
S3) $\boldsymbol{\Theta_{i,t+1}}$ „raste“ u prošlom zahtevu $\boldsymbol{N_i}$.
S4) $\mathbf{N}_{\boldsymbol{i,T_i+1}}$ „raste“ u prošlom zahtevu $\boldsymbol{N_i}$.

4.1.3. ASOCIRANOST

Koncept zavisnosti nazvan asociranost definisan je na sledeći način:

Definicija 4.1.3.1

Za slučajne promenljive $X_1, X_2, \dots, X_n$ kažemo da su asocirane ako važi nejednakost

$$Cov\big(\psi_1(X_1, X_2, \dots, X_n), \psi_2(X_1, X_2, \dots, X_n)\big) \geq 0 \qquad (4.1)$$

za sve neopadajuće funkcije ψ_1 i ψ_2 čija kovarijansa postoji.

Asociranost je prvi put, u aktuarstvu, korišćena da bi se istražile neke alternative nezavisnih pretpostavki za višeživotne statuse u životnom osiguranju. Kao i za određivanje posledica vezanih za višeživotnost polisa osiguranja. Intuitivno značenje

asociranosti se retko čini nejasnim. Međutim, ono što može biti upitno prilikom zaključivanja je to da skup slučajnih promenljivih, koje su asocirane, čini mnoštvo nejednakosti koje su često u direktnoj upotrebi u problemima.

Postoji mogućnost da će biti nemoguće proveriti uslov (4.1) za direktno datu funkciju raspodele $F_{\boldsymbol{X}}$ za $\boldsymbol{X}$. U slučajevima kada se asociranost slučajnog vektora ne može utvrditi, uobičajeno je korišćenje stohastičke prezentacije $\boldsymbol{X}$-a ili sledećih pretpostavki:

1) Uzimanje podskupova.
2) Formiranje unija nezavisnih skupova.
3) Formiranje unija neopadajućih funkcija.

Lema 4.1.3.2

1) $Cov(X_1, X_2) = E\big(Cov(X_1, X_2|Y)\big) + Cov\big(E(X_1|Y), E(X_2|Y)\big)$
2) $Var(X_1) = E\big(Var(X_1|Y)\big) + Var\big(E(X_1|Y)\big)$
3) Ako su X_1 i X_2 uslovno nezavisne za dato Y, $Cov(X_1, X_2|Y) = 0$
4) Ako je $t: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratno - integrabilno onda je $Cov(t(Y), X|Y) = 0$

Teorema 4.1.3.3

1) Ako je X asocirano, onda je bilo koji podskup $\left(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}\right)$ od X asociran.
2) Ako su X i Y asocirane i međusobno nezavisne slučajne promenljive, tada je i (X, Y) asociran.
3) Ako je X asocirano i ako su $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neopadajuće funkcije, tada su $\psi_1(X), \psi_2(X), \dots, \psi_k(X)$ asocirane.
4) Nezavisne slučajne promenljive $X_1, X_2, \dots, X_n$ su asocirane.

Dokaz:

1) Sledi iz definicije 4.1.3.1 birajući neopadajuće funkcije ψ_1 i ψ_2 tako da zavise samo od promenljivih $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$.
2) Iz leme 4.1.3.2.(1) imamo:

$$Cov\big(\psi_1(X,Y), \psi_2(X,Y)\big) =$$
$$= E\left(Cov\big(\psi_1(X,Y), \psi_2(X,Y)\big)\right) + Cov\big(E(\psi_1(X,Y)|X), E(\psi_2(X,Y)|X)\big)$$

Pošto asociranost od Y osigurava da je $Cov\big(\psi_1(x,Y), \psi_2(x,Y)\big) \geq 0$ za svako fiksirano x, prvi član je očigledno ne - negativan. Štaviše, kako su $E\big(\psi_1(x,Y)\big)$ i $E\big(\psi_2(x,Y)\big)$ neopadajuće funkcije x - a i drugi član je takođe ne-negativan.

3) Ova osobina je očigledna pošto je funkcija $x \to \Psi\big(\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_k(x)\big)$ neopadajuća kada je Ψ neopadajuća.
4) Sledi iz (2) ■

Primer 4.1.3.4 (*Pozitivno korelisane normalne slučajne promenljive su asocirane*)

Neka je $\boldsymbol{X}$ višedimenzionalna normalno raspoređena slučajna promenljiva sa $\mathbf{0}$ vektorom kao sredinom i matricom kovarijansi $\boldsymbol{\Sigma} = \{\sigma_{ij}\}$. Ako je $\sigma_{ij} \geq 0$ za $\forall i, j$, onda je X_i asocirano.

Pokažimo da je pojam *CIS* rizika (uslovni nizovni rast) jača zavisnost od asociranosti.

Teorema 4.1.3.5

Neka je dat n-dimenzionalni slučajni vektor $\boldsymbol{X}$. Ako je $\boldsymbol{X}$ CIS rizik, tada je i asociran.

Dokaz:

Kako bismo pokazali asociranost, treba da pokažemo da važi nejednakost (4.1) iz definicije 4.1.3.1, za svaki CIS slučajni vektor. Dokaz ćemo izvesti indukcijom za sve neopadajuće funkcije $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R}^i \to \mathbb{R}$ i za $\forall i = 1,2, \dots, n$.

$\underline{\boldsymbol{i = 1}}$

Slučajni par (X, X) je pozitivno kvadratno zavistan, iz teoreme 3.2.1.2.5 znamo da važi nejednakost $Cov\big(\psi_1(X), \psi_2(X)\big) \geq 0$.

$\underline{\boldsymbol{i = k}}$

Pretpostavimo da važi za svako $i = k$. Pokažimo da važi za $i = k + 1$

$\underline{\boldsymbol{i = k + 1}}$

Koristeći lemu 4.1.3.2.(1) imamo:

$$\begin{aligned} &Cov\big(\psi_1(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}), \psi_2(X_1, X_2, \dots, X_{k+1})\big) \\ &= E\big(Cov(\psi_1(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}), \psi_2(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}) | X_1, X_2, \dots, X_k)\big) \\ &+ Cov\big(E(\psi_1(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}) | X_1, X_2, \dots, X_k), E(\psi_2(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}) | X_1, X_2, \dots, X_k)\big) \end{aligned}$$

Kako je X CIS, definišimo neopadajuće funkcije $\tilde{\psi}_1$ i $\tilde{\psi}_2$ na sledeći način:

$$\tilde{\psi}_l(X_1, X_2, \dots, X_k) = E(\psi_l(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}) |\, X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k), \;\; l = 1,2$$

Dakle,

$$\begin{aligned} &Cov\big(E(\psi_1(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}) | X_1, X_2, \dots, X_k), E(\psi_2(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}) | X_1, X_2, \dots, X_k)\big) \\ &= Cov\left(\tilde{\psi}_1(X_1, X_2, \dots, X_k), \tilde{\psi}_2(X_1, X_2, \dots, X_k)\right) \geq 0 \end{aligned}$$

Važi na osnovu hipoteze. Dalje imamo:

$$Cov(\psi_1(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}), \psi_2(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}) | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k) \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad E\big(Cov(\psi_1(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}), \psi_2(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}) | X_1, X_2, \dots, X_k)\big) \geq 0$$

što dokazuje nejednakost(4.1). ■

Kako asociranost implicira pozitivnu kvadratnu zavisnost u dvodimenzionalnom slučaju i kumulativnu zavisnost i pozitivnu ortrant zavisnost u višedimenzionalnom slučaju, imamo da se asociranost nalazi između CIS rizika i navedenih slabije pozitivno zavisnih koncepata.

4.1.4. ZAVISNOST KOD MEŠOVITIH RASPODELA I UOBIČAJENI MODELI SA MEŠOVITOM RASPODELOM

Uobičajeni modeli sa mešovitom raspodelom uključuju uslovno nezavisne

slučajne promenljive i čine osnovu teorije kredibiliteta.

Intuitivno, uobičajena konstrukcija sa mešovitim raspodelama je spoljni mehanizam opisan slučajnom promenljivom $\boldsymbol{\Theta}$ i uticajima nekoliko rizika. Za datu okolinu parametar $\boldsymbol{\Theta}$, individualni rizici su nezavisni.

Definicija 4.1.4.1

Slučajni vektor $\boldsymbol{X}$ je zavistan u mešovitoj raspodeli ako se njegova zajednička funkcija raspodele može zapisati na sledeći način:

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} F_i(x_i|\theta) \right) dF_{\Theta}(\theta)\,, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \tag{4.2}$$

za funkcije raspodele $F_1(\cdot\,|\theta), \dots, F_n(\cdot\,|\theta)$ i F_{Θ}.

Primetimo da je $F_i(\cdot\,|\theta)$ funkcija raspodele za $X_i|\Theta = \theta$, $i = 1,2, \dots, n$. Bezuslovno, funkcija raspodele za X_i, $i = 1,2, \dots, n$ je

$$F_i(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(F_i(x_i|\theta)\big) dF_{\Theta}(\theta) \tag{4.3}$$

Dalje ćemo razmotriti sledeću vrstu zavisnosti. Pretpostavimo da postoji *n*-dimenzionalni slučajni vektor $\boldsymbol{\Theta}$ takav da za svako θ, realizaciju $\boldsymbol{\Theta}$, slučajne promenljive $X_1|\Theta = \theta, X_2|\Theta = \theta \dots, X_n|\Theta = \theta$ su nezavisne i *i*- ta komponenta $\boldsymbol{X}$ zavisi od $\boldsymbol{\Theta}$ samo preko θ_i, odnosno, $X_i|\Theta = \theta =_d X_i|\Theta_{\mathrm{i}} = \theta_i$.

Definicija 4.1.4.2

n-dimenzionalni slučajni vektor *X* je zavistan u višedimenzionalnim mešovitim raspodelama ako je njegova zajednička funkcija raspodele:

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} F_i(x_i(\theta_i) \right) dF_{\Theta}(\theta)\,, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \tag{4.4}$$

za jednodimenzionalne funkcije raspodele $F_1(\cdot\,|\theta_1), F_2(\cdot\,|\theta_2), \dots, F_n(\cdot\,|\theta_n)$ i višedimenzionalnu funkciju raspodele $F_{\Theta}(\theta)$.

4.1.4.1. ZAVISNOST MEŠOVITE RASPODELE I ASOCIRANOST

Zavisnost mešovite raspodele je pojam pozitivne zavisnosti pod uslovnim pretpostavkama za marginalne raspodele. Posebno, ćecmo koristiti koncept stohastičkog rasta.

Lema 4.1.4.1.1

Slučajni vektori $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ zadovoljavaju $\boldsymbol{X} \preccurlyeq_{ST} \boldsymbol{Y}$, ako i samo ako postoje dva slučajna vektora $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ i $\widetilde{\boldsymbol{Y}}$, definisana u istom prostoru verovatnoće, važi $\widetilde{\boldsymbol{X}} =_d \boldsymbol{X}$ i $\widetilde{\boldsymbol{Y}} =_d \boldsymbol{Y}$ i $P\{\widetilde{\boldsymbol{X}} \leq \widetilde{\boldsymbol{Y}}\} = 1$.

Teorema 4.1.4.1.2

Neka je $\boldsymbol{X}$ n-dimenzionalni slučajni vektor sa zajedničkom funkcijom gustine (4.2). Ako je $F_i(\cdot\,|\theta)$ stohastički rast u θ, za $i = 1,2,\dots,n$ onda je $\boldsymbol{X}$ asociran.

Dokaz:

Definišimo funkciju h kao $h(\theta) = E(g(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{\Theta} = \theta)$. Ova funkcija je neopadajuća za θ za svako neopadajuće g.
Za dato $\theta \leq \theta'$ imamo:

$$(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{\Theta} = \theta) =_d \widetilde{\boldsymbol{X}}_\theta = \left(\overline{F}_1^{-1}(U_1|\theta), \overline{F}_2^{-1}(U_2|\theta), \dots, \overline{F}_n^{-1}(U_n|\theta)\right)$$

$$(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{\Theta} = \theta') =_d \widetilde{\boldsymbol{X}}_{\theta'} = \left(\overline{F}_1^{-1}(U_1|\theta'), \overline{F}_2^{-1}(U_2|\theta'), \dots, \overline{F}_n^{-1}(U_n|\theta')\right)$$

gde su $U_1, U_2, \dots, U_n$ nezavisne slučajne promenljive sa $\mathcal{U}(0,1)$ raspodelom, nezavisne od $\boldsymbol{\Theta}$. Lako se vidi da je $P\{\widetilde{\boldsymbol{X}}_\theta \leq \widetilde{\boldsymbol{X}}_{\theta'}\} = 1$ uz stohastički rast $F_i(\cdot\,|\theta)$ za θ. Sada, zbog leme 4.1.4.1.1 koja obezbeđuje da je $\widetilde{\boldsymbol{X}}_\theta \preccurlyeq_{ST} \widetilde{\boldsymbol{X}}_{\theta'}$ sledi:

$$E(g(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{\Theta} = \theta) = E\left(g(\widetilde{\boldsymbol{X}}_\theta)\right) \leq E\left(g(\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\theta'})\right) = E\big(g(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{\Theta} = \theta')\big)$$

Odakle sledi da je h zaista neopadajuća.

Sada možemo da primenimo lemu 4.1.3.2.(1) na date dve neopadajuće funkcije ψ_1 i ψ_2:

$$Cov\big(\psi_1(\boldsymbol{X}), \psi_2(\boldsymbol{X})\big) = E\left(Cov\big(\psi_1(\boldsymbol{X}), \psi_2(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{\Theta})\big)\right) + Cov\left(E\big(\psi_1(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{\Theta})\big), E\big(\psi_2(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{\Theta})\big)\right)$$

Prvi član je ne - negativan zbog uslovne nezavisnosti X_i, pa na osnovu teoreme 4.1.3.3.(4) koja kaže da su nezavisne slučajne promeljive asocirane, X_i su asocirane. Drugi član može biti predstavljen kao $Cov\big(h_1(\Theta), h_2(\Theta)\big)$ za neopadajuće h_i. Ovo je takođe ne-negativno, pa sledi i da je jednodimenzionalna slučajna promenljiva asocirana. ■

Ova osobina pokazuje koja zavisna struktura uopštenog modela sa mešovitom raspodelom obezbeđuje da uslovne marginalne raspodele zadovoljavaju neku od osobina stohastičke monotonosti.

Vratimo se sada na zavisnost kod višedimenzionalnih mešovitih raspodela.

Teorema 4.1.4.1.3

Neka je $\boldsymbol{X}$ n-dimenzionalni slučajni vektor sa funkcijom raspodele (4.4), takav da je $\boldsymbol{X}$ stohastički rastuće za θ, odnosno važi $\boldsymbol{X}|\boldsymbol{\Theta} = \theta \preccurlyeq_{ST} \boldsymbol{X}|\boldsymbol{\Theta} = \theta'$ za $\theta \leq \theta'$. Ako je $\boldsymbol{\Theta}$ asocirana, tada je i $\boldsymbol{X}$ asociran.

Dokaz:

Neka su date dve neopadajuće funkcije $\psi_1, \psi_2 \colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$. Tada iz leme 4.1.3.2. (1) sledi:

$$Cov\big(\psi_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\Theta}), \psi_2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\Theta})\big) = E\big(Cov(\psi_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\Theta}), \psi_2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\Theta})|\boldsymbol{\Theta})\big) + Cov\big(E(\psi_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\Theta})|\boldsymbol{\Theta}), E(, \psi_2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\Theta})|\boldsymbol{\Theta})\big)$$

Prvi član je ne - negativan zbog uslovne nezavisnosti X_i za dato $\boldsymbol{\Theta}$ i činjenice da su nezavisne slučajne promenljive asocirane. Drugi član se može zapisati kao $Cov\big(h_1(\boldsymbol{\Theta}), h_2(\boldsymbol{\Theta})\big)$ gde je $h_i(\boldsymbol{\Theta}) = E(\psi_i(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\theta})$, $i = 1,2$. Stohastički rast X za θ osigurava da su h_1 i h_2 neopadajuće. Stoga važi da je drugi član ne - negativan jer je $\boldsymbol{\Theta}$ asocirana. Pa je onda $Cov\big(\psi_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\Theta}), \psi_2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\Theta})\big) \geq 0$ i $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\Theta})$ je asociran. Posebno, $\boldsymbol{X}$ je asociran, pošto svaki podskup asociranih slučajnih promenljivih ostaje asociran na osnovu teoreme 4.1.3.3..(1) čime je ovo tvrđenje dokazano. ■

4.1.4.2. ZAVISNOST MEŠOVITE RASPODELE I *MTP₂*

Zavisnost mešovite raspodele izaziva jaku pozitivnu zavisnost pod dodatnim pretpostavkama za marginalne raspodele. Specijalno, koristićemo i osobinu rasta količnika verodostojnosti (ili TP_2).

Teorema 4.1.4.2.1

Neka je $\boldsymbol{X}$ n-dimenzionalni slučajni vektor sa funkcijom raspodele (4.2). Ako $F_i(\cdot\,|\theta)$ predstavljaju rast količnika verodostojnosti po θ za $i = 1,2,\dots,n$ onda je $\boldsymbol{X}$ MTP_2.

Dokaz:

Zbog teoreme 3.2.3.2.4 dovoljno je da pokažemo da je funkcija raspodele $f_{\boldsymbol{X}}$ TP_2 za svaki par promenljivih kada su ostalih $n - 2$ fiksirane.

Fiksirajmo promenljive $x_3, x_4, \dots, x_n$. Pretpostavimo da $(x_1|\boldsymbol{\Theta} = \theta)$ i $(x_2|\boldsymbol{\Theta} = \theta$ rastu po θ u $\preccurlyeq LR$ smislu, pa imamo da su funkcije $f1t\theta$ i $f2t\theta$ obe TP_2 t i θ.

Sada pošto (4.2) važi i koristeći teoremu 3.2.3.2.4 možemo da zaključimo da je $f_{\boldsymbol{X}}$ TP_2 po x_1 i x_2. ■

Na kraju, imamo sledeći rezultat, koji bi mogao biti analogni kao teorema 4.1.4.2.1 za zavisnost u uobičajenim višedimenzionalnim modelima sa mešovitim raspodelama.

Teorema 4.1.4.2.2

Neka je $\boldsymbol{X}$ n - dimenzionalni slučajni vektor sa funkcijom raspodele (4.4). Ako $F_i(\cdot\,|\theta)$ predstavljaju rast količnika verodostojnosti po θ za $i = 1,2,\dots,n$ i ako je $\boldsymbol{\Theta}$ MTP_2 onda je $\boldsymbol{X}$ MTP_2.

Dokaz:

Zajednička funkcija gustine za $\boldsymbol{X}$ se može zapisati kao

$$f_{\boldsymbol{X}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i|\theta_i) \right) dF_{\Theta}(\theta)$$

Kako je svako preslikavanje $(x_i, \theta_i) \to f_i(x_i|\theta_i)$ TP_2 po pretpostavci, a na osnovu teoreme 3.2.3.2.4 sledi da je podintegralna funkcija, funkcija sa osobinom

MTP₂. Dalje, na osnovu leme 3.2.3.2.2 sledi da je i f_X *MTP₂*. ■

4.1.5. ZAVISNOST POISSONOVOG KREDIBILNOSNOG MODELA

Sledeća teorema formalizuje zaključke S1 i S2 izvedene u Poissonovom statičnom modelu. Takođe, rast pomenut tada, sada posmatramo u $\preccurlyeq_{LR}$ smislu. Definišimo prvo pomoćno tvrđenje

Lema 4.1.5.1

Ako su X_Θ *TP₂* onda važi $\Lambda_1 \preccurlyeq_{LR} \Lambda_2 \implies X_{\Lambda_1} \preccurlyeq_{LR} X_{\Lambda_2}$, gde X_{Λ_1} i X_{Λ_2} imaju funkciju raspodele $F_{X_{\Lambda_i}} = \int_{-\infty}^{+\infty} P\{X_\Theta \le x\} dF_{\Lambda_i}(\theta)$, $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.1.5.2

U Poissonovom statičnom učestalom kredibilnosnom modelu iz definicije 4.1.1.1 važi:

1) $(\Theta_i | N_{i\cdot} = n) \preccurlyeq_{LR} (\Theta_i | N_{i\cdot} = n')$ za $n \le n'$
2) $\left(N_{i,T_{i+1}} | N_{i\cdot} = n\right) \preccurlyeq_{LR} \left(N_{i,T_{i+1}} | N_{i\cdot} = n'\right)$ za $n \le n'$

Dokaz:

1) Označimo sa $f_\Theta(\cdot\,|n)$ uslovnu funkciju gustine za $(\Theta_i | N_{i\cdot} = n)$, $n \in \mathbb{N}$.
   Treba da pokažemo da za $\forall \theta \le \theta'$ i $\forall n \le n'$ važi:
$$\frac{f_\Theta(\theta|n')}{f_\Theta(\theta|n)} \le \frac{f_\Theta(\theta'|n')}{f_\Theta(\theta'|n)} \Leftrightarrow \frac{f_\Theta(\theta'|n)}{f_\Theta(\theta|n)} \le \frac{f_\Theta(\theta'|n')}{f_\Theta(\theta'|n')}$$
   Rezultat sledi iz
$$\frac{f_\Theta(\theta'|n)}{f_\Theta(\theta|n)} = \frac{P\{N_{i\cdot} = n | \Theta_i = \theta'\}}{P\{N_{i\cdot} = n | \Theta_i = \theta\}} \times \frac{f_\Theta(\theta')}{f_\Theta(\theta)}$$
$$\le \frac{P\{N_{i\cdot} = n' | \Theta'_i = \theta'\}}{P\{N_{i\cdot} = n' | \Theta_i = \theta\}} \times \frac{f_\Theta(\theta')}{f_\Theta(\theta)} = \frac{f_\Theta(\theta'|n')}{f_\Theta(\theta|n')}$$
   Nejednakost sledi iz činjenice da je $(N_{i\cdot} | \Theta_i = \theta)$ rastuće po θ u $\preccurlyeq_{LR}$ smislu.
2) Direktna posledica (1) i leme 4.1.5.1 ■

Dokažimo sada da ukupan broj zahteva $N_{i\cdot}$, napravljenih u prošlom periodu i učestalost zahteva $N_{i,T_{i+1}}$ za sledeći obuhvaćeni period jesu *MTP₂*. Ovim se formalizuje zaključak S3.

Teorema 4.1.5.3

U *Poisson*-ovom statičnom učestalom modelu iz definicije 4.1.1.1 $N_{i\cdot}$ i $N_{i,T_{i+1}}$ su *MTP₂*.

Ova teorema obezbeđuje mnošto korisnih nejednakosti, pošto je *MTP₂* jedan od

najznačajnijih koncepata zavisnosti (on implicira slabije uslove rasta, asociranost, kumulativnu zavisnost). Posebno, bez obzira na raspodelu Θ_i, teoretski bonus - malus koeficijent $E(\Theta_i|N_{i\cdot} = n)$ je rastući po n.

Sledeći rezultat je direktna posledica teoreme 4.1.1.2.1:

Teorema 4.1.5.4

U Poissonovom statičnom učestalom kredibilnosnom modelu iz definicije 4.1.1.1 važi: N_i je MTP_2.

4.1.6. ZAVISNOST KOD POISSONOVOG DINAMIČNOG KREDIBILNOSNOG MODELA

Sada ćemo dopuniti pretpostavke A1 i A2 iz definicije 4.1.2.1 sa različitim strukturama upoređenim sa ograničenjima navedenim u A2. Model A3 je klasičan statičan kredibilnosni model.

Model A3

Kao što je čest slučaj u aktuarstvu, možemo da izaberemo da model bude heterogen, odnosno da $\mathbf{\Theta}_i \equiv \mathbf{\Theta}$. U ovom slučaju se vraćamo na statičan kredibilnosni model iz definicije 4.1.1.1.

Model A4

Neka $W: \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, gde je $\sigma_{ST} = \sigma_W^2 \rho_W(|s-t|)$ sa uslovima $|\rho_W(h)| \leq 1$ i $\rho_W(0) = 1$. Funkcija korelacije ρ_W igra centralnu ulogu u analizi prediktivne mogućnosti prošlih zahteva. Sada definišemo

$$\mathbf{\Theta}_i = \frac{e^{W_i}}{E(e^{W_i})} \sim log\mathcal{N}\left(-\frac{\sigma_W^2}{2}, \sigma_W^2\right), t = 1, \dots, T_{max}$$

Dakle, svako $\mathbf{\Theta}_i$ ima višedimenzionalnu lognormalnu raspodelu.

Takođe, vidimo da ako je funkcija korelacije $\rho_W(h) = 1$ za $\forall h$ zapravo imamo da je $\mathbf{\Theta}_i = (\Theta_i, \dots, \Theta_i)^t$ gde svako Θ_i ima lognormalnu raspodelu. Na ovaj način dobijamo specijalni slučaj modela A3.

Model A5

Ovaj model se dobija specificiranjem modela A4 ako pretpostavimo da W ima autoregresivnu strukturu reda 1, odnosno

$$W_t = QW_{t-1} + \varepsilon_t, t \geq 2$$

gde su greške $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2(1-Q^2)\right)$ nezavisne i $|Q| < 1$ i $W_1: \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. U ovom slučaju je $\rho_W(|s-t|) = Q^{|s-t|}$, tako da funkcija autokorelacije eksponencijalno opada sa kašnjenjem između opservacija.

Ovako definisan model je dobar za određivanje cena.

Model A6

Kod ovog modela se polazi od pretpostavke da postoji statična osnovna heterogenost koja je narušena nezavisnošću i identički raspoređenim godišnjim efektima. Specijalno, $\boldsymbol{\Theta}_i = RS_t$, gde su S_t nezavisne i identično raspoređene promenljive koje su nezavisne od R. $S_t: log\mathcal{N}\left(-\frac{\sigma_S^2}{2}, \sigma_S^2\right)$ a $R: log\mathcal{N}\left(-\frac{\sigma_R^2}{2}, \sigma_R^2\right)$ raspodelu. U ovom slučaju,

$$\boldsymbol{\Theta}_i: log\mathcal{N}\left(-\frac{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}{2}, \sigma_R^2 + \sigma_S^2\right)$$

Štaviše, u ovom modelu funkcija autokorelacije između slučajnih efekata je konstantna jer zbog leme 4.1.3.2.(1) imamo:

$$\begin{aligned} Cov(\boldsymbol{\Theta}_t, \boldsymbol{\Theta}_{t+h}) &= E\big(Cov(\boldsymbol{\Theta}_t, \boldsymbol{\Theta}_{t+h}|R)\big) + Cov\big(E(\boldsymbol{\Theta}_t|R), E(\boldsymbol{\Theta}_{t+h}|R)\big) \\ &= Cov\big(R \cdot E(S_t), R \cdot E(S_{t+h})\big) = Var(R) \end{aligned}$$

Sada možemo da navedemo glavne rezultate ovog poglavlja, naime važi da se pozitivna zavisnost $\boldsymbol{\Theta}_i$ prenosi na $\boldsymbol{N}_i$.

Teorema 4.1.6.1

U modelima A1 i A2 iz definicije 4.1.2.1 važi:

1) $\boldsymbol{\Theta}_i$ je *MTP₂* $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{N}_i$ je *MTP₂*.
2) $\boldsymbol{\Theta}_i$ je asociran $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{N}_i$ je asociran.

Dokaz:

1) Ova osobina je direktna primena teoreme 4.1.4.2.2 ako za n-dimenzionalni vektor $\boldsymbol{X}$ uzmemo baš $\boldsymbol{N}_i$.
2) Ova osobina sledi iz teoreme 4.1.4.1.3. ■

Pošto je tip zavisnosti između slučajnih promenljivih N_{it} indiciran tipom zavisnosti između $\boldsymbol{\Theta}_{it}$, ko što je prikazano u prethodnoj teoremi, ostaje da se prouči zavisnost slučajnih efekata $\boldsymbol{\Theta}_{it}$ u modelim A3 - A6.

Model A3

Pošto je $\boldsymbol{\Theta}_i$ komonotono, onda je i *MTP₂*, pa je po svojstvu (1) iz teoreme 4.1.6.1 i $\boldsymbol{N}_i$ *MTP₂*, što sledi iz teoreme 4.1.5.4. Možemo da primetimo da $\boldsymbol{N}_i$ nije komonotono.

Model A4

Ovaj model je donekle uopšteni model. Tip zavisnosti između $\boldsymbol{\Theta}_{it}$ je određen formom kovarijansne matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ koja zavisi od $\boldsymbol{W}$. U ovom modelu u kom se spajaju modeli A1, A2 i A4, važe sledeće osobine:

1) Iz primera 3.2.3.2.5 znamo da je $\boldsymbol{W}$ *MTP₂* ako svi vandijagonalni elementi inverzne kovarijansne matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ nisu pozitivni. Pošto je *MTP₂* zatvorena pod rastućim transformacijama, svako $\boldsymbol{\Theta}_i$ je *MTP₂*. Sada zbog teoreme 4.1.6.1.(1) znamo da je i $\boldsymbol{N}_i$ *MTP₂*.
2) Iz primera 4.1.3.4 znamo da je W asociran ako su svi elementi kovarijansne matrice ne-negativni. Štaviše, u ovom slučaju i $\boldsymbol{N}_i$ je asociran.

Model A5

U ovom modelu, kovarijansna struktura od $\boldsymbol{W}$ je izražena u članovima autoregresivnog parametra Q. Pod pretpostavkom da je Q ne - negativno, dobijamo jaku pozitivnu zavisnost između komponenti $\boldsymbol{N}_i$.

Specijalno, u ovom modelu, u kom kombinujemo A1, A2 i A5, imamo da ako je $Q \geq 0$, tada je $\boldsymbol{N}_i$ *MTP₂*. Elementi matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ su dati sa:

$$\sigma_{ii} = \sigma_W^2,\ \sigma_{st} = \sigma_{ts} = Q^{|s-t|}\sigma_W^2 \text{ za } |s-t| \geq 1$$

Tada su vandijagonalni elementi matrice $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ dati kao:

$$r_{t,t+1} = r_{t+1,t} = -\frac{Q}{\sigma_W^2(1-Q^2)},\ \text{za t} = 1, \dots, (\mathrm{T_{max}} - 1)$$

i $r_{st} = 0$ za $|s-t| \geq 2$.

Štaviše, svi su ne - pozitivni kada je $Q \geq 0$. Iz tog razloga, $\boldsymbol{W}$ je *MTP₂*. Pošto je osobina *MTP₂* funkcionalna invarijantnost, onda je i $\boldsymbol{\Theta}_i$ *MTP₂*, pa po teoremi 4.1.6.1.(1) i $\boldsymbol{N}_i$ je *MTP₂*.

Model A6

Vratimo se sada na promenljive slučajne efekte. Kada je lognormalna specifikacija sačuvana sa R_i i S_{it}, ne trebaju nam dodatni uslovi za *MTP₂*.

U ovom modelu, u kom kombinujemo A1, A2 i A6, $\boldsymbol{N}_i$ je *MTP₂*. Dokažimo ovu tvrdnju:

Neka je zajednička funkcija gustine za $\boldsymbol{\Theta}_i$ data sa

$$f_{\boldsymbol{\Theta}_i}(\theta_{i1}, \dots, \theta_{iT_i}) = \int_0^{+\infty} \left(\prod_{t=1}^{T_i} f_{S_{it}}\left(\frac{\theta_{it}}{r}\right) \right) f_{R_i}(r)\, dr \tag{4.5}$$

Pokažimo sada da je $f_{S_{it}}\left(\frac{\theta_{it}}{r}\right)$ *TP₂* po (θ_{it}, r), odnosno treba pokazati da za $\forall \theta_1 < \theta_2$ i $\forall r_1 < r_2$ važi nejednakost:

$$f_{S_{it}}\left(\frac{\theta_1}{r_1}\right) f_{S_{it}}\left(\frac{\theta_2}{r_2}\right) \geq f_{S_{it}}\left(\frac{\theta_1}{r_2}\right) f_{S_{it}}\left(\frac{\theta_2}{r_1}\right)$$

Dakle, treba da pokažemo da važi:

$$e^{\left\{-\frac{1}{2\sigma_S^2}\left(\left(ln\frac{\theta_1}{r_1} - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)^2 + \left(ln\frac{\theta_2}{r_2} - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)^2\right)\right\}} \geq e^{\left\{-\frac{1}{2\sigma_S^2}\left(\left(ln\frac{\theta_1}{r_2} - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)^2 + \left(ln\frac{\theta_2}{r_1} - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)^2\right)\right\}}$$

Što je ekvivalentno sa

$$-\frac{1}{2\sigma_S^2}\left(\left(ln\frac{\theta_1}{r_1} - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)^2 + \left(ln\frac{\theta_2}{r_2} - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)^2\right) \geq -\frac{1}{2\sigma_S^2}\left(\left(ln\frac{\theta_1}{r_2} - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)^2 + \left(ln\frac{\theta_2}{r_1} - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)^2\right)$$

$$-\frac{1}{2\sigma_S^2}\left(\left(ln\frac{\theta_1}{r_1} - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)^2 + \left(ln\frac{\theta_2}{r_2} - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)^2 - \left(ln\frac{\theta_1}{r_2} - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)^2 - \left(ln\frac{\theta_2}{r_1} - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)^2\right) \geq 0$$

$$-\frac{1}{2\sigma_S^2}\left(\left(ln\frac{\theta_1}{r_1}\right)^2+\left(ln\frac{\theta_2}{r_2}\right)^2-\left(ln\frac{\theta_1}{r_2}\right)^2-\left(ln\frac{\theta_2}{r_1}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\sigma_S^2\underbrace{\left(ln\frac{\theta_1}{r_1}+ln\frac{\theta_2}{r_2}-ln\frac{\theta_1}{r_2}-ln\frac{\theta_2}{r_1}\right)}_{=0}\right)\geq 0$$

Posle kvadriranja i skraćivanja ostaje:

$$\frac{1}{\sigma_S^2}(ln\,\theta_2 ln\,r_2-ln\,\theta_2 ln\,r_1-ln\,\theta_1 ln\,r_2+ln\,\theta_1 ln\,r_1)\geq 0$$

Odnosno,

$$\frac{1}{\sigma_S^2}\big((ln\,\theta_2-ln\,\theta_1)(ln\,r_2-ln\,r_1)\big)\geq 0$$

Ova relacija očigledno važi, pa stoga, preslikavanje $(\theta_{it},r)\to f_{S_{it}}\left(\frac{\theta_{it}}{r}\right)$ je *TP₂*. Odavde dalje sledi da je podintegral iz (4.5) *MTP₂* po $(\boldsymbol{\theta}_i,r)$ pa onda sledi i da je $f_{\boldsymbol{\Theta}_i}$ *MTP₂*.

Pokažimo da imaoci polisa koji su podneli više zahteva u prošlosti postaju opasniji po neposmatranim karakteristikama.

Teorema 4.1.6.2

U modelu A1 - A2, $(\boldsymbol{\Theta}_i|\boldsymbol{N}_i=k)\preccurlyeq_{LR}(\boldsymbol{\Theta}_i|\boldsymbol{N}_i=k')$ kada god je $k\leq k'$ sledi da je $\boldsymbol{\Theta}_i$ *MTP₂*.

Dokaz:

Uslovna funkcija gustine za $\boldsymbol{\Theta}_i$, za dato $\boldsymbol{N}_i=k$ se može predstaviti kao:

$$f_{\boldsymbol{\Theta}_i}(\boldsymbol{\theta}|k)=\frac{P\{\boldsymbol{N}_i=k|\boldsymbol{\Theta}_i=\theta\}f_{\boldsymbol{\Theta}_i}(\boldsymbol{\theta})}{P\{\boldsymbol{N}_i=k\}}$$

Razmotrimo sada dva istorijska zahteva $k\leq k'$ kao i moguće vrednosti za slučajne efekte θ i θ'. Krenimo od

$$f_{\Theta_i}(\boldsymbol{\theta}|k)f_{\boldsymbol{\Theta}_i}(\boldsymbol{\theta}'|k')=\frac{P\{\boldsymbol{N}_i=k|\boldsymbol{\Theta}_i=\theta\}P\{\boldsymbol{N}_i=k'|\boldsymbol{\Theta}_i=\theta'\}}{P\{\boldsymbol{N}_i=k\}P\{\boldsymbol{N}_i=k'\}}f_{\boldsymbol{\Theta}_i}(\boldsymbol{\theta})f_{\boldsymbol{\Theta}_i}(\boldsymbol{\theta}')$$
$$=\left(\prod_{t=1}^{T_i}P\{N_{it}=k_t|\Theta_{it}=\theta_{it}\}\right)\left(\prod_{t=1}^{T_i}P\{N_{it}=k_t'|\Theta_{it}=\theta_{it}'\}\right)\times$$
$$\times\frac{f_{\boldsymbol{\Theta}_i}(\boldsymbol{\theta})f_{\boldsymbol{\Theta}_i}(\boldsymbol{\theta}')}{P\{\boldsymbol{N}_i=k\}P\{\boldsymbol{N}_i=k'\}}$$

Iz prirode osobine *MTP₂* od $\boldsymbol{\Theta}_i$ imamo da je

$$f_{\boldsymbol{\Theta}_i}(\boldsymbol{\theta}|k)f_{\boldsymbol{\Theta}_i}(\boldsymbol{\theta}'|k')\leq\left(\prod_{t=1}^{T_i}P\{\boldsymbol{N}_{it}=k_t\wedge k_t'|\boldsymbol{\Theta}_{it}=\theta_{it}\wedge\theta_{it}'\}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\prod_{t=1}^{T_i}P\{\boldsymbol{N}_{it}=k_t\vee k_t'|\boldsymbol{\Theta}_{it}=\theta_{it}\vee\theta_{it}'\}\right)\frac{f_{\boldsymbol{\Theta}_i}(\boldsymbol{\theta}\wedge\boldsymbol{\theta}')f_{\boldsymbol{\Theta}_i}(\boldsymbol{\theta}\vee\boldsymbol{\theta}')}{P\{N_i=k\}P\{N_i=k'\}}=$$

$$= P\{\boldsymbol{N}_i = k \wedge k' | \boldsymbol{\Theta}_i = \theta \ \wedge \theta'\} P\{\boldsymbol{N}_i = k \vee k' | \boldsymbol{\Theta}_i = \theta \vee \theta'\} \cdot \frac{f_{\boldsymbol{\Theta}_i}(\boldsymbol{\theta} \wedge \boldsymbol{\theta}') f_{\boldsymbol{\Theta}_i}(\boldsymbol{\theta} \vee \boldsymbol{\theta}')}{P\{\boldsymbol{N}_i = k\} P\{\boldsymbol{N}_i = k'\}}$$

$$= \frac{P\{\boldsymbol{N}_i = k | \boldsymbol{\Theta}_i = \theta \ \wedge \ \theta'\} f_{\boldsymbol{\Theta}_i}(\boldsymbol{\theta} \ \wedge \boldsymbol{\theta}')}{P\{\boldsymbol{N}_i = k\}} \frac{P\{\boldsymbol{N}_i = k \vee k' | \boldsymbol{\Theta}_i = \theta \vee \theta'\}}{P\{\boldsymbol{N}_i = k'\}}$$

$$= f_{\boldsymbol{\Theta}_i}(\theta \wedge \theta' | k) \ f_{\boldsymbol{\Theta}_i}(\theta \vee \theta' | k')$$

Razmotrimo sada raspodelu za broj budućih zahteva N_{i,T_i+1}, za dati broj prošlih zahteva N_i. Model A4 je teško primenljiv na računanje verovatnoće longitudnih osnova. Ovo se dešava zbog činjenice da funkcija korelacije ρ_W treba da bude neprekidna pod opservacijskim periodom pre ocenjene očekivane premije.

U ovom odeljku ćemo razmotriti modele A5 (sa uslovom $Q \geq 0$) i A6. Ovo nam obezbeđuje da je vektor $\left(\Theta_{i1}, \dots, \Theta_{iT_i}, \Theta_{i,T_i+1}\right)$ takođe, *MTP₂*.

Teorema 4.1.6.3

Poisson-ov dinamični učestali kredibilnosni model A1 - A2 iz definicije 4.1.2.1 kompletira se ili sa A5 ($Q \geq 0$) ili sa A6, $\left(\Theta_{iT_1+1} | N_i = k\right) \preccurlyeq_{LR} \left(\Theta_{iT_1+1} | N_i = k'\right)$ za $\forall k \leq k'$.

Dokaz:

Zbog teoreme 4.1.6.2 znamo da pod A5 ($Q \geq 0$) ili A6 važi:

$$\left(\left(\Theta_{i1}, \dots, \Theta_{iT_i+1}\right) | N_i = k\right) \preccurlyeq_{LR} \left(\left(\Theta_{i1}, \dots, \Theta_{iT_i+1}\right) | N_i = k'\right)$$

kada god je $k \leq k'$.
Kako je $\preccurlyeq_{LR}$ zatvorena pod marginalizacijom, teorema je dokazana. ■

Ovom teoremom smo pokazali da ako imalac polise podnosi više zahteva u prošlosti, to će biti opasnije za neposmatrane karakteristike Θ_{iT_i+1} za T_i+1 godinu.

Sledeća teorema je isti rezultat za broj budućih zahteva.

Teorema 4.1.6.4

Pod pretpostavkom iz teoreme 4.1.6.3 važi:

$$\left(N_{iT_i+1} | N_i = k\right) \preccurlyeq_{LR} \left(N_{iT_i+1} | N_i = k'\right)$$

za $\forall k \leq k'$.

Ova osobina je direktna posledica teoreme 4.1.6.3 i leme 4.1.5.1.

4.2. JOŠ NEKI STATIČNI KREDIBILNOSNI MODELI

4.2.1. UOPŠTENI LINEARNI (*GLM*) MODEL I UOPŠTENI DOPUNJENI MODEL (*GAM*)

Uopšteni linearni model ujedinjuje regresijske metode za raznovrsnost diskretnih i neprekidnih ishoda. Osnova ovih modela je pretpostavka da su podaci uzeti iz uzorka iz jednoparametarske eksponencijalne familije raspodela. Ovo se dešava, na primer, sa podacima koji su slični sa binomnim pravilom, Poissonovim, normalnim sa poznatom varijansom ili gama pravilom sa poznatim parametrom disperzije.

Specijalno, razmotrimo jednu opservaciju y. *GLM* modeli primaju log - količnik verodostojnosti sledeće forme:

$$l(\eta, \tau; y) = \frac{y\eta - b(\eta)}{\tau} + c(y, \tau) \tag{4.6}$$

gde η predstavlja kanonski paramatar, a $\tau > 0$ je parametar disperzije (za koji pretpostavljamo da ga znamo). Lako je videti da je $\mu = E(Y) = b'(\eta)$ i da je $Var(Y) = b''^{(\eta)}\tau = v(\mu)\tau$, gde je $v(\cdot)$ funkcija varijanse. Vezna funkcija između sredine μ i linearnog pretkazivača je onda specificirana. Preciznije, za dati p-dimenzionalni vektor $\boldsymbol{x}$ objašnjenih promenljivih i vektor $\boldsymbol{\beta}$ koeficijenata regresije, linearni pretkazivač (takođe, zvan i rezultat) dobija formu:

$$\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x} = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij}$$

Ovo je onda povezano sa sredinom na sledeći način: $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x} = a(\mu)$. Funkcija $a(\cdot)$ je vezna funkcija, a u ovom specijalnom slučaju $a(\mu) = \eta$ je kanonska vezna funkcija.

Rezultati utvrđeni u ovom poglavlju se direktno koriste za objašnjavanje regresijskih modela konstruisanih iz *GLM* familije. Najbolji primer za to su uopšteni dopunjeni modeli (*GAM*). Ovi modeli se zasnivaju na istoj pretpostavci kao i *GLM* modeli. Vezna funkcija između sredine μ i pretkazivača je i u ovom slučaju specificirana. Preciznije, za dati vektor $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})$ objašnjenih promenljivih, gde su komponente $\boldsymbol{x}$ neprekidne, a $\boldsymbol{\omega}$ binarno mešovite i vektor $\boldsymbol{\beta}$ čije su komponente koeficijenti regresije. Dopunjeni pretkazivač ima oblik:

$$\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x_j) + \boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\beta} \tag{4.7}$$

gde su $\psi_1(\cdot), \dots, \psi_p(\cdot)$ nepoznate glatke funkcije „mešanja“. Tada je rezultat (4.7) povezan sa sredinom preko funkcije $a(\cdot)$, koja se naziva vezna funkcija kao i kod *GLM* modela.

<u>Učestalost zahteva</u>

Poissonov zakon je posebno pogodan za modeliranje zahteva. U ovom slučaju,

diskretna funkcija gustine se može zapisati kao:

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!} = e^{(-\lambda + y\ln\lambda - \ln y!)},\ \ y \in \mathbb{N},\ \ \lambda > 0$$

Poistovećujući ovaj izraz sa kanonskim log - količnikom verodostojnosti (4.6) sa prinosom $\eta = \ln\lambda$, $b(\eta) = e^{\eta}$, $c(y,\tau) = -\ln y!$, $\tau = 1$, $a(\xi) = \ln\xi$, $v(\mu) = \mu$.

Kako Poissonov zakon spada u *GLM* klasu, rezultati izvedeni u ovom delu će proširiti one dobijene za Poissonov statični kredibilnosni model iz definicije 4.1.1.1.

Pokazatelji gubitka

Zakon normalne raspodele često obezbeđuje prikladan model za pokazatelje gubitka (odnosno, ukupni zahtevi koji se odnose na riziko klasu ili na ceo portfolio, podeljeni su odgovarajućom čistom premijom). Asocirana funkcija gustine je

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} = e^{\left(\frac{y\mu - \frac{\mu^2}{2}}{\sigma^2} - \frac{y^2}{2\sigma^2} - \ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)\right)}$$

i imamo $\eta = \mu$, $b(\eta) = \frac{\eta^2}{2}$, $\tau = \sigma^2$, $a(\xi) = \xi$, $v(\mu) = 1$, $c(y,\tau) = -\frac{y^2}{2\sigma^2} - \ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)$.

Strogost zahteva

Kada nas interesuje raspodele pojedinačnih strogosti zahteva, gama raspodela nam može omogućiti prihvatljiv model. U regresijskom postupku, ovaj model je poželjan pošto spada u rang GLM modela. Štaviše, spada u ne-negativne zahteve i poseduje asimetričnost empirijskih podataka. Asocirana funkcija gustine može se zapisati kao:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} v^{\nu-1}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\nu} e^{-\frac{\nu y}{\mu}} = e^{\left(\nu\left(-\frac{y}{\mu} - \ln\mu\right) + (\nu-1)\ln y + \nu\ln\nu - \ln\Gamma(\nu)\right)},\ \ y \in \mathbb{R}^+,\ \ \nu, \mu > 0$$

kada imamo $\eta = -\frac{1}{\mu}$, $b(\eta) = \ln\left(-\frac{1}{\eta}\right)$, $\tau = \frac{1}{\nu}$, $a(\xi) = -\frac{1}{\xi}$, $v(\mu) = \mu^2$, $c(y,\tau) = (\nu - 1)\ln y + \nu\ln\nu - \ln\Gamma(\nu)$.

Kanonska veza nameće restrikcije na regresor $\boldsymbol{\beta}$, kako bi se osigurala pozitivnost sredine μ. Dakle, logaritamska veza je često preporučljiva u praksi. Štaviše, kada se kombinuje sa Poissonovim modelom u prikazivanju ukupnog opterećenja zahteva koji se odnose na pojedinačne polise, dok gama speciffikacija sa logaritamskom vezom proizvodi multipikativnu čistu premiju koja je takođe korisna u praksi.

4.2.2. TEORIJA KREDIBILITETA I UOPŠTENI LINEARNI MODELI SA MEŠOVITOM RASPODELOM (*GLMM*)

Nekoliko ekstenzija *GLM* i *GAM* modela uključuju modele sa slučajnim članovima u linearnom pretkazivaču. U takvim slučajevima, govorimo o uopštenim linearnim modelima sa mešovitom raspodelom (*GLMM*).

Za dati neposmatrani slučajni efakat, recimo Θ_i, T_i opservaija $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{iT_i}$ koji se odnose na i-tu polisu u godinama $1,2,\dots,T_i$, pretpostavljamo da je uslovno nezavisan sa sredinom koja je zavisna sa linearnim pretkazivačem preko specifične vezne funkcije i ima uslovnu varijansu koja je specificirana varijansnom funkcijom i ima faktor razmere u skladu sa (4.6).

Definicija 4.2.2.1

Pretpostavimo da posmatramo n slučajnih vektora $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ dimenzija $T_1, T_2, \dots, T_n$. Svaki vektor se odnosi na jednu polisu iz portfolija i sumira istoriju prošlih zahteva. Y_i su međusobno nezavisni, ali njihove komponente mogu biti u korelaciji (zbog ponavljanja merenja na istoj polisi). *GLMM* modeli se oslanjaju na sledeće dve pretpostavke:

A1) Za dato $\Theta_i = \theta_i$ odgovarajući Y_{it}, $t = 1,2,\dots,T$ su međusobno nezavisni i dozvoljavaju količnik verodostojnosti $l(\eta_{it}, \tau, y_{it})$ iz forme (4.6) kada $\mu_{it} = \mu_{it}(\theta_i) = E(Y_{it}|\Theta_i = \theta_i)$ i $v_{it} = v_{it}(\theta_i) = Var(Y_{it}|\Theta_i = \theta_i)$ zadovoljavaju $a\big(\mu_{it}(\theta_i)\big) = \boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{it} + \theta_i$ i $v_{it} = v(\mu_{it})\tau$. $\boldsymbol{x}_{it}$ su poznati vektori , $\boldsymbol{\beta}$ je vektor nepoznatih koeficijenata regresije, $\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{it}$ je ocena, $a(\cdot)$ i $v(\cdot)$ su poznata veza i varijansna funkcija.

A2) Slučajni efekti $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ su međusobno nezavisni sa zajedničkom osnovnom raspodelom.

Odsada, ograničavamo naš rad na specijalnu veznu funkciju, odnosno na $a\big(\mu_{it}(\theta_i)\big) = \eta_{it}$. Ovo ne predstavlja stvaran gubitak (pošto se većina rezutata oslanja na monotonost funkcije $a(\cdot)$), ali nam omogućava izlaganje. Štaviše, uzimamo da je $\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{it}$ konstatno. Slučajne efekte uzimamo tako da važi:

$$E\big(\mu_{it}(\Theta_i)\big) = a^{-1}(\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{it})$$

Posebno, ako je $a(\cdot)$ log - veza, onda za Poissonovu i gama raspodelu dobijamo da je $E(e^{\Theta_i}) = 1$. Ovaj uslov je važan u aktuarskoj praksi. On osigurava da je prosečno gledano, priorna raspodela tačna. U svakoj riziko klasi, neki imaoci polisa plaćaju previše i na taj način subvencionišu druge imaoce polisa koji plaćaju manje od fer cene, ali kompanija dobija dovoljno premija za celu riziko klasu. Statistički gledano, takav uslov je često neophodan za identifikovanje.

GLMM modeli su široko korišćeni kod aktuara, pošto čine osnovu teorije kredibiliteta i bonus - malus sistema. Teorija kredibiliteta je povezana sa *GLMM* tako što Y_{it} predstavlja broj ili iznos zahteva i-tog imaoca polise u godini t. Slučajni efekat $\boldsymbol{\Theta}_i$ predstavlja skrivene karakteristike koje utiču na rizik, a koje su prikrivene od strane osiguravača.

Sledeća teorema će nam biti veoma korisna u daljem radu. Ona tvrdi da su u modelu A1 - A2 iz definicije 4.2.2.1, sve kovarijanse posmatrane (fiksirane) zbog $\preccurlyeq_{LR}$, odnosno da promenljive rastu po slučajnom parametru.

Teorema 4.2.2.2

U modelu A1 - A2 iz definicije 4.2.2.1, $(Y_{it}|\boldsymbol{\Theta}_i = \theta_i)$ je rastuće po θ_i u $\preccurlyeq_{LR}$ smislu, odnosno važi:

$$\theta_i \leq \theta'_i \Longrightarrow (Y_{it}|\boldsymbol{\Theta}_i = \theta_i) \preccurlyeq_{LR} (Y_{it}|\boldsymbol{\Theta}_i = \theta'_i) \text{ za } \forall i, j$$

Dokaz:

Označimo sa $f(\cdot\,;\eta_{it},\tau)$ (diskretnu ili neprekidnu) funkciju gustine za Y_{it}. Odnos funkcija gustine ima formu:

$$\frac{f(\cdot\,;\eta_{it},\tau)}{f(\cdot\,;\eta'_{it},\tau)} = e^{\frac{y(\eta_{it}-\eta'_{it})-(b(\eta_{it})-b(\eta'_{it}))}{\tau}}$$

koja je očigledno opadajuća po y zbog $\eta_{it} \leq \eta'_{it}$.
Kako je red količnika verodostojnosti povezan sa ponašanjem odnosa funkcija gustine pridruženih slučajnim promeljivama, za dve slučajne promenljive X i Y važi da je $X \preccurlyeq_{LR} Y$ ako i samo ako $\frac{f_X(t)}{f_Y(t)}$ opada. Čime je tvrđenje dokazano. ■

Napomena:

Prethodna teorema važi u u slučaju kada imamo gama raspodelu.

Sledeća teorema je višedimenzionalni slučaj teoreme 4.2.2.2. Ona se posebno primenjuje u *GLMM* modelima.

Teorema 4.2.2.3

U modelu A1 - A2 iz definicije 4.2.2.1, $(\boldsymbol{Y}_i|\boldsymbol{\Theta}_i = \theta_i)$ je rastuće po θ_i u $\preccurlyeq_{LR}$ smislu, odnosno važi:

$$\theta_i \leq \theta'_i \Longrightarrow (\boldsymbol{Y}_i|\boldsymbol{\Theta}_i = \theta_i) \preccurlyeq_{LR} (\boldsymbol{Y}_i|\boldsymbol{\Theta}_i = \theta'_i) \text{ za } \forall i,j$$

Dokaz:

Pod pretpostavkama iz modela A1 - A2, $(\boldsymbol{Y}_i|\boldsymbol{\Theta}_i = \theta_i)$ je slučajan vektor sa nezavisnim komponentama. Štaviše, na osnovu teoreme 4.2.2.2 stohastičke nejednakosti

$$\begin{gathered}(Y_{i1}|\boldsymbol{\Theta}_i = \theta_i) \preccurlyeq_{LR} (Y_{i1}|\boldsymbol{\Theta}_i = \theta'_i)\\ (Y_{i2}|\boldsymbol{\Theta}_i = \theta_i) \preccurlyeq_{LR} (Y_{i2}|\boldsymbol{\Theta}_i = \theta'_i)\\ \vdots\\ \left(Y_{iT_i}|\boldsymbol{\Theta}_i = \theta_i\right) \preccurlyeq_{LR} \left(Y_{iT_i}|\boldsymbol{\Theta}_i = \theta'_i\right)\end{gathered}$$

važe za bilo koje $\theta_i \leq \theta'_i$. Kako poređenje u višedimenzionalnom $\preccurlyeq_{LR}$ smislu se smanjuje na rangiranje komponenti kada oba slučajna vektora imaju nezavisne komponente, tada imamo da $(\boldsymbol{Y}_i|\boldsymbol{\Theta}_i = \theta_i) \preccurlyeq_{LR} (\boldsymbol{Y}_i|\boldsymbol{\Theta}_i = \theta'_i)$ važi kada je $\theta_i \leq \theta'_i$, što je i trebalo dokazati. ■

Kako je slučajan efekat konstantan u vremenu, starost zahteva nije uračunata pri predviđanju. Tehnički, ovo sledi iz činjenice da verovatnoća od $\boldsymbol{\Theta}_i$, za prošle zahteve zavisi samo od sume $Y_{i\cdot}$ od Y_{it}, a ne od pojedinačnih vrednosti od $\boldsymbol{Y}_{it}$. Sledeća teorema proširuje teoremu 4.1.1.3, koja se odnosi samo na Poissonovom slučaj, na celu klasu *GLM* modela.

Teorema 4.2.2.4

U modelu A1 - A2 iz definicije 4.2.2.1, prediktivna raspodela $\boldsymbol{\Theta}_i$ zavisi samo od $Y_{i\cdot} = \sum_{t=1}^{T_i} \boldsymbol{Y}_{it}$.

Dokaz:

Označimo sa $f_\Theta(\cdot\,|\boldsymbol{y}_i)$ uslovnu funkciju gustine od $\boldsymbol{\Theta}_i$ za dato $\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{y}_i$. i sa $f_{it}(\cdot\,|\theta_i)$ uslovnu funkciju gustine od Y_{it} za dato $\boldsymbol{\Theta}_i = \theta_i$. Tada možemo da zapišemo:

$$f_\Theta(\theta_i|\boldsymbol{y}_i) = \frac{\left(\prod_{t=1}^{T_i} f_{it}(y_{it}|\theta_i)\right) f_\Theta(\theta_i)}{\int_0^{+\infty}\left(\prod_{t=1}^{T_i} f_{it}(y_{it}|\xi)\right) f_\Theta(\xi)\, d\xi}$$

Menjajući svaku funkciju gustine u ovom odnosu, sa njenim stvarnim izraženim dobicima, dobijamo.

$$f_\Theta(\theta_i|\boldsymbol{y}_i) = \frac{e^{\frac{\sum_{t=1}^{T_i}\left(y_{it}(\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it}+\theta_i)-b(\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it}+\theta_i)\right)}{\tau}} f_\Theta(\theta_i)}{\int_0^{+\infty} e^{\frac{\sum_{t=1}^{T_i}\left(y_{it}(\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it}+\xi)-b(\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it}+\xi)\right)}{\tau}} f_\Theta(\xi)\, d\xi}$$

$$= \frac{e^{\frac{\theta_i y_{i\cdot}-\sum_{t=1}^{T_i}\left(b(\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it}+\theta_i)\right)}{\tau}} f_\Theta(\Theta_i)}{\int_0^{+\infty} e^{\frac{\xi y_{i\cdot}-\sum_{t=1}^{T_i}\left(b(\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it}+\xi)\right)}{\tau}} f_\Theta(\xi)\, d\xi}$$

Kako ovaj izraz zavisi samo od $y_{i\cdot}$, time je teorema dokazana. ■

4.2.3. POSTERIORNA RASPODELA

Sada ćemo razmotriti raspodelu od $\boldsymbol{\Theta}_i$ za dato posmatrano $\boldsymbol{Y}_{i\cdot} = y_{i\cdot}$. Sledeća teorema tvrdi da posmatranjem velikih ishoda $\boldsymbol{Y}_i$ raste broj neposmatranih promenljivih Θ_i (u $\preccurlyeq_{LR}$ smislu).

Teorema 4.2.3.1

U modelu A1 - A2 iz defeinicije 4.2.2.1, $(\boldsymbol{\Theta}_i|\boldsymbol{Y}_{i\cdot} = y_{i\cdot}) \preccurlyeq_{LR} (\boldsymbol{\Theta}_i|\boldsymbol{Y}_{i\cdot} = y'_{i\cdot})$ kada god je $y_{i\cdot} \leq y'_{i\cdot}$.

Dokaz:

Iz teoreme 4.2.2.4 znamo da posteriornu funkciju gustine od $\boldsymbol{\Theta}_i$ za dato $Y_{i\cdot} = y_{i\cdot}$ možemo izraziti kao:

$$f_\Theta(\theta_i|\boldsymbol{y}_i) = \frac{h_1(\boldsymbol{y}_i)h_2(\theta_i)e^{\frac{y_{i\cdot}\theta_i}{\tau}} g(\theta_i)}{f(\boldsymbol{y}_i)}$$

gde su

$$h_1(\boldsymbol{y}_i) = \prod_{t=1}^{T_i} e^{c(y_{it},\tau)} e^{\frac{y_{it}\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it}}{\tau}}$$

i

$$h_2(\theta_i) = \prod_{t=1}^{T_i} e^{\frac{b(\theta_{it}+\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it})}{\tau}}$$

Za $y_{i\cdot} \leq y'_{i\cdot}$ i $\theta_i \leq \theta'_i$ važi nejednakost

$$f_\Theta(\theta_i|\boldsymbol{y}_i)f_\Theta(\theta'_i|\boldsymbol{y}'_i) \geq f_\Theta(\theta'_i|\boldsymbol{y}_i)f_\Theta(\theta_i|\boldsymbol{y}'_i)$$

Zaista, to dovodi do

$$e^{\left(\frac{y_{i\cdot}\theta_i}{\tau}+\frac{y'_{i\cdot}\theta'_i}{\tau}\right)} \geq e^{\left(\frac{y_{i\cdot}\theta'_i}{\tau}+\frac{y'_{i\cdot}\theta_i}{\tau}\right)}$$
$$\Leftrightarrow \quad (\theta'_i - \theta_i)(y'_{i\cdot} - y_{i\cdot}) \geq 0$$

što je tačno po pretpostavci. ■

U Bayesianovskoj konstrukciji, uobičajeno je da se $\boldsymbol{\Theta}_i$ oceni posteriornom sredinom, odnosno

$$\widehat{\Theta}_i(y_i) = E(\Theta_i|Y_{i\cdot} = y_{i\cdot})$$

Ova ocena je optimalna u L_2 smislu. Specijalno, kada je funkcija g minimum od $E\left(\left(\Theta_i - g(Y'_{i\cdot})\right)^2\right)$, dobijena pomoću $g^*(y_{i\cdot}) = E(\Theta_i|Y_{i\cdot} = y_{i\cdot})$. Teorema 4.2.3.1 nam posebno osigurava da je $\widehat{\Theta}_i(y_{i\cdot}) \leq \widehat{\Theta}_i(y'_{i\cdot})$ kada je $y_{i\cdot} \leq y'_{i\cdot}$.

4.2.4. PREDIKTIVNA RASPODELA

Glavni cilj teorije kredibiliteta je da predvidi ponašanje imaoca polise prikom podnošenja budućih zahteva. U tom pogledu, prediktivne raspodele su od velikog značaja. One su raspodele karakteristika zahteva za sledeću godinu, ako su date prethodne opservacije. Posmatrajući Y_{iT_i+1}, dobijamo:

Teorema 4.2.4.1

U modelu A1 - A2 iz definicije 4.2.2.1, $\left(\mathbf{Y}_{iT_i+1}|\boldsymbol{Y}_{i\cdot} = y_{i\cdot}\right) \preccurlyeq_{LR} \left(\mathbf{Y}_{iT_i+1}|\boldsymbol{Y}_{i\cdot} = y'_{i\cdot}\right.$ kada je $y_{i\cdot} \leq y'_{i\cdot}$.

Ova teorema je direktna posledica leme 4.1.5.1 i teoreme 4.2.3.1.

4.2.5. LINEARNA KREDIBILNOSNA PREMIJA

Bayesianovska statistika nudi intelektualno prihvatljiv pristup teoriji kredibiliteta. Bayesianovsko ispravljanje $E(\boldsymbol{\Theta}_i|\boldsymbol{Y}_{i\cdot})$ heterogenih komponenti je teoretski zadovoljavajuće, ali često teško izračunljivo. Praktične aplikacije uključuju kompjuterske metode lanaca Markova (kako bi se izvršila integracija sa posterirnom raspodelom), tako da se bar može izračunati preliminarana aproksimacija razultata. U vezi sa tim, najpreciznije kredibilnosni pristup, koji je prvi začeo Bühlmann (1970), nudi ubedljivu aproksimaciju složenih premija. U osnovi, aktuari pribegavaju kvadratnim funkcijama gubitka, ali smatraju da je oblik kredibilnosnih predviđanja ograničen sa ex ante[2] da bi bio linearan u prošlim opservacijama, odnosno ocena $\hat{Y}_{iT_i+1}$ od Y_{iT_i+1} je sledećeg oblika

[2] Ex ante - onaj koji se odnosi na buduće događaje

$$\hat{Y}_{iT_i+1} = c_{i0} + \sum_{t=1}^{T_i} c_{it} Y_{it}$$

Specijalno, tražimo c_{i0} i c_{it}, $t = 1,2,\dots,T_i$ takve da očekivana kvadratna razlika između Y_{iT_i+1} i njene ocenjene vrednosti $\hat{Y}_{iT_i+1}$ bude minimalna

$$\Psi(\boldsymbol{c}) = E\left(\left(Y_{iT_i+1} - c_{i0} - \sum_{t=1}^{T_i} c_{it} Y_{it}\right)^2\right)$$

Izjednačavanjem $\frac{\partial \Psi(\boldsymbol{c})}{\partial c_{i0}}$ sa nulom, dobijamo

$$c_{i0} = E\left(Y_{iT_i+1}\right) - \sum_{t=1}^{T_i} c_{it}\, E(Y_{it}) \tag{4.8}$$

Dalje, $\frac{\partial \Psi(\boldsymbol{c})}{\partial c_{is}} = 0$ daje

$$E\left(Y_{iT_i+1} Y_{is}\right) = c_{io} E(Y_{is}) + \sum_{t=1}^{T_i} c_{it}\, E(Y_{it} Y_{is})$$

Ubacivanjem u (4.8) dobijamo

$$Cov(Y_{it}, Y_{is}) = \sum_{t=1}^{T_i} c_{it}\, Cov(Y_{it} Y_{is}) \tag{4.9}$$

U modelu A1 - A2 iz definicije 4.2.2.1, koristeći lemu 4.1.3.2.(1), možemo napisati, za $s \neq t$

$$\begin{aligned} Cov(Y_{it}, Y_{is}) &= E\left(Cov(Y_{it}, Y_{is} | \boldsymbol{\Theta}_i)\right) + Cov\left(E(Y_{it} | \Theta_i), E(Y_{is} | \boldsymbol{\Theta}_i)\right) \\ &= Cov\left(\mu_{it}(\boldsymbol{\Theta}_i), \mu_{is}(\boldsymbol{\Theta}_i)\right) \end{aligned}$$

I dalje,

$$\begin{aligned} Var(Y_{is}) &= E\left(Var(Y_{is} | \boldsymbol{\Theta}_i)\right) + Var\left(E(Y_{is} | \boldsymbol{\Theta}_i)\right) \\ &= \tau\, E\left(v_{is}(\boldsymbol{\Theta}_i)\right) + Var\left(\mu_{is}(\boldsymbol{\Theta}_i)\right) \end{aligned}$$

tako da (4.9) postaje

$$\begin{aligned} &Cov\left(\mu_{iT_i+1}(\boldsymbol{\Theta}_i), \mu_{is}(\boldsymbol{\Theta}_i)\right) = \\ &= \tau\, c_{is} E\left(v_{is}(\boldsymbol{\Theta}_i)\right) + \sum_{t=1}^{T_i} c_{it}\, Cov\left(\mu_{it}(\boldsymbol{\Theta}_i), \mu_{is}(\boldsymbol{\Theta}_i)\right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Sada ćemo ispitati šta dobijamo od (4.10) u tri značajna primera.

<u>Slučaj sa Poissonovom raspodelom</u>

U ovom slučaju, imamo da je $\mu_{it}(\boldsymbol{\Theta}_i) = e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{it} + \theta_i}$, $\tau = 1$ i $v_{is}(\theta_i) = e^{(\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{is} + \theta_i)}$, tako da sistem (4.10) postaje:

$$\begin{aligned} &e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{iT_i+1}} e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{is}} Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}) = \\ &= c_{is} E\left(e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{is} + \Theta_i}\right) + \sum_{t=1}^{T_i} c_{it}\, Cov\left(e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{it} + \Theta_i}, e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{is} + \Theta_i}\right) = \end{aligned}$$

$$= c_{is}e^{\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{is}} + e^{\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{is}}Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})\sum_{t=1}^{T_i} c_{it}\, e^{\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it}}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{iT_i+1}}Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}) = c_{is} + Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})\sum_{t=1}^{T_i} c_{it}\, e^{\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it}}$$

Ovo dalje vodi do $c_{is} = c_i$, za $\forall s = 1, \dots, T_i$ i

$$c_i = \frac{e^{\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{iT_i+1}}Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})}{1 + Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})\sum_{t=1}^{T_i} e^{\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it}}}$$

$$c_{i0} = e^{\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{iT_i+1}} - \frac{e^{\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{iT_i+1}}Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})}{1 + Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})\sum_{t=1}^{T_i} e^{\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it}}}\sum_{t=1}^{T_i} e^{\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it}}$$

$$= \frac{e^{\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{iT_i+1}}}{1 + Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})\sum_{t=1}^{T_i} e^{\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it}}}$$

Bühlmannova linearna kredibilnosna premija za godinu $T_i + 1$ je jednaka sa

$$e^{\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{iT_i+1}}\frac{1 + Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})\sum_{t=1}^{T_i} Y_{it}}{1 + Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})\sum_{t=1}^{T_i} e^{\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it}}}$$

što se pojavljuje kao proizvod a priori premije $e^{\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{iT_i+1}}$ i aproksimacije teoretskog bonus - malus koeficijenta $E\left(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}\middle|Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{iT_i}\right)$. Ova aproksimacija poseduje delimično prostu interpretaciju, pošto podrazumeva malus koji je $\sum_{t=1}^{T_i} Y_{it} > e^{\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it}}$, odnosno, ako imalac polise podnese više zahteva onda se očekuje a priori[3].

Slučaj sa normalnom raspodelom

U ovom slučaju imao da je $\mu_{it}(\theta_i) = \boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it} + \theta_i$, $\tau = \sigma^2$ i $v(\theta_i) = 1$, tako da sistem (4.10) postaje:

$$Var(\boldsymbol{\Theta}_i) = \sigma^2 c_{is} + Var(\boldsymbol{\Theta}_i)\sum_{t=1}^{T_i} c_{it}$$

Odakle sledi da je $c_{is} = c_i$ za $\forall s = 1, \dots, T_i$ i

$$c_i = \frac{Var(\boldsymbol{\Theta}_i)}{\sigma^2 + Var(\boldsymbol{\Theta}_i)T_i}$$

$$c_{i0} = \boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{iT_i+1} - \frac{Var(\boldsymbol{\Theta}_i)}{\sigma^2 + Var(\boldsymbol{\Theta}_i)T_i}\sum_{t=1}^{T_i} \boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it}$$

Bühlmannova linearna kredibilnosna premija za godinu $T_i + 1$ je sada jednaka sa

$$\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{iT_i+1} + \frac{Var(\boldsymbol{\Theta}_i)}{\sigma^2 + Var(\boldsymbol{\Theta}_i)T_i}\sum_{t=1}^{T_i}(Y_{it} - \boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it})$$

Ovo se može posmatrati i kao korelacija a priori premije $\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{iT_i+1}$ koja se odnosi na vrednost razlike $Y_{it} - \boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{it}$ između posmatranog izlaza i njenog a priori izraza.

[3] A priori - znanje zasnovano na iskustvu.

Slučaj sa gama raspodelom

U ovom slučaju sa log vezom, imamo da je $\ln \mu_{it} = \boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{it} + \theta_i$, $\tau = \frac{1}{\nu}$, $v_{is}(\theta_i) = e^{(2\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{is} + 2\theta_i)}$. Dakle, sistem (4.10) postaje:

$$e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{iT_i+1}} e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{is}} Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}) =$$

$$= \nu^{-1} c_{is} e^{2\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{is}} E(e^{2\boldsymbol{\Theta}_i}) + \sum_{t=1}^{T_i} c_{it}\, e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{it}} e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{is}} Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}) =$$

$$= \nu^{-1} c_{is} e^{2\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{is}} (Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}) + 1) + e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{is}} Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}) \sum_{t=1}^{T_i} c_{it}\, e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{it}}$$

Dalje sledi

$$e^{\eta_{iT_i+1}} Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}) =$$

$$= \nu^{-1} c_{is} e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{is}} (Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}) + 1) + Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}) \sum_{t=1}^{T_i} e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{it}}$$

Sumiranjem obe strane po s, dobijamo

$$\sum_{t=1}^{T_i} c_{it}\, e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{it}} = \frac{T_i e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{it}} Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})}{\nu^{-1}(Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}) + 1) + T_i Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})}$$

Ovo dovodi do

$$c_{is} = \frac{e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{iT_i+1}} Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})}{e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{is}} \left(\nu^{-1}(Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}) + 1) + T_i Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})\right)}$$

$$c_{i0} = e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{iT_i+1}} - \frac{T_i e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{iT_i+1}} Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})}{\nu^{-1}(Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}) + 1) + T_i Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})} =$$

$$= \frac{\nu^{-1} e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{iT_i+1}} (Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}) + 1)}{\nu^{-1}(Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}) + 1) + T_i Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})}$$

Dakle, Bühlmannova linearna kredibilnosna premija za godinu $T_i + 1$ je sada jednaka sa

$$\frac{e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{iT_i+1}}}{\nu^{-1}(Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}) + 1) + T_i Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})} \times \left(\nu^{-1}(Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}) + 1) + Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}) \sum_{t=1}^{T_i} \frac{Y_{it}}{e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{it}}}\right) =$$

$$= e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{iT_i+1}} \left(1 + \frac{Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})}{\nu^{-1}(Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i}) + 1) + T_i Var(e^{\boldsymbol{\Theta}_i})} \sum_{t=1}^{T_i} \left(\frac{Y_{it}}{e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{it}}} - 1\right)\right)$$

Opet, ovo se može posmatrati kao korekcija a priori premije $e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{iT_i+1}}$ koja se odnosi na reziduale $\frac{Y_{it}}{e^{\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{it}}} - 1$.

Treba napomenuti da u ispitana tri slučaja imamo da je $c_i \geq 0$ i da je linearna kreedibilnosna premija oblika $\pi_{kred} = c_{i0} + c_i Y_i$. (u slučaju gama raspodele, koristimo pomoćnu promenljivu $\frac{Y_{it}}{E(Y_{it})}$).

Napomena:

Mana kvadratnih funkcija gubitka je da su devijacije u oba smera jednako loše. Kada osiguravač fiksira iznos nove premije, mogu se pojaviti dva tipa greški: ili imalac polise nedovoljno plaća svoju polisu pa tada osiguravajuća kopmanija gubi svoj novac ili pak osiguranik plaća više nego što je bi trebalo a na taj način osiguravač rizikuje da izgubi polisu. Kako bismo, u što većoj meri, sankcionisali krupne greške, obično pretpostavljamo da je funkcija gubitka ne-negativna konveksna funkcija greške. Gubitak je nula kada nije napravljena greška i strogo je pozitivan kada jeste. U mnogim radovima uzima se da je funkcija gubitka kvadratna.

Između ostalog, izbori su i apsolutni gubitak i kvadratni gubitak. Asimetrične funkcije gubitka dozvoljavaju aktuarima da smanje maluse dobijene kvadratnim gubitkom, održavajući finansijski sistem u ravnoteži. Značajan primer je dobijen sa eksponencijalnom funkcijom gubitka.

4.2.5.1. RAST U LINEARNOM KREDIBILNOSNOM MODELU

U ovom odeljku ćemo pokazati da je Bühlmannova premija π_{kred} zaista dobra ocena predviđanja karakteristika budućih zahteva (odnosno, broja ili iznosa) u modelu A1 - A2 iz definicije 4.2.2.1. U osnovi, pokazaćemo da rastom linearne kredibilnosne premije (odnosno, pogoršanjem zahteva od strane imaoca polise) raste verovatnoća posmatranih značajnih gubitaka u budućnosti. Sledeća teorema pokazuje da Y_{iT_i+1} zaista povećava π_{kred}.

Teorema 4.2.5.1.1

U modelu A1 - A2 iz definicije 4.2.2.1, $\left(Y_{iT_i+1}|\pi_{kred}=p\right) \preccurlyeq_{LR} \left(Y_{iT_i+1}|\pi_{kred}=p'\right.$ kada je $p \leq p'$.

Dokaz:

Direktno sledi iz teoreme 4.2.4.1,pošto je

$$\begin{aligned}\left(Y_{iT_i+1}|\pi_{kred}=p\right) &=_d \left(Y_{iT_i+1}\left|Y_{i\cdot}=\frac{p-c_{i0}}{c_i}\right.\right)\\ &\preccurlyeq_{LR} \left(Y_{iT_i+1}\left|Y_{i\cdot}=\frac{p'-c_{i0}}{c_i}\right.\right)\\ &=_d Y_{iT_i+1}|\pi_{kred}=p'\end{aligned}$$

■

4.3. JOŠ REZULTATA ZA DINAMIČNI KREDIBILNOSNI MODEL

4.3.1. DINAMIČNI KREDIBILNOSNI MODEL I UOPŠTENI LINEARNI MODELI SA MEŠOVITOM RASPODELOM

Razmotrimo sada ceo vektor slučajnih efekata umesto samo jednog slučajnog efekta. Ovo nam dozvoljava da modeliramo zavisnost i da izvedemo korelaciju kovarijansi koje su izostavljene ili nejednako izmerene.

Definiicija 4.3.1.1

Za dati neposmatrani vektor slučajnih efekata $\boldsymbol{\Theta}_i = (\Theta_{i1}, \dots, \Theta_{iT_i})$, T_i opservacija $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{iT_i}$ koje se odnose na *i*-ti subjekat pretpostavljamo da su uslovno nezavisne. Za n slučajnih vektora $\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \dots, \boldsymbol{Y}_n$ pretpostavljamo da su međusobno nezavisni, ali njihove komponente mogu biti korelisane (zbog ponavljanja merenja na istom vektoru). Dinamični kredibilnosni model zasnovan na *GLMM* modelima oslanja se na sledeće pretpostavke

A1) Za dato $\Theta_i = \theta_i$, odgovarajuće promenljive Y_{it}, $t = 1,2, \dots, T_i$ su međusobno nezavisne i dozvoljavaju log-količnik verodostojnosi $l(\eta_{it0}, \tau; y_{it})$ iz forme (4.6) gde

$$\mu_{it}(\theta_{it}) = E(Y_{it}|\Theta_{it} = \theta_{it}) \text{ i } v_{it} = Var(Y_{it}|\Theta_{it} = \theta_{it})$$

zadovoljavaju $a(\mu_{it}(\theta_{it})) = \boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{it} + \theta_{it}$ i $v_{it} = v(\mu_{it})\tau$, gde su $a(\cdot)$ i $v(\cdot)$ poznata vezna funkcija i poznata funkcija varijanse.

A2) Vektori slučajnih efekata $\boldsymbol{\Theta}_1, \dots, \boldsymbol{\Theta}_m$ su međusobno nezavisni sa zajedničkom višedimenzionalnom raspodelom.

Odsada, ograničavamo naš rad na specijalan slučaj kanonskih funkcija veze $a(\mu_{it}(\theta_{it})) = \eta_{it}$. Zapravo, ovo ne ograničava opštost našeg rezultata (većina se zasniva na monotonosti funkcije $a(\cdot)$) ali u velikoj meri olakšava izlaganje. Štaviše, tretiraćemo $\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{x}_{it}$ kao konstantu.

Često, pretpostavljamo da $\boldsymbol{\Theta}_i$ imaju višedimenzionalnu normalnu raspodelu $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, gde matrica kovarijansi $\boldsymbol{\Sigma}$ ima karakteristiku da je vremenski zavisna. Klasični autoregresivni promenljivi prosečni model se često uzima za $\boldsymbol{\Theta}_i$, pa evo i nekoliko primera. Prvi je analogan sa modelom A5 u Poissonovim dinamičnim kredibilnosnim modelima, a drugi je proširenje modela A6 iz Poissonovih kredibilnosnih modela na slučaj GLMM modela.

Primer 4.3.1.2 (*Dinamični kredibilitet sa AR1 slučajnim efektima*)

Jedinstven i efikasan dinamični kredibilnosni model je dobijen pretpostavljajući da $\boldsymbol{\Theta}_i$ ima autoregresivnu strukturu reda 1, odnosno:

$$\Theta_{it} = Q\, \Theta_{i,t-1} + \varepsilon_{it}, t \geq 2$$

gde su $\varepsilon_{it}: \mathcal{N}\left(0, \sigma^2(1-\rho^2)\right)$ nezavisne, $|Q| < 1$ i $\varepsilon_{i1}: \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. U ovom modelu, heterogenost Θ_{it} za period t je pod uticajem prethodnog perioda $\Theta_{i,t-1}$, ali takođe ima svoje karakteristike ε_{it}.

Primer 4.3.1.3 (*Dinamični kredibilitet sa zamenljivim slučajnim efektima*)

Drugi model zahteva da postoji statična osnovna heterogenost R_i za *i*-tog imaoca polise, koja je „uznemirena“ nezavisnošću i identičnim raspodelama godišnjih efekata $S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{iT_i}$. Specijalno, $\Theta_{it} = R_i + S_{it}$, gde su S_{it} nezavisne sa identičnom raspodelom i nezavisne od R_i. Takođe, sve imaju normalnu raspodelu.

Ograničili smo našu pažnju na ove posebne slučajeve u ovom odeljku, pošto su oni najvažniji za primenu. Većina rezultata izvedenih u ovom odeljku ipak ostaje važeća i za druge odgovarajuće izbore raspodela.

Teorema 4.3.1.4

U modelu A1 - A2 iz definicije 4.3.1.1, $(Y_{it}|\Theta_{it} = \theta_{it})$ je rastuće po Θ_{it} u $\preccurlyeq_{LR}$ smislu, odnosno

$$\Theta_{it} \leq \Theta'_{it} \Rightarrow (Y_{it}|\Theta_{it} = \theta_{it}) \preccurlyeq_{LR} (Y_{it}|\Theta_{it} = \theta'_{it})$$

za bilo koje i i t.

Teorema 4.3.1.5

U modelu A1 - A2 iz definicije 4.3.1.1, $(\boldsymbol{Y}_i|\boldsymbol{\Theta}_i = \boldsymbol{\theta}_i)$ je rastuće po $\boldsymbol{\Theta}_i$ u $\preccurlyeq_{LR}$ smislu, odnosno

$$\boldsymbol{\Theta}_i \leq \boldsymbol{\Theta}'_i \Rightarrow (\boldsymbol{Y}_i|\boldsymbol{\Theta}_i = \boldsymbol{\theta}_i) \preccurlyeq_{LR} (\boldsymbol{Y}_i|\boldsymbol{\Theta}_i = \boldsymbol{\theta}'_i)$$

za bilo koje i.

4.3.2. ZAVISNOST U OSNOVNIM *GLMM* KREDIBILNOSNIM MODELIMA

Naš cilj je da pokažemo da u mnogo slučajeva *GLMM* modeli uzrokuju pozitivnu zavisnost između Y_{it}, u smislu da „velike“ (ili „male“) vrednosti slučajnih promenljivih imaju tendenciju da se pojavljuju zajedno. Formalni zapis je naveden u sledećoj teoremi koja korist rast uslovnih raspodela u mešovitim raspodelama koje smo utvrdili u teoremama 4.3.1.4 i 4.3.1.5.

Teorema 4.3.2.1

U modelu A1 - A2 iz definicije 4.3.1.1 važi:

1) Ako je $\boldsymbol{\Theta}_i$ asocirana, tada je i $\boldsymbol{Y}_i$ asocirana.
2) Ako je $\boldsymbol{\Theta}_i$ *MTP*$_2$, tada je i $\boldsymbol{Y}_i$ *MTP*$_2$.

Pogledajmo sada korisnost ove teoreme na stvarnom problemu.

Napomena:

Ako je $\mathbf{\Theta}_i$ višedimenzionalna slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom sa matricom kovarijansi $\mathbf{\Sigma}$, onda zbog primera 4.1.3.4 znamo da je $\sigma_{st} \geq 0$ za $\forall s, t$ implicira da je $\mathbf{\Theta}_i$ asocirana. Tada iz teoreme 4.3.2.1.(1) sledi da je i $\boldsymbol{Y}_i$ asocirana.

Dalje, pod uslovom da je $\mathbf{\Sigma}$ invertibilna (označimo sa R njenu inverznu matricu, odnosno $R = \{r_{st}\} = \mathbf{\Sigma}^{-1}$), znamo iz primera 3.2.3.2.5 da je $r_{st} \leq 0$ za $\forall s \neq t$, što implicira da je $\mathbf{\Theta}_i$ *MTP₂*. Onda je i $\boldsymbol{Y}_i$ *MTP₂* zbog teoreme 4.3.2.1.(2).

Kroz sledeće primere ćemo pokazati kako se ova teorema odražava na pojedinačne slučajeve.

Primer 4.3.2.2 (*Kredibilitet sa AR1 slučajnim promenljivama*)

Iz Poissonovog kredibilnosnom modela A5 znamo da je $Q \geq 0$ iz čega sledi da je $\mathbf{\Theta}_i$ *MTP₂*, a to nam zbog teoreme 4.3.2.1.(2) osigurava da i $\boldsymbol{Y}_i$ bude *MTP₂*.

Primer 4.3.2.3 (*Kredibilitet sa promenljivim slučajnim promenljivama*)

Iz Poissonovog kredibilnosnom modela A6 znamo da je $\mathbf{\Theta}_i$ *MTP₂* (gde je $\Theta_{it} = R_i + S_{it}$). U ovom slučaju. Takođe je $\boldsymbol{Y}_i$ *MTP₂* zbog teoreme 4.3.2.1.(2).

4.3.3. POSTERIRNA RASPODELA

Označimo posteriornu raspodelu promenljve $\mathbf{\Theta}_i$, za dato $\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{y}_i$, sa $f_{\mathbf{\Theta}}(\cdot|\boldsymbol{y}_i)$. teorema koja sledi ustvari, govori da posmatranjem velikog broja $\boldsymbol{Y}_i$ povećava se broj neposmatranih, skrivenih promenljivih (u $\preccurlyeq_{LR}$ smislu).

Teorema 4.3.3.1

U modelu A1 - A2 iz definicije 4.3.1.1 važi:

$$(\mathbf{\Theta}_i|\boldsymbol{Y}_i = \mathbf{y}_i) \preccurlyeq_{LR} (\mathbf{\Theta}_i|\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{y}'_i) \text{ kada je } \mathbf{y}_i \leq \mathbf{y}'_i$$

Dokaz:

Posterirorna funkcija gustine od $\mathbf{\Theta}_i$ za dato $\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{y}_i$ se može zapisati kao:

$$f_{\mathbf{\Theta}}(\boldsymbol{\theta}_i|\boldsymbol{y}_i) = \frac{h_1(\boldsymbol{y}_i)h_2(\boldsymbol{\theta}_i)\left(\prod_{j=1}^{n} e^{\frac{y_{ij}\cdot\theta_{ij}}{\tau}}\right)f_{\mathbf{\Theta}}(\boldsymbol{\theta}_i)}{f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}_i)}$$

gde su

$$h_1(\boldsymbol{y}_i) = \prod_{j=1}^{T_i} e^{c(y_{ij},\tau)} e^{\frac{y_{ij}\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{ij}}{\tau}}$$

$$h_2(\boldsymbol{\theta}_i) = \prod_{j=1}^{T_i} e^{-\frac{b(\theta_{ij}+\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{x}_{ij})}{\tau}}$$

Treba da pokažemo da za $\mathbf{y}_i \leq \mathbf{y}'_i$ sledeća nejednakost važi

$$f_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta}_i|\boldsymbol{y}_i)f_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta}'_i|\boldsymbol{y}'_i) \leq f_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta}'_i \wedge \boldsymbol{\theta}_i|\boldsymbol{y}_i)f_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta}'_i \wedge \boldsymbol{\theta}_i|\boldsymbol{y}'_i)$$

Dokaz sada sledi iz osobine TP_2 funkcije $(y_{ij}, \theta_{ij}) \to e^{\frac{y_{ij}\cdot\theta_{ij}}{\tau}}$ i teoreme 3.2.3.2.4. ■

U Bayesianovskom sistemu, uobičajeno je da se $\boldsymbol{\Theta}_i$ oceni sa sredinama posterirne raspodele, odnosno:

$$\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i(\boldsymbol{y}_i) = E(\boldsymbol{\Theta}_i|\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{y}_i)$$

Prethodna teorema nam obezbeđuje da $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i(\boldsymbol{y}_i) \leq \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i(\boldsymbol{y}'_i)$ važi kada je $\mathbf{y}_i \leq \mathbf{y}'_i$.

4.3.4. SUPERMODULARNA POREĐENJA

Čini se prirodno da očekujemo da rastom jačine pozitivne zavisnosti između prikrivenih Θ_i povećavamo asociranost između posmatranih Y_{it}. U ovom poglavlju ćemo formalizovati ovu intuitivnu ideju. Zbog toga pribegavamo supermodularnom poređenju koje je prikladan alat za poređenje jačine zavisnosti.

Teorema 4.3.4.1

U modelu A1 - A2 iz definicije 4.3.1.1 važi:

$$(\boldsymbol{\Theta}_i|\boldsymbol{Y}_i = \mathbf{y}_i) \preccurlyeq_{LR} (\boldsymbol{\Theta}_i|\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{y}'_i) \text{ kada je } \mathbf{y}_i \leq \mathbf{y}'_i$$
$$\boldsymbol{\Theta}_i \preccurlyeq_{SM} \boldsymbol{\Theta}'_i \Longrightarrow \boldsymbol{Y}_i \preccurlyeq_{SM} \boldsymbol{Y}'_i$$

Vraćanjem na interpolaciju $\preccurlyeq_{SM}$ kao red zavisnosti, izraz u teoremi 4.3.4.1 se čita kao: „veća pozitivna zavisnost između Θ_{it} dovodi do veće zavisnosti između Y_{it}“.

Pretpostavimo da $\boldsymbol{\Theta}_i$ i $\boldsymbol{\Theta}'_i$ imaju višedimenzionalnu normalnu raspodelu sa identičnim jednodimenzionalnim maginalnim raspodelama i da važi $Cov(\Theta_{is}, \Theta_{it}) \leq Cov(\Theta'_{is}, \Theta'_{it})$ za $\forall s \neq t$. Tada sledi da je $\boldsymbol{\Theta}_i \preccurlyeq_{SM} \boldsymbol{\Theta}'_i$ a iz teoreme 4.3.4.1 dobijamo da je $\boldsymbol{Y}_i \preccurlyeq_{SM} \boldsymbol{Y}'_i$, što nam govori da ako povećamo korelacije između svakog para slučajnih promenljivih , povećava se i zavisnost između godišnjih zahteva.

Primer 4.3.4.2 (*Kredibilnost sa AR1 slučajnim promenljivama*)

Kako je $Cov(\boldsymbol{\Theta}_{is}, \boldsymbol{\Theta}_{it}) = \sigma^2 Q^{|s-t|}$, teorema 4.3.4.1 zajedno sa primerom 4.3.2.2 osigurava da važi $Q \leq Q' \Longrightarrow Y_i \preccurlyeq_{SM} Y'_i$. U ovom modelu, količina zavisnosti se kontroliše parametrom Q, odnosno, što je veća vrednost od Q, povećava se važnost prošlih zahteva prilikom određivanju budućih premija.

4.3.5. PREDIKTIVNE RASPODELE

Pre uvođenja prediktivnih raspodela ispitaćemo monotonost podskupova $\boldsymbol{Y}_i$, za date druge komponente.

Teorema 4.3.5.1

Neka je $\boldsymbol{Y}_{ij}$ ($\boldsymbol{Y}_{ik}$) slučajan vektor sa komponentama $\boldsymbol{Y}_{ij}$, $j \in J$ ($\boldsymbol{Y}_{ik}$, $k \in K$). U modelu A1 - A2 iz definicije 7.4.1 važi da ako je $\boldsymbol{\Theta}_i$ *MTP₂*, onda je i $(\boldsymbol{Y}_{iJ}|\boldsymbol{Y}_{iK} =$ *yK≤LRYiJYiK=y′K* za svako *yK≤y′K∈ℝ#K*, za svaku particiju *1,2,...,Ti* u skupovima J i K.

Dokaz:

Iz teoreme 4.3.2.1.(2) znamo da je $\boldsymbol{Y}_i$ je *MTP₂*. Označimo sa $f(\boldsymbol{y}_J|\boldsymbol{y}_K)$ uslovnu funkciju gustine od $\boldsymbol{Y}_{ij}$ za dato $\boldsymbol{Y}_{ik} = \boldsymbol{y}_K$. Treba pokazati da važi:

$$f(y_J \wedge \tilde{y}_J|y_K)f(y_J \vee \tilde{y}_J|y_K) \geq f(y_J, y_K)f(\tilde{y}_J, y'_K)$$

Deljenjem obe strane sa $f_K(y_K)f_K(y'_K)$, gde je f_K funkcija gustine za $\boldsymbol{Y}_{ik}$, dobijamo da važi željena nejednakost. ■

Intuitivno objašnjenje iza ove teoreme je da je kada su komponente od $\boldsymbol{\Theta}_i$ izložene jakoj pozitivnoj zavisnosti (*MTP₂*) veliki ishodi za neke $\boldsymbol{Y}_{ij}$ (oni koji su u K) čine ostale (one u J) većim u $\preccurlyeq_{LR}$ smislu.

Sada ćemo primeniti ove rezultate na prediktivne raspodele. Kako je glavni cilj teorije kredibiliteta da predvidi buduće ponašanje zahteva, prediktivne raspodele su od primarnog značaja, jer su one raspodele karakteristika zahteva za sledeću godinu, za date prošle opservacije.

Ako je $\boldsymbol{\Theta}_i$ multivarijantna slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom, pod uslovom da matrica kovarijansi $\boldsymbol{\Sigma}$ ispunjava uslove iz primera 3.2.3.2.5 koji obezbeđuju da je $(\Theta_{i1}, \Theta_{i2}, \dots, \Theta_{iT_i+1})$ *MTP₂*, dolazimo do istog zaključka kao i kod statičnih kredibilnosnih modela. Opet, budući zahtevi Y_{iT_i+1} rastu po prošlim zahtevima Y_i u $\preccurlyeq_{LR}$ smislu.

4.4. ZAVISNOST IZAZVANA BONUS - MALUS SKALAMA

4.4.1. BONUS - MALUS SISTEMI U OSIGURANJU MOTORNIH VOZILA

Sistemi procene koji sankcionišu osiguranike odgovorne za jednu ili više nesreća putem doplate premije (ili malusima) i nagrađuju popustima imaoce polisa koji nemaju podnete zahteve za odštetu, sada su na snazi u mnogim zemljama. Pored toga što ohrabljuju imaoce polisa da voze pažljivije (odnosno, da smanje moralni hazard) njihov cilj je bolji pristup individualnim rizicima. Takvi sistemi se nazivaju: popust na ne-zahteve, procena zasluga, procena iskustva, bonus - malus sistemi.

U praksi, bonus - malus sistem se sastoji od skale sa konačnim brojem nivoa, svaki sa svojom relativnom premijom. Novi imaoc polise ulazi na skalu na određeni nivo. Posle svake godine, njegova polisa se pomera gore ili dole po skali, prema pravilima prelaska i prema broju zahteva sa prestupima. Ovaj način je prilično efikasan za klasificiranje osiguranika prema njihovom riziku.

4.4.2. MARKOVI MODELI ZA BONUS - MALUS SKALE

Bonus - malus skale poseduju fiksiran broj nivoa, recimo $s+1$, numerisanih od 0 do s. Novom vozaču se dodeljuje specijalan nivo (često prema upotrebi vozila). U svakoj godini u kojoj nema odštetnih zahteva, osiguranik se nagrađuje bonus premijom (odnosno, spušta se za jedan nivo na skali). Međutim, osiguranici se sankcionišu malus poenima (odnosno, vozač se penje određeni broj nivoa svaki put kada podnese odštetni zahtev). Pretpostavljamo da je k_{pen} kazna za dati broj poena po zahtevu. Ukoliko prođe dovoljan broj godina a imalac polise nije podneo nijedan odštetni zahtev, on tada dostiže nivo 0 na skali i time dobija povlastice maksimalnog bonusa.

U komercijalnom bonus - malus sistemu, znanje o sadašnjem nivou i broju odštetnih zahteva u trenutnoj godini je dovoljno da se odredi sledeći nivo. Pod uslovom da je godišnji broj zahteva nezavisan, sistem može biti postavljen preko lanaca *Markov*-a: budućnost (nivo za godinu $t+1$) zavisi od sadašnjosti (odnosno, nivoa za godinu t i broja nesreća prijavljenih tokom te godine) i ne zavisi od prošlosti (odnosno, kompletne istorije zahteva i nivoa tokom godina $1,2,\dots,t-1$). Primetimo da fiktivni nivoi nekad treba da budu dodati da bi se popunila ova osobina nedostatka „pamćenja“.

Označimo sa $L_\theta(t)$ nivo koji osiguranik zauzima posle t godina i čija je očekivana godišnja učestalost zahteva θ. Tada imamo da je

$$L_\theta(t) = max\left\{0, min\{L_\theta(t-1) - 1 + N_t \times k_{pen}, s\}\right\} = \psi(N_1, \dots, N_t)$$

Za neku neopadajuću funkciju ψ, gde $N_1, \dots, N_t$ označavaju godišnje brojeve zahteva podnetih od strane osiguranika i to su nezavisne slučajne promenljive sa $\mathcal{P}(\theta)$ raspodelom.

Matrica prelaska $\boldsymbol{M}(\theta)$ udružena sa bonus - malus sistemom je regularna, odnosno, postoji neki broj $\varepsilon_0 \geq 1$ takav da su svi elementi iz $\{\boldsymbol{M}(\theta)\}^{\varepsilon_0}$ strogo pozitivni. Prema tome, lanac Markova koji opisuje trajektoriju osiguranika sa očekivanom učestalošću zahteva θ kroz nivoe je egzodičan i ima statičnu raspodelu $\boldsymbol{\pi}(\theta) = \left(\pi_0(\theta), \pi_1(\theta), \dots, \pi_s(\theta)\right)^t$, gde je $\pi_l(\theta)$ stacionarna verovatnoća osiguranika sa srednjom frekvencijom θ na novou l.

Neka je L_θ slučajna promenljiva koja uzima vrednosti iz skupa $\{1,2, \dots, s\}$, takva da ima raspodelu $\boldsymbol{\pi}(\theta)$, odnosno

$$P\{L_\theta = l\} = \boldsymbol{\pi}_l(\theta),\ l = 1,2, \dots, s$$

Stoga, promenljiva L_θ predstavlja nivo koji osiguranik zauzima sa godišnjom očekivanom frekvencijom zahteva θ jednom kada dostigne stabilno stanje.

Izaberimo sada, na slučajan način, osiguranika iz portfolija za koji pretpostavljamo da je heterogen (u pogledu godišnjih očekivanih učestalosti zahteva), tako da se ta frekvencija razlikuje od jednog do drugog osiguranika. Označimo sa Θ_i (nepoznatu) godišnju očekivanu frekvenciju zahteva određenog osiguranika. Trajektorija ovog, izabranog osiguranika na bonus - malus skali je opisana stohastičkim procesom $\{L(t), t = 1,2, \dots\}$, gde $L(t)$ predstavlja nivo koji zauzima u godini t.

Štaviše, neka je L bonus - malus nivo koji zauzima ovaj slučajno izabrani osiguranik kada je dostigao stabilno stanje. Raspodela od L može biti zapisana kao

$$P\{L = l\} = \int_0^{+\infty} \boldsymbol{\pi}_l(\theta) f_{\boldsymbol{\Theta}}(\theta)\, d\theta \tag{4.11}$$

4.4.3. POZITIVNA ZAVISNOST U BONUS - MALUS SKALAMA

Počećemo sa teoremom koja je malo jači uslov od teoreme 4.1.5.4.

Teorema 4.4.3.1

Slučajan vektor $(\boldsymbol{\Theta}, N_1, \dots, N_T)$ je *MTP₂* za $T \geq 1$.

Dokaz:

Zajednička funkcija gustine za $(\boldsymbol{\Theta}, N_1, \dots, N_T)$ (u odnosu na meru proizvoda koja uključuje *Lebesgue*-ovu meru nula na $\mathbb{R}^+$ i brojivu meru na ne-negativnim brojevima) je data sa

$$P\{N_1 = n_1, \dots, N_T = n_T | \boldsymbol{\Theta} = \theta\} f_{\boldsymbol{\Theta}}(\theta) = \left(\prod_{t=1}^{T} e^{-\theta} \frac{\theta^{n_t}}{n_t!}\right) f_{\boldsymbol{\Theta}}(\theta)$$

Kako je logaritam ove funkcije supermodularan, teorema je dokazana. ■

Sada možemo da ispitamo tip zavisnosti između nivoa u bosnu - malus sistemu.

Teorema 4.4.3.2

1) Slučajan vektor $\left(\boldsymbol{\Theta}, L(1), L(2), \dots, L(T)\right)$ je asociran za bilo koje $T \geq 1$.
2) Slučajni par $\left(\boldsymbol{\Theta}, L(t)\right)$ je asociran za bilo koje t.
3) Slučajni par $(\boldsymbol{\Theta}, L)$ je asociran.

Dokaz:

1) Iz teoreme 4.4.3.1 sledi da je $(\boldsymbol{\Theta}, N_1, \dots, N_T)$ MTP_2, pa je takođe i asociran. A kako neopadajuće funkcije asociranih slučajnih promenljivih ostaju asocirane, osobina je dokazana.
2) Direktno sledi iz (1), jer podskup asociranih slučajnih promenljivih ostaje asociran.
3) Ova osobina je posledica osobine (2) pošto je asociranost očuvana pod ograničenjem u odnosu na konvergenciju u raspodeli. ■

4.5. TEORIJA KREDIBILITETA I VREMENSKE SERIJE ZA PODATKE KOJI NEMAJU NORMALNU RASPODELU

Aktuari navode serijske zavisnosti tako što dozvoljavaju da karakteristike godišnjih zahteva za odštetu (učestalost ili ozbiljnost nesreće) dele zajedničke slučajne efekte. Ovi slučajni efekti predstavljaju rezidualnu heterogenost, odnosno korelaciju između karakteristika godišnjih zahteva koja nastaje iz izostavljenih varijabli što pravi posteriornu korelaciju iznosa premija. Ako bismo imali kompletno znanje o osiguraniku onda bi serijska korelacija nestala i prošli zahtevi ne bi otkrivali ništa o sledećim nesrećama.

4.5.1. MODELI VREMENSKIH SERIJA NASTALI IZ KOPULA

4.5.1.1. PROCES MARKOVA

Razmotrimo proizvoljan proces stanja E sa sigma - algebrom ε. Par $(E, \mathcal{E})$ je merljiv prostor stanja. Označimo sa $\tau \subseteq \mathbb{R}$ vremenski prostor ($\tau = \mathbb{N}$ ili $\tau = \mathbb{R}^+$).

Definicija 4.5.1.1.1

Stohastički proces $\mathcal{X} = \{X_t, t \in \tau\}$ sa merljivim prostorom stanja $(E, \mathcal{E})$ je proces Markova ako važi

$$P\{X_{t_k} \in B | X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{k-1}}\} = P(X_{t_k} \in B | X_{t_{k-1}})$$

za $\forall t_1 < t_2 < \cdots < t_k \in \tau_k$, $k \geq 1$ i $\forall B \in \mathcal{E}$.

Razmotrimo neprekidne slučajne promenljive X_1, X_2 i X_3 sa odgovarajućim funkcijama raspodele F_1, F_2 i F_3. Ako su X_1 i X_3 uslovno nezavisne za dato X_2, onda je

$$P\{X_1 \leq x_1, X_3 \leq x_3 | X_2 \leq x_2\} = P\{X_1 \leq x_1 | X_2 \leq x_2\} P\{X_3 \leq x_3 | X_2 \leq x_2\}$$

tako da je

$$P\{X_1 \leq x_1, X_3 \leq x_3\} = \int_{-\infty}^{+\infty} P\{X_1 \leq x_1 | X_2 \leq x_2\} P\{X_3 \leq x_3 | X_2 \leq x_2\} \, dF_2(x_2)$$

Označimo sa C_{ij} kopulu za par (X_i, X_j) $i < j$. Ovaj identitet može bit rastavljen na nizove kopula na sledeći način

$$C_{13}(F_1(x_1), F_3(x_3)) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{12}^{(0.1)} \left(F_1(x_1), F_2(x_2)\right) C_{23}^{(1.0)} \left(F_2(x_2) F_3(x_3)\right) dF_2(x_2)$$

$$= \int_0^1 C_{12}^{(0.1)}(F_1(x_1), u_2) \; C_{23}^{(1.0)}(u_2, F_3(x_3)) \, du_2$$

gde je $C_{ij}^{(0.1)} = \frac{\partial}{\partial u_2} C_{ij}(u_1, u_2)$ i $C_{ij}^{(1.0)} = \frac{\partial}{\partial u_1} C_{ij}(u_1, u_2)$. Uslovna nezavisnost X_1 i X_3 za dato X_2 tada implicira relaciju

$$C_{13}(u_1,u_3) = \int_0^1 C_{12}^{(0.1)}(u_1,u_2)\ C_{23}^{(1.0)}(u_2,u_3)\ du_2, \quad (u_1,u_3) \in [0,1]^2$$

između kopula C_{12}, C_{13} i C_{23}. Ovo nas dovodi do pretpostavke uslovne nezavisnosti realne vrednosti procesa Markova u uslovima kopula koji opisuju dvodimenzionalne marginalne raspodele procesa.

Sadržaj Chapman - Kolmogorovljeve jednačine može biti iskazan u uslovima kopula procesa na jednostavan način.

Teorema 4.5.1.1.2

Neka je $\mathcal{X} = \{X_t, t \in \tau\}$ stohastički proces i neka C_{st} označava kopulu od X_s i X_t, $s < t \in \tau$. Sledeća dva tvrđenja su ekvivalentna

1) Prelazna funkcija $P\{X_t \in B | X_s = x\}$, $s \leq t$ zadovoljava Chapman - Kolmogorovljeve jednačine.
2) Za $\forall s < u < t$ i $\forall (x,y) \in [0,1]^2$ važi

$$C_{st}(x,y) = \int_0^1 C_{su}^{(0.1)}(x,t)\ C_{ut}^{(1.0)}(t,y)\ dt$$

Nećemo dati dokaz ove teoreme, dovoljno je da znamo da kopule očuvavaju zavisnu strukturu realnih vrednosti procesa Markova isto kao i Chapman - Kolmogorovljeve jednačine. Međutim, možemo primetiti da kopule rade na očuvanju zavisnosti bez ikakvih informacija o marginalnim raspodelama procesa.

4.5.1.2. KOPULE I CHAPMAN - KOLMOGOROVLJEVE JEDNAČINE

Teorema 4.5.1.1.2 je motiv za sledeću definiciju proizvoda skupa kopula. Za kopule C i $\tilde{C}$ definišemo:

$$C * \tilde{C}(u_1,u_2) = \int_0^1 C^{(0.1)}(u_1,t)\ \tilde{C}^{(0.1)}(t,u_2)\ dt$$

Operacija $*$ samo definiše posedovanje sledećih osobina:

1) $C * \tilde{C}$ je kopula.
2) $*$ je asocijativna.

Koristeći $*$ proizvod, uslov (2) iz teoreme 4.5.1.1.2 se može korigovati na sledeći način

$$C_{st} = C_{su} * C_{ut} \text{ za bilo koje } s < u < t$$

4.5.1.3. KONSTRUKCIJA LANACA MARKOVA

Pokažimo kako vremenski diskretan proces Markova (odnosno, lanac Markova) može biti konstruisan navodeći marginalne raspodele i kopule. Neka je $\tau = \mathbb{N}$, a konstrukcija $\{X_n, n = 1,2, \dots\}$ se formira na sledeći način:

1) Dodeliti kopulu $C_{n,n+1}$ slučajnom paru (X_n, X_{n+1}) na bilo koji način.
2) Za $k > 1$ definisati kopule za (X_n, X_{n+k}) kao
$$C_{n,n+k} = C_{n,n+1} * C_{n+1,n+2} * \dots * C_{n+k-1,n+k}$$
3) Dodeliti neprekidnu marginalnu funkciju raspodele F_n za X_n.
4) Zahtevati da n-dimenzionalna raspodela za $n > 2$ zadovoljava uslovnu nezavisnost procesa Markova.

Primetimo da kopule dodeljene u koracima (1) i (2) su kopule procesa Markova, bez obzira na to koja raspodela je dodeljena u koraku (3).

4.5.2. MODELI MARKOVA ZA SLUČAJNE EFEKTE

U odnosu na Poissonov dinamični učestali kredibilnosni model, pretpostavke A4 - A6 su zasnovane na lognormalnim slučajnim efektima. Slične pretpostavke su korišćene u dinamičnom kredibilnosnom modelu zasnovanom na *GLM* modelima. Sada bismo takođe želeli da možemo da odredimo druge raspodele za slučajne efekte, kao što je gama zakon (koji olakšava Bayesianovu analizu podataka). U vezi sa tim, konstrukcija kopulama je u prvom planu. U ovom odeljku ćemo razmotriti modele Markova za proces $\{\mathbf{\Theta}_1, \mathbf{\Theta}_2, \dots\}$ u dinamičnom kredibilnosnom modelu.

Na osnovu Sklarove teoreme, zajednička funkcija raspodele H od $(\mathbf{\Theta}_{t-1}, \mathbf{\Theta}_t)$ se može zapisati kao
$$P\{\mathbf{\Theta}_{t-1} \leq \theta_{t-1}, \mathbf{\Theta}_t \leq \theta_t\} = H(\theta_{t-1}, \theta_t) = C\big(F_{\mathbf{\Theta}}(\theta_{t-1}), F_{\mathbf{\Theta}}(\theta_t)\big)$$
za neke kopule $C(\cdot\,,\,\cdot)$. Primetimo da pretpostavka stacionarnosti za $\mathbf{\Theta}_i$ osigurava da kopula za slučajan par $(\mathbf{\Theta}_{t-1}, \mathbf{\Theta}_{\mathrm{t}})$ ne zavisi od t. U nekim konstruktivnim postupcima ubacivanje neke funkcije raspodele (na primer, gama) u neku kopulu $C(\cdot\,,\,\cdot)$ vodi ka korelisanoj strukturi za $\mathbf{\Theta}_i$.

Iz teoreme 2.1.3.5 znamo da uslovna funkcija raspodele od $\mathbf{\Theta}_{\mathrm{t}}$ za dato $\mathbf{\Theta}_{t-1}$ je data sa :
$$h(\theta_t|\theta_{t-1}) = \frac{\partial}{\partial\theta_t} H(\theta_t|\theta_{t-1}) = C\big(F_{\mathbf{\Theta}}(\theta_{t-1}), F_{\mathbf{\Theta}}(\theta_t)\big) f_{\mathbf{\Theta}}(\theta_t)$$

Kopule sa dve vrednosti nude moćan alat za konstrukciju autoregresivnih modela za ne-Gaussovske podatke. Posebno, selektovanjem nekih kopula C i marginalnih funkcija raspodele $F_{\mathbf{\Theta}}$ računamo H i zajednička funkcija gustine od $\mathbf{\Theta}$ je data sa

$$f_{\boldsymbol{\Theta}}(\theta) = f_{\boldsymbol{\Theta}}(\theta_1)h(\theta_2|\theta_1) \dots h(\theta_n|\theta_{n-1}) = \tag{4.12}$$
$$= \left(\prod_{t=1}^{T} f_{\boldsymbol{\Theta}}(\theta_t)\right) C\big(F_{\boldsymbol{\Theta}}(\theta_1), F_{\boldsymbol{\Theta}}(\theta_2)\big) \dots C\big(F_{\boldsymbol{\Theta}}(\theta_{T-1}), F_{\boldsymbol{\Theta}}(\theta_T)\big)$$

Napomena:

Uzimajući u obzir da je $C(u,v) = min\{u,v\}$ dolazimo do komonotonosti slučajnih efekata koji nas vode do statičnog kredibilnosnog modela.

4.5.3. ZAVISNOST UZROKOVANA AUTOREGRESIVNIM KOPULA MODELIMA U DUNAMIČNOM UČESTALOM KREDIBILNOSNOM MODELU

U opštim autoregresivnim modelima uzrokovanim kopulama sa dve vrednosti C, zavisna struktura Y_i nastaje pod uticajem osobina od kopule.

Teorema 4.5.3.1

U modelu A1 - A2 iz definicije 4.3.1.1, ako je zajednička funkcija gustine oblika (4.12), onda je $\boldsymbol{Y}_i$ *MTP₂* što pobezbeđuje da je kopula C tipa *TP₂*.

Dokaz:

Autoregresija tipa 1 strukture (4.12) vodi do

$$f_{\Theta_i}(\theta_i) = \left(\prod_{t=1}^{T} f_{\Theta}(\theta_{it})\right) C\big(F_{\Theta}(\theta_{i1}), F_{\Theta}(\theta_{i2})\big) \dots C\left(F_{\Theta}\big(\theta_{i,T-1}\big), F_{\Theta}(\theta_{iT})\right)$$

ako je $(u,v) \to C(u,v)$ *TP₂*, tada sledi da je

$$\big(\theta_{it}, \theta_{i,t+1}\big) \to C\left(F_{\Theta}(\theta_{it}), F_{\Theta}\big(\theta_{i,t+1}\big)\right)$$

takođe *TP₂* , pa je Θ *MTP₂*. ■

5. ZAKLJUČAK

U ovom radu smo razmatrali računanje premija u osiguranju kada su rizici zavise jedan od drugog. Modeliranje tipa zavisnosti smo prikazali korišćenjem principa kopula, pri čemu smo videli da je najznačajnije kod ovog principa to što iako nemamo dovoljno informacija o zajedničkoj funkciji raspodele, zavisnost možemo izmeriti znajući kakve su marginalne raspodele svakog od rizika. Odnosno, iz Sklarove teoreme smo videli da je celokupna zavisnost opisana sa kopulom i odvojena je od marginalnih raspodela.

Dalje smo razmatrali povezanost kopula sa različitim merama zavisnosti kopula slučajnih promenljivih. Pa tako, jedan od načina da se izmeri zavisnost je Pearsonov koeficijent korelacije, koji prikazuje linearnu zavisnost između kopula slučajnih promenljivih. Takođe, smo prikazali Kendallov i Spearmanov rang koeficijent korelacije. Kendallov rang koeficijent korelacije meri razliku između verovatnoće saglasnosti i neslaganja, dok Spearmanov rang koeficijent korelacije je usvari Pearsonov koeficijent primenjen na rangove.

Pored ovih koeficijenata prikazali smo i strukture zavisnosti kao što su pozitivna kvdrant zavisnost, pozitivne *stop - loss* zavisnosti, uslovni nizovni rast, kao i totalnu pozitivnost reda 2. Uslovni nizovni rast nam ustvari govori da uslovne raspodele rastu sa vrednostima slučajne promenljive, u smislu stohastičke dominacije. Jači uslov od uslovnog nizovnog rasta je totalna pozitivnost reda 2, koja ustvari govori da velike vrednosti jedne komponente teže da budu povezane sa velikim vrednostima druge.

Kako Poissonov kredibilnosi model predstavlja bitan deo u teoriji kredibiliteta, u ovom radu smo pokazali da je broj podnetih zahteva od strane osiguranika u svari raspoređen po Poissonovoj raspodeli. Ovaj princip je veoma koristan u autoosiguranju, pošto Poissonova raspodela dobro opisuje automobilske nesreće. Takođe, smo videli da ti modeli mogu da budu statični i dinamični. Statični model ne uzima u obzir starost zahteva, dok kod dinamičnog polazimo od pretpostavke da se faktori koji utiču na podnošenje zahteva razvijaju tokom vremana.

Još jedan koncept zavisnosti koji smo obradili je asociranost, koja je veoma korisna u životnom osiguranju. Takođe smo videli da je asociranost slabiji koncept zavisnosti od uslovnog nizovnog rasta, a jači od pozitivnih koncepata zavisnosti.

Ono što čini osnovu teorije kredibiliteta jesu linearni kredibilnosni modeli i mešovita raspodela. Videli smo da zavisnost uz mešovitu raspodelu izaziva jaku pozitivnu zavisnost pod dodatnim predpostavkama za marginalne raspodele.

Takođe, bitan deo osiguranja predstavljaju i bonus - malus sitemi, koji su usvari sistemi nagrađivanja i sankcionisanja osiguranika. Pa tako, u radu su predstavljeni ovi sistemi sa različitim tipovima zavisnosti.

Literatura:

1. M. Denuit, J. Dhaene, M. Goovaerts, R. Kaas, *Actuarial Theory for Dependent Risks - Measures, Orders and Models*, Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2005
2. S. A. Klugman, H. H. Panjer, G. E. Willmot, *Loss Models - From data to decision*, second edition, John Wiley & Sons, Inc., 2004
3. wikipedia.org
4. investopedia.org
5. mathworld.wolfram.com

Biografija

Zovem se Bojana Bojić, rođena sam 29.03.1986 godine u Novom Sadu. Pohađala sam osnovnu školu „Ivo Lola Ribar“ u Novom Sadu u periodu od 1993 do 2001 godine i završila je odličnim uspehom. Gimnaziju „Svetozar Marković“ sam, takođe, pohađala u Novom Sadu u periodu od 2001 do 2005 godine. Godine 2005 upisala sam Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, odsek za matematiku i informatiku, smer Matematika finansija, gde sam diplomirala u oktobru 2009 godine sa prosečnom ocenom 8,34. Odmah potom sam upisala master studije na istom fakultetu, smer Primenjena matematika, gde sam poslednji ispit položila u septembru 2010 godine. Prosečna ocena na master studijama mi je 8.86.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET,
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Bojana Bojić
AU

Mentor: Prof. dr Dora Seleši
MN

Naslov rada: Teorija kredibiliteta sa zavisnim rizicima
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s/e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2012.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5, 104, 0, 0, 8, 0, 0)
Broj poglavlja, broj strana, br. literarnih citata, br. tabela, br. slika, br. grafika, br priloga.
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Aktuarska matematika
ND

Ključne reči: Teorija kredibiliteta, zavisni rizici, kopule, MTP_2, TP_2, marginalne funkcije raspodele, asociranost, Poissonovi kredibilnosni modeli, linearni modeli zavisnosti, Sklarova teorema, mešovite raspodele
PO

UDK:

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: dr Danijela Rajter - Ćirić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Dora Seleši, vanredovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Sanja Rapajić, vanredovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Graduation thesis
CC

Author: Bojana Bojić
AU

Mentor: Dora Seleši Ph D.
MN

Title: Credibility theory for dependent risks
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2012
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place:
PP

University of Novi Sad, Faculty of Sciences, Department of Mathematics and Informatics, Trg Dositeja Obradovića 4

Physical description:
PD

(5, 104, 0, 0, 8, 0, 0)

Scientific field:
SF

Mathematics

Scientific discipline:
SD

Actuarial mathematics

Key words:
UC:

Credibility theory, dependent risks, copulas, TP_2, MTP_2, dependence, association, marginals, Poisson credibility models, linear models, Sklar decomposition

Holding data:
HD

In library of Department of Mathematics and Informatics

Note:
N

Abstract:
AB

Accepted by the Scientific Board on:
ASB

Defended:
De

Thesis defend board:
DB

President: Danijela Rajter - Ćirić Ph D., Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Dora Seleši Ph D., Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Sanja Rapajić Ph D., Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad