UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Biljana Šijačić

MODELI PREBUKIRANOSTI

- završni rad -

Novi Sad, oktobar 2009.

Sadržaj:

PREDGOVOR

Tema ovog rada su matematički modeli prebukiranosti koji se koriste u raznim uslužnim ustanovama. Cilj ovih modela je da se odredi optimalan nivo prebukiranosti, tako da se maksimizira ukupni očekivani profit date ustanove. Prvo su navedeni neki matematički modeli koji se primenjuju u avio kompanijama, hotelima i zdravstvenim ustanovama. Nakon toga, navedeni su rezultati primene ovih modela u realnim problemima. I na samom kraju, model prebukiranosti je primenjen na jedan novosadski hotel.

Ovom prilikom bih se zahvalila svim profesorima i asistentima sa kojima sam imala prilike da sarađujem tokom studiranja, na ukazanom znanju. Posebno bih želela da se zahvalim svom mentoru, *dr Zorani Lužanin*, za svu pomoć pri izradi ovog rada, kao i za znanje koje sam stekla tokom rada sa njom.

Novi Sad, oktobar 2009. Biljana Šijačić

1. UVOD

U ovom radu, razmotrićemo matematičke modele koji se koriste u problemima prebukiranosti u nekoliko različitih ustanova.

Osnovni problem sa kojim se suočavaju avio kompanije, hoteli, kao i zdravstvene ustanove, je pitanje rezervacije. Veoma često se dešava da potpuno rezervisani avionski letovi poleću sa značajnim brojem slobodnih mesta, a razlog tome su putnici koji se nisu pojavili na terminalu za čekiranje karata, kao i putnici koji su otkazali svoje rezervacije pred sam let. U hotelijerstvu, dešava se da se neko od gostiju koji su rezervisali sobe u hotelu iz različitih razloga ne pojavi, neke rezervacije se otkazuju ili se promene u poslednjem trenutku, neki gosti hotela neplanirano skrate svoj boravak, pa kao posledica svega toga nastaje velik broj nekorišćenih soba. U zdravstvenim ustanovama problem nastaje usled nepojavljivanja pacijenata na njihovim zakazanim pregledima. Sve ove ustanove imaju potrebu da nadoknade gubitke koji nastaju zbog nedolazaka putnika, gostiju ili pacijenata, i to čine namernim prebukiranjem.

Prebukiranost (*overbooking*) je strategija koja je postala uobičajena praksa u avio kompanijama i hotelijerstvu, ali i u zdravstvenim ustanovama. U avio kompaniji, ova strategija podrazumeva prodaju većeg broja karata za neki let nego što je kapacitet tog leta, u hotelijerstvu rezervaciju više soba nego što ih je na raspolaganju, dok se u zdravstvenim ustanovama prebukiranost odnosi na zakazivanje pregleda većem broju pacijenata nego što ima slobodnih termina. Osnovni cilj primene ove strategije je maksimizacija profita.

Postoji nekoliko različitih modela prebukiranosti koji su našli primenu kako u avio kompanijama i hotelijerstvu, tako i u zdravstvu. Svaki od tih modela prilagođen je ustanovi u kojoj se primenjuje, odnosno koristi promenljive koje su od relevantnog značaja za datu ustanovu. Ono što je zajedničko za sve ove modele, je da svaki od njih kao rezultat daje optimalnu strategiju prebukiranosti (*optimal level of overbookings*) (optimalan broj karata koji bi trebalo prodati, odnosno optimalan broj soba koje mogu da se rezervišu, odnosno optimalan broj pregleda koje treba zakazati), da bi se maksimizirao ukupan očekivani profit ustanove.

Ovde ćemo razmotriti strukturu nekoliko različitih modela prebukiranosti koji su našli primenu u avio kompanijama, hotelijerstvu i zdravstvenim ustanovama. Takođe ćemo navesti i neka od mogućih uopštenja tih modela, kao i uticaje nekih faktora i parametara na same modele. Zatim ćemo se upoznati sa rezultatima primene tih modeli na realne probleme nekih avio kompanija i zdravstvenih ustanova. Rezultati koji će biti navedeni, zasnivaju se na [1], [3] i [4]. Na samom kraju videćemo kako model prebukiranosti može da se primeni na jedan novosadski hotel i kakve rezultate je dao taj model.

2. MATEMATIČKI PAKET

2.1 PROSTOR VEROVATNOĆA

2.1.1 Slučajan događaj

Osnovni pojam od kojeg se polazi je ***eksperiment (opit)*** kod koga ishod nije jednoznačno (deterministički) određen. Skup svih (logičkih) mogućih ishoda nekog eksperimenta označavamo sa Ω, a njegove elemente označavamo ω_1, ω_2, ... i zovemo ***elementarni događaji***.

Slučajan događaj A je podskup skupa Ω, koji se sastoji od onih elementarnih događaja koji imaju svojstvo koje taj događaj definiše.

Primer:

Posmatraćemo eksperiment bacanje pravilne kockice za igru.

Skup mogućih ishoda ovog eksperimenta je:

$$\begin{array}{l} \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ \quad\;\;\;\; \downarrow\;\downarrow \;\;\; \ldots \;\;\; \downarrow \\ \quad\;\;\;\; \omega_1\omega_2 \;\; \ldots \;\; \omega_6 \end{array}$$

Ako za slučajan događaj A uzmemo da je:

A - pao je paran broj

tada je

$$A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega \qquad \blacksquare$$

Kažemo da se događaj ***realizovao (desio)***, ukoliko se desi neki od elementarnih događaja koji ga čine.

Skup svih mogućih ishoda Ω je događaj koji se uvek realizuje i zato se on naziva ***siguran događaj***. Prazan skup je ***nemoguć događaj*** i on se nikad ne može desiti.

Definicija: Slučajan događaj $A \cap B$ zove se ***presek*** događaja A i B i realizuje se ako i samo ako se realizuju i događaj A i događaj B. Presek $A \cap B$ se kraće može označavati sa AB. Ako je $A \cap B = \emptyset$ kažemo da se događaji A i B međusobno isključuju.

Definicija: Događaj $A \cup B$ zove se ***unija*** događaja A i B i realizuje se ako i samo ako se realizuje bar jedan od događaja A i B.

Aksiom σ-polja: Neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$

(2) $A \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \bar{A} \in \mathcal{F}$

(3) $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$

onda se $\mathcal{F}$ zove ***σ-polje (σ-algebra) događaja***.

2.1.2 Pojam verovatnoće

Statistička definicija verovatnoće:

Pretpostavimo da n puta ponavljamo eksperiment. Ono što nas interesuje je događaj A. Neka je m broj realizacija događaja A. Tada je

$$\frac{m}{n}$$

relativna učestalost događaja A. Kako se broj ponavljanja eksperimenta n povećava, tako se količnik $\frac{m}{n}$ „stabilizuje“. Na primer, ako pravilnu kockicu bacamo n puta, za dovoljno veliko n, dobili bismo da je

$$\frac{m}{n} \approx \frac{1}{6}$$

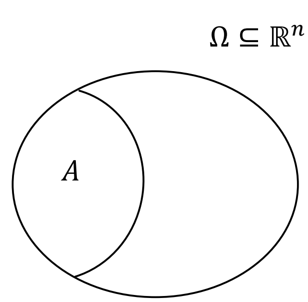
gde je m broj pojavljivanja bilo kog broja na kockici.

Geometrijska definicija verovatnoće:

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (slika 2.1). ***Verovatnoća događaja*** A je tada:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

gde je m mera događaja A (dužina, površina, zapremina).



Slika 2.1

Laplasova (klasična) definicija verovatnoće:

Ovde podrazumevamo da je Ω konačan skup, odnosno:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

i $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Zatim, posmatraćemo događaj

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\} \subseteq \Omega$$

i neka je

$$\mathrm{P}\{\omega_{i_m}\} = \mathrm{P}_m$$

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2 = \cdots = \mathrm{P}_k = \frac{1}{n}$$

Tada je ***verovatnoća događaja*** A jednaka:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{k}{n}$$

Ako pored događaja A, posmatramo i događaj

$$B = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_l}\}$$

takav da je $AB = \emptyset$, znamo da je verovatnoća događaja B jednaka:

$$\mathrm{P}(B) = \frac{l}{n}$$

Ali veoma često nas interesuje kolika je verovatnoća unije ova dva događaja. Kako je

$$A \cup B = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}, \omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_l}\}$$

dobijamo da je:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{k+l}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

Aksiomatska definicija verovatnoće:

Neka je:

$\Omega \neq \emptyset$ - skup svih mogućih ishoda

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ – σ-polje događaja

Funkcija $\mathrm{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ za koju važi:

(1) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$

(2) $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{F};\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P}(\sum_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}(A_i)$

zove se ***verovatnoća*** na $\mathcal{F}$.

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ zove se ***prostor verovatnoće***. Za događaj $A \in \mathcal{F}$, verovatnoća događaja A označava se $\mathrm{P}(A)$. Ako je $A \neq \Omega$ i $\mathrm{P}(A) = 1$, tada se događaj A zove ***skoro siguran događaj***. Ako je $A \neq \emptyset$ i $\mathrm{P}(A) = 0$, tada se događaj A zove ***skoro nemoguć događaj***.

Definicija: Uslovna verovatnoća, u oznaci $\mathrm{P}(A|B)$, je verovatnoća događaja A pod uslovima koji sigurno dovode do realizacije događaja B ($\mathrm{P}(B) > 0$):

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}$$

2.2 SLUČAJNE PROMENLJIVE

Pojam slučajne promenljive je jedan od osnovnih pojmova teorije verovatnoće. Cilj je da se svakom $\omega \in \Omega$ na određeni način dodeli numerička karakteristika $X(\omega)$. Da bi X bila slučajna promenljiva, potrebna je izvesna merljivost, odnosno $X^{-1}([a,b)) \in \mathcal{F}$, gde je

$$X^{-1}([a,b)) = \{a \leq X < b\} = \{\omega \in \Omega | a \leq X(\omega) < b\}$$

Definicija: Preslikavanje $X: \Omega \to \mathbb{R}$ zove se ***slučajna promenljiva*** nad $(\Omega, \mathcal{F})$ ako $\forall B \in \mathcal{B}$ važi

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

($\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ je Bulova algebra generisana poluzatvorenim idealima).

Ukoliko je $X(\Omega)$ konačan skup, X se zove ***prosta slučajna promenljiva***.

Definicija: Neka je dat prostor verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Tada za svako $S \in \mathcal{B}$ definišemo funkciju:

$$\mathrm{P}_X(S) = \mathrm{P}\big(X^{-1}(S)\big) = \mathrm{P}\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in S\}$$

koja se zove ***raspodela verovatnoće*** slučajne promenljive X.

Postoje dva osnovna tipa slučajnih promenljivih, a to su:

- Diskretne slučajne promenljive
- Slučajne promenljive apsolutno-neprekidnog tipa

2.2.1 Diskretne slučajne promenljive

Definicija: Slučajna promenljiva X je ***diskretnog tipa (diskretna)*** ako je skup njenih vrednosti $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ prebrojiv.

Diskretnu slučajnu promenljivu možemo zapisati na dva načina:

(1) Šematski prikaz:

$$X \colon \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{pmatrix}$$ - ***zakon raspodele*** slučajne promenljive X

gde je $p_i = \mathrm{P}\{X = x_i\}$, a $\{X = x_i\}$ je oznaka za $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i\}$.

(2) Analitički prikaz:

$$X,\ \mathrm{P}\{X = x_k\} = p_k \quad k = 1,2,\dots$$

Neke od diskretnih slučajnih promenljivih su:

- Bernulijeva diskretna promenljiva $\mathcal{B}(n, p)$
- Poasonova slučajna promenljiva $\mathcal{P}(\lambda)$
- Slučajna promenljiva sa geometrijskom raspodelom $\mathcal{G}(p)$

Bernulijeva diskretna promenljiva

Bernulijeva šema: U jednom eksperimentu posmatramo samo događaj A, tj. $\Omega = \{A, \bar{A}\}$. Neka je

$$\mathrm{P}(A) = p$$

$$\mathrm{P}(\bar{A}) = q = 1 - p$$

Eksperiment se ponavlja n puta, pri čemu uslovi eksperimenta moraju biti isti za svako ponavljanje i rezultat jednog ponavljanja ne zavisi od rezultata nekog drugog ponavljanja. Dalje, vrši se prebrojavanje koliko puta se desio događaj A u tih n ponavljanja. Mogući broj pojavljivanja događaja A je $0,1, \dots, n$.

Definicija: Neka je u Bernulijevoj šemi fiksiran događaj A, a eksperiment se ponavlja n puta. Slučajna promenljiva S_n koja predstavlja broj pojavljivanja događaja A u n ponavljanja eksperimenta zove se ***Bernulijeva slučajna promenljiva***.

Skup vrednosti Bernulijeve slučajne promenljive je:

$$R_{S_n} = \{0,1, \dots, n\}$$

Verovatnoća da se u n ponavljanja eksperimenta događaj A desio tačno k puta, tj. verovatnoća da slučajna promenljiva S_n primi vrednost k je jednaka:

$$\mathrm{P}\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad k = 0,1,2,\dots,n$$

Tada slučajna promenljiva ima sledeći zakon raspodele:

$$S_n\colon \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ \binom{n}{0} p^0 q^n & \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} & \dots & \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \dots & \binom{n}{n} p^n q^0 \end{pmatrix}$$

koji se zove ***binomna raspodela***.

Slučajnu promenljivu S_n koja ima binomnu raspodelu sa parametrima n i p, zapisujemo na sledeći način:

$$S_n\colon \mathcal{B}(n,p)$$

2.2.2 Funkcija raspodele slučajne promenljive

Definicija: Funkcija raspodele slučajne promenljive X je preslikavanje $F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ definisano sa

$$F_X(x) = P\{X < x\} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funkcija raspodele jedinstveno određuje slučajnu promenljivu.

Primer:

Neka je data prosta slučajna promenljiva:

$$X\colon \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Tada je njena funkcija raspodele:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le x_1 \\ p_1 & x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2 & x_2 < x \le x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 & x_3 < x \le x_4 \\ \vdots & \vdots \\ p_1 + \dots + p_{n-1} & x_{n-1} < x \le x_n \\ 1 & x > x_n \end{cases}$$

■

2.2.3 Slučajne promenljive apsolutno-neprekidnog tipa

Definicija: Slučajna promenljiva X je ***apsolutno-neprekidnog tipa*** ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $\varphi_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$, takva da je za sve $S \in \mathcal{B}$:

$$\mathrm{P}\{X \in S\} = \int_S \varphi_X(x)dx$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ zove se ***gustina raspodele*** slučajne promenljive X.

Veza između funkcije raspodele i gustine raspodele slučajne promenljive:

$$F_X(x) = \mathrm{P}\{X < x\} = \mathrm{P}\{-\infty < X < x\}$$

$$\Downarrow$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(x)dx$$

Neki tipovi apsolutno-neprekidnih slučajnih promenljivih su:

- Uniformna raspodela $\mathcal{U}(a, b)$
- Eksponencijalna raspodela $\mathcal{E}(\lambda)$
- Normalna raspodela $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

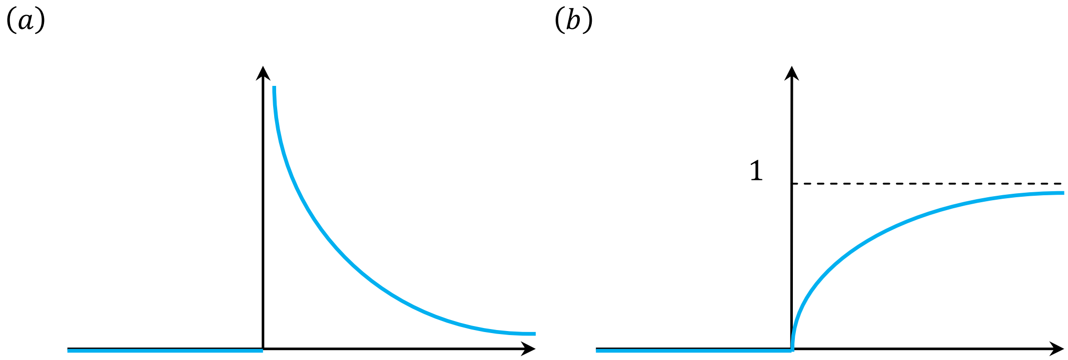
Eksponencijalna raspodela $\boldsymbol{X}\colon \boldsymbol{\mathcal{E}(\lambda)}$

Eksponencijalna raspodela ima jedan parametar λ i data je gustinom:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Njena funkcija raspodele je

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

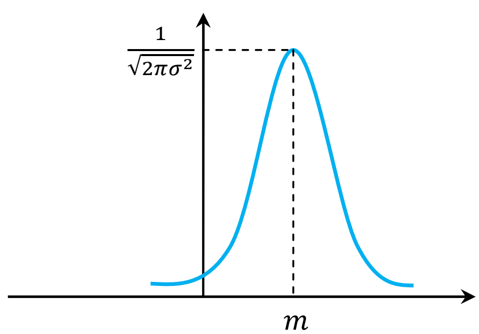


Slika 2.2 (a)*Funkcija gustine eksponencijalne raspodele;*
(b) *Funkcija raspodele eksponencijalne raspodele*

Normalna raspodela $\boldsymbol{\mathcal{N}(m, \sigma^2)}$

Normalna (Gausova) raspodela ima dva parametra $m \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$. Gustina ove raspodele je:

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in \mathbb{R}$$



Slika 2.3 *Funkcija gustine normalne raspodele*

Njena funkcija raspodele je:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Približna funkcija raspodele je $\Phi(x)$ (Laplasova funkcija).

Specijalno, za $m = 0$ i $\sigma = 1$, dobijamo tzv. ***centriranu (normalizovanu) normalnu raspodelu*** $\boldsymbol{\mathcal{N}(0, 1)}$, čija je gustina:

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

a funkcija raspodele:

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Moavr – Laplasova teorema: Neka je u Bernulijevoj šemi $n \to \infty$. Tada:

$$\mathrm{P}\left\{a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

2.2.4 Nezavisnost slučajnih promenljivih

Definicija: Slučajne promenljive X_1, X_2, ... su ***nezavisne*** ako su događaji ${X_1}^{-1}(S_1)$, ${X_2}^{-1}(S_2)$, ..., $S_1, S_2, \ldots \in \mathcal{B}$, nezavisni.

Teorema: Neka je (X, Y) diskretna slučajna promenljiva sa raspodelom $p(x_i, y_j)$, $i = 1,2, \ldots, j = 1,2, \ldots$. X i Y su nezavisne slučajne promenljive ako i samo ako je:

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j) \qquad \forall i, j$$

2.2.5 Uslovne raspodele

Neka je $\{Y \in S\}$, $S \in \mathcal{B}$, događaj koji ima pozitivnu verovatnoću realizacije $\mathrm{P}\{Y \in S\} > 0$. ***Uslovna raspodela*** za X pod uslovom $\{Y \in S\}$ može da se definiše na sledeći način:

$$F_X(x|\{Y \in S\}) = \frac{\mathrm{P}(\{X < x\} \cap \{Y \in S\})}{\mathrm{P}\{Y \in S\}} \qquad S \in \mathcal{B}, x \in \mathbb{R}$$

a funkcija $F_X(x|\{Y \in S\})$ se zove ***funkcija raspodele uslovnih verovatnoća*** za X pod uslovom $\{Y \in S\}$.

Ako je (X, Y) diskretna slučajna promenljiva sa raspodelom $p(x_i, y_j)$ i ako je $\mathrm{P}\{Y = y_j\} > 0$, tada definišemo:

$$p(x_i|y_j) = \mathrm{P}(\{X = x_i\}|\{Y = y_j\})$$
$$= \frac{P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})}{\mathrm{P}\{Y = y_j\}} = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}$$

Dakle, ta ***uslovna verovatnoća*** je:

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}$$

za $i = 1,2, \ldots$, dok je j fiksirano (uslov pod kojim se radi).

2.3 NUMERIČKE KARAKTERISTIKE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

2.3.1 Matematičko očekivanje

Predstavu o tome šta je matematičko očekivanje (očekivana vrednost, srednja vrednost) slučajne promenljive vezujemo za predstavu o verovatnoći kao broju oko koga se grupišu relativne učestalosti kada se broj opita neograničeno povećava.

Definicija: ***Matematičko očekivanje diskretne slučajne promenljive*** X sa raspodelom $p(x_k)$ $k = 1,2, \ldots$, u oznaci $\mathrm{E}(X)$, je:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k)$$

i postoji ako i samo ako je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p(x_k) < \infty$$

Definicija: ***Matematičko očekivanje apsolutno-neprekidne slučajne promenljive*** X je:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_X(x) dx$$

i ono postoji ako

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi_X(x) dx < \infty$$

Teorema: Ako su X_1, X_2, ... , X_n diskretne slučajne promenljive za koje postoje očekivanja $\mathrm{E}(X_1)$, $\mathrm{E}(X_2)$, ... , $\mathrm{E}(X_n)$, tada je

$$\mathrm{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \cdots + \mathrm{E}(X_n)$$

2.3.2 Uslovno matematičko očekivanje

Definicija: Neka je (X,Y) diskretna slučajna promenljiva sa raspodelom $p(x_i,y_j)$, $i,j = 1,2,...$. ***Uslovno očekivanje*** za X ako je $Y = y_j$ definiše se na sledeći način:

$$\mathrm{E}(X|Y = y_j) = \sum_i x_i p(x_i|y_j) = \sum_i x_i \cdot \frac{p(x_i,y_j)}{p(y_j)}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{E}(X|Y = y_j) = \frac{1}{p(y_j)} \sum_i x_i p(x_i,y_j)$$

Skup tačaka $\left(\mathrm{E}(X|Y = y_j), y_j\right)$, $j = 1,2,...$ zove se ***regresija slučajne promenljive X po slučajnoj promenljivoj Y*** i označava se $\mathrm{E}(X|Y)$.

Ako su X i Y nezavisne, onda je $p(x_i|y_j) = p(x_i)$, pa je

$$\mathrm{E}(X|Y) = \mathrm{E}(X)$$

Definicija: Neka je (X,Y) apsolutno-neprekidna slučajna promenljiva sa gustinom $\varphi_{(X,Y)}(x,y)$, $-\infty < x,y < \infty$. ***Uslovno matematičko očekivanje*** za X ako je $Y = y$ definiše se kao:

$$\mathrm{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_X(x|y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{\varphi_{(X,Y)}(x,y)}{\varphi_Y(y)}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{E}(X|Y = y) = \frac{1}{\varphi_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_{(X,Y)}(x,y)$$

2.3.3 Disperzija

Definicija: Momenat reda n, $n = 1, 2, ...$, slučajne promenljive X je $\mathrm{E}(X^n)$. Centralni ***momenat reda n***, $n = 1, 2, ...$ slučajne promenljive X je

$$\mathrm{E}\left[\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^n\right].$$

Definicija: Centralni momenat reda 2 slučajne promenljive X zove se ***disperzija slučajne promenljive*** X, tj.

$$\mathrm{D}(X) = \mathrm{E}\left[\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2\right].$$

Lema: Disperzija slučajne promenljive X je:

$$\mathrm{D}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2$$

Definicija: Standardizovana (normalizovana) slučajna promenljiva X je

$$X^* = \frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{D}(X)}}$$

	$\mathrm{E}(X)$	$\mathrm{D}(X)$
$X: \mathcal{B}(n, p)$	np	npq
$X: \mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ
$X: \mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
$X: \mathcal{U}(a, b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$X: \mathcal{E}(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$X: \mathcal{N}(m, \sigma^2)$	m	σ^2

Tabela 2.1 *Očekivanje i disperzija nekih slučajnih promenljivih*

3. PREBUKIRANOST U AVIO KOMPANIJAMA

Problem sa kojim se suočavaju mnoge avio kompanije je da potpuno rezervisani avionski letovi često poleću sa velikim brojem slobodnih mesta. Razlog tome su putnici koji se nisu pojavili na terminalu za čekiranje karata, ali i putnici koji su otkazali svoje rezervacije pred sam let. Mnoge avio kompanije žele da nadoknade gubitke koji nastaju zbog takvih putnika i to čine namernim prebukiranjem. Avio kompanije su shvatile neophodnost ove strategije, u smislu da kroz pažljivo kontrolisanu prebukiranost mogu da smanje broj praznih mesta u avionu, a u isto vreme rade u javnom interesu jer mogu da smeste više putnika.

Strategija prebukiranosti u avio kompanijama podrazumeva prodaju većeg broja karata za neki let nego što je kapacitet tog leta. Kao posledica primene ove strategije, neki putnici će možda biti prekobrojni na letu za koji su već kupili karte. Avio kompanija je dužna da takvim putnicima plati neku naknadu, a troškovi koji tom prilikom nastaju bitno utiču na profit avio kompanije. Putnici koji su prekobrojni na nekom letu mogu da pristanu ili da odbiju da pregovaraju sa avio kompanijom o visini naknade.

U slučaju kada putnici ne žele da se odreknu svojih karata, tj. kada su nedobrovoljno prekobrojni, avio kompanija propisuje skup regulativa na osnovu kojih se određuje visina naknade koju dobijaju takvi putnici. Međutim, takve formule za visinu naknade nelinearno zavise od cene karte i vremena koje prekobrojni putnici moraju da provedu čekajući na sledeći let ka svom odredištu. Kada su putnici spremni da dobrovoljno odustanu od leta, avio kompanija koristi nagodbu ili aukciju.

Postoji nekoliko različitih modela prebukiranosti koji mogu da se primene u avio kompanijama. Cilj svakog modela je da se odredi optimalna strategija prebukiranosti tj. optimalan broj karata koje bi trebalo prodati za neki let, da bi se maksimizirao ukupan očekivani profit kompanije.

Ovde ćemo razmotriti dva modela prebukiranosti koja se primenjuju u avio kompanijama: osnovni i statički model.

3.1 OSNOVNI POJMOVI

- **Putnici sa kartama** (***Ticketholders***): Putnici koji su kupili karte i avio kompanija već ima prihod od tih karata.

- **Putnici koji se pojavljuju na izlazu** (***Contenders***): Putnici sa kartama koji su se pojavili na izlazu do vremena predviđenog za ukrcavanje na let za koji su kupili kartu.

- **Putnici koji su se ukrcali** (***Boarded Passengers***): Putnici koji uspešno mogu da se ukrcaju na svoj let.

- **Prekobrojni putnici** (***Bumped Passengers***): Putnici koji su se pojavili na izlazu, ali nisu dobili mesta na svom letu.

- **Dobrovoljno prekobrojni putnici** (***Voluntarily Bumped Passengers***): Prekobrojni putnici koji odustaju od svojih mesta u zamenu za neku vrstu naknade (obično novčanu) od strane avio kompanije.

- **Nedobrovoljno prekobrojni putnici** (***Involuntarily Bumped Passengers***): Prekobrojni putnici koji protiv svoje volje moraju da odustanu od leta.

- **Troškovi naknade** (***Compensation Costs***): Ukupna novčana vrednost koju je avio kompanija dala prekobrojnim putnicima.

- **Kapacitet leta** (***Flighted Capacity***): Ukupan broj mesta na datom letu.

- **Prebukiranost** (***Overbooking***): Strategija prodavanja većeg broja karata za jedan let nego što je kapacitet tog leta.

- **Vreme čekanja** (***Waiting Time***): Vreme koje prekobrojni putnik mora da provede čekajući na naredni let ka svojoj destinaciji.

- **Koeficijent popunjenosti** (***Load Factor***): Odnos broja popunjenih mesta u avionu i kapaciteta aviona.

3.2. OSNOVNE PRETPOSTAVKE

- Svi letovi su domaći (posmatra se američko tržište), direktni i u jednom pravcu. (Team 180, [4])

- Svim putnicima je na raspolaganju samo jedna klasa na letu i mogu da kupe samo jednu vrstu karata, koje ne mogu da se vrate, već jedino mogu da se prebace za neki naredni let iste kompanije. (Leder, Spagniole, Wild, [3])

- Vreme čekanja između dva leta je jednako vremenu do poletanja sledećeg leta za određenu destinaciju. (Team 180, [4])

- Cena karte ne zavisi od trenutka kada je kupljena. (Team 180, [4])

3.3 OSNOVNI MODEL

3.3.1 Model[1]

U ovom modelu očekivani profit posmatramo kao funkciju strategije prebukiranosti za jedan let i kao rezultat dobijamo strategiju koja maksimizira profit.

Neka C predstavlja kapacitet leta i neka su sva mesta na letu jednaka. Zatim, neka je cena karte T i ona je nezavisna od trenutka kada je kupljena. Još pretpostavljamo da avio kompanija želi da proda najviše B karata, $B > C$.

Prvo ćemo posmatrati slučaj kada je let u potpunosti rasprodat, tj. svih B karata je prodato.

Neka je X binomna slučajna promenljiva koja predstavlja broj putnika koji su se pojavili na izlazu, ako je prodato B karata. Dakle,

$$X : \mathcal{B}(B, p)$$

pri čemu je p verovatnoća da se putnik sa kartom pojavi na izlazu. Vrednost p za određeni let zavisi od nekoliko faktora, na primer, vremena leta, dužine leta, destinacije, da li je sezona odmora... Zbog mogućeg variranja p od leta do leta, uradićemo našu analizu za neki skup mogućih vrednosti za p.

Verovatnoća da se od B putnika sa kartama tačno i putnika pojavi na izlazu je jednaka:

$$\mathrm{P}\{X = i\} = \binom{B}{i} p^i (1-p)^{B-i} \tag{3.1}$$

Pretpostavićemo da svaki prekobrojni putnik dobija iste troškove naknade koji iznose:

$$(k+1)T$$

za neku pozitivnu konstantu k. Ovo znači da prekobrojni putnik dobija naknadu jednaku ceni svoje karte plus još neku dodatnu naknadu $kT > 0$.

Sada ćemo definisati funkciju troškova naknade $F(i, C)$ kao ukupnu naknadu koju avio kompanija mora da plati ako se tačno i putnika sa kartama pojavilo na izlazu za let sa kapacitetom C:

$$F(i, C) = \begin{cases} 0 & i \leq C \\ (k+1)T(i-C) & i > C \end{cases}$$

Očekivani profit R, kao funkcija strategije prebukiranosti B, je tada:

$$R(B) = \sum_{i=1}^{B} \binom{B}{i} p^i (1-p)^{B-i} \big(BT - F(i, C)\big) \tag{3.2}$$

[1] Team 180, [4]

Sada, za dato C, p i k, moguće je odrediti optimalnu strategiju prebukiranosti B_{opt} koja maksimizira $R(B)$.

Gubitak koji kompanija ima po jednom prekobrojnom putniku je

$$T-(k+1)T=-kT$$

Ovaj gubitak je k puta veći od profita u slučaju da se putnik ukrcao na let, T. Iz tog razloga se pretpostavlja da optimalna strategija prebukiranosti treba da se izabere tako da je raspodela za putnike koji su se pojavili u nekakvoj ravnoteži i da $\frac{1}{k+1}$ ove raspodele odgovara prekobrojnim putnicima, a ostatak $\frac{k}{k+1}$ odgovara putnicima koji su se ukrcali. To znači, da verovatnoća da se putnici koji su se pojavili na izlazu ukrcaju na let treba da bude jednaka $\frac{k}{k+1}$, odnosno:

$$\mathrm{P}\{X\leq C\}=\frac{k}{k+1}$$

Da bismo odredili optimalnu strategiju, standardizovaćemo binomnu raspodelu putnika koji su se pojavili koristeći Moavr – Laplasovu teoremu.

$$\frac{k}{k+1}=\mathrm{P}\{X\leq C\}=\mathrm{P}\left\{\frac{X-Bp}{\sqrt{Bp(1-p)}}\leq\frac{C-Bp}{\sqrt{Bp(1-p)}}\right\}$$

$$=\mathrm{P}\left\{X^{*}\leq\frac{C-Bp}{\sqrt{Bp(1-p)}}\right\}=\Phi\left(\frac{C-Bp}{\sqrt{Bp(1-p)}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{C-Bp}{\sqrt{Bp(1-p)}}=\Phi^{-1}\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

gde je $\Phi(x)$ funkcija raspodele standardne normalne raspodele $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^{2}}dt$$

Rešavanjem po B dobijamo:

$$B'_{opt}=\left(\frac{-\Phi^{-1}\left(\frac{k}{k+1}\right)\sqrt{p(1-p)}+\sqrt{\Phi^{-1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{2}p(1-p)+4pC}}{2p}\right)^{2}\qquad(3.3)$$

kao analitičku aproksimaciju za B_{opt}. Primetimo još da je za $k=1$:

$$B'_{opt}=\frac{C}{p}$$

Ovaj model koji je naveden je dosta pojednostavljen. U modelu se pretpostavlja da je funkcija troškova naknade za prekobrojne putnike konstantna. Osim toga, ne pravi se razlika između dobrovoljno i nedobrovoljno prekobrojnih putnika. U ovom modelu se još pretpostavlja da su sve karte identične, tj. da svi putnici lete turističkom klasom. Takođe, pretpostavlja se da je prodato svih B karata koje je kompanija pustila u prodaju, što nije uvek slučaj za sve letove.

Pored svega ovog, osnovni model uspešno analizira neke od najvažnijih promenljivih u problemu prebukiranosti – prihod kao funkciju strategije prebukiranosti u zavisnosti od promene kapaciteta aviona, verovatnoće da se putnik pojavi na izlazu i funkciju troškova naknade.

3.3.2 Uticajni faktori

Na model mogu da utiču i neki drugi faktori, od kojih su najznačajnija sledeća četiri faktora:

- **Faktor saobraćaja** (***Traffic Factor***) – Broj i raspored letova ka destinaciji na kojoj određujemo prebukiranost. Što su letovi ređi, visina naknade će biti veća.
- **Faktor bezbednosti** (***Security Factor***) – Bezbednost u i okolo aerodroma je značajno povećana nakon napada 11. septembra 2001. godine[2].
- **Faktor straha** (***Fear Factor***) – Putnici su oprezniji od opasnosti tokom leta, kao što su napadi terorista, pad aviona i narušavanje bezbednosti na aerodromima.
- **Faktor finansijskog gubitka** (***Financial Loss Factor***) – U periodu nakon napada 11. septembra 2001. godine, američke avio kompanije su izgubile milijarde dolara prihoda, zbog smanjenja potražnje za letovima, povećanja troškova bezbednosti i povećanja industrijskog rizika.

Međutim, samo dva od ova četiri faktora su od velikog značaja za osnovni model: to su faktor bezbednosti i faktor straha.

Faktor bezbednosti utiče na smanjenje verovatnoće p da se putnik sa kartom pojavi na izlazu. Sa druge strane, kao posledicu faktora straha imamo da je veći broj onih koji lete zato što moraju. Pošto je verovatnije da će se takvi putnici pojaviti na svojim letovima, faktor straha povećava p.

3.3.3 Uopštenje osnovnog modela: uvođenje više klasa

Kao što smo ranije spomenuli, osnovni model je posmatrao slučaj kada su sve karte za let identične, tj. svi putnici lete istom klasom. Međutim, većina avio kompanija prodaje karte za različite klase, najčešće su to prva klasa i turistička klasa. Iz tog razloga, uopštićemo osnovni model uvođenjem više klasa na letu.

---

[2] Napadi 11. septembra 2001. godine – Teroristički napadi protiv Sjedinjenih Američkih Država, u kojima su srušene kule bliznakinje Svetskog trgovinskog centra (*The World Trade Center Towers*) u Njujorku.

Zbog jednostavnosti, posmatraćemo slučaj kada na letu postoje dve klase: prva klasa i turistička klasa. Neka je u avionu C_1 mesta prve klase i C_2 mesta turističke klase. Neka je cena karte za prvu klasu T_1, a za turističku klasu T_2. Posmatraćemo strategiju prebukiranosti koja dozvoljava prodaju najviše B_1 karata za prvu klasu i najviše B_2 karata za turističku klasu, a pri tome prodaja različitih vrsta karata odvija se nezavisno jedna od druge.

Neka putnik koji je kupio kartu za prvu klasu dolazi na izlaz sa verovatnoćom p_1, a putnik sa kartom za turističku klasu sa verovatnoćom p_2. U ovom modelu, koristimo dve nezavisne binomne raspodele. Za putnike sa kartama za prvu klasu je verovatnije da će se pojaviti na izlazu u odnosu na putnike sa kartama za turističku klasu, jer su oni mnogo više platili svoje karte, pa je stoga $p_1 > p_2$.

Verovatnoća da će se na izlazu pojaviti tačno i putnika sa kartama za prvu klasu, ako je prodato B_1 karata, je:

$$\binom{B_1}{i} p_1^i (1-p_1)^{B_1-i}$$

dok je verovatnoća da će se na izlazu pojaviti tačno j putnika sa kartama za turističku klasu, ako je prodato B_2 karata:

$$\binom{B_2}{j} p_2^j (1-p_2)^{B_2-j}$$

Troškovi naknade za prekobrojne putnike su i u ovom slučaju konstantni, ali su različiti za različite klase. Tako je

$$(k_1+1)T_1$$

naknada za prekobrojne putnike u prvoj klasi, a

$$(k_2+1)T_2$$

je naknada za prekobrojne putnike u turističkoj klasi, za neke pozitivne vrednosti k_1 i k_2.

Sada definišemo funkciju troškova naknade $F(i,j,C_1,C_2)$ kao ukupne troškove naknade koje avio kompanija mora da plati, ako se na izlazu pojavilo i putnika sa kartama za prvu klasu i j putnika za turističku klasu na letu sa C_1 mesta u prvoj klasi i C_2 mesta u turističkoj klasi:

$$F(i,j,C_1,C_2) = \begin{cases} 0 & i \le C_1,\ j \le C_2 \\ T_1(k_1+1)(i-C_1) & i > C_1,\ j \le C_2 \\ \max\{T_2(k_2+1)\big((j-C_2)-(C_1-i)\big),0\} & i \le C_1,\ j > C_2 \\ T_1(k_1+1)(i-C_1)+T_2(k_2+1)(j-C_2) & i > C_1,\ j > C_2 \end{cases}$$

Ono što možemo da vidimo je da je dozvoljeno da putnici iz turističke klase pređu u prvu klasu, ako u njoj ima slobodnih mesta (treći slučaj). Međutim, putnici iz prve klase ne mogu preći u turističku klasu iako u njoj ima slobodnih mesta (drugi slučaj).

Očekivani profit R, dat u funkciji od strategije prebukiranosti (B_1, B_2) je:

$$R(B_1,B_2) = \sum_{i=1}^{B_1}\sum_{j=1}^{B_2}\binom{B_1}{i}\binom{B_2}{j}p_1^i(1-p_1)^{B_1-i}p_2^j(1-p_2)^{B_2-j} \cdot \left(B_1T_1 + B_2T_2 - F(i,j,C_1,C_2)\right)$$

Za date C_i, T_i, p_i i k_i $(i = 1{,}2)$, može da se odredi optimalna strategija $\left(B_{1,opt}, B_{2,opt}\right)$, za koje je očekivani profit $R(B_1, B_2)$ maksimalan.

3.3.4 Uopštenje osnovnog modela: analiza troškova naknade

U osnovnom modelu troškovi naknade su bili konstantni za svakog prekobrojnog putnika. Ovaj model ćemo sada proširiti, tako što ćemo posmatrati dve vrste prekobrojnih putnika, nedobrovoljno prekobrojne i dobrovoljno prekobrojne putnike. Samim tim, menjaju se i troškovi naknade koje kompanija ima prema prekobrojnim putnicima.

3.3.4.1 Nedobrovoljna prekobrojnost

Nedobrovoljno prekobrojni putnici, odnosno putnici koji nisu spremni da se odreknu svojih karata, imaju pravo na neku naknadu koja im se isplaćuje na licu mesta. Iznos te naknade zavisi od cene njihove karte i vremena koje provedu čekajući naredni let, i to na sledeći način:

- Ako putnici na svoja odredišta stižu sa najviše sat vremena zakašnjenja u odnosu na prvobitno vreme dolaska, ne dobijaju nikakvu naknadu.

- Ako putnici na svoja odredišta stižu sa zakašnjenjem između jednog i dva sata u odnosu na prvobitno vreme dolaska, avio kompanija mora da im plati naknadu u visini cene njihove karte u jednom pravcu, a pri tome maksimalna naknada je 200$.

- Ako putnici na svoja odredišta stižu više od dva sata kasnije ili ako avio kompanija ne može da im obezbedi novi prevoz, kompanija mora da im plati naknadu koja je jednaka dvostrukoj ceni karte, a maksimalna naknada je 400$.

Na osnovu ovih podataka, dobijamo da je funkcija troškova naknade za jednog nedobrovoljno prekobrojnog putnika:

$$C(T,F)=\begin{cases}0 & 0<T\le 1\\ \min(2F,F+200) & 1<T\le 2\\ \min(3F,F+400) & T>2\end{cases}$$

gde je T vreme čekanja, a F je cena karte. Kao što je ranije napomenuto, pretpostavlja se da su svi letovi direktni i imaju isto vreme leta. Zbog toga je vreme čekanja između dva leta jednako razlici u vremenima poletanja i za vreme čekanja T se uzima da je to vreme do polaska sledećeg leta ka datoj destinaciji.

Da bismo mogli da koristimo funkciju troškova naknade za određivanje prosečne naknade (po jednom nedobrovoljno prekobrojnom putniku), potrebno je da znamo zajedničku raspodelu cena karata i vremena čekanja. Pošto je veoma teško dobiti ove informacija sa potpunom tačnošću, usredsredićemo se na određivanje očekivanih troškova naknade za prosečnu cenu karte. Za raspodelu vremena čekanja uzećemo eksponencijalnu raspodelu i to iz sledećih razloga:

- Eksponencijalna raspodela često nastaje kao raspodela nekog vremena dok se ne desi neki određeni događaj.

- Posmatranjem rasporeda letova za nekoliko avio kompanija i raspodela vremena trajanja leta između nekoliko velikih gradova, pokazalo se da eksponencijalna raspodela obezbeđuje najbolje fitovanje[3].

- Ako se vreme čekanja između dva događaja ponaša po eksponencijalnoj raspodeli sa parametrom λ, broj događaja koji se dogode tokom jedne vremenske jedinice je jedan Poasonov proces[4] sa parametrom λ. Dolasci aviona mogu da se predstave jednim takvim procesom. Poasonov proces ima osobinu da je zbir dva Poasonova procesa sa parametrima λ_1 i λ_2, takođe Poasonov proces sa parametrom $\lambda_1+\lambda_2$. Ova osobina se mnogo više podudara sa onim što mi očekujemo od raspodele za dolaske aviona, nego, recimo, normalna raspodela.

Neka je T slučajna promenljiva koja predstavlja vreme čekanja između dva leta, tako da je:

$$\mathrm{P}\{T\le t\}=1-e^{-\lambda t}$$

Na osnovu osobina eksponencijalne raspodele, znamo da je

$$\mathrm{E}(T)=\frac{1}{\lambda}=\tau$$

[3] Fitovanje – Određivanje krive koja najbolje opisuje zadate podatke.

[4] Poasonov proces (*Poisson process*) je stohastički proces u kome se događaji dešavaju neprekidno i nezavisno jedni od drugih. Poasonov proces je skup slučajnih promenljivih $\{N(t)|t\ge 0\}$, gde slučajna promenljiva $N(t)$ predstavlja broj događaja koji se dese do trenutka t (počevši od trenutka 0) i ima Poasonovu raspodelu. Vreme čekanja da se desi naredni događaj je slučajna promenljiva sa eksponencijanom raspodelom.

gde je τ srednje vreme čekanja za naredni let. U stvarnosti, τ je funkcija koja zavisi od mnogo faktora, uključujući i doba godine i atraktivnost destinacija.

Sada možemo da odredimo očekivane troškove naknade za jednog nedobrovoljno prekobrojnog putnika.

Propozicija: Neka vreme čekanja T ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ, i neka su troškovi naknade u funkciji od cene karte i vremena čekanja, $C(F,T)$. Tada su očekivani troškovi naknade za jednog nedobrovoljno prekobrojnog putnika koji je rezervisao kartu po ceni $F = P$ jednaki:

$$\min\{2P, P+200\}\left(e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}\right) + \min\{3P, P+400\}\, e^{-2\lambda}$$

Dokaz: Eksponencijalna slučajna promenljiva sa parametrom λ ima funkciju gustine koja je jednaka

$$\varphi(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Polazeći od definicije za uslovno očekivanje i definicije za $C(F,T)$, imamo da je

$$\mathrm{E}(C(F,T)|F=P) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} C(P,T)dt$$

$$= \int_0^1 \lambda e^{-\lambda t} \cdot 0dt + \int_1^2 \lambda e^{-\lambda t} \min\{2P, P+200\}\, dt + \int_2^\infty \lambda e^{-\lambda t} \min\{3P, P+400\}\, dt$$

$$= \lambda \min\{2P, P+200\} \int_1^2 e^{-\lambda t} dt + \lambda \min\{3P, P+400\} \int_2^\infty e^{-\lambda t} dt$$

$$= \left| \begin{array}{l} -\lambda t = x \\ -\lambda dt = dx \end{array} \right.$$

$$= \lambda \min\{2P, P+200\} \cdot \frac{-1}{\lambda} \int_{-\lambda}^{-2\lambda} e^x dx + \lambda \min\{3P, P+400\} \cdot \frac{-1}{\lambda} \int_{-2\lambda}^{-\infty} e^x dx$$

$$= -\min\{2P, P+200\}\left(e^{-2\lambda} - e^{-\lambda}\right) - \min\{3P, P+400\}\left(e^{-\infty} - e^{-2\lambda}\right)$$

$$= \min\{2P, P+200\}\left(e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}\right) + \min\{3P, P+400\}\, e^{-2\lambda} \qquad \blacksquare$$

Jedino što je još ostalo da se uradi je da se oceni prosečno vreme čekanja τ. Nažalost, skoro je nemoguće pronaći bilo kakve statističke podatke o vremenu čekanja. Razumno vreme čekanja tokom dana bilo bi približno 2.6 sati. Međutim, ovde je izostavljeno vreme između poslednjeg leta tokom dana i prvog leta narednog dana. Ako uključimo i ovakvo vreme čekanja, dobijamo vrednost

$$\tau \approx 4.8$$

Ova vrednost za τ odgovara učestalosti od 5 letova tokom perioda od 24 sata, što je veoma uobičajeno.

3.3.4.2 Dobrovoljna prekobrojnost

U slučaju dobrovoljno prekobrojnih putnika, tj. putnika koji su spremni da odustanu od svojih karata za neku određenu naknadu, avio kompanije najčešće koriste modele aukcije. Postoje dva načina za sprovođenje ovog modela:

1) Prvi način je da svaki od putnika koji se pojavio na izlazu apriorno izabere cenu za koju bi odustao od svoje karte. Ako u avionu nema dovoljno mesta za sve putnike koji su se pojavili na izlazu, avio kompanija će tada dati naknadu onim putnicima koji su tražili najmanje novca i zatražiće od njih da odustanu od svojih mesta na letu. Ovo je mnogo bolje za putnike, pošto oni nikada neće biti prekobrojni bez neke odgovarajuće naknade, ali je takođe bolje i za avio kompanije jer na ovaj način mogu da podignu prebukiranost na mnogo veći nivo nego što bi inače mogli da urade.

2) Drugi način je da se u odvojenim vremenskim intervalima objavljuju mogući iznosi naknade. Putnici tada mogu da prihvate bilo koju ponudu koju žele.

Prvi način je privlačan zato što može odmah da se primenjuje i avio kompanije svakom putniku mogu da daju apsolutno minimalnu količinu novca kao naknadu. Sa druge strane, drugi tip aukcije može da počne mnogo pre vremena poletanja aviona, ali će avio kompanije uvek platiti neznatno više od minimalne naknade za svakog prekobrojnog putnika. Međutim, ako se vremenski intervali povećavaju postepeno, razlika u troškovima je neznatna. Zbog toga, ove dve metode bi trebale da daju slične rezultate. Zbog jednostavnosti, mi ćemo posmatrati drugi tip aukcije.

Ako je za m putnika data naknada preko aukcije, pretpostavlja se da će ukupni troškovi naknade avio kompanije biti linearni po m. Takođe, uvodimo i sledeće pretpostavke:

- n putnika sa kartama se pojavljuje na izlazu za let sa kapacitetom C, gde je $n > C$.
- Svaki putnik koji se pojavio na izlazu ima neku minimalnu cenu naknade za koju je spreman da se odrekne svoje karte. Ovu cenu ćemo zvati ***granična cena***.
- Avio kompanija uvek može da prebaci putnika na neki od svojih kasnijih letova bez ikakvih troškova (tj. avio kompanija ne mora da plaća kartu nekoj drugoj kompaniji).

U idealnoj aukciji, avio kompanija će uspešno ponuditi veće cene naknade i svaki put kada ovo premaši graničnu cenu nekog putnika, taj putnik će dobrovoljno odustati od svog mesta.

Pretpostavimo da imamo sledeće putnike sa kartama $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n)$. Zbog jednostavnosti, neka su oni poređani tako da je granična cena putnika Γ_i manja od granične cene putnika Γ_j ako i samo ako je $i < j$. Zatim, neka je $D(x)$ verovatnoća da će slučajno izabrani putnik odustati od svog mesta za cenu x, neka je Y_m iznos naknade koju avio kompanija mora da plati putniku Γ_m da bi on odustao od svog mesta i neka je X_m ukupan iznos naknade koju avio kompanija mora da plati da bi m putnika odustalo od svojih mesta na letu.

Ono što mi želimo da odredimo su očekivani troškovi naknade, tj. $\mathrm{E}(X_m)$. Pošto je granična cena putnika Γ_i manja od granične cene putnika Γ_j ako i samo ako je $i < j$, tada je

$$X_m = \sum_{i=1}^{m} Y_i$$

pa je potrebno samo da se odredi $\mathrm{E}(Y_i)$, za $i \leq m$.

Propozicija:

$$\mathrm{E}(Y_m) = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} \int_0^\infty \big(D(x)\big)^m \big(1 - D(x)\big)^{n-m} dx$$

Funkcija raspodele za graničnu cenu približno odgovara eksponencijalnoj krivi oblika $1 - e^{-Ax}$ za fiksno A. Zbog toga uvodimo pretpostavku da je

$$D(x) = 1 - e^{-Ax}$$

za neko A, koje je izabrano nezavisno od x. Sada možemo tačno da izračunamo $\mathrm{E}(X_m)$.

Propozicija: Ako je $D(x) = 1 - e^{-Ax}$ za neku konstantu A, tada je

$$\mathrm{E}(X_m) = \frac{1}{A}\left(m - (n-m)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{n-m+1}\right)\right)$$

Koristeći aproksimaciju

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \approx \ln n$$

dobijamo da je:

$$\mathrm{E}(X_m) \approx \frac{1}{A}\left(m - (n-m)\ln\frac{n}{n-m}\right)$$

Ostaje još da se odredi vrednost za A. Očigledno je da A nije konstanta za sve scenarije. Na primer, putnici će sigurno prihvatiti manju naknadu za svoje karte ako je sledeći let relativno skoro. Međutim, mi ćemo pretpostaviti da je A konstantno u svim situacijama i ocenićemo ga na letu sa kapacitetom $C = 150$ i sa malim brojem prebukiranih putnika, ako putnik Γ_1 ima graničnu cenu $100\$$. Dakle, imamo

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{150} \approx 100\$$$

pa je

$$A \approx \frac{1}{15\,000}\$.$$

Pokazali smo da je u idealnoj aukciji sa eksponencijalnom funkcijom potražnje, očekivani iznos naknade potreban za m prekobrojnih putnika od n putnika sa kartama približno:

$$\mathrm{E}(X_m) \approx \frac{1}{15\,000}\$\left(m - (n-m)\ln\frac{n}{n-m}\right)$$

3.4 STATIČKI MODEL

3.4.1 Model[5]

Ovaj model za optimizaciju profita je statički, u smislu da je ponašanje putnika vremenski nezavisno – svi putnici dolaze na izlaz nezavisno jedni od drugih.

Kao i u osnovnom modelu, broj putnika sa kartama koji su se pojavili na izlazu opisujemo binomnom slučajnom promenljivom X, pri čemu je verovatnoća da se putnik sa kartom pojavi na izlazu jednaka p. Verovatnoća da se na izlazu pojavi tačno i putnika, ako je prodato B karata data je formulom (3.1).

Definisaćemo funkciju ukupnog profita po jednom letu, $T_p(X)$, na sledeći način:

$$T_p(X) = (B-X)R + \begin{cases} T \cdot X - \mathrm{Cost}_{\mathrm{Flight}} & X \le C_\$ \\ (T - \mathrm{Cost}_{\mathrm{Add}}) \cdot (X - C_\$) & C_\$ < X \le C \\ (T - \mathrm{Cost}_{\mathrm{Add}}) \cdot (X - C_\$) - \mathrm{Bump}(X - C) & X > C \end{cases}$$

gde je

R - taksa za transfer putnika na drugi let

B - ukupan broj putnika koji su rezervisali karte

T - cena karte (koja je konstantna)

$\mathrm{Cost}_{\mathrm{Flight}}$ - ukupni troškovi jednog leta

$\mathrm{Cost}_{\mathrm{Add}}$ - trošak smeštanja jednog putnika na let

Bump - funkcija prekobrojnosti (odgovara funkciji ukupne naknade $F(i,C)$ u osnovnom modelu)

$C_\$$ - broj putnika potrebnih da se let ne otkaže

C - ukupan kapacitet leta (broj sedišta)

Potrebno je još da odredimo funkciju prekobrojnosti, Bump. Razmotrićemo nekoliko različitih mogućnosti koje kompanije mogu da koriste.

[5] Leder, Spagniole, Wild, [3]

Nema prebukiranosti

Avio kompanija može da odluči da ne koristi prebukiranost. To znači da je broj prodatih karata jednak kapacitetu leta, tj. $B = C$, a funkcija prekobrojnosti je u tom slučaju jednaka nuli:

$$\mathrm{Bump}(X - C) = 0$$

Model sa pragom otkaza

Za svaki let uvodi se prag otkaza BT (*Bump Threshold*), koji predstavlja verovatnoću da postoji jedan ili više prekobrojnih putnika na datom letu, ako je poznato B i p:

$$\mathrm{P}\{X > C\} < BT$$

Uzećemo, recimo, da je $BT = 5\%$ kapaciteta leta. Verovatnoća da se na izlazu pojavilo više od N putnika, ako znamo da je prodato B karata, je:

$$\mathrm{P}\{X > N\} = 1 - \mathrm{P}\{X \leq N\} = 1 - \sum_{i=0}^{N} \mathrm{P}\{X = i\} = 1 - \sum_{i=0}^{N} \binom{B}{i} p^i (1-p)^{B-i}$$

Ovim modelom dobija se optimalan broj prodatih karata B, ako se očekuje da bude prebukirano manje od 5% kapaciteta leta.

Linearni plan naknade

Ovde se pretpostavlja da su troškovi za svakog prekobrojnog putnika isti. Odgovarajuća funkcija prekobrojnosti je tada:

$$\mathrm{Bump}(X - C) = B_{\bar{\$}} \cdot (X - C)$$

gde je $(X - C)$ broj prekobrojnih putnika, a $B_{\bar{\$}}$ su troškovi koji se daju svakom od prekobrojnih putnika.

Nelinearni plan naknade

U ovom slučaju uključuje se lančana reakcija u troškovima koji nastaju kada prekobrojni putnici sa jednog leta uzrokuju buduće prekobrojne na nekom kasnijem letu. Pretpostavićemo da je funkcija prekobrojnosti eksponencijalna funkcija. Takođe, pretpostavljamo da je prosečna naknada za jednog prekobrojnog putnika:

$$2 \cdot T + 100\$$$

kada je broj prekobrojnih putnika jednak 20. Funkcija prekobrojnosti je tada:

$$\mathrm{Bump}_{\mathrm{NL}}(X - C) = B_{\bar{\$}}(X - C)e^{r(X-C)}$$

gde je $B_{\bar{\$}}$ konstantna naknada, a $r = r\left(B_{\bar{\$}}\right)$ je eksponencijalna stopa, koja se bira tako da se fituje kriva koja prolazi kroz tačke

$$(0, T) \text{ i } (20,\ 2 \cdot T + 100\$)$$

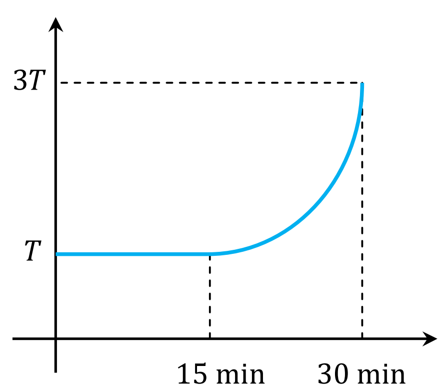
Međutim, osnovna mana nelinearnog plana naknade je što on ne može da se koristi za letove sa previše dobrovoljno prekobrojnih putnika.

Vremenski zavisan plan naknade (aukcija)

U vremenski zavisnom planu naknade pretpostavlja se da avio kompanija pola sata pre leta zna broj onih koji neće doći i koji su otkazali svoje karte. 30 min pre leta, avio kompanija nudi naknadu u visini cene karte onima koji dobrovoljno žele da odustanu od leta. Ova ponuda ostaje narednih 15 min, nakon čega ponuda eksponencijalno raste maksimalno do vrednosti koja je jednaka trostrukoj ceni karte. Ova vrednost je izabrana kao dvostruka cena karte (što je maksimalna obavezna naknada za nedobrovoljno prekobrojnog putnika koji mora da čeka više od 2 h), plus još jedna cena karte, jer avio kompanija očekuje da će takvo ophođenje sa putnicima, imati rezultate u budućim poslovanjima sa istim putnicima.

Sada je odgovarajuća funkcija za vremenski zavisne naknade:

$$\text{Compensation}(t) = \begin{cases} T & 0 \leq t \leq 15 \text{ min} \\ 105.33\, e^{0.07324\, t} & 15 \text{ min} < t \leq 30 \text{ min} \end{cases}$$



Slika 3.1 *Funkcija vremenski zavisne naknade za jednog prekobrojnog putnika*

Ukupni troškovi za $(X - C)$ prekobrojnih putnika su:

$$\text{Bump}(X - C) = \sum_{i=1}^{X-C} \text{Compensation}(t_i)$$

Cilj ovog statičkog modela je da se maksimizira vrednost funkcije očekivanog ukupnog profita, $\mathrm{E}\left(T_p(X)\right)$, ako je data funkcija prekobrojnosti i verovatnoća dolaska putnika. Očekivana vrednost funkcije ukupnog profita je:

$$\mathrm{E}\left(T_p(X)\right) = \sum_{i=1}^{B} T_p(i)\binom{B}{i} p^i (1-p)^{B-i}$$

Ovu funkciju očekivanog ukupnog profita optimiziramo tako što pronađemo najodgovarajuću granicu za rezervacije B za bilo koju funkciju prekobrojnosti.

3.5 SLIČNOSTI OSNOVNOG I STATIČKOG MODELA

Do sada smo se upoznali sa dva modela prebukiranosti koji su našli primenu u nekim avio kompanijama. Iako možda, na prvi pogled deluje da su ova dva modela različita, oni imaju dosta toga sličnog.

I osnovni i statički model polaze od toga da je broj putnika koji se pojave na izlazu jedna slučajna promenljiva koja ima binomnu raspodelu sa parametrima B (broj prodatih karata) i p (verovatnoća da se putnik sa kartom pojavi na izlazu). Cilj oba ova modela prebukiranosti je da odrede koliko najviše karata avio kompanija može da proda (optimalnu strategiju prebukiranosti) tako da se maksimizira ukupan očekivani profit te kompanije.

Osnovna razlika između osnovnog i statičkog modela je u strukturi funkcije troškova. U osnovnom modelu pretpostavlja se da su troškovi naknade koje kompanija mora da isplati prekobrojnim putnicima jednaki za sve putnike. Tek kasnije, uopštavanjem modela, pravi se razlika između nedobrovoljno i dobrovoljno prekobrojnih putnika, čime se menjaju i troškovi kompanije. Međutim, jedini troškovi koje kompanija ima po ovom model su troškovi naknade za prekobrojne putnike. Dok u slučaju kada na letu nema prekobrojnih putnika, avio kompanija nema nikakve troškove.

U statičkom modelu, u ukupne troškove uključeni su troškovi jednog leta (kada se ne pojavi dovoljan broj putnika i let se otkaže), zatim troškovi smeštanja jednog putnika na let, kao i troškovi naknade za prekobrojne putnike. Funkcija troškova naknade nije uvek konstantna kao u osnovnom modelu, nego se razmatra nekoliko različitih oblika te funkcije (jedan od mogućih oblika je i konstanta funkcija – linearan plan naknade).

Samim tim, razlikuju se i funkcije ukupnog očekivanog profita koje se dobijaju ovim modelima, iako obe zavise od strategije prebukiranosti.

Naravno, oba modela koja su ovde razmatrana su dosta pojednostavljena i postoji još mnogo načina za njihovo proširenje.

4. PREBUKIRANOST U HOTELIJERSTVU

Prebukiranost je dobro poznata strategija i u hotelijerstvu, koja može da se definiše kao odobravanje više soba nego što je raspoloživ kapacitet hotela.

Postoji nekoliko razloga zbog kojih se hoteli odlučuju za prebukiranje:

- Iz ranijih iskustava, hotelska uprava zna da neće sve potvrđene rezervacije za neki određeni datum biti stvarno iskorišćene. Iz različitih razloga, neki od gostiju ne dolaze, neke rezervacije se otkazuju ili su dopunjene u poslednjem trenutku, boravak nekih gostiju se smanji, a posledica svega toga je da sobe ostaju slobodne. Za negarantovane rezervacije[6], ovaj procenat je mnogo veći nego u slučaju garantovanih rezervacija[7].

- Cilj hotelske uprave je maksimizacija profita hotela. Ako bi oni ograničili rezervacije na raspoloživi kapacitet hotela, zbog nedolazaka nekih gostiju i otkazivanja u poslednjem trenutku neke sobe će ostati prazne i maksimizacija profita neće biti ostvarena.

- Gubitak prihoda usled neizdatih soba je izgubljen zauvek.

- Hoteli imaju fiksiran kapacitet. Da bi se kapacitet podudarao sa potražnjom oni reaguju na male promene u potražnji tako što menjaju cene i broj potvrđenih soba.

Mnogi modeli prebukiranosti našli su primenu u hotelijerstvu, a cilj svakog od njih je određivanje optimalnog nivoa prebukiranosti (*optimal level of overbookings*), tj. optimalnog broja soba koje mogu da se rezervišu da bi ostvareni profit hotela bio maksimalan.

Pokazalo se da je ključ uspešne strategije prebukiranosti u dobijanju tačnih informacija o nedolascima, otkazivanjima i gostima koji dolaze u poslednjem trenutku.

Kontrolisanje prebukiranosti može da se definiše kao skup tehnika i aktivnosti za kontrolisanje povezanih sa neprekidnim planiranjem, rezervacijama i nadziranjem, čiji je cilj maksimizacija profita, tako što se odobri više soba nego što je raspoloživ kapacitet hotela.

Kada se dobro kontroliše, prebukiranost ne prouzrokuje bilo kakve probleme – ako je potvrđeno X soba više nego što je raspoloživ kapacitet i ako je isti broj soba otkazan u poslednjem trenutku ili se gosti nisu pojavili, tada će broj zauzetih soba za neki određeni period biti jednak raspoloživom kapacitetu hotela i prihodi od prenoćišta biće maksimalni. Međutim, ako je broj otkazivanja u poslednjem trenutku i nedolazaka manji od broja prebukiranih, tada neki od gostiju neće biti smešteni i moraju otići u neki drugi hotel. Ovo povećava troškove hotela – smeštaj gostiju u drugom hotelu, prevoz do njega, i dr. Sa druge strane, ako je broj nedolazaka gostiju i otkazivanja u poslednjem trenutku veći od broja

[6] Negarantovane rezervacije – Prilikom rezervacije, hotel od gosta ne zahteva nikakvu garanciju da će se ta usluga i izvršiti.

[7] Garantovane rezervacije – Određen oblik garancije hotelu od strane gosta da će se dogovorena (rezervisana) usluga izvršiti u predviđenom vremenskom periodu. Na taj način hoteli nastoje da izbegnu situaciju da se gost ne pojavi. Neke od vrsta garantovanih rezervacija su: plaćanje unapred, garancija na bazi kreditne kartice, uplata akontacije, garancija od strane turističke agencije...

prebukiranih, deo raspoloživog kapaciteta hotela neći biti zauzet i hotel će imati gubitke. Zbog toga, kontrolisanje prebukiranosti se razmatra kao deo kontrolisanja prihoda hotela.

Za određivanje optimalnog nivoa prebukiranosti ovde je opisana metoda za standardni očekivani marginalni prihod. Prema ovoj metodi, optimalan nivo dobijamo kada su očekivani marginalni troškovi[8] nastali usled prebukiranosti u nekim sobama, jednaki očekivanom marginalnom prihodu[9] na te iste prebukirane sobe.

Ovde je analiziran osnovni matematički model za računanje optimalnog broja prebukiranih i predložene su tehnike za računanje optimalnog broja prebukiranih za hotel sa dve različite vrste soba i za dva različita hotela koji usklađuju svoje rezervacije.

4.1 OSNOVNI MODEL

4.1.1 Model[10]

Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj soba za goste koji su potvrdili svoje rezervacije za određeni dan, a nisu se pojavili u hotelu (nedolasci, otkazivanje u poslednjem trenutku, izmena rezervacija od strane gostiju koji su već smešteni u hotelu). Zbog jednostavnosti, pretpostavićemo da hotel izdaje sve sobe po istoj ceni r. Ako hotel izda sve svoje sobe bez prebukiranosti, a gosti za X^* soba se ne pojave, hotel će imati gubitak koji je jednak:

$$X^* r$$

Zbog toga hotel može da poveća svoju dobit tako što odobri X^* soba više nego što je raspoloživ kapacitet hotela. Ako gosti za X^* soba ne dođu, broj zauzetih soba će biti jednak raspoloživom kapacitetu i ukupni prihod TR će biti maksimalan.

U slučaju da je broj otkazivanja u poslednjem trenutku, izmena rezervacija i nedolazaka X_1, manji od broja prebukiranih soba, tj. $X_1 < X^*$, neki od gostiju, njih $X^* - X_1$, moraju otići u drugi hotel. Za svakog od njih hotel mora da plati troškove c za smeštaj tih putnika u drugi hotel (sobu/noć), ili ukupno

$$c(X^* - X_1)$$

Ali ako je broj otkazivanja u poslednjem trenutku, izmena rezervacija i nedolazaka X_2, veći od broja prebukiranih soba, tj. $X^* < X_2$, hotel će imati gubitak

[8] Marginalni trošak (*marginal cost*) – U ekonomiji i finansijama, marginalni trošak je promena ukupnih troškova koja nastaje kada se proizvedena količina promeni za jednu jedinicu proizvodnje. Matematički, funkcija marginalnog troška je prvi izvod funkcije ukupnih troškova (*total costs*) u odnosu na količinu. U opštem slučaju, marginalni trošak na svakom nivou proizvodnje uključuje bilo koje dodatne troškove koji su potrebni za proizvodnju sledeće jedinice nekog dobra.

[9] Marginalni prihod (*marginal revenue*) je ekstra prihod koji će doneti naredna jedinica proizvoda. To je dodatni prihod od prodaje još jedne jedinice nekog dobra. Marginalni prihod je jednak promeni ukupnog prihoda usled promene količine proizvoda za jednu jedinicu.

[10] Ivanov, [2]

$$r(X_2 - X^*)$$

koji je ipak manji u odnosu na gubitak u slučaju kada nema prebukiranosti.

Da bi se odredio optimalan broj prebukiranih X^*, potrebno je da definišemo marginalni prihod MR_{ob} i marginalne troškove MC_{ob} koji nastaju zbog prebukiranosti.

Neka je $F(X)$ funkcija raspodele za slučajnu promenljivu X, koja pokazuje verovatnoću da gosti koji su potvrdili rezervacije za X soba neće doći u hotel i njihove sobe će ostati prazne.

Ukupni troškovi prebukiranosti TC_{ob} uključuju neto troškove i gubitke koje ima hotel. Postoje dve moguće situacije:

ako je $X \leq X^*$ $\qquad TC_{ob}(X \leq X^*) = c \cdot F(X)(X^* - X)$

ako je $X^* < X$ $\qquad TC_{ob}(X^* < X) = r\big(1 - F(X)\big)(X - X^*)$

Zbog toga, ukupni troškovi prebukiranosti TC_{ob} su:

$$\begin{aligned} TC_{ob} &= TC_{ob}(X \leq X^*) + TC_{ob}(X^* < X) \\ &= c \cdot F(X)(X^* - X) + r\big(1 - F(X)\big)(X - X^*) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Marginalne troškove prebukiranosti, MC_{ob}, dobijamo kao prvi izvod ukupnih troškova prebukiranosti, tj. diferenciranjem izraza (4.1):

$$MC_{ob} = \frac{\partial TC_{ob}}{\partial X} = r\big(1 - F(X)\big) - c \cdot F(X) \tag{4.2}$$

Sa druge strane, hoteli ne ostvaruju nikakav prihod za slobodne sobe, kao i za goste koji su zbog prebukiranosti primorani da odu u drugi hotel (jer su u pitanju negarantovane rezervacije). Zbog toga su marginalni prihodi hotela jednaki nuli:

$$MR_{ob} = 0 \tag{4.3}$$

Hotel može sebi da priušti prebukiranje sve dok su marginalni prihodi iz prebukiranosti veći od marginalnih troškova:

$$MC_{ob} \leq MR_{ob} \tag{4.4}$$

Ako (4.2) i (4.3) ubacimo u (4.4), dobijamo:

$$r\big(1 - F(X)\big) - c \cdot F(X) \leq 0$$

$$r - r \cdot F(X) - c \cdot F(X) \leq 0$$

$$r \cdot F(X) + c \cdot F(X) \geq r$$

$$\Downarrow$$

$$F(X) \geq \frac{r}{r + c} \tag{4.5}$$

Optimalan broj prebukiranih X^* je najmanji ceo broj za koji je ispunjena nejednakost (4.5).

4.1.2 Moguća uopštenja

Osnovni matematički model pretpostavlja da hoteli nude sve sobe po istoj ceni, što baš i nije istina. Hoteli obično prave razliku među cenama u zavisnosti od vrste sobe (jednokrevetna, dvokrevetna, trokrevetna), klase sobe (standardna, deluks, studio, niz soba, apartman), dana u nedelji, segmenta tržišta, posrednika na tržištu, itd., što komplikuje strukturu cena, pa samim tim otežava računanje optimalnog broja prebukiranih. Da bi ovo postigli, hoteli moraju nabaviti detaljne statističke podatke koji se odnose na otkazivanja, skraćivanje boravka i nedolaske gostiju koji su potvrdili svoje rezervacije, u zavisnosti od vrste i klase sobe, dana u nedelji, segmenata tržišta, načina rezervacije (garantovane ili negarantovane rezervacije).

4.1.2.1 Više klasa soba u hotelu

Postojanje dve ili više klasa soba u hotelu, u velikoj meri menja određivanje optimalnog broja prebukiranih, što može da se uradi posebno za svaku klasu soba.

Neka u hotelu postoje samo dve klase soba – jeftina i skupa. Gost koji je rezervisao jeftiniju sobu po ceni r_L (npr. standardnu sobu) u slučaju da je prekobrojan, često ne mora da ode u drugi hotel, već biva smešten u drugu sobu u istom hotelu koja je slobodna, ali je skuplja sa cenom r_H (npr. deluks soba). U ovom slučaju hotel ima gubitak koji je jednak razlici u cenama ovih dveju soba:

$$r_H - r_L$$

Obrnuta situacija je takođe moguća – u slučaju prebukiranosti gost koji je rezervisao mnogo skuplju sobu biće smešten u jeftiniju sobu i biće mu vraćen novac koji je jednak razlici u cenama dve sobe:

$$r_H - r_L$$

plus, eventualno, neka naknada zbog prouzrokovane nezgode.

Neka je $X^*{}_L$ slučajna promenljiva koja predstavlja optimalan broj prebukiranih u jeftinijim sobama sa cenom r_L, neka je $F(X^*{}_L)$ njena funkcija raspodele, a c_L su troškovi hotela po jednom prekobrojnom gostu koji mora da ode u drugi hotel. Analogno, neka je $X^*{}_H$ slučajna promenljiva koja predstavlja optimalan broj prebukiranih u skupljim sobama sa cenom r_H, neka je $F(X^*{}_H)$ njena funkcija raspodele, a neka su c_H troškovi hotela po jednom prekobrojnom gostu koji mora da ode u drugi hotel.

Sada imamo četiri moguće situacije:

(1) $X_L > X^*{}_L$ i $X_H > X^*{}_H$

(2) $X_L \leq X^*{}_L$ i $X_H > X^*{}_H$

(3) $X_L > X^*{}_L$ i $X_H \leq X^*{}_H$

(4) $X_L \leq X^*{}_L$ i $X_H \leq X^*{}_H$

U situacijama (1) i (2), broj otkazivanja u poslednjem trenutku, izmena rezervacija i nedolazaka za skuplje sobe je veći nego što je broj prebukiranih, $X_H > X^*{}_H$. U oba ova slučaja hotel ima gubitke jer su skuplje sobe ostale slobodne:

$$r_H \cdot \left(1 - F(X_H)\right)(X_H - X^*{}_H)$$

U slučaju (1), hotel takođe ima gubitak koji nastaje jer će i neke jeftinije sobe ostati prazne:

$$r_L\left(1 - F(X_L)\right)(X_L - X^*{}_L)$$

U slučaju (2), neki od gostiju koji su rezervisali jeftinije sobe mogu biti smešteni u slobodne skuplje sobe i usled toga hotel ima gubitak:

$$(r_H - r_L) \cdot F(X_L)(X_H - X^*{}_H)$$

Ostali gosti će morati da odu u drugi hotel, a troškovi koje hotel ima na njima su jednaki:

$$c_L \cdot F(X_L)(X^*{}_L - X_L - X_H + X^*{}_H)$$

Ako sumiramo sve ove troškove i gubitke hotela, dobijamo ukupne troškove prebukiranosti, za $X_H > X^*{}_H$:

$$TC_{ob}(X_H > X^*{}_H) = r_H \cdot \left(1 - F(X_H)\right)(X_H - X^*{}_H) + r_L \cdot \left(1 - F(X_L)\right)(X_L - X^*{}_L)$$
$$+(r_H - r_L) \cdot F(X_L)(X_H - X^*{}_H) + c_L \cdot F(X_L)(X^*{}_L - X_L - X_H + X^*{}_H) \quad (4.6)$$

U slučajevima (3) i (4) je $X_H \leq X^*{}_H$ i kao posledica u oba slučaja nastaju troškovi na gostima koji moraju da odu u drugi hotel:

$$c_H \cdot F(X_H)(X^*{}_H - X_H)$$

U slučaju (4), pored ovih, hotel ima i troškove na gostima koji su rezervisali jeftinije sobe, ali moraju da odu u drugi hotel:

$$c_L \cdot F(X_L)(X^*{}_L - X_L)$$

U situaciji (3), neki od gostiju će biti smešteni u jeftinije sobe, što će prouzrokovati vraćanje novca tim gostima:

$$(r_H - r_L) \cdot F(X_H)(X_L - X^*{}_L)$$

Ostali gosti će morati da odu u neki drugi hotel i na njima hotel ima troškove:

$$c_H \cdot F(X_H)(X^*{}_H - X_H - X_L + X^*{}_L)$$

Sada su ukupni troškovi u slučaju kada je $X_H \leq X^*{}_H$:

$$TC_{ob}(X_H \leq X^*{}_H) = c_H \cdot F(X_H)(X^*{}_H - X_H) + c_L \cdot F(X_L)(X^*{}_L - X_L)$$

$$+(r_H - r_L) \cdot F(X_H)(X_L - X^*{}_L) + c_H \cdot F(X_H)(X^*{}_H - X_H - X_L + X^*{}_L) \quad (4.7)$$

Sumiranjem (4.6) i (4.7), dobijamo ukupne troškove prebukiranosti za obe klase soba:

$$\begin{aligned} TC_{ob}(X_L; X_H) &= TC_{ob}(X_H \leq X^*{}_H) + TC_{ob}(X_H > X^*{}_H) \qquad (4.8) \\ &= r_H \cdot \big(1 - F(X_H)\big)(X_H - X^*{}_H) + r_L \cdot \big(1 - F(X_L)\big)(X_L - X^*{}_L) \\ &\quad +(r_H - r_L) \cdot F(X_L)(X_H - X^*{}_H) + c_L F(X_L)(X^*{}_L - X_L - X_H + X^*{}_H) \\ &\quad +c_H \cdot F(X_H)(X^*{}_H - X_H) + c_L \cdot F(X_L)(X^*{}_L - X_L) \\ &\quad +(r_H - r_L) \cdot F(X_H)(X_L - X^*{}_L) + c_H F(X_H)(X^*{}_H - X_H - X_L + X^*{}_L) \end{aligned}$$

Ukupni troškovi $TC_{ob}(X_L; X_H)$ su minimalni kada su marginalni troškovi prebukiranosti jednaki marginalnim prihodima za obe klase soba:

$$\frac{\partial TC_{ob}(X_L; X_H)}{\partial X_L} = 0$$
$$\frac{\partial TC_{ob}(X_L; X_H)}{\partial X_H} = 0 \qquad (4.9)$$

Kada (4.8) ubacimo u (4.9), dobijamo:

$$r_H - F(X_H)(r_H + 2c_H) - F(X_L)(r_L + c_L - r_H) = 0$$
$$r_L - F(X_L)(r_L + 2c_L) - F(X_H)(r_L + c_H - r_H) = 0 \qquad (4.10)$$

Ako su $F\big(X_H{}^O\big)$ i $F\big(X_L{}^O\big)$ rešenja (4.10), tada su optimalani brojevi prebukiranosti $X^*{}_L$ i $X^*{}_H$ najmanji celi brojevi za koje važi da je:

$$F(X^*{}_L) \geq F\big(X_L{}^O\big)$$
$$F(X^*{}_H) \geq F\big(X_H{}^O\big)$$

4.1.2.2 Usklađivanje rezervacija dva hotela

Neki hoteli imaju dogovor sa drugim hotelima o zajedničkim rezervacijama – oni rade kao jedan hotel, imaju iste cene i gosti se smeštaju u bilo koji od njih. U ovoj situaciji, moramo da odredimo zajednički optimalni broj prebukiranih za sve hotele, koji može da se razlikuje od sume pojedinačnih optimalnih brojeva. Zbog jednostavnosti, mi ćemo posmatrati slučaj sa dva hotela.

Neka je X_1 diskretna slučajna promenljiva koja predstavlja otkazivanja u poslednjem trenutku, izmene rezervacija i nedolaske za prvi hotel:

$$X_1 : \begin{pmatrix} X_{10} & X_{11} & \cdots & X_{1I} \\ \mathrm{P}(X_{10}) & \mathrm{P}(X_{11}) & \cdots & \mathrm{P}(X_{1I}) \end{pmatrix}$$

pri čemu je X_{1i} oznaka za $X_1 = i$, $i = 0,1, \dots, I$.

Zatim, neka je X_2 diskretna slučajna promenljiva koja predstavlja otkazivanja u poslednjem trenutku, izmene rezervacija i nedolaske za drugi hotel:

$$X_2 : \begin{pmatrix} X_{20} & X_{21} & \cdots & X_{2J} \\ \mathrm{P}(X_{20}) & \mathrm{P}(X_{21}) & \cdots & \mathrm{P}(X_{2J}) \end{pmatrix}$$

pri čemu je X_{2j} oznaka za $X_2 = j$, $j = 0,1, \dots, J$.

Zajednička diskretna slučajna promenljiva koja opisuje otkazivanja u poslednjem trenutku, izmene rezervacija i nedolaske za oba hotela je

$$X = X_1 + X_2$$

Kako je skup vrednosti slučajne promenljive X_1 jednak

$$R_{X_1} = \{0,1, \dots, I\}$$

a skup vrednosti slučajne promevljive X_2 jednak

$$R_{X_2} = \{0,1, \dots, J\}$$

dobijamo da slučajna promenljiva X prima vrednosti iz skupa

$$R_X = \{0,1, \dots, I + J\}$$

Neka je X_n oznaka za $X = n$, za $n = 0,1, \dots, I + J$. Verovatnoću da slučajna promenljiva X primi vrednost n, dobijamo na sledeći način:

$$\mathrm{P}(X_n) = \mathrm{P}\{X = n\} = \mathrm{P}\{X_1 + X_2 = n\} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}\{X_1 = k, X_2 = n - k\}$$

Kako su slučajne promenljive X_1 i X_2 nezavisne (otkazivanje rezervacija u jednom hotelu ne zavisi od otkazivanja rezervacija u drugom hotelu), dalje imamo da je:

$$\mathrm{P}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}\{X_1 = k\} \cdot \mathrm{P}\{X_2 = n - k\}$$

Odnosno,

$$\mathrm{P}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X_{1k}) \cdot \mathrm{P}(X_{2,n-k}) \tag{4.11}$$

Ukupan optimalan broj prebukiranih za oba hotela X^* će biti najmanji ceo broj za koji je ispunjena nejednakost (4.5), za date zajedničke verovatnoće u jednačini (4.11). Taj broj može biti veći, jednak ili manji od zbira pojedinačnih optimalnih brojeva $X^*{}_1 + X^*{}_2$.

4.1.2.3 Garantovane rezervacije

U osnovnom modelu se pretpostavlja da je marginalni prihod od slobodnih soba jednak nuli. Međutim, ovo je tačno u slučaju negarantovanih rezervacija. U praksi, hoteli naplaćuju gostima za kasna otkazivanja garantovanih rezervacija. Da bismo ovo uveli u razmatranje, sa m ćemo označiti prihod od slobodne sobe.

Ukupan prihod od naplaćivanja otkazivanja rezervacija će tada biti:

$$TR_{ob}(X^* < X) = m\big(1 - F(X)\big)(X - X^*) \tag{4.12}$$

Diferenciranjem (4.12), dobićemo marginalne prihode od slobodnih soba:

$$MR_{ob} = m\big(1 - F(X)\big) \tag{4.13}$$

Zamenom (4.13) u (4.4), dobijamo:

$$r\big(1 - F(X)\big) - c \cdot F(X) \le m\big(1 - F(X)\big)$$

$$\Downarrow$$

$$F(X) \ge \frac{r - m}{r - m + c} = 1 - \frac{c}{r - m + c} \tag{4.14}$$

Nejednačina (4.14) je slična nejednačini (4.5), ali umesto r (cena sobe), ona sadrži neto gubitke ili troškove zato što je soba koja je bila rezervisana ostala prazna – razlika između cene sobe i cene otkazivanja, $r - m$. Takođe se vidi da je optimalni nivo prebukiranosti inverzno proporcionalan iznosu naplate otkazivanja – što je cena otkazivanja bliža ceni sobe, manji su gubici zbog slobodnih soba.

Ako hoteli prihvataju i garantovane i negarantovane rezervacije, tada se optimalan broj prebukiranih mora računati posebno za svaki način rezervisanja.

4.1.2.4 Ostala uopštenja

Jedno od mogućih uopštenja osnovnog modela je da se u razmatranje uključi i gubitak budućih prihoda, koji nastaju zbog činjenice da gosti koji su bili prekobrojni u budućnosti možda neće hteti da izvrše rezervacije u istom hotelu.

Osim svega ovog navedenog, na statističku raspodelu otkazivanja u poslednjem trenutku, izmena rezervacija i nedolazaka utiču i neki posebni događaji – sajmovi, izložbe, kongresi, sportski događaji, itd. Tokom posebnih događaja, potražnja za hotelskim smeštajem značajno raste, zbog čega ima manje otkazivanja u poslednjem trenutku i nedolazaka. Zbog toga je optimalni broj prebukiranih takođe manji.

4.1.3 Odbijeni gosti

Otkazivanja u poslednjem trenutku, izmene rezervacija i nedolasci su slučajna promenljiva koju hoteli ne mogu da kontrolišu. I zbog toga je neizbežno odbijanje gostiju, čak i u slučaju najpreciznijeg planiranja prebukiranosti. U tom pogledu, mora biti doneto nekoliko upravnih odluka da bi se minimizirali negativni uticaji odbijenih gostiju:

- *Koga odbiti?* Odgovarajući prilaz je smeštanje gostiju na način „ko prvi devojci, njegova devojka“, i oni koji su kasnije stigli moraće da odu u drugi hotel. Ovaj prilaz, međutim, ne uzima u obzir različit značaj gostiju. Zbog toga, takođe je potrebno razmotriti i sledeće:
    - *Dužina boravka* – Gosti koji kraće ostaju (jedna noć) biće odbijeni. Gostima koji su već smešteni, hoteli mogu da ponude da besplatno provedu svoju poslednju noć u luksuznom aerodromskom hotelu.
    - *Stalni gosti* – Odbijanje stalnog gosta može da izazove negativniji uticaj, nego odbijanje prvog koji je došao. To je razlog zbog kojeg njih nikada ne bi trebalo odbiti.
    - *Cena sobe* – Obično hoteli odbijaju goste koji su platili najmanje cene.
- *Gde uputiti goste?* Hotel mora da uputi goste u drugi smeštaj iste ili veće kategorije. Ako je ovo nemoguće (ne postoji drugi sličan hotel u gradu ili nema soba na raspolaganju), gosti mogu biti upućeni u hotel manje kategorije, ali im se mora dati naknada koja je jednaka razlici u cenama ta dva hotela. Moguće je da gosti dobiju potpunu naknadu za neugodnost koja je prouzrokovana njihovim smeštajem u hotel niže kategorije.
- *Troškovi za odbijene goste* uključuju troškove smeštaja u drugom hotelu, prevoz gostiju do njega, i plaća ih hotel koji je prebukiran (tj. onaj koji ih je odbio).

5. PREBUKIRANOST U ZDRAVSTVENIM USTANOVAMA

Prebukiranost se pokazala kao veoma dobra strategija i u zdravstvenim ustanovama, jer je većina zdravstvenih ustanova već imala iskustva sa pacijentima koji se ne pojavljuju na svoje zakazane preglede. Ti pacijenti su naročito problematični, jer ustanove potroše termin za pregled i kada se ti pacijenti ne pojave, prihod koji su mogli da ostvare je sada zauvek izgubljen. Prebukiranost rasporeda pregleda, tj. zakazivanje više pacijenata nego što ima slobodnih termina, može da pomogne zdravstvenim ustanovama da prime više pacijenata, pa samim tim i da povećaju svoj profit. Međutim, ako ustanove prebukiraju isuviše mnogo pacijenata mogu da se nađu u neprilici da rade prekovremeno da bi uslužili dodatne pacijente ili čak da odbiju neke pacijente. Stoga izazov u prebukiranosti je kako napraviti ravnotežu između troškova za nekoliko pacijenata koji su se pojavili i troškova kada se pojavi suviše pacijenata.

Ovde ćemo videti kako prebukiranost može da pomogne zdravstvenim ustanovama da primaju više pacijenata ali bez prekovremenog rada i da im omogući efikasnije korišćenje svojih resursa da bi maksimizirali profit.

Da bi se nadoknadili oni koji se nisu pojavili, zdravstvene ustanove uveliko koriste prebukiranost, jedan od prvih alata za upravljanje prihodom koji je primenjen u uslužnoj delatnosti. Prebukiranost je praksa da se prihvati više rezervacija nego što ima slobodnih mesta.

Dok je opšti koncept prebukiranosti primenljiv u zdravstvenim ustanovama, mnogi od osnovnih karakteristika i pretpostavki problema koji se koriste u modelima hotelijerstva i avio kompanija, nisu primenljivi u zdravstvenim ustanovama. Prebukiranost u zdravstvenim ustanovama je posebna iz sledećih razloga:

- U avionima i hotelima broj mesta je obično fiksiran. Medicinska klinika lako može da poveća broj mesta tako što osoblje koristi plaćeni prekovremeni rad.

- Mnoge studije o prebukiranosti u transportu, kao što su avioni i brodovi, ne razmatraju uticaj putnika koji se pojave a nemaju rezervisane karte, što je realnost u skoro svakoj medicinskoj ustanovi. To podrazumeva dolaske pacijenata koji nisu u rasporedu (koji nemaju zakazane preglede) i oni najčešće zahtevaju hitnu negu. Na primer, pedijatar će primiti pacijenta koji ima visoku temteraturu, iako nema zakazan pregled.

- Većina modela koji se koriste u avio kompanijama i hotelijertvu moraju da uzmu u obzir veoma realnu verovatnoću da neće prodati sva mesta ili sobe. U zdravstvu ne postoji ovakav problem. Naprotiv, zdravstvene ustanove imaju zakazane termine mesec ili više dana u napred.

- Zdravstvene ustanove imaju veoma različite strukture troškova u odnosu na avio kompanije i hotele. U zdravstvenim ustanovama, dominantni troškovi su personalni, dok su u avio kompanijama to fizički resursi (npr. avion).

Zbog svih ovih razloga, prebukiranost u zdravstvu se razlikuje i zato se model prebukiranosti iz avio kompanija i hotelijerstva ne može jednostavno primeniti na problem zakazivanja pregleda pacijenata.

Pošto su svesni problema pacijenata koji se ne pojave, neke zdravstvene ustanove se trude da primenjuju takozvanu naivnu prebukiranost. *Naivna prebukiranost* je kada zdravstvene ustanove prebukiraju ili na osnovu intuicije, tj. šta oni misle da je stopa nepojavljivanja, ili prebukiraju samo na osnovu prosečne stope nepojavljivanja.

Ono što je cilj modela je da se odredi koliko mnogo pregleda treba unapred zakazati. Zdravstvene ustanove žele da maksimiziraju profit tako što će primiti koliko god je moguće pacijenata, ali da se pri tome ne menjaju plate osoblja tj. da osoblje ne radi prekovremeno. Ako lekar ima isuviše mnogo zakazanih pregleda, moguće je da se ostvari mnogo veći prihod, ali u isto vreme znatno se povećavaju i troškovi prekovremenog rada i samim tim smanjuje se profit. Jasno, postoji optimalni nivo zakazanih pregleda, kojim se maksimizuje profit ali bez ikakve „kazne“ zbog pojavljivanja isuviše pacijenata. Optimalan broj pregleda koje treba zakazati ne može se odrediti intuitivno jer broj pacijenata koji se ne pojave, koji otkažu i koji se neplanirano pojave, imaju stohastičke osobine i oni se razlikuju u zavisnosti od lekara, medicinskog specijaliste, godišnjeg doba, itd.

Ovde je analiziran stohastički matematički model prebukiranosti (SMOM, *stochastic mathematical overbooking model*) za određivanje optimalnog broja pregleda koje treba unapred zakazati, da bi se maksimizirao ukupan očekivani profit zdravstvene ustanove. Koristi prebukiranosti pacijenata uključuju smanjenje vremena čekanja pacijenata na zakazivanje pregleda (što može da smanji stopu pacijenata koji se ne pojave), kao i povećanje kontinuiteta nege.

5.1 STOHASTIČKI MATEMATIČKI MODEL

Svrha modela prebukiranosti je određivanje optimalnog broja zakazanih pregleda da bi se maksimizirao ukupan očekivani profit zdravstvene ustanove. Ukupan očekivani profit je razlika između ukupnog očekivanog prihoda i ukupnih troškova (koji su napravljeni), kao što su troškovi opreme i plate lekara, sestara i administrativnog osoblja.

5.1.1 Model[11]

Neka N označava kapacitet ili ukupan broj pregleda za jednog lekara tokom vremena u jednoj smeni. Neka je A broj pregleda koji se unapred zakazuju. Za A može da se postavi uslov da je $A \geq N$, da bi se nadoknadili mogući pacijenti koje se neće pojaviti.

Neka je S diskretna slučajna promenljiva koja predstavlja stvaran broj pacijenata koji se pojave na svojim pregledima kada je zakazano A pregleda. Zatim, neka je

$$\mathrm{P}(S = s | A = a)$$

[11] Kim, Giachetti, [1]

verovatnoća da se pojavi s pacijenata koji imaju zakazane preglede, ako je ukupno zakazano a pregleda.

Neka je W diskretna slučajna promenljiva koja predstavlja broj pacijenata koji su se pojavili a nisu imali zakazane preglede, tako da

$$\mathrm{P}(W = w)$$

označava verovatnoću da se pojavi w pacijenata koji nisu imali zakazano. Pretpostavljamo da je verovatnoća od W nezavisna od A. Pacijenti koji se pojave a nemaju zakazano, najčešće zahtevaju hitnu negu ili imaju uput od nekog drugog lekara, i njihov broj dosta zavisi od godišnjeg doba ili medicinske specijalnosti, nego broj zakazanih pregleda.

Ovaj model pretpostavlja da se kapacitet može dinamično povećati do neke tačke ako jednostavno postoji lekar i neophodno medicinsko osoblje koji rade prekovremeno da bi primili te dodatne pacijente. Troškovi primanja tih dodatnih pacijenata verovatno će biti veći nego troškovi koji nastaju kada se primaju pacijenti tokom radnog vremena, zato što lekar mora da radi prekovremeno, osoblju treba platiti prekovremeni rad i pacijent mora duže da čeka da bi bio primljen. Međutim, postoji praktična granica koliko dodatnog kapaciteta može da se doda. Neka U označava gornju granicu broja pacijenata koji je moguće primiti u radnom vremenu plus prekovremeno, tako da je

$$U \geq N$$

Drugim rečima, klinika ne želi da primi više od U pacijenata tokom jedne smene.

Neka R označava prosečan prihod koji se ostvaruje po jednom pacijentu. R može da se odredi na dva različita načina u zavisnosti kako klinika funkcioniše. Na primer, klinika u nekim smenama može da prima pacijente za ista lečenja. U tom slučaju, prihod po pacijentu je poznat sa tačnom preciznošću i biće približno jednak za sve pacijente koji su primljeni tokom iste smene (jer su svi pacijenti primljeni zbog istog lečenja). Ako klinika prima pacijente za različita lečenja, ocena R zahteva ocenjivanje relativne frekvencije za svaki tip pacijenta koji su primljeni tokom jedne smene.

Neka Y označava ukupne fiksne troškove po jednom lekaru, koji uključuju troškove opreme i platu za lekara, sestru i administrativno osoblje tokom jedne tipične smene. Primetimo da je Y fiksirano bez obzira na broj primljenih pacijenata, na primer, čak i kada je broj primljenih pacijenata manji od kapaciteta N, tj.

$$S + W < N$$

i lekar postaje besposlen. Ako se pojavi više pacijenata nego što je kapacitet radnog vremena, tj. kada je

$$N < S + W \leq U$$

tada smena prelazi u prekovremeni rad. Neka C_o označava troškove prekovremenog rada po jednom pacijentu. Na kraju, ako je broj pacijenata koji se pojave veći od gornje granice kapaciteta, tj.

$$S + W > U$$

tada nastaju troškovi C_e po jednom pacijentu, gde C_e označava kaznene troškove zbog pomeranja rasporeda ili otpuštanja pacijenata bez pružanja predviđene usluge. Kazneni troškovi uključuju gubitak pacijenata.

Ukupan očekivani profit po jednom lekaru, M, ako je dato $A = a$, je

$$\mathrm{E}(M|A = a) = (\text{ostvareni prihod}) - (\text{nastali troškovi})$$

$$= \sum_w \sum_s (R \min\{s + w,\ U\} - Y - C_o \max\{\min\{s + w,\ U\} - N, 0\} - C_e \max\{s + w - U, 0\}) \cdot \mathrm{P}(S = s|A = a)\mathrm{P}(W = w) \qquad (5.1)$$

U prethodnoj jednačini, izraz

$$R \min\{s + w, U\}$$

označava da se ukupni prihod povećava kada $s + w$ raste, ali samo do U, i ne nastaje nikakav dodatni prihod kada je $s + w > U$. Zatim, izraz

$$C_o \max\{\min\{s + w, U\} - N, 0\}$$

znači da troškovi prekovremenog rada nastaju samo kada je $N < s + w \leq U$. Dok izraz

$$C_e \max\{s + w - U, 0\}$$

znači da kazneni troškovi usled otpuštanja pacijenata bez pružene usluge nastaju samo kada je $s + w > U$.

Naš cilj je da pronađemo optimalnu vrednost a^* tako da je

$$\mathrm{E}(M|A = a^*) \geq \mathrm{E}(M|A = a) \qquad \text{za sve } a.$$

Primetimo da a^*, optimalan broj unapred zakazanih pregleda, postoji. Prvo, činjenica da je prosečna stopa pacijenata koji se ne pojave konačna i da klinika ne želi da primi više od U pacijenata tokom jedne smene, implicira da je broj unapred zakazanih pregleda ograničen odgore, tj. $A \leq \alpha$ za datu konačnu vredost α. Zatim, činjenica da su svi parametri u (5.1) konačni, garantuje granicu za $\mathrm{E}(M|A = a)$ za $N \leq a \leq \alpha$. Pošto je mogući broj zakazanih pregleda ceo broj, a^* tražimo na konačnom skupu.

Sledeći primer pokazuje osnovnu strukturu prihoda, troškova i profita, sa promenom broja pacijenata koji se pojave.

Da bismo izračunali $\mathrm{E}(M|A = a)$ iz (5.1), potrebno je oceniti uslovne verovatnoće $\mathrm{P}(S = s|A = a)$ za sve $s = 0,1, \dots, a$, i za sve $a = N + 1, N + 2, \dots, \alpha$. Da bismo to uradili, pretpostavićemo da broj pacijenata koji imaju zakazano ako je korišćena prebukiranost ima približno konstantnu stopu nepojavljivanja kao i broj pacijenata koji imaju zakazano u radnom vremenu bez prebukiranosti. Na primer, ako je stopa nepojavljivanja 25% u slučaju kada nema prebukiranosti i recimo neka je $N = 12$, tada pretpostavljamo da je stopa nepojavljivanja kada ima prebukiranosti približno 25%, za recimo $A = 15$, zadržavajući oblik raspodele.

Prvo aproksimiramo funkciju gustine verovatnoće

$$f(S' = s'|A = N) \text{ za } s' \in [0, N]$$

iz poznate ukupne funkcije verovatnoće $\mathrm{P}(S = s|A = N)$ za $s = 0,1,\dots,N$, koristeći niz uniforminih funkcija. Neka je

$$p_s \equiv \mathrm{P}(S = s|A = N)$$

za $s = 0,1,\dots,N$. Zatim definišemo $f(S' = s'|A = N)$ na sledeći način:

$$f(S' = s'|A = N) = \begin{cases} 2p_0 & 0 \leq s' < 0.5 \\ p_s & s - 0.5 \leq s' < s + 0.5, s = 1,2,\dots,N-1 \\ 2p_N & N - 0.5 \leq s' < N \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \tag{5.2}$$

Sada ćemo diskretizovati ovu funkciju gustine $f(S' = s'|A = N)$ za $s' \in [0, N]$, da bismo dobili ukupnu funkciju gustine $\mathrm{P}(S = s|A = a)$ za $s = 0,1,\dots,a$, za svako $a = N + 1, N + 2,\dots,\alpha$, na sledeći način:

$$\mathrm{P}(S = s|A = a) = \int_{(s-0.5)\frac{N}{a}}^{(s+0.5)\frac{N}{a}} f(S' = s'|A = N)ds' \tag{5.3}$$

Nakon ocenjivanja traženih uslovnih verovatnoća koje smo uradili, sada možemo rešiti (5.1) da bismo dobili ukupan očekivani profit.

5.1.2 Analiza modela

Da bismo videli koliko je efikasan naš model prebukiranosti, posmatraćemo sledeća tri različita modela i uporedićemo njihove ukupne očekivane profite:

- **Nema prebukiranosti** – Ovo je osnovni slučaj.
- **Naivni statistički prilaz prebukiranosti** (NSOA, *naive statistical overbooking approach*) – U ovom modelu, broj pacijenata koji će biti prebukirani određuje se kao srednji broj nepojavljivanja (m_n) minus srednji broj neplaniranih dolazaka (m_w), dokle god je broj onih koji se ne pojave veći ili jednak od broja onih koji se pojave a nemaju zakazano. Drugim rečima, NSOA određuje broj prebukiranih pacijenata kao

$$\max\{m_n - m_w, 0\}$$

- **Stohastički matematički model prebukiranosti** (SMOM, *stochastic mathematical overbooking model*) – Ovo je metod koji je ovde razmatran.

Rezultati koji su ovde navedeni zasnivaju se na Kim, Giachetti [1].

Posmatrana je jedna medicinska klinika. Za 59 lekara te klinike, sakupljeni su podaci o broju nedolazaka, neplaniranih dolazaka i otkazivanja tokom tri meseca (maj, jun i jul 2003. godine). Uzorak je uključivao i lekare koji pružaju osnovnu negu, kao i specijaliste. Medicinska klinika je imala 4-časovne smene i u zavisnosti od medicinske specijalnosti svaki lekar je primao 12, 16 ili 24 pacijenata tokom jedne smene, što je kapacitet te smene. Takođe, sakupljene su informacije o platama lekara i kliničkog osoblja. Pomoću ovih informacija, može da se odredi Y i C_o. Za ocenu C_e, kaznenih troškova zbog otpuštanja pacijenata bez pružene usluge, sa zdravstvenom ustanovom je razmotreno koliko ih košta takozvani gubitak klijenata kada pacijent ne može biti primljen. Prosečan prihod po pacijentu R je ocenjen proučavanjem rasporeda uplata.

U tabeli 5.1 prikazani su ukupni očekivani profiti za svih 59 lekara, koji su dobijeni u osnovnom slučaju (bez prebukiranosti), pomoću NSOA i SMOM.

	Osnovni slučaj	**NSOA**	**SMOM**
Ukupan profit	$51.888	$67.279	$74.573
Procenat		29,66%	43,72%

Tabela 5.1 *Nedeljni očekivani ukupni profit za osnovni slučaj, NSOA i SMOM*

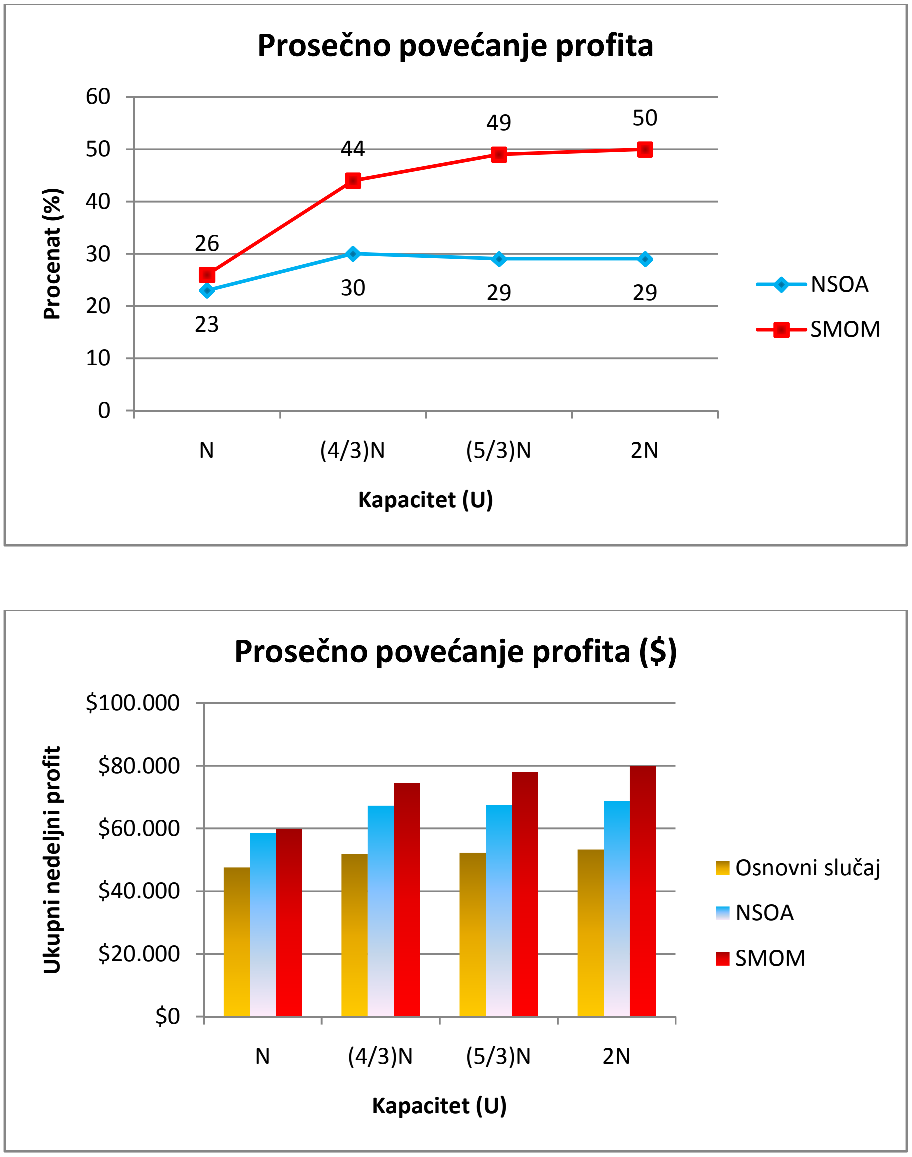
NSOA povećava ukupan očekivani profit za 29.66% jednostavno uz prebukiranje koristeći srednje vrednosti nedolazaka i dolazaka pacijenata koji nemaju zakazano. Međutim, ako u razmatranje uključimo raspodele verovatnoća nedolazaka i neplaniranih dolazaka, kao i strukture troškova, kao što je urađeno u SMOM, klinika će povećati ukupan očekivani profit za 43.72%.

5.1.2.1 Uticaj parametara na model

Sada ćemo videti kako svaki od parametara utiču na ukupan očekivani profit.

Gornja granica za broj pacijenata koje je moguće primiti tokom radnog vremena plus prekovremeno (U)

Slika 5.1 prikazuje promene u profitu za NSOA i SMOM, dok U raste od N do $2N$. Rezultat pokazuje da razlika profita između NSOA i SMOM postaje značajna kada se U povećava. Na primer, u ekstremnom slučaju kada nije dozvoljena prebukiranost (tj. posle kapaciteta N svaki pacijent se šalje kući bez usluge), SMOM (26%) ne obezbeđuje mnogo više dobiti od NSOA (23%). Međutim, u drugom ekstremnom slučaju kada je $U = 2N$, SMOM (50%) znatno više povećava profit od NSOA (29%).



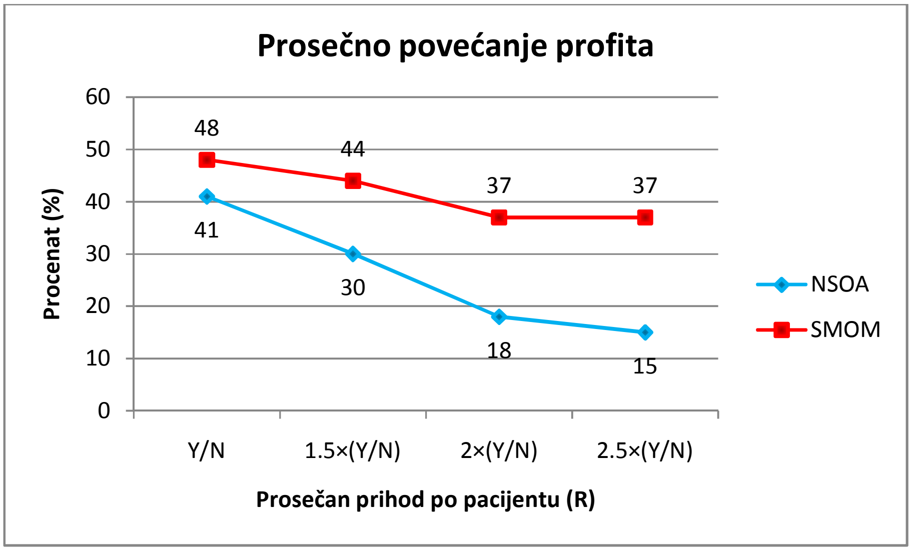
Slika 5.1 *Promene u povećanju prosečnog profita sa promenom gornje granice U*

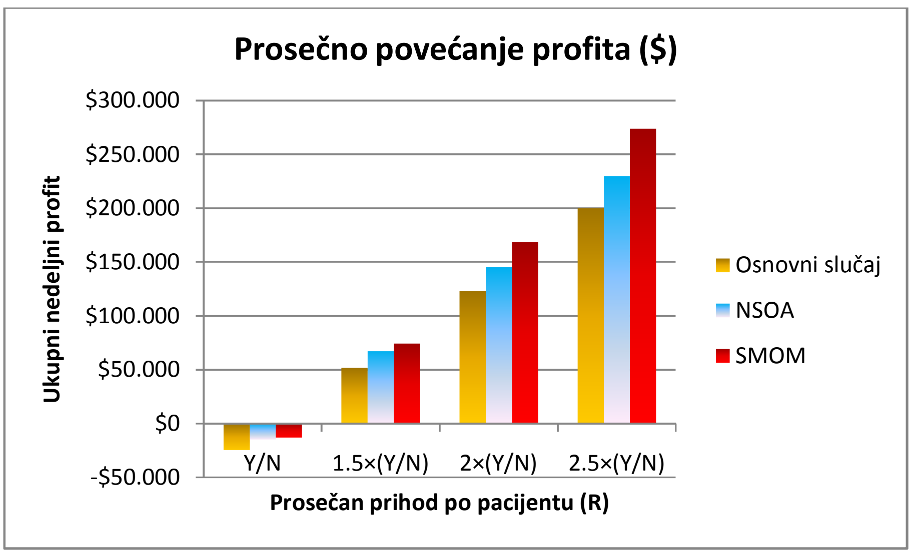
Prosečan prihod po pacijentu (R)

Na slici 5.2, prikazano je prosečno povećanje profita za NSOA i SMOM, dok R raste od $\frac{Y}{N}$ do 2.5 $\frac{Y}{N}$. Prvo, podsetimo se da su Y fiksni troškovi po lekaru nastali tokom smene u radnom vremenu, pa je $\frac{Y}{N}$ prosečni trošak po pacijentu tokom radnog vremena. Na primer, ako je $R = 1.5\ \frac{Y}{N}$ to znači da je prihod po pacijentu 1.5 puta veći od troškova po pacijentu i klinika će realizovati neki profit.

Slika 5.2 pokazuje, kao što je predviđeno, da ukupni očekivani profit ($) značajno raste dok R raste od $\frac{Y}{N}$ do 2.5 $\frac{Y}{N}$. Međutim, procenat povećanja očekivanog profita pomoću

NSOA znatno se smanjio, sa 41% na 15%, dok u slučaju SMOM varira samo od 48% do 37%. Rezultati ukazuju da prebukiranost obezbeđuje profit bez obzira na prihod ostvaren po pacijentu.



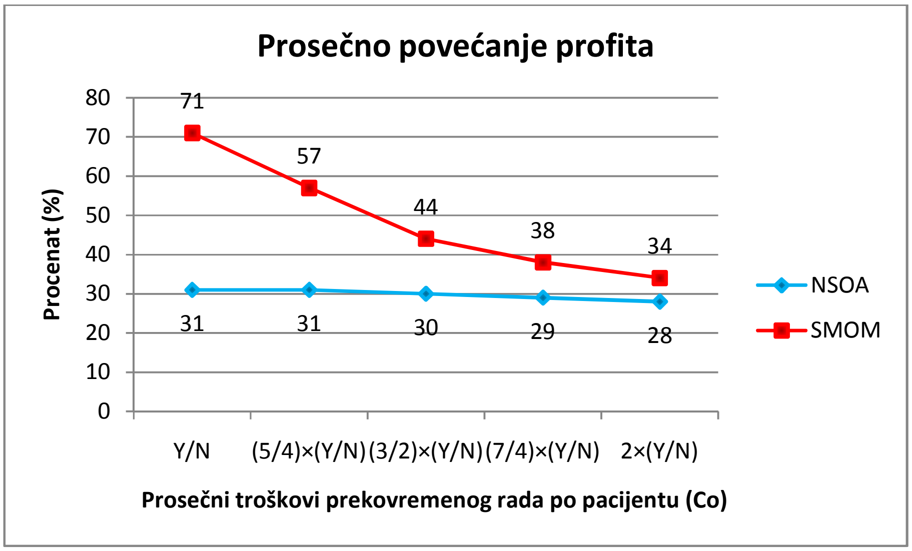


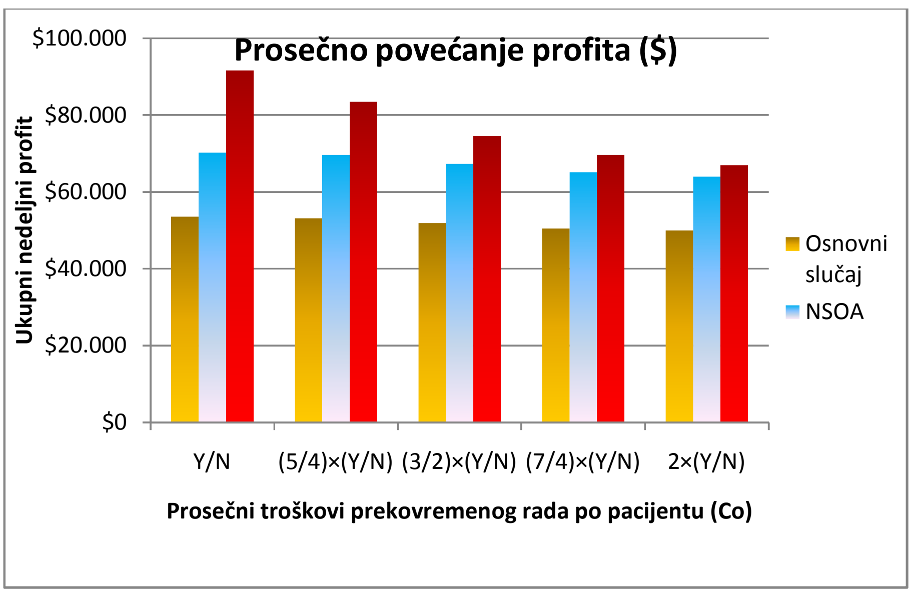
Slika 5.2 *Promene u povećanju prosečnog profita sa promenom prosečnog prihoda R*

Prosečni troškovi prekovremenog rada po pacijentu (C_o)

Na slici 5.3 prikazan je ukupan očekivan profit kao funkcija od C_o nad domenom od $\frac{Y}{N}$ do $2\,\frac{Y}{N}$. $C_o = \frac{Y}{N}$ znači da su prosečni troškovi prekovremenog rada jednaki prosečnim troškovima tokom radnog vremena po pacijentu. Pošto u ovom slučaju ne postoje dodatni troškovi prekovremenog rada, ima smisla prihvatiti mnogo pregleda da bi se obezbedila velika verovatnoća da će raspored biti popunjen, iako ova strategija može da prouzrokuje da broj pacijenata koji se pojave premaši gornju granicu kapaciteta U, i stoga će, prema našem modelu, takvi pacijenti biti odbijeni.

Primetimo da se iznos ukupnog očekivanog profita ($) i procenat povećanja očekivanog profita (%) smanjuju sa povećanjem C_o. Razlika u procentu povećanja profita između NSOA i SMOM je velika za $C_o = \frac{Y}{N}$, 71% i 31% respektivno, dok ta razlika nije značajna za $C_o = 2\,\frac{Y}{N}$, 34% i 28%, respektivno.

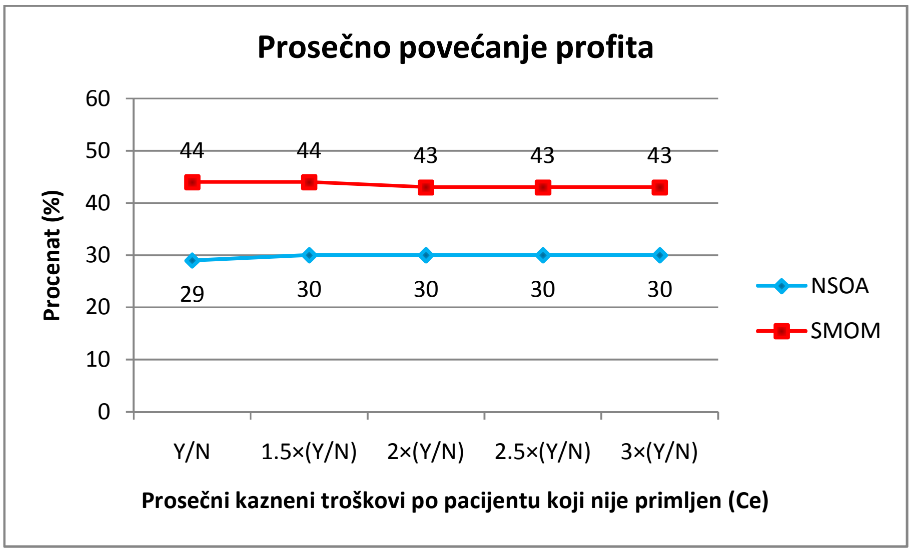


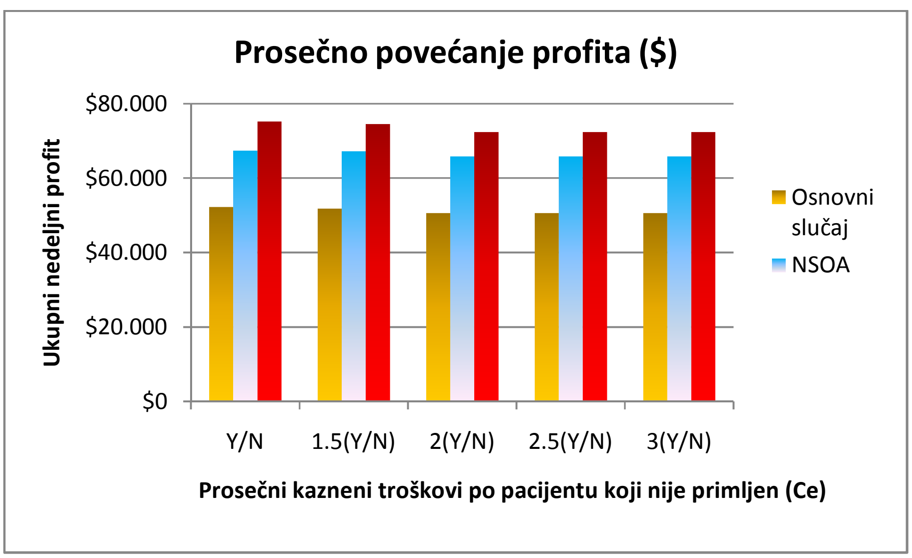


Slika 5.3 *Promene u povećanju profita sa promenom troškova prekovremenog rada* C_o

Prosečni kazneni troškovi po pacijentu koji je odbijen (C_e)

Na slici 5.4 prikazane su promene u profitu za NSOA i SMOM, dok C_e raste od $\frac{Y}{N}$ do $3\,\frac{Y}{N}$. Kada zdravstvena ustanova odbije da nekom pacijentu pruži medicinsku uslugu, ona rizikuje da izgubi pacijenta koji bi mogao da ih „poseti" nekoliko puta godišnje. Stoga, kazneni troškovi C_e mogu biti razmatrani kao sadašnja vrednost moguće buduće vremenske serije prihoda koji se mogu očekivati od tog pacijenta. Sa druge strane, kada pacijenti imaju nekoliko mogućnosti ili malu kontrolu nad njihovim izborom zdravstvene ustanove, realno je da je kazna mala.





Slika 5.4 *Promene u povećanju profita*
sa promenom prosečnih kaznenih troškova C_e

6. PRIMERI MODELA PREBUKIRANOSTI

Sada ćemo videti kako modele koje smo do sada razmatrali, možemo primeniti na neke realne probleme.

6.1 OSNOVNI MODEL ZA AVIO KOMPANIJU

Rezultati se zasnivaju na [4].

Posmatraćemo let čiji je kapacitet

$$C = 150$$

i pretpostavićemo da su sva mesta jednaka. Zatim, neka je cena karte za taj let jednaka

$$T = 140\$$$

Sada, za ove podatke možemo da rešimo jednačinu (3.2) i kao rezultat dobijamo optimalnu strategiju prebukiranosti B koja maksimizira prihod $R(B)$. Rešavanjem jednačine (3.3) dobijamo analitičku aproksimaciju za optimalnu strategiju B.

U tabeli 6.1 prikazane su dobijene vrednosti za optimalnu strategiju prebukiranosti B_{opt} i njenu analitičku aproksimaciju B'_{opt}, za različite verovatnoće p i konstantu naknade k.

p	k	B_{opt}	B'_{opt}
0.80	1	189	188
0.85	1	177	176
0.90	1	167	167
0.80	2	186	185
0.85	2	175	174
0.90	2	165	165
0.80	3	184	183
0.85	3	173	173
0.90	3	164	164

Tabela 6.1 *Optimalna strategija prebukiranosti i njena aproksimacija*

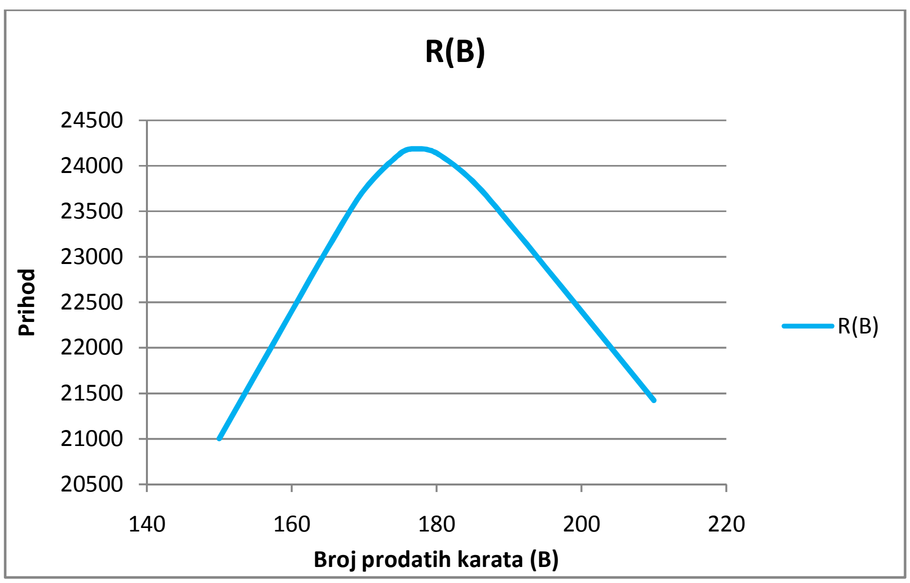
U stvarnosti, k skoro nikada neće biti veće od 3. Odnosno, prekobrojni putnici skoro nikada neće dobiti naknadu koja je $k + 1 = 4$ puta veća od cene karte. Mnogo realniji troškovi naknade dobijaju se za $k = 1$ ili $k = 2$. Prema nekim podacima, prosečna verovatnoća sa kojom putnici dolaze na izlaz je približno

$$p = 0.85$$

U tabeli 6.1, nalaze se i rezultati za optimalnu strategiju prebukiranosti za ovu vrednost p i različite vrednosti za k. Ono što možemo da primetimo je da su vrednosti analitičke aproksimacije B'_{opt} skoro jednake sa pravim vrednostima za optimalnu strategiju prebukiranosti B_{opt}. Zbog toga bi formula (3.3) mogla da se uzme u obzir kao razumna aproksimacija za pravo B_{opt}.

Sada ćemo malo detaljnije analizirati rezultate koji su dobijeni za optimalne strategije prebukiranosti B_{opt}. Očigledno je da su nam za neki određeni let poznati kapacitet aviona C i cena karte T, i da bi avio kompanija trebala da odredi veoma dobre aproksimacije za p i k. Samim tim, kada su nam poznati svi ti podaci, pomoću formule (3.2) veoma lako može da se odredi optimalna strategija prebukiranosti B_{opt}.

Na slici 6.1 prikazan je očekivani prihod $R(B)$ u zavisnosti od strategija prebukiranosti B, za $C = 150$, $k = 1$, $p = 0.85$ i $T = 140\$$.



Slika 6.1 *Prihod* $R(B)$ *u zavisnosti od strategija prebukiranosti B*

Za optimalnu strategiju prebukiranosti $B_{opt} = 177$, avio kompanija može da očekuje da će ostvariti prihod

$$R(B_{opt}) = R(177) = 24200\$$$

koji je više od 15% veći od očekivanog prihoda za strategiju bez prebukiranosti:

$$R(B) = R(C) = R(150) = 21000\$.$$

Ovo samo pokazuje očiglednu prednost primene prebukiranosti.

6.1.1 Osnovni model za let sa dve klase

Za fiksirane C_i, T_i, p_i i k_i $(i = 1,2)$, možemo da nađemo $(B_{1,opt}, B_{2,opt})$, za koje je očekivani prihod $R(B_1, B_2)$ maksimalan.

p_1	p_2	$B_{1,opt}$	$B_{2,opt}$
0.85	0.80	23	165
0.90	0.80	22	165
0.95	0.80	20	166
0.85	0.85	23	155
0.90	0.85	22	155
0.95	0.85	20	155
0.90	0.90	22	146
0.95	0.90	21	145

Tabela 6.2 *Optimalna strategija prebukiranosti za let sa dve klase*

Neka, u našem slučaju, na letu postoje $C_1 = 20$ mesta u prvoj klasi, a $C_2 = 130$ mesta u turističkoj klasi. Zatim neka su cene karata

$$T_1 = 280\$ \quad \text{i} \quad T_2 = 140\$$$

a konstante naknade $k_1 = k_2 = 1$. Optimalne strategije prebukiranosti koje se u ovom slučaju dobijaju, prikazane su u tabeli 6.2.

Možemo uočiti da optimalna strategija obuhvata relativno malu prebukiranost u prvoj klasi. Ovo je dosta razumljiv rezultat, pošto su troškovi naknade mnogo veći za prekobrojne putnike u prvoj klasi nego u turističkoj klasi.

Takođe, primetimo da za konstantno p_2, ukupan broj prebukiranih putnika $B_{1,opt} + B_{2,opt}$ u optimalnoj strategiji, ne zavisi mnogo od vrednosti p_1. Ovo je prikazano u tabeli 6.3. Tu je izvršeno poređenje ukupnog broja prebukiranih putnika $B_{1,opt} + B_{2,opt}$ u optimalnoj strategiji za dve klase sa verovatnoćama dolaska (p_1, p_2) i broja prebukiranih putnika B_{opt} u optimalnoj strategiji za jednu klasu sa verovatnoćom dolaska $p = p_2$. Odnosno, uzeto je da je verovatnoća dolaska za slučaj sa jednom klasom jednaka verovatnoći dolaska putnika u turističku klasu za odgovarajući slučaj sa dve klase.

Tabela 6.3 pokazuje da je $B_{1,opt} + B_{2,opt}$ jednako ili skoro jednako sa B_{opt} u svim slučajevima. Ono što možemo da zaključimo je da uključivanje više klasa u model ne utiče značajno na optimalnu strategiju prebukiranosti.

p_1	p_2	$B_{1,opt}+B_{2,opt}$	B_{opt} za $p=p_2$
0.85	0.80	188	189
0.90	0.80	187	189
0.95	0.80	186	189
0.85	0.85	178	177
0.90	0.85	177	177
0.95	0.85	175	177
0.90	0.90	168	167
0.95	0.90	166	167

Tabela 6.3 *Ukupan optimalan broj prebukiranih u slučaju dve klase, u odnosu na optimalan broj prebukiranih u slučaju jedne klase*

6.2 STATIČKI MODEL U AVIO KOMPANIJI

Rezultati za ovaj model preuzeti su iz Leder [3].

Posmatraćemo američku avio kompaniju *Frontier Airlines* i jedan od njenih letova. Sve karte za taj let su za istu klasu i ne mogu se vratiti. Putnici koji se nisu pojavili na izlazu, svoje karte mogu da prebace na neki naredni let iste kompanije za

$$R = 60\$$$

Prosečna verovatnoća sa kojom se putnici pojavljuju na izlazu je jednaka

$$p = 0.88$$

Još imamo da je:

$T = 316\$$ - prosečni troškovi cena karata tokom jedne nedelje u 2002. godini

$\text{Cost}_{\text{Flight}} = 24\,648\ \$$ - zasniva se na faktoru popunjenosti (*break-even load factor* – procenat kapaciteta leta koji mora biti popunjen da bi se let isplatio), koji za ovaj let iznosi 57.8%

$\text{Cost}_{\text{Add}} \approx 16\$$

$C = 134$

$C_{\$} = C \cdot 57.8\% = 78$

Bez prebukiranosti

Ako avio kompanija ne bi koristila prebukiranost za svoje letove, imala bi značajne gubitke. Ako je broj ljudi koji su rezervisali karte B jednak kapacitetu aviona C, očekivan broj putnika koji će se pojaviti na izlazu (očekivana vrednost za X) je:

$$pB = pC = 0.88 \cdot 134 \approx 118 \text{ putnika}$$

Ako pretpostavimo (kao u funkciji ukupnog profita) da svaki putnik koji se pojavi na izlazu nakon 78-og putnika (broj putnika koji je potreban da se let ne bi otkazao) donosi profit u vrednosti od

$$T - \mathrm{Cost}_{\mathrm{Add}} = 316\$ - 16\$ = 300\$$$

tada je očekivani profit po letu približno jednak:

$$(134 - 118) \cdot 60\$ + 300\$ \cdot (118 - 78) = 12\,960\$$$

Ovo je samo ocena, pošto je moguće da na izlaz dođe više ili manje od 57.8% putnika. Ovaj profit je prilično velik, ali na letu još uvek ima, u proseku, 16 praznih mesta. Zbog toga, kompanija ima približan gubitak od

$$300\$ \cdot 16 = 4\,800\,\$$$

Zbog toga, ako ne bi bilo prebukiranosti, profit od ovog leta bi bio 8 160$, što je samo 63% njegove moguće profitabilnosti.

Model sa pragom otkaza

Ako uzmemo da je prag otkaza 0.05, možemo odrediti optimalan broj putnika koji mogu da rezervišu karte na ovom letu. Ako je kapacitet leta 134 putnika i svaki putnik dolazi na izlaz sa verovatnoćom $p = 0.88$, optimalan broj karata koje treba prodati je

$$B = 145$$

ili 107% od kapaciteta leta.

Linearni plan naknade

Tabela 6.4 pokazuje očekivani profit za različite linearne funkcije prekobrojnosti.

Ako avio kompanija prekobrojnim putnicima daje naknadu koja je manja od cene karte, troškovi na prekobrojnim putnicima će uvek biti manji od prihoda koji je dobijen prodajom karata. Zbog toga, pretpostavljajući da avio kompanija može da proda koliko god želi karata, ona bi ostvarila neograničeni profit na svakom letu. Očigledno je da linearni plan naknade nije realan. Ovi rezultati se slažu sa rezultatima koji se dobijaju korišćenjem prostog praga otkaza i pokazuju da je prosečan profit približno 17000$. U poređenju sa strategijom koja ne koristi prebukiranost, avio kompanija ostvaruje dodatni profit od 4000$ po letu.

Troškovi za jednog prekobrojnog putnika (B$)	Optimalan broj rezervacija (B)	Očekivani profit po letu
200	∞	∞
316	162	$17.817
400	156	$17.394
500	153	$17.121
600	152	$16.940
700	151	$16.799
800	151	$16.692
900	150	$16.601
1000	150	$16.526

Tabela 6.4 *Linearne funkcije prekobrojnosti*

Nelinearni plan naknade

U tabeli 6.5 dato je nekoliko različitih funkcija prekobrojnosti. Ono što možemo da primetimo je da je broj rezervacija sličan, iako malo veći nego što je bio slučaj u linearnom planu naknade.

Funkcija prekobrojnosti	Optimalan broj rezervacija	Profit po letu
$50e^{0.134(X-C)}(X-C)$	160	$ 18.700
$100e^{0.100(X-C)}(X-C)$	158	$ 18.240
$200e^{0.065(X-C)}(X-C)$	156	$ 17.722
$316e^{0.042(X-C)}(X-C)$	154	$ 17.363

Tabela 6.5 *Nelinearne funkcije prekobrojnosti*

Nelinearne funkcije prekobrojnosti koje su ovde ispitane, dale su maksimalan realizovani profit, kao što se i očekivalo.

6.3 STOHASTIČKI MODEL U ZDRAVSTVENOJ USTANOVI

Rezultati ovog primera zasnivaju se na Kim, Giachetti [1].

U ovom primeru videćemo kako se menja struktura prihoda, troškova i profita sa promenom broja pacijenata koji se pojave.

Posmatraćemo kliniku, u kojoj doktor treba da primi 12 pacijenata tokom smene, odnosno

$$N = 12$$

Prosečan prihod po pacijentu je

$$R = \$100$$

Klinika ima fiksne troškove koji uključuju troškove opreme i plate za lekara, sestre i administrativno osoblje tokom radnog vremena i oni iznose

$$Y = \$600$$

Kad god je potrebno, klinika ima troškove prekovremenog rada

$$C_o = \$75$$

po primljenom pacijentu. Međutim, klinika neće primiti više od 16 pacijenata tokom jedne smene, dakle

$$U = 16$$

Kada je broj pacijenata koji se pojave veći od 16, klinika ima kaznene troškove od

$$C_e = \$75$$

po pacijentu koji je otpušten bez pružene usluge.

Tabela 6.6 prikazuje kako se prihod, svi elementi troškova i profita menjaju sa povećanjem broja pacijenata koji se pojavljuju od 0 do 20.

Kada se pojavi manje od 6 pacijenata, klinika je na gubitku. Ukupan profit raste dok broj pacijenata koji se pojavljuju raste do 16. Međutim, primetimo da iznad gornje granice kapaciteta 16, ostvareni prihod ne raste, ali da rastu kazneni troškovi. Da bi se odredio optimalan broj zakazanih pregleda, potrebno je uvesti raspodelu verovatnoće za pacijente koji se pojavljuju (za one koji imaju zakazano i one koji nemaju), i raspodela je različita za lekare, medicinske specijaliste, godišnja doba...

Broj pacijenata koji se pojave	Prihod	Troškovi radnog vremena	Troškovi prekovremenog rada	Kazneni troškovi	Ukupni troškovi	Profit
0	$0	$600	$0	$0	$600	-$600
1	$100	$600	$0	$0	$600	-$500
2	$200	$600	$0	$0	$600	-$400
3	$300	$600	$0	$0	$600	-$300
4	$400	$600	$0	$0	$600	-$200
5	$500	$600	$0	$0	$600	-$100
6	$600	$600	$0	$0	$600	$0
7	$700	$600	$0	$0	$600	$100
8	$800	$600	$0	$0	$600	$200
9	$900	$600	$0	$0	$600	$300
10	$1.000	$600	$0	$0	$600	$400
11	$1.100	$600	$0	$0	$600	$500
12	$1.200	$600	$0	$0	$600	$600
13	$1.300	$600	$75	$0	$675	$625
14	$1.400	$600	$150	$0	$750	$650
15	$1.500	$600	$225	$0	$825	$675
16	$1.600	$600	$300	$0	$900	$700
17	$1.600	$600	$300	$75	$975	$625
18	$1.600	$600	$300	$150	$1.050	$550
19	$1.600	$600	$300	$225	$1.125	$475
20	$1.600	$600	$300	$300	$1.200	$400

Tabela 6.6 *Promena profita usled promene broja pacijenata koji se pojave*

Ovde ćemo još videti na koji način se ocenjuju uslovne verovatnoće $\mathrm{P}(S = s|A = a)$, za sve $s = 0,1, \dots, a$ i za sve $a = N+1, N+2, \dots, \alpha$.

Pretpostavimo da je dato

$$\mathrm{P}(S = s|A = 8) = \begin{cases} 0.1 & \text{za } s = 4 \\ 0.2 & \text{za } s = 5 \\ 0.3 & \text{za } s = 6 \\ 0.3 & \text{za } s = 7 \\ 0.1 & \text{za } s = 8 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

i treba da ocenimo $\mathrm{P}(S = s|A = 12)$ za sve $s = 0,1, \dots, 12$. Iz date raspodele verovatnoća, dobijamo da je srednja stopa nepojavljivanja 23.75%. Koristeći (5.2), prvo konstruišemo niz koraka uniformnih funkcija

$$f(S' = s'|A = 8) = \begin{cases} 0.1 & \text{za } 3.5 \leq s < 4.5 \\ 0.2 & \text{za } 4.5 \leq s < 5.5 \\ 0.3 & \text{za } 5.5 \leq s < 6.5 \\ 0.3 & \text{za } 6.5 \leq s < 7.5 \\ 0.2 & \text{za } 7.5 \leq s < 8 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Zatim, koristimo (5.3) za $N = 8$ i $a = 12$, za svako $s = 0,1, \dots ,12$, i konačno ocenimo ukupnu funkciju verovatnoće $\mathrm{P}(S = s|A = 12)$:

$$\mathrm{P}(S = s|A = 12) = \begin{cases} \frac{1}{60} & \text{za } s = 5 \\ \frac{4}{60} & \text{za } s = 6 \\ \frac{7}{60} & \text{za } s = 7 \\ \frac{9}{60} & \text{za } s = 8 \\ \frac{12}{60} & \text{za } s = 9 \\ \frac{12}{60} & \text{za } s = 10 \\ \frac{11}{60} & \text{za } s = 11 \\ \frac{4}{60} & \text{za } s = 12 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Odavde dobijamo da je prosečna stopa nepojavljivanja 24%, što je približno jednako pravoj srednjoj stopi nepojavljivanja 23.75%, sa greškom samo 1%.

7. PRIMENA OSNOVNOG MODELA PREBUKIRANOSTI NA JEDAN NOVOSADSKI HOTEL

Da bismo videli da li je i koliko je neki model dobar, potrebno je primeniti taj model na neki realan problem. Osnovni model prebukiranosti za hotelijerstvo koji je ovde razmatran, primenićemo na jedan od novosadskih hotela.

Kapacitet ovog hotela je

$$C = 20 \text{ soba}$$

i sve sobe su jednake. Cena jedne sobe u hotelu je

$$r = 5800{,}00 \text{ RSD.}$$

Trenutna praksa u ovom hotelu je da se ne koristi prebukiranost. Shodno tome, uprava hotela nema na raspolaganju statističke podatke o nedolascima gostiji, otkazivanju rezervacija u poslednjem trenutku i izmenama rezervacija od strane gostiju koji su već smešteni u hotelu. Međutim, na osnovu dosadašnjeg iskustva, poznato je da je prosečna stopa otkazivanja rezervacija u poslednjem trenutku i nedolazaka gostiju približno 5%.

Oblik rezervacija koje koristi ovaj hotel su negarantovane rezervacije. Jedino tokom održavanja raznoraznih sajmova, kongresa, festivala „Exit“ i sličnih manifestacija kada je potražnja za smeštajem znatno veća, hotel koristi garantovane rezervacije i to u vidu plaćanja unapred. U slučaju garantovanih rezervacija, hotel se do sada nije susreo sa otkazivanjem istih.

Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj soba za koje su za određeni dan potvrđene rezervacije, ali koje su ostale prazne (gosti se nisu pojavili, rezervacije su otkazane u poslednjem trenutku ili su gosti izmenili svoje rezervacije). Tada ta slučajna promenljiva ima binomnu raspodelu:

$$X : \mathcal{B}(B, p)$$

gde je B ukupan broj rezervisanih soba, a p je verovatnoća da se rezervacija otkaže, što je u slučaju našeg hotela

$$p = 0.05$$

Verovatnoća da su za tačno i soba otkazane rezervacije, ako je ukupno rezervisano B soba je tada jednaka:

$$\mathrm{P}\{X = i\} = \binom{B}{i} p^i (1-p)^{B-i}$$

Pošto je poznato da hotel ne praktikuje prebukiranost, ukupan broj rezervisanih soba je tada jednak kapacitetu tog hotela, tj.

$$B = C$$

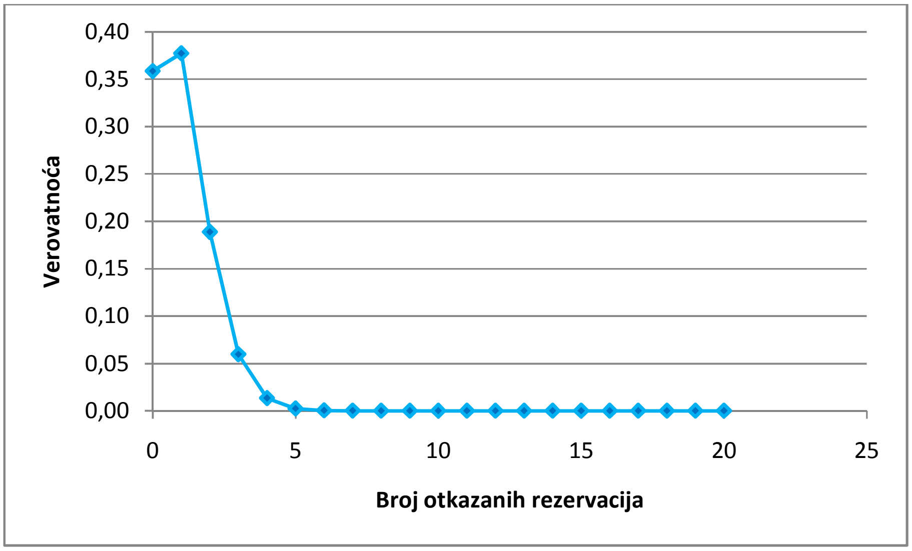
Sada na osnovu svih navedenih podataka, možemo odrediti zakon raspodele za slučajnu promenljivu X, koji je prikazan u tabeli 7.1.

B	i	p	$P\{X = i\}$	$F(X)$
20	0	0,05	0,35849	0,358486
20	1	0,05	0,37735	0,73584
20	2	0,05	0,18868	0,924516
20	3	0,05	0,05958	0,984098
20	4	0,05	0,01333	0,997426
20	5	0,05	0,00224	0,999671
20	6	0,05	0,00030	0,999966
20	7	0,05	0,00003	0,999997
20	8	0,05	0,00000	1
20	9	0,05	0,00000	1
20	10	0,05	0,00000	1
20	11	0,05	0,00000	1
20	12	0,05	0,00000	1
20	13	0,05	0,00000	1
20	14	0,05	0,00000	1
20	15	0,05	0,00000	1
20	16	0,05	0,00000	1
20	17	0,05	0,00000	1
20	18	0,05	0,00000	1
20	19	0,05	0,00000	1
20	20	0,05	0,00000	1

Tabela 7.1 *Zakon raspodele slučajne promenljive X*

Ono što možemo primetiti je da je najverovatnije da će u jednom danu biti otkazana samo jedna ili nijedna rezervisana soba. Takođe, postoje i realne verovatnoće da će biti otkazano dve, tri ili četiri rezervisane sobe, dok za više od četiri sobe ta verovatnoća sve više teži nuli, što možemo videti na slici 7.1. Zato ćemo uzeti da slučajna promenljiva X ima sledeći zakon raspodele:

$$X\colon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.36 & 0.38 & 0.19 & 0.06 & 0.01 \end{pmatrix}$$



Slika 7.1 *Grafički prikaz verovatnoća da će određeni broj rezervacija biti otkazan*

Sada ćemo odrediti ukupan očekivan profit ovog hotela u toku jednog dana. Ako je ukupan broj rezervisanih soba jednak kapacitetu hotela, tada je očekivan broj otkazanih rezervacija (tj. očekivan broj soba koje će ostati prazne) jednak:

$$pC = 0.05 \cdot 20 = 1 \text{ soba}$$

Prihod koji hotel ostvaruje na izdatim sobama je tada:

$$(C - X) \cdot r = 19 \cdot 5800{,}00 = 110\,200{,}00 \text{ RSD}$$

Međutim, hotel će imati i određene gubitke, jer je jedna soba ostala prazna. Taj gubitak iznosi:

$$X \cdot r = 5\,800{,}00 \text{ RSD}$$

Očekivani profit koji hotel ostvaruje tokom jednog dana je tada jednak:

$$110\,200{,}00 - 5\,800{,}00 = 104\,400{,}00 \text{ RSD}$$

Ovo je samo ocena za očekivani profit hotela, jer može da se desi da je za određeni dan otkazano više ili manje od jedne rezervacije.

Sada se nameće pitanje: A šta ako bi hotel koristio prebukiranost?

Da bismo mogli da primenimo osnovni model, potrebno je još da odredimo koliki su troškovi c koje hotel ima na jednom prekobrojnom gostu, tj. cenu smeštaja prekobrojnog gosta u drugi hotel. Za ove troškove uzećemo cenu smeštaja u najskupljem novosadskom hotelu u istoj vrsti sobe i ona iznosi:

$$c = 8\,200{,}00 \text{ RSD}$$

Sada, koristeći nejednačinu (4.5) dobijamo:

$$F(X) \geq \frac{r}{r+c} = 0.4143$$

$$\Downarrow$$

$$X^* = 1$$

Dakle, optimalan broj prebukiranosti je 1 soba, odnosno hotel može da dozvoli rezervaciju za

$B = 21$ sobu.

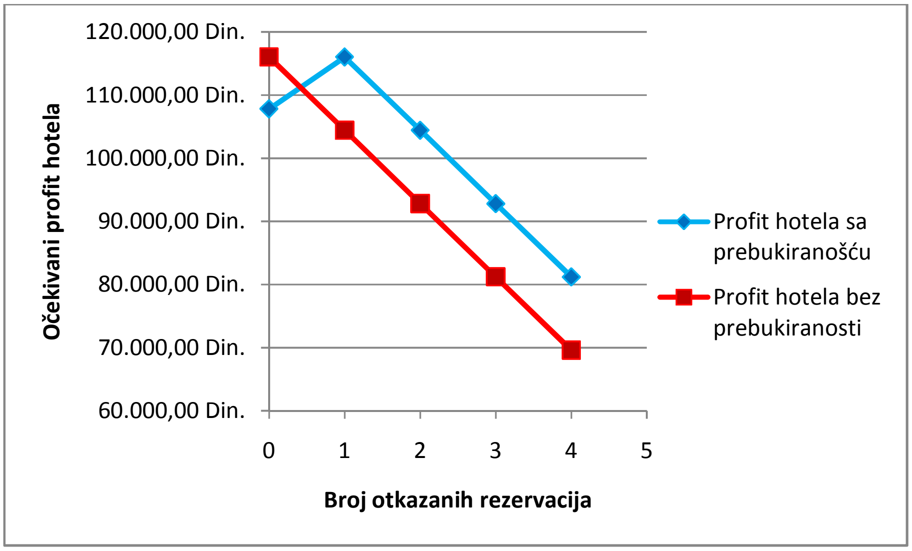
Ostaje još samo da vidimo koliki je očekivani profit ovog hotela ako se koristi prebukiranost. Rezultati su prikazani u tabeli 7.2.

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
Prihod	116.000,00 Din.	116.000,00 Din.	110.200,00 Din.	104.400,00 Din.	98.600,00 Din.
Gubitak	8.200,00 Din.	0,00 Din.	5.800,00 Din.	11.600,00 Din.	17.400,00 Din.
Profit	107.800,00 Din.	116.000,00 Din.	104.400,00 Din.	92.800,00 Din.	81.200,00 Din.

Tabela 7.2 *Očekivani profit hotela u zavisnosti od broja otkazanih rezervacija ako se koristi prebukiranost*

	0	1	2	3	4
Prihod	116.000,00 Din.	110.200,00 Din.	104.400,00 Din.	98.600,00 Din.	92.800,00 Din.
Gubitak	0,00 Din.	5.800,00 Din.	11.600,00 Din.	17.400,00 Din.	23.200,00 Din.
Profit	116.000,00 Din.	104.400,00 Din.	92.800,00 Din.	81.200,00 Din.	69.600,00 Din.

Tabela 7.3 *Očekivani profit hotela u zavisnosti od broja otkazanih rezervacija bez prebukiranosti*



Slika 7.2 *Očekivani profit hotela ako se koristi prebukiranost u odnosu na očekivani profit bez prebukiranosti*

Ako hotel koristi prebukiranost i niko od gostiju ne otkaže svoje rezervacije, jedan gost će biti prekobrojan i zbog toga će hotel imati gubitke u vidu troškova smeštanja tog gosta u drugi hotel. Kada se za određeni dan otkaže jedna rezervisana soba, tada je broj otkazanih rezervacija jednak optimalnom broju prebukiranosti i u tom slučaju hotel neće imati nikakve gubitke, odnosno hotel će ostvariti maksimalan profit.

Kao što možemo da primetimo, jedino u slučaju kada nema nijedne otkazane rezervacije, hotel će ostvariti veći profit ako ne koristi prebukiranost. U svim ostalim slučajevima, veći profit se ostvaruje korišćenjem prebukiranosti.

8. ZAKLJUČAK

U ovom radu proučili smo nekoliko različitih modela za određivanje optimalnog broja prebukiranosti u avio kompanijama, hotelima i zdravstvenim ustanovama. Kontrolisanje prebukiranosti je složen proces, duboko povezan sa kontrolisanjem prihoda u datoj ustanovi.

Prvo smo razmotrili dva modela prebukiranosti koji se koriste u avio kompanijama, osnovni i statički model. Osnovni model je dosta pojednostavljen, u smislu da on pretpostavlja da su troškovi naknade jednaki za sve prekobrojne putnike i pri tome se ne pravi razlika između nedobrovoljno i dobrovoljno prekobrojnih putnika. Međutim, ovaj model u velikoj meri može da nam pomogne da shvatimo smisao prebukiranosti, jer taj model analizira najvažnije promenljive na koje nailazimo prilikom korišćenja strategije prebukiranosti, kao što su prihod u funkciji od strategije prebukiranosti, verovatnoće da se putnik pojavi na izlazu, kao i funkcija troškova naknade. Naveli smo neka od mogućih uopštenja osnovnog modela. Jedno od tih uopštenja je i uvođenje više klasa na letu. Rezultati do kojih smo došli ukazuju nam da uključivanje više klasa u model ne utiče značajno na optimalnu strategiju prebukiranosti. Model smo zatim proširili tako što smo posmatrali dve vrste prekobrojnih putnika – nedobrovoljno i dobrovoljno prekobrojni putnici, čime se znatno menjaju troškovi naknade koje avio kompanija ima prema tim putnicima.

Statički model, koji se takođe primenjuje u avio kompanijama, dosta je sličan osnovnom modelu, ali je on posmatrao mnogo više faktora koji utiču na troškove kompanije. Posebna pažnja u ovom modelu usmerena je na funkciju prekobrojnosti (funkciju troškova kompanije na prekobrojnim putnicima) i shodno tome razmotreno je nekoliko različitih planova naknade, kao što su plan bez prebukiranosti, model sa pragom otkaza, linearan plan naknade, nelinearan plan naknade i vremenski zavisan plan naknade.

Sledeći model koji smo razmotrili je osnovni matematički model za određivanje optimalnog broja prebukiranih u hotelu. Ovaj model uzima u obzir pozitivne marginalne prihode od slobodnih soba (naplaćivanje otkazivanja garantovanih rezervacija). Osim toga što daje optimalan broj prebukiranih soba, ovaj model istovremeno daje rešenje za optimalni nivo prebukiranosti u slučaju dve različite klase soba sa različitim cenama, kao i optimalni broj prebukiranih za dva ili više hotela koji su uskladili svoje načine rezervacija. Takođe smo zaključili da je optimalni nivo prebukiranih inverzno proporcionalan iznosu naplate otkazivanja, koju primenjuju hoteli.

Međutim, nisu za sve probleme pronađena odgovarajuća rešenja. Potrebna su dalja istraživanja da bi se odredio optimalan broj prebukiranih za više od dve različite klase soba, uz mogućnost smeštanja gostiju u jeftinije ili skuplje sobe u istom hotelu. Matematički modeli takođe mogu da sadrže i nelinearne troškove za odbijene goste, kao i gubitak mogućih budućih prihoda od gostiju koji su bili prekobrojni.

Poslednji model koji je ovde opisan je stohastički matematički model prebukiranosti (SMOM), koji se primenjuje u zdravstvenim ustanovama. Razvijene su procedure donošenja odluke za određivanje optimalnog broja pacijenata kojima treba zakazati preglede, da bi se maksimizirao ukupni očekivani profit za različite zdravstvene ustanove. Naš osnovni zaključak je da ovaj model značajno može da poboljša ukupan očekivani profit za zdravstvenu ustanovu u odnosu na naivni statistički prilaz prebukiranosti (NSOA), u slučaju kada je stopa nepojavljivanja visoka i stohastička veličina.

Uspeh modela prebukiranosti može da se ogleda u činjenici da on efikasno koristi više informacija. SMOM koristi potpune raspodele verovatnoća za nedolaske i neplanirane dolaske, a ne samo srednje vrednosti kao što je slučaj kod tradicionalnog determinističkog modela prebukiranosti. Suprotno od NSOA, SMOM potpuno razmatra promenljivost nedolazaka i neplaniranih dolazaka, što je bitan faktor koji utiče na ukupni očekivani profit. Osim toga, SMOM razmatra strukturu troškova da bi se maksimizirao ukupan očekivani prihod, dok NSOA samo pokušava da ima tačno N pacijenata koji se pojave.

Koristi prebukiranosti za pacijente uključuju kraće vreme čekanja na preglede, povećanje kontinuiteta nege i smanjenje broja neprikladnih ulazaka u objekte hitne službe. Nezgoda je to da će se verovatno povećati zvanično vreme čekanja u klinikama koje prethodno nisu koristile prebukiranost.

Na samom kraju primenili smo osnovni matematički model na realan problem jednog novosadskog hotela. Usled nedostatka statističkih podataka o nedolascima gostiju, otkazivanja rezervacija u poslednjem trenutku, kao i izmenama rezervacija od strane gostiju koji su već u hotelu, model smo rešili za prosečnu stopu otkazivanja rezervacija, koja je intuitivno ocenjena. Kao rezultat, dobili smo da je optimalan broj prebukiranih soba samo jedna soba, što je i razumljivo s obzirom da je prosečna stopa otkazivanja rezervacija veoma mala, kao i kapacitet hotela.

Međutim, pokazalo se da bi hotel ipak imao koristi od primene prebukiranosti, jer bi u većini slučajeva ostvarivao veći profit nego u slučaju bez prebukiranosti.

Sve ustanove koje koriste neku od strategija prebukiranosti moraju da odrede standardne postupke koji zaposleni moraju da slede ako se suoče sa prebukiranošću. Oni mogu da ponude neke besplatne poklone ili usluge kako bi nadoknadili nedobrovoljno odbijene klijente. Nekad su ovi programi važniji čak i od određivanja optimalnog nivoa prebukiranosti, jer dok matematički modeli rade sa promenljivama, oni rade sa ljudima.

Literatura

[1] Seongmoon Kim, Ronald E. Giachetti; *A Stochastic Mathematical Appointment Overbooking Model for Health Providers to Improve Profits*; IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part A: Systems and Humans, Vol. 36, 1211-1219; 2006

[2] Stanislav Ivanov; *Management of Overbookings in the Hotel Industry – Basic Concepts and Practical Challenges*; Tourism Today – The Journal of the College of Tourism and Hotel Management, Number 6, 19-31; 2006

[3] Kevin Z. Leder, Saverio E. Spagniole, Stefan M. Wild; *Probabilistically Optimized Airline Overbooking Strategies, or „Anyone Willing to Take a Later Flight?!"*; The UMAP Journal, 317-338; 2002

[4] Team 180; *Optimal overbooking*; 2002

[5] Danijela Rajter – Ćirić; *Verovatnoća*; Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad; Prvo izdanje; 2008

[6] http://en.wikipedia.org

Kratka biografija

Biljana Šijačić rođena je 30. decembra 1985. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu „Petar Drapšin“ završila je u Turiji 2000. godine, kao đak generacija i nosilac „*Vukove diplome*“. Gimnaziju „Isidora Sekulić“, prirodno-matematički smer, završila je u Novom Sadu 2004. godine, kao nosilac „*Vukove diplome*“. Nakon toga, upisala je Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, smer Diplomirani inženjer matematike. Sve ispite je položila sa prosečnom ocenom 9.91. U septembru 2008. diplomirala je na temu „*Kreditni bodovni sistem zasnovan za funkcijama korisnosti*“. Odbojkaški sudija je.

Novi Sad, oktobar 2009. Biljana Šijačić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*

TD

Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*

TZ

Vrsta rada: *Završni rad*

VR

Autor: *Biljana Šijačić*

AU

Mentor: *Dr Zorana Lužanin*

MN

Naslov rada: *Modeli prebukiranosti*

NR

Jezik publikacije: *Srpski (latinica)*

JP

Jezik izvoda: *s/e*

JI

Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*

ZP

Uže geografsko područje: *Vojvodina*

UGP

Godina: *2009*

GO

Izdavač: *Autorski reprint*

IZ

Mesto i adresa: *Trg Dositeja Obradovića 4, 21000 Novi Sad*

MA

Fizički opis: (8 *poglavlja / 68 strana / 6 lit.citata / 11 slika / 11 tabela*)

FO

Naučna oblast: *Matematika*

NO

Naučna disciplina: *Primenjena matematika*

ND

Ključne reči: *prebukiranost, modeli prebukiranosti, optimalni nivo prebukiranosti, prekobrojni putnici, nedolasci klijenata, očekivani ukupni profit, funkcija ukupnih troškova, maksimizacija profita*

PO UDK

Čuva se:

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: *Tema ovog rada su matematički modeli prebukiranosti koji se primenjuju u avio kompanijama, hotelima i zdravstvenim ustanovama. Razmotreno je nekoliko različitih modela i navedeni su rezultati njihove primene na neke realne probleme. Na samom kraju, model prebukiranosti je primenjen na jedan novosadski hotel.*

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: *Dr Andreja Tepavčević, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet*

Član: *Dr Zorana Lužanin, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet*

Član: *Dr Nataša Krejić, redovani profesor, Prirodno-matematički fakultet*

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCE

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: *Monograph type*

DT

Type of record: *Printed text*

TR

Contents code: *Final exam*

CC

Author: *Biljana Šijačić*

AU

Mentor: *Dr Zorana Lužanin*

MN

Title: *Overbooking models*

XI

Language of text: *Serbian (latin)*

LT

Language of abstract: *s/e*

LA

Country of publication: *Republic of Serbia*

CP

Locality of publication: *Vojvodina*

UGP

Publication year: *2009*

PU

Publisher: *Auhtor's reprint*

PU

Publ. place: *Trg Dositeja Obradovića 4, 21000 Novi Sad*

PP

Physical description: (8 *chapters / 68 pages / 6 references / 11 pictures / 11 tables*)

PD

Scientific field: *Mathematics*

SF

Scientific discipline: *Applied Mathematics*

SD

Key words: *overbooking, overbooking models, optimal level of overbooking, bumped passengers, no shows, total expected profit, total costs function, profit maximization*

UC

Holding data:

HD Note

Abstract:

AB

Accepted by the Scientific Board on:

Defended:

Thesis defend board: *PhD Andreja Tepavčević, full professor, Faculty of Science*

Member: *PhD Zorana Lužanin, full professor, Faculty of Science*

Member: *PhD Nataša Krejić, full professor, Faculty of Science*