Sadržaj

Predgovor

U master radu posmatramo numeričke postupke za rešavanje nelinearne jednačine sa jednom nepoznatom. Za izabrane postupke, pod određenim pretpostavkama, dokazujemo da važi nejednakost zaustavljanja. Pored poznatih teorema koje se odnose na Njutnov iterativni postupak, postupak sečice, Halejev postupak, Stefensenov postupak i celu jednu klasu iterativnih postupaka trećeg reda konvergencije, definisanih u [19], posmatraćemo i dokazati i nove teoreme koje se odnose na nejednakost zaustavljanja za postupak Potra&Ptak iz [17] i jednu familiju postupaka, nastalu modifikacijom Hansen-Patrikove familije iz [7]. Modifikovana familija i dokazi ovih teorema su originalni rezultat autora.

Master rad je podeljen u četiri dela. U prvom delu rada dajemo oznake definicije i teoreme koje ćemo koristiti u daljem radu. Drugi deo sadrži teoreme, i dokaze za neke teoreme, koje se odnose na izlazni kriterijum poznatih postupaka. Posmatrani su Njutnov postupak, postupak regula falsi, Stefensonov postupak, familija postupaka trećeg reda konvergencije iz [10] i familija postupak iz [19]. U ovom delu opisujemo i numerički tok iterativnog postupka, prema [11]. Sagledavanje numeričkog toka iterativnog postupka je značajno sa stanovišta postavljanja praktičnog izlaznog kriterijuma, jer pri radu sa kompjuterom nije moguće postići proizvoljnu tačnost izlaznog rezultata. Naime, zbog osobina kompjuterske aritmetike izlazni kriterijum mora sadržavati i član koji zavisi od odgovarajuće mašinske preciznosti.

Treći deo rada sadrži kao originalan rezultat tvrđenja koja se odnose na nejednakost zaustavljanja postupka Potra&Ptak i jedne familije postupaka, koja je nastala modifikacijom postupka Hansen&Patrik iz [7]. Pored toga u trećem delu posmatrani su Hansen-Patrikova familija postupaka i njeni specijalni slučajevi.

U poslednjem delu rada prikazaćemo numeričke eksperimente urađene u programskom paketu *Mathematica*. Primeri su uzeti iz radova navedenih u literaturi, koja je navedena na kraju.

Koristim ovu priliku da se zahvalim svim profesorima i asistentima sa kojima sam sarađivala tokom svojih osnovnih i master studija. Posebno bih se zahvalila profesoru i mentoru dr Dragoslavu Hercegu.

Novi Sad, avgust 2012. Biljana Radošević

1. Uvodni deo

1.1 Oznake

- $D = [a,b]$
- $D_f^+ = \{x \in D \mid f(x) > 0\}$
- $D_f^- = \{x \in D \mid f(x) < 0\}$
- $D_\rho(\alpha) = \{x \in D \mid |x - \alpha| \le \rho\}, \quad \alpha \in D, \quad \rho > 0$
- $C^k[a,b]$ - skup k – puta neprekidno diferencijabilnih funkcija
- $\{x_k\}$ niz brojeva $x_0, x_1, \dots$
- $u(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$
- $t(x) = \dfrac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}$
- α rešenje jednačine $f(x) = 0$, odnosno sa njom ekvivalentne jednačine $x = \varphi(x)$
- $C_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\, f'(\alpha)}, \quad j = 2, 3, \dots$
- $A_j(x) = \dfrac{f^{(j)}(x)}{j!\, f'(x)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$
- jednačina greške $e_{k+1} = C e_k^p + O\left(e_k^{p+1}\right)$,

  gde je $\alpha = \lim\limits_{k \to \infty} x_k$,

  $e_k = x_k - \alpha$,

  p je red iterativnog postupka

  C asimptotska konstanta greške

$\frac{e_{k+1}}{e_k^p}$, $k = 1,2,\ldots$ aproksimacije asimptotske konstante greške

1.2 Definicije

Definicija 1. *Jednačina nepokretne tačke je jednačina oblika*

$$x = \varphi(x).$$

Definicija 2. *Broj α je nepokretna tačka funkcije φ ako je*

$$\alpha = \varphi(\alpha).$$

Neka je x_0 proizvoljan broj iz intervala $[a,b]$. Formirajmo niz brojeva $x_0, x_1, x_2, \ldots$ prema

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Ovaj niz je moguće formirati samo ako $\varphi(x_k) \in [a,b]$, $k = 0,1,2,\ldots$ zbog definisanosti funkcije φ na intravalu $[a,b]$. Očigledno, ako funkcija φ preslikava interval $[a,b]$ u samog sebe, važi $\varphi(x_k) \in [a,b]$, $k = 0,1,2,\ldots$. Ako je niz $x_0, x_1, x_2, \ldots$ dobro definisan i ima graničnu vrednost, tj. za neko $\alpha \in [a,b]$ važi

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha,$$

onda je α rešenje jednačine $\varphi(x) = x$, ako je funkcija φ neprekidna na intervalu $[a,b]$. Naime, iz $\varphi(x) \in [a,b]$, za svako $x \in [a,b]$ sledi, zbog zatvorenosti intervala $[a,b]$, da tačka $\alpha \in [a,b]$, a zbog neprekidnosti funkcije φ sledi

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \varphi(\alpha).$$

Dakle, ako niz $x_0, x_1, x_2, \ldots$ konvergira ka α, tada je njegova granična vrednost, α, rešenje jednačine $\varphi(x) = x$, a članovi tog niza aproksimiraju to rešenje.

Ovaj postupak, u kome računamo vrednosti $x_0, x_1, x_2, \ldots$ prema $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, je primer **iterativnog postupka** (postupak sukcesivnih aproksimacija), gde je $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ **iterativno pravilo**, funkcija φ **funkcija koraka**, a niz $x_0, x_1, x_2, \ldots$ je **iterativni niz.** Prvi član tog niza x_0 je **početna aproksimacija** (startna vrednost). Kada iterativni niz konvergira za proizvoljnu početnu vrednost iz nekog skupa, kažemo da **iterativni postupak konvergira.**

Iterativne postupke možemo podeliti u dve grupe na osnovu podataka koji oni koriste u jednom iterativnom koraku. Tako razlikujemo iterativne postupke sa i bez memorije, [19].

Definicija 3. *Ako se nova aproksimacija x_{k+1} izračunava samo pomoću x_k, tj. ako je $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, onda je posmatrani postupak bez memorije.*

Njutnov postupak je najpoznatiji iterativni postupak bez memorije. Kod ovog postupka je

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Definicija 4. *Ako je u jednom iterativnom koraku za izračunavanje nove aproksimacije x_{k+1} potrebno koristiti x_k i nekoliko prethodnih aproksimacija, na primer, $x_{k-1}, \dots, x_{k-n}$, tj. ako je*

$$x_{k+1} = \varphi(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-n}),$$

onda je posmatrani iterativni postupak sa memorijom.

Najpoznatiji postupak sa memorijom je postupak sečice. Ovaj postupak se može posmatrati kao modifikacija Njutnovog iterativnog postupka

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0,1,2,\dots$$

kada se prvi izvod funkcije zamenjuje prvim izvodom interpolacionog polinoma prvog stepena. Interpolacioni polinom funkcije f određen tačkama $(x_k, f(x_k))$ i $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, pod pretpostavkom $x_k \neq x_{k-1}$ i $f(x_k) \neq f(x_{k-1})$ je

$$p(x) = f(x_{k-1}) + f[x_{k-1}, x_k](x - x_{k-1})$$

gde $x_{k-1},\ x_k$ predstavljaju dve uzastopne aproksimacije rešenja $f(x) = 0$ a $f[x_{k-1}, x_k]$ je podeljena razlika prvog reda. Sada je

$$p'(x) = f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Zamenjujući $f'(x_k)$ sa $p'(x_k)$ dobijamo iterativni postupak

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad k = 1,2,\dots.$$

Ovaj postupak nazivamo postupkom sečice. Teoreme o njegovoj lokalnoj i globalnoj konvergenciji slične su odgovarajućim teoremama za Njutnov postupak.

Definicija 5. *Neka je dat konvergentan niz $x_0, x_1, \dots$ čija je garnična vrednost α. Kažemo da je $p \in [1, \infty)$ red konvergencije tog niza ako je*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_{k+1} - \alpha|^p} = C,$$

a C je konstanta različita od nule. Ako je $p=1$, onda dodatno pretpostavljamo da je $C<1$.

Takođe, kaže se da je red konvergencije niza $x_0, x_1, \ldots$ najmanje p ako dozvolimo da konstanta C može biti jednaka nuli.

Ekvivalentan zapis prethodne definicije je sledeći.

Definicija 6. *Konvergentan niz $x_0, x_1, \ldots$ čija je garnična vrednost α, ima red konvergencije $p \in [1, \infty)$ ako postoje konstanta C različita od nule i prirodan broj n_0 takvi da je*

$$|x_{k+1} - \alpha| \le C |x_k - \alpha|^p, \quad k \ge n_0 .$$

Ako je $p=1$, onda dodatno pretpostavljamo da je $C<1$.

1.3 Teoreme

Iterativni postupak se može koristiti i kod rešavanja jednačina oblika $f(x)=0$. Ako tražimo nule funkcije f na intervalu $[a,b]$ potrebno je odrediti funkciju φ tako da su jednačine $x=\varphi(x)$ i $f(x)=0$ ekvivalentne na intervalu $[a,b]$. Uslov ekvivalentnosti ovih jednačina nam daje sledeća teorema.

Teorema 1. *Neka je funkcija g ograničena na intervalu $[a,b]$ i neka je $g(x) \neq 0$ za $x \in [a,b]$. Tada su jednačine $f(x)=0$ i $x=\varphi(x)$ sa $\varphi(x) = x - g(x)f(x)$ ekvivalentne na intervalu $[a,b]$.*

Pod pretpostavkama da je iterativni postupak $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ konvergentan, da je $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ i da je funkcija φ dovoljan broj puta neprekidno diferencijabilna, važi sledeća teorema, [18].

Teorema 2. [18] *Red konvergencije jednokoračnog postupka*

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

je pozitivan ceo broj. Ovaj postupak ima red konvergencije p ako i samo ako je

$$\alpha = \varphi(\alpha), \quad \varphi^{(j)}(\alpha) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, p-1, \quad \varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0 .$$

2. Izlazni kriterijum

Pošto se izračunava samo konačan broj aproksimacija, a približno rešenje x_{k+1} je potrebno izračunati sa određenom tolerancijom ε, odnosno treba da važi

$$\left|x_{k+1} - \alpha\right| < \varepsilon$$

treba odrediti uslove pod kojima je zadovoljena nejednakost

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq |x_k - x_{k+1}|$$

U slučaju kada je ova nejednakost zadovoljena postupak se prekida ako je za datu toleranciju

$$|x_k - x_{k+1}| < \varepsilon.$$

Uslovi koje je potrebno ispuniti da bi se aproksimacija x_{k+1} prihvatila kao rešenje posmatrane jednačine nazivaju se pravila zaustavljanja ili izlazni kriterijumi. Sledeće teoreme opisuju neke postupke kod kojih je relacija $|x_k - x_{k+1}| < \varepsilon$ izlazni kriterijum.

Definicija 7. [11] *Nejednačinu*

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq |x_k - x_{k+1}|$$

nazivamo nejednakost zaustavljanja.

Ako za iterativni postupak važi nejednakost zaustavljanja, onda se kao izlazni kriterijum tj. kao kriterijum za prekidanje računanja prihvata $|x_k - x_{k+1}| < \varepsilon$ jer to obezbeđuje

$$|x_{k+1} - \alpha| < \varepsilon$$

Zadovoljavanje nejednakosti zaustavljanja je dovoljno da se vrednost x_{k+1} prihvati kao konačan rezultat.

Uslovi pod kojima je zadovoljena nejednakost zaustavljanja zavise od iterativnog postupka. Ako se posmatra postupak

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

nejednakost zaustavljanja se može dobiti i iz aposteriorne ocene greške

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}|x_k - x_{k+1}|$$

Naime, ako je φ kontrakcija sa konstantom kontrakcije γ onda za $\gamma = 0.5$ sledi nejednakost zaustavljanja. Kada je o funkciji koraka φ iterativnog postupka poznato nešto više mogu se dati uslovi pod kojima važi nejednakost zaustavljanja. Tako da imamo sledeće teoreme.

Teorema 3. [11] *Neka za funkciju* $f \in C^2(D)$, $D[a,b]$, *važi* $f'(x) > 0$, $x \in D$ *i neka je* α *rešenje jednačine* $f(x) = 0$. *Neka je*

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} g(x)$$

pri čemu je

$$g \in C^1(D), \qquad g(\alpha) = 1$$

Tada postoji interval

$$D_\rho(\alpha) = \{x \in D \,|\, |x - \alpha| \leq \rho\}, \quad \rho > 0$$

takav da za svako $x_0 \in D_\rho(\alpha)$ *iterativni postupak* $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k = 1,2,\dots$ *konvergira ka* α *i važi za* $k = 1,2,\dots$

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq |x_k - x_{k+1}|.$$

Dokaz. Neposredno se dobija

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)} g(x) - g'(x)\right) + 1 - g(x)$$

Očigledno je da je φ' neprekidna funkcija na D i važi $\varphi'(\alpha) = 0$. Tada postoji interval $D_\rho(\alpha)$ takav da važi

$$|\varphi'(x)| \leq \gamma \leq 0.5, \quad x \in D_\rho(\alpha)$$

i

$$0 < g(x), \; x \in D_\rho(\alpha)$$

Na osnovu

$$|\varphi'(x) - \alpha| = |\varphi(x) - \varphi(\alpha)| \leq \gamma|x - \alpha| < \rho, \; x \in D_\rho(\alpha).$$

Sledi da je φ kontraktivno preslikavanje intervala $D_\rho(\alpha)$ u samog sebe, pa φ ima jedinstvenu nepokretnu tačku u tom intervalu i to je α. Iterativni niz $\{x_k\}$ konvergira ka α i važi

$$|x_{k+1} - \alpha| \le \frac{\gamma}{1-\gamma}|x_k - x_{k+1}| \le |x_k - x_{k+1}|$$

budući da je $\gamma \in [0, 0.5]$.

Uslov $g(\alpha) = 1$ nije suviše strog. Taj uslov ispunjavaju svih osam postupaka bez memorije iz [19] i svi postupci generisani inverznom interpolacijom prikazani u [4]. Imamo sledeće specijalne slučajeve:

- $g(x) = 1$, Njutnov postupak
- $g(x) = 1 + \dfrac{f(x)f''(x)}{2f'(x)^2}$, metod Čebiševa reda 3
- $g(x) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{f(x)f''(x)}{2f'(x)^2}}$, Halejev metod.

Teorema 4. [8] *Neka za funkciju* $f \in C^2(D)$ *i* $D = [a, b]$ *važi*

$f(a) < 0,\ \ f(b) > 0,$

$f'(x) > 0,\ \ f''(x) > 0,\ \ x \in D$

$f'(b) \le 2f'(a)$

$g \in C^1\left(D_f^+\right),\ g(x) \ge 1,\quad x \in D_f^+$

$\varphi'(x) \ge 0,\quad x \in D_f^+$

Tada za svako $x_0 \in D_f^+$, *iterativni postupak* $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ *gde je*

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}g(x)$$

konvergira ka jedinstvenom rešenju α *jednačine* $f(x) = 0$ *i važi za* $k = 0,1,\ldots$

$$|x_{k+1} - \alpha| \le |x_k - x_{k+1}|.$$

Za Njutnov postupak je $g(x) = 1$ i $\varphi'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$. Očigledno za $f \in C^2(D)$ važi

$$g \in C^1\left(D_f^+\right),\ g(x) \geq 1, \quad x \in D_f^+$$

i

$$\varphi'(x) \geq 0, \quad x \in D_f^+.$$

Prema prethodnoj teoremi, za Njutnov postupka važi nejednakost zaustavljanja.

Teorema 5. [8] *Neka za funkciju* $f \in C^2(D)$ *i* $D = [a,b]$ *važi*

$f(a) < 0,\ \ f(b) > 0,$

$f'(x) > 0,\ \ f''(x) > 0,\ \ x \in D$

$f'(b) \leq 2f'(a)$

$g \in C^1\left(D_f^-\right),\ g(x) \geq \dfrac{1}{2}, \quad x \in D_f^-$

$\varphi'(x) \geq 0, \quad x \in D_f^-$

Tada za svako $x_0 \in D_f^-$, *iterativni postupak* $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ *gde je*

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} g(x)$$

konvergira ka jedinstvenom rešenju α *jednačine* $f(x) = 0$ *i važi za* $k = 0,1,\ldots$

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq |x_k - x_{k+1}|.$$

Teorema 6. [8] *Neka za funkciju* $f \in C^2(D)$ *i* $D = [a,b]$ *važi*

$f(a) < 0,\ \ f(b) > 0,$

$f'(x) > 0,\ \ f''(x) > 0,\ \ x \in D$

$f'(b) \leq 2f'(a)$

Tada za svako $x_0 \in D_f^-$, *iterativni postupak* $x_{k+1} = \phi(x_k)$ *gde je*

$$\phi(x) = x - \frac{x-b}{f(x) - f(b)} f(x)$$

konvergira ka jedinstvenom rešenju α *jednačine* $f(x) = 0$ *i važi za* $k = 0,1,\ldots$

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq |x_k - x_{k+1}|.$$

Dokaz. Pod pretpostavkama teoreme, dati postupak $x_{k+1} = \phi(x_k)$ predstavlja klasičan postupak regula falsi. Sa

$$g(x) = \frac{x-b}{f(x)-f(b)} f'(x)$$

imamo

$$\phi(x) = \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} g(x).$$

Za neko $x \in D_f^-$ na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti dobijamo da za neko $\tau \in (x,b)$ važi

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f'(\tau)}.$$

Sada je

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f'(\tau)} > \frac{f'(a)}{f'(b)} \geq \frac{1}{2}, \quad x \in D_f^-.$$

Kako je

$$\varphi'(x) = 1 + \frac{1}{f(b)-f(x)} \left(f(x) - f(b) \frac{f'(x)}{f'(\tau)} \right) > 0, \quad x \in D_f^-,$$

na osnovu prethodne teoreme sledi da za postupak regula falsi važi nejednakost zaustavljanja.

Teorema 7. [8] *Neka za funkciju $f \in C^2(D)$ i $D = [a,b]$ važi*

$f(a) < 0, \ \ f(b) > 0,$

$f'(x) > 0, \ \ f''(x) < 0, \ \ x \in D$

$f'(a) \leq 2f'(b)$

$g \in C^1(D_f^-), \ g(x) \geq 1, \quad x \in D_f^-$

$\varphi'(x) \geq 0, \quad x \in D_f^-$

Tada za svako $x_0 \in D_f^-$, iterativni postupak $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ gde je

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} g(x)$$

konvergira ka jedinstvenom rešenju α *jednačine* $f(x) = 0$ *i važi za* $k = 0,1,\ldots$

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq |x_k - x_{k+1}|.$$

Teorema 8. [8] *Neka za funkciju* $f \in C^2(D)$ *i* $D = [a,b]$ *važi*

$f(a) < 0, \ f(b) > 0,$

$f'(x) > 0, \ f''(x) < 0, \ x \in D$

$f'(b) \leq 2f'(a)$

$g \in C^1\left(D_f^+\right), \ g(x) \geq \frac{1}{2}, \quad x \in D_f^+$

$\varphi'(x) \geq 0, \quad x \in D_f^+$

Tada za svako $x_0 \in D_f^+$, *iterativni postupak* $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ *gde je*

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} g(x)$$

konvergira ka jedinstvenom rešenju α *jednačine* $f(x) = 0$ *i važi za* $k = 0,1,\ldots$

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq |x_k - x_{k+1}|.$$

2.1 Izlazni kriterijum Stefensenovog postupka

U ovom delu prvo ćemo dati dokaz konvergencije Stefensenovog postupka pod uslovima koji su praktično isti kao uslovi za konvergenciju Njutnovog postupka iz [11]. Potom, navodimo dovoljne uslove pod kojima za Stefensenov postupak važi nejednakost zaustavljanja.

Familija iterativnih postupaka za izračunavanje jednostrukog rešenja nelinearne jednačine $f(x) = 0$ posmatra se pod pretpostavkama

$$f \in C^2[a,b], \quad f'(x) > 0, \ x \in [a,b], \quad f(a) < 0 < f(b).$$

Pod ovim pretpostavkama funkcija f ima jednu i samo jednu nulu $\alpha \in (a,b)$.

Stefensenov postupak za izračunavanje aproksimacije za α je

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}{f(x_k)}} \qquad k = 0,1,\dots$$

za neku odgovarajuću početnu vrednost x_0. U [11] je dokazana konvergencija Njutnovog postupka pod istim uslovima iz sledeće teoreme, s tim da je četvrti uslov glasio $x_0 \in [a,b]$je takvo da važi $f(x_0) f''(x_0) > 0$.

Teorema 9. [15] *Neka je* $f \in C^2[a,b]$. *Ako su zadovoljeni sledeći uslovi*

1) $f(a) < 0 < f(b)$

2) $f'(x) > 0,\ x \in [a,b]$

3) $f''(x) \le 0, x \in [a,b]$ *ili* $f''(x) \ge 0, x \in [a,b]$

4) $x_0 \in [a,b]$ *je takvo da važi* $f(x_0) f''(x_0) > 0$ *i*

a. $x_0 + f(x_0) \le b$ *ako je* $f''(x) \ge 0$

b. $a \le x_0 + f(x_0)$ *ako je* $f''(x) \le 0$

onda Stefensenov iterativni postupak konvergira ka jedinstvenom rešenju $\alpha \in (a,b)$ *jednačine* $f(x) = 0$. *Pored toga, ukoliko se postupak ne prekine zbog* $f(x_k) = 0$, *važi za* $k = 0,1,\dots$

$x_k > x_{k+1}$ *ako je* $f''(x) \ge 0$ *i* $x_k < x_{k+1}$ *ako je* $f''(x) \le 0$.

Koristeći rezultate ove teoreme možemo dokazati sledeću teoremu, koja daje dovoljne uslove za važenje nejednakosti zaustavljanja kod Stefensenovog iterativnog postupka.

Teorema 10. [15] *Neka je* $f \in C^2[a,b]$. *Ako su zadovoljeni sledeći uslovi*

1) $f(a) < 0 < f(b)$

2) $f'(x) > 0,\ x \in [a,b]$

3) $f''(x) > 0, x \in [a,b]$

4) $x_0 \in [a,b]$ *je takvo da važi* $f(x_0) > 0$ *i* $x_0 + f(x_0) \le b$

5) $f'(b) \le 2 f'(a)$

onda za Stefensenov postupak važi nejednakost zaustavljanja

$$|x_{n+1} - \alpha| \le |x_{n+1} - x_n|.$$

2.2 Postupak Hercega

U radu [10] prikazana je familija postupaka trećeg reda konvergencije za rešavanje nelinearnih jednačina. Pokazano je da ovoj familiji pripadaju neki već poznati postupci: Halejev postupak i postupak iz rada [2] i super Halejev postupak iz rada [5]. Takođe je dokazano da za svaki član ove familije važi nejednakost zaustavljanja pod istim pretpostavkama.

Familija iterativnih postupaka za izračunavanje jednostrukog rešenja nelinearnih jednačina $f(x) = 0$ posmatra se pod pretpostavkama

$$f \in C^2[a,b],\ f'(x) < 0,\ x \in [a,b],\ f(a) > 0 > f(b).$$

Pod ovim pretpostavkama funkcija f ima jednu i samo jednu nulu $\alpha \in (a,b)$.

Prvo je posmatran Njutnov postupak za izračunavanje aproksimacije za α

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0,1,\ldots$$

za neku odgovarajuću početnu vrednost x_0. Ako je $f''(x) > 0$ ili $f''(x) < 0$ za $x \in [a,b]$, biramo x_0 tako da je $f(x_0)f''(x_0) > 0$, tj. $x_0 \in [a,\alpha)$ ili $x_0 \in (\alpha,b]$. Njutnov postupak kvadratno konvergira u nekoj okolini od α ako je $f'(\alpha) \neq 0$, .

Halejev klasičan postupak

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)}},$$

može se zapisati i na sledeći način

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{2}{2 - t(x_n)},$$

gde je

$$t(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Pod pretpostavkama koje su slične onim koje postavljamo za Njutnov postupak, u radu [10] dat je dokaz globalne monotone konvergencije trećeg reda za jednu familiju postupaka. Familija postupaka se definiše na sledeći način.

Neka je

$$x_{n+1} = F_k\left(x_n\right),\ n = 0,1,\ldots,$$

gde su funkcije F_k oblika

$$F_k\left(x\right) = x - \frac{f\left(x\right)}{f'\left(x\right)}\varphi_k\left(t\left(x\right)\right),\ k = 1,2,\ldots$$

sa

$$t\left(x\right) = \frac{f\left(x\right)f''\left(x\right)}{f'\left(x\right)^2}$$

i funkcijama φ_k definisanim sa

$$\varphi_0\left(s\right) = 1,\ \ \varphi_k\left(s\right) = \frac{2}{2 - s\cdot\varphi_{k-1}\left(s\right)},\ k = 1,2,\ldots.$$

Funkcije φ_k se lako računaju. Navodimo prvih osam $\varphi_k\left(s\right),\ k = 1,2,\ldots,8$:

$$\frac{2}{2-s},\quad \frac{2-s}{2(1-s)},\quad \frac{4-4s}{4-6s+s^2},\quad \frac{4-6s+s^2}{4-8s+3s^2},\quad -\frac{2(4-8s+3s^2)}{-8+20s-12s^2+s^3}$$

$$\frac{-8+20t-12t^2+t^3}{4(-2+6t-5t^2+t^3)},\quad -\frac{8(-2+6s-5s^2+s^3)}{16-56s+60s^2-20s^3+s^4},\quad \frac{16-56s+60s^2-20s^3+s^4}{16-64s+84s^2-40s^3+5s^4}$$

Lako se vidi da su Njutnova i Halejeva iterativna funkcija specijalni slučajevi sa F_0 i F_1 respektivno. Njutnov postupak ne pripada ovoj familiji postupaka trećeg reda, ali se može posmatrati kao granični slučaj kada $s \to 0$.

Za opisane postupke važi sledeća teorema.

Teorema 11. [10] *Neka za funkciju* $f \in C^3\left(D\right)$, $D = \left[a,b\right]$, *važi*

$$f\left(a\right) > 0 > f\left(b\right)$$

$$f'\left(x\right) < 0,\ f''\left(x\right) > 0,\ f'''\left(x\right) \ge 0,\ x \in D.$$

Tada za svako $x_0 \in D$ *takvo da je* $f\left(x_0\right) > 0$ *iterativni postupak* $x_{n+1} = F_k\left(x_n\right)$ *monotono konvergira ka rešenju* α *jednačine* $f\left(x\right) = 0$.

Ako je dodatno ispinjen uslov

$$f'\left(a\right) \ge 2f'\left(b\right)$$

onda nejednakost zaustavljanja

$$|x_{n+1} - \alpha| \le |x_{n+1} - x_n|$$

važi za svako $n = 0,1,\ldots$, *i sve* $k = 1,2,\ldots$.

2.3 Postupak Trauba

U ovom delu ćemo posmatrati iterativnu funkciju generisanu inverznom interpolacijom.

Neka je $\alpha \in D$ rešenje jednačine $f(x) = 0$. Pretpostavimo da je f' različit od nule u D i da je $f^{(s)}$ neprekidna funkcija u D. Tada funkcija f ima inverznu funkciju F i funkcija $F^{(s)}$ je neprekidna u D.

Neka je Q_s Tejlorov polinom funkcije F stepena $s-1$ dobijen Tejlorovim razvojem u tački $y = f(x)$. Tada je

$$F(t) = Q_s(t) + \frac{F^{(s)}(z(t))}{s!}\,(t-y)^s$$

i

$$Q_s(t) = \sum_{j=o}^{s-1} \frac{F^{(j)}}{j!}(t-y)^j$$

Gde $z(t)$ leži u intervalu definisanom sa y i t, tj. $z(t) \in (min\{y,z\}, max\{y,t\})$.

Definišimo

$$E_s = Q_s(0)$$

Kako je

$$E_s = \sum_{j=1}^{s-1} \frac{(-1)^{(j)}}{j!} F^{(j)} f^j$$

ili

$$E_s = x - \sum_{j=1}^{s-1} \frac{(-1)^{(j-1)}}{j!\,(F')^j} F^{(j)} u^j.$$

Ako uvedemo oznaku

$$Y_j(x) = \left. \frac{(-1)^{(j-1)} F^{(j)}(y)}{j!\,(F'(y))^{(j)}} \right|_{y=f(x)}$$

možemo da napišemo

$$E_s = x - \sum_{j=1}^{s-1} Y_j\, u^j$$

i

$$\alpha = E_s + \frac{(-1)^s F^{(s)}(z(0))}{s!\,(F')^{(s)}} u^s$$

Kako F nije lako odrediti, E_s ćemo prikazati pomoću funkcija $f\ i\ f'$ i $Y_j(x)$. Dobijamo

$$E_s = x - u(x)g(x),$$

gde je

$$g(x) = \sum_{j=1}^{s-1} Y_j u^{j-1}$$

Sa početnom vrednošću $x_0 \in D$ formiramo iterativni niz

$$x_{n+1} = E_s(x_n), \quad n = 0,1,2, \ldots.$$

Za ovaj postupak ćemo dati dovoljne uslove za važenje nejednakosti zaustavljanja.

Specijalni slučajevi posmatranog postupka su Njutnov postupak za $s = 2$, i postupak Čebiševa za $s = 3$. Ove postupke možemo zapisati i na sledeći način

$$E_2 = x - u$$

$$E_3 = E_2 - Y_2 u = x - u - Y_2 u$$

Teorema 12. [10] *Neka funkcija* $f \in C^s(D)$, $s \geq 2$, *zadovoljava sledeće uslove*

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0$$

$$f'(x) > 0, \qquad f''(x) > 0, \qquad x \in D$$

$$f'(b) \leq 2f'(a)$$

$$sign\left(f^j(x)\right) = (-1)^j, \qquad x \in D, \qquad j = 2,3, \ldots, s.$$

Tada za svako $x_0 \in D_f^+$ *iterativni postupak*

$$x_{n+1} = E_s(x_n)$$

konvergira ka jedinstvenom rešenju $\alpha \in D$ *jednačine* $f(x) = 0$ *i za sve* $n = 0,1,2,\ldots$ *važi nejednakost zaustavljanja*

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq |x_n - x_{n+1}|.$$

Dokaz. Iz $f'(x) > 0$ za $x \in D$ sledi da funkcija f ima inverznu funkciju F i da je $F^{(s)}$ neprekidna funkcija u okolini nule. U [19] je dato

$$F^{(j)} = (f')^{-j} \sum (-1)^r (j + r - 1)! \prod_{i=2}^{j} \frac{(A_i)^{\beta_i}}{\beta_i!}, \; j = 1,2,3, \ldots, s$$

pri čemu se suma uzima za sve nenegativne brojeve β_i takve da je

$$\sum_{i=2}^{j} (i-1)\beta_i = j - 1$$

gde je

$$r = \sum_{i=2}^{j} \beta_i, \qquad A_j(x) = \frac{f^{(j)}(x)}{j!\, f'(x)}, \;\; j = 1,2,3, \ldots, s$$

Za $j = 1$ uzima se da je $\beta_i = 0$ za sve i.

Kako je $f'(x) > 0$ sledi

$$sign\left(A_j(x)\right) = sign\left(f^{(j)}(x)\right) = (-1)^j, j = 2,3, \ldots, s$$

i

$$sign((-1)^r (j + r - 1)! \prod_{i=2}^{j} \frac{(A_i)^{\beta_i}}{\beta_i!}) = (-1)^r \prod_{i=2}^{j} sign\big((A_i)^{\beta_i}\big) = (-1)^r \prod_{i=2}^{j} (-1)^{i\beta_i}$$

Primetimo da je

$$(-1)^r \prod_{i=2}^{j} (-1)^{i\beta_i} = (-1)^r (-1)^{\sum_{i=2}^{j} i\beta_i} = (-1)^r (-1)^{j-1} (-1)^r = (-1)^{j-1}.$$

Prema tome

$$sign(F^{(j)}\big(f(x)\big) = (-1)^{j-1}, j = 1,2,3, \ldots, s.$$

Ovo implicira

$$sign\left(Y_j(x)\right) = (-1)^{j-1}\, sign(F^{(j)}\left(f(x)\right) = (-1)^{j-1}(-1)^{j-1} = 1.$$

Kako je

$$g(x) = \sum_{j=1}^{s-1} Y_j u^{j-1}$$

i $F'\left(f(x)\right) = (f'(x))^{-1}$ imamo $Y_1(x) = 1$, $g \in C^1(D)$ i

$$g(x) = 1 + \sum_{j=2}^{s-1} Y_j u^{j-1} \geq 1\,, \quad x \in D_f^+.$$

U [19] je dokazano da je

$$E_{s+1} = E_s - \frac{u}{s} E_s'.$$

Odatle sledi

$$E_s' = \frac{(-1)^{s-1} F^{(s)} u^{s-1}}{(s-1)!\,(F')^{(s)}}.$$

Za $x_0 \in D_f^+$ važi $u(x)^{s-1} \geq 0$ i

$$sign(\,E_s'(x)\big) = (-1)^{s-1}\, sign(F^{(s)}\left(f(x)\right) = 1,$$

tj. $E_s'(x) \geq 0, x_0 \in D_f^+$.

Kako je $f''(x) > 0$ za $x \in D$ i iz $g(x) \geq 1$ tvrđenje teoreme sledi na osnovu teoreme Teorema 4.

2.4 Numerički tok iterativnog postupka

Sa povećanjem broja iteracija greška se smanjuje ili teži nuli, što se vidi iz ocene greške itrativnog postupka. Naravno, to je tačno pod pretostavkom da nema grešaka nastalih zaokruživanjem, koje su neizbežne pri radu sa računarom, ili aproksimacijama funkcija koje se pojavljuju u iterativnom postupku.

Pri konkretnom izračunavanju članova iterativnog niza definisanog pravilom

$$x_0 \in D, \qquad x_{k+1} = \varphi(x_k),\;\; k = 0,1,\ldots$$

javljaju se greške zaokruživanja usled rada sa mašinskim brojevima i greške nastale zamenom funkcije φ nekom računarskom aproksimacijom φ^*. Tako se umesto niza $\{x_k\}$ izračunava niz mašinskih brojeva $\{x_k^*\}$ po pravilu

$$x_{k+1}^* = \varphi^*(x_k^*),\;\; k = 0,1,2\ldots$$

Za neki broj $x_0^* \in D$. Skup mašinskih brojeva M i računarska aproksimacija φ^* funkcije φ zavisi od konkretnog računara, ali postoje opšta pravila koja omogućavaju analizu implementacije iterativnog postupka.

Pretpostavimo da je funkcija φ kontrakcija na nekom intervalu D sa konstantom kontrakcije γ, tj. da za svako $x, y \in D$ važi

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \gamma |x - y|$$

gde je $\gamma < 1$.

Neka je φ^* računarska aproksimacija funkcije φ tj. φ^* je funkcija koja se koristi pri efektivnom izračunavanju vrednosti funkcije φ pomoću računara. Pretpostavimo da važi

$$|\varphi(x) - \varphi^*(x)| \leq \rho, \quad x \in D$$

Pri tom je $\rho \geq eps$, a eps zavisi od računara i programa koji se koristi. Dalje, definišemo

$$\delta = \frac{\rho}{1-\gamma}.$$

Očigledno je $\delta > \rho \geq eps$. Sada je potrebno oceniti grešku aproksimancije tačnog rešenja α jedančine $x = \varphi(x)$ pomoću x_k^*. Sledeća teorema, koju dajemo bez dokaza, daje odgovor na postavljeno pitanje.

Teorema 13. [10] *Neka je φ kontrakcija na intervalu D sa konstantom kontrakcije γ i neka je α rešenje jednačine $x = \varphi(x)$. Neka su nizovi $\{x_k\}$ i $\{x_k^*\}$ definisani sa, $x_0, x_0^* \in D$,*

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad x_{k+1}^* = \varphi^*(x_k^*), \quad k = 0,1, \dots.$$

Ako funkcije φ i φ^* zadovoljavaju uslov

$$|\varphi(x^*) - \varphi^*(x^*)| \leq \rho, \quad x \in M$$

i ako je φ i φ^* preslikavaju D u samog sebe onda važi:

- *Iz $|x_k^* - \alpha| > \delta$ sledi $|x_{k+1}^* - \alpha| < |x_k^* - \alpha|$*
- *Postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da važi $|x_k^* - \alpha| < \delta$ za sve $k \geq N$*
- *Postoji $N_1 \in \mathbb{N}$ i neko $p \in \mathbb{N}$ tako da važi $x_{k+p}^* = x_k^*$ za sve $k \geq N_1$*
- *Za svako $k \geq 0$ važi*

$$|x_{k+1}^* - \alpha| \leq \frac{\rho + \gamma |x_{k+1}^* - x_k^*|}{1-\gamma}.$$

Iz dokaza se vidi da greška $|x_k^* - \alpha|$ monotono opada kada k raste sve dok ne postane manja od δ. Posle toga $|x_k^* - \alpha|$ ostaje manje ili jednako sa δ. Iterativni postupak ili stoji $(p = 1)$ tj. dobijaju se samo isti mašinski brojevi kao članovi niza $\{x_k^*\}$, ili se ciklički ponavljaju $(p \geq 2)$. Ovakvo ponašanje iterativnog niza može se u skupu mašinskih brojeva uzeti kao analogon konvergenciji u skupu realnih brojeva. Zbog toga niz $\{x_k^*\}$ mašinskih brojeva koji ima osobine iz prethodne teoreme sa nekim $x^* \in \mathbb{R}$ i nekim $\delta > 0$ kažemo da numerički konvergira ka x^*.

Problem određivanja rešenja može se sada posmatrati kao određivanje niza numeričko konvergentnog ka pravom rešenju α sa što je moguće manjim δ. Na osnovu tvrđenja teoreme važi

$$|x_{k+1}^* - \alpha| \leq \varepsilon$$

ako je

$$|x_{k+1}^* - x_k^*| \leq \frac{\varepsilon(1-\gamma) - \rho}{\gamma}.$$

I ova implikacija se naziva izlazni kriterijum.

3. Izlazni kriterijum za neke postupke

3.1 Postupak Potra-Ptak

U radu [17] definisan je iterativni postupak

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) + f\left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)}{f'(x_k)} \quad k = 0,1, \ldots.$$

Za ovaj postupak, postupak Potra&Ptak, ćemo dokazati teoremu analognu teoremi Teorema 4.

Funkcija koraka postupka Potra&Ptak može se prikazati na sledeći način

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x) + f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'(x)} = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \; g(x)$$

gde je

$$g(x) = 1 + \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f(x)}$$

Teorema 14. *Neka za funkciju* $f \in C^2(D)$ *i* $D = [a, b]$ *važi*

$f(a) < 0, \;\; f(b) > 0,$

$f'(x) > 0, \;\; f''(x) > 0, \;\; x \in D$

onda za postupak Potra&Ptak $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ *gde je*

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \; g(x)$$

i

$$g(x) = 1 + \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f(x)}$$

važi

$$g \in C^1\left(D_f^+\right), \qquad g(x) \geq 1, \qquad x \in D_f^+$$

$$\varphi'(x) \geq, x \in D_f^+ \ .$$

Dokaz. Na osnovu pretpostavki teoreme sledi da za svako $x \in D_f^+$ važi $\alpha < x - \frac{f(x)}{f'(x)} < x$, pogledati dokaz globalne konvergencije Njutnovog postupka u [11]. Kako je na osnovu Tejlorovog razvoja

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right) = f(x) - f'(x)\frac{f(x)}{f'(x)} + f''(\tau)\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2$$

za neko $\tau \in \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}, x\right)$, dobijamo

$$\frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f(x)} = f''(\tau)\frac{f(x)}{f'(x)^2}$$

i

$$g(x) = 1 + f''(\tau)\frac{f(x)}{f'(x)^2}.$$

Očigledno je $g(\alpha) = 1$ i $g(x) \geq 1$ za $x \in D_f^+$. Takođe je $g \in C^1\left(D_f^+\right)$. Iz

$$\varphi'(x) = \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)f'(x) + f(x)\left(f'(x) - f'\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)\right)}{f'(x)^3} f''(x)$$

sledi $\varphi'(x) \geq 0$, $x \in D_f^+$, jer je f' rastuća funkcija i $\alpha < x - \frac{f(x)}{f'(x)} < x$, tj. $\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}, x\right) \in D_f^+$. Time je teorema dokazana.

Sada možemo dokazati teoremu o nejednakosti zaustavljanja postupka Potra&Ptak.

Teorema 15. *Neka za funkciju* $f \in C^2(D)$ *i* $D = [a,b]$ *važi*

$$f(a) < 0, \ \ f(b) > 0,$$

$$f'(x) > 0, \ \ f''(x) > 0, \ \ x \in D$$

$$f'(b) \le 2f'(a)$$

Tada za svako $x_0 \in D_f^+$, *iterativni postupak* $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ *gde je*

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} g(x)$$

$$g(x) = 1 + \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f(x)}$$

konvergira ka jedinstvenom rešenju α *jednačine* $f(x) = 0$ *i važi za* $k = 0,1,\ldots$

$$|x_{k+1} - \alpha| \le |x_k - x_{k+1}|.$$

Dokaz. Na osnovu prethodne teoreme je

$$g \in C^1\left(D_f^+\right), \ g(x) \ge 1, \quad x \in D_f^+$$

i

$$\varphi'(x) \ge 0, \quad x \in D_f^+.$$

To znači da su ispunjene pretpostavke teoreme Teorema 4, pa neposredno sledi i tvrđenje ove teoreme.

Teorema 16. [8] *Neka za funkciju* $f \in C^2(D)$ *i* $D = [a,b]$ *važi*

$$f(a) < 0, \ \ f(b) > 0,$$

$$f'(x) > 0, \ \ f''(x) < 0, \ \ x \in D$$

$$f'(a) \le 2f'(b)$$

$$g \in C^1\left(D_f^-\right), \ g(x) \ge 1, \quad x \in D_f^-$$

$$\varphi'(x) \ge 0, \quad x \in D_f^-$$

Tada za svako $x_0 \in D_f^-$, *iterativni postupak* $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ *gde je*

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} g(x)$$

konvergira ka jedinstvenom rešenju α jednačine $f(x) = 0$ i važi za $k = 0,1,\ldots$

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq |x_k - x_{k+1}|.$$

Dokaz. I u ovom slučaju se lako dokazuje da za $g(x)$ i neko $\tau \in \left(x, x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right)$ važi

$$g(x) = 1 + f''(\tau) \frac{f(x)}{f'(x)^2}$$

i $g \in C^1\left(D_f^-\right)$, $g(x) \geq 1$, $x \in D_f^-$. Na osnovu pretpostavki teoreme sledi da za svako $x \in D_f^-$ važi $x < x - \frac{f(x)}{f'(x)} < \alpha$, pogledati dokaz globalne konvergencije Njutnovog postupka u [11]. Sada je $\varphi'(x) \geq 0$, $x \in D_f^-$, gde je

$$\varphi'(x) = \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right) f'(x) + f(x)\left(f'(x) - f'\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right)\right)}{f'(x)^3} f''(x)$$

jer je f' opadajuća funkcija i $f''(x) < 0$. Tvrđenje teoreme sledi direktno na osnovu teoreme Teorema 7.

Posmatrali smo dva slučaja

$$f'(x) > 0, \ f''(x) > 0, \ x \in D$$

i

$$f'(x) > 0, \ f''(x) < 0, \ x \in D$$

i dokazali teoreme o nejednakosti zaustavljanja. Druga dva slučaja

$$f'(x) < 0, \ f''(x) < 0, \ x \in D$$

i

$$f'(x) < 0, \ f''(x) > 0, \ x \in D$$

svode se na prethodna dva ako se umesto jednačine $f(x)=0$ posmatra jednačina $-f(x)=0$. Tada zahtevamo još u prvom slučaju $f'(b)\geq 2f'(a)$, odnosno, u drugom slučaju, $f'(a)\geq 2f'(b)$.

3.2 Varijante nekih poznatih postupaka

3.2.1 Ojlerov postupak

Ojlerov iterativni postupak je jednostavna varijanta Njutnovog postupka. Njegov red konverencije je 3. Zasnovan je na Tejlorovom razvoju funkcije $f(x)$ u x_n

$$f(x) = f(x_n) + f^{'}(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f^{''}(x_n)(x - x_n)^2 + \cdots$$

Tejlorov polinom drugog stepena funkcije *f* je

$$p(x) = f(x_n) + f^{'}(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f^{''}(x_n)(x - x_n)^2$$

Ovaj polinom može imati dva, jedan ili nijedan koren. Sledeću aproksimaciju x_{n+1} koja je blizu x_n dobijamo iz $p(x) = 0$. Tako dobijamo

$$x - x_n = \frac{-f^{'}(x_n) \pm \sqrt{f^{'}(x_n)^2 - 2f^{''}(x_n)}}{f^{''}(x_n)}.$$

Aproksimaciju *x* obeležavamo sa x_{n+1}. Postoje dva problema sa ovim izrazom. Prvi problem je koji znak da odaberemo. Znak treba odabrati tako da brojilac bude što je bliže moguće nuli, što zavisi od znaka $f^{'}(x_n)$. Ovaj problem se otklanja deljenjem brojioca i imenioca sa $f^{'}(x_n)$. Pri tome dobijamo

$$x_{n+1} - x_n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{2f(x_n)f^{''}(x_n)}{f^{'}(x_n)^2}}}{\frac{f^{''}(x_n)}{f^{'}(x_n)}},$$

a odatle i rešenje x koje je blizu x_n

$$x_{n+1} = x_n + \frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{2f(x_n)f^{''}(x_n)}{f^{'}(x_n)^2}}}{\frac{f^{''}(x_n)}{f^{'}(x_n)}} \quad = \quad x_n - \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2f(x_n)f^{''}(x_n)}{f^{'}(x_n)^2}}}{\frac{f^{''}(x_n)}{f^{'}(x_n)}}$$

Drugi problem se pojavljuje kada je x_n blizu rešenje jednačine $f(x)=0$. Tada je $f(x_n)$ skoro nula, stoga, brojilac u prethodnom izrazu je zbir dva broja sa gotovo indentičnim apsolutnim vrednostima ali sa drugačijim znakom. Što će prouzrokovati veliki gubitak značajnih cifra pri numeričkom računanju. Ovaj problem se otklanja množenjem imenioca i brojioca sa

$$1+\sqrt{1-\frac{2f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}}.$$

Koristeći se identitetom

$$\left(1-\sqrt{1-u}\right)\left(1-\sqrt{1-u}\right)=u$$

dobijamo

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\frac{2f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}}{\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\left(1+\sqrt{1-\frac{2f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}}\right)}$$

odnosno,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)\left(1+\sqrt{1-\frac{2f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}}\right)}.$$

Sada Ojlerov iterativni postupak možemo zapisati u obliku

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}}}\ .$$

3.2.2 Halejev postupak

Ojlerov postupak neki autori nazivaju Halejev iracinalni postupak, [19]. Naime, aproksimacija

$$\sqrt{1-t(x)}=1-\frac{t(x)}{2}$$

daje

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)-\frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)}}.$$

3.2.3 Hansen-Patrikova familija i neki njeni specijalni slučajevi

Polazeći od Ojlerovog postupka

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}}}$$

dobijena je u radu [7] jednoparametarska familija iterativnih postupaka

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{(a+1)}{(a + \sqrt{1-(a+1)t(x_n)}}.$$

Ova familija ima red konvergencije 3. Isti red imaju i njeni specijalni slučajevi, sem Njutnovog postupka, koji kao granični slučaj kada $a \to \infty$ ima red konvergencije 2.

Specijalni slučajevi ove familije su

3.2.3.1 Ojlerov postupak

Ovaj postupak se dobija direktno za $a = 1$.

3.2.3.2 Halejev postupak

Ovaj postupak se dobija za $a = -1$, jer iz

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{(a+1)}{(a + \sqrt{1-(a+1)\frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}}}$$

sledi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(a+1)f(x_n)}{(af'(x_n) + \sqrt{f'(x_n)^2 - (a+1)f(x_n)f''(x_n)}}$$

i

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\left(af'(x_n) - \sqrt{f'(x_n)^2 - (a+1)f(x_n)f''(x_n)}\right)f(x_n)}{(a-1)f'(x_n)^2 + f(x_n)f''(x_n)},$$

a za $a = -1$ dobija se

$$x_{n+1} = x_n - \frac{-2f'(x_n)f(x_n)}{-2f'(x_n)^2 + f(x_n)f''(x_n)}$$

tj.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{1}{1 - \frac{f(x_n) f''(x_n)}{2 f'(x_n)^2}}.$$

Lepota Halejevog postupka se sastoji u tome što nije potrebno računati kvadratni koren. Nijedna druga vrednost parametra a ne daje postupak sa ovom osobinom.

3.2.3.3 Postupak Ostrovskog

Ovaj postupak se dobija direktno za $a = 0$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{1}{\sqrt{1 - t(x_n)}},$$

odnosno

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\sqrt{f'(x_n)^2 - f(x_n) f''(x_n)}}.$$

3.2.3.4 Njutnov postupak

Ovaj postupak se dobija kao granična vrednost kada $a \to \infty$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

3.2.4 Familija modifikovanih postupaka

U radu [4] dati su Tejlorovi razvoji za sledeće iterativne postupke

- Halejev postupak
$$H(t) = \left(1 - \frac{1}{2} t\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} t^2 + \cdots.$$
- Ojlerov postupak
$$H(t) = 2(1 + \sqrt{1 - 2t}\,)^{-1} = 1 + \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} t^2 + \cdots.$$
- Hansen-Patrikov postupak
$$H(t) = (a+1)\left(a + \sqrt{1 - (a+1)t}\,\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{2} t + \frac{a+3}{8} t^2 + \cdots,$$

  a je realan broj.

- Postupak Ostrovskog
$$H(t) = (1 - t)^{-0,5} = 1 + \frac{1}{2} t + \frac{3}{8} t^2 + \cdots.$$
- Postupak inverzne interpolacije
$$H(t) = 1 + \frac{1}{2} t.$$

U svim postupcima je

$$t = t(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Na osnovu Tejlorovog razvoja funkcije koraka Hansen-Patrikovog postupka, možemo izraziti i ostale Tejlorove razvoje posmatranih funkcija kao njene specijalne slučajeve. Neka je

$$\varphi(t) = 1 + \frac{t}{2} + \frac{a+3}{8} t^2.$$

Posmatrajmo iterativni postupak $x_{n+1} = F_k(x_n)$, gde je

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \varphi(t(x)).$$

Funkcija F sadrži i parametar a, te je možemo posmatrati kao familiju postupaka. Ova familija sadrži modifikacije nekih poznatih iterativnih postupaka. Za $a = -1$ dobijamo modifikaciju Halejevog postupka, za $a = 1$ dobijamo modifikaciju Ojlerovog postupka, a za $a = 0$ i $a = -3$ modifikaciju postupka Ostrovskog i postupak inverzne interpolacije.

Neposrednim diferenciranjem funkcije F dobijamo da važi

$$\alpha = F(\alpha), \quad F^{(j)}(\alpha) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \frac{F^{(3)}(\alpha)}{6} = \frac{(1-a)}{2} c_2^2 - c_3$$

što znači da je postupak $x_{n+1} = F_k(x_n)$ reda konvergencije 3 sa asimptotskom konstantom greške

$$\frac{(1-a)}{2} c_2^2 - c_3.$$

Za postupak važi sledeća teorema.

Teorema 17. *Neka za funkciju* $f \in C^3(D)$, $D = [a, b]$, *važi*

$$f(a) > 0 > f(b)$$

$$f'(x) < 0,\ f''(x) > 0,\ f'''(x) \ge 0,\ x \in D.$$

Tada za svako $x_0 \in D$ *takvo da je* $f(x_0) > 0$ *iterativni postupak* $x_{n+1} = F_k(x_n)$, *sa*

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\varphi(t(x))$$

i

$$\varphi(t) = 1 + \frac{t}{2} + \frac{a+3}{8}t^2,$$

konvergira monotono ka rešenju α *jednačine* $f(x) = 0$ *za svako* $a \in [-3,1]$.

Ako je ispinjen uslov

$$f'(a) \le 2f'(b)$$

tada nejednakost zaustavljanja

$$|x_{n+1} - \alpha| \le |x_{n+1} - x_n|$$

važi za svako $n = 0,1,\dots$, *i sve* $k = 1,2,\dots$.

Dokaz. Na osnovu pretpostavki teoreme sledi da jednačina $f(x) = 0$ ima u D *jedinstveno rešenje* α. Za svako $x \in D_f^+$ važi $x < x - \frac{f(x)}{f'(x)} < \alpha$, pogledati dokaz globalne konvergencije Njutnovog postupka u [11]. Dokazaćemo da je $F'(x) \ge 0$ za $x \in D_f^+$ i da važi $x_k \le x_{k+1} < \alpha$.

Diferenciranjem dobijamo

$$F'(x) = 1 - \varphi(t(x)) - \frac{f(x)t'(x)\varphi'(t(x))}{f'(x)} + \frac{f(x)\varphi(t(x))f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Kako je

$$\frac{f(x)}{f'(x)}t'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} - \frac{2f(x)^2 f''(x)^2}{f'(x)^4} + \frac{f(x)^2 f^{(3)}(x)}{f'(x)^3}$$

dobijamo

$$\frac{f(x)}{f'(x)}t'(x) = t(x) - 2t(x)^2 + \frac{f(x)^2 f^{(3)}(x)}{f'(x)^3}.$$

Sada je

$$F'(x) = 1-(1-t)\left(1+\frac{t}{2}+\frac{a+3}{8}t^2\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{a+3}{4}t\right)\left(t-2t^2+\frac{f(x)^2 f^{(3)}(x)}{f'(x)^3}\right)$$

i

$$F'(x) = \frac{1}{8}t^2\left(3+15t+a(-3+5t)\right)-\frac{(2+(3+a)t)\,f(x)^2 f^{(3)}(x)}{4f'(x)^3}.$$

Očigledno, za $a\in[-3,1]$ oba sabirka su pozitivna, pa je $F'(x)>0$ za $x\in D_f^+$. Za $x_0\in D_f^+$ je $x_1>x_0$, jer je $f'(x_0)<0$ i $\varphi(t(x_0))\geq 1$. Pošto je funkcija F rastuća i $x_0<\alpha$, sledi da je

$$x_1 = F(x_0) < F(\alpha) = \alpha .$$

Znači, $x_0<x_1<\alpha$, a odatle sledi $x_k\leq x_{k+1}<\alpha$ za svako $k=0,1,\ldots$. Zbog monotonosti i ograničenosti iterativnog niza sledi njegova konvergencija. Granična vrednost ovog niza je, zbog neprekidnosti funkcije *F*, upravo α.

Tvrđenje da važi izlazni kriterujum dajemo na način koji je prezentovan u [8]. Za neko α_k iz intervala određenog sa x_k i α, važi

$$x_{k+1}-x_k = F(x_k) = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\varphi(t(x_k)) = -\frac{f(x_k)-f(\alpha)}{f'(x_k)}\varphi(t(x_k))$$

$$= -\frac{f'(\alpha_k)}{f'(x_k)}\varphi(t(x_k))(x_k-\alpha)$$

i

$$x_{k+1}-\alpha = x_k-\alpha-\frac{f(x_k)-f(\alpha)}{f'(x_k)}\varphi(t(x_k)) = \left(1-\frac{f'(\alpha_k)}{f'(x_k)}\right)\varphi(t(x_k))(x_k-\alpha)$$

Iz poslednje dve relacije sledi

$$x_{k+1}-\alpha = (x_{k+1}-x_k)\left(1-\frac{f'(x_k)}{f'(\alpha_k)}\right)$$

Sada vidimo da iz

$$\left|1 - \frac{f^{'}(x_k)}{f^{'}(\alpha_k)}\right| \leq 1$$

sledi tvrđenje teoreme. Poslednja nejednakost je ekvivaletna sa

$$0 \leq \frac{f^{'}(x_k)}{f^{'}(\alpha_k)} \leq 2$$

Kako je *f'* rastuća funkcija i $f'(x) < 0$, za $x \in D$, dobijamo

$$0 \leq \frac{f^{'}(x_k)}{f^{'}(\alpha_k)} \leq \frac{f^{'}(a)}{f^{'}(b)} \leq 2.$$

Ovaj uslov je pretpostavljen, te je time teorema dokazana.

4. Eksperimenti

U ovom delu prikazujemo rezultate naših eksperimenata sa opisanim postupcima. Sva računanja su urađena u *Mathematica-i* 8. Preciznost je povećana na 20000 cifara sa `SetPrecision` funkcijom. Koristili smo sledeći izlazni kriterijum: $|x_k - \alpha| < \varepsilon$ i $|f(x_k)| < \varepsilon$ gde je α tačno rešenje posmatrane jednačine. U slučajevima kada tačno rešenje nije dostupno, koristili smo njegovu aproksimaciju α^*, koja je računata sa 20000 cifara, ali smo prikazali samo 20 cifara. Rešavali smo jednačinu $f(x) = 0$ koristeći sledeće test funkcije i za njih odgovarajuće startne vrednosti x_0 i tačna rešenja α ili aproksimacije tačnih rešenja α^*:

$$f_1(x) = \frac{1}{2} - \sin x, \text{ [10, 18]}, \ \alpha_1^* \approx 0.5235987755982988731, \ x_0 = 0.7,$$

$$f_2(x) = x^3 - 10, \text{ [12]}, \ \alpha_2^* \approx 2.1544346900318837218, \ x_0 = 2,$$

$$f_3(x) = x^3 + 4x^2 - 10, \text{ [12]}, \ \alpha_3^* \approx 1.3652300134140968 45, \ x_0 = 2$$

$$f_4(x) = e^{-x}\sin x + \ln(x^2 + 1), \text{ [12]}, \ \alpha_4^* = 0, \ x_0 = 2,$$

$$f_5(x) = (x-1)^3 - 1, \text{ [12]}, \ \alpha_5 = 2, \ x_0 = 1.5,$$

$$f_6(x) = (x-1)^3 - 2, \text{ [12]}, \ \alpha_6^* \approx 2.259921049894873, \ x_0 = 2.0,$$

$$f_7(x) = x^2\sin x - \cos x, \text{ [13]}, \ \alpha_7^* \approx 0.8952060453842319, \ x_0 = 1.5,$$

$$f_8(x) = e^{x^2+7x-30} - 1, \text{ [12]}, \ \alpha_8 = 3, x_0 = 3.1,$$

$$f_9(x) = x - \cos x, \text{ [12]}, \ \alpha_9^* \approx 0.7390851332151606, \ x_0 = 2,$$

Prikazujemo samo neke od dobijenih rezultata za postupke koje smo posmatrali kao poznate modifikacije Njutnovog postupka: Halejev, Ojlerov, postupak Potra&Ptak, postupak Ostrovskog, postupak inverzne interpolacije, postupak Trauba za $s = 4$, postupak Hansen-Patrika za različite vrednosti parametra a i modifikovanu Hansen-Patrikovu familiju za iste vrednosti parametra a .

U sledećoj tabeli prikazane su vrednosti za $|x_6 - \alpha|$ za navedene postupke. Pri tome $2.6(-72)$ označava broj 2.6×10^{-72}, itd.

Postupak		f_2	f_3	f_6	f_8	f_9
Njutnov		2.6(-72)	7.5(-39)	1.1(-40)	5.3(-20)	5.6(-96)
Halejev		1.2(-887)	1.2(-476)	9.7(-533)	6.9(-326)	6.2(-318)
Ojlerov		6.1(-1008)	1.0(-578)	1.0(-669)	6.4(-126)	1.5(-351)
Potra -Ptak		1.8(-698)	1.6(-358)	7.7(-300)	4.7(-155)	3.7(-912)
Ostrovskog		5.9(-4854)	1.9(-2608)	3.6(-2830)	1.2(-1627)	7.4(-3850)
Inverzne interpolacije		3.5(-730)	2.5(-175)	6.7(-341)	1.6(-188)	4.9(-290)
Traub za s=4		1.5(-53)	6.7(-21)	1.5(-21)	1.3(-9)	1.4(-30)
Hansen&Patrika	a = 5	3.6(-725)	2.7(-241)	1.0(-411)	8.8(-77)	2.7(-453)
	a = 9	1.2(-644)	1.1(-204)	2.8(-338)	5.2(-57)	1.4(-351)
	a = 15	1.4(-581)	1.4(-178)	1.4(-273)	3.5(-53)	5.9(-315)
	a = 25	3.8(-524)	2.9(-160)	5.5(-208)	9.3(-50)	2.0(-284)
Hansen&Patrika modifikovan	a = 5	3.3(-651)	5.2(-453)	3.1(-232)	2.1(-297)	8.8(-556)
	a = 9	4.4(-588)	8.8(-310)	1.4(-153)	1.1(-113)	2.6(-501)
	a = 15	1.9(-477)	3.4(-206)	1.5(-29)	5.5(-8)	6.6(-385)
	a = 25	4.6(-397)	4.7(-108)	1.4(-19)	4.2(-1)	4.0(-202)

Tabela 1. Vrednosti za $|x_6 - \alpha|$

Iz rezultata prikazanih u tabeli možemo da vidimo da su rezultati Hansen-Patrikove familije i modifikovane Hansen-Patrikove familije slični, za izabrane vrednosti parametra a. Za ovu drugu familiju smo dokazali da važi izlazni kriterijum pod uslovima datim u teoremi 17.

Za posebne vrednosti parametra a dobijamo sledeće postupka: za $a=-1$ Halejev postupak, za $a=1$ Ojlerov postupak, a za $a=0$ i $a=-3$ postupke Ostrovskog i inverzne iterpolacije respektivno.

U tabeli 2. prikazujemo rezultate koji se odnose na izlazni kriterijum. Posmatrali smo funkciju

$$f_3(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

interval $[1.3, 2]$ i početnu vrednost $x_0 = 2$. Za ovu funkciju na izabranom intervalu važi

$$f'(x) = 3x^2 + 8x > 0, \quad f''(x) = 6x + 8 > 0,$$

$$f'(a) = 15.47, \quad f'(b) = 28, \quad f'(b) < 2f'(a).$$

Vidimo da su ispunjeni uslovi teoreme 15 i da za postupak Potra&Ptak važi izlazni kriterijum. Ovo potvrđuju i rezultati prikazani u tabeli 2.

$f_3(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, $prec = 10000$, $\varepsilon = 10^{-1000}$, $x_0 = 2$				
	Njutnov postupak		postupak Potra&Ptak	
n	$\lvert x_{n+1} - \alpha^* \rvert$	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	$\lvert x_{n+1} - \alpha^* \rvert$	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	1.34770(-1)	5.00000(-1)	4.99486(-2)	5.84821(-1)
1	8.10332(-3)	1.26667(-1)	5.49215(-5)	4.98936(-2)
2	3.20015(-5)	8.07132(-3)	7.96250(-14)	5.49215(-5)
3	5.02050(-10)	3.20010(-5)	2.42669(-40)	7.96250(-14)
4	1.23569(-19)	5.02050(-10)	6.86920(-120)	2.42669(-40)

Tabela 2.

U tabeli 3. prikazujemo rezultate koji se odnose na izlazni kriterijum. Posmatrali smo funkciju

$$f_1(x) = \frac{1}{2} - \sin x$$

interval $[0.2, 1.2]$ i početnu vrednost $x_0 = 0.7$. Za ovu funkciju na izabranom intervalu važi

$$f'(x) = -\cos(x) < 0, \quad f''(x) = \sin(x) > 0, \quad f'''(x) = \cos(x) > 0$$
$$f'(a) = -0.980067..., \quad f'(b) = -0.362358..., \quad f'(a) < 2f'(b).$$

Vidimo da su ispunjeni uslovi teoreme 17 i da za sve postupke modifikovane Hansen-Patrikove familije važi izlazni kriterijum. Ovo potvrđuju i rezultati prikazani u tabeli 3.

$f_1(x) = \frac{1}{2} - \sin x$, $prec = 10000$, $\varepsilon = 10^{-1000}$, $x_0 = 0.7$				
	Postupak Ostrovskog ($a = 0$)		Postupak inv. inter. ($a = -3$)	
n	$\lvert x_{n+1} - \alpha^* \rvert$	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	$\lvert x_{n+1} - \alpha^* \rvert$	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	1.30242(-3)	1.75369(-1)	2.81600(-3)	1.73585(-1)
1	2.29302(-10)	1.30242(-3)	7.48913(-9)	2.81600(-3)
2	2.51178(-30)	2.29302(-10)	1.40015(-25)	7.48913(-9)
3	3.30144(-90)	2.51178(-30)	9.14952(-76)	1.40015(-25)
4	7.49668(-270)	3.30144(-90)	2.55313(-226)	9.14952(-76)
	Ojlerov postupak ($a = 1$)		Halejev postupak ($a = -1$)	
n	$\lvert x_{n+1} - \alpha^* \rvert$	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	$\lvert x_{n+1} - \alpha^* \rvert$	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	4.37895(-4)	1.75963(-1)	1.62695(-3)	1.74774(-1)
1	1.39875(-11)	4.37895(-4)	1.07848(-9)	1.62695(-3)
2	4.56106(-34)	1.39875(-11)	3.13596(-28)	1.07848(-9)
3	1.58141(-101)	4.56106(-34)	7.70994(-84)	3.13596(-28)
4	6.59152(-304)	1.58141(-101)	1.14576(-250)	7.70994(-84)

Tabela 3.

5. Zaključak

U master radu posmatrani su numerički postupci za rešavanje nelinearne jednačine sa jednom nepoznatom. Za izabrane postupke dokazano je da važi nejednakost zaustavljanja. Pored poznatih teorema koje se odnose na Njutnov iterativni postupak, postupak sečice, Halejev postupak, Stefensenov postupak i celu jednu klasu iterativnih postupaka trećeg reda konvergencije, definisanih u [19], dokazane su i nove teoreme koje se odnose na nejednakost zaustavljanja za postupak Potra&Ptak iz [17] i jednu familiju postupaka, nastalu modifikacijom Hansen-Patrikove familije iz [7]. Modifikovana familija i dokazi ovih teorema su originalni rezultat autora.

Treći deo rada sadrži kao originalan rezultat tvrđenja koja se odnose na nejednakost zaustavljanja postupka Potra&Ptak i jedne familije postupaka, koja je nastala modifikacijom postupka Hansen&Patrika. U ovom delu posmatrani su Hansen-Patrikova familija postupaka i njeni specijalni slučajevi.

U poslednjem delu rada prikazani su neki rezultati numeričkih eksperimenata, koji su urađeni u programskom paketu *Mathematica*. Primeri su uzeti iz navedenih radova, a najviše iz [10], [12], [13] i [18]. Numerički rezultati su u skladu sa teorijskim razmatranjima.

6. Biografija

Rođena sam 18. decembra 1987. godine u Virovitici. Završila sam Osnovnu školu „Braća Novakov" u Silbašu 2002. godine.

Opšti smer Gimnazije „Jan Kolar" u Bačkom Petrovcu pohađala sam u periodu 2002-2006.

Osnovne akademske studije upisala sam 2006. godine na Prirodno–matematičkom fakultetu, Univerzitet u Novom Sadu, na Departmanu za matematiku i informatiku, na smeru matematika finansija, a završila 2010. godine.

Master akademske studije – Primenjena matematika, modul Matematika finansija upisala sam 2010 godine na Prirodno–matematičkom fakultetu u Novom Sadu, gde sam položila sve ispite predviđene nastavnim planom i programom, kao i grupu pedagoško-psihološko-metodičkih predmeta zaključno sa oktobrom 2011. godine.

Novi Sad, avgust 2012. Biljana Radošević

7. Literatura

[1] Acklam P.J.Ž., *A small paper on Haley's method*, http://home.online.no/~pjacklam, Decembra 2002.

[2] Basto, M., Semiao, V., Calheiros, F. L., A new iterative method to compute nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 173(2006), 468-483.

[3] Dennis, J.E., Schnabel, R.B., Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Non-linear Equations (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983).

[4] Gander, W., On Halley's iteration method, Amer. Math. Monthly 92 (1985), 131–134.

[5] Gutierrez, J. M., Hernandez, M. A., An acceleration of Newton's method: super-Halley method, Applied Mathematics and Computation 117(2001), 223-239.

[6] Halley, E., A new and general method of finding the roots of equations, Philos. Trans. Roy. Soc. London 18 (1694),136–148.

[7] Habsen, E., Patrick, M., A family of root finding methods, Numer. Math. 27(1977), 257-269.

[8] Herceg, D., Exit criteria for some iterative methods, Univerzutet u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 12(1982), 139-150.

[9] Herceg, D., Numeričke i statističke metode u obradi eksperimentalnih podataka, Univerzutet u Novom Sadu, PMF, Novi Sad, 1992.

[10] Herceg, Đ., Herceg, D., On a third order family of methods for solving nonlinear equations, International Journal of Computer Mathematics, 2010, 1-9.

[11] Herceg, D., Krejić N., Numerička analiza, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, Novi Sad, 1997.

[12] Homeier, H.H.H., On Newton-type methods with cubic convergence, J. Comput. Appl. Math. 176 (2005), 425–432.

[13] Kou, J., Li, Z., Wang, X., A modification of Newton method with third-order convergence, Applied Mathematics and Computation 181 (2006), 1106–1111.

[14] Le, D., An Efficient Derivative-Free Method for Solving Nonlinear Equations, Journal ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), Vol 11,3(1985), 250-262.

[15] Leković,I., Uniformna obrada postupaka regula-falsi, Njutn-Rafsona, sečice i Stefenseba za numeričko rešavanje jednačina, Master rad, PMF Novi Sad, 2011.

[16] Mamta, V. K., Kukreja V.K., Singh, S., On a class of quadratically convergent iteration formulae, Applied Mathematics and Computation, 166(2005), 633–637.

[17] Potra, F.A., Pták, V., Nondiscrete induction and iterative processes, Research Notes in Mathematics, vol. 103, Pitman, Boston, 1984.

[18] Ralston, A., A First Course in Numerical Analysis, Tokyo [etc.]: McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1965.
[19] 19, J.F., Itarative Methods for the Solution if Equations, Prentice–Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., United States of America, 1964.
[20] Weerakoon, S., G.I. Fernando, A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence, Appl. Math. Lett. 17 (2000) 87–93.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Biljana Radošević
AU

Mentor: dr Dragoslav Herceg
MN

Naslov rada: Nejednakost zaustavljnja nekih iterativnih postupaka
MR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski i engleski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2012.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 3.
MA

Fizički opis rada: (5 poglavlja/ 41 strana/3 tabele/20 literature)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Numerička analiza
ND

Ključne reči: iterativni postupak, nejednakost zustavljanja
KR:

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
ČU

Važna napomena: nema
VN

Izvod: Posmatramo numeričke postupke za rešavanje nelinearne jednačine sa jednom nepoznatom. Za izabrane postupke, pod određenim pretpostavkama, dokazujemo da važi nejednakost zaustavljanja. Pored poznatih teorema, koje se odnose na Njutnov iterativni postupak, postupak sečice, Halejev postupak, Stefensenov postupak i celu jednu klasu iterativnih postupaka trećeg reda konvergencije, definisanih u stručnoj literaturi, posmatraćemo i dokazati i nove teoreme koje se odnose na nejednakost zaustavljanja za postupak Potra&Ptak i jednu familiju postupaka, nastalu modifikacijom Hansen&Patrikove familije.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 10.5.2012.
DP

Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Nataša Krejić redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član:	dr Zorana Lužanin redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor:	dr Dragoslav Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Serial number:
SNO

Identification umber:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's theses
CC

Author: Biljana Radošević
AU

Mentor: dr Dragoslav Herceg
MN

Title: Stopping inequality for some iterative methods
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s/en
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2012.
PY

Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science Trg Dositeja Obradovića 3.
PP
Physical description: *(5 chapters, 41 pages, 3 chaptrs, 20 references*)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Numerical analysis
SD

Key words: iterative method, stopping inequality
UC

Holding data: Library of Department of Mathematics and Informatics
HD

Note:

Abstract: In this paper we observing numerical methods for solving nonlinear equations $f(x) = 0$. For chosen iterative methods we are proving exit criteria. Beside allready familiar theorem’s, which are realited on Newton method, secant method, Halley method, Steffensen method and whole class of iterative methods defined in professional literature, wich order of convergence is three. We proved new theorem of exit criteria for Potra& Pták and family of iterative methods, obtained by modifying Habsen Patrick family.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 10.5.2012.
ASB

Defended:

President:	dr Nataša Krejić, Full Proffessor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member:	dr Zorana Lužanin, Full Proffessor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member:	dr Dragoslav Herceg, Full Proffessor, Faculty of Science, University of Novi Sad

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Biljana Radošević

Nejednakost zaustavljanja nekih iterativnih postupaka

master rad

Novi Sad, 2012.