Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno - matematički fakultet
Departman za matematiku i
informatiku

Bojana Antonić

Konusi opadanja sa primenom

Master rad

Mentor:
prof. dr Nenad Teofanov

Novi Sad, 2012.

Predgovor

Teorija konveksne analize se primenjuje u mnogim oblastima matematičke teorije, od kojih je jedna svakako i teorija optimizacije. Ovaj rad obuhvata samo jedan deo širokog spektra primena konveksne analize, kojima su se bavili i još se bave, mnogi matematičari. On je posvećen konusima opadanja i njihovoj primeni pri analiziranju problema konveksne optimizacije.

Na samom početku rada uvedeni su osnovni pojmovi konveksne analize i dokazana je značajna Karateodorijeva teorema.

Zatim su uvedeni pojmovi: pravac opadanja i linealni prostor; oni čine osnovu za razvoj teorije konusa opadanja, nakon čega je dokazana Teorema konusa opadanja.

Ključna osobina, koja se koristi u nastavku rada, je sledeća osobina kompaktnih skupova: presek uređene familije nepraznih kompaktnih skupova je neprazan i kompaktan. Ta osobina je proširena različitim pretpostavkama da bi se pokazalo da je i presek uređene familije nepraznih zatvorenih konveksnih skupova takođe neprazan i kompaktan.

U nastavku, koristeći činjenicu da se konveksna funkcija može opisati uz pomoć svog nadgrafa, prikazano je na koji način se teorija konusa opadanja primenjuje pri analiziranju pitanja egzistancije optimalnih rešenja problema konveksne optimizacije. Razmatrana su dva slučaja: kada je skup optimalnih rešenja ograničen i kada je neograničen.

Na kraju se upoznajemo sa problemima optimizacije. Opisano je nekoliko specifičnih oblika i dati su odgovarajući primeri primene problema optimizacije u finansijama.

Rad je predviđen za čitaoce koji su upoznati sa svim osnovnim definicijama i tvrđenjima iz oblasti linearne algebre i realne analize konačnodimenzionih prostora.

Ovom prilikom bih želela da se zahvalim svim profesorima i asistentima na saradnji i ukazanom znanju tokom studiranja. Posebno se zahvaljujem svom mentoru, dr Nenadu Teofanovu, na pomoći i motivaciji pri izradi ovog rada.

Zahvaljujem se i svima koji su mi, na bilo koji način pružili pomoć i podršku, prvenstveno svojoj porodici i prijateljima.

Novi Sad, 15.12.2011. Bojana Antonić

Sadržaj

Glava 1

Konveksnost

Na samom početku, uvodimo neke osnovne pojmove iz oblasti konveksne analize. Konveksnost je jedan od najznačajnijih pojmova, kako u raznim oblastima matematičke teorije (matematičko programiranje, teorija dualnosti), tako u i ekonomskoj teoriji (mikroekonomija). U ovoj glavi je korišćena literatura [1], [2], [3], [4], [5], [7] i [19].

1.1 Konveksni skupovi

Definicija 1.1.1. *Neka je* $C \subseteq \Re^n$*. Skup* C *je* **afin skup** *ako prava koja prolazi kroz bilo koje dve različite tačke iz* C *leži u* C*, tj. ako za bilo koje* $x, y \in C$ *i* $\alpha \in \Re$ *važi da* $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$*.*

Drugim rečima, C sadrži linearnu kombinaciju bilo koje svoje dve tačke, pri čemu je suma koeficijenata linearne kombinacije jednaka jedinici.

S obzirom da je skup S potprostor u $\Re^n$ ako i samo ako sadrži nulu i sve linearne kombinacije svojih elemenata, sledi da je skup C dat sa

$$C = \bar{x} + S = \{\bar{x} + x \mid x \in S\}$$

afin, pri čemu $\bar{x} \in \Re^n$. Dati potprostor S se naziva *potprostor paralelan sa* C. Primetimo da postoji samo jedan potprostor povezan sa afinim skupom na ovaj način. Za proizvoljan skup $C \subset \Re^n$, skup vektora koji su ortogonalni na sve elemente skupa C je potprostor označen sa $C^{\perp}$:

$$C^{\perp} = \{y \in \Re^n \mid y^T x = 0,\ \forall\ x \in C\}.$$

Kada je S potprostor, tada se $S^{\perp}$ zove *ortogonalni komplement* od S.

Definicija 1.1.2. *Neka je* $C \subset \Re^n$*. Skup* C *je* **konveksan** *ako za sve* $x, y \in C$ *i sve* $\alpha \in [0,1]$ *važi da* $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$*.*

Očigledno, svaki afin skup je konveksan. Sledeća teorema navodi neke operacije koje očuvavaju konveksnost skupa. Navodimo je bez dokaza.

Teorema 1.1.1.

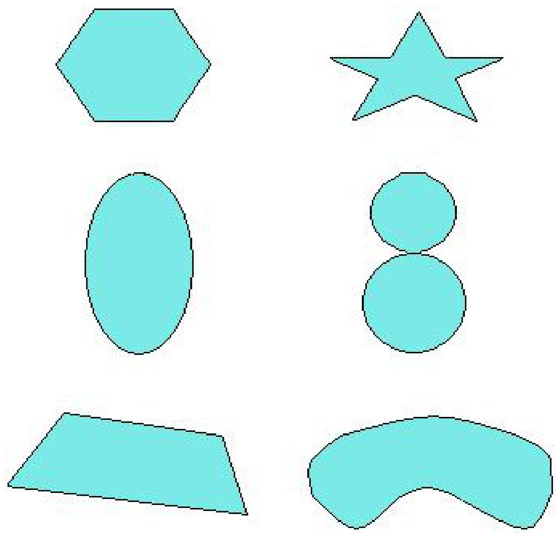
(a) *Presek* $\cap_{i \in I} C_i$ *za proizvoljnu familiju* $\{C_i \mid i \in I\}$ *konveksnih skupova je konveksan.*

(b) *Vektorska suma* $C_1 + C_2$ *dva konveksna skupa* C_1 *i* C_2 *je konveksna.*

(c) *Skup* λC *je konveksan za proizvoljan konveksan skup* C *i skalar* λ. *Štaviše, ako je* C *konveksan skup i* λ_1, λ_2 *su pozitivni skalari, tada važi da je* $(\lambda_1 + \lambda_2)C = \lambda_1 C + \lambda_2 C$.

(d) *Zatvaranje i unutrašnjost konveksnog skupa su konveksni skupovi.*

(e) *Slika i inverzna slika konveksnog skupa pod afinom funkcijom*[1] *su konveksni skupovi.*



Slika 1.1. Primeri konveksnih i nekonveksnih skupova

1.2 Konusi

Pored konveksnih skupova, u teoriji optimizacije važnu ulogu igraju konusi.

Definicija 1.2.1. *Skup* $K \subset \Re^n$ *je* **konus sa vrhom u nuli** *ako za sve* $x \in K$ *i sve* $\alpha > 0$ *važi da* $\alpha x \in K$.

Prema ovoj definiciji, nula može ali ne mora da pripada konusu. Ako je K konus sa vrhom u nuli, onda je skup $K_{x_0} = x_0 + K$ konus sa vrhom u x_0. Njegovi elementi su oblika $x_0 + \alpha(y - x_0)$, $y \in K_{x_0}$, $\alpha > 0$. Ako je dat afin

[1] Definicija *afine funkcije* će biti data u poglavlju 1.3.

skup $C = x_0 + S$ i konus $K_{x_0} = x_0 + K$, pri čemu je S potprostor, a K konus sa vrhom u nuli, tada je skup C takođe konus sa vrhom u x_0.

Konus K ne mora biti konveksan, kao ni otvoren ili zatvoren skup. Podrazumeva se da je prazan skup konveksan konus.

Za neka tvrđenja iz Teoreme 1 postoje analogna tvrđenja koja se odnose na konuse. Dakle, konusi imaju sledeća značajna svojstva:

(a) Presek proizvoljne familije konusa sa istim vrhom je, ako nije prazan, konus sa tim vrhom.

(b) Ako su K_1 i K_2 konusi sa vrhom u x_0, onda je $\alpha K_1 + \beta K_2$ konus sa vrhom u $(\alpha + \beta)x_0$, za sve $\alpha, \beta \in \Re$.

(c) Unutrašnjost, zatvaranje i konveksni omotač[2] konusa je konus.

(d) Suma konveksnih konusa sa zajedničkim vrhom je konveksan konus.

(e) Unija konusa je konus (ali unija konveksnih konusa ne mora biti konveksan skup).

U nastavku će se posmatrati konusi sa vrhom u nuli, pa tu činjenicu nećemo posebno isticati.

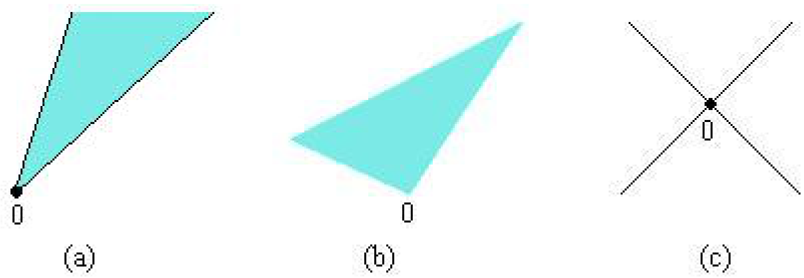
Teorema 1.2.1. *Skup $K \subset \Re^n$ je konveksan konus ako i samo ako za sve $x, y \in K$ i sve $\alpha, \beta > 0$ važi $\alpha x + \beta y \in K$.*

Dokaz. Neka je K konveksan konus sa vrhom u nuli. Tada za sve $x, y \in K$ i sve $\alpha, \beta > 0$ važi

$$(\alpha + \beta)\Big(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}x + \frac{\beta}{\alpha + \beta}y\Big) \in K,$$

odnosno $\alpha x + \beta y \in K$.

Neka sada $\alpha x + \beta y \in K$, za sve $x, y \in K$ i sve $\alpha, \beta > 0$. Ako, za unapred zadato $\lambda > 0$, izaberemo da je $\alpha = \beta = \lambda/2$ i $y = x$, tada dobijamo da $\lambda x \in K$, tj. K je konus. Ako još pretpostavimo da $\alpha \in (0, 1)$ i da je $\beta = 1 - \alpha$, dobijamo da je K konveksan skup. $\square$



Slika 1.2. Primeri konveksnih i nekonveksnih konusa

[2] O pojmu konveksnog omotača će biti reči kasnije.

Na slici 1.2 dati su neki primeri konveksnih i nekonveksnih konusa. Konveksni konusi su prikazani pod (a) i (b), dok je konus pod (c) nekonveksan. Takođe, možemo primetiti da konusi pod (a) i (c) sadrže nulu, a konus dat pod (b) je ne sadrži.

Definicija 1.2.2. *Konus K se naziva* **pravi konus** *ako zadovoljava sledeće:*

- *K je konveksan.*
- *K je zatvoren.*
- *K je "pun", što znači da ima nepraznu unutrašnjost.*
- *K je "oštar", što znači da ne sadrži pravu (tj. ako $x \in K$ i $-x \in K$ tada je $x = 0$).*

Uz pomoć pravog konusa možemo definisati *uopštenu nejednakost*[3] na sledeći način:

$$x \preceq_K y \;\Leftrightarrow\; y - x \in K.$$

Ona je relacija poretka na $\Re^n$ i ima mnoge osobine koje ima standardna relacija poretka na $\Re$. Pokažimo da je $\preceq_K$ relacija poretka na $\Re^n$.

refleksivnost: $\forall\, x \in \Re^n,\ x \preceq_K x.$

$x \preceq_K x \;\Leftrightarrow\; x - x \in K \;\Leftrightarrow\; 0 \in K$. Dakle, relacija $\preceq_K$ jeste refleksivna.

antisimetričnost: $\forall\, x, y \in \Re^n$, ako $x \preceq_K y \;\wedge\; y \preceq_K x \;\Rightarrow\; x = y.$

$x \preceq_K y \;\wedge\; y \preceq_K x \;\Leftrightarrow\; y - x \in K \;\wedge\; x - y \in K$. Neka je $z = y - x$, odnosno $-z = x - y$. Kako je K pravi konus, a $z \in K$ i $-z \in K$, sledi da je $z = 0$, odnosno $x = y$. Dakle, relacija $\preceq_K$ jeste antisimetrična.

tranzitivnost: $\forall\, x, y, z \in \Re^n$, ako $x \preceq_K y \;\wedge\; y \preceq_K z \;\Rightarrow\; x \preceq_K z.$

$x \preceq_K y \wedge y \preceq_K z \;\Leftrightarrow\; y - x \in K \wedge z - y \in K$. Sada, na osnovu Teoreme 2, $z - y + y - x \in K$, odnosno $z - x \in K \;\Leftrightarrow x \preceq_K z$. Dakle, relacija $\preceq_K$ jeste tranzitivna.

Na sličan način se definiše uopštena *stroga* nejednakost povezana sa pravim konusom K:

$$x \prec_K y \;\Leftrightarrow\; y - x \in K^0.$$

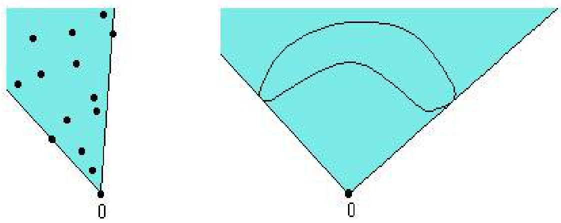
Definicija 1.2.3. *Tačka x oblika $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$, gde su $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, ..., m$, se naziva* **konusna kombinacija** *tačaka $x_1, ..., x_m$. Skup svih konusnih kombinacija tačaka iz C, tj.*

$$\{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m \mid x_i \in C,\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, ..., m\},$$

naziva se **konusni omotač** *skupa C.*

[3] *Uopštena nejednakost* predstavlja nejednakost među komponentama vektora.

Ako su x_i, $i = 1, ..., m$, tačke iz konveksnog konusa K, tada svaka njihova konusna kombinacija pripada K. Važi i obrnuto, odnosno skup K je konveksan konus ako i samo ako sadrži sve konusne kombinacije svojih elemenata. Konusni omotač je najmanji konveksni konus koji sadrži skup C.

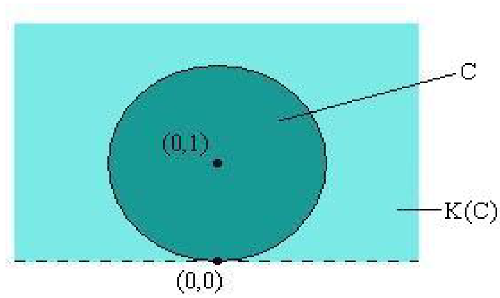


Slika 1.3. Primeri konusnih omotača

Neki važniji primeri konveksnih i nekonveksnih skupova i konusa:

- Prazan skup, skup koji sadrži samo jednu tačku (singlton) i ceo prostor $\Re^n$ su afini, pa stoga i konveksni podskupovi od $\Re^n$. Takođe, prazan skup je konveksan konus.
- Ako dati skup sadrži više od jedne tačke i bar jednu izolovanu tačku, on ne može biti konveksan.
- Nijedan neprazan i ograničen skup ne može da bude konus.
- U $\Re^n$ lopta jeste, a kružnica nije konveksan skup.
- Bilo koja prava je afin skup, pa samim tim i konveksan skup. Ako prolazi kroz nulu, ona je potprostor, pa je onda takođe i konveksan konus. Dakle, bilo koji potprostor je afin skup i konveksan konus.
- Linijski segment je konveksan, ali nije afin skup (osim ako nije sveden na jednu tačku).
- Zrak koji ima oblik $\{x_0 + \alpha v \mid \alpha \geq 0\}$, gde je $v \neq 0$, je konveksan, ali nije afin skup. On je konveksan konus ako je njegov vrh x_0 jednak 0.

Neka je dat skup $C \subset \Re^n$. Presek svih konveksnih konusa koji sadrže C zove se ***konveksan konus generisan skupom*** C i označava se sa $K(C)$. S obzirom da je konusni omotač najmanji konveksni konus koji sadrži skup C, zaključujemo da je $K(C)$ zapravo konusni omotač skupa C. Konveksan konus generisan skupom C ne mora biti zatvoren čak i ako je C kompaktan skup. Ovo je ilustrovano primerom na slici 1.4. Međutim, može se pokazati da je $K(C)$ zatvoren u nekim specijalnim slučajevima, kao na primer, kada se skup C sastoji od konačno mnogo elemenata.



Slika 1.4.

Na slici iznad prikazan je primer u $\Re^2$, kada je C konveksan i kompaktan skup, ali $K(C)$ nije zatvoren. Skup C je dat sa

$$C = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}.$$

Tada je konveksni konus generisan skupom C jednak

$$K(C) = \{(x_1, x_2) \mid x_2 > 0\} \cup \{(0, 0)\}$$

i on, očigledno, nije zatvoren skup.

1.3 Konveksne funkcije

Definicija 1.3.1. *Funkcija $f : \Re^n \to \Re^m$ je* **afina funkcija** *ako predstavlja zbir linearne funkcije i konstante, tj. ako ima oblik $f(x) = Ax + b$, gde $A \in \Re^{m\times n}$ i $b \in \Re^m$.*

Definicija 1.3.2. *Neka je C konveksan podskup od $\Re^n$ i neka je data funkcija $f : C \to \Re$.*

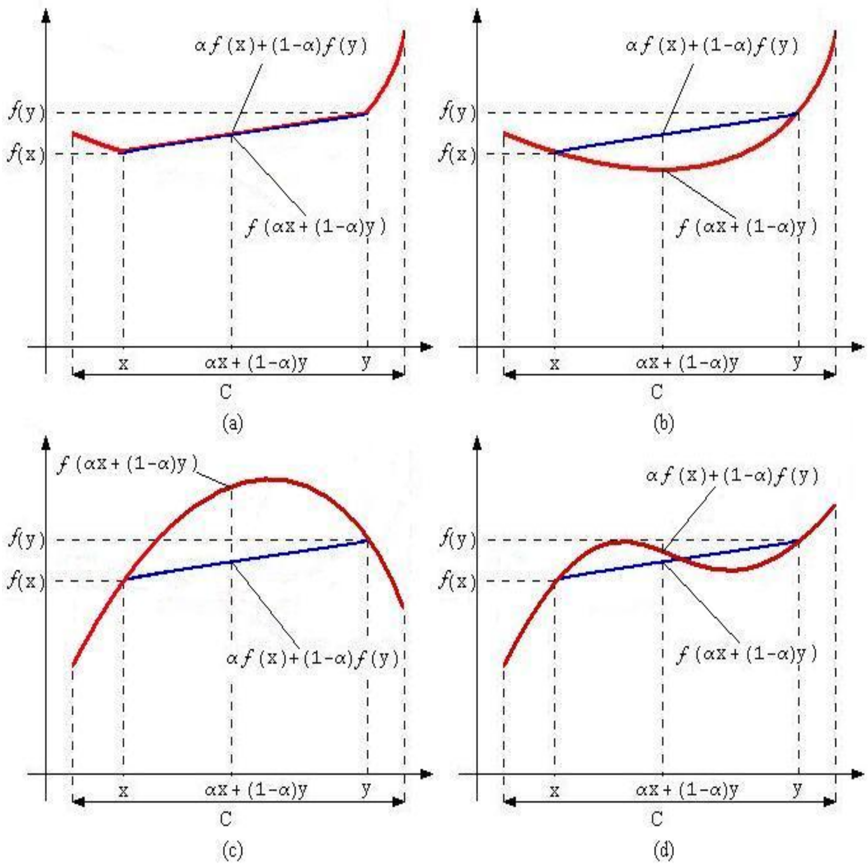
(a) *f je* **konveksna** *ako za sve $x, y \in C$ i za sve $\alpha \in [0, 1]$ važi*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \tag{1.1}$$

(b) *f je* **strogo konveksna** *ako za sve $x, y \in C$, $x \neq y$, i sve $\alpha \in (0, 1)$ važi*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

(c) *f je* **konkavna** *ako je $-f$ konveksna.*



Slika 1.5.

Na slici 1.5 data je geometrijska interpretacija prethodne definicije. Grafici (a) i (b) ilustruju konveksnu i strogo konveksnu funkciju, respektivno, dok je na grafiku (c) ilustrovana konkavna funkcija. Na grafiku (d) možemo da vidimo kako izgleda funkcija koja nije ni konveksna ni konkavna.

Nejednakost (1.1) predstavlja specijalan slučaj *Jensenove*[4] *nejednakosti*[5]. Ako je funkcija i konveksna i konkavna, tada je ona *linearna*. Iz prethodne definicije vidimo da je konveksnost domena funkcije preduslov da bi je zvali "konveksnom". U ovom radu ćemo se susretati i sa funkcijama čiji domen nije konveksan skup, ali su one konveksne kada posmatramo njihove restrikcije na konveksan podskup njihovog domena.

Skupovi

$$\{x \in C \mid f(x) \leq \gamma\} \quad \text{i} \quad \{x \in C \mid f(x) < \gamma\},$$

[4] Johan Ludwig Wiliam Valdemar Jensen (1859-1925)

[5] Jensenova nejednakost u opštem slučaju je nejednakost

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i), \quad \alpha_i \geq 0.$$

pri čemu je $f : C \to \Re$ data funkcija i γ proizvoljni skalar, se nazivaju *Lebegovi skupovi* funkcije f. Kada je f konveksna funkcija, tada su svi njeni Lebegovi skupovi konveksni. Ova tvrdnja sledi na osnovu konveksnosti datog skupa C i posmatrane funkcije f, što se lako pokazuje. Međutim, konveksnost Lebegovih skupova ne implicira konveksnost funkcije. Postoje mnoge nekonveksne funkcije čiji su Lebegovi skupovi konveksni.

Definicija 1.3.3. *Neka je dat pravi konus $K \subseteq \Re^m$. Kažemo da je funkcija $f : \Re^n \to \Re^m$* **K-konveksna** *ako za sve x, y i $\alpha \in [0,1]$ važi uopštena nejednakost:*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \preceq_K \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

U skladu sa prethodnom definicijom kažemo da je funkcija $f : \Re^n \to \Re^m$ *strogo K-konveksna* ako važi

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \prec_K \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y),$$

za dati pravi konus $K \subseteq \Re^m$, povezan sa uopštenom nejednakošću $\prec_K$, i sve x, y, $x \neq y$ i $\alpha \in (0,1)$.

1.3.1 Proširene realne konveksne funkcije

Kada su u pitanju funkcije uopšte, najradije koristimo realne funkcije definisane na celom prostoru $\Re^n$. Takav je slučaj i sa konveksnim funkcijama - voleli bismo uvek da radimo sa realnim funkcijama definisanim i konveksnim na celom prostoru $\Re^n$. Međutim, to nije uvek slučaj. U različitim radovima i knjigama u kojima pojam konveksne funkcije igra značajnu ulogu, posmatraju se funkcije koje imaju vrednost ∞, kao i funkcije koje su konveksne samo na konveksnom podskupu skupa $\Re^n$. Iz tog razloga, sada uvodimo pojam *proširene realne funkcije*, odnosno funkcije koja u nekim tačkama ima vrednost $-\infty$, odnosno ∞.

Definicija 1.3.4. *Neka je dat skup $X \subset \Re^n$ i neka je data proširena realna funkcija $f : X \to [-\infty, \infty]$. Podskup skupa $\Re^{n+1}$ dat sa*

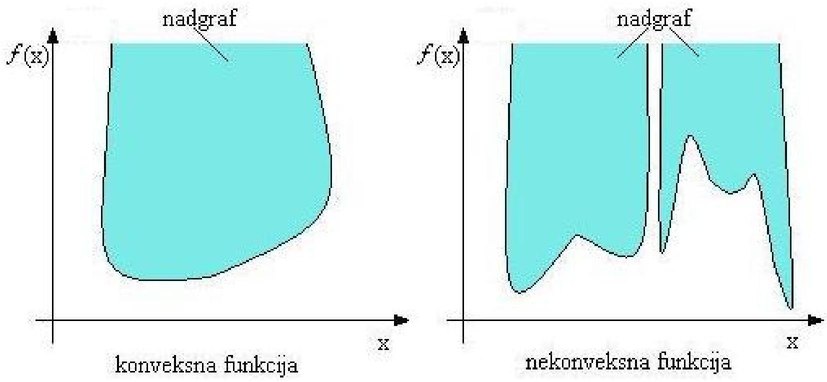
$$epi(f) = \{(x,w) \mid x \in X,\ w \in \Re,\ f(x) \leq w\},$$ [6]

se naziva **nadgraf** *funkcije f, dok se skup*

$$dom(f) = \{x \in X \mid f(x) < \infty\}$$

naziva **efektivni domen** *funkcije f.*

[6] Oznaka *epi(f)* potiče od engl. reči *epigraph*, koja znači nadgraf.



Slika 1.6. Ilustracija nadgrafa proširene realne konveksne i nekonveksne funkcije

Efektivni domen možemo definisati i na sledeći način:

$$dom(f) = \{x \in X \mid \exists\, w \in \Re \ takvo\ da\ (x, w) \in epi(f)\},$$

tj. $dom(f)$ se dobija projekcijom prostora $epi(f)$ na prostor $\Re^n$. Ako bismo ograničili funkciju f na skup $\{x \in X \mid f(x) < \infty\}$, njen nadgraf bi ostao nepromenjen. Takođe, ukoliko bismo proširili domen funkcije f definisanjem

$$f(x) = \infty \quad \text{za} \quad x \notin X,$$

njen nadgraf bi opet ostao nepromenjen. Često je neophodno uključiti degenerativni slučaj, kada je funkcija f identički jednaka sa ∞. Ovo je tačno ako i samo ako je $epi(f)$ prazan skup. Pored toga, značajan je i slučaj kada funkcija f prima vrednost $-\infty$ u nekoj tački. Do ove situacije dolazi ako i samo ako $epi(f)$ sadrži vertikalnu pravu.

Definicija 1.3.5. *Proširena realna funkcija f je* **prava** *funkcija ako je $f(x) < \infty$ za bar jedno $x \in X$ i $f(x) > -\infty$ za sve $x \in X$. Kažemo da je f* **neprava** *funkcija ako nije prava.*

Na osnovu prethodne diskusije zaključujemo da je funkcija prava ako i samo ako je njen nadgraf neprazan i ne sadrži vertikalnu pravu.

Definicija 1.3.6. *Neka je C konveksan podskup skupa $\Re^n$. Proširena realna funkcija $f : C \to [-\infty, \infty]$ je konveksna ako je $epi(f)$ konveksan podskup skupa $\Re^{n+1}$.*

Lako se može proveriti da, prema gornjoj definiciji, konveksnost proširene realne funkcije f implicira da su njen efektivni domen i njeni Lebegovi skupovi konveksni skupovi. Čak šta više, ako je $f(x) < \infty$ za sve x ili $f(x) > -\infty$ za sve x, tada važi

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y), \tag{1.2}$$

za sve $x, y \in C$ i sve $\alpha \in [0,1]$, pa je prethodna definicija konzistentna sa definicijom konveksnosti za realne funkcije. U skladu sa definicijom 11, kažemo da je proširena realna funkcija $f : C \to (-\infty, \infty]$ *strogo konveksna* ako je nejednakost (1.2) stroga za sve $x, y \in dom(f)$, $x \neq y$ i sve $\alpha \in (0,1)$. Takođe, proširena realna funkcija $f : C \to [-\infty, \infty]$ je *konkavna* ako je funkcija $-f : C \to [-\infty, \infty]$ konveksna prema definiciji 11.

Posmatrajmo sada slučaj kada proširena realna funkcija postaje konveksna ukoliko je ograničena na podskup svog domena. Neka su dati skupovi $C \subset \Re^n$ i $X \subset \Re^n$ takvi da je C neprazan, konveksan i $C \subset X$. Proširena realna funkcija $f : X \to [-\infty, \infty]$ je konveksna nad skupom C ako ona postaje konveksna kada je njen domen ograničen na C, odnosno ako je funkcija $\tilde{f} : C \to [-\infty, \infty]$ konveksna, pri čemu je $\tilde{f}(x) = f(x)$ za sve $x \in C$.

Na kraju ovog odeljka, važno je da napomenemo da zamenjujući domen proširene realne prave konveksne funkcije njenim efektivnim domenom, možemo datu funkciju pretvoriti u realnu. Iako iz toga zaključujemo da se svi do sada izvedeni rezultati izraženi u terminima realnih funkcija mogu koristiti i da se može izbeći računanje sa vrednošću ∞, zbog teorije kojom se bavimo u nastavku rada bilo je neophodno uvesti pojam proširene realne funkcije.

1.3.2 Zatvorenost i poluneprekidnost sa donje strane

Definicija 1.3.7. *Neka je $X \subset \Re^n$. Funkcija $f : X \to \Re$, odnosno proširena funkcija $f : X \to [-\infty, \infty]$, je* **poluneprekidna sa donje strane** *(odozdo) u tački $x \in X$ ako važi*

$$f(x) \leq \liminf_{k \to \infty} f(x_k)$$

za svaki niz $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}_0} \subset X$ koji konvergira ka x.

Poluneprekidnost sa gornje strane (odozgo) se definiše analogno. Navedena je upravo definicija za poluneprekidnost sa donje strane jer će se u ovom radu uglavnom ona koristiti.

Kada je funkcija f poluneprekidna odozdo u svakoj tački skupa X, tada kažemo da je f poluneprekidna sa donje strane na skupu X.

Sada ćemo navesti i dokazati teoremu koja povezuje poluneprekidnost odozdo date funkcije sa zatvorenošću njenog nadgrafa i njenih Lebegovih skupova.

Teorema 1.3.1. *Neka je data funkcija $f : \Re^n \to [-\infty, \infty]$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:*

(a) *Lebegov skup $\{x \in \Re^n \mid f(x) \leq \gamma\}$ je zatvoren za svaki skalar γ.*

(b) *f je poluneprekidna sa donje strane na $\Re^n$.*

(c) *$epi(f)$ je zatvoren skup.*

Dokaz. Ako je $f(x) = \infty$ za sve x, dokaz je trivijalan. Zbog toga pretpostavljamo da je $f(x) < \infty$ za bar jedno $x \in \Re^n$, pa tada $epi(f)$ nije prazan skup i postoje Lebegovi skupovi funkcije f koji nisu prazni.

Prvo pokazujemo da iz (a) sledi (b). Neka je Lebegov skup

$$\{x \in \Re^n \mid f(x) \leq \gamma\}$$

zatvoren za svaki skalar γ. Sada pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji $\bar{x}$ koje je granica niza $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ takvo da je $f(\bar{x}) > \liminf_{k\to\infty} f(x_k)$. Biramo skalar γ takav da važi

$$f(\bar{x}) > \gamma > \lim_{k\to\infty}\inf f(x_k).$$

Tada postoji podniz $\{x_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}_0}$ takav da je $f(x_{k_l}) \leq \gamma$ za sve $l \in \mathbb{N}_0$. Pošto je skup $\{x \in \Re^n \mid f(x) \leq \gamma\}$ zatvoren, $\bar{x}$ mora da pripada tom skupu, pa je $f(\bar{x}) \leq \gamma$, što je kontradikcija.

Zatim pokazujemo da iz (b) sledi (c). Pretpostavimo da je f poluneprekidna odozdo na $\Re^n$ i neka je $(\bar{x}, \bar{w})$ granica niza $\{(x_k, w_k)\}_{k\in\mathbb{N}_0} \subset epi(f)$. Tada važi $f(x_k) \leq w_k$, a ako pustimo k da teži ∞ i iskoristimo poluneprekidnost odozdo funkcije f u tački $\bar{x}$, dobijamo da je

$$f(\bar{x}) \leq \lim_{k\to\infty}\inf f(x_k) \leq \bar{w}.$$

Dakle, $(\bar{x}, \bar{w}) \in epi(f)$, pa je $epi(f)$ zatvoren skup.

Na kraju pokazujemo da iz (c) sledi (a). Pretpostavimo da je $epi(f)$ zatvoren skup i neka je $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ niz koji konvergira ka nekoj tački $\bar{x}$ i pripada Lebegovom skupu $\{x \in \Re^n \mid f(x) \leq \gamma\}$ za neki skalar γ. Tada $(x_k, \gamma) \in epi(f)$ za sve k i $(x_k, \gamma) \to (\bar{x}, \gamma)$, pa sada, pošto je $epi(f)$ zatvoren skup, sledi da $(\bar{x}, \gamma) \in epi(f)$. Dakle, $\bar{x}$ pripada Lebegovom skupu $\{x \in \Re^n \mid f(x) \leq \gamma\}$, odakle sledi da je ovaj skup zatvoren. □

Definicija 1.3.8. *Neka je $X \subset \Re^n$ i neka je data funkcija $f : X \to [-\infty, \infty]$. Ako je nadgraf funkcije f zatvoren skup, tada kažemo da je f* **zatvorena** *funkcija.*

Pokušaćemo malo detaljnije da objasnimo na koji način su povezane poluneprekidnost odozdo posmatrane funkcije i njena zatvorenost. U slučaju kada je domen posmatrane funkcije ceo skup $\Re^n$, na osnovu Teoreme 3 i definicije 13 zaključujemo da iz poluneprekidnosti odozdo date funkcije sledi njena zatvorenost. Posmatrajmo sada funkciju $f : X \to [-\infty, \infty]$, pri čemu je $X \subset \Re^n$. Želimo da proširimo domen funkcije f na ceo prostor $\Re^n$ i to činimo definisanjem funkcije $\tilde{f} : \Re^n \to [-\infty, \infty]$ na sledeći način:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ako } x \in X \\ \infty & \text{ako } x \notin X. \end{cases}$$

Ono što odmah možemo primetiti je da funkcije f i $\tilde{f}$ imaju isti nadgraf. Sada, na osnovu prethodne teoreme, sledi da je f zatvorena ako i samo ako je $\tilde{f}$ poluneprekidna sa donje strane na $\Re^n$.

Međutim, ako je funkcija poluneprekidna odozdo na svom efektivnom domenu, tada ona ne mora biti zatvorena. Takođe, efektivni domen date funkcije ne mora biti zatvoren u slučaju kada je ona zatvorena. Sa druge strane, ako je efektivni domen posmatrane funkcije zatvoren skup i ona poluneprekidna sa donje strane na svom efektivnom domenu, tada je data funkcija zatvorena jer je njen nadgraf zatvoren skup. Ova diskusija je formalno zapisana u narednoj teoremi.

Teorema 1.3.2. *Neka je dat skup $X \subset \Re^n$ i neka je data funkcija $f : X \to [-\infty, \infty]$. Ako je $dom(f)$ zatvoren skup i funkcija f poluneprekidna odozdo na $dom(f)$, tada je f zatvorena funkcija.*

Za kraj napomenimo sledeće: *zatvorena konveksna funkcija koja nije prava ne može ni u jednoj tački da primi konačnu vrednost*, odnosno ona ima oblik

$$f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{ako } x \in dom(f) \\ \infty & \text{ako } x \notin dom(f). \end{cases}$$

Ova tvrdnja se lako pokazuje, korišćenjem definicija za konveksnu funkciju, pravu funkciju i zatvorenu funkciju.

1.3.3 Prepoznavanje konveksnih funkcija

Da bismo objasnili na koji način prepoznajemo osobinu konveksnosti kod funkcije, krenućemo od jedne osobine funkcije koju svi poznajemo iz matematičke analize - neprekidnosti. Kako znamo da je neka funkcija neprekidna? Naravno, postoji definicija neprekidnosti funkcije izražena u terminima ε i δ: "za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svako x iz domena važi ...". Međutim, kada bismo svaki put kada želimo da proverimo da li je neka funkcija neprekidna morali to da dokazujemo uz pomoć pomenute definicije, to bi nam oduzimalo previše vremena. Iz tog razloga menjamo pristup rešavanju problema. Umesto korišćenja standardne definicije kod svake pojedinačne funkcije, mi izdvajamo standardne operacije koje očuvavaju neprekidnost (kao što su sabiranje, množenje, oduzimanje, deljenje i slično), primenjujemo ih na osnovne elementarne funkcije čiju smo neprekidnost prethodno dokazali i time dobijamo brojne primere neprekidnih funkcija. Tada je dovoljno da pokažemo da se posmatrana funkcija može dobiti iz osnovnih elementarnih funkcija konačnom primenom standardnih operacija, da bismo zaključili da je ona neprekidna.

Potpuno je isti slučaj sa osobinom konveksnosti. Ako krenemo od funkcije za koju znamo da je konveksna, primenjujući uobičajene algebarske operacije koje očuvavaju konveksnost možemo generisati druge konveksne funkcije. Teorema 5 obezbeđuje neke od neophodnih alata za to.

Nekoliko funkcija sa kojima se često susrećemo su konveksne, kao što su afine funkcije i norme. Dokažimo da je proizvoljna norma konveksna funkcija. Neka je $\|\cdot\| : \Re^n \to \Re$, neka $x, y \in \Re^n$ i neka $\alpha \in [0,1]$. Na osnovu nejednakosti trougla dobijamo da je

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq \|\alpha x\| + \|(1-\alpha)y\| = \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\|,$$

pa zaključujemo da je norma $\|\cdot\|$ konveksna funkcija.

Teorema 1.3.3.

(a) *Neka su date funkcije $f_i : \Re^n \to (-\infty, \infty]$, $i = 1, ..., m$, neka su $\lambda_1, ..., \lambda_m$ pozitivni skalari i neka je funkcija $g : \Re^n \to (-\infty, \infty]$ data sa*

$$g(x) = \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_m f_m(x).$$

Ako su $f_1, ..., f_m$ konveksne, tada je i g konveksna, a ako su $f_1, ..., f_m$ zatvorene, tada je i g zatvorena.

(b) *Neka je data funkcija $f : \Re^m \to (-\infty, \infty]$, neka je A matrica reda $m \times n$ i neka je funkcija $g : \Re^n \to (-\infty, \infty]$ data sa $g(x) = f(Ax)$. Ako je f konveksna, tada je i g konveksna, a ako je f zatvorena, tada je i g zatvorena.*

(c) *Neka su date funkcije $f_i : \Re^n \to (-\infty, \infty]$ za $i \in I$, pri čemu je I proizvoljan skup indeksa i neka je funkcija $g : \Re^n \to (-\infty, \infty]$ data sa $g(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$. Ako su funkcije f_i, $i \in I$, konveksne, tada je i g konveksna, a ako su funkcije f_i, $i \in I$, zatvorene, tada je i g zatvorena.*

Dokaz.

(a) Neka su $f_1, ..., f_m$ konveksne funkcije. Koristimo definiciju konveksnosti: za bilo koje $x, y \in \Re^n$ i $\alpha \in [0,1]$, važi

$$\begin{aligned} g(\alpha x + (1-\alpha)y) &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\alpha x + (1-\alpha)y) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\alpha f_i(x) + (1-\alpha) f_i(y)) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(y) \\ &= \alpha g(x) + (1-\alpha) g(y). \end{aligned}$$

Dakle, g je konveksna.

Neka su sada funkcije $f_1, ..., f_m$ zatvorene. Tada su one poluneprekidne odozdo u svakom $x \in \Re^n$ (prema Teoremi 3 i definiciji 13), pa za svaki niz

$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, koji konvergira ka x, važi da je $f_i(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f_i(x_k)$ za svako $i = 1, ..., m$. Stoga sledi da je

$$g(x) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \liminf_{k\to\infty} f_i(x_k) \leq \liminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x_k) = \liminf_{k\to\infty} g(x_k),$$

pri čemu smo koristili pretpostavku da je $\lambda_i > 0$ i sledeću činjenicu:

$$\liminf_{k\to\infty} x_k + \liminf_{k\to\infty} y_k \leq \liminf_{k\to\infty} (x_k + y_k).$$

Sada vidimo da je g poluneprekidna sa donje strane u svim $x \in \Re^n$, pa je (prema Teoremi 3 i definiciji 13) g i zatvorena.

(b) Ovaj dokaz sledi direktno iz dokaza pod (a).

(c) Par (x, w) pripada skupu $epi(g)$ ako i samo ako je $g(x) \leq w$, što je tačno ako i samo ako je $f_i(x) \leq w$ za sve $i \in I$, ili ekvivalentno, ako i samo ako $(x, w) \in \cap_{i\in I} epi(f_i)$. Zbog toga važi

$$epi(g) = \cap_{i\in I} epi(f_i).$$

Ako su f_i, $i = 1, ..., m$, konveksne funkcije, tada su nadgrafi $epi(f_i)$, $i = 1, ..., m$, konveksni (na osnovu definicije 9), pa je $epi(g)$ konveksan skup i g je konveksna funkcija. Ako su f_i, $i = 1, ...m$, zatvorene funkcije, tada su, prema definiciji, nadgrafi $epi(f_i)$, $i = 1, ..., m$, zatvoreni, pa je $epi(g)$ zatvoren skup iz čega sledi da je g zatvorena funkcija. □

1.3.4 Karakterizacija diferencijabilnih konveksnih funkcija

Za diferencijabilne funkcije postoje alternativni korisni kriterijumi za određivanje konveksnosti. O tome ćemo govoriti u ovom odeljku.

Teorema 1.3.4. *Neka je C konveksan podskup od $\Re^n$ i neka je $f : \Re^n \to \Re$ diferencijabilna na $\Re^n$.*

(a) *f je konveksna na C ako i samo ako važi*

$$f(z) \geq f(x) + (z - x)^T \nabla f(x), \quad \forall\ x, z \in C. \tag{1.3}$$

(b) *f je strogo konveksna na C ako i samo ako je nejednakost (1.3) stroga kad god je $x \neq z$.*

Dokaz. Dokazujemo (a) i (b) istovremeno. Pretpostavimo da nejednakost (1.3) važi. Biramo proizvoljne $x, y \in C$ i $\alpha \in [0, 1]$ i neka je $z = \alpha x + (1-\alpha)y$. Korišćenjem nejednakosti (1.3) dobijamo

$$f(x) \geq f(z) + (x - z)^T \nabla f(z),$$
$$f(y) \geq f(z) + (y - z)^T \nabla f(z).$$

Sada množimo prvu nejednakost sa α, drugu sa $(1-\alpha)$ i sabiramo ih. Time dobijamo

$$\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \geq f(z) + (\alpha x + (1-\alpha)y - z)^T \nabla f(z) = f(z),$$

čime je dokazano da je f konveksna. Ako je nejednakost (1.3) stroga (kako je navedeno pod (b)), i ako izaberemo $x \neq y$ i $\alpha \in (0,1)$, tada tri prethodne nejednakosti postaju stroge, čime se dobija da je f strogo konveksna.

Obrnuto, pretpostavimo da je f konveksna. Neka su x i z vektori iz skupa C takvi da je $x \neq z$ i neka $\alpha \in (0,1)$. Posmatrajmo funkciju

$$g(\alpha) = \frac{f(x+\alpha(z-x)) - f(x)}{\alpha}, \quad \alpha \in (0,1].$$

Pokazaćemo da je $g(\alpha)$ monotono rastuća funkcija po α i strogo monotono rastuća funkcija ako je f strogo konveksna, odakle sledi:

$$(z-x)^T \nabla f(x) = \lim_{\alpha \downarrow 0} g(\alpha) \leq g(1) = f(z) - f(x),$$

pri čemu je nejednakost stroga ako je g strogo monotono rastuća. Time će biti pokazano da nejednakost (1.3) važi, kao i da važi sa strogom nejednakošću ako je f strogo konveksna.

Biramo proizvoljne α_1, α_2 takve da je $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ i definišemo

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \bar{z} = x + \alpha_2(z-x). \tag{1.4}$$

Tada je

$$f(x + \bar{\alpha}(\bar{z}-x)) \leq \bar{\alpha} f(\bar{z}) + (1-\bar{\alpha})f(x),$$

ili

$$\frac{f(x+\bar{\alpha}(\bar{z}-x)) - f(x)}{\bar{\alpha}} \leq f(\bar{z}) - f(x). \tag{1.5}$$

Gornje nejednakosti su stroge ako je f strogo konveksna. Ako u nejednakost (1.5) uvrstimo (1.4) dobijamo

$$\frac{f(x+\alpha_1(z-x)) - f(x)}{\alpha_1} \leq \frac{f(x+\alpha_2(z-x)) - f(x)}{\alpha_2},$$

ili

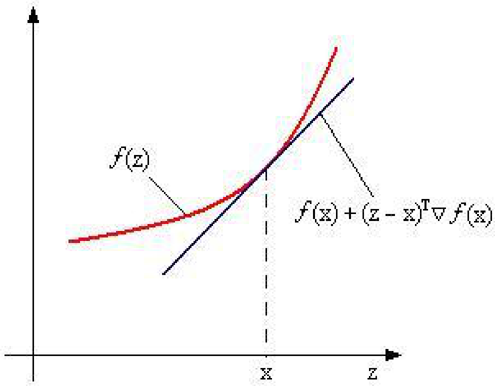
$$g(\alpha_1) \leq g(\alpha_2),$$

pri čemu je nejednakost stroga ako je f strogo konveksna. Dakle, g je monotono rastuća po α ako je f konveksna i strogo monotono rastuća ako je f strogo konveksna. $\square$

Na slici 1.7 prikazana je nejednakost (1.3) iz prethodne teoreme. Primetimo da je afina funkcija promenljive z, data sa

$$f(x) + (z - x)^T \nabla f(x),$$

zapravo Tejlorova[7] aproksimacija prvog reda funkcije f u tački z. Stoga, prethodna teorema zapravo kaže sledeće: ako je posmatrana diferencijabilna funkcija konveksna, tada je Tejlorova aproksimacija prvog reda globalno potcenjuje (što se vidi sa slike), i obrnuto, ako Tejlorova aproksimacija prvog reda date funkcije globalno podcenjuje tu funkciju, tada je posmatrana funkcija konveksna.

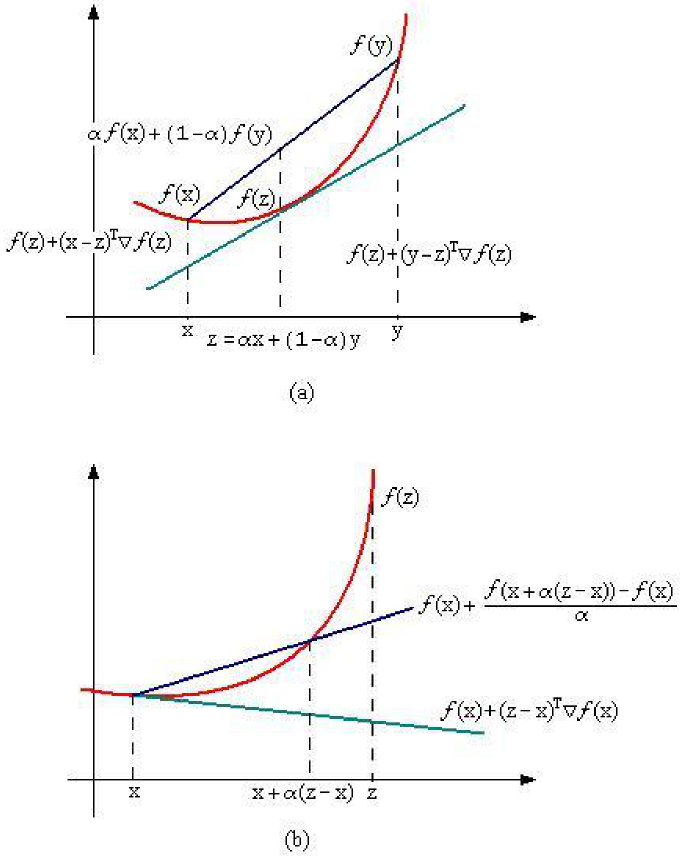


Slika 1.7. Karakterizacija konveksnosti pomoću prvog izvoda

Dakle, nejednakost (1.3) pokazuje da iz lokalnih informacija o nekoj konveksnoj funkciji (odnosno, iz njene vrednosti u nekoj tački i njenog izvoda u istoj toj tački) možemo dobiti globalnu informaciju o toj istoj funkciji (odnosno, njen globalni "podcenjivač"). Ovo je jedna od najvažnijih osobina konveksnih funkcija, koja objašnjava neke veoma korisne osobine problema konveksne optimizacije. Na primer, ako je $f : \Re^n \to \Re$ konveksna funkcija i $\nabla f(x^*) = 0$, tada na osnovu (1.3) sledi da tačka x^* minimizira funkciju f na $\Re^n$. Ovo je klasični dovoljan uslov za optimalnost kod problema optimizacije bez ograničenja.

Geometrijska interpretacija ideja koje su osnova dokaza prethodne teoreme data je na slici 1.8.

[7] Brook Taylor (1685-1731)



Slika 1.8.

Na osnovu Teoreme 6 možemo uvesti i odgovarajuću karakterizaciju konkavnih funkcija: ako je C konveksan podskup od $\Re^n$ i ako je $f : \Re^n \to \Re$ diferencijabilna na $\Re^n$, tada je funkcija f konkavna ako i samo ako važi

$$f(z) \leq f(x) + (z-x)^T \nabla f(x), \quad \forall\, x, z \in C.$$

Za dva puta diferencijabilne konveksne funkcije postoji još jedna karakterizacija konveksnosti, koja je data u vidu sledeće teoreme.

Teorema 1.3.5. *Neka je C konveksan podskup od $\Re^n$ i neka je $f : \Re^n \to \Re$ dva puta neprekidno diferencijabilna na $\Re^n$.*

(a) *Ako je $\nabla^2 f(x)$ pozitivno semidefinitna za sve $x \in C$, tada je f konveksna na C.*

(b) *Ako je $\nabla^2 f(x)$ pozitivno definitna za sve $x \in C$, tada je f strogo konveksna na C.*

(c) *Ako je C otvoren i f konveksna na C, tada je $\nabla^2 f(x)$ pozitivno semidefinitna za sve $x \in C$.*

Dokaz.

(a) Prema Tejlorovoj teoremi, za sve $x, y \in C$ važi

$$f(y) = f(x) + (y-x)^T \nabla f(x) + \frac{1}{2}(y-x)^T \nabla^2 f(x + \alpha(y-x))(y-x),$$

za neko $\alpha \in [0,1]$. Koristeći činjenicu da je $\nabla^2 f(x)$ pozitivno semidefinitna dobijamo da je

$$f(y) \geq f(x) + (y-x)^T \nabla f(x), \ \forall \ x, y \in C.$$

Sada na osnovu Teoreme 6 pod (a) sledi da je f konveksna.

(b) Slično kao u dokazu pod (a), važi da je $f(y) > f(x) + (y-x)^T \nabla f(x)$ za sve $x, y \in C$ takve da je $x \neq y$, pa tvrđenje sledi iz Teoreme 6 pod (b).

(c) Pretpostavimo da postoji neko $x \in C$ i neko $z \in \Re^n$, tako da je $z^T \nabla^2 f(x) z < 0$. Pošto je C otvoren skup i $\nabla^2 f$ neprekidna, možemo izabrati takvo z, čija je norma dovoljno mala, da $x+z \in C$ i da je $z^T \nabla^2 f(x+\alpha z) z < 0$ za svako $\alpha \in [0,1]$. Tada, prema Tejlorovoj teoremi, važi da je

$$f(x+z) < f(x) + z^T \nabla f(x),$$

što je prema Teoremi 6 pod (a) kontradikcija sa konveksnošću funkcije f na skupu C. □

Na osnovu prethodne teoreme možemo uvesti i odgovarajuću karakterizaciju konkavnih funkcija: ako je C konveksan podskup od $\Re^n$ i ako je $f : \Re^n \to \Re$ dva puta neprekidno diferencijabilna na $\Re^n$, tada je funkcija f konakvna ako je zadovoljen uslov

$$\nabla^2 f(x) \preceq 0, \quad \forall \ x \in C,$$

odnosno ako je matrica njenog drugog izvoda negativno semidefinitna.

Može se pokazati da tvrđenje Teoreme 7 pod (c) važi i ako se umesto otvorenosti skupa C pretpostavi da on ima nepraznu unutrašnjost.

1.3.5 Kvazikonveksne funkcije

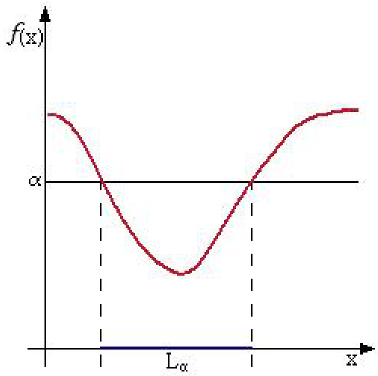
Pored konveksnih funkcija, u teoriji optimizacije važnu ulogu imaju i kvazikonveksne funkcije.

Definicija 1.3.9. *Neka je data funkcija $f : C \to \Re$, pri čemu je $C \subseteq \Re^n$.*

(a) *Funkcija f je* **kvazikonveksna** *ako su njen domen i svi njeni Lebegovi skupovi konveksni.*

(b) *Funkcija f je* **kvazikonkavna** *ako je funkcija $-f$ kvazikonveksna.*

Ilustracija kvazikonveksne funkcije data je na slici 1.9, pri čemu je njen Lebegov skup označen sa L_α.



Slika 1.9.

Kada je funkcija i kvazikonveksna i kvazikonkavna, tada je ona *kvazilinearna*. Primetimo da je konveksna funkcija takođe i kvazikonveksna. Međutim, obrnuto ne važi. Sada ćemo navesti jedan primer kvazilinearne funkcije koju ćemo koristiti kasnije u radu (glava 4).

Primer 1. **(Linearna razlomačka funkcija)**
Funkcija data sa

$$f(x) = \frac{a^T x + b}{c^T x + d},$$

čiji je domen skup

$$D = \{x \in \Re^n \mid c^T x + d > 0\}$$

je i kvazikonveksna i kvazikonkavna. Njeni Lebegovi skupovi

$$\{x \in D \mid a^T x + b \leq \gamma(c^T x + d)\},$$

pri čemu $\gamma \in \Re$, su, kao što vidimo, konveksni.

Kvazikonveksne funkcije zapravo predstavljaju uopštenja konveksnih funkcija. One su u mnogo čemu slične konveksnim funkcijama, ali među njima postoje i bitne razlike. Neke od karakteristika konveksnih funkcija koje poseduju i kvazikonveksne funkcije su:

- Funkcija je kvazikonveksna ako i samo ako je njena restrikcija na bilo koju pravu, koja je sadržana u domenu posmatrane funkcije, kvazikonveksna.

- Funkcija f je kvazikonveksna ako i samo ako je njen domen konveksan i ako, za sve x, y iz njenog domena i svako $\alpha \in [0,1]$, važi *modifikovana Jensenova nejednakost:*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq max\{f(x), f(y)\}.$$

- Neka je skup $C \subset \Re^n$ konveksan i neka je funkcija $f : \Re^n \to \Re$ diferencijabilna na $\Re^n$. Funkcija f je kvazikonveksna na C ako i samo ako važi
$$f(z) \leq f(x) \Rightarrow (z-x)^T \nabla f(x) \leq 0, \quad \forall\ x, z \in C.$$

Pored navedenog, kao i kod konveksnih funkcija, postoje operacije koje očuvavaju kvazikonveksnost funkcije. Dakle, ako je funkcija f kvazikonveksna, tada su kvazikonveksne i sledeće funkcije:

- $\alpha f, \ \ \alpha \geq 0,$
- $f(Ax+b),$
- $f\left(\frac{Ax+b}{c^T+d}\right), \ $ na $c^T x + d > 0,$
- $g(f(x)), \ \ g$ monotono rastuća, itd.

Jedna značajna razlika koja se pojavljuje kada upoređujemo karakterizacije diferencijabilnih konveksnih i kvazikonveksnih funkcija jeste zaključak koji donosimo u slučaju kada je ispunjen uslov $\nabla f(x) = 0$. Ako je funkcija f konveksna, tada znamo da je tačka x globalni minimizator funkcije f. Međutim, ako je funkcija f kvazikonveksna, tada tačka x nije globalni minimizator funkcije f.

1.4 Konveksni omotači

Definicija 1.4.1. *Neka je dato m tačaka $x_1, ..., x_m$ vektorskog prostora X. Tačka $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$ je* **afina kombinacija** *tačaka $x_1, ..., x_m$ ako je $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$. Skup svih afinih kombinacija tačaka iz nekog skupa $C \subseteq X$ se naziva* **afin omotač** *skupa C i označava sa $aff(C)$:*

$$aff(C) = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m \mid x_1, ..., x_m \in C,\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1\}.$$

Može se pokazati (pomoću matematičke indukcije) da iz definicije afinog skupa sledi da on sadrži svaku afinu kombinaciju svojih tačaka. Takođe, afin omotač je najmanji afin skup koji sadrži skup C, odnosno ako je D bilo koji afin skup takav da je $C \subseteq D$, tada je $aff(C) \subseteq D$.

Definicija 1.4.2. *Neka je dato m tačaka $x_1, ..., x_m$ vektorskog prostora X. Tačka $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$ je* **konveksna kombinacija** *tačaka $x_1, ..., x_m$ ako je $\alpha_i \geq 0$ za sve $i = 1, ..., m$ i $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$. Skup svih konveksnih kombinacija tačaka iz nekog skupa $C \subseteq X$ se naziva* **konveksni omotač** *skupa C i označava se sa $co(C)$:*

$$co(C) = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m \mid x_i \in C,\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, ..., m,\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1\}.$$

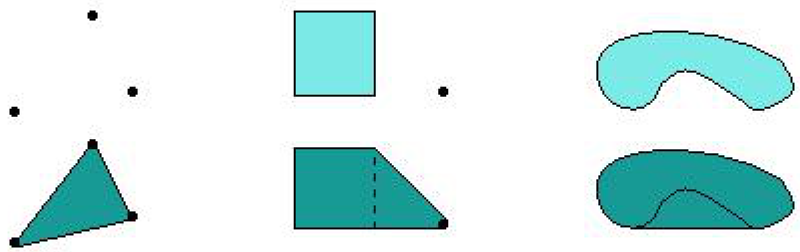
U nastavku ćemo, radi jednostavnosti, uvek posmatrati slučaj kada je $X = \Re^n$. Kao kod afinih skupova, za konveksne skupove se, takođe, može pokazati da je skup konveksan ako i samo ako sadrži svaku konveksnu kombinaciju svojih tačaka.

Alternativni način definisanja konveksnog omotača je sledeći: *presek svih konveksnih skupova koji sadrže skup $C \subseteq \Re^n$ naziva se konveksni omotač skupa C.*

Konveksni omotač nekog skupa je, naravno, konveksan skup, a ako je posmatrani skup konveksan, tada je on jednak svom konveksnom omotaču. Konveksni omotač je najmanji konveksan skup koji sadrži skup C: ako je D bilo koji konveksan skup koji sadrži skup C, tada važi da je $co(C) \subseteq D$.

Za proizvoljne skupove $C, D \subseteq \Re^n$ može se direktno pokazati da važi:

1. $C \subset co(C)$,
2. $C \subset D \Rightarrow co(C) \subset co(D)$,
3. $co(co(C)) = co(C)$.



Slika 1.10. Primeri konveksnih omotača

Teorema 1.4.1. *Konveksni omotač otvorenog skupa je otvoren skup.*

Dokaz. Neka je C neprazan otvoren skup u $\Re^n$. Naravno, važi da je $C \subset co(C)$, pa je $C = C^0 \subset (co(C))^0$. Dakle, otvoren skup je sadržan u unutrašnjosti svog konveksnog omotača. Sa druge strane, $(co(C))^0$ je konveksan skup (sledi iz Teoreme 1). Pošto je $co(C)$ presek svih konveksnih skupova koji sadrže skup C, sledi da je $co(C) \subset (co(C))^0$. Obrnuta inkluzija uvek važi, pa je $co(C) = (co(C))^0$, odnosno $co(C)$ je otvoren skup. $\square$

Međutim, konveksni omotač zatvorenog skupa ne mora biti zatvoren skup, što se može videti u sledećem primeru.

Primer 2. Neka je skup C zatvoren podskup od $\Re^2$, dat sa

$$C = \{(0,0)\} \cup \{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \geq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}.$$

Njegov konveksni omotač je skup

$$co(C) = \{(0,0)\} \cup \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0,\ x_2 > 0\},$$

a on nije zatvoren.

Ako je posmatrani zatvoren skup ograničen (tj. kompaktan) u $\Re^n$, tada je njegov konveksni omotač takođe zatvoren i ograničen skup u $\Re^n$. Ova tvrdnja će biti dokazana nešto kasnije.

Pored toga, može se pokazati da važi sledeće:

$$aff(C) = aff(co(C)) = aff(\bar{C}),$$

odnosno da su afin omotač nekog skupa, afin omotač njegovog konveksnog omotača i afin omotač njegovog zatvaranja jednaki. U slučaju kada $0 \in C$, $aff(C)$ je potprostor generisan skupom C. Dimenzija konveksnog skupa C je definisana kao dimenzija skupa $aff(C)$.

Sada navodimo i dokazujemo teoremu koja predstavlja osnovnu karakterizaciju konveksnih omotača.

Teorema 1.4.2. (Karateodorijeva[8] teorema) *Neka je C neprazan podskup od $\Re^n$. Tada se svaka tačka $x \in co(C)$ može prikazati kao konveksna kombinacija najviše $n+1$ tačaka iz skupa C.*

Dokaz. Izaberimo proizvoljno $x \in co(C)$. Neka je $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, pri čemu $x_i \in C$, $\lambda_i > 0$ za sve $i \in \{1, ..., k\}$ i $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Ako je $k \leq n+1$, tada tvrđenje važi. Pretpostavimo da je $k > n+1$. Tada tačaka $x_2 - x_1, ...,$ $x_k - x_1$, koje pripadaju prostoru $\Re^n$, ima više od n, zbog čega su one linearno zavisne. Dakle, postoje skalari $\mu_2, ..., \mu_k$, koji nisu svi jednaki nuli, takvi da je $\sum_{i=2}^{k} \mu_i (x_i - x_1) = 0$. Neka je $\mu_1 = -\sum_{i=2}^{k} \mu_i$. Tada je $\sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i = 0$, pri čemu je $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 0$ i bar jedno μ_i je pozitivno. Stoga sledi da je, za bilo koje $\alpha > 0$,

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i - \alpha \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \alpha \mu_i) x_i.$$

Za α biramo

$$\alpha = \min_{1 \leq i \leq k} \left\{ \frac{\lambda_i}{\mu_i} \ :\ \mu_i > 0 \right\} = \frac{\lambda_j}{\mu_j}.$$

[8]Constantin Carathéodory (1873-1950)

Primetimo da je $\alpha > 0$ pošto je $\lambda_j > 0$. Štaviše, za bilo koje $i \in \{1, ..., k\}$, važi $\lambda_i - \alpha\mu_i > 0$ ako je $\mu_i < 0$, a ako je $\mu_i > 0$, tada je $\lambda_i - \alpha\mu_i = \lambda_i - \lambda_j \frac{\mu_i}{\mu_j} \geq 0$. Takođe, važi

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \alpha\mu_i) = 1.$$

Dakle, dobili smo da je x konveksna kombinacija tačaka $x_1, ..., x_k$, ali je pri tom $\lambda_j - \alpha\mu_j = 0$. Zbog toga x može biti izraženo kao konveksna kombinacija $k-1$ tačaka iz skupa C. Ako je $k-1 = n+1$, dokaz je završen. U suprotnom se postupak ponavlja dok se ne dobije da x može biti izraženo kao konveksna kombinacija $n+1$ tačaka. $\square$

Karateodorijeva teorema se može koristiti za dokazivanje nekoliko važnih tvrđenja. Jedno od njih je formulisano u vidu sledeće teoreme.

Teorema 1.4.3. *Konveksan omotač kompaktnog podskupa od $\Re^n$ je kompaktan.*

Dokaz. Neka je C kompaktan podskup od $\Re^n$. Kako je C ograničen, $co(C)$ je takođe ograničen. Da bismo pokazali da je $co(C)$ kompaktan, uzećemo niz iz $co(C)$ i pokazati da on ima konvergentan podniz čija je granica u $co(C)$. Prema Karateodorijevoj teoremi, svaki niz iz $co(C)$ može biti izražen u obliku konveksne kombinacije

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^k x_i^k \Big\}_{k \in \mathbb{N}_0},$$

pri čemu, za sve $k \in \mathbb{N}_0$ i $i = 1, ..., n+1$, važi $\alpha_i^k \geq 0$, $x_i^k \in C$ i $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^k = 1$. Posmatrajmo niz

$$\{(\alpha_1^k, ..., \alpha_{n+1}^k, x_1^k, ..., x_{n+1}^k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}.$$

Pošto je on ograničen, ima graničnu tačku $\{(\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}, x_1, ..., x_{n+1})\}$, koja mora da zadovoljava $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ i $x_i \in C$ za sve $i = 1, ..., n+1$. Dakle, vektor $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i$, koji pripada $co(C)$, je granična tačka niza

$$\{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^k x_i^k\}_{k \in \mathbb{N}_0},$$

čime je pokazano da je $co(C)$ zatvoren. Na početku dokaza smo utvrdili da je on i ograničen, stoga je $co(C)$ kompaktan skup. $\square$

1.5 Relativna unutrašnjost, zatvaranje i neprekidnost

U ovom poglavlju ćemo se baviti nekim osnovnim topološkim osobinama konveksnih skupova i funkcija. Pojam zatvaranja (skupa), kao i osobina neprekidnosti (funkcije) su nam poznati od ranije. Mnoge konstrukcije u optimizaciji imaju lepe osobine u unutrašnjosti datog skupa, ali gube ta svojstva ukoliko posmatramo tačke ruba istog skupa. Iz tog razloga nas, u većini slučajeva, posebno zanimaju unutrašnje tačke skupa i želimo da unutrašnjost posmatranog skupa bude što "veća". Međutim, šta ako ne postoji ni jedna unutrašnja tačka? U tom slučaju, možemo koristiti tzv. zamenu "obične" unutrašnjosti - *relativnu unutrašnjost*. Dok unutrašnjost konveksnog skupa može biti prazna, ispostavlja se da upravo iz osobine konveksnosti posmatranog skupa sledi da postoje unutrašnje tačke relativne u odnosu na afin omotač tog skupa. Ovo je veoma značajna osobina konveksnih skupova, koja je formulisana narednom definicijom.

Definicija 1.5.1. *Neka je C neprazan konveksan podskup od $\Re^n$. Kažemo da je x* **relativna unutrašnja tačka** *skupa C ako $x \in C$ i postoji otvorena lopta L sa centrom u x takva da važi*

$$L \cap aff(C) \subset C.$$

Skup svih relativnih unutrašnjih tačaka skupa C se naziva **relativna unutrašnjost** *skupa C i označava se sa $ri(C)$.*

Iz teorije realne analize su nam poznati pojmovi otvoren skup, rubna tačka, rub skupa i sl. Na analogan način se definišu pojmovi: relativno otvoren skup, relativna rubna tačka i relativni rub skupa. Da bismo bolje objasnili pojam relativne unutrašnjosti sada navodimo jedan jednostavan primer.

Primer 3. *Posmatrajmo skup $C \in \Re^3$ dat sa*

$$C = \{x \in \Re^3 \mid -1 \le x_1 \le 1,\ -1 \le x_2 \le 1,\ x_3 = 0\}.$$

Vidimo da je skup C zapravo kvadrat u (x_1, x_2)-ravni. Njegova unutrašnjost je prazna, ali je relativna unutrašnjost skup

$$ri(C) = \{x \in \Re^3 \mid -1 < x_1 < 1,\ -1 < x_2 < 1,\ x_3 = 0\}.$$

Rub skupa C je sam skup C, dok je njegov relativni rub skup

$$\{x \in \Re^3 \mid max\{|x_1|, |x_2|\} = 1,\ x_3 = 0\}.$$

Sada ćemo dokazati jednu veoma značajnu teoremu za teoriju kojom ćemo se baviti u nastavku rada. Ona se odnosi na osnovne osobine relativnih unutrašnjih tačaka. Kroz naredna poglavlja ćemo videti da je konveksna optimizacija prožeta pojmom relativne unutrašnjosti. Iz tog razloga, u nastavku, kao primer navodimo teoremu koja predstavlja karakterizaciju skupa optimalnih rešenja u slučaju kada je funkcija cilja konkavna (Teorema 12).

Teorema 1.5.1. *Neka je C neprazan konveksan podskup od $\Re^n$.*

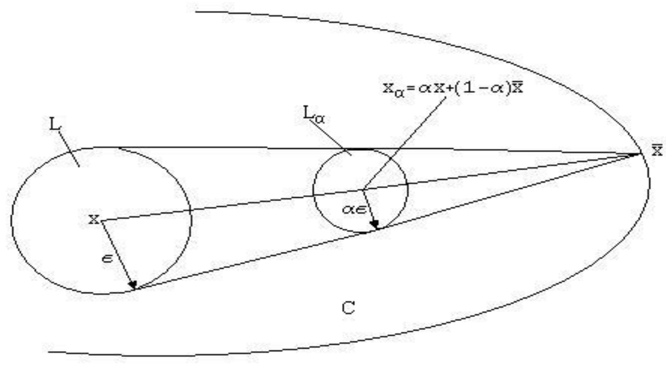
(a) **(Princip linijskog segmenta)** *Ako $x \in ri(C)$ i $\bar{x} \in \bar{C}$, tada sve tačke linijskog segmenta koji povezuje x i $\bar{x}$, osim možda $\bar{x}$, pripadaju skupu $ri(C)$.*

(b) **(Nepraznost relativne unutrašnjosti)** *$ri(C)$ je neprazan konveksan skup i ima isti afin omotač kao skup C. U stvari, ako je m dimenzija skupa $aff(C)$ i $m > 0$, tada postoje vektori $x_0, ..., x_m \in ri(C)$ takvi da je $span\{x_1 - x_0, ..., x_m - x_0\}$[9] potprostor paralelan sa $aff(C)$.*

(c) *$x \in ri(C)$ ako i samo ako svaki linijski segment iz skupa C kojem je x jedna krajnja tačka može biti produžen iza x bez napuštanja skupa C (tj. za svako $\bar{x} \in C$, postoji $\gamma > 1$ takvo da važi $x + (\gamma - 1)(x - \bar{x}) \in C$).*

Dokaz.

(a) Prvo posmatramo slučaj kada $\bar{x} \in C$. Pošto $x \in ri(C)$, postoji otvorena lopta $L = \{z \mid \|z - x\| < \varepsilon\}$ takva da je $L \cap aff(C) \subset C$. Neka je, za sve $\alpha \in (0, 1]$, $x_\alpha = \alpha x + (1 - \alpha)\bar{x}$ i neka je $L_\alpha = \{z \mid \|z - x_\alpha\| < \alpha\varepsilon\}$. Na slici 1.11 vidimo da je svaka tačka iz $L_\alpha \cap aff(C)$ zapravo konveksna kombinacija tačke $\bar{x}$ i neke tačke iz $L \cap aff(C)$. Zbog toga, iz konveksnosti skupa C sledi da je $L_\alpha \cap aff(C) \subset C$, odakle dalje sledi da $x_\alpha \in ri(C)$.



Slika 1.11. Ilustracija dokaza principa linijskog segmenta u slučaju kada $\bar{x} \in C$

[9] *Span* ili *lineal* konačne kolekcije $\{x_1, ..., x_m\}$ elemenata iz $\Re^n$ je potprostor koji se sastoji od svih vektora y oblika $y = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$, pri čemu $\alpha_k \in \Re$, za svako k.

Sada posmatramo slučaj kada $\bar{x} \notin C$. Da bismo pokazali da, za bilo koje $\alpha \in (0,1]$, $x_\alpha = \alpha x + (1-\alpha)\bar{x} \in ri(C)$, posmatrajmo niz $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \subset C$ koji konvergira ka $\bar{x}$ i uzmimo da je $x_{k,\alpha} = \alpha x + (1-\alpha)x_k$. Sada je, kao i na slici 1.11, $\{z \mid \|z - x_{k,\alpha}\| < \alpha\varepsilon\} \cap aff(C) \subset C$ za svako $k \in \mathbb{N}_0$, pri čemu je ε takvo da otvorena lopta $L = \{z \mid \|z - x\| < \varepsilon\}$ zadovoljava da je $L \cap aff(C) \subset C$. Pošto $x_{k,\alpha} \to x_\alpha$, za dovoljno veliko k važi da je

$$\{z \mid \|z - x_\alpha\| < \alpha\varepsilon/2\} \subset \{z \mid \|z - x_{k,\alpha}\| < \alpha\varepsilon\}.$$

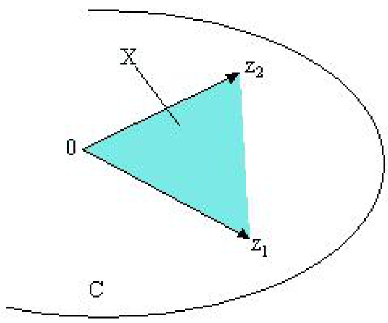
Sada sledi da je $\{z \mid \|z - x_\alpha\| < \alpha\varepsilon/2\} \cap aff(C) \subset C$, čime je pokazano da $x_\alpha \in ri(C)$.

(b) Konveksnost skupa $ri(C)$ sledi iz principa linijskog segmenta koji je dokazan pod (a). Bez gubitka opštosti pretpostavljamo da $0 \in C$. Sada je afin omotač skupa C podprostor čiju ćemo dimenziju označiti sa m. Ako je $m = 0$, tada se C i $aff(C)$ sastoje od samo jedne tačke, koja je jedinstvena relativna unutrašnja tačka. Ako je $m > 0$, tada možemo naći m linearno nezavisnih vektora $z_1, ..., z_m$ iz C takvih da je $span\{z_1, ..., z_m\} = aff(C)$; inače bi postojalo $r < m$ linearno nezavisnih vektora iz C čiji lineal sadrži C, što je kontradikcija sa činjenicom da je dimenzija skupa $aff(C)$ jednaka m. Stoga, $z_1, ..., z_m$ formiraju bazu prostora $aff(C)$.

Posmatrajmo sada skup

$$X = \left\{x \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_i,\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i < 1,\ \alpha_i > 0,\ i = 1, ..., m\right\}$$

koji je prikazan na slici 1.12.



Slika 1.12. Konstrukcija skupa X

Pokazaćemo da je ovaj skup relativno otvoren u odnosu na $aff(C)$, tj. za svako $\bar{x} \in X$ postoji otvorena lopta L sa centrom u $\bar{x}$, takva da $\bar{x} \in L$ i $L \cap aff(C) \subset X$. Fiksirajmo $\bar{x} \in X$ i neka je x drugi vektor iz $aff(C)$. Sada je $\bar{x} = Z\bar{\alpha}$ i $x = Z\alpha$, pri čemu je Z matrica reda $n \times m$ čije su kolone vektori $z_1, ..., z_m$, a α i $\bar{\alpha}$ su odgovarajući m-dimenzioni vektori, koji su jedinstveni jer $z_1, ..., z_m$ čine bazu za $aff(C)$. Pošto Z ima linearno nezavisne kolone, matrica $Z^T Z$ je simetrična i pozitivno definitna, pa znamo da postoji pozitivni skalar γ, nezavisan od x i $\bar{x}$, takav da važi

$$\|x - \bar{x}\|^2 = (\alpha - \bar{\alpha})^T Z^T Z(\alpha - \bar{\alpha}) \geq \gamma \|\alpha - \bar{\alpha}\|^2. \tag{1.6}$$

Pošto $\bar{x} \in X$, odgovarajući vektor $\bar{\alpha}$ leži u otvorenom skupu

$$A = \Big\{(\alpha_1, ..., \alpha_m) \ \Big| \ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i < 1, \ \alpha_i > 0, \ i = 1, ..., m\Big\}.$$

Iz nejednakosti (1.6) vidimo da ako x leži u odgovarajućoj maloj lopti centriranoj u $\bar{x}$, tada odgovarajući vektor α leži u skupu A, iz čega sledi da $x \in X$. Zbog toga X sadrži presek skupa $aff(C)$ i otvorene lopte sa centrom u $\bar{x}$, pa je X relativno otvoren u odnosu na $aff(C)$. Sada sledi da su sve tačke iz X relativne unutrašnje tačke skupa C, pa je skup $ri(C)$ neprazan. Takođe, pošto prema konstrukciji važi da je $aff(X) = aff(C)$ i $X \subset ri(C)$, $ri(C)$ i C imaju isti afin omotač.

Posmatrajmo sada vektore

$$x_0 = \alpha \sum_{i=1}^{m} z_i, \quad x_i = x_0 + \alpha z_i, \quad i = 1, ..., m,$$

gde je α pozitivan skalar takav da je $\alpha(m+1) < 1$. Vektori $x_0, ..., x_m$ pripadaju skupu X, a kako je $X \subset ri(C)$, takođe pripadaju skupu $ri(C)$. Štaviše, pošto je $x_i - x_0 = \alpha z_i$ za sve i, a $span\{z_1, ..., z_m\} = aff(C)$, sledi da je i $span\{x_1 - x_0, ..., x_m - x_0\} = aff(C)$.

(c) Ako $x \in ri(C)$, korišćenjem definicije relativne unutrašnje tačke, dati uslov važi.

Obrnuto, neka x zadovoljava dati uslov. Treba pokazati da $x \in ri(C)$. Iz dokaza pod (b) znamo da postoji vektor $\bar{x} \in ri(C)$. Pretpostavljamo da je $\bar{x} \neq x$, jer je u suprotnom dokaz završen. Prema datom uslovu, pošto $\bar{x} \in C$, sledi da postoji $\gamma > 1$ takvo da $y = x + (\gamma - 1)(x - \bar{x}) \in C$. Sada je $x = (1 - \alpha)\bar{x} + \alpha y$, pri čemu $\alpha = 1/\gamma \in (0, 1)$, pa prema principu linijskog segmenta dobijamo da $x \in ri(C)$. $\square$

Teorema 1.5.2. *Neka je $X \subseteq \Re^n$ neprazan konveksan skup, neka je data konkavna funkcija $f : X \to \Re$ i neka je X^* skup vektora u kojima f dostiže minimum na skupu X, tj.*

$$X^* = \Big\{x \in X \ \Big| \ f(x^*) = \inf_{x \in X} f(x)\Big\}.$$

Ako X^* sadrži tačku relativne unutrašnjosti skupa X, tada f mora biti konstantna na skupu X, tj. $X^* = X$.

1.5.1 Operacije sa relativnim unutrašnjostima i zatvaranjima

Pri analiziranju problema konveksne optimizacije javljaju se razne skupovne operacije kao što su presek, suma vektora, linearne transformacije i slično. Da bismo uspešno analizirali zadati problem, trebaju nam alati za izračunavanje odgovarajućih relativnih unutrašnjosti i zatvaranja. Iz tog razloga sada navodimo (bez dokaza) tri teoreme koje nam obezbeđuju potreban alat.

Teorema 1.5.3. *Neka je C neprazan konveksan podskup od $\Re^n$. Tada važi:*

(a) $\bar{C} = \overline{ri(C)}$.

(b) $ri(C) = ri(\bar{C})$.

(c) *Neka je D još jedan neprazan konveksan skup. Tada su sledeća tri uslova ekvivalentna:*

1. *C i D imaju istu relativnu unutrašnjost.*
2. *C i D imaju isto zatvaranje.*
3. $ri(C) \subset D \subset \bar{C}$.

Teorema 1.5.4. *Neka je C neprazan konveksan podskup od $\Re^n$ i neka je A matrica reda $m \times n$. Tada važi:*

(a) $A \cdot ri(C) = ri(A \cdot C)$.

(b) $A \cdot \bar{C} \subset \overline{A \cdot C}$. *Štaviše, ako je C uz to i ograničen, tada je* $A \cdot \bar{C} = \overline{A \cdot C}$.

Teorema 1.5.5. *Neka su C i D neprazni konveksni podskupovi od $\Re^n$. Tada važi:*

(a) $ri(C) \cap ri(D) \subset ri(C \cap D)$, $\quad \overline{C \cap D} \subset \bar{C} \cap \bar{D}$.

Štaviše, ako je $ri(C) \cap ri(D) \neq \emptyset$, tada važi:

$$ri(C \cap D) = ri(C) \cap ri(D), \quad \overline{C \cap D} = \bar{C} \cap \bar{D}.$$

(b) $ri(C + D) = ri(C) + ri(D)$, $\quad \bar{C} + \bar{D} \subset \overline{C + D}$.

Štaviše, ako je bar jedan od skupova C i D ograničen, tada važi:

$$\bar{C} + \bar{D} = \overline{C + D}.$$

1.5.2 Neprekidnost konveksnih funkcija

Do sada smo, u ovom poglavlju, ispitivali svojstva konveksnih skupova. U ovom odeljku navodimo značajno svojstvo konveksnih funkcija, a to je neprekidnost.

Teorema 1.5.6. *Ako je $f : \Re^n \to \Re$ konveksna funkcija, tada je ona i neprekidna. Opštije, ako je $f : \Re^n \to (-\infty, \infty]$ prava konveksna funkcija, tada je njena restrikcija na $dom(f)$ neprekidna na relativnoj unutrašnjosti skupa $dom(f)$.*

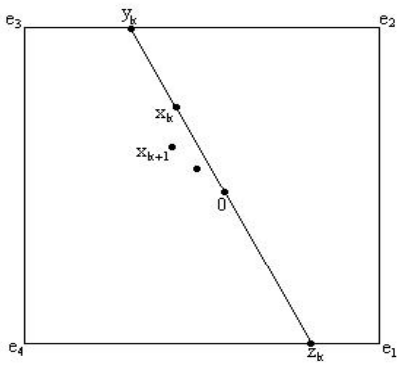
Dokaz. Bez gubitka opštosti pretpostavljamo da je 0 unutrašnja tačka skupa $dom(f)$ i da je jedinična kocka $X = \{x \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$ sadržana u $dom(f)$. Dovoljno će biti da pokažemo da je f neprekidna u 0, tj. da za svaki niz $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \subset \Re^n$ koji konvergira ka 0 važi da $f(x_k) \to f(0)$.

Neka su $e_i, i = 1, ..., 2^n$ ivice kocke X, tj. svako e_i je vektor čije su komponente ili 1 ili -1. Može se pokazati da se bilo koje $x \in X$ može izraziti u obliku $x = \sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i e_i$, gde je svako α_i nenegativan skalar i važi $\sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i = 1$. Neka je $M = \max_i f(e_i)$. Iz Jensenove nejednakosti sledi da je $f(x) \leq M$ za svako $x \in X$.

Sada pretpostavljamo da $x_k \in X$ i da je $x_k \neq 0$ za sve k. Posmatrajmo nizove $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ i $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ date sa

$$y_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty}, \quad z_k = -\frac{x_k}{\|x_k\|_\infty}.$$

Konstrukcija ovih nizova u $\Re^2$ prikazana je na slici 1.13.



Slika 1.13.

Primenjujući definiciju konveksnosti funkcije na linijski segment koji povezuje y_k, x_k i 0 dobijamo da je

$$f(x_k) \leq (1 - \|x_k\|_\infty) f(0) + \|x_k\|_\infty f(y_k).$$

Pošto $\|x_k\|_\infty \to 0$ i $f(y_k) \leq M$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$, ako pustimo da $k \to \infty$ sledi

$$\limsup_{k \to \infty} f(x_k) \leq f(0).$$

Ako sada primenimo definiciju konveksnosti funkcije na linijski segment koji povezuje $x_k, 0$ i z_k dobijamo da je

$$f(0) \leq \frac{\|x_k\|_\infty}{\|x_k\|_\infty + 1} f(z_k) + \frac{1}{\|x_k\|_\infty + 1} f(x_k),$$

a ako pustimo $k \to \infty$ sledi

$$f(0) \leq \liminf_{k \to \infty} f(x_k).$$

Dakle, važi da je $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(0)$, tj. f je neprekidna u 0. $\square$

Sumirajući sve do sada rečeno o konveksnim funkcijama, možemo da zaključimo sledeće: ako je realna funkcija konveksna, ona je neprekidna pa su njen nadgraf i njeni Lebegovi skupovi zatvoreni i konveksni, iz čega sledi da je takva funkcija zatvorena. Dakle, *realna konveksna funkcija je zatvorena funkcija.*

Glava 2

Konusi opadanja

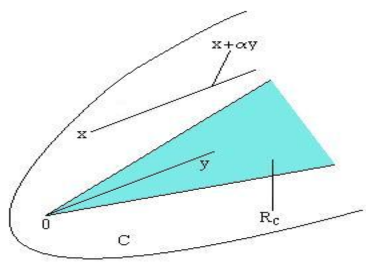
U prethodnoj glavi smo definisali šta je konus. Sada ćemo svoju pažnju usredsrediti na jednu specijalnu vrstu konusa - konuse opadanja. U ovoj glavi je korišćena literatura [1],[12] i [19]. Radi jednostavnosti, iako to ponekad nećemo posebno isticati, posmatraćemo prostor $\Re^n$. Opštija situacija kada je X Banahov prostor može se naći u [6].

2.1 Pravci opadanja

Kako bismo definisali konuse opadanja, uvodimo najpre pojam pravca opadanja.

Definicija 2.1.1. *Neka je dat neprazan konveksan skup $C \subset \Re^n$. Kažemo da je vektor y* **pravac opadanja** *skupa C ako važi da $x + \alpha y \in C$ za sve $x \in C$ i $\alpha \geq 0$. Skup svih pravaca opadanja skupa C se naziva* **konus opadanja** *skupa C i označava se sa R_C.*

Drugim rečima, y je pravac opadanja skupa C ako važi sledeće: ako se krećemo, počev od proizvoljnog vektora x iz skupa C, beskonačno duž pravca y, nikada nećemo preći relativni rub skupa C, tj. nikada nećemo doći do tačaka izvan skupa C. Primetimo da je konus opadanja konus koji sadrži svoj vrh. Ilustracija pravca i konusa opadanja data je na slici 2.1.



Slika 2.1.

Sada ćemo dokazati jednu, za ovaj rad, veoma važnu teoremu - teoremu konusa opadanja. Ona se odnosi na osobine konusa opadanja i koristiće nam pri dokazivanju nekih značajnih rezultata.

Teorema 2.1.1. (Teorema konusa opadanja) *Neka je C neprazan zatvoren konveksan podskup od $\Re^n$.*

(a) *Konus opadanja R_C je zatvoren konveksan konus.*

(b) *Vektor y pripada konusu opadanja R_C ako i samo ako postoji vektor $x \in C$ takav da $x + \alpha y \in C$ za sve $\alpha \geq 0$.*

(c) *R_C sadrži ne-nula pravac opadanja ako i samo ako je C neograničen.*

(d) *Konusi opadanja skupa C i njegove relativne unutrašnjosti su jednaki, tj.*

$$R_C = R_{ri(C)}.$$

(e) *Ako je D još jedan zatvoren konveksan skup takav da je $C \cap D \neq \emptyset$, tada važi*

$$R_{C \cap D} = R_C \cap R_D.$$

Opštije, za proizvoljnu familiju zatvorenih konveksnih skupova C_i, $i \in I$, gde je I prizvoljan skup indeksa, a presek $\cap_{i \in I} C_i$ neprazan, važi

$$R_{\cap_{i \in I} C_i} = \cap_{i \in I} R_{C_i}.$$

Dokaz.

(a) Ako $y_1, y_2 \in R_C$ i ako su λ_1, λ_2 pozitivni skalari takvi da je $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, tada za bilo koje $x \in C$ i $\alpha \geq 0$ važi

$$x + \alpha(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1(x + \alpha y_1) + \lambda_2(x + \alpha y_2) \in C,$$

jer je C konveksan skup i vektori $x + \alpha y_1$ i $x + \alpha y_2$ pripadaju skupu C prema definiciji konusa opadanja R_C. Stoga $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in R_C$, čime je dokazano da je R_C konveksan.

Neka je y tačka iz zatvaranja skupa R_C i neka je $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}_0} \subset R_C$ niz koji konvergira ka y. Za bilo koje $x \in C$ i $\alpha \geq 0$ važi da $x + \alpha y_k \in C$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$, pa zbog zatvorenosti skupa C sledi da $x + \alpha y \in C$. Odavde sledi da $y \in R_C$, čime je dokazano da je R_C zatvoren.

(b) Ako $y \in R_C$, tada svaki vektor $x \in C$ ima traženu osobinu prema definiciji konusa opadanja R_C.

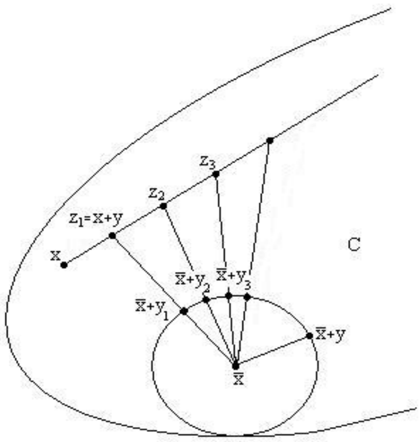
Obrnuto, neka je y takav da postoji vektor $x \in C$ takav da $x + \alpha y \in C$ za sve $\alpha \geq 0$. Bez gubitka opštosti pretpostavljamo da je $y \neq 0$. Sada fiksiramo vektor $\bar{x} \in C$ i $\alpha > 0$ i hoćemo da pokažemo da $\bar{x} + \alpha y \in C$. Dovoljno je pokazati da $\bar{x} + y \in C$, tj. možemo pretpostaviti da je $\alpha = 1$ (jer opšti slučaj kada je $\alpha > 0$ može da se svede na slučaj kada je $\alpha = 1$ zamenjujući y sa y/α). Neka je dat niz

$$z_k = x + ky, \;\; k = 1, 2, ...$$

$z_k \in C$ za sve $k \in \mathbb{N}$, s obzirom na početnu pretpostavku. Ako je $\bar{x} = z_k$ za neko k, tada $\bar{x} + y = x + (k+1)y \in C$ i time je dokaz završen. Iz tog razloga pretpostavljamo da je $\bar{x} \neq z_k$ za sve $k \in \mathbb{N}$ i definišemo niz

$$y_k = \frac{z_k - \bar{x}}{\|z_k - \bar{x}\|}\|y\|, \;\; k = 1, 2, ...$$

tako da $\bar{x} + y_k$ leži na pravoj koja počinje u tački $\bar{x}$ i prolazi kroz z_k (kao što je prikazano na slici 2.2).



Slika 2.2.

Sada važi

$$\frac{y_k}{\|y\|} = \frac{\|z_k - x\|}{\|z_k - \bar{x}\|} \cdot \frac{z_k - x}{\|z_k - x\|} + \frac{x - \bar{x}}{\|z_k - \bar{x}\|} = \frac{\|z_k - x\|}{\|z_k - \bar{x}\|} \cdot \frac{y}{\|y\|} + \frac{x - \bar{x}}{\|z_k - \bar{x}\|}.$$

Pošto je $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ neograničen niz, sledi da

$$\frac{\|z_k - x\|}{\|z_k - \bar{x}\|} \to 1, \quad \frac{x - \bar{x}}{\|z_k - \bar{x}\|} \to 0,$$

pa dobijamo da $y_k \to y$. Vektor $\bar{x} + y_k$ leži između $\bar{x}$ i z_k na linijskom segmentu koji povezuje $\bar{x}$ i z_k za sve $k \in \mathbb{N}$ tako da je $\|z_k - \bar{x}\| \geq \|y\|$, pa prema konveksnosti skupa C sledi da $\bar{x} + y_k \in C$ za svako k dovoljno veliko. Pošto $\bar{x} + y_k \to \bar{x} + y$, a C je zatvoren skup, sledi da $\bar{x} + y$ mora pripadati skupu C. Dakle, $y \in R_C$.

(c) Pokazaćemo da R_C sadrži ne-nula pravac pretpostavljajući da je C neograničen skup. (Obrnuta implikacija je jasna.) Biramo proizvoljno $\bar{x} \in C$ i neki neograničen niz $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \subset C$. Posmatrajmo niz $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, dat sa

$$y_k = \frac{z_k - \bar{x}}{\|z_k - \bar{x}\|}$$

i neka je y granica niza $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$. Za bilo koje fiksirano $\alpha \geq 0$, vektor $\bar{x} + \alpha y_k$ leži između $\bar{x}$ i z_k na linijskom segmentu koji povezuje $\bar{x}$ i z_k za sve $k \in \mathbb{N}_0$ tako da je $\|z_k - \bar{x}\| \geq \alpha$. Stoga, zbog konveksnosti skupa C, važi da $\bar{x} + \alpha y_k \in C$ za svako k dovoljno veliko. Kako je $\bar{x} + \alpha y$ granica niza $\{\bar{x} + \alpha y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ i C zatvoren skup, sledi da $\bar{x} + \alpha y \in C$. Ako sada iskoristimo dokaz pod (b), dobijamo da je ne-nula vektor y upravo pravac opadanja.

(d) Ako $y \in R_{ri(C)}$, tada za fiksiran vektor $x \in ri(C)$ i svako $\alpha \geq 0$ važi da $x + \alpha y \in ri(C) \subset C$. Stoga, na osnovu dokaza pod (b) zaključujemo da $y \in R_C$.

Obrnuto, ako $y \in R_C$, za bilo koje $x \in ri(C)$ važi da $x + \alpha y \in C$ za sve $\alpha \geq 0$. Iz principa linijskog segmenta (Teorema 11 (a)) sledi da $x + \alpha y \in ri(C)$ za sve $\alpha \geq 0$, pa y pripada skupu $R_{ri(C)}$.

(e) Prema definiciji pravca opadanja, ako $y \in R_{C\cap D}$ tada $x + \alpha y \in C \cap D$ za sve $x \in C \cap D$ i sve $\alpha \geq 0$. Iz dokaza pod (b) sada sledi da $y \in R_C$ i $y \in R_D$, pa je $R_{C\cap D} \subset R_C \cap R_D$.

Obrnuto, prema definiciji pravca opadanja, ako $y \in R_C \cap R_D$ i $x \in C \cap D$, tada važi da $x + \alpha y \in C \cap D$ za sve $\alpha > 0$, pa sledi da $y \in R_{C\cap D}$. Dakle, $R_C \cap R_D \subset R_{C\cap D}$.

Analogno se pokazuje uopštena jednakost $R_{\cap_{i\in I} C_i} = \cap_{i\in I} R_{C_i}$. □

Važno je primetiti sledeće: tvrđenje navedeno u prethodnoj teoremi pod (c) zapravo kaže da je zatvoren konveksan skup C ograničen ako i samo ako je $R_C = \{0\}$. Ova činjenica će biti veoma značajna u nastavku ove glave, kada ćemo pokazati na koji način se neke osnovne osobine kompaktnih skupova proširuju na zatvorene konveksne skupove. Sada navodimo jedno uopštenje pomenutog tvrđenja.

Teorema 2.1.2. *Neka je C neprazan zatvoren konveksan podskup od $\Re^n$, neka je W neprazan konveksan kompaktan podskup od $\Re^m$ i neka je A matrica reda $m \times n$. Posmatramo skup*

$$V = \{x \in C \mid Ax \in W\}$$

i pretpostavljamo da je neprazan. Tada je V zatvoren, konveksan i njegov konus opadanja je $R_C \cap N(A)$, pri čemu je $N(A)$[1] jezgro matrice A. Štaviše, V je kompaktan ako i samo ako važi da je

$$R_C \cap N(A) = \{0\}.$$

[1]Oznaka $N(A)$ potiče od engl. reči *nullspace*, koja znači jezgro.

Dokaz. Skup V možemo zapisati u obliku preseka skupova C i $\bar{V}$, pri čemu je skup $\bar{V}$ dat sa $\bar{V} = \{x \in \Re^n \mid Ax \in W\}$, zatvoren i konveksan (jer je on inverzna slika zatvorenog konveksnog skupa W pod neprekidnom linearnom transformacijom A). Sada sledi da je i skup V zatvoren i konveksan.

Pokažimo da je konus opadanja skupa $\bar{V}$ skup $N(A)$. Inkluzija $N(A) \subset R_{\bar{V}}$ je jasna. Pretpostavimo da $y \in R_{\bar{V}}$, ali $y \notin N(A)$. Tada, za sve $x \in \bar{V}$, važi da

$$Ax + \alpha Ay \in W, \quad \forall \alpha > 0,$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom da je W ograničen skup, jer je $Ay \neq 0$. Dakle, pošto je $V = C \cap \bar{V}$ neprazan skup i kako su C i $\bar{V}$ zatvoreni i konveksni skupovi, na osnovu Teoreme 17 (e) sledi da je $R_C \cap N(A)$ konus opadanja skupa V. Kako je V zatvoren i konveksan, iz Teoreme 17 (c) sledi da je V kompaktan ako i samo ako je $R_C \cap N(A) = \{0\}$. □

2.2 Linealni prostor

Još jedan pojam, pored pravca opadanja, usko povezan sa konusima opadanja, jeste linealni prostor.

Definicija 2.2.1. *Neka je dat neprazan konveksan skup C. Skup pravaca opadanja skupa C čiji su suprotni pravci takođe pravci opadanja datog skupa naziva se* **linealni prostor** *skupa C i označava se sa L_C.*

Zapisano u obliku formule, linealni prostor se definiše sa

$$L_C = R_C \cap (-R_C).$$

Iz definicije pravca opadanja sledi da ako $y \in L_C$, tada prava $\{x + \alpha y \mid \alpha \in \Re\}$ pripada skupu C, za svako $x \in C$. Kako je linealni prostor zapravo presek dva konusa opadanja, on "nasleđuje" neke od njihovih osobina, dokazanih u prethodnom poglavlju.

Teorema 2.2.1. *Neka je C neprazan zatvoren konveksan podskup od $\Re^n$.*

(a) *Linealni prostor skupa C je potprostor od $\Re^n$.*

(b) *Linealni prostori skupa C i njegove relativne unutrašnjosti su jednaki:*

$$L_C = L_{ri(C)}.$$

(c) *Ako je D još jedan zatvoren konveksan skup takav da je $C \cap D \neq \emptyset$, tada važi da je*

$$L_{C \cap D} = L_C \cap L_D.$$

Opštije, za proizvoljnu familiju zatvorenih konveksnih skupova C_i, $i \in I$, gde je I proizvoljan skup indeksa i presek $\cap_{i \in I} C_i$ neprazan, važi

$$L_{\cap_{i \in I} C_i} = \cap_{i \in I} L_{C_i}.$$

(d) *Neka je W konveksan i kompaktan podskup od $\Re^m$ i neka je A matrica reda $m \times n$. Ako je skup $V = \{x \in C \mid Ax \in W\}$ neprazan, onda je on zatvoren, konveksan i njegov linealni prostor je $L_C \cap N(A)$, gde je $N(A)$ jezgro matrice A.*

Dokaz.

(a) Neka y_1 i y_2 pripadaju linealnom prostoru L_C i neka su α_1 i α_2 ne-nula skalari. Treba pokazati da $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in L_C$. Dakle,

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 &= |\alpha_1|(sgn(\alpha_1)y_1) + |\alpha_2|(sgn(\alpha_2)y_2) \\ &= (|\alpha_1| + |\alpha_2|)(\alpha\bar{y}_1 + (1-\alpha)\bar{y}_2), \end{aligned} \tag{2.1}$$

gde je

$$\alpha = \frac{|\alpha_1|}{|\alpha_1| + |\alpha_2|}, \quad \bar{y}_1 = sgn(\alpha_1)y_1, \ \bar{y}_2 = sgn(\alpha_2)y_2.$$

Primetimo da je L_C konveksan konus, jer je on presek konveksnih konusa R_C i $-R_C$. Dakle, pošto $\bar{y}_1$ i $\bar{y}_2$ pripadaju skupu L_C, sledi da bilo koja konveksna kombinacija pravaca $\bar{y}_1$ i $\bar{y}_2$ pomnožena pozitivnim skalarom pripada L_C. Sada na osnovu jednakosti (2.1) zaključujemo da $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in L_C$.

(b) Znamo da važi

$$L_{ri(C)} = R_{ri(C)} \cap (-R_{ri(C)}) = R_C \cap (-R_C) = L_C,$$

pri čemu druga jednakost sledi iz Teoreme 17 pod (d).

(c) Pokazaćemo odgovarajuću jednakost u opštem slučaju. Važi

$$\begin{aligned} L_{\cap_{i\in I} C_i} &= (R_{\cap_{i\in I} C_i}) \cap (-R_{\cap_{i\in I} C_i}) \\ &= (\cap_{i\in I} R_{C_i}) \cap (-\cap_{i\in I} R_{C_i}) \\ &= \cap_{i\in I}(R_{C_i} \cap (-R_{C_i})) \\ &= \cap_{i\in I} L_{C_i}, \end{aligned}$$

pri čemu druga jednakost sledi iz Teoreme 17 pod (e).

(d) Važi sledeće:

$$\begin{aligned} L_V &= R_V \cap (-R_V) \\ &= (R_C \cap N(A)) \cap (-R_C \cap N(A)) \\ &= (R_C \cap (-R_C)) \cap N(A) \\ &= L_C \cap N(A), \end{aligned}$$

pri čemu druga jednakost sledi iz Teoreme 18. □

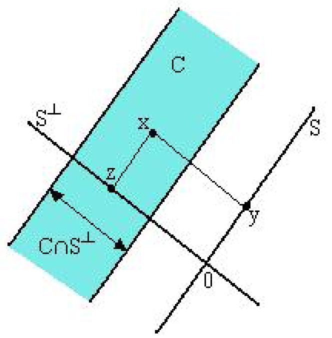
Dokazaćemo još jedno korisno tvrđenje, koje se odnosi na dekompoziciju konveksnog skupa s obzirom na njegov linealni prostor.

Teorema 2.2.2. (Dekompozicija konveksnog skupa) *Neka je C neprazan konveksan podskup od $\Re^n$. Tada za svaki potprostor S koji pripada linealnom prostoru L_C važi da je*

$$C = S + (C \cap S^{\perp}).$$

Dokaz. Prostor $\Re^n$ možemo rastaviti kao sumu podprostora S i njegovog komplementa $S^{\perp}$. Neka je $x \in C$ takvo da je $x = y + z$ za neke $y \in S$ i $z \in S^{\perp}$. Pošto $-y \in S$, a $S \subset L_C$, vektor $-y$ je pravac opadanja skupa C, pa vektor $x - y$, koji je jednak sa z, pripada skupu C. Stoga $z \in C \cap S^{\perp}$ i važi da je $x = y + z$, pri čemu $y \in S$ i $z \in C \cap S^{\perp}$. Dakle, $C \subset S + (C \cap S^{\perp})$.

Obrnuto, ako $x \in S + (C \cap S^{\perp})$, tada je $x = y + z$ pri čemu $y \in S$ i $z \in C \cap S^{\perp}$. Dakle, važi da $z \in C$. Pored toga, pošto je $S \subset L_C$ vektor y je pravac opadanja skupa C, što implicira da $y + z \in C$. Stoga $x \in C$, čime je pokazano da je $S + (C \cap S^{\perp}) \subset C$. □



Slika 2.3. Ilustracija dokaza Teoreme 20

2.3 Nepraznost preseka zatvorenih skupova

Kao što smo već ranije pomenuli, konus opadanja i linealni prostor se mogu iskoristiti za uopštavanje nekih osnovnih osobina kompaktnih skupova na zatvorene konveksne skupove. Jedna takva osobina je da je presek uređenog niza nepraznih kompaktnih skupova neprazan i kompaktan. Ova osobina ne važi za opšte zatvorene skupove ali, ispostaviće se da važi pod određenim pretpostavkama koje uključuju konveksnost i pravce opadanja. Upravo time ćemo se baviti u ovom poglavlju.

Teorema 2.3.1. *Neka je $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ niz nepraznih zatvorenih konveksnih podskupova od $\Re^n$ takvih da je $C_{k+1} \subset C_k$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$. Neka su R_k i L_k konus opadanja i linealni prostor skupa C_k, respektivno, i neka je*

$$R = \cap_{k=0}^{\infty} R_k, \quad L = \cap_{k=0}^{\infty} L_k.$$

Pretpostavimo da je $R = L$. Tada je presek $\cap_{k=0}^{\infty} C_k$ neprazan i ima oblik

$$\cap_{k=0}^{\infty} C_k = L + \tilde{C},$$

gde je $\tilde{C}$ neki neprazan i kompaktan skup.

Dokaz. Pošto su skupovi C_k uređeni, linealni prostori L_k su takođe uređeni (prema Teoremi 19 (c)). Kako je svaki L_k potprostor sledi da je, za svako k dovoljno veliko, $L_k = L$. Dakle, bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je

$$L_k = L, \quad \forall\, k \geq k_0.$$

Dokažimo kontradikcijom da je

$$R_k \cap L^{\perp} = \{0\},$$

za dovoljno veliko $k \in \mathbb{N}_0$. U suprotnom, a s obzirom da su R_k uređeni (Teorema 17 (e)), sledilo bi da za svako $k \in \mathbb{N}_0$ postoji $y_k \in R_k \cap L^{\perp}$, pri čemu se može izabrati $\|y_k\| = 1$. Niz skupova

$$\Big\{\{y \in \Re^n \mid \|y\| = 1\} \cap R_k \cap L^{\perp}\Big\}_k$$

je opadajući niz kompaktnih nepraznih skupova (svaki sledeći je sadržan u prethodnom) pa iz Kantorovog[2] principa sledi da je

$$\{y \in \Re^n \mid \|y\| = 1\} \cap \cap_{\infty}^{k=0} R_k \cap L^{\perp} \neq \emptyset.$$

S obzirom da je $\cap_{\infty}^{k=0} R_k = L$ i $L \cap L^{\perp} = \{0\}$, dobili smo kontradikciju. Dakle,

$$R_k \cap L^{\perp} = \{0\}, \quad \forall\, k \geq k_0.$$

Prema teoremi konusa opadanja, za svako $k \in \mathbb{N}_0$, konus opadanja skupa $C_k \cap L^{\perp}$ je dat sa

$$R_{C_k \cap L^{\perp}} = R_k \cap R_{L^{\perp}},$$

a kako važi da je $R_{L^{\perp}} = L^{\perp}$ i $R_k \cap L^{\perp} = \{0\}$, sledi da je

$$R_{C_k \cap L^{\perp}} = \{0\}, \quad \forall\, k \geq k_0.$$

Sada, iz Teoreme 17 (c) sledi da su skupovi $C_k \cap L^{\perp}$ kompaktni i uređeni, pa je njihov presek

$$\tilde{C} = \cap_{k=0}^{\infty} (C_k \cap L^{\perp}) \tag{2.2}$$

neprazan i kompaktan, odakle sledi da je presek $\cap_{k=0}^{\infty} C_k$ neprazan. Štaviše, pošto je L linealni prostor svih skupova C_k, on je takođe linealni prostor

[2] Georg Cantor (1845 - 1918)

preseka $\cap_{k=0}^{\infty} C_k$ (na osnovu Teoreme 19 pod (c)). Ako sada iskoristimo osobinu dekompozicije iz Teoreme 20, dobijamo da je

$$\cap_{k=0}^{\infty} C_k = L + (\cap_{k=0}^{\infty} C_k) \cap L^{\perp},$$

pa sad iz jednakosti (2.2) sledi da je $\cap_{k=0}^{\infty} C_k = L + \tilde{C}$, što je i trebalo pokazati. □

Teorema 2.3.2. *Neka je* $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ *niz zatvorenih konveksnih podskupova od* $\Re^n$ *i neka je* X *podskup od* $\Re^n$ *određen ograničenjima tipa linearne nejednakosti, tj.*

$$X = \{x \in \Re^n \mid a_j^T x \le b_j, \ j = 1, ..., r\}, \tag{2.3}$$

gde su $a_j \in \Re^n$, $b_j \in \Re$, $j = 1, ..., r$. *Pretpostavimo da važi:*

(a) $C_{k+1} \subset C_k$ *za sve* $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) *Presek* $X \cap C_k$ *je neprazan za sve* $k \in \mathbb{N}_0$.

(c) $R_X \cap R \subset L$, *gde je* R_X *konus opadanja skupa* X, $R = \cap_{k=0}^{\infty} R_k$, $L = \cap_{k=0}^{\infty} L_k$, *pri čemu* R_k *i* L_k *označavaju konus opadanja i linealni prostor skupa* C_k, *respektivno.*

Tada je presek $X \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$ *neprazan.*

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po dimenziji skupa X.

1) Pretpostavimo da je dimenzija skupa X jednaka 0. Tada se skup X sastoji od samo jedne tačke. Prema pretpostavci pod (b), ova tačka pripada preseku $X \cap C_k$ za svako $k \in \mathbb{N}_0$, pa onda pripada i preseku $X \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$.

2) Sada pretpostavljamo da je, za neko $l < n$, presek $\tilde{X} \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$ neprazan za svaki skup $\tilde{X}$ koji zadovoljava sledeće:

- Ima dimenziju manju ili jednaku sa l.
- Određen je ograničenjima tipa linearne nejednakosti.
- Presek $\tilde{X} \cap C_k$ je neprazan za sve $k \in \mathbb{N}_0$.
- Važi da je $R_{\tilde{X}} \cap R \subset L$.

Neka je skup X oblika (2.3) i neka zadovoljava sledeće:

- Presek $X \cap C_k$ je neprazan za sve $k \in \mathbb{N}_0$.
- Važi da je $R_X \cap R \subset L$.
- Njegova dimenzija je $l + 1$.

3) Pokazaćemo da je presek $X \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$ neprazan.

Ako je $L_X \cap L = R_X \cap R$, tada primenjujući Teoremu 21 na skupove $X \cap C_k$ dobijamo da je presek $X \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$ neprazan i time je dokaz završen. Zato sada pretpostavljamo da je $L_X \cap L \neq R_X \cap R$.

Kako uvek važi da je $L_X \cap L \subset R_X \cap R$, na osnovu pretpostavke da je $R_X \cap R \subset L$ sledi da postoji ne-nula pravac opadanja $\bar{y} \in R_X \cap R$ takav da $\bar{y} \notin L_X$, tj.

$$\bar{y} \in R_X, \quad -\bar{y} \notin R_X, \quad \bar{y} \in L.$$

Korišćenjem definicije pravca i konusa opadanja dobijamo da je konus opadanja skupa X oblika

$$R_X = \{y \in \Re^n \mid a_j^T y \leq 0, \ j = 1, ..., r\},$$

pa pošto $\bar{y} \in R_X$ sledi da je

$$a_j^T \bar{y} \leq 0, \quad \forall\ j = 1, ..., r,$$

a kako $-\bar{y} \notin R_X$ sledi da je skup indeksa

$$J = \{j \mid a_j^T \bar{y} < 0\}$$

neprazan.

Sada, na osnovu pretpostavke pod (b) možemo izabrati niz $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ takav da

$$x_k \in X \cap C_k, \quad \forall\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Tada važi da je

$$a_j^T x_k \leq b_j, \quad \forall\ j = 1, ..., r, \quad \forall\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Pretpostavimo da je

$$a_j^T x_k < b_j, \quad \forall\ j \in J, \quad \forall\ k \in \mathbb{N}_0;$$

inače bi mogli zameniti x_k sa $x_k + \bar{y}$, koji pripada preseku $X \cap C_k$ (jer $\bar{y} \in R_X$ i $\bar{y} \in L$). Pretpostavimo sada da, za svako $k \in \mathbb{N}_0$, krećemo od x_k i pomeramo se duž pravca $-\bar{y}$ koliko god je moguće, a da ne napustimo skup X, pa sve do tačke u kojoj se susrećemo sa vektorom

$$\bar{x}_k = x_k - \beta_k \bar{y},$$

gde je β_k pozitivan skalar dat sa

$$\beta_k = \min_{j \in J} \frac{a_j^T x_k - b_j}{a_j^T \bar{y}}.$$

Pošto je $a_j^T \bar{y} = 0$ za sve $j \notin J$, važi da je $a_j^T \bar{x}_k = a_j^T x_k$ za sve $j \notin J$, pa je broj linearnih nejednakosti skupa X koje $\bar{x}_k$ zadovoljava u vidu jednakosti strogo veći od broja onih koje zadovoljava x_k. Dakle, postoji $j_0 \in J$ takvo da je $a_{j_0}^T \bar{x}_k = b_{j_0}$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$. Menjanjem redosleda linearnih nejednakosti (ako je neophodno) možemo pretpostaviti da je $j_0 = 1$, tj. da je

$$a_1^T \bar{x}_k = b_1, \ \ a_1^T x_k < b_1, \ \ \forall\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Da bismo primenili indukcijsku hipotezu sada posmatramo skup

$$\tilde{X} = \{x \in \Re^n \mid a_1^T x = b_1, \ a_j^T x \leq b_j, \ j = 2, ..., r\}$$

i primećujemo da $\{\bar{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \tilde{X}$. Pošto je $\bar{x}_k = x_k - \beta_k \bar{y}$, pri čemu $x_k \in C_k$ i $\bar{y} \in L$, važi da $\bar{x}_k \in C_k$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$, što implicira da $\bar{x}_k \in \tilde{X} \cap C_k$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$. Dakle, $\tilde{X} \cap C_k \neq \emptyset$ za sve k. Kako su skupovi C_k uređeni sledi da su uređeni i skupovi $\tilde{X} \cap C_k$. Štaviše, konus opadanja skupa $\tilde{X}$ je

$$R_{\tilde{X}} = \{y \in \Re^n \mid a_1^T y = 0, \ a_j^T y \leq 0, \ j = 2, ..., r\},$$

i on pripada konusu opadanja R_X, pa važi da je

$$R_{\tilde{X}} \cap R \subset R_X \cap R \subset L.$$

Na kraju dokazujemo da je dimenzija skupa $\tilde{X}$ manja od dimenzije skupa X.

Koristićemo sledeću činjenicu:

Lema 2.3.1. *Svaki neprazan afin skup C je paralelan sa jedinstvenim potprostorom S, pri čemu je S dat sa*

$$S = C - C = \{x - y \mid x, y \in C\}.$$

Prvo primetimo da skup $\{x \in \Re^n \mid a_1^T x = b_1\}$ sadrži skup $\tilde{X}$, pa je a_1 ortogonalan vektor na potprostor $S_{\tilde{X}}$ koji je paralelan sa $aff(\tilde{X})$, odnosno potprostor $S_{\tilde{X}}$ se definiše kao

$$S_{\tilde{X}} = \{x - y \mid x, y \in aff(\tilde{X})\},$$

pa je

$$a_1^T(x - y) = a_1^T x - a_1^T y = b_1 - b_1 = 0,$$

jer je $aff(\tilde{X})$ najmanji afin skup koji sadrži $\tilde{X}$, pa važi

$$aff(\tilde{X}) \subset \{x \in \Re^n \mid a_1^T x = b_1\}.$$

Pošto je $a_1^T \bar{y} < 0$, sledi da $\bar{y} \notin S_{\tilde{X}}$. Pretpostavimo suprotno, tj neka $\bar{y} \in S_{\tilde{X}}$. Tada je $\bar{y} = x - y$, gde $x, y \in aff(\tilde{X})$, pa tada važi

$$a_1^T \bar{y} = a_1^T x - a_1^T y = b_1 - b_1 = 0,$$

što je kontradikcija sa $a_1^T \bar{y} < 0$. Sa druge strane, $\bar{y}$ pripada S_X, potprostoru koji je paralelan sa $aff(X)$, jer za sve $k \in \mathbb{N}_0$ važi da $x_k \in X$ i $x_k - \beta_k \bar{y} \in X$. Zaista, kako $x_k \in X$ i $x_k - \beta_k \bar{y} \in X$, sledi da

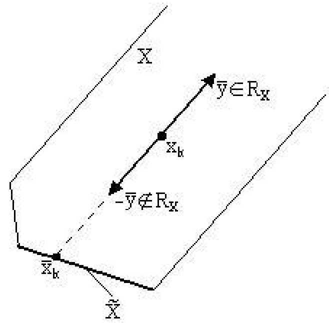
$$\alpha_1 x_k + \alpha_2 (x_k - \beta_k \bar{y}) = \alpha_1 x_k + \alpha_2 x_k - \alpha_2 \beta_k \bar{y} = (\alpha_1 + \alpha_2) x_k - \alpha_2 \beta_k \bar{y} = x_k - \alpha_2 \beta_k \bar{y}$$

pripada $aff(X)$, pri čemu je $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Potprostor S_X definiše se analogno kao i potprostor $S_{\tilde{X}}$, odnosno

$$S_X = \{x - y \mid x, y \in aff(X)\},$$

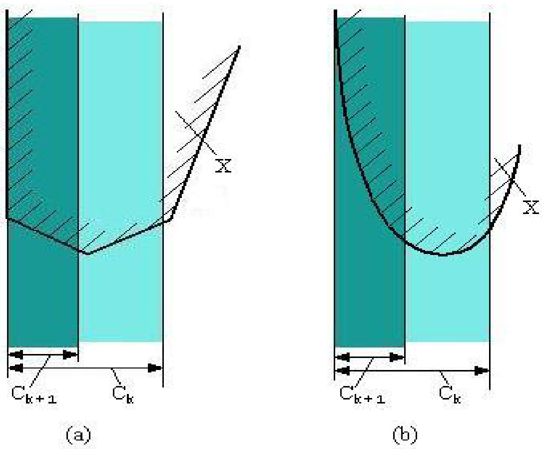
pa $x_k - x_k + \alpha_2 \beta_k \bar{y} \in S_X$. Sada za $\alpha_2 \beta_k = 1$ sledi da $\bar{y} \in S_X$.

Na osnovu svega prethodno rečenog možemo iskoristiti indukcijsku hipotezu, pa sledi da je presek $\tilde{X} \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$ neprazan. Pošto je $\tilde{X} \subset X$, sledi da je i presek $X \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$ takođe neprazan. $\square$



Slika 2.4. Konstrukcija korišćena u dokazu Teoreme 22

Naredna slika ilustruje probleme vezane za nepraznost preseka $X \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$ pod pretpostavkom da je $R_X \cap R \subset L$ (Teorema 22).



Slika 2.5.

Presek $\cap_{k=0}^{\infty} C_k$ je prikazan tamnije obojenom trakom. Na grafiku pod (a) X je određen linearnim ograničenjima i presek $X \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$ je neprazan, dok je na grafiku pod (b) X određen nelinearnim ograničenjima i presek $X \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$ je prazan.

Teorema 2.3.3. *Neka je $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ niz podskupova od $\Re^n$ datih sa*

$$C_k = \{x \in \Re^n \mid x^T Q x + a^T x + b \leq w_k\},$$

gde je Q simetrična pozitivno semidefinitna matrica reda $n \times n$, $a \in \Re^n$, $b \in \Re$, a $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ je nerastući niz skalara koji konvergira ka 0. Neka je $X \subseteq \Re^n$ dat sa

$$X = \{x \in \Re^n \mid x^T Q_j x + a_j^T x + b_j \leq 0,\ j = 1, ..., r\}, \tag{2.4}$$

gde je Q_j simetrična pozitivno semidefinitna matrica reda $n \times n$, $a_j \in \Re^n$, $b_j \in \Re$, $j = 1, ..., r$. Pretpostavimo još da je presek $X \cap C_k$ neprazan za sve k. Tada je presek $X \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$ neprazan.

Dokaz. Prvo primetimo da su X i svi skupovi C_k zatvoreni i da su, zbog pozitivne semidefinitnosti matrica Q i Q_j, takođe i konveksni (na osnovu Teoreme 7 pod (a)).

Dokažimo da svi skupovi C_k imaju isti konus opadanja R i isti linealni prostor L, koji su dati sa:

$$R = \{y \in \Re^n \mid Qy = 0,\ a^T y \leq 0\}, \quad L = \{y \in \Re^n \mid Qy = 0,\ a^T y = 0\}.$$

Znamo da je y pravac opadanja skupova C_k ako i samo ako $x + \alpha y \in C_k$ za sve $x \in C_k$ i $\alpha \geq 0$, ili ekvivalentno,

$$(x + \alpha y)^T Q (x + \alpha y) + a^T (x + \alpha y) + b \leq w_k,$$

odnosno

$$x^T Q x + a^T x + \alpha(2x^T Q y + a^T y) + \alpha^2 y^T Q y + b \leq w_k,\ \forall\ \alpha \geq 0,\ \forall\ x \in C_k.$$

Pošto je Q pozitivno semidefinitna matrica, iz ove relacije sledi da je $y^T Q y = 0$ i da y pripada jezgru matrice Q, pa takođe mora da važi da je $a^T y \leq 0$. Dakle, $y \in R$. Obrnuto, neka $y \in R$. Tada gornja relacija važi i pravac y pripada konusu opadanja skupova C_k.

Slično se pokazuje da je konus opadanja skupa X dat sa

$$R_X = \{y \in \Re^n \mid Q_j y = 0,\ a_j^T y \leq 0,\ j = 1, ..., r\}.$$

Tvrđenje dokazujemo indukcijom po broju kvadratnih funkcija koje definišu skup X i taj broj ćemo označiti sa r.

1) Za $r = 0$ važi da je $X \cap C_k = C_k$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$, a iz pretpostavke da je $X \cap C_k \neq \emptyset$ sledi da je $C_k \neq \emptyset$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$. Pored toga, pošto je $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$

nerastući niz, skupovi C_k su uređeni. Ako je $R = L$, na osnovu Teoreme 21 sledi da je presek $\cap_{k=0}^{\infty} C_k$ neprazan i time je dokaz završen. Zato sada pretpostavljamo da je $R \neq L$. Kako uvek važi da je $L \subset R$, postoji ne-nula vektor $\bar{y}$ takav da $\bar{y} \in R$, tj.

$$Q\bar{y} = 0, \quad a^T\bar{y} < 0.$$

Posmatrajmo sada tačku oblika $x + \alpha\bar{y}$ za neko $x \in \Re^n$ i $\alpha > 0$. Važi da je

$$(x + \alpha\bar{y})^T Q(x + \alpha\bar{y}) + a^T(x + \alpha\bar{y}) = x^T Qx + a^T x + \alpha a^T \bar{y}.$$

Pošto je $a^T\bar{y} < 0$, možemo izabrati $\alpha > 0$ tako da je

$$x^T Qx + a^T x + \alpha a^T \bar{y} + b < w_k,$$

a kako je $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ nerastući niz sledi da $x + \alpha\bar{y} \in \cap_{k=0}^{\infty} C_k$.

2) Pretpostavimo da je presek $\tilde{X} \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$ neprazan kada god je skup $\tilde{X}$ dat u obliku (2.4) sa najviše r konveksnih kvadratnih funkcija i takav da je presek $\tilde{X} \cap C_k$ neprazan za sve $k \in \mathbb{N}_0$.

3) Pretpostavimo sada da je skup X dat sa (2.4), ali sa $r + 1$ konveksnih kvadratnih funkcija. Ako je $R_X \cap R = L_X \cap L$, na osnovu Teoreme 21 sledi da je $X \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k) \neq \emptyset$ i time bi dokaz bio završen. Zato pretpostavljamo da postoji pravac $\bar{y}$ takav da $\bar{y} \in R_X \cap R$, ali $-\bar{y} \notin R_X \cap R$. Tada, za bilo koje $x \in X$, bilo koje $\bar{y} \in R_X \cap R$ i $\alpha > 0$, važi da

$$x + \alpha\bar{y} \in X,$$

$$(x + \alpha\bar{y})^T Q(x + \alpha\bar{y}) + a^T(x + \alpha\bar{y}) = x^T Qx + a^T x + \alpha a^T \bar{y}.$$

Ako $-\bar{y} \notin R$, tj. $a^T\bar{y} < 0$, tada za neko α dovoljno veliko važi da je

$$x^T Qx + a^T x + \alpha a^T \bar{y} + b \leq w_k,$$

što implicira da $x + \alpha\bar{y} \in \cap_{k=0}^{\infty} C_k$. Pošto $x + \alpha\bar{y} \in X$ za sve $\alpha > 0$, sledi da $x + \alpha\bar{y} \in X \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$. Dakle, ako $\bar{y} \in R_X \cap R$, ali $-\bar{y} \notin R$, tada je presek $X \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$ neprazan.

Pretpostavimo sada da $\bar{y} \in R_X \cap R$, ali $-\bar{y} \notin R_X$. Tada je $Q_j\bar{y} = 0$ i $a_j^T\bar{y} \leq 0$ za sve j, pri čemu je $a_j^T\bar{y} < 0$ za bar jedno j. Radi jednostavnosti, promenićemo redosled nejednakosti koje određuju skup X tako da je sada

$$Q_j\bar{y} = 0, \quad a_j^T\bar{y} = 0, \quad \forall\ j = 1, ..., \bar{r}, \tag{2.5}$$

$$Q_j\bar{y} = 0, \quad a_j^T\bar{y} < 0, \quad \forall\ j = \bar{r} + 1, ..., r + 1, \tag{2.6}$$

gde je $\bar{r}$ ceo broj za koji važi da je $0 \leq \bar{r} < r + 1$.

Posmatrajmo sada skup

$$\tilde{X} = \{x \in \Re^n \mid x^T Q_j x + a_j^T x + b_j \leq 0,\ j = 1, ..., \bar{r}\},$$

pri čemu je $\tilde{X} = \Re^n$ ako je $\bar{r} = 0$. Pošto je $X \subset \tilde{X}$ i $X \cap C_k \neq \emptyset$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$, skup $\tilde{X} \cap C_k$ je neprazan za sve $k \in \mathbb{N}_0$. Stoga, prema indukcijskoj hipotezi sledi:

$$\tilde{X} \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k) \neq \emptyset.$$

Neka $\bar{x} \in \tilde{X} \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$. Pošto $\bar{x} \in \cap_{k=0}^{\infty} C_k$ i $\bar{y} \in R$, sledi da za sve $\alpha \geq 0$,

$$\bar{x} + \alpha \bar{y} \in \cap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

Pored toga, pošto $\bar{x} \in \tilde{X}$, iz (2.5) sledi da je za sve $\alpha \geq 0$,

$$(\bar{x} + \alpha \bar{y})^T Q_j (\bar{x} + \alpha \bar{y}) + a_j^T (\bar{x} + \alpha \bar{y}) + b_j \leq 0, \;\; \forall\, j = 1, ..., \bar{r}.$$

Na kraju, s obzirom na (2.6), možemo izabrati dovoljno veliko $\bar{\alpha} > 0$ takvo da je

$$(\bar{x} + \bar{\alpha} \bar{y})^T Q_j (\bar{x} + \bar{\alpha} \bar{y}) + a_j^T (\bar{x} + \bar{\alpha} \bar{y}) + b_j \leq 0, \;\; \forall\, j = \bar{r} + 1, ..., r + 1.$$

Iz prethodne tri relacije sledi da $\bar{x} + \bar{\alpha} \bar{y} \in X \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$, čime je pokazano da je presek $X \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$ neprazan. □

2.4 Zatvorenost pod linearnim transformacijama

Još jedna osobina kompaktnih skupova koja se može uopštiti na zatvorene konveksne skupove jeste zatvorenost slike pod linearnom transformacijom. Uslove koje smo dobili u prethodnom poglavlju ćemo iskoristiti da bismo pokazali da zatvoreni konveksni skupovi imaju i to svojstvo.

Teorema 2.4.1. *Neka je C neprazan zatvoren konveksan podskup od $\Re^n$ i neka je A matrica reda $m \times n$ sa jezgrom $N(A)$.*

(a) *Ako je $R_C \cap N(A) \subset L_C$, tada je skup AC zatvoren.*

(b) *Neka je X neprazan podskup od $\Re^n$ određen ograničenjima tipa linearne nejednakosti, tj.*

$$X = \{x \in \Re^n \mid a_j^T x \leq b_j, \;\; j = 1, ..., r\},$$

pri čemu $a_j \in \Re^n$, $b_j \in \Re$, $j = 1, ..., r$. Ako važi:

$$R_X \cap R_C \cap N(A) \subset L_C,$$

onda je skup $A(X \cap C)$ zatvoren.

(c) *Neka je C određen konveksnim kvadratnim nejednakostima, tj.*

$$C = \{x \in \Re^n \mid x^T Q_j x + a_j^T x + b_j \leq 0, \;\; j = 1, ..., r\},$$

gde je Q_j simetrična pozitivno semidefinitna matrica reda $n \times n$, $a_j \in \Re^n$ i $b_j \in \Re$. Tada je skup AC zatvoren.

Dokaz.

(a) Neka je $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ niz tačaka iz skupa AC koji konvergira ka nekom $\bar{y} \in \Re^n$. Dokazaćemo da je AC zatvoren time što ćemo pokazati da $\bar{y} \in AC$. Uvodimo skupove

$$W_k = \{z \in \Re^m \mid \|z - \bar{y}\| \leq \|y_k - \bar{y}\|\}, \qquad C_k = \{x \in C \mid Ax \in W_k\}.$$

Da bismo pokazali da $\bar{y} \in AC$, dovoljno je da pokažemo da je presek $\cap_{k=0}^{\infty} C_k$ neprazan, pošto svako $\bar{x} \in \cap_{k=0}^{\infty} C_k$ zadovoljava da $\bar{x} \in C$ i da je $A\bar{x} = \bar{y}$ (jer $y_k \to \bar{y}$).

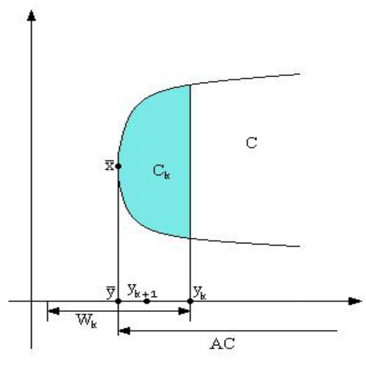
Svaki skup C_k je neprazan (jer $y_k \in AC$ i $y_k \in W_k$), pa je (na osnovu Teoreme 18) konveksan i zatvoren. Možemo pretpostaviti da su skupovi C_k uređeni. Može se pokazati da svi skupovi C_k imaju isti konus opadanja, koji ćemo označiti sa R, kao i isti linealni prostor, koji ćemo označiti sa L. Prema Teoremi 18 i Teoremi 19 pod (d), konus opadanja i linealni prostor skupova C_k su dati sa

$$R = R_C \cap N(A), \quad L = L_C \cap N(A). \tag{2.7}$$

Kako je $R_C \cap N(A) \subset L_C$, važi da je $R_C \cap N(A) \subset L_C \cap N(A)$, pa s obzirom na inkluziju $L_C \cap N(A) \subset R_C \cap N(A)$, koja uvek važi, sledi da je

$$R_C \cap N(A) = L_C \cap N(A).$$

Na osnovu ove jednakosti i (2.7) sledi da je $R = L$, pa je prema Teoremi 21 presek $\cap_{k=0}^{\infty} C_k$ neprazan. Dakle, $\bar{y} \in AC$.



Slika 2.6.

Na slici 2.6 prikazana je konstrukcija korišćena u dokazu pod (a), pri čemu je za linearnu transformaciju uzeta projekcija tačaka iz ravni na horizontalnu osu.

(b) Koristimo sličnu pretpostavku kao pod (a), osim što pretpostavljamo da je $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \subset A(X \cap C)$ i koristimo Teoremu 22 da pokažemo da je presek $X \cap (\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$ neprazan.

Neka su skupovi W_k i C_k definisani kao pod (a). Prema našem izboru niza $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ skupovi C_k su uređeni, pa je pretpostavka (a) Teoreme 22 zadovoljena. Pošto $y_k \in A(X\cap C)$ i $y_k \in W_k$, sledi da je $X\cap C_k$ neprazan za sve $k\in\mathbb{N}_0$. Time je pretpostavka (b) Teoreme 22 takođe zadovoljena. Kako je

$$R_X \cap R_C \cap N(A) \subset L_C,$$

važi

$$R_X \cap R_C \cap N(A) \subset L_C \cap N(A).$$

Na osnovu ove inkluzije i (2.7) sledi da je $R_X \cap R \subset L$, što implicira da je pretpostavka (c) Teoreme 22 zadovoljena. Sada, primenjujući Teoremu 22 na skupove $X\cap C_k$, zaključujemo da je presek $X\cap(\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$ neprazan. Svaka tačka ovog preseka je takva da $x\in X$ i $x\in C$, pri čemu je $Ax=\bar{y}$. Time je pokazano da $\bar{y}\in A(X\cap C)$.

(c) Slično kao pod (a), pretpostavljamo da je $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ niz iz AC koji konvergira ka nekom $\bar{y}\in\Re^n$. Pokazaćemo da $\bar{y}\in AC$. Neka je

$$C_k = \{x\in C \mid \|Ax-\bar{y}\|^2 \le \|y_k-\bar{y}\|^2\},$$

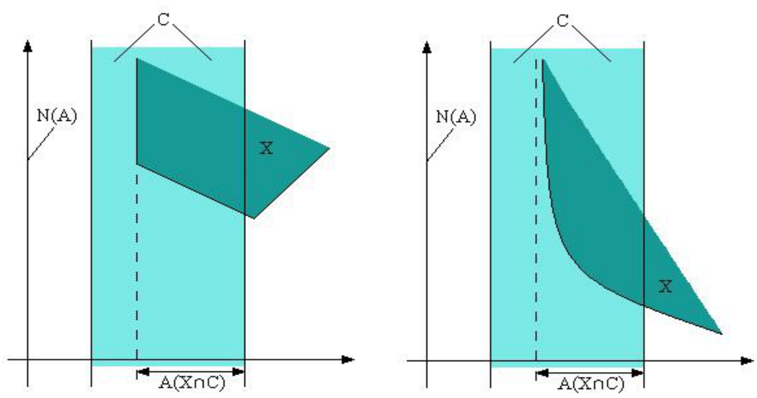
ili ekvivalentno,

$$C_k = \{x\in C \mid x^T A^T A x - 2(A^T\bar{y})^T x + \|\bar{y}\|^2 \le \|y_k-\bar{y}\|^2\}.$$

Dakle, C_k je istog oblika kao u Teoremi 23, pri čemu je

$$Q = A^T A, \quad a = -2A^T\bar{y}, \quad b = \|\bar{y}\|^2, \quad w_k = \|y_k-\bar{y}\|^2, \quad w_k \to 0.$$

Ako sada primenimo Teoremu 23, pri čemu uzmemo da je $X = C$, možemo zaključiti da je presek $X\cap(\cap_{k=0}^{\infty} C_k)$ neprazan. Za bilo koje x koje pripada ovom preseku važi da $x\in C$ i $Ax=\bar{y}$ (jer $y_k\to\bar{y}$), čime je pokazano da $\bar{y}\in AC$. Dakle, skup AC je zatvoren. $\square$



Slika 2.7.

Na slici 2.7 prikazana su dva različita slučaja - sa leve strane je ilustrovana situacija kada je skup X (iz prethodne teoreme pod (b)) zadat linearnim nejednakostima, dok je sa desne strane ilustrovana situacija kada skup X nije zadat linearnim nejednakostima. Za linearnu transformaciju A je u oba slučaja, kao i na slici 2.6, uzeta projekcija tačaka na horizontalnu osu. Vidimo da je skup $A(X \cap C)$ u situaciji sa leve strane zatvoren, a u situaciji sa desne strane nije zatvoren.

Teorema 2.4.2. *Neka su $C_1, ..., C_m$ neprazni zatvoreni konveksni podskupovi od $\Re^n$ i neka $y_i \in R_{C_i}$, $i = 1, ..., m$. Ako iz $y_1 + \cdots + y_m = 0$ sledi da je $y_i = 0$ za sve $i = 1, ..., m$, onda je vektorska suma $C_1 + \cdots + C_m$ zatvoren skup.*

Dokaz. Neka je C Dekartov proizvod $C_1 \times \cdots \times C_m$, koji posmatramo kao podskup od $\Re^{mn}$ i neka je A linearna transformacija koja pretvara vektor $(x_1, ..., x_m) \in \Re^{mn}$ u $x_1 + \cdots + x_m$. Tada se može pokazati da je skup C zatvoren i konveksan i tada važi:

$$R_C = R_{C_1} \times \cdots \times R_{C_m}, \quad N(A) = \{(y_1, ..., y_m) \mid y_1 + \cdots + y_m = 0, \ y_i \in \Re^n\},$$

pa pod datim uslovima dobijamo da je $R_C \cap N(A) = \{0\}$. Pošto je $AC = C_1 + \cdots + C_m$, tvrđenje sledi iz Teoreme 24 pod (a). □

Da bismo utvrdili potrebu za pretpostavkama prethodne teoreme, navodimo sada jedan jednostavan primer. On predstavlja specijalan slučaj, kada posmatramo samo dva zatvorena konveksna skupa.

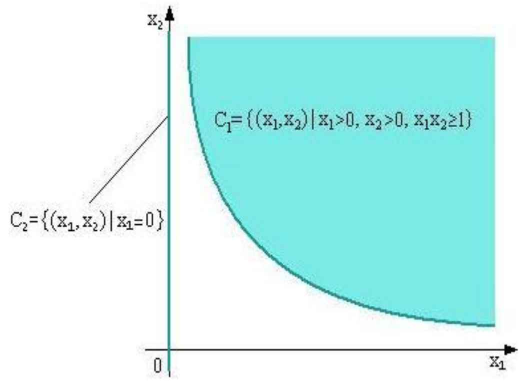
Primer 4. *Neka su dati zatvoreni konveksni skupovi C_1 i C_2:*

$$C_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0, \ x_2 > 0, \ x_1 x_2 \geq 1\}, \quad C_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0\}.$$

Skup $C_1 + C_2$ je tada otovoreni poluprostor

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0\}.$$

Možemo primetiti da skup C_1 ima ne-nula pravac opadanja koji je suprotan pravcu opadanja skupa C_2. Ilustracija ovog primera data je na slici 2.8.



Slika 2.8.

Glava 3

Konveksnost i optimizacija

U čovekovoj je prirodi da uvek teži boljem i kada se nađe u situaciji da bira između nekoliko alternativa, tražiće onu najbolju - *optimalnu*. Da bi je izabrao mora prethodno da odredi najmanje ili najveće značenje te veličine, tj. da odredi minimum ili maksimum. Jednom rečju treba da reši problem ekstrema. Ovakvim problemima se bavi teorija optimizacije. Već smo pomenuli da je pojam konveksnosti veoma značajan za optimizaciju. Sve što je rečeno i dokazano u prethodne dve glave sada će nam poslužiti da rešimo jedan od osnovnih problema u ovoj teoriji - postojanje optimalnog rešenja. Kroz ovu glavu ćemo pokazati na koji način se teorija konusa opadanja razvijena u drugoj glavi primenjuje pri analiziranju egzistencije optimalnog rešenja zadatog konveksnog problema. U ovoj glavi je korišćena literatura [1], [5], [6] i [19].

3.1 Globalni i lokalni minimum

Grubo govoreći, problem optimizacije zapravo podrazumeva minimizaciju, odnosno maksimizaciju, neke funkcije na zadatom skupu. Ukoliko je taj skup čitav prostor $\Re^n$, tada je reč o optimizaciji bez ograničenja. Međutim, u praksi se retko nailazi na probleme bez ograničenja. Posmatrajmo na primer, jedno proizvodno preduzeće. Logično je da ono želi da maksimizira svoj prihod, ali u toku poslovanja ono nailazi na razne vrste troškova - troškove radne snage, troškove nabavke sirovina, troškove skladištenja, amortizacione troškove i slično. Dakle, kada želimo da rešimo problem maksimizacije prihoda nekog proizvodnog preduzeća moramo pri tom da uzmemo u obzir i sve troškove koje preduzeće ima, odnosno moramo da uzmemo u obzir odgovarajuća ograničenja.

Definicija 3.1.1. *Neka je dat skup $X \subset \Re^n$ i neka $f : \Re^n \to (-\infty, \infty]$. Vektor $x^* \in X$ koji zadovoljava*

$$f(x^*) = \inf_{x \in X} f(x)$$

naziva se **minimum** *funkcije f na skupu X. Vektor x^* takođe se naziva minimizirajuća tačka ili minimizator funkcije f na skupu X. U slučaju kada je skup $X = \Re^n$ ili kada je domen funkcije upravo skup X, vektor x^* se naziva* **globalni minimum**.

Na analogan način definišemo (globalni) maksimum funkcije na zadatom skupu. Osnovno pitanje vezano za probleme optimizacije jeste da li optimalno rešenje postoji, odnosno da li postoji minimum (maksimum) posmatranog problema. Iz definicije globalnog minimuma funkcije možemo zaključiti da je skup minimuma posmatrane funkcije na zadatom skupu jednak preseku tog skupa i nepraznih Lebegovih skupova date funkcije. Ako iskoristimo ovu činjenicu, možemo dokazati da je skup minimuma neprazan ukoliko su skupovi oblika $\{x \in X \mid f(x) \leq \gamma\}$, pri čemu je γ proizvoljan skalar, zatvoreni i ako je bar jedan od njih neprazan i kompaktan. Ovo čini suštinu klasične teoreme Vajerštrasa[1]. U ovom radu ćemo navesti uopštenu verziju ove teoreme, ali da bismo to učinili moramo se upoznati sa pojmom prinudne funkcije.

Definicija 3.1.2. *Funkcija $f : \Re^n \to (-\infty, \infty]$ je* **prinudna nad skupom** *X koji je podskup od $\Re^n$ ako za svaki niz $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, takav da $\|x_k\| \to \infty$, važi da je $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \infty$. U slučaju kada je $X = \Re^n$ kažemo da je f* **prinudna**.

Teorema 3.1.1. (Vajerštrasova teorema) *Posmatramo zatvorenu pravu funkciju $f : \Re^n \to (-\infty, \infty]$ i pretpostavljamo da važi jedan od sledeća tri uslova:*

(a) *$dom(f)$ je ograničen.*

(b) *Postoji skalar γ takav da je Lebegov skup $\{x \in \Re^n \mid f(x) \leq \gamma\}$ neprazan i ograničen.*

(c) *f je prinudna.*

Tada je skup minimuma funkcije f na $\Re^n$, označen sa X^*, neprazan i kompaktan.

Dokaz. Pretpostavimo da važi uslov (a). Pošto je f prava funkcija $dom(f)$ je neprazan. Posmatrajmo niz $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset dom(f)$ takav da je

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{x\in\Re^n} f(x).$$

Kako je $dom(f)$ ograničen, ovaj niz ima bar jednu tačku nagomilavanja x^*. Iz zatvorenosti funkcije f sledi da je ona poluneprekidna sa donje strane na $\Re^n$, pa samim tim i u tački x^* (na osnovu Teoreme 3), pa je

$$f(x^*) \leq \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{x\in\Re^n} f(x)$$

[1]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)

i x^* je minimum funkcije f. Odavde sledi da je skup minimuma funkcije f na skupu $\Re^n$, označen sa X^*, neprazan. Kako važi da je $X^* \subset dom(f)$, a $dom(f)$ je ograničen, sledi da je X^* ograničen. Takođe, važi da je X^* presek svih Lebegovih skupova funkcije f, $\{x \in \Re^n \mid f(x) \leq \gamma\}$, gde je $\gamma > \inf_{x \in \Re^n} f(x)$. Ovi Lebegovi skupovi su zatvoreni jer je f zatvorena (prema Teoremi 3), pa je X^* zatvoren i stoga, kompaktan skup.

Pretpostavimo sada da važi uslov (b) i zamenimo funkciju f sa funkcijom

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ako je } f(x) \leq \gamma, \\ \infty & \text{inače.} \end{cases}$$

Domen funkcije $\tilde{f}$ je skup $\{x \in \Re^n \mid f(x) \leq \gamma\}$, koji je na osnovu pretpostavke ograničen i na osnovu zatvorenosti funkcije f zatvoren. Prema Teoremi 4, iz zatvorenosti funkcije f sledi da je i funkcija $\tilde{f}$ zatvorena. Štaviše, skup minimuma funkcije $\tilde{f}$ jednak je skupu minimuma funkcije f. Dakle, sve što je pokazano da važi pod uslovom (a) važi i sada.

Sada pretpostavimo da važi uslov (c). Pošto je f prava funkcija, ona ima neprazne Lebegove skupove. Pokazaćemo da su oni ograničeni. Pretpostavimo suprotno, odnosno neka postoji niz $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$,

$$z_k \in \{x \in \Re^n \mid f(x) \leq \gamma\}, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

za koji važi $\lim_{k \to \infty} \|z_k\| = \infty$. S obzirom da je f prinudna, tada je i $\lim_{k \to \infty} f(z_k) = \infty$, pa sledi da, za dovoljno veliko $k \in \mathbb{N}$, z_k ne pripada Lebegovom skupu funkcije f, što je kontradikcija. Dakle, zadovoljen je uslov (b), pa sada sledi tvrđenje. $\square$

Prethodnu teoremu lako možemo preformulisati u slučaju kada želimo da rešimo problem maksimizacije. Ako je data realna funkcija, poluneprekidna sa gornje strane u svim tačkama zadatog kompaktnog skupa, tada je skup maksimuma posmatrane funkcije na datom skupu neprazan i kompaktan.

Kada želimo dobijene rezultate da primenimo u praksi, uglavnom smo zainteresovani za globalni minimum. Ipak, često se pri rešavanju problema optimizacije susrećemo sa slabijim oblikom ekstrema, koji je optimalan samo kada se uporedi sa tačkama koje su "u blizini".

Definicija 3.1.3. *Neka je dat skup $X \subset \Re^n$ i neka je data funkcija $f : \Re^n \to (-\infty, \infty]$. Kažemo da je vektor $x^* \in X$* **lokalni minimum** *funkcije f na skupu X ako postoji neko $\varepsilon > 0$ takvo da važi $f(x^*) \leq f(x)$, za sve $x \in X$, pri čemu je $\|x - x^*\| \leq \varepsilon$.*

U slučaju kada je skup $X = \Re^n$ ili kada je domen funkcije f upravo skup X, tada x^* zovemo *lokalni minimum funkcije f* (bez kvalifikatora "na X"). Za lokalni minimum x^* kaže se da je *strogi* ako ne postoji drugi lokalni minimum unutar okoline od x^*. Lokalni maksimum se definiše analogno.

Postoje slučajevi u kojima moramo da se zadovoljimo sa lokalnim minimumom, jer mnogi uslovi optimalnosti i algoritmi ne mogu da naprave razliku između lokalnog i globalnog minimuma. To je glavna poteškoća pri rešavanju konkretnih problema optimizacije u praksi. Međutim, ovaj rad se bavi konveksnim funkcijama i konveksnim skupovima, a za njih važi sledeće: svi lokalni minimumi konveksne funkcije nad konveksnim skupom su takođe i globalni minimumi. Ova tvrdnja je formalno zapisana u sledećoj teoremi i ilustrovana na slici 3.1.

Teorema 3.1.2. *Neka je dat konveksan skup $X \subset \Re^n$ i neka je data prava konveksna funkcija $f : \Re^n \to (-\infty, \infty]$. Tada je lokalni minimum funkcije f na skupu X takođe i globalni minimum. Ako je funkcija f još i strogo konveksna, tada postoji najviše jedan globalni minimum funkcije f na skupu X.*

Dokaz. Neka je f konveksna funkcija. Pretpostavimo suprotno, neka je x^* lokalni minimum funkcije f na skupu X koji nije globalni. Tada mora da postoji neko $\bar{x} \in X$ takvo da je $f(\bar{x}) < f(x^*)$. Iz konveksnosti funkcije f sledi da je, za svako $\alpha \in (0, 1)$,

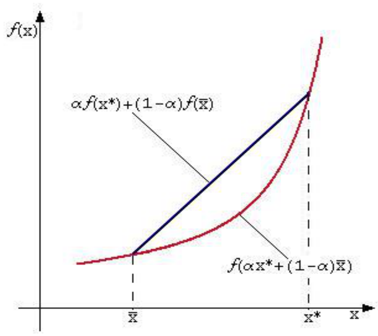
$$f(\alpha x^* + (1-\alpha)\bar{x}) \leq \alpha f(x^*) + (1-\alpha) f(\bar{x}) < f(x^*).$$

Dakle, f ima strogo manju vrednost od $f(x^*)$ u svakoj tački linijskog segmenta koji povezuje x^* sa $\bar{x}$, ali ne sadrži x^*. Kako je X konveksan, linijski segment pripada skupu X, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je x^* lokalni minimum. Dakle, sledi tvrđenje.

Neka je sada f strogo konveksna. Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoje dva različita globalna minimuma funkcije f na skupu X, označena sa x i y. Tada središnja tačka $(x+y)/2$ mora da pripada skupu X jer je on konveksan. Štaviše, zbog stroge konveksnosti funkcije f mora da važi:

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) < \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y),$$

pa je vrednost funkcije f manja u središnjoj tački nego u tačkama x i y. Pošto su x i y globalni minimumi, dobijamo kontradikciju. Dakle, sledi tvrđenje. □



Slika 3.1.

3.2 Pravci opadanja i egzistencija rešenja

Na početku ove glave smo pomenuli da se pitanje egzistencije optimalnih rešenja problema konveksne optimizacije može analizirati korišćenjem teorije konusa opadanja. Sada ćemo to detaljnije objasniti. Ključna činjenica je da se konveksna funkcija može opisati pomoću svog nadgrafa, koji je konveksan skup. Takođe, konus opadanja nadgrafa se može iskoristiti za dobijanje pravaca duž kojih funkcija monotono opada.

Teorema 3.2.1. *Neka je $f : \Re^n \to (-\infty, \infty]$ zatvorena prava konveksna funkcija i neka su Lebegovi skupovi funkcije f dati sa*

$$V_\gamma = \{x \in \Re^n \mid f(x) \leq \gamma\},$$

gde je γ skalar. Tada važi:

(a) *Svi neprazni Lebegovi skupovi V_γ imaju isti konus opadanja dat sa*

$$R_{V_\gamma} = \{y \in \Re^n \mid (y, 0) \in R_{epi(f)}\},$$

gde je $R_{epi(f)}$ konus opadanja nadgrafa funkcije f.

(b) *Ako je jedan neprazan Lebegov skup V_γ kompaktan, tada su svi Lebegovi skupovi V_γ kompaktni.*

Dokaz.

(a) Neka je γ fiksirano tako da skup V_γ nije prazan. Neka je y vektor koji pripada konusu opadanja R_{V_γ}. Tada je $f(x + \alpha y) \leq \gamma$ za sve $x \in V_\gamma$ i $\alpha \geq 0$, odakle $(x + \alpha y, \gamma) \in epi(f)$ za sve $\alpha \geq 0$. Na osnovu Teoreme 17 pod (b) (koju možemo da primenimo jer je funkcija f zatvorena) sledi da $(y, 0) \in R_{epi(f)}$ i da je

$$R_{V_\gamma} \subset \{y \in \Re^n \mid (y, 0) \in R_{epi(f)}\}.$$

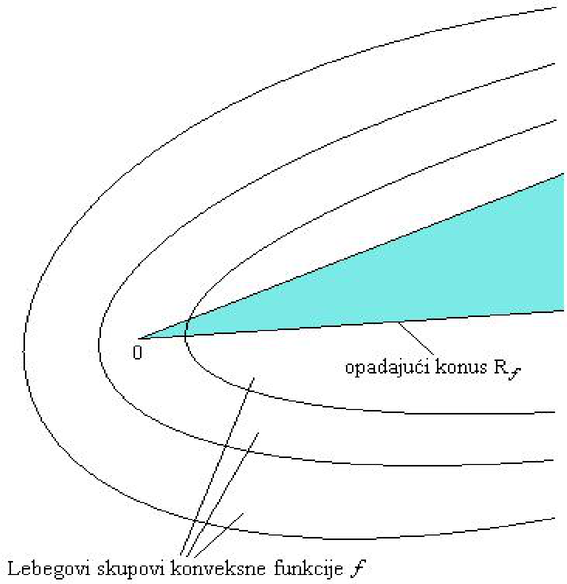
Pretpostavimo sada da $(y, 0) \in R_{epi(f)}$ i izaberimo vektor $(x, \gamma) \in epi(f)$ (takav vektor postoji jer je V_γ neprazan). Tada važi da $(x + \alpha y, \gamma) \in epi(f)$ za sve $\alpha \geq 0$, pa je $f(x + \alpha y) \leq \gamma$ i $x + \alpha y \in V_\gamma$ za sve $\alpha \geq 0$. Na osnovu Teoreme 17 pod (b), koju možemo primeniti jer je V_γ zatvoren skup (zbog zatvorenosti funkcije f), sledi da $y \in R_{V_\gamma}$. Dakle,

$$R_{V_\gamma} \supset \{y \in \Re^n \mid (y, 0) \in R_{epi(f)}\}.$$

Dakle, zaključujemo da je $R_{V_\gamma} = \{y \in \Re^n \mid (y, 0) \in R_{epi(f)}\}$.

(b) Prema Teoremi 17 pod (c), neprazan Lebegov skup V_γ je kompaktan ako i samo ako konus opadanja R_{V_γ} ne sadrži ne-nula pravce. Na osnovu dokaza pod (a) vidimo da svi neprazni Lebegovi skupovi V_γ imaju isti konus opadanja, pa ako je jedan od njih kompaktan, sledi da su svi kompaktni. □

Definicija 3.2.1. *Neka je data zatvorena prava konveksna funkcija* $f : \Re^n \to (-\infty, \infty]$. *Tada se (zajednički) konus opadanja njenih nepraznih Lebegovih skupova naziva* **konus opadanja funkcije** f *i označava se sa* R_f. *Elementi skupa* R_f *se nazivaju* **pravci opadanja funkcije** f.



Slika 3.2. Ilustracija konusa opadanja R_f prave zatvorene konveksne funkcije f

Uslov da funkcija f bude zatvorena je neophodan (pri definisanju konusa opadanja date funkcije, kao i u prethodnoj teoremi) da bi Lebegovi skupovi posmatrane funkcije imali zajednički konus opadanja. Da bismo ovo proverili, posmatrajmo sledeći primer.

Primer 5. *Neka je* $f : \Re^2 \to (-\infty, \infty]$ *konveksna, ali ne i zatvorena funkcija data sa*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} -x_1 & \text{ako je } x_1 > 0,\ x_2 \geq 0, \\ x_2 & \text{ako je } x_1 = 0,\ x_2 \geq 0, \\ \infty & \text{ako je } x_1 < 0 \text{ ili } x_2 < 0. \end{cases}$$

Za $\gamma < 0$ *važi*

$$V_\gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq -\gamma,\ x_2 \geq 0\},$$

pa vidimo da $(0, 1) \in R_{V_\gamma}$. *Međutim, važi i*

$$V_0 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0,\ x_2 \geq 0\} \cup \{(0, 0)\},$$

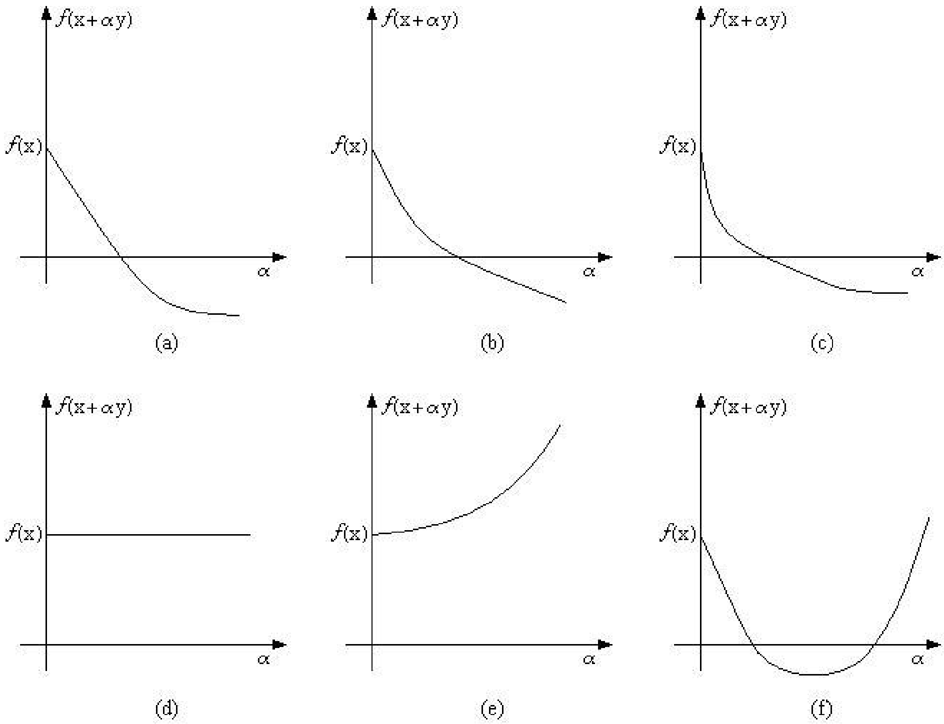
pa zaključujemo da $(0, 1) \notin R_{V_0}$.

3.2.1 Egzistencija rešenja konveksnih problema

U ovom odeljku ćemo obrazložiti kako se pravci opadanja mogu iskoristiti pri utvrđivanju postojanja optimalnih rešenja konveksnih problema, pri čemu ćemo posmatrati specijalan slučaj kada je skup optimalnih rešenja ograničen. Analogno intuitivnom shvatanju pojma pravca opadanja skupa, pravac opadanja funkcije možemo shvatiti na ovaj način: ako se krećemo, počev od proizvoljnog vektora $x \in \Re^n$, beskonačno duž pravca y, ostaćemo unutar svakog Lebegovog skupa koji sadrži x, odnosno "susretaćemo" isključivo tačke z za koje važi

$$f(z) \leq f(x).$$

Sada nas zanima kako se ponaša zatvorena prava konveksna funkcija ako se krećemo duž proizvoljnog pravca opadanja. Njeno ponašanje je ilustrovano na slici 3.3.



Slika 3.3.

Sa slike zaključujemo sledeće:

- *ako je y pravac opadanja funkcije f*, tada postoje dve mogućnosti:
  - funkcija f monotono opada ka konačnim vrednostima ili ka $-\infty$ (slike (a) i (b), respektivno),

  – funkcija f dostiže vrednost koja je manja ili jednaka sa $f(x)$ i ostaje u toj vrednosti (slike (c) i (d), respektivno).

- *ako y nije pravac opadanja funkcije f*, tada funkcija f vremenom monotono raste ka ∞ (slike (e) i (f)).

Teorema 3.2.2. *Neka je dat zatvoren konveksan skup $X \subset \Re^n$ i neka je data zatvorena konveksna funkcija $f : \Re^n \to (-\infty, \infty]$ takva da je $X \cap dom(f) \neq \emptyset$. Skup tačaka koje minimiziraju funkciju f na skupu X je neprazan i kompaktan ako i samo ako X i f nemaju zajednički ne-nula pravac opadanja.*

Dokaz. Neka je sa X^* označen skup tačaka koje minimiziraju funkciju f na skupu X. Prvo ćemo dokazati tvrđenje u specijalnom slučaju, kada je $X = \Re^n$, pa ćemo taj dokaz iskoristiti da bi pokazali da tvrđenje važi i u opštem slučaju, kada je $X \neq \Re^n$.

Neka je $X = \Re^n$. Treba da pokažemo da je X^* neprazan i kompaktan ako i samo ako f nema ne-nula pravac opadanja. Zaista, ako pretpostavimo da je X^* neprazan i kompaktan, tada je

$$X^* = \{x \in \Re^n \mid f(x) \leq \inf_{x \in \Re^n} f(x)\},$$

pa se konusi opadanja skupa X^* i funkcije f podudaraju i sastoje se samo od nula vektora, jer je X^* kompaktan (prema Teoremi 17 pod (c)). Obrnuto, ako f nema ne-nula pravce opadanja, svi njeni neprazni Lebegovi skupovi $\{x \in \Re^n \mid f(x) \leq \gamma\}$ su kompaktni, pa je X^* neprazan i kompaktan na osnovu Vajerštrasove teoreme.

Posmatrajmo sada opšti slučaj, kada je $X \neq \Re^n$. Uvodimo funkciju $\tilde{f} : \Re^n \to (-\infty, \infty]$ koja je definisana sa

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ako } x \in X, \\ \infty & \text{inače.} \end{cases}$$

Ova funkcija je zatvorena, konveksna i prava, jer je njen domen $X \cap dom(f)$ prema pretpostavci neprazan. Štaviše, skup tačaka koje minimiziraju funkciju $\tilde{f}$ na skupu $\Re^n$ je skup X^*. Iz dokaza specijalnog slučaja, kada je $X = \Re^n$, sledi da je X^* neprazan i kompaktan ako i samo ako $\tilde{f}$ nema ne-nula pravce opadanja. Poslednji iskaz je ekvivalentan sa tim da skup X i funkcija f nemaju zajednički ne-nula pravac opadanja, jer za bilo koji skalar γ važi

$$\{x \in \Re^n \mid \tilde{f}(x) \leq \gamma\} = X \cap \{x \in \Re^n \mid f(x) \leq \gamma\},$$

pa su konusi opadanja funkcije $\tilde{f}$, skupa X i funkcije f povezani na sledeći način:

$$R_{\tilde{f}} = R_X \cap R_f$$

(na osnovu Teoreme 17 pod (e) i Teoreme 28 pod (a), koje možemo da primenimo jer je X zatvoren i konveksan, a f i $\tilde{f}$ su zatvorene prave i konveksne funkcije). $\square$

Zaključak: ako zatvoren konveksan skup X i zatvorena prava konveksna funkcija f iz prethodne teoreme imaju zajednički pravac opadanja, tada je ili skup optimalnih rešenja prazan ili je neprazan i neograničen.

3.2.2 Neograničeni skupovi optimalnih rešenja

Do sada smo se pri analizi egzistencije optimalnih rešenja problema konveksne optimizacije trudili da izvedemo uslove pod kojima je skup optimalnih rešenja ne samo neprazan, nego i kompaktan. U ovom poglavlju ćemo pretpostaviti da taj skup može biti neograničen. Dakle, i dalje ćemo posmatrati minimizaciju zatvorene prave konveksne funkcije na zatvorenom konveksnom skupu, ali je osnovna ideja našeg novog pristupa da pitanje egzistencije optimalnog rešenja suzimo na pitanje o nepraznosti preseka zatvorenih skupova (kojim smo se bavili u poglavlju 2.3).

Iz druge glave znamo šta je linealni prostor proizvoljnog zatvorenog konveksnog skupa. Na analogan način se definiše linealni prostor konusa opadanja date funkcije.

Definicija 3.2.2. *Skup svih vektora $y \in \Re^n$ takvih da su y i $-y$ pravci opadanja funkcije f, tj. skup*

$$L_f = R_f \cap (-R_f),$$

naziva se **linealni prostor konusa opadanja R_f funkcije f.**

Drugim rečima, $y \in L_f$ ako i samo ako su y i $-y$ pravci opadanja svakog nepraznog Lebegovog skupa funkcije f. Pošto u ovom radu posmatramo isključivo konveksne funkcije, možemo da zaključimo da $y \in L_f$ ako i samo ako je $f(x + \alpha y) = f(x)$, za svako $x \in dom(f)$ i za svako $\alpha \in \Re$. Iz tog razloga, proizvoljno $y \in L_f$ se naziva *pravac u kojem je funkcija f konstantna*, a L_f se još naziva i *stalni prostor funkcije f*. Da bi pojam stalnog prostora funkcije bio jasniji, sada navodimo jedan jednostavan primer.

Primer 6. *Neka je f linearna funkcija data sa*

$$f(x) = c^T x,$$

gde $c \in \Re^n$. Tada su njen konus opadanja i stalni prostor dati sa:

$$R_f = \{y \in \Re^n \mid c^T y \le 0\}, \quad L_f = \{y \in \Re^n \mid c^T y = 0\}.$$

Neka je sada f kvadratna funkcija data sa

$$f(x) = x^T Q x + c^T x + b,$$

gde je Q simetrična pozitivno semidefinitna matrica reda $n \times n$, c vektor iz $\Re^n$ i b skalar. Tada su konus opadanja i stalni prostor funkcije f dati sa:

$$R_f = \{y \in \Re^n \mid Qy = 0,\ c^T y \le 0\}, \quad L_f = \{y \in \Re^n \mid Qy = 0,\ c^T y = 0\}.$$

Sada navodimo teoremu koja obezbeđuje različite uslove pod kojima je skup minimuma zatvorene konveksne funkcije na zatvorenom konveksnom skupu neprazan, ali pri tom može biti neograničen. Dokaz ove teoreme je direktna primena teorema $21 - 23$, koje obezbeđuju uslove na osnovu kojih je presek zatvorenih skupova neprazan.

Teorema 3.2.3. *Neka je X zatvoren konveksan podskup skupa $\Re^n$, neka je $f : \Re^n \to (-\infty, \infty]$ zatvorena konveksna funkcija takva da je $X \cap dom(f) \neq \emptyset$ i neka je $f^* = \inf_{x \in X} f(x)$. Skup minimizirajućih vektora funkcije f na skupu X je neprazan ako važi neki od sledećih uslova:*

(a) $R_X \cap R_f = L_X \cap L_f$.

(b) $R_X \cap R_f \subset L_f$ *i skup X je određen ograničenjima tipa linearne nejednakosti, tj.*

$$X = \{x \in \Re^n \mid a_j^T x \leq b_j,\ j = 1, ..., r\},$$

pri čemu su $a_j \in \Re^n$ i $b_j \in \Re$.

(c) $f^* > -\infty$, *funkcija f je oblika $f(x) = x^T Q x + c^T x$, a skup X je oblika*

$$X = \{x \in \Re^n \mid x^T Q_j x + a_j^T x + b_j \leq 0,\ j = 1, ..., r\},$$

pri čemu su Q i Q_j simetrične pozitivno semidefinitne matrice reda $n \times n$, $c, a_j \in \Re^n$ i $b_j \in \Re$.

Pod uslovom (a) skup minimizirajućih vektora je oblika

$$\tilde{X} + (L_X \cap L_f),$$

gde je $\tilde{X}$ neki neprazan i kompaktan skup.

Dokaz. Biramo niz skalara $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ takav da $\gamma_k \to f^*$ i posmatramo (neprazne) Lebegove skupove funkcije f:

$$V_k = \{x \in \Re^n \mid f(x) \leq \gamma_k\}.$$

Tada je skup minimizatora funkcije f na skupu X jednak sa

$$\cap_{k=1}^{\infty} (X \cap V_k).$$

Neka važi uslov (a). Skupovi $X \cap V_k$ su neprazni, zatvoreni, konveksni i uređeni. Štaviše, imaju isti konus opadanja, $R_X \cap R_f$, i isti linealni prostor, $L_X \cap L_f$. Dakle, zadovoljene su pretpostavke Teoreme 21 pa sledi da je X^* neprazan i da je oblika

$$X^* = \tilde{X} + (L_X \cap L_f),$$

gde je $\tilde{X}$ neki neprazan kompaktan skup.

Neka sada važi uslov (b). Skupovi V_k su uređeni, a presek $X \cap V_k$ je neprazan za sve k. Štaviše, skupovi V_k imaju isti konus opadanja, R_f, i isti linealni prostor, L_f. Dakle, zadovoljene su pretpostavke Teoreme 22, pa sledi da je X^* neprazan skup.

Na kraju, pretpostavimo da važi uslov (c). Skupovi V_k su dati sa:

$$V_k = \{x \in \Re^n \mid x^T Q x + c^T x \leq \gamma_k\},$$

pri čemu γ_k konvergira ka skalaru f^*. Štaviše, skup X je određen konveksnim kvadratnim nejednakostima i presek $X \cap V_k$ je neprazan za svako k. Na osnovu Teoreme 23 sledi da je X^* neprazan skup. □

Još ćemo malo diskutovati o prethodnoj teoremi, tačnije o tvrđenju datom pod (b). Uslov da skup X bude određen linearnim ograničenjima je neophodan da bi optimalno rešenje postojalo. Da bi to bilo jasnije, pogledajmo sledeći primer.

Primer 7. *Neka je funkcija cilja data sa*

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1}.$$

(a) *Neka je skup X određen linearnim ograničenjima, odnosno neka je*

$$X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, x_2 \geq 0\}.$$

Tada važi

$$\begin{aligned} R_X &= \{(y_1, y_2) \mid y_1 = 0,\ y_2 \geq 0\}, \\ R_f &= \{(y_1, y_2) \mid y_1 \leq 0,\ y_2 \in \Re\}, \\ L_f &= \{(y_1, y_2) \mid y_1 = 0,\ y_2 \in \Re\}, \end{aligned}$$

pa je $R_X \cap R_f \subset L_f$. Sada možemo zaključiti da optimalno rešenje postoji.

(b) *Neka je skup X određen kvadratnim nejednakostima, odnosno neka je*

$$X = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 \leq x_2\}.$$

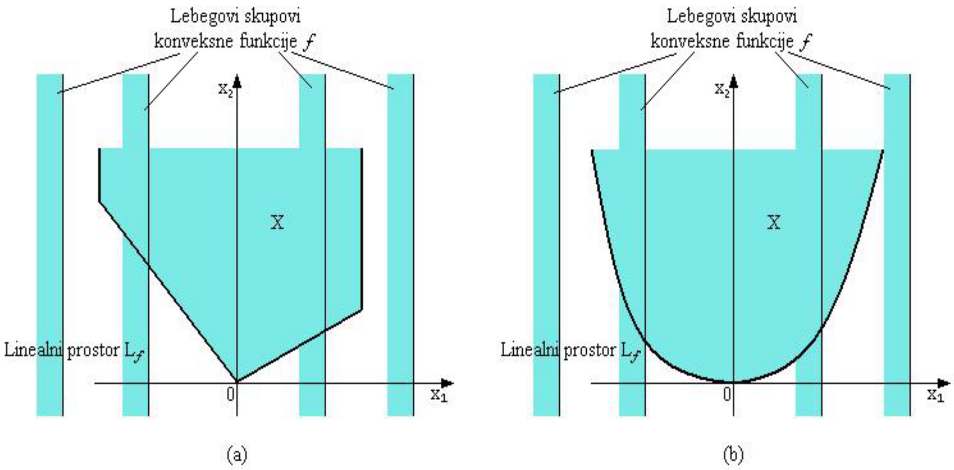
Tada, kao i pod (a), važi

$$\begin{aligned} R_X &= \{(y_1, y_2) \mid y_1 = 0,\ y_2 \geq 0\}, \\ R_f &= \{(y_1, y_2) \mid y_1 \leq 0,\ y_2 \in \Re\}, \\ L_f &= \{(y_1, y_2) \mid y_1 = 0,\ y_2 \in \Re\}, \end{aligned}$$

pa je opet zadovoljen uslov $R_X \cap R_f \subset L_f$. Međutim, sada važi da je $f(x_1, x_2) > 0$ za sve (x_1, x_2), dok za $x_1 = -\sqrt{x_2}$, gde je $x_2 \geq 0$, važi da $(x_1, x_2) \in X$, pri čemu je

$$\lim_{x_2 \to \infty} f(-\sqrt{x_2}, x_2) = \lim_{x_2 \to \infty} e^{-\sqrt{x_2}} = 0,$$

odakle sledi da je $f^* = 0$. Dakle, u ovom slučaju funkcija f ne može da dostigne minimalnu vrednost f^* na skupu X.



Slika 3.4. Ilustracija primera 7

U specijalnim slučajevima problema linearnog i kvadratnog programiranja, ograničenost funkcije cilja sa donje strane na skupu ograničenja garantuje egzistenciju optimalnog rešenja, kao što je dokazano u prethodnoj teoremi pod uslovom (c). Sada navodimo teoremu koja daje alternativni dokaz ove činjenice.

Teorema 3.2.4. (Egzistencija rešenja kvadratnih problema) *Neka je* $f : \Re^n \to \Re$ *kvadratna funkcija oblika*

$$f(x) = x^T Q x + c^T x,$$

pri čemu je Q *simetrična pozitivno semidefinitna matrica reda* $n \times n$ *i* c *vektor iz* $\Re^n$*. Neka je* X *neprazan skup oblika*

$$X = \{x \in \Re^n \mid Ax \leq b\},$$

pri čemu je A *matrica reda* $m \times n$ *i* $b \in \Re^m$*. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:*

(a) *Funkcija* f *dostiže minimum na skupu* X*.*

(b) $f^* > -\infty$.

(c) *Za sve* y *takve da je* $Ay \leq 0$ *i* $y \in N(Q)$ *važi da je* $c^T y \geq 0$.

Dokaz. Jasno je da iz (a) sledi (b), pa to ne pokazujemo.

Pokažimo da iz (b) sledi (c). Za sve $x \in X$ i $y \in N(Q)$, pri čemu je $Ay \leq 0$ i $\alpha \geq 0$, važi da $x + \alpha y \in X$ i da je

$$f(x + \alpha y) = (x + \alpha y)^T Q (x + \alpha y) + c^T (x + \alpha y) = f(x) + \alpha c^T y.$$

Ako je $c^T y < 0$, tada je $\lim_{\alpha\to\infty} f(x+\alpha y) = -\infty$, pa je $f^* = -\infty$, što je kontradikcija sa iskazom pod (b). Dakle, iz iskaza (b) sledi da je $c^T y \geq 0$ za sve $y \in N(Q)$ takve da je $Ay \leq 0$, tj. sledi iskaz (c).

Sada pokazujemo da iz (c) sledi (a). Konus opadanja skupa X je

$$R_X = \{y \in \Re^n \mid Ay \leq 0\}.$$

Ako $y \in R_f$, tada mora da važi da $y \in N(Q)$ (zbog pretpostavke o pozitivnoj semidefinitnosti matrice Q) i da je $c^T y \leq 0$ (jer za $y \in N(Q)$ funkcija f postaje linearna duž pravca y, tj. važi da je

$$f(x+\alpha y) = f(x) + \alpha c^T y,$$

za sve $x \in \Re^n$ i $\alpha \in \Re$). Dakle, $R_f = N(Q) \cap \{y \in \Re^n \mid c^T y \leq 0\}$, pa važi da je

$$R_X \cap R_f = \{y \in \Re^n \mid Ay \leq 0\} \cap N(Q) \cap \{y \in \Re^n \mid c^T y \leq 0\}.$$

Pretpostavimo da važi iskaz (c). Tada sledi da za $y \in R_X \cap R_f$ važi da je $c^T y = 0$, pa je funkcija f konstantna u pravcu y. Dakle, važi da je $R_X \cap R_f \subset L_f$, pa na osnovu Teoreme 30 funkcija f dostiže minimum na skupu X. $\square$

Prethodna teorema zapravo obezbeđuje potreban i dovoljan uslov za dostizanje minimuma kvadratne funkcije na linearnom skupu ograničenja.

Glava 4

Problemi konveksne optimizacije

Do sada smo se bavili uslovima pod kojima problemi konveksne optimizacije imaju optimalno rešenje. U ovoj glavi ćemo se baviti primenom ovog tipa problema optimizacije u praksi. Zbog svog specifičnog oblika, oni se koriste pri rešavanju mnogih problema iz raznih oblasti kao što su: modeliranje i analiza podataka, statistika, finansije, sistemi automatskog upravljanja, dizajniranje elektronskih kola i slično.

Na početku ćemo uvesti osnovne pojmove vezane za probleme optimizacije uopšte, pri čemu ćemo istaći prednosti konveksnih problema. Zatim ćemo se osvrnuti na neke specijalne oblike problema konveksne optimizacije. Za svaki od njih navešćemo po jedan primer primene u praksi, u oblasti ekonomije, odnosno finansija. U ovoj glavi je korišćena literatura [2], [5], [7], [8], [9], [10], [11], [17], [18] i [19].

4.1 Uvodni pojmovi

Problem dat sa

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & f_0(x) \\ \text{uz uslove} \quad & f_i(x) \leq 0, \ i = 1, ..., m \\ & h_i(x) = 0, \ i = 1, ..., p, \end{aligned} \tag{4.1}$$

pri čemu $f_i : \Re^n \to \Re$, $i = 1, ..., m$ i $h_i : \Re^n \to \Re$, $i = 1, ..., p$, naziva se *problem optimizacije standardnog oblika.* $x \in \Re^n$ je *promenljiva optimizacije*, funkcija f_0 označava *funkciju cilja* ili *funkciju troškova*, nejednakosti $f_i(x) \leq 0$ predstavljaju *ograničenja tipa nejednakosti*, dok jednačine $h_i(x) = 0$ predstavljaju *ograničenja tipa jednakosti.* Skup tačaka za koje su funkcija cilja i sve funkcije ograničenja definisane,

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^{m} domen(f_i) \cap \bigcap_{i=1}^{p} domen(h_i),$$

naziva se *domen problema optimizacije* (4.1). Tačka $x \in \mathcal{D}$ je *dopustiva* ako zadovoljava ograničenja $f_i(x) \leq 0$, $i = 1, ..., m$ i $h_i(x) = 0$, $i = 1, ..., p$. Skup svih dopustivih tačaka se naziva *dopustivi skup*. Problem je *dopustiv* ako postoji najmanje jedna dopustiva tačka; inače je *nedopustiv*. Ako problem nema ograničenja (tj. $m = p = 0$), tada je *neograničen*. *Optimalna vrednost* problema (4.1), označena sa f^*, definiše se sa

$$f^* = \inf\{f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0,\ i = 1, ..., m,\ h_i(x) = 0,\ i = 1, ..., p\}.$$

f^* može da prima vrednosti $\pm\infty$. Ako je problem nedopustiv, tada je $f^* = \infty$ (pri čemu koristimo standardnu konvenciju da je infimum praznog skupa ∞). Ako postoje dopustive tačke x_k takve da $f_0(x_k) \to -\infty$ kada $k \to \infty$, tada je $f^* = -\infty$ i u tom slučaju kažemo da je problem *neograničen sa donje strane*.

U prethodnoj glavi smo definisali pojam (globalnog) minimuma, koji zapravo predstavlja optimalno rešenje problema minimizacije. Dakle, kažemo da je x^* *(globalno) optimalna tačka* problema (4.1), ako je ona dopustiva i ako je $f_0(x^*) = f^*$. Skup svih optimalnih tačaka se naziva *optimalni skup* i označava se sa

$$X_{opt} = \{x \in \Re^n \mid f_i(x) \leq 0,\ i = 1, ..., m,\ h_i(x) = 0,\ i = 1, ..., p,\ f_0(x) = f^*\}.$$

Analogno definiciji lokalnog minimuma, dopustiva tačka x je *lokalno optimalna* ako postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je

$$f_0(x) = \inf\{f_0(z) \mid f_i(z) \leq 0, i = 1, ..., m,\ h_i(z) = 0, i = 1, ..., p,\ \|z - x\| \leq \varepsilon\}.$$

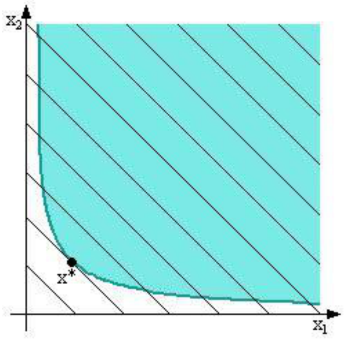
Grubo govoreći, ovo znači da x minimizira funkciju f_0 u odnosu na dopustive tačke koje su "blizu". U nastavku ćemo podrazumevati da "optimalno" znači "globalno optimalno".

Ograničenje $f_i(x) \leq 0$ je *aktivno* u tački x ako je x dopustiva tačka i važi da je $f_i(x) = 0$. Ako važi da je $f_i(x) < 0$, tada kažemo da je ograničenje $f_i(x) \leq 0$ *regularno* u tački x. Ograničenja tipa jednakosti su, naravno, aktivna u svim dopustivim tačkama. Ograničenje je *suvišno* ako se njegovim brisanjem ne menja dopustiv skup. Sada navodimo jedan jednostavan primer.

Primer 8. Posmatrajmo problem minimizacije dat sa

$$\begin{aligned} \textit{minimizirati} \quad & x_1 + x_2 \\ \textit{uz uslove} \quad & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \\ & 1 - \sqrt{x_1 x_2} \leq 0. \end{aligned}$$

Funkcija cilja ovog problema je $f_0 = [1,1]^T x$, *optimalna vrednost je* $f^* = 2$, *a jedina optimalna tačka je* $x^* = (1,1)$. *Ilustracija ovog primera data je na slici 4.1, pri čemu je dopustivi skup prikazan u boji.*



Slika 4.1.

Ovaj rad je usmeren na probleme konveksne optimizacije. Iz tog razloga ćemo sada reći nesto više o njima. Problem optimizacije (4.1) je *konveksan* ako su funkcije f_i, $i = 0, ..., m$, konveksne, a funkcije h_i, $i = 1, ..., p$, afine. Konveksne probleme optimizacije u standardnom obliku zapisujemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & f_0(x) \\ \text{uz uslove} \quad & f_i(x) \leq 0, \;\; i = 1, ..., m \\ & a_i^T x = b_i, \;\; i = 1, ..., p. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Primetimo da se ograničenja $a_i^T x = b_i$, $i = 1, ..., p$, mogu zapisati u matričnom obliku $Ax = b$, gde je $A \in \Re^{p \times n}$, a $b \in \Re^p$. Takođe, primetimo da je kod problema (4.2) dopustiv skup konveksan. Naime, on je presek sledećih konveksnih skupova:

- $\mathcal{D} = \cap_{i=0}^{m} domen(f_i)$,
- m Lebegovih skupova - $\{x \in \Re^n | \; f_i(x) \leq 0\}$ i
- p hiperravni - $\{x \in \Re^n \mid a_i^T x = b_i\}$.

Dakle, kada je reč o problemima konveksne optimizacije, radi se o optimizaciji konveksne funkcije nad konveksnim skupom. Još jedna važna osobina konveksnih problema je ta da u slučaju kada je funkcija cilja strogo konveksna, tada optimalni skup sadrži najviše jednu tačku (na osnovu Teoreme 27).

Postoje tri činjenice zbog kojih se konveksni problemi bitno razlikuju od nekonveksnih, a to su:

1. Svaki lokalni optimum konveksnog problema je i globalni optimum.

2. Algoritmi za rešavanje konveksnih problema se lako definišu pomoću teorije dualnosti.

3. Postoje efikasne numeričke metode koje mogu da reše konveksne probleme čak i ako su oni velikih dimenzija.

U ovom radu nije obrađena teorija dualnosti niti se bavimo algoritmima za rešavanje problema optimizacije. Ukoliko čitalac želi detaljnije da se informiše ili bavi ovim temama, može pogledati u [1] i [2]. Što se tiče numeričkih metoda za rešavanje konkretnih problema u praksi, njima se bavi posebna oblast matematike zvana operaciona istraživanja.

4.1.1 Uslov optimalnosti ako je funkcija cilja diferencijabilna

Posmatrajmo problem konveksne optimizacije (4.2) i pretpostavimo da je funkcija cilja diferencijabilna. Tada, na osnovu Teoreme 6, za sve tačke x, z koje pripadaju domenu funkcije f_0 važi uslov (1.3), odnosno

$$f_0(z) \geq f_0(x) + (z-x)^T \nabla f_0(x).$$

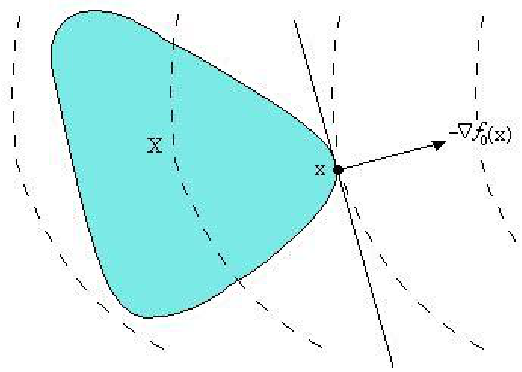
Neka je sa X označen dopustivi skup, odnosno

$$X = \{x \in \Re^n \mid f_i(x) \leq 0,\ i = 1, ..., m,\ h_i(x) = 0,\ i = 1, ..., p\}.$$

Tada je x optimalna tačka ako i samo ako $x \in X$ i ako važi da je

$$(z-x)^T \nabla f_0(x) \geq 0 \text{ za sve } z \in X. \tag{4.3}$$

Uslov (4.3) se naziva *uslov optimalnosti*.



Slika 4.2. Geometrijska interpretacija uslova optimalnosti (4.3)

Na slici 4.2 dopustivi skup je označen sa X, dok su neki Lebegovi skupovi funkcije f_0 prikazani u vidu isprekidanih krivih. Optimalna tačka je označena sa x. Vidimo da $-\nabla f_0(x)$ definiše *potpornu hiperravan* (prikazanu punom linijom) za skup X u tački x.

4.1.2 Ekvivalentni problemi optimizacije

Kažemo da su dva problema optimizacije *ekvivalentna* ako je na osnovu rešenja jednog problema rešenje drugog problema već nađeno, i obrnuto. Posmatrajmo problem

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & \tilde{f}(x) = \alpha_0 f_0(x) \\ \text{uz uslove} \quad & \tilde{f}_i(x) = \alpha_i f_i(x) \le 0, \ i = 1, ..., m \\ & \tilde{h}_i(x) = \beta_i h_i(x) \le 0, \ i = 1, ..., p, \end{aligned} \tag{4.4}$$

pri čemu je $\alpha_i > 0$, $i = 1, ..., m$ i $\beta_i \neq 0$, $i = 1, ..., p$. Očigledno je da je ovaj problem dobijen iz problema standardnog oblika (4.1), tako što su funkcija cilja i funkcije ograničenja tipa nejednakosti pomnožene pozitivnom konstantom, a funkcije ograničenja tipa jednakosti pomnožene nenula konstantom. Zbog toga su dopustivi skupovi problema (4.4) i početnog problema (4.1) identični. Tačka x je optimalna za početni problem (4.1) ako i samo ako je optimalna za problem (4.4), pa stoga kažemo da su ova dva problema ekvivalentna. Međutim, ova dva problema nisu jednaka. Oni imaju različite funkcije cilja, kao i različite funkcije ograničenja.

Postoji mnogo transformacija koje se koriste za dobijanje ekvivalentnih problema, kao na primer: smena promenljivih, transformacija funkcije cilja i funkcija ograničenja, definisanje problema u obliku nadgrafa, eliminisanje ograničenja tipa jednakosti, eliminisanje linearnih ograničenja tipa jednakosti, uvođenje ograničenja tipa jednakosti, uvođenje pomoćnih promenljivih, optimizacija samo po nekim promenljivima, itd.

Kada su u pitanju konveksni problemi optimizacije, zanima nas koje od pomenutih transformacija očuvavaju konveksnost problema. To su:

- eliminisanje ograničenja tipa jednakosti,
- uvodjenje pomoćnih promenljivih,
- uvođenje ograničenja tipa jednakosti,
- optimizacija samo po nekim promenljivim,
- definisanje problema u obliku nadgrafa, itd.

4.1.3 Specijalni oblici problema optimizacije

Sada ćemo navesti pojedine specijalne oblike problema optimizacije. Neki od njih su dobijeni transformacijama pomenutim u prethodnom odeljku. Takođe, prokomentarisaćemo kako se menja uslov optimalnosti u slučaju kada je funkcija cilja diferencijabilna, zavisno od posmatranog oblika problema.

Problemi dopustivosti

Specijalan slučaj problema u standardnom obliku jeste *problem dopustivosti* koji definišemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} \text{naći} \quad & x \\ \text{uz uslove} \quad & f_i(x) \leq 0, \ i = 1, ..., m \\ & h_i(x) = 0, \ i = 1, ..., p. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dakle, problem dopustivosti podrazumeva ili pronalaženje tačke koja zadovoljava ograničenja ili dokazivanje nekonzistentnosti ograničenja.

Problemi maksimizacije

Problem maksimizacije se definiše sa

$$\begin{aligned} \text{maksimizirati} \quad & f_0(x) \\ \text{uz uslove} \quad & f_i(x) \leq 0, \ i = 1, ..., m \\ & h_i(x) = 0, \ i = 1, ..., p. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ovaj problem možemo rešiti minimiziranjem funkcije $-f_0$ zavisno od datih ograničenja. Na osnovu ove činjenice, svi pojmovi prethodno definisani kod problema minimizacije (4.1) mogu se, analogno, definisati za problem maksimizacije (4.6). Posmatrajmo sada problem maksimizacije oblika

$$\begin{aligned} \text{maksimizirati} \quad & f_0(x) \\ \text{uz uslove} \quad & f_i(x) \leq 0, \ i = 1, ..., m \\ & a_i^T x = b_i, \ i = 1, ..., p. \end{aligned} \tag{4.7}$$

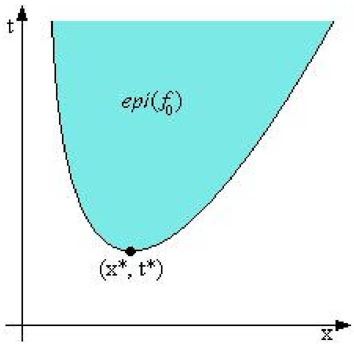
Uz malu zloupotrebu notacije, ovaj problem se takođe naziva problem konveksne optimizacije, ako je funkcija cilja f_0 konkavna i ako su funkcije ograničenja tipa nejednakosti $f_1, ..., f_m$ konveksne. Kod problema maksimizacije funkciju cilja nazivamo još i *funkcija korisnosti*.

Problemi u obliku nadgrafa

Mnogi algoritmi za rešavanje problema konveksne optimizacije pretpostavljaju da je funkcija cilja linearna, zbog čega je veoma važna činjenica da se svaki konveksan problem može pretvoriti u problem sa linearnom funkcijom cilja. Taj postupak se naziva "stavljanje" problema u oblik nadgrafa i njime se dobija problem

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & t \\ \text{uz uslove} \quad & f_0(x) - t \leq 0 \\ & f_i(x) \leq 0, \ i = 1, ..., m \\ & h_i(x) = 0, \ i = 1, ..., p, \end{aligned} \tag{4.8}$$

sa promenljivima $x \in \Re^n$ i $t \in \Re$.



Slika 4.3.

Na slici iznad data je geometrijska interpretacija problema u obliku nadgrafa koji nema ograničenja. U tom slučaju problem se rešava pronalaženjem "najniže" tačke nadgrafa funkcije cilja. Optimalnu tačku smo označili sa (x^*, t^*).

Možemo primetiti da je problem (4.8) ekvivalentan sa (4.1) i da je on dobijen uvođenjem pomoćne promenljive t.

Problemi bez ograničenja

Kao što smo već pomenuli, problem (4.1) je bez ograničenja ako je $m = p = 0$. Dakle, rešavamo problem

$$\text{minimizirati} \quad f_0(x).$$

Pretpostavimo da je funkcija f_0 diferencijabilna. Tada se uslov (4.3) svodi na

$$\nabla f_0(x) = 0. \tag{4.9}$$

Postoji nekoliko mogućih situacija, zavisno od broja rešenja jednačine (4.9). Ako ona nema rešenja, tada nema ni optimalnih tačaka, odnosno optimalna vrednost problema nije dostignuta. Do toga dolazi u slučaju kada je:

1. problem neograničen sa donje strane i

2. optimalna vrednost konačna, ali nije dostignuta.

Sa druge strane, jednačina (4.9) može imati više od jednog rešenja. U tom slučaju je svako rešenje minimizator funkcije f_0.

Problemi koji imaju samo ograničenja tipa jednakosti

Posmatrajmo problem

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & f_0(x) \\ \text{uz uslov} \quad & Ax = b. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Vidimo da je dopustiv skup ovog problema afin skup (pretpostavljamo neprazan). Sada pretpostavimo da je funkcija cilja diferencijabilna. Uslov optimalnosti (4.3) za dopustivu tačku x je tada dat sa

$$(z-x)^T \nabla f_0(x) \geq 0, \quad \text{za svako } z \text{ koje zadovoljava } Az = b.$$

Pošto je x dopustiva tačka, svaka dopustiva tačka z ima oblik $z = x + v$, za neko $v \in N(A)$. Iz tog razloga se uslov (4.3) može izraziti kao

$$v^T \nabla f_0(x) \geq 0, \quad \text{za sve } v \in N(A).$$

Znamo da linearna funkcija mora biti nula nad jezgrom ako je ona nenegativna nad jezgrom (jer je jezgro potprostor), pa sledi da je

$$v^T \nabla f_0(x) = 0, \quad \text{za sve } v \in N(A).$$

Ako iskoristimo činjenicu da je $N(A)^\perp = R(A^T)$, gde je sa $R(A)$ označena slika (engl. *image*) matrice A, onda uslov optimalnosti može biti izražen kao $\nabla f_0(x) \in R(A^T)$, odnosno

$$\text{postoji } v \in \Re^p \text{ takvo da je } \nabla f_0(x) + A^T v = 0.$$

Kada spojimo ovaj uslov sa uslovom $Ax = b$ dobijamo klasičan uslov optimalnosti Lagranžovog[1] množitelja (pogledati [1] i [2]).

Problemi minimizacije nad nenegativnim oktantom

Još jedan specijalan oblik problema optimizacije jeste problem

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & f_0(x) \\ \text{uz uslov} \quad & x \succeq 0,^2 \end{aligned} \tag{4.11}$$

u kojem su jedina ograničenja nenegativna ograničenja promenljivih. Ako pretpostavimo da je funkcija cilja diferencijabilna, tada uslov (4.3) postaje

$$x \succeq 0, \quad (z-x)^T \nabla f_0(x) \geq 0 \text{ za sve } z \succeq 0.$$

[1] Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

[2] Simbol $\succeq$ u ovom slučaju predstavlja nejednakost među komponentama vektora.

Izraz $z^T \nabla f_0(x)$ je neograničen odozdo na $z \succeq 0$, osim ako važi $\nabla f_0(x) \succeq 0$. Uslov optimalnosti se, stoga, svodi na

$$-x^T \nabla f_0(x) \geq 0.$$

Međutim, kako važi: $x \succeq 0$ i $\nabla f_0(x) \succeq 0$, mora da bude $x^T \nabla f_0(x) = 0$, odnosno

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(\nabla f_0(x))_i = 0.$$

Svaki izraz u ovoj sumi je proizvod dva nenegativna broja, pa sledi da svaki izraz mora biti jednak nuli, tj. $x_i(\nabla f_0(x))_i = 0$ za $i = 1, ..., n$.

Sada uslov (4.3) može biti izražen na sledeći način:

$$x \succeq 0, \quad \nabla f_0(x) \succeq 0, \quad x_i(\nabla f_0(x))_i = 0, \quad i = 1, ..., n \tag{4.12}$$

i naziva se *uslov komplementarnosti.*

Problemi sa uopštenim nejednakostima

Veoma korisno uopštenje problema konveksne optimizacije standardnog oblika (4.2) jeste problem kod kojeg funkcije ograničenja tipa nejednakosti imaju vektorske vrednosti. Dakle, problem sa uopštenim nejednakostima se definiše sa

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & f_0(x) \\ \text{uz uslove} \quad & f_i(x) \preceq_{K_i} 0, \; i = 1, ..., m \\ & Ax = b, \end{aligned} \tag{4.13}$$

pri čemu $f_0 : \Re^n \to \Re$, $K_i \in \Re^{k_i}$ su pravi konusi, $f_i : \Re^n \to \Re^{k_i}$ su K_i-konveksne funkcije, $A \in \Re^{p \times n}$ i $b \in \Re^p$.

Mnogi rezultati dobijeni za obične probleme konveksne optimizacije važe za probleme sa uopštenim nejednakostima. Neki od njih su:

- Dopustiv skup i optimalni skup su konveksni.
- Bilo koja lokalno optimalna tačka za problem (4.13) je i globalno optimalna.
- Ako je funkcija cilja diferencijabilna, onda važi uslov optimalnosti (4.3).

Kvazikonveksni problemi

Problem kvazikonveksne optimizacije standardnog oblika je problem

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & f_0(x) \\ \text{uz uslove} \quad & f_i(x) \leq 0, \; i = 1, ..., m \\ & Ax = b, \end{aligned} \tag{4.14}$$

pri čemu su funkcije ograničenja tipa nejednakosti $f_1, ..., f_m$ konveksne, a funkcija cilja f_0 kvazikonveksna. Osnovna osobina problema konveksne optimizacije, koju smo dokazali u odeljku 3.1, jeste da je bilo koja lokalno optimalna tačka takođe i globalno optimalna (Teorema 27). Međutim, za probleme kvazikonveksne optimizacije ova osobina ne važi, tj. kod takvih problema lokalno optimalna tačka ne mora biti globalno optimalna.

Na osnovu karakterizacije diferencijabilne kvazikonveksne funkcije date u odeljku 1.3.5, uslov optimalnosti (4.3) postaje

$$(z-x)^T \nabla f_0(x) > 0, \quad \forall\, z \in C \backslash \{x\},\ \forall\, x \in C. \tag{4.15}$$

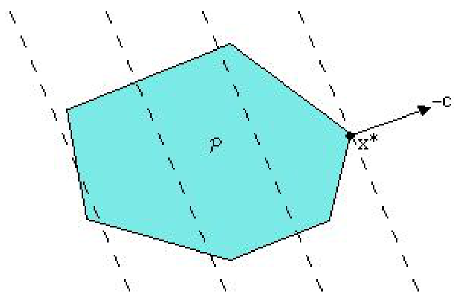
Ovaj uslov jeste analogon uslova (4.3), ali postoje dve bitne razlike između njih. Jednu smo već pomenuli ranije, a to je da kod kvazikonveksnih problema ispunjenost uslova $\nabla f_0(x) = 0$ ne garantuje optimalnost tačke x. Druga važna razlika jeste ta da je uslov (4.15) samo dovoljan, ali ne i potreban uslov za optimalnost.

4.2 Linearni problemi

Literatura korišćena u ovom poglavlju je [2], [16] i [17],pri čemu se primer može naći u [17]. Kada su u problemu optimizacije funkcija cilja i funkcije ograničenja sve afine, tada se radi o jednom specijalnom slučaju problema konveksne optimizacije, *problemu linearne optimizacije*. Njega nazivamo još i *linearni program* (označavaćemo ga skraćeno sa LP). Uopšteni oblik LP je problem oblika

$$\begin{array}{rl} \text{minimizirati} & c^T x + d \\ \text{uz uslove} & Gx \preceq h \\ & Ax = b, \end{array} \tag{4.16}$$

pri čemu $G \in \Re^{m \times n}$ i $A \in \Re^{p \times n}$. Geometrijska interpretacija linearnog programa data je na slici 4.4.



Slika 4.4.

Poliedar P predstavlja dopustiv skup, dok je linearna funkcija $c^T x$ funkcija cilja. Njeni Lebegovi skupovi su hiperravni ortoganalne na c (prikazane isprekidanim linijama). Optimalna tačka je označena sa x^* i možemo da vidimo da je to najudaljenija tačka iz P u pravcu $-c$.

Problem maksimizacije

$$\begin{array}{rl} \text{maksimizirati} & c^T x + d \\ \text{uz uslove} & Gx \preceq h \\ & Ax = b, \end{array}$$

pri čemu $G \in \Re^{m \times n}$ i $A \in \Re^{p \times n}$, takođe nazivamo linearnim programom, jer ga možemo rešiti minimiziranjem funkcije $-c^T x - d$.

LP je matematički model koji se veoma uspešno koristi za rešavanje velikog broja praktičnih problema optimizacije. On se koristi za optimizaciju poslovnih aktivnosti na nivou preduzeća, kao i ljudskih aktivnosti uopšte. Na primer, kada su u pitanju problemi sa kojima se susreće određeno preduzeće, uz pomoć LP se mogu modelirati: planiranje proizvodnje, planiranje investicija, planiranje transporta proizvoda, optimalno raspoređivanje kadrova, maksimiziranje dobiti, minimiziranje obima zaliha, maksimiziranje izvoza uz odgovarajući devizni efekat i slično.

4.2.1 LP standardnog oblika

Specijalan slučaj problema (4.16), sa kojim se često susrećemo u praksi, jeste *standardni oblik LP*

$$\begin{array}{rl} \text{minimizirati} & c^T x \\ \text{uz uslove} & Ax = b \\ & x \succeq 0, \end{array} \tag{4.17}$$

pri čemu $A \in \Re^{p \times n}$. Ponekad je korisno transformisati uopšteni LP (4.16) u LP standardnog oblika (4.17). Iz tog razloga sada ćemo pokazati postupak kojim se transformacija vrši.

Prvo što treba da uradimo, jeste da uvedemo veštačke promenljive koje "ubacujemo" u ograničenja tipa nejednakosti. Dakle, ako uvedemo novu promenljivu, označenu sa $s = (s_1, ..., s_m)$, tada dobijamo problem oblika

$$\begin{array}{rl} \text{minimizirati} & c^T x + d \\ \text{zavisno od} & Gx + s = h \\ & Ax = b \\ & s \succeq 0, \end{array}$$

pri čemu $G \in \Re^{m \times n}$ i $A \in \Re^{p \times n}$. Sledeći korak je izražavanje promenljive x na sledeći način:

$$x = x^+ - x^-, \quad x^+, x^- \succeq 0.$$

Sada dobijamo problem

$$\begin{array}{rl} \text{minimizirati} & c^T x^+ - c^T x^- + d \\ \text{zavisno od} & Gx^+ - Gx^- + s = h \\ & Ax^+ - Ax^- = b \\ & x^+ \succeq 0,\ x^- \succeq 0,\ s \succeq 0. \end{array} \tag{4.18}$$

Vidimo da je problem (4.18) upravo LP u standardnom obliku, pri čemu su njegove promenljive x^+, x^- i s.

Ova tehnika manipulacije problemima, kao i mnoge druge, se može iskoristiti za formulisanje raznih problema optimizacije u obliku linearnog programa. Uz malu zloupotrebu terminologije, uobičajeno je problem koji se može formulisati kao LP, nazivati linearni program, čak i kada on nema oblik (4.16).

Sada ćemo navesti jedan od najpoznatijih primera primene linearnih problema u praksi.

Primer 9. **Transportni problem**

Posmatramo preduzeće koje u svom posedu ima m objekata za skladištenje robe i n prodajnih objekata. Problem koji preduzeće treba da reši jeste kako da preveze robu iz skladišnih objekata do prodajnih objekata, a da troškovi transporta budu minimalni. Da bismo matematički formulisali ovaj problem, uvodimo sledeće oznake:

- S_i - *i-ti skladišni objekat,* $i = 1, ..., m$
- P_j - *j-ti prodajni objekat,* $j = 1, ..., n$
- s_i - *količina robe na zalihama u objektu* S_i
- p_j - *količina robe potrebna objektu* P_j
- c_{ij} - *cena transporta robe od objekta* S_i *do objekta* P_j
- x_{ij} - *količina robe koju treba prevesti od objekta* S_i *do objekta* P_j

U slučaju kada je ukupna količina zaliha u skladišnim objektima jednaka ukupnoj količini proizvoda potrebnih prodajnim objektima, odnosno kada je

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} p_j,$$

radi se o **zatvorenom transportnom problemu**. *Ukoliko te dve veličine nisu izjednačene, tada je u pitanju* **otvoreni transportni problem**.

Prvo formulišemo funkciju troškova, tj. funkciju cilja našeg problema

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

koju želimo da minimiziramo. S obzirom da su vrednosti $s_i,\ i = 1, ..., m$ *i* $p_j,\ j = 1, ..., n$ *konačne, ovaj problem minimizacije ima odgovarajuća ograničenja*

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = s_i,\ i = 1, ..., m \quad i \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = p_j,\ j = 1, ..., n.$$

Još jedno neophodno ograničenje jeste ograničenje nenegativnosti promenljivih problema,

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n,$$

s obzirom da količina robe ne može biti negativna veličina. Sada kada smo definisali funkciju cilja i uveli sva potrebna ograničenja, dobijamo problem sledećeg oblika:

$$\begin{aligned}
\textit{minimizirati} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\textit{uz uslove} \quad & \sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} p_j \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = s_i,\ i = 1, ..., m \qquad (4.19) \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = p_j,\ j = 1, ..., n \\
& x_{ij} \geq 0,\ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n.
\end{aligned}$$

Dakle, problem ovog oblika spada u probleme linearne optimizacije i naziva se zatvoreni transportni problem. Ovaj oblik LP se, pored rešavanja problema optimalnog transporta, može koristiti i za pronalaženje optimalnog razmeštaja mašina u pogonu, pronalaženje optimalnog razmeštaja službi u okviru preduzeća, pronalaženju optimalnog izbora radnika za obavljanje određenog posla, i slično.

Primetimo da se na problem oblika (4.19) može primeniti Teorema 30 iz prethodne glave. Naime, on se može zapisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\text{minimizirati} \quad & f(x) = c^T x \\
\text{uz uslove} \quad & a_j x = b_j,\ j = 1, ..., m+n \\
& a_j x \geq b_j,\ j = m+n+1, ..., m+n+mn,
\end{aligned}$$

gde su $x, c \in \Re^{mn}$, a_j vektori vrsta matrice $A \in \Re^{(m+n+mn)\times mn}$, a $b_j \in \Re$, odnosno

$$A = \begin{bmatrix}
1 & . & . & . & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\
0 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & . & . & . & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 \\
1 & 0 & . & . & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & 0 & . & . & 0 \\
0 & 1 & 0 & . & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & . & 0 & 1 & 0 & . & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & . & . & 0 & 1 \\
1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\
0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 1
\end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ . \\ . \\ . \\ x_{1n} \\ . \\ . \\ . \\ x_{m1} \\ x_{m2} \\ . \\ . \\ . \\ x_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_{m+n} \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ . \\ . \\ . \\ c_{1n} \\ . \\ . \\ . \\ c_{m1} \\ c_{m2} \\ . \\ . \\ . \\ c_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dopustiv skup ovog problema dat je sa

$$X = \{x \in \Re^{mn} | a_j x = b_j, j = 1, .., m+n, a_j x \geq b_j, j = m+n+1, .., m+n+mn\}.$$

Vidimo da skup X i funkcija f zadovoljavaju pretpostavke Teoreme 30. Sada ćemo pokazati da je ispunjen uslov (b) te teoreme, odnosno da važi

$$R_X \cap R_f \subset L_f.$$

Na osnovu definicije konusa opadanja skupa, konusa opadanja funkcije i linealnog prostora dobijamo:

$$\begin{aligned} R_X = \{y \in \Re^{mn} \mid a_j y = 0,\ j = 1, ..., m+n, \\ a_j y \geq 0,\ j = m+n+1, .., m+n+mn\}, \\ R_f = \{y \in \Re^{mn} \mid c^T y \leq 0\}, \\ L_f = \{y \in \Re^{mn} \mid c^T y = 0\}. \end{aligned}$$

Neka $y \in R_X \cap R_f$. Tada y zadovoljava uslove:

$$Ay = 0, \quad y \succeq 0, \quad c^T y \leq 0.$$

Pretpostavimo suprotno, neka je $c^T y \neq 0$, tj. neka je $c^T y < 0$. Kako je c vektor cena transporta, njegove komponente su uvek nenegativne, pa sledi da postoji bar jedna komponenta vektora y koja je negativna. Dobijamo kontradikciju sa pretpostavkom da $y \in R_X$. Dakle, $y \in L_f$. Sada važi uslov (b) Teoreme 30, pa sledi da je skup minimuma funkcije f nad skupom X neprazan (i može biti neograničen).

4.3 Linearno-razlomljeni problemi

Pri različitim primenama problema optimizacije, često je potrebno minimizirati (odnosno, maksimizirati) razlomak dve funkcije. Takvi problemi optimizacije se nazivaju *racionalni* ili *razlomljeni* problemi. U nekim slučajevima funkciju cilja čini više takvih razlomaka. Tada se radi o *uopštenom racionalnom problemu.* Međutim, mi ćemo ovde obratiti pažnju na jedan specijalan slučaj problema racionalne optimizacije kada funkciju cilja čini samo jedan razlomak - na *linearno-razlomljen problem.* Ono što je za njega karakteristično jeste da je funkcija cilja afina funkcija i da je skup ograničenja zapravo konveksan poliedar. Dakle, problem linearno-razlomačke optimizacije zapisujemo sa

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & f_0(x) \\ \text{uz uslove} \quad & Gx \preceq h \\ & Ax = b, \end{aligned} \tag{4.20}$$

pri čemu $G \in \Re^{m \times n}$, $A \in \Re^{p \times n}$, funkcija cilja je data sa

$$f_0(x) = \frac{c^T x + d}{e^T x + f},$$

i njen domen je skup

$$\{x \in \Re^n \mid e^T x + f > 0\}.$$

Važno je napomenuti da je funkcija cilja ovog problema kvazikonveksna (odnosno, kvazilinearna), pa zaključujemo da linearno-razlomljeni problemi spadaju u grupu problema kvazikonveksne optimizacije.

4.3.1 Transformisanje u LP

S obzirom da se, u odnosu na ostale probleme optimizacije, linearnim problemima naučnici najduže bave zbog njihove široke primene, logično je da za njihovo rešavanje postoji najviše algoritama i metoda. Iz tog razloga je korisno objasniti postupak transformisanja linearno-razlomljenog problema u linearni problem.

Neka je dat problem oblika (4.20). Dopustiv skup ovog problema je skup

$$\{x \in \Re^n \mid Gx \preceq h,\ Ax = b,\ e^T x + f > 0\}.$$

Pretpostavićemo da je neprazan. Sada uvodimo smenu

$$z = \frac{1}{e^T x + f} \tag{4.21}$$
$$y = zx.$$

Funkcija cilja tada postaje

$$f_0(y,z) = \frac{c^T \frac{y}{z} + d}{e^T \frac{y}{z} + f} = \frac{\frac{1}{z} c^T y + d}{\frac{1}{z} e^T y + f} \cdot \frac{z}{z} = \frac{c^T y + dz}{e^T y + fz}.$$

Iz (4.21) sledi da je $e^T y + fz = 1$, pa je nova funkcija cilja

$$f_0(y,z) = c^T y + dz.$$

Sada ubacujemo smenu i u ograničenja polaznog problema (4.20) i dobijamo

$$\begin{array}{ll} G\frac{y}{z} \preceq h & A\frac{y}{z} = b \\ \frac{1}{z}Gy \preceq h & \frac{1}{z}Ay = b \\ Gy - hz \preceq 0 & Ay - bz = 0. \end{array}$$

Moramo dodati još i ograničenje

$$z \geq 0,$$

zbog pretpostavke da je dopustiv skup neprazan. Dakle, dobijamo problem

$$\begin{array}{rl} \text{minimizirati} & c^T y + dz \\ \text{zavisno od} & Gy - hz \preceq 0 \\ & Ay - bz = 0 \\ & e^T y + fz = 1 \\ & z \geq 0, \end{array} \tag{4.22}$$

čije su promenljive y i z. Problem (4.22) je ekvivalentan sa početnim i on spada u probleme linearne optimizacije. Ovu metodu transformacije su definisali Karne[3] i Kuper[4] 1962. godine u časopisu "Naval Research Logistics".

Sada navodimo jedan primer primene linearno-razlomljene optimizacije u praksi.

Primer 10. **Analiza aktivnosti u cilju maksimiziranja stope prihoda**
Svako preduzeće teži maksimizaciji prihoda uz minimizaciju troškova, radi ostvarenja što većeg profita. Da bi uspelo u tome, ono mora na što bolji (optimalniji) način da iskoristi sve raspoložive resurse (sredstva za rad, predmete rada i radnu snagu). Dakle, preduzeće preduzima niz odgovarajućih aktivnosti, koje obavlja uz pomoć raspoloživih resursa, u cilju maksimiziranja prihoda, odnosno odgovarajuće stope. Da bismo matematički formulisali problem, uvodimo odgovarajuće oznake:

- A_j - *j-ta aktivnost* , $j = 1, ..., n$
- R_i - *i-ti resurs,* $i = 1, ..., m$
- b_i - *dostupna količina zaliha resursa* R_i
- a_{ij} - *iznos resursa* R_i *koji se koristi pri aktivnosti* A_j*, po jedinici intenziteta*
- c_j - *neto iznos prihoda preduzeća od aktivnosti* A_j*, po jedinici intenziteta*
- e_j - *vreme potrebno za izvršavanje aktivnosti* A_j*, po jedinici intenziteta*
- d - *neto iznos prihoda od aktivnosti za koje se ne koriste resursi* $R_1, ..., R_m$[5]
- f - *vreme potrebno za obavljanje ostalih aktivnosti*

Sada, na osnovu uvedenih oznaka, sledi da preduzeće želi da maksimizira stopu prinosa, koja ima oblik

$$\frac{c^T x + d}{e^T x + f},$$

zavisno od ograničenja koje se nameće s obzirom na ograničenost resursa preduzeća, datog sa

$$Ax \preceq b$$

i od ograničenja nenegativnosti promenljive optimizacije

$$x \succeq 0,$$

[3] Abraham Charnes
[4] William W. Cooper
[5] Ove aktivnosti ćemo zvati ostalim aktivnostima.

koje predstavlja meru "količine" odgovarajuće aktivnosti, po jedinici intenziteta. Dakle, treba rešiti sledeći problem linearno-razlomljene optimizacije:

$$\begin{aligned} \textit{maksimizirati} \quad & \frac{c^T x + d}{e^T x + f} \\ \textit{uz uslove} \quad & Ax \preceq b \\ & x \succeq 0. \end{aligned}$$

Može se primetiti da je dopustiv skup ovog problema neprazan ako je $b \succeq 0$ *i da je u opštem slučaju ograničen. Takođe, potrebno vreme*

$$e^T x + f$$

je pozitivno na dopustivom skupu, ako važi $e \succeq 0$ *i* $f \succ 0$.

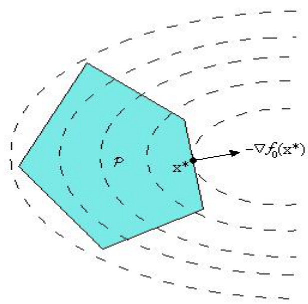
4.4 Kvadratni problemi

U ovom poglavlju je korišćena literatura [2] i [11], pri čemu se primer može naći u [2]. Pored problema linearne optimizacije, još jedan specijalan oblik problema konveksne optimizacije jesu *kvadratni problemi.* Oni se, kao i linearni problemi, često koriste pri rešavanje konkretnih problema u praksi, naročito u finansijama pri rešavanju problema optimizacije portfolia.

Problem konveksne optimizacije se naziva *kvadratni program* (skraćeno označen sa QP) ukoliko je funkcija cilja kvadratna, a funkcije ograničenja afine. Dakle, to je problem oblika

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & \frac{1}{2} x^T P x + q^T x + r \\ \text{uz uslove} \quad & Gx \preceq h \\ & Ax = b, \end{aligned} \tag{4.23}$$

pri čemu $P \in S_+^n$, gde je sa S_+^n označava skup simetričnih pozitivno semidefinitnih matrica, $G \in \Re^{m \times n}$ i $A \in \Re^{p \times n}$. Geometrijska interpretacija kvadratnog programa prikazana je na slici 4.5.



Slika 4.5.

Poliedar P je dopustiv skup, a konturne linije konveksne kvadratne funkcije cilja prikazane su u vidu isprekidanih krivih. Optimalna tačka je označena sa x^*.

Problem konveksne optimizacije oblika

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & \frac{1}{2}x^T P_0 x + q_0^T x + r_0 \\ \text{uz uslove} \quad & \frac{1}{2}x^T P_i x + q_i^T x + r_i \leq 0, \ i = 1, ..., m, \\ & Ax = b, \end{aligned} \tag{4.24}$$

pri čemu $P_i \in S_+^n$, $i = 0, 1, ..., m$, odnosno konveksni problem čije su funkcija cilja i funkcije ograničenja tipa nejednakosti kvadratne, naziva se *kvadratno ograničeni kvadratni program* (skraćeno označen sa QCQP). Primetimo da je QP specijalan slučaj od QCQP (za $P_i = 0$, $i = 1, ..., m$), a LP specijalan slučaj od QP (za $P = 0$).

Sada navodimo jedan primer primene kvadratnog problema, veoma značajan u finansijskoj teoriji i praksi.

Primer 11. **Optimizacija Markovicovog[6] portfolia**

Posmatramo klasičan problem optimizacije portfolia

$$\pi(x) = x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n,$$

sa n aktiva koje posedujemo tokom određenog vremenskog perioda. Sa x_i označavamo deo ukupnog kapitala uložen u i-tu aktivu, a sa p_i ćemo označiti stopu prinosa aktive i tokom datog perioda, odnosno

$$p_i = \frac{s_i - s_{i-1}}{s_{i-1}},$$

pri čemu je sa s_{i-1} označena cena aktive i na početku, a sa s_i cena aktive i na kraju posmatranog perioda. Prinos od portfolia je

$$r = p^T x,$$

dok je promenljiva optimizacije vektor portfolia $x \in \Re^n$.

Za modeliranje kretanja cena biramo stohastički model, s obzirom da nam promene cena aktiva tokom vremena nisu unapred poznate. Kako je stopa prinosa izvedena iz cene aktive, sledi da je i stopa prinosa takođe slučajna promenljiva. Njenu očekivanu vrednost ocenjujemo na osnovu srednje vrednosti stopa prinosa iz nekog ranijeg perioda. Međutim, stvarni budući prinosi mogu odstupati od te očekivane vrednosti, pa to odstupanje merimo varijansom, odnosno standardnim odstupanjem. Dakle, $p \in \Re^n$ je slučajna promenljiva čiju ćemo očekivanu vrednost označiti sa $\bar{p} \in \Re^n$, a kovarijansu

[6] Harry Markowitz

sa $\Sigma \in S_+^n$. *Stoga je, za portfolio* $x \in \Re^n$, *prinos* r *(skalarna) slučajna promenljiva čija je očekivana vrednost* $\bar{p}^T x$ *i varijansa* $x^T \Sigma x$[7]. *Da bismo našli optimalan portfolio, moramo uzeti u obzir i očekivanu vrednost prinosa i njegovu varijansu.*

Što se tiče ograničenja portfolia, postoji širok spektar ograničenja koja se mogu posmatrati. Najjednostavniji skup ograničenja je dat sa:

$$\begin{aligned} x_i &\geq 0, \\ \mathbf{1}^T x &= B. \end{aligned}$$

Prvo ograničenje podrazumeva da nema kratkih pozicija, a drugo da je ukupni budžet koji se investira jednak B *(često se uzima da je* $B = 1$*).*

Na osnovu svega do sada rečenog, dobijamo klasičan problem optimizacije portfolia koji je uveo Markovic:

$$\begin{aligned} \textit{minimizirati} \quad & x^T \Sigma x \\ \textit{uz uslove} \quad & \bar{p}^T x \geq r_{min} \\ & \mathbf{1}^T x = 1 \\ & x \succeq 0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Vidimo da je to kvadratni problem. U ovom slučaju tražimo portfolio koji minimizira varijansu prihoda (koja meri rizičnost portfolia) i pri tom zavisi od: minimalne prihvatljive očekivane vrednosti prinosa koja se može dostići (r_{min}), *ograničenja koje se odnosi na zadovoljavanje budžeta portfolia i ograničenja kojim se isključuje mogućnost postojanja kratkih pozicija.*

Primetimo da se na problem (4.25) može primeniti Teorema 31 iz prethodne glave. Naime, on se može zapisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & f(x) = x^T \Sigma x \\ \text{uz uslove} \quad & a_1 x \geq b_1 \\ & a_j x \geq b_j, \ j = 2, ..., n+1 \\ & a_{n+2} x = b_{n+2}, \end{aligned}$$

pri čemu $x \in \Re^n$, $\Sigma \in S_+^n$, a_j, $j = 1, ..., n+2$, su vektori vrsta matrice $A \in \Re^{(n+2)\times n}$, a $b_j \in \Re$, odnosno:

$$\text{A}= \begin{bmatrix} \bar{p}_1 & . & . & . & . & \bar{p}_n \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} r_{min} \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

[7]Dokaz se može naći u [11].

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & . & . & \sigma_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & . & . & \sigma_{nn} \end{bmatrix},$$

gde je sa σ_{ij} označena kovarijansa i-te i j-te aktive, a sa $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ varijansa i-te aktive. Dopustiv skup ovog problema dat je sa:

$$X = \{x \in \Re^n \mid a_1 x \geq b_1,\ a_j x \geq b_j,\ j = 2, ..., n+1,\ a_{n+2} x = b_{n+2}\}.$$

Vidimo da skup X i funkcija f zadovoljavaju pretpostavke Teoreme 31. Pokazaćemo da važi uslov (c) te teoreme, tj. da

$$\text{za sve } y \text{ takve da je } Ay \leq 0 \text{ i } y \in N(Q) \text{ važi } c^T y \geq 0.$$

U našem primeru je c nula vektor i $Q = \Sigma$, pa sledi da je $c^T y = 0$, za svaki vektor y. Dakle, važi iskaz (c) Teoreme 31, pa sledi da je skup minimuma funkcije f nad skupom X neprazan.

4.5 Problemi oblika konusa drugog reda

Problem konveksne optimizacije, opštiji od linearnog i kvadratnog programa jeste *program oblika konusa drugog reda* (skraćeno ćemo ga zapisivati sa SOCP). Da bismo matematički formulisali ovaj problem, prvo ćemo definisati pojam konusa drugog reda. Dakle, konus drugog reda je zapravo konus povezan sa euklidskom normom, odnosno skup oblika

$$K = \{(x, \alpha) \in \Re^{n+1} \mid \sqrt{x^T x} \leq \alpha,\ \alpha \geq 0\}.$$

SOCP je zapravo problem sa linearnom funkcijom cilja i ograničenjima koja su delom linearna, a delom su u obliku konusa drugog reda. Dakle, SOCP je problem dat sa

$$\begin{array}{rl} \text{minimizirati} & f^T x \\ \text{uz uslove} & \|A_i x + b_i\|_2 \leq c_i^T x + d_i,\ i = 1, ..., m \\ & Fx = g, \end{array} \tag{4.26}$$

pri čemu je $x \in \Re^n$ promenljiva optimizacije, $A_i \in \Re^{n_i \times n}$ i $F \in \Re^{p \times n}$. Vidimo da je ograničenje tipa nejednakosti upravo *ograničenje oblika konusa drugog reda.*

Da je SOCP problem koji obuhvata širu grupu problema optimizacije, u odnosu na LP i QP, vidimo iz sledećeg:

- Ako kod problema (4.26) pretpostavimo da je $c_i = 0$, $i = 1, ..., m$, tada kvadriranjem svakog ograničenja dobijamo QCQP.

- Ako kod problema (4.26) pretpostavimo da je $A_i = 0$, $i = 1, ..., m$, tada dobijamo uopšteni LP.

Sada ćemo pokazati na koji način LP sa slučajnim ograničenjima možemo izraziti u obliku SOCP. Posmatrajmo problem oblika

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \;\; & c^T x \\ \text{uz uslov} \;\; & P\{a_i^T x \leq b_i\} \geq \eta, \; i = 1, ..., m. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Pretpostavićemo da su parametri a_i nezavisne Gausove[8] slučajne promenljive, sa sredinom $\bar{a}_i \in \Re^n$ i kovarijansom $\Sigma_i \in S_+^n$. Zatim, namećemo uslov da svako ograničenje $a_i^T x \leq b_i$ treba da važi sa verovatnoćom koja je veća od vrednosti η, pri čemu je $\eta \geq 0.5$, odnosno

$$P\{a_i^T x \leq b_i\} \geq \eta. \tag{4.28}$$

Pokazaćemo da ovo ograničenje može biti izraženo u obliku konusa drugog reda. Ako izaberemo da je $u = a_i^T x$, pri čemu je σ^2 varijansa od u, ograničenje (4.28) može biti zapisano kao:

$$P\Big\{\frac{u - \bar{u}}{\sigma} \leq \frac{b_i - \bar{u}}{\sigma}\Big\} \geq \eta.$$

Pošto je $\dfrac{u - \bar{u}}{\sigma}$ standardizovana Gausova slučajna promenljiva, sledi da je prethodna verovatnoća jednaka sa

$$\Phi\Big(\frac{b_i - \bar{u}}{\sigma}\Big).$$

Dakle, ograničenje (4.28) može biti izraženo u obliku

$$\frac{b_i - \bar{u}}{\sigma} \geq \Phi^{-1}(\eta),$$

ili, ekvivalentno,

$$\bar{u} + \Phi^{-1}(\eta)\sigma \leq b_i.$$

Iz $\bar{u} = \bar{a}_i^T x$ i $\sigma = (x^T \Sigma_i x)^{1/2}$ dobijamo

$$\bar{a}_i^T x + \Phi^{-1}(\eta)\|\Sigma_i^{1/2} x\|_2 \leq b_i.$$

Sada, zbog pretpostavke da je $\eta \geq 1/2$, važi da je $\Phi^{-1}(\eta) \geq 0$, pa je ovo ograničenje upravo ograničenje oblika konusa drugog reda.

Dakle, problem (4.27) može biti izražen kao SOCP oblika

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \;\; & c^T x \\ \text{uz uslov} \;\; & \bar{a}_i^T x + \Phi^{-1}(\eta)\|\Sigma_i^{1/2} x\|_2 \leq b_i, \; i = 1, ..., m. \end{aligned}$$

Sledi jedan primer primene prethodno opisane transformacije linearnog problema čija su ograničenja slučajna u problem oblika konusa drugog reda.

[8] Jochann Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

Primer 12. **Minimizacija portfolia sa ograničenjima rizika gubitka**

Ponovo posmatramo Markovicov portfolio opisan u primeru 11. Ovde ćemo pretpostaviti da je vektor stope prinosa $p \in \Re^n$ Gausova slučajna promenljiva, sa očekivanom vrednošću $\bar{p} \in \Re^n$ i kovarijansom $\Sigma \in S^n_+$. Tada je prinos portfolia r takođe Gausova slučajna promenljiva sa očekivanom vrednošću $\bar{p}^T x$ i varijansom $x^T \Sigma x$.

Posmatrajmo ograničenje rizika gubitka oblika

$$P\{r \leq \alpha\} \leq \beta, \tag{4.29}$$

gde je α dati neželjeni nivo prihoda (tj. veliki gubitak), a β data maksimalna verovatnoća. Kao što je prethodno pokazano, ovaj uslov možemo izraziti preko funkcije raspodele standardizovane Gausove slučajne promenljive. Naime, nejednakost (4.29) je ekvivalentna sa

$$\bar{p}^T x + \Phi^{-1}(\beta) \|\Sigma^{1/2} x\|_2 \geq \alpha.$$

Ako izaberemo da je $\beta \leq 1/2$ (tj. $\Phi^{-1}(\beta) \leq 0$), tada je ovo ograničenje rizika gubitka upravo ograničenje oblika konusa drugog reda. (Kada bi bilo $\beta > 1/2$, tada bi ograničenje rizika gubitka postalo nekonveksno u x.)

Problem maksimiziranja očekivanog prinosa zavisno od ograničenja rizika gubitka (pri čemu je $\beta \leq 1/2$), stoga, može biti zapisan kao SOCP sa jednim ograničenjem oblika konusa drugog reda, tj.

$$\begin{array}{rl} \textit{maksimizirati} & \bar{p}^T x \\ \textit{uz uslove} & \bar{p}^T x + \Phi^{-1}(\beta) \|\Sigma^{1/2} x\|_2 \geq \alpha \\ & x \succeq 0, \ \mathbf{1}^T x = 1. \end{array} \tag{4.30}$$

Postoje mnoga proširenja ovog problema. Na primer, možemo nametnuti nekoliko ograničenja rizika gubitka, tj.

$$P\{r \leq \alpha_i\} \leq \beta_i, \quad i = 1, ..., k,$$

pri čemu su $\beta_i \leq 1/2$. Ova ograničenja izražavaju rizike (β_i) koje smo spremni da prihvatimo za različite nivoe gubitka (α_i).

Primetimo da se na problem (4.30) može primeniti Teorema 30 iz prethodne glave. Naime, on se može zapisati na sledeći način:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizirati} & f(x) = -\bar{p}^T x \\ \text{uz uslove} & a_1 x \geq b_1 \\ & a_j x \geq b_j, \ j = 2, ..., n+1 \\ & a_{n+2} x = b_{n+2}, \end{array}$$

pri čemu $\bar{p}, x \in \Re^n$, a_j, $j = 1, ..., n+2$ su vektori vrsta matrice $A \in \Re^{(n+2) \times n}$, a $b_j \in \Re$, odnosno

$$A = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 & . & . & . & . & \bar{p}_n \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

gde je $b_1 = \alpha - \Phi^{-1}(\beta)\|\Sigma^{1/2}x\|_2$. Dopustiv skup ovog problema dat je sa

$$X = \{x \in \Re^n \mid a_1 x \geq b_1,\ a_j x \geq b_j,\ j = 2, ..., n+1,\ a_{n+2}x = b_{n+2}\}.$$

Vidimo da skup X i funkcija f zadovoljavaju pretpostavke Teoreme 30. Sada ćemo pokazati da je ispunjen uslov (b) te teoreme. Po definiciji dobijamo:

$$\begin{aligned} R_X = \{y \in \Re^n \mid a_1 y \geq 0,\ a_j y \geq 0, j = 2, .., n+1,\ a_{n+2} y = 0\}, \\ R_f = \{y \in \Re^n \mid \bar{p}^T y \geq 0\}, \\ L_f = \{y \in \Re^n \mid \bar{p}^T y = 0\}. \end{aligned}$$

Neka $y \in R_X \cap R_f$. Pretpostavimo suprotno, neka $y \notin L_f$, odnosno neka je $\bar{p}^T y > 0$. S obzirom da je stopa prinosa p_i, $i = 1, ..., n$, veličina koja može biti kako pozitivna tako i negativna, možemo pretpostaviti da su sve komponente vektora prinosa p negativne. Tada će i vektor očekivanih vrednosti $\bar{p}$ imati sve negativne komponente. Kako $y \in R_X$ sledi da je $a_j y \geq 0$, $j = 2, ..., n+1$, što je ekvivalentno sa $y_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$. Dakle, sledi da je za izabrani vektor stope prinosa $\bar{p}^T y < 0$. Dobili smo kontradikciju. Stoga, $y \in L_f$, tj. zadovoljen je uslov (b) Teoreme 30, na osnovu čega sledi da je skup minimuma funkcije f nad skupom X neprazan i moguće neograničen.

4.6 Semidefinitni problemi

Semidefinitni problemi obuhvataju linearne, kvadratne i probleme oblika konusa drugog reda. Oni predstavljaju specijalan slučaj jednog od najjednostavnijih problema konveksne optimizacije sa uopštenim nejednakostima - *problema oblika konusa* (ili *konusnog programa*). Konusni programi imaju linearnu funkciju cilja i jednu funkciju ograničenja tipa nejednakosti koja je afina (i stoga K-konveksna), odnosno to su problemi oblika

$$\begin{aligned} \text{minimizirati} \quad & c^T x \\ \text{uz uslove} \quad & Fx + g \preceq_K 0 \\ & Ax = b. \end{aligned} \tag{4.31}$$

U slučaju kada je konus K nenegativan oktant, problem konusnog oblika se svodi na LP, a u slučaju kada je $K = S_+^k$, tj. kada je K konus pozitivno semidefinitne matrice reda $k \times k$, tada se problem konusnog oblika naziva *semidefinitni program* (skraćeno ćemo ga označavati sa SDP) i ima oblik

$$\begin{array}{rl} \text{minimizirati} & c^T x \\ \text{uz uslove} & x_1 F_1 + \cdots + x_n F_n + G \preceq 0 \\ & Ax = b, \end{array} \tag{4.32}$$

pri čemu $G, F_1, ..., F_n \in S^k$ i $A \in \Re^{p \times n}$. Kod ovog problema ograničenje tipa nejednakosti predstavlja matričnu nejednakost i naziva se *linearna matrična nejednakost* (skraćeno LMI). U slučaju kada su matrice $G, F_1, ...F_n$ sve dijagonalne, tada je LMI iz problema (4.32) ekvivalentna sa skupom od n linearnih nejednakosti i SDP (4.32) se tada svodi na LP.

Za kraj navodimo još jedan primer iz oblasti finansija, pri čemu će nam, za razliku od prethodna dva primera, sada promenljiva optimizacije biti kovarijansna matrica. Pri rešavanju ovog problema koristi se jedan od oblika SDP.

Primer 13. **Ograničavanje rizičnosti portfolia uz nepotpune informacije o kovarijansi**

Opet posmatramo klasičan problem optimizacije Markovicovog portfolia, opisan u primeru 11. Dakle, portfolio se sastoji od n aktiva ili akcija, pri čemu x_i označava iznos aktive i koju posedujemo tokom nekog investicionog perioda, p_i označava stopu prinosa aktive i tokom tog perioda, a prinos portfolia je $p^T x$. Vektor stope prinosa p je modeliran tako da bude slučajna promenljiva, sa očekivanom vrednošću i kovarijansom:

$$\bar{p} = E(p), \quad \Sigma = E((p - \bar{p})(p - \bar{p})^T).$$

Prinos portfolia je stoga slučajna promenljiva sa očekivanom vrednošću $\bar{p}^T x$ i standardnom devijacijom $\sigma = (x^T \Sigma x)^{1/2}$. Rizik od velikog gubitka, tj. prinos portfolia koji je znatno ispod njegove očekivane vrednosti, je u direktnoj vezi sa standardnom devijacijom σ i raste proporcionalno sa njom. Iz tog razloga se standardna devijacija σ (ili varijansa σ^2) koristi kao mera rizika vezanog za portfolio.

U klasičnom problemu optimizacije portfolia, vektor portfolia x je promenljiva optimizacije, a minimizira se rizik zavisno od minimalne očekivane vrednosti prinosa i drugih ograničenja. Statistike prinosa $\bar{p}$ i Σ su poznati parametri problema. U ovom slučaju, kada posmatramo problem ograničavanja rizika, preformulisaćemo problem na sledeći način: pretpostavićemo da je vektor portfolia x poznat, ali su informacije vezane za kovarijansnu matricu Σ poznate samo delimično. Na primer, možemo imati gornju i donju granicu za svaku komponentu

$$L_{ij} \leq \Sigma_{ij} \leq U_{ij}, \quad i, j = 1, ..., n,$$

gde su L i U date matrice. Sada se postavlja pitanje: Šta je maksimalni rizik za naš portfolio, među svim matricama koje su konzistentne sa datim ograničenjima? **Najgori slučaj varijanse** *portfolia definišemo sa*

$$\sigma_{wc}^2 = \sup\{x^T \Sigma x \mid L_{ij} \le \Sigma_{ij} \le U_{ij},\ i,j = 1, ..., n,\ \Sigma \succeq 0\}.$$

Dodat je uslov $\Sigma \succeq 0$, koji kovarijansna matrica mora da zadovoljava.

σ_{wc} *možemo naći rešavanjem SDP*

$$\begin{aligned} \textit{minimizirati}\ \ & x^T \Sigma x \\ \textit{zavisno od}\ \ & L_{ij} \le \Sigma_{ij} \le U_{ij},\ i,j = 1, ...n \\ & \Sigma \succeq 0, \end{aligned} \tag{4.33}$$

sa promenljivom $\Sigma \in S^n$ i parametrima $x \in \Re^n$, $L, U \in \Re^{n,n}$. Optimalna matrica Σ je najgora kovarijansna matrica konzistentna sa datim ograničenjima komponenti matrice, pri čemu "najgora" znači najveći rizik za (dati) vektor portfolia x. Iz optimalnog rešenja SDP, Σ, lako možemo konstruisati raspodelu za p koja je konzistentna sa datim ograničenjima i dostiže varijansu najgoreg slučaja. Na primer, možemo izabrati

$$p = \bar{p} + \Sigma^{1/2} v,$$

pri čemu je v bilo koji slučajni vektor za koji važi $E(v) = 0$ i $E(vv^T) = E$.

Dodatak A

A.1 O strukturi $\Re^n$

U ovom, kao i u naredna dva odeljka, korišćena je literatura [5]. Element x prostora $\Re^n$ je uređena n-torka $(x_1, ..., x_n)$, pri čemu $x_i \in \Re$, $i = 1, ..., n$. U nastavku navodimo neka korisna svojstva prostora $\Re^n$. Izlaganje počinjemo apstraktnim pojmom metričkog prostora.

Definicija A.1.1. *Uređeni par (X, d) je* **metrički prostor** *ako je X neprazan skup, a $d : X \times X \to \Re$ funkcija za koju važi:*

1. $d(x, y) \geq 0$, $\forall\ x, y \in X$,
2. $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako je* $x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall\ x, y \in X$,
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall\ x, y, z \in X$.

Prostor $\Re^n$ je metrički prostor u kojem se metrika d može definisati sledećim funkcijama:

- $d_p(x, y) := \Big[(x_1 - y_1)^p + \cdots + (x_n - y_n)^p\Big]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$
- $d_\infty(x, y) := \max_{k=1,...,n}\{|x_k - y_k|\},$

za sve $x, y \in \Re^n$. Najčešće se koristi metrika $d_2(x, y)$ koja se naziva euklidska metrika. U metričkom prostoru se pojam konvergentnog niza definiše na sledeći način:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0,$$

pri čemu se pretpostavlja da je poznata definicija konvergentnog niza u $\Re$.

Definicija A.1.2. *Niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u metričkom prostoru (X, d) je* **Košijev** *ako važi*

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Definicija A.1.3. *Metrički prostor* (X, d) *je* **kompletan** *ako je u njemu svaki Košijev niz konvergentan.*

Neka je dat metrički prostor (X, d). *Otvorena lopta* sa centrom u $x_0 \in X$, poluprečnika $r > 0$, data je sa:

$$L_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}.$$

Definicija A.1.4. *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Skup* $\mathcal{O} \subset X$ *je otvoren skup ako za element* $x \in \mathcal{O}$ *postoji* $r > 0$ *tako da je* $L_r(x) \subset \mathcal{O}$. *Zatvoren skup je, po definiciji, komplement otvorenog skupa.*

Definicija A.1.5. *Neka je* τ *kolekcija otvorenih skupova* $\mathcal{O}$ *metričkog prostora* (X, d). *Tada važi:*

1. $X, \emptyset \in \tau$.

2. $\mathcal{O}_k \in \tau,\ k = 1, ..., n \Rightarrow \cap_{k=1}^{n} \mathcal{O}_k \in \tau$.

3. $\mathcal{O}_\lambda \in \tau,\ \lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda \in \tau$.

Struktura (X, τ) *sa navedenim svojstvima zove se* **topološki prostor**.

Dakle, metrički prostor (X, d) definiše topologiju τ.[1] Topologija u $\Re^n$ definisana pomoću lopti zove se uobičajena topologija.

Definicija A.1.6. *Prostor* $(X, \|\cdot\|)$ *je* **normiran** *ako preslikavanje dato sa* $\|\cdot\| : X \to \Re$ *zadovoljava sledeće uslove:*

1. $\|x\| \geq 0$ *i* $\|x\| = 0$ *ako i samo ako je* $x = 0$,

2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall\, x, y \in X$,

3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,\ \forall\, \alpha \in \Re,\ \forall\, x \in X$.

Prostor $\Re^n$ je i normiran prostor, sa normom:

$$\|x\| = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Svaki normiran prostor je metrički, jer normom možemo definisati metriku na sledeći način:

$$d(x, y) := \|x - y\|,\ \forall\, x, y \in X.$$

Kažemo da je ta metrika indukovana normom $\|\cdot\|$.

Kada je normiran prostor kompletan, on se zove *Banahov prostor*. S obzirom da prostor $\Re^n$ jeste kompletan, on je i Banahov prostor.

[1] U opštem slučaju, topološki prostor (X, τ) je struktura u kojoj kolekcija skupova τ ispunjava gore navedene uslove, pri čemu se otvoren skup ne definiše metrikom, nego pripadnošću kolekciji τ.

Definicija A.1.7. *U vektorskom prostoru X nad proizvoljnim poljem skalara P, preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to P$ za koje važi:*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ *i* $\langle x, x \rangle = 0$ *ako i samo ako je* $x = 0$,
2. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \ \forall \ \alpha, \beta \in P, \ \forall \ x, y, z \in X$,
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \ \forall \ x, y \in X$.

naziva se **skalarni proizvod**.

Radi jednostavnosti, posmatraćemo slučaj $P = \Re$. Skalarni proizvod indukuje normu na sledeći način:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \ x \in X.$$

Vektorski prostor $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zove se *predHilbertov prostor* (ili *unitarni* vektorski prostor), a ako je još i kompletan, onda se zove *Hilbertov prostor*.

Dakle, prostor $(\Re^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je Hilbertov, normiran, metrički vektorski prostor sa skalarnim proizvodom:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n,$$

za sve $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \Re^n$.

A.2 Kompaktnost

Sada ćemo, na nekoliko različitih načina, definisati svojstvo *kompaktnosti*. Podsetimo se, familija skupova ima svojstvo *konačnog preseka* ako svaka njena konačna podfamilija ima neprazan presek.

Teorema A.2.1. *Neka je $C \subset \Re^n$. Sledeći iskazi su ekvivalentni.*

- *Svaki otvoreni pokrivač skupa C sadrži konačan potpokrivač (Hajne[2]-Borelova[3] osobina).*
- *Svaki beskonačan podskup skupa C ima tačku nagomilavanja i ona pripada skupu C (Bolcano[4]-Vajerštrasova osobina).*
- *Svaki niz elemenata skupa C sadrži konvergentan podniz i granica tog podniza je element skupa C.*
- *C je zatvoren i ograničen.*
- *Svaka familija zatvorenih podskupova skupa C koja ima osobinu konačnog preseka ima neprazan presek (barem jednu zajedničku tačku).*

[2] Heinrich Eduard Heine (1821 - 1881)
[3] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871 - 1956)
[4] Bernard Bolcano (1781 - 1848)

Skup C koji ima neku od gore navedenih osobina zove se **kompaktan** *skup.*

U beskonačno-dimenzionim topološkim prostorima navedena teorema ne važi, pa se kompaktnost ne definiše kao zatvorenost i ograničenost, nego najčešće preko sledeće definicije.

Definicija A.2.1. *Topološki prostor (X, τ) je kompaktan ako i samo ako svaki otvoren pokrivač skupa X sadrži konačan potpokrivač.*

Jasno, $\Re^n$ sa uobičajenom topologijom nije kompaktan prostor.

A.3 Hiperravni

Definicija A.3.1. **Hiperravan** *u $\Re^n$ se definiše sa*

$$H_{a,\gamma} = \{x \in \Re^n \mid a^T x = \gamma\},$$

za fiksiran ne-nula vektor $a \in \Re^n$ i skalar $\gamma \in \Re$.

Skup $H_{a,\gamma}$ nije prazan. Kako je $a = (a_1, ..., a_n) \neq 0$ sledi da postoji indeks $j \in \{1, ..., n\}$ takav da je $a_j \neq 0$. Definišimo sada vektor $x = (x_1, ..., x_n)$ na sledeći način:

$$x_j := \frac{\gamma}{a_j},\ x_k := 0,\ k \neq j.$$

Jasno, $x \in H_{a,\gamma}$. Ako sada pretpostavimo da $x_0 \in H_{a,\gamma}$, onda važi

$$H_{a,\gamma} = H_{a,x_0} = \{x \in \Re^n \mid (x - x_0)^T a = 0\}.$$

Izraz $(x - x_0)^T a = 0$ označava ortogonalnost vektora $x - x_0$ i a, pa se vektor a zove i *normalni vektor* hiperravni $H_{a,\gamma}$.

Skupovi

$$\{x \in \Re^n \mid a^T x > \gamma\} \quad \text{i} \quad \{x \in \Re^n \mid a^T x < \gamma\}$$

se zovu *otvoreni poluprostori* (ili gornji, odnosno donji poluprostor respektivno). Njihova zatvaranja

$$\{x \in \Re^n \mid a^T x \geq \gamma\} \quad \text{i} \quad \{x \in \Re^n \mid a^T x \leq \gamma\}$$

se zovu *zatvoreni poluprostori.*

Definicija A.3.2. *Hiperravan $H_{a,\gamma}$ je* **potporna hiperravan** *za skup C u tački $x_0 \in \Re^n$ ako je $a^T x \geq \gamma$ za sve $x \in C$ i $a^T x_0 = \gamma$. Vektor a se naziva* **potporni vektor** *za skup C u tački x_0.*

A.4 Osnovni pojmovi teorije verovatnoće

U ovom odeljku je korišćena literatura [13]. Osnovni model u teoriji verovatnoće jeste eksperiment kod koga ostvarivanje određenih uslova ne dovodi do jednoznačnog rezultata. Skup svih (logički) mogućih ishoda nekog eksperimenta označićemo sa Ω. Elemente skupa Ω nazivamo elementarnim događajima i označavamo sa ω.

Definicija A.4.1. Slučajan događaj *A (ili samo događaj A) je podskup skupa elementarnih događaja Ω. On se sastoji od onih elementarnih događaja ω koji imaju svojstvo kojim se događaj A definiše.*

Aksioma 1. (Aksioma σ-polja) *Podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$ je σ-polje (σ-algebra) nad Ω ako važe uslovi:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. *ako* $A \in \mathcal{F}$, *onda* $A^C \in \mathcal{F}$[5],
3. *ako* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, *onda* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Primer σ-polja definisanog nad skupom $\Re$ je *Borelovo σ-polje* $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Re)$, koje se formira pomoću familije poluotvorenih intervala $[a,b), a,b \in \Re$. Borelovo σ-polje $\mathcal{B}(\Re)$ sadrži sve skupove koji se dobijaju kao konačne ili prebrojive unije ili preseci te familije, kao i skupove koji se dobijaju uzimanjem komplemenata.

Aksioma 2. (Aksioma verovatnoće) *Neka je Ω skup elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ-polje nad Ω. Funkcija $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ se zove* **verovatnoća** *na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ ako zadovoljava sledeće uslove:*

1. $P(\Omega) = 1$,
2. *ako* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i,j \in \mathbb{N}$, *onda važi*

$$P\Big(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Prostor verovatnoća je uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gde je Ω skup svih elementarnih događaja, $\mathcal{F}$ σ-polje nad Ω, a P verovatnoća na $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definicija A.4.2. *Familija $A_1, A_2, ...$ događaja iz $\mathcal{F}$ je* **nezavisna u parovima** *ako važi*

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j), \quad \forall\ i,j \in \mathbb{N},\ i \neq j.$$

[5]Sa A^C je označen događaj suprotan događaju A.

Familija $A_1, A_2, ...$ događaja iz $\mathcal{F}$ je **nezavisna u ukupnosti** *(ili samo nezavisna) ako važi*

$$P(A_{k_1}...A_{k_n}) = P(A_{k_1}) \cdots P(A_{k_n}),$$

za svaki konačni niz indeksa $k_1, ..., k_n$, takvih da je $k_1 < ... < k_n$.

Definicija A.4.3. *Preslikavanje $X : \Omega \to \Re$ je* **slučajna promenljiva** *nad prostorom verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ za svako $S \in \mathcal{B}$, gde je $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Re)$ Borelovo σ-polje. Slučajnu promenljivu zovemo još i $\mathcal{F}$-merljivo preslikavanje.*

Kako je u prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verovatnoća definisana za svaki skup iz $\mathcal{F}$ i kako je $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ za svako $S \in \mathcal{B}(\Re)$, sledi da je za svako $S \in \mathcal{B}(\Re)$ definisana funkcija

$$P_X(S) = P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in S\} = P(X^{-1}(S)).$$

Funkcija $P_X(S)$, $S \in \mathcal{B}(\Re)$, naziva se *raspodela verovatnoća slučajne promenljive X.*

Definicija A.4.4. *Funkcija $F_X(x) : \Re \to [0, 1]$ definisana sa*

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x)) = P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\},$$

naziva se **funkcija raspodele** *slučajne promenljive X.*

Funkcija raspodele postoji i jedinstvena je za svaku slučajnu promenljivu. Slučajne promenljive mogu biti proste (primaju konačno mnogo vrednosti), diskretne (primaju prebrojivo mnogo vrednosti) i apsolutno neprekidne (primaju neprebrojivo mnogo vrednosti).

Definicija A.4.5. *Slučajna promenljiva X je* **diskretna** *(diskretnog tipa) ako postoji prebrojiv skup brojeva R_X takav da je $P\{X \in R_X^C\} = 0$, odnosno ako je skup slika od X najviše prebrojiv skup.*

Ako je $R_X = \{x_1, x_2, ...\}$ skup različitih vrednosti slučajne promenljive X diskretnog tipa, tada ćemo sa $p(x_i)$, $i \in \mathbb{N}$, označiti verovatnoću događaja $\{X = x_i\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$:

$$p(x_i) = P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\} = P\{X = x_i\},\ i \in \mathbb{N}.$$

Definicija A.4.6. *Slučajna promenljiva X je* **apsolutno neprekidnog tipa** *ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $\varphi_X(x)$, $x \in \Re$, takva da je:*

$$P\{X \in S\} = \int_S \varphi_X(x)dx, \quad \forall\ S \in \mathcal{B}(\Re).$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ zove se **gustina raspodele verovatnoća** *(ili samo gustina raspodele) slučajne promenljive X.*

U svakoj tački u kojoj je funkcija φ_X neprekidna važi:

$$F_X'(x) = \varphi_X(x).$$

Apsolutno neprekidna slučajna promenljiva X ima *normalnu (Gausovu) raspodelu* $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, gde $m \in \Re$ i $\sigma > 0$, ako je njena gustina raspodele data sa:

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \Re.$$

U slučaju kada su parametri normalne raspodele $m = 0$ i $\sigma^2 = 1$ dobijamo normalnu $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu koja se naziva *standardizovana* normalna raspodela. Funkcija raspodele standardizovane normalne raspodele se obeležava sa $\Phi(x)$, odnosno:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Funkcija $\Phi(x)$ se naziva Laplasova[6] funkcija i ona ima sledeće osobine:

1. $\Phi(0) = 0$.
2. $\Phi(x) = 0.5$, za svako $x \geq 5$.
3. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
4. Za slučajnu promenljivu $X : \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ važi:

$$F_X(x) = 0.5 + \Phi\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big).$$

5. Verovatnoća da slučajna promenljiva $X : \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ uzme vrednost na intervalu (a,b) se može izraziti pomoću Laplasove funkcije, tj.

$$P\{a < X < b\} = \Phi\Big(\frac{b-m}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-m}{\sigma}\Big).$$

U nastavku definišemo n-dimenzione slučajne promenljive.

Definicija A.4.7. *Preslikavanje* $X = (X_1, ..., X_n)$, $X : \Omega \to \Re^n$, *jeste* **n-dimenziona slučajna promenljiva** *na prostoru verovatnoća* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ako za svako* $S \in \mathcal{B}(\Re^n)$ *važi*

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in S\} = \{X \in S\} = X^{-1}(S) \in \mathcal{F},$$

pri čemu je $\mathcal{B}(\Re^n)$ *Borelovo* σ*-polje dimenzije* n.

[6]Pierre-Simon, Marquis de Laplace (1749 - 1827)

Teorema A.4.1. *Preslikavanje* $X = (X_1, ..., X_n)$*,* $X : \Omega \to \Re^n$*, jeste* n*-dimenziona slučajna promenljiva ako i samo ako je svaka koordinata* X_i*,* $i = 1, ..., n$*, jednodimenziona slučajna promenljiva.*

Definicija A.4.8. *Funkcija raspodele* n*-dimenzione slučajne promenljive* $X = (X_1, ..., X_n)$ *je*

$$F_X(x_1, ..., x_n) = P(\{X_1 < x_1\} \cap ... \cap \{X_n < x_n\}),\ -\infty < x_1, ..., x_n < \infty.$$

Definicija A.4.9. *Slučajna promenljiva* $X = (X_1, ..., X_n)$ *je* n*-dimenziona diskretna slučajna promenljiva ako postoji prebrojiv skup tačaka u* $\Re^n$

$$R_X = \left\{ \left(x_1^{(k_1)}, ..., x_n^{(k_n)} \right) \mid k_1, ..., k_n \in \mathbb{N} \right\}$$

takav da $P\{X \in R_X^C\} = 0$*. Skup* R_X *je skup svih mogućih vrednosti za* X*.*

Definicija A.4.10. *Slučajna promenljiva* $X = (X_1, ..., X_n)$ *je* n*-dimenziona slučajna promenljiva apsolutno neprekidnog tipa ako postoji integrabilna funkcija* $\varphi_X(x_1, ..., x_n) \geq 0$*,* $-\infty < x_1, ..., x_n < \infty$*, takva da je, za svaki Borelov skup* $S \in \mathcal{B}(\Re^n)$*,*

$$P\{(X_1, ..., X_n) \in S\} = \int_S ... \int \varphi_X(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n.$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ *zove se gustina raspodele verovatnoća (ili samo gustina raspodele) slučajne promenljive* X*.*

U svakoj tački u kojoj je funkcija φ_X neprekidna važi

$$\frac{\partial^n F_X(x_1, ..., x_n)}{\partial x_1 ... \partial x_n} = \varphi_X(x).$$

Definicija A.4.11. *Slučajne promenljive* $X_1, X_2, ...$ *su* **nezavisne** *ako su događaji* $X_1^{-1}(S_1), X_2^{-1}(S_2), ...$ *nezavisni, za sve Borelove skupove* $S_i \in \mathcal{B}(\Re)$*,* $i = 1, 2, ...$

Teorema A.4.2. *Neka su* $X_1, ..., X_n$ *slučajne promenljive na prostoru verovatnoća* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Potreban i dovoljan uslov da slučajne promenljive* $X_1, ..., X_n$ *budu nezavisne je da važi*

$$F_{(X_1, ..., X_n)}(x_1, ..., x_n) = F_{X_1}(x_1) ... F_{X_n}(x_n).$$

Neka je data raspodela $P_X(S)$, $S \in \mathcal{B}(\Re^n)$, n-dimenzione slučajne promenljive $X = (X_1, ..., X_n)$ i Borelova funkcija[7] $f : \Re^n \to \Re^m$ definisana pomoću

[7] $f : \Re^n \to \Re^m$ je *Borelova funkcija* ako zadovoljava sledeće:

$$f^{-1}(S) \in \mathcal{B}(\Re^n), \quad \text{za svako } S \in \mathcal{B}(\Re^m).$$

m funkcija $f_k : \Re^n \to \Re$, $k = 1, ..., m$. *Transformacija* slučajne promenljive X je m-dimenziona slučajna promenljiva $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ data sa

$$Y_k = f_k(X_1, ..., X_n), \ k = 1, ..., m,$$

pri čemu se njena raspodela $P_Y(S)$, $S \in \mathcal{B}(\Re^m)$, određuje na osnovu sledeće činjenice: Za svaki Borelov skup $S \in \mathcal{B}(\Re^m)$ događaji

$$\{Y \in S\} \ \text{ i } \ \{X \in f^{-1}(S)\}$$

su ekvivalentni, pa je

$$P\{Y \in S\} = P\{X \in f^{-1}(S)\}, \quad S \in \mathcal{B}(\Re^m).$$

Definicija A.4.12. Očekivanje $E(X)$ **diskretne** *slučajne promenljive* X *sa raspodelom* $p(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$, *definiše se sa*

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k)$$

i postoji ako i samo ako je zadovoljeno

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p(x_k) < \infty.$$

Definicija A.4.13. Očekivanje $E(X)$ **apsolutno neprekidne** *slučajne promenljive* X, *sa gustinom* $\varphi_X(x)$, *definiše se sa*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_X(x) dx$$

i postoji ako i samo ako gornji integral apsolutno konvergira, odnosno ako je zadovoljeno

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi_X(x) dx < \infty.$$

Definicija A.4.14. Momenat *reda* k, $k \in \mathbb{N}$, *slučajne promenljive* X *je* $E(X^k)$. **Centralni momenat** *reda* k, $k \in \mathbb{N}$, *slučajne promenljive* X *je*

$$E((X - E(X))^k).$$

Definicija A.4.15. *Centralni momenat reda 2 slučajne promenljive* X *zove se* **disperzija** *ili* **varijansa** *slučajne promenljive* X *i označava se sa* $D(X)$ *ili* $\sigma^2(X)$.

Definicija A.4.16. Standardna devijacija *ili* **standardno odstupanje** *slučajne promenljive* X *se definiše sa*

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Definicija A.4.17. *Neka je X slučajna promenljiva sa očekivanjem $E(X)$ i disperzijom $D(X)$. Standardizovana (normalizovana) slučajna promenljiva X^* je tada*

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}.$$

Teorema A.4.3. *Neka je X^* standardizovana slučajna promenljiva. Tada je*

$$E(X^*) = 0 \text{ i } D(X^*) = 1.$$

Definicija A.4.18. Kovarijansa *slučajne promenljive (X, Y) se definiše sa*

$$cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

A.5 Neki pojmovi matematičke statistike

U ovom odeljku je korišćena literatura [14]. Matematička statistika predstavlja opštu teorijsku osnovu za planiranje i tumačenje rezultata eksperimenta sa slučajnim ishodima. Osnova matematičke statistike je teorija verovatnoće.

Definicija A.5.1. *Skup svih elemenata na kojima se proučava neka pojava naziva se* **statistički skup** *ili* **populacija**. *Broj elemenata u populaciji naziva se* **obim populacije** *i obeležava se sa N.*

Populacija mora biti *homogena*, odnosno njeni elementi moraju imati bar jednu zajedničku osobinu.

Definicija A.5.2. *Osobine po kojima se elementi populacije razlikuju nazivaju se* **statistička obeležja** *ili kratko* **obeležja**. *Ako je $E = \{e_i\}_{i \in I}$ populacija, obeležje je preslikavanje $X : E \to S$, gde je S skup vrednosti obeležja.*

Primetimo da obeležje odgovara pojmu slučajne promenljive u teoriji verovatnoće. Osnovni zadatak statistike je određivanje raspodele posmatranog obeležja na datoj populaciji. U nekim situacijama je moguće ovaj zadatak izvršiti ispitivanjem cele populacije, ali to najčešće nije slučaj.

Definicija A.5.3. Metod uzorka *podrazumeva biranje podskupa populacije na određeni način i ispitivanje vrednosti obeležja X na njegovim elementima. Taj podskup se naziva* **uzorak**, *konačan je, a broj njegovih elemenata se naziva* **obim uzorka** *i obično se obeležava sa n.*

Osnovna ideja metode uzorka je da se zaključci o obeležju X koji su dobijeni za uzorak prenesu, tj. generalizuju na celu populaciju. Uslov koji se pri tom postavlja je da je uzorak reprezentativan.

Definicija A.5.4. *Uzorak je* **reprezentativan** *ako u najvećoj meri odražava karakteristike populacije.*

Jedan od načina da se postigne reprezentativnost je da se elementi u uzorak biraju slučajno i po određenim pravilima teorije verovatnoće.

Definicija A.5.5. **Slučajan uzorak** *je onaj uzorak koji se dobija postupkom kod kojeg svaki element populacije ima istu šansu (verovatnoću) da bude izabran u uzorak.*

U skladu sa pojmovima teorije verovatnoće, populaciju E možemo posmatrati kao skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta, a samo obeležje X kao slučajnu promenljivu $X : E \to \Re$. Kada smo izabrali uzorak obima n, na svakom elementu populacije izabranom u uzorak se posmatra obeležje X.

Definicija A.5.6. *Registrovanje vrednosti obeležja X na svakom elementu uzorka naziva se* **statistički eksperiment**. *Niz dobijenih vrednosti*

$$(x_1, ..., x_n)$$

naziva se **realizovani uzorak**.

Za neki drugi izabrani uzorak elemenata populacije, dobili bismo drugi niz vrednosti obeležja X, odnosno neki drugi realizovani uzorak. Zato je prirodno posmatrati slučajne promenljive $X_1, ..., X_n$, pri čemu slučajna promenljiva X_i, $i = 1, ..., n$, predstavlja vrednost obeležja na i-tom elementu populacije izabranom u uzorak. Svaka od ovih slučajnih promenljivih ima istu raspodelu kao i osnovno obeležje X, a ako je uzorak pravilno izabran, smatramo da su slučajne promenljive $X_1, ..., X_n$ nezavisne.

Definicija A.5.7. *Neka se na populaciji E posmatra obeležje X.* **Prost slučajan uzorak** *obima n za obeležje X je n-torka nezavisnih slučajnih promenljivih $(X_1, ..., X_n)$ od kojih svaka ima istu raspodelu kao i obeležje X.*

Definicija A.5.8. *Neka je $(X_1, ..., X_n)$ prost slučajan uzorak obima n za obeležje X i neka je $f : \Re^n \to \Re^s$ Borelova funkcija. Slučajna promenljiva $Y = f(X_1, ..., X_n)$ je* **statistika** *ako u njoj ne figurišu nepoznati parametri.*

Neke od statistika koje se često koriste su:

- sredina uzorka
$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$
- momenti uzorka
$$M_r = \bar{X}_n^r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r, \ r \in \mathbb{N},$$
- disperzija uzorka

– kada je srednja vrednost obeležja, m, poznata:

$$\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2,$$

– kada srednja vrednost obeležja, m, nije poznata:

$$\bar{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \bar{X}_n^2,$$

- standardna devijacija uzorka

$$\hat{S}_n = \sqrt{\hat{S}_n^2}, \quad \bar{S}_n = \sqrt{\bar{S}_n^2},$$

itd.

Prilikom ispitivanja obeležja X, često su poznate neke informacije o raspodeli tog obeležja, odnosno poznato je da njegova raspodela pripada nekoj familiji raspodela $\{F(x,\lambda),\ x \in \Re,\ \lambda \in \Lambda\}$, gde je skup Λ skup parametara. Ova familija raspodela naziva se *dopustiva familija raspodela* za obeležje X, a skup Λ se naziva *dopustiv skup parametara.*

Neka je $(X_1, ..., X_n)$ prost slučajan uzorak. Postavlja se pitanje kako na osnovu njega oceniti nepoznati parametar i na taj način potpuno odrediti raspodelu obeležja X. Ocenjivanje parametara može biti tačkasto i intervalno.

Definicija A.5.9. *Ako obeležje X ima dopustivu familiju raspodela*

$$\{F(x,\lambda),\ x \in \Re,\ \lambda \in \Lambda\},$$

tačkasto ocenjivanje parametara *vrši se izborom neke statistike $U = f(X_1, ..., X_n)$ i za ocenu nepoznatog parametra se uzima realizovana vrednost te statistike. Statistika U se naziva* **tačkasta ocena parametra** λ.

A.6 Pojam stohastičkog procesa

U ovom odeljku je korišćena literatura [15].

Definicija A.6.1. *Neka je dat proizvoljan neprazan skup indeksa I i neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća. Familija $\{X(t),\ t \in I\}$ slučajnih promenljivih koje uzimaju vrednosti iz skupa $\Re^n$ se zove* **stohastički** *ili* **slučajni proces** *sa parametarskim skupom I i sa vrednostima iz $\Re^n$.*

Ako je I konačan skup, onda jednostavno radimo sa konačno mnogo slučajnih promenljivih. Ako je $I = \mathbb{Z}$ ili $I = \mathbb{N}$, tada govorimo o stohastičkom (slučajnom) nizu ili stohastičkom (slučajnom) redu. U nastavku ćemo podrazumevatida je I interval $[t_0, T]$ na realnoj osi $\Re$.

Na osnovu definicije vidimo da stohastički proces $\{X(t),\ t \in [t_0, T]\}$ zavisi od dve promenljive: $t \in [t_0, T]$ i $\omega \in \Omega$. Ako je $\{X(t),\ t \in [t_0, T]\}$ stohastički proces sa vrednostima iz $\Re^n$, tada je, za svako fiksirano $t \in [t_0, T]$, $X_t(\cdot)$ jedna slučajna promenljiva sa vrednostima iz $\Re^n$. Ukoliko fiksiramo $\omega \in \Omega$, tada je $X_.(\omega)$ funkcija čije su vrednosti iz skupa $\Re^n$ i koja je definisana na intervalu $[t_0, T]$. Ova funkcija se naziva *trajektorija* ili *realizacija* stohastičkog procesa $\{X(t),\ t \in [t_0, T]\}$ sa vrednostima iz $\Re^n$.

A.7 Optimizacija portfolia

U ovom odeljku je korišćena literatura [16]. *Portfolio* je finansijski pojam koji predstavlja kolekciju finansijskih aktiva (akcija, obveznica ili novca) u posedu investicione kompanije, finansijske institucije ili fizičkog lica. Matematičkim jezikom, portfolio je funkcija data sa

$$\pi(x) = x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n,$$

pri čemu je sa A_i, $i = 1, ..., n$, označena i-ta aktiva koju poseduje neko pravno, odnosno fizičko lice, a sa x_i, $i = 1, ..., n$, je označen deo ukupnog kapitala uložen u i-tu aktivu. Svaka od aktiva donosi određeni prinos, ali i sadrži određeni rizik. Glavni cilj pri upravljanju portfoliom jeste ostvarenje maksimalnog profita od aktiva uz minimalni rizik. Postoje mnogi rizici sa kojima se investitori susreću, a neki od njih su: tržišni rizik, valutni rizik, politički rizik, kreditni rizik, rizik likvidnosti, itd. Na neke od njih se može uticati, dok na neke ne može.

Pod upravljanjem portfoliom se zapravo podrazumeva rešavanje sledećeg problema optimizacije: *pronaći optimalnu raspodelu kapitala na odgovarajuće aktive (optimalan portfolio), tako da prinos bude maksimalan, a rizik od ulaganja minimalan. Dopustiv skup* ovog problema optimizacije definiše se sa

$$\mathcal{D} = \Big\{ x \in \Re^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1, ..., n \Big\}.$$

Ograničenje $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ podrazumeva da je ukupan kapital koji se investira jednak 1, dok drugo ograničenje $x_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$, podrazumeva da ni jedna investicija nema negativan kapital. Situacija kada je dozvoljeno da za neko i važi $x_i < 0$ naziva se *kratka pozicija* i podrazumeva da je deo ukupnog kapitala x_i pozajmljen.

Kako je kretanje cena aktiva kroz vreme nepoznato, ono predstavlja slučajnu promenljivu koja ima očekivanu vrednost (matematičko očekivanje) i u sebi nosi određeni rizik koji merimo varijansom, odnosno standardnim odstupanjem. Iz tog razloga se za modeliranje kretanja cena aktiva najčešće koriste stohastički procesi, odnosno tzv. *stohastički modeli*.

Teorija portfolia je prvi put detaljnije razvijena od strane Harija Markovica 50-tih godina prošlog veka.

Literatura

[1] Dimitri P. Bertsekas, Angelia Nedić, Asuman E. Ozdaglar (2003), "Convex Analysis and Optimization", Athena Scientific, Belmont, Massachusetts

[2] Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe (2004), "Convex Optimization", Cambridge University Press, New York

[3] Debasis Mishra (2010), "Convex Sets with Application to Economics", Indian Statistical Institute, New Delhi, India

[4] Aharon Ben-Tal and Arkadi Nemirovsky (2001), "Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, Engineering Applications",MPS - SIAM Series on Optimization, SIAM, Philadelphia

[5] Nenad Teofanov, Ljiljana Gajić (2006), "Predavanja iz optimizacije", Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno - matematički fakultet, Institut za matematiku

[6] Ljiljana Gajić (1988), "Teorija optimizacije", Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno - matematički fakultet, Institut za matematiku

[7] Haitham Hindi, "A Tutorial on Convex Optimization", Palo Alto Research Center (PARC), Palo Alto, California

[8] Daniel Fylstra, "Introducing Convex and Conic Optimization for the Quantitative Finance Professional", Wilmott magazine

[9] Danijel Nađ (2003), "Operaciona istraživanja", skripta sa predavanja

[10] Thomas S. Ferguson, "Linear Programming", A Concise Introduction

[11] Sonja Rauški (2011), "Optimizacija portfolia kada je vreme izlaska neizvesno", Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno - matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku

[12] Zhihua Zhang (2011), Convex Analisys, Basic Concepts: www.cs.zju.edu.cn/people/zhzhang/papers/CONVEXlecture1.pdf

[13] Danijela Rajter-Ćirić (2008), "Verovatnoća", Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno - matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku

[14] Zagorka Cvetković-Lozanov (2009), "Statistika", skripta, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno - matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku

[15] Danijela Rajter-Ćirić (2005), "Stohastička analiza", skripta, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno - matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku

[16] Nataša Krejić (2009), "Finansijska matematika II", beleške sa predavanja, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno - matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku

[17] www.scribd.com/doc/57046187/Linearno-programiranje1-1

[18] www.econ.ucsd.edu/jsobel/172aw02/notes8.pdf

[19] www.wikipedia.org

Kratka biografija

Bojana Antonić je rođena 2. decembra 1987. godine u Bačkoj Topoli. Završila je Osnovnu školu "Nikola Tesla" u Bačkoj Topoli 2002. godine kao nosilac Vukove diplome, a potom, 2006. godine, Ekonomsku srednju školu "Bosa Milićević" u Subotici. Odmah po završetku srednje škole upisuje studije na Prirodno - matematičkom fakultetu u Novom Sadu, Departman za matematiku i informatiku, smer matematika finansija. U septembru 2010. godine diplomira sa prosečnom ocenom $8,53$ i stiče stručni naziv Diplomirani matematičar. Iste godine upisuje master studije na istom fakultetu, smer primenjena matematika, modul finansijska matematika. Zaključno sa julom 2011. godine, položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*
TD

Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*
TZ

Vrsta rada: *Master rad*
VR

Autor: *Bojana Antonić*
AU

Mentor: *dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu*
MN

Naslov rada: *Konusi opadanja sa primenom*
NR

Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP

Jezik izvoda: *srpski/engleski*
JI

Zemlja publikovanja: *Srbija*
ZP

Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP

Godina: *2012*
GO

Izdavač: *Autorski reprint*
IZ

Mesto i adresa: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
MA

Fizički opis rada: *(4/103/0/0/30/0/0)*
(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)

FO

Naučna oblast: *matematika*
NO

Naučna disciplina: *Optimizacija*
ND

Predmetna odrednica/ključne reči: *Konveksnost, konveksni skup, konus, konveksna funkcija, efektivni domen, nadgraf, konveksni omotač, relativna unutrašnjost, zatvaranje, neprekidnost, pravac opadanja, konus opadanja, linealni prostor, nepraznost preseka, kompaktnost, problemi optimizacije, optimalno rešenje, konveksni problemi, linearni problemi, linearno - razlomački problemi, kvadratni problemi, problemi oblika konusa drugog reda, semidefinitni problemi*
PO

UDK:

Čuva se: *u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku*
ČU

Važna napomena: *nema*
VN

Izvod: *Tema ovog rada su konusi opadanja. U prvom poglavlju uvedeni su osnovni pojmovi i definicije iz oblasti konveksne analize i optimizacije. U drugom poglavlju je razvijena teorija konusa opadanja. Formulisane su i dokazane njihove osobine. Zatim je pokazano na koji način se konusi opadanja koriste za uopštavanje nekih osnovnih osobina kompaktnih skupova na zatvorene konveksne skupove. Treće poglavlje govori o primeni teorije konusa opadanja na osnovni problem koji se javlja u teoriji optimizacije - egzistenciju optimalnih rešenja. Na kraju, kroz četvrto poglavlje, se upoznajemo sa problemima optimizacije uopšte, kao i sa nekim specijalnim oblicima problema konveksne optimizacije. Za svaki od njih je naveden po jedan primer primene u praksi iz oblasti ekonomije, odnosno finansija.*
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *07.12.2011.*
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: *dr Ljiljana Gajić, redovni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu*
Član: *dr Sanja Rapajić, vanredni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

Mentor: *dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: *Monograph type*
DT

Type of record: *Printed text*
TR

Contents Code: *Master's thesis*
CC

Author: *Bojana Antonić*
AU

Mentor: *Dr. Nenad Teofanov, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad*
MN

Title: *Recession cones with application*
TI

Language of text: *Serbian*
LT

Language of abstract: *Serbian/English*
LA

Country of publication: *Serbia*
CP

Locality of publication: *Vojvodina*
LP

Publication year: *2012*
PY

Publisher: *Author's reprint*
PU

Publication place: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
PP

Physical description: *(4/103/0/0/30/0/0)*
PD

Scientific field: *Mathematics*
SF

Scientific discipline: *Optimization*
SD

Subject/Key words: *Convexity, convex set, cone, convex function, effective domain, epigraph, convex hull, relative interior, closure, continuity, direction of recession, recession cone, lineality space, nonemptiness of intersection, compactness, optimization problems, optimal solution, convex problems, linear problems, linear - fractional problems, quadratic problems, second - order cone problems, semidefinite problems*
SKW

UC:

Holding data: *In library of Department of Mathematics and Informatics*
HD

Note: *none*
N

Abstract: *Subject of this master's thesis are recession cones. Basic definitions, concepts, and results from convex analysis and convex optimization are introduced in the first chapter. In the second chapter, there is developed the theory of recession cones and are formulated and proved their properties. Then, it is shown how recession cones are using for generalizing some basic properties of compact sets to closed convex sets. The third chapter speaks about application of theory of recession cones to a basic optimization issue - existence of optimal solutions. On the end, through the fourth chapter, we are introducing with optimization problems in general and with some special cases of convex optimization problems. For each of them, there is given one example of their application in practice, more precise in economics, i.e. in finance.*
AB

Accepted by Scientific Board on: *07.12.2011.*
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: *Dr. Ljiljana Gajić, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad*

Member: *Dr. Sanja Rapajić, Associate Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad*

Mentor: *Dr. Nenad Teofanov, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad*