



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Biljana Mijatović

Modeliranje difuzionih procesa u prirodnim naukama

-master rad-

Novi Sad, 2015.

SADRŽAJ

PREDGOVOR	1
1. Parcijalne diferencijalne jednačine	3
1.1 Uvod u Braunovo kretanje	6
1.2 Furijeova jednačina	6
1.3 Slučajan hod.....	8
1.4 Slučajan hod po rešetci	12
1.5 Ajnštajn i Braunovo kretanje	14
1.5.1 Viskoznost.....	15
1.5.2 Međudelovanje termodinamike i kinetike.....	16
1.5.3 Braunovo kretanje i stohastička difuzija	18
2. Lanci Markova	20
2.1 Poreklo lanaca Markova	20
2.2 Definicija lanaca Markova i uslovne verovatnoće.....	21
3. Matematička difuzija u prirodnim naukama	23
3.1 Istorija istraživanja difuzije u ekologiji	23
3.2 Pojam matematičkog modela.....	25
3.2.1 Deterministički i stohastički modeli	25
3.3 Teorija difuzije u prirodnim sredinama	28
3.3.1 Fizička difuzija.....	29
3.3.2 Difuzija atmosferskog graničnog sloja	34
3.3.3 Okeanografska i hidrološka difuzija	36
3.4 Difuzija u ekosistemu	39
3.4.1 Brzina taloženja	39
3.4.2 Difuzioni model spora.....	41
3.5 Difuzija životinja u staništu	43
3.5.1 Model kretanja životinja u staništu	47
3.5.2 Disperzija životinja u novim staništima.....	51
4. Model disperzije i rasta populacije životinja	54
4.1. Logistička kriva	62
4.2 Disperzija za dve životinjske vrste	65
4.3 Konkurentski modeli u slučaju prenaseljenosti	74
Zaključak.....	80
Literatura.....	82

PREDGOVOR

Difuzija (latinski: *diffusio*- širenje, rasprostiranje) predstavlja spontano kretanje molekula ili čestica u gasu, tečnosti ili čvrstom telu sa mesta više koncentracije prema mestu niže koncentracije, tj. mešanje bar dva sredstva kroz njihovu dodirnu površinu.

Mnoge reakcije i procesi koji su važni za dobijanje materijala zasnivaju se na prenosu mase (molekula, atoma, jona) kroz čvrstu materiju. Materija koja se ovim procesom prenosi kroz sredinu može poticati iz čvrste, gasovite ili tečne faze. Ovaj prenos mase kroz materiju se naziva difuzija. Difuzija je pojava uzajamnog prodiranja jedne supstance u drugu. To je mehanizam kojim se jedna vrsta materije transportuje kroz drugu vrstu materije. Kretanje svakog individualnog atoma ili čestice je ograničeno susednim atomima ili česticama, pa je zato ovo kretanje niz slučajnih preskoka i sudara. Međutim, krajnji rezultat velikog broja događaja može da bude ukupno specifično pomeranje materije. Difuzija u datoj smeši se odvija ako koncentracija date komponente nije ista u celom prostoru. Dakle, uslov za nastanak difuzije je razlika u koncentraciji, odnosno postojanje gradijenta koncentracije. Difuzija prestaje kada nestane gradijenta koncentracije, tj. kada se izjednači sastav supstance u rastvaraču.

Svaki proces difuzije odvija se pod uticajem odgovarajućeg gradijenta. Recimo difuzija materije se odigrava pod uticajem gradijenta koncentracije a difuzija toplote pod uticajem gradijenta temperature.

Ako je u nekoj smeši koja se sastoji najmanje od dve molekularno različite komponente, koncentracija obe komponente ista u celom prostoru u kojem se smeša nalazi, tada do difuzije ne dolazi. Uzrok difuzije kod gasova i tečnosti je termičko kretanje molekula, jona i koloidnih čestica. Kod čvrstih tela difuzija nastaje usled slučajne šetnje čestica u prostornoj rešetki. Difuzija se najbrže odvija u gasovima, sporije u tečnostima, a najsporije u čvrstim telima. Pojačava se s povećanjem temperature jer raste kinetička energija čestica. Takođe, difuzija raste sa povećanjem dodirne površine čestica. Primenjuje se za razdvajanje izotopa (termodifuzija) i za razdvajanje smeša gasova (frakcijska difuzija). Difuzija je važan proces u hemiji, tehnologiji i biološkim procesima.

Difuzija je posledica drugog principa termodinamike, koji kaže da entropija nekog neravnotežnog sistema može samo da raste, sve dok sistem ne dođe u ravnotežu. Obzirom da materija difunduje iz oblasti veće koncentracije u oblast manje koncentracije, sistem prelazi iz uređenijeg u manje uređen sistem, tj. entropija raste. Drugi princip termodinamike je statistički zakon i ima veliku primenu u svakodnevnom životu. Njime se određuje smer toplotnih procesa: toplota nikada ne prelazi spontano sa tela koje ima nižu temperaturu na telo koje ima višu temperaturu.

Entropija je veličina određena količnikom toplote i apsolutne temperature. Drugi princip termodinamike opisuje posledice entropije: ne može se dobiti rad prenosom toplote sa hladnijeg na toplije telo. Sa entropijom se srećemo u svakodnevnom životu. Ako predmet padne sa neke čvrste površine na pod njegova kinetička energija se pretvara u toplotu i malo ugrije podlogu na koju je pao. Ne postoji slučaj da se predmet sam vrati u prvobitni položaj uz spontano hlađenje poda. U prvom slučaju entropija sistema raste, a u drugom opada. Svi spontani procesi se odigravaju u smeru porasta entropije. Niko nas ne sprečava da predmet podignemo i vratimo u njegovo prvobitno stanje. Ali tada smo smanjili entropiju na račun rada koji je izvršen podizanjem predmeta. A da bi se došlo do te energije morala je da poraste entropija na nekom drugom mestu pri čemu je ukupan rezultat porast entropije u svemiru.

Osmoza predstavlja difuziju molekula rastvarača kroz polupropustljivu membranu koja propušta molekule rastvarača ali ne propušta molekule rastvorene supstance. Osmoza se javlja kada su koncentracije rastvora sa dve strane membrane različite. Pošto polupropustljiva membrana propušta samo molekule rastvarača ali ne i čestice rastvorene supstance, dolazi do difuzije rastvarača kroz membranu tj. molekuli rastvarača prolaze kroz membranu kako bi se izjednačile koncentracije sa obe strane membrane. Molekuli rastvarača se kreću iz sredine sa manjom koncentracijom u sredinu sa većom koncentracijom rastvorenih supstanci. Predstavlja vrstu pasivnog transporta.

Pritisak koji nastaje usled sudara čestica rastvora i membrane nazivamo **osmotskim pritiskom** jer nastaje pod uticajem osmoze. Pri difuziji molekula rastvarača kroz membranu dolazi do porasta nivoa tečnosti na jednoj strani membrane i smanjenja nivoa tečnosti na drugom nivou. Porast nivoa tečnosti na jednoj strani stvara hidrostatički pritisak koji se suprotstavlja osmozi tj. osmotskom pritisku koji deluje na membranu. Kada se ova dva pritiska izjednače doći će do ravnoteže i proces difuzije će se završiti tj. neće više doći do podizanja nivoa tečnosti. Pritisak pri kome se uspostavlja ova ravnoteža se naziva efektivni osmotski pritisak. Osmotski pritisak je veći što je koncentracija rastvora veća i obrnuto. Vant Hof je zaključio da je osmotski pritisak u nekom razređenom rastvoru jednak pritisku koji bi postigle otopljene čestice kada bi se nalazile u stanju gasa, pri datoj temperaturi i zapremini.

* * *

Posebnu zahvalnost dugujem mentoru dr Marku Nedeljkovu i članovima komisije za odbranu master rada. Zahvaljujem se svojim roditeljima i sestri Zlati.

1. Parcijalne diferencijalne jednačine

Literatura za ovo poglavlje je korištena iz: [1], [2], [3], [4], [5].

Parcijalne diferencijalne jednačine se dobijaju u raznim problemima fizike, geometrije i tehnike kada funkcije koje se posmatraju zavise od dve ili više nezavisnih promenljivih. Te promenljive mogu biti vreme sa jednom ili sa više prostornih koordinata.

Samo prostiji problemi mogu da se opišu običnim diferencijalnim jednačinama. Dok problemi u oblasti mehanike fluida, prostiranja toplote, mehanike čvrstog tela i elektromagnetizma opisuju parcijalne diferencijalne jednačine.

Teorija parcijalnih diferencijalnih jednačina jedan je od bitnih primera uzajamne povezanosti matematike sa drugim naučnim oblastima. Rešavanje ovih jednačina predstavlja ne samo formalno matematičko rešenje nego i uslov spoznavanja procesa u prirodnim i drugim naukama. Sa aspekta matematike, rešenje jednačine predstavlja broj ili funkciju. Sa aspekta fizičara ili biologa, rešenje opisuje proces.

Parcijalne diferencijalne jednačine su veza između zavisne promenljive dve ili više nezavisnih promenljivih i njenih izvoda po nezavisnim promenljivim. Nezavisne promenljive su prostorne i vremenske koordinate $(x, y, z; t)$. Zavisna promenljiva u zavisi od procesa koji se opisuje (kao što su temperatura, koncentracija, gustina...). Uz parcijalne diferencijalne jednačine se postavljaju početni i granični uslovi koji treba da zadovolje rešenje.

Za parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda ne postoje opšte metode za rešavanje, za razliku od običnih diferencijalnih jednačina i parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda sa jednom nepoznatom funkcijom. Rešavanje ovih jednačina svodi se na integraljenje običnih diferencijalnih jednačina. Razlog toga potice iz činjenice da su se parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda pojavile u okviru matematičke fizike i mehanike gotovo u samom početku stvaranja matematičke analize. Sem toga, rešenja ovih jednačina morala su da zadovolje i početne i granične uslove, pa su rešenja razlicita od problema do problema. [1]

Definicija1

Neka je u funkcija promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$ čiji su svi parcijalni izvodi, do m -tog reda zaključno, neprekidni na posmatranoj oblasti $\Omega \in \mathbf{R}^n$.

Bilo koja relacija između promenljivih x_i ($\forall i, i = 1, \dots, n$), funkcije u i njenih parcijalnih izvoda naziva se **parcijalna diferencijalna jednačina (PDJ)**.

Ako je najviši izvod u datoj definiciji reda m ($m \leq n$), tada se data jednačina naziva **parcijalna diferencijalna jednačina reda m** .

Definicija 2

Linearna nehomogena parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda je jednačina oblika:

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + bu = c$$

gde L označava linearni operator, $u = u(x_1, \dots, x_n)$ je nepoznata funkcija, a

koeficijenti su funkcije oblika:

$$a_{ij} = a_{ij}(x_1, \dots, x_n); a_i = a_i(x_1, \dots, x_n);$$

$$b = b(x_1, \dots, x_n); c = c(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{pri čemu je } a_{ij} = a_{ji}.$$

Primeri važnijih PDJ-a drugog reda sa dve i tri nezavisne promenljive su:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{\textit{jednodimenzionalna talasna jednačina;}}$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{\textit{jednodimenzionalna toplotna jednačina;}}$$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{\textit{dvodimenzionalna Laplasova¹ jednačina;}}$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{\textit{dvodimenzionalna Poasonova² jednačina;}}$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{\textit{trodimenzionalna Laplasova jednačina;}}$$

¹ Pjer-Simon Laplas (1749 - 1827), francuski matematičar

² Siméon Denis Poason (1781 – 1840), francuski matematičar

U ovim jednačinama c je konstanta, t je vreme, a x, y, z su koordinate. Za $f(x, y) \neq 0$ jednačina (4) je nehomogena, dok su sve ostale homogene.

Primenjujući Furijeov³ red dobijamo periodičnu funkciju kao sumu jednostavnih oscilatornih funkcija u sinusa i kosinusa. Furijeove redove koristimo kako bi rešili toplotnu jednačinu u metalnoj ploči. Pre Furijeovog rada nije postojalo poznato rešenje toplotne jednačine u opštem slučaju, iako su pojedinačna rešenja bila poznata ako se izvor toplote ponašao tako da je toplotni izvor bio **sinusni** ili **kosinusni** talas. Furijeova ideja je bila da se uzme složeniji izvor toplote kao linearna kombinacija jednostavnih sinusnih i kosinusnih talasa, tako da se rešenja napišu kao linearna kombinacija. Ova linearna kombinacije naziva se Furijeov red.

Iako je prvobitna ideja bila rešiti toplotnu jednačinu, kasnije se ista tehnika primenjivala na širok spektar matematičkih i fizičkih problema. Furijeovi redovi imaju mnogo primena u elektrotehnici, analizi vibracija, akustici, optici i kvantnoj mehanici.



Slika1.1 Joseph Fourier

³ Joseph Fourier (1768-1830), francuski matematičar i fizičar

1.1 Uvod u Braunovo kretanje

Difuzija obuhvata sve oblasti života. Utiče na svaki aspekt osnovnih nauka- biologije, hemije, geologije, fizike i matematike. Polazeći od Furijeove analize difuzije i posmatranjem širenja toplote u štapu (1807) difuzija je doživela evoluciju u fizičkom i stohastičkom smislu.

Stohastiku u difuziju je uveo francuski matematičar Laplas (1809). Laplasov rad je doveo do otkrića slučajnog hoda. Ajnštajnovi⁴ doprinosi iz 1905. godine su objedinili fizičku i stohastičku difuziju, koristeći kontekst Braunovog⁵ kretanja (1828).

1.2 Furijeova jednačina

Furije je istraživao visinu temperature T jednodimenzionalne šipke koja se menjala sa promenom položaja x u vremenu t . On je posmatrao čvrsta tela kao predmete u kojima toplota teče po putu provođenja. Uz pretpostavku da gubitak zračenja može da se zanemari i da je stopa prenosa toplote između dve tačke na štapu proporcionalna njihovoj razlici temperature i obrnuto proporcionalna njihovoj udaljenosti, napisao je sledeću jednačinu:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) \quad (1.1)$$

U jednačini ρ , c i K su fizički parametri označeni gustinom, specifičnom toplotom i toplotnom provodljivosti čvrstih tela, respektivno. Furije je zanemario curenje zračenja i slabu zavisnost temperature T od c i K u cilju snižavanja reda jednačine na rešiv, linearni oblik.

Kombinovanjem fizičkih koeficijenata u obliku:

$$D = \frac{K}{\rho c} \quad (1.2)$$

gde je D toplotna difuzija. Jednačina (1.1) može biti zapisana u obliku difuzije jednačinom:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t). \quad (1.3)$$

Ubrzo Furije predstavilja trodimenzionalnu jednačinu:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, y, z; t) = D \nabla^2 T(x, y, z; t) \quad (1.4)$$

⁴ Albert Einstein (1879-1955), nemački fizičar

⁵ Robert Brown (1773-1858), engleski botaničar

gde je ∇ nazvan Laplasijanom. Jednačina (1.4) ima oblik parabole parcijalne diferencijalne jednačine i potpuno zavisi od prirode graničnog stanja. Uz pretpostavku da je u početnom trenutku $t = 0$, temperatura lokalizovana na proizvoljnim tačkama x jednodimenzionalnog štapa važi:

$$T(x = 0, t = 0) = T_0 \delta(x - x_0) \quad (1.5)$$

gde je T_0 konstanta i delta δ je Dirakova delta funkcija. Uz pretpostavku da temperatura padne na nulu, sa obe strane beskonačno dugog štapa, granični uslov glasi:

$$T(x = \pm\infty, t) = 0. \quad (1.6)$$

Prema tome, rešenje jednačine (1.3) se može zapisati kao:

$$T(x, t) = \frac{T_0}{(4\pi Dt)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}\right]. \quad (1.7)$$

Sa druge strane, ako se uzme u obzir konačan štاپ dužine l i posmatra granični uslov da temperatura ne iscure na granici, odnosno, da je njegov gradijent (nagib) nula važi:

$$\frac{\delta}{\delta x} T(x, t)|_{x=0,L} = 0. \quad (1.8)$$

U tom slučaju, i sa istim početnim uslovima kao u jednačini (1.5), rešenje jednačine (1.3) glasi:

$$T(x, t) = T_0 \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-\pi^2 n^2 Dt}{L^2}\right] \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right). \quad (1.9)$$

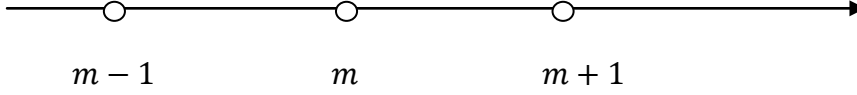
U svom radu Furije je izučavao širenje toplote u ograničenim domenima i postavio rešenja koja su trigonometrijske funkcije, kao u jednačini (1.9). Budući da tada konvergencija geometrijskog niza nije dobro uspostavljena, Furijeovi zapisi su odbijeni od strane francuske Akademije nauka. Važno je napomenuti da se temperatura u tački (sada na trodimenzionalnom štapu) odnosi na količinu toplote ∇H sadržane u osnovnoj zapremini ∇V oko tačke, a data je sa:

$$T = \frac{1}{\rho c} \frac{\nabla H}{\nabla V}. \quad (1.10)$$

Temperatura T daje odnos količine: sadržaj toplote ukupnog toplotnog kapacitet ($\rho c \nabla V$) na zapreminu ∇V . Dalje, jednačina kontinuiteta toplote preko zapremine je koncept iz jednačine (1.3). Zaista princip očuvanja je suština drugih primera fizičke difuzije poput molekularne difuzije. [3]

1.3 Slučajan hod

Ubrzo nakon što je Furije postavio teoriju širenja toplote u čvrstim telima, Laplas je razmatrao stohastičku difuziju.



Slika1.2 Slučajna šetnja na liniji

Laplasove ideje su objašnjene kroz analizu jednodimenzionalnog slučajnog hoda. Pretpostavka je da šetnja podrazumeva uzastopne korake na desno ili levo, nasumice. Nakon ukupno N koraka, naći će se na mestu m : $-N \leq m \leq N$. Sa $P_N(m)$ se označava verovatnoća pronalaženja položaja promenljive m nakon N koraka. Neka je n_1 broj koraka na desno i n_2 broj koraka na levo. U formulaciji:

$$N = n_1 + n_2 \quad (1.11)$$

$$m = n_1 - n_2$$

$$m = 2n_1 - N$$

Pretpostavka je da su uzastopni koraci iz prošlosti statistički nezavisni. Verovatnoća bilo kog određenog redosleda, n_1 koraka u desno i n_2 koraka u levo je:

$$W(p, q) = p^{n_1} q^{n_2} \quad (1.12)$$

gde p (odnosno q) označava osnovnu verovatnoću broja koraka u desno (odnosno levo).

Stoga sledi formula:

$$P_N(m) = \frac{N!}{n_1! n_2!} W(p, q). \quad (1.13)$$

Ovde, množenjem sa W dobija se ukupan broj mogućih načina uzimanja N koraka, tako da su n_1 koraci na desnoj, a n_2 koraci na levoj strani. Kombinovanjem jednačina (1.11) i (1.13) dobija se:

$$P_N(m) = \frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)! \left(\frac{N-m}{2}\right)!} p^{\left(\frac{N+m}{2}\right)} q^{\left(\frac{N-m}{2}\right)}. \quad (1.14)$$

Ako se pretpostavi da je verovatnoća normalizovana, tj.

$$\sum_{n_1=0}^N P_N(n_1) = 1 \quad (1.15)$$

i primeni binomna, formula koja glasi:

$$(p + q)^N = \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1! N - n_1!} p^{n_1} q^{N-n_1} \quad (1.16)$$

i važi:

$$(p + q) = 1 \quad (1.17)$$

može se izračunati srednja vrednost od n_1 sa sledećim koracima.

Prvo, srednja vrednost n_1 je data sa:

$$\bar{n}_1 = \sum_{n_1=0}^N n_1 \frac{N!}{n_1! n_2!} p^{n_1} q^{n_2} = p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1! n_2!} p^{n_1} q^{n_2}. \quad (1.18)$$

Pretpostavka je da su p i q dve nezavisne promenljive. Desna strana jednačine (1.18) se može zapisati pomoću binomne formule (1.16) kao:

$$\bar{n}_1 = p \frac{\partial}{\partial p} (p + q)^N = pN (p + q)^{N-1}. \quad (1.19)$$

Potom, koristeći jednačinu (1.17) da bi se došlo do

$$\bar{n}_1 = pN \quad (1.20)$$

srednja vrednost kvadratne vrednosti n_1 je data sa

$$\bar{n}_1^2 = \bar{n}_1^2 + pNq \quad (1.21)$$

i koristeći

$$n_1^2 - \bar{n}_1^2 = pNq \quad (1.22)$$

iz jednačina (1.21) i (1.22) možemo proceniti srednju vrednost i disperziju m pomeranja u desno. Korišćenjem jednačina (1.11), (1.20) i izraza

$$\bar{m} = 2\bar{n}_1 - N = 2N\left(p - \frac{1}{2}\right) \quad (1.23)$$

dobija se:

$$\overline{(m - \bar{m})^2} = 4(\overline{n_1^2} - \bar{n}_1^2) = 4Npq. \quad (1.24)$$

Od posebnog značaja je slučaj kada su jednake verovatnoće za levi i desni korak, odnosno, nema pristranosti. Tada je

$$p = q = \frac{1}{2} \quad (1.25)$$

$$\bar{m} = 0, \quad \bar{m}^2 = N. \quad (1.26)$$

Tada iz jednačine (1.14) se dobija:

$$P_N(m) = \frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)! \left(\frac{N-m}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N. \quad (1.27)$$

Uzimajući logaritam leve strane i primenom Stirlingove ⁶ formule:

$$\ln(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1.28)$$

dobija se izraz (za veliko N, n_1 i n_2)

⁶ James Stirling (1692-1770), engleski matematičar

$$\ln(N!) = \ln 1 + \dots + \ln N = \sum_{i=1}^N \ln(i) = \sum_{i=1}^N \Delta i \ln(i) \approx \int_1^N 1 \, di \ln(i)$$

$$\ln(N!) \approx \int_1^N 1 \, dx \ln x = N \ln N - (N-1) \approx N \ln N - N = N \ln \frac{N}{e}$$

$$(N!) \approx \left(\frac{N}{e}\right)^N$$

$$(N!) \approx \left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2N\pi}$$

$$\ln(P_N(m)) \cong \ln\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) + \left(N + \frac{1}{2}\right) \ln(N) - \frac{m}{2} [\ln(N + m) - \ln(N - m)] - \frac{(N + 1)}{2} [\ln(N + m) + \ln(N - m)] \quad (1.29)$$

Zbog pretpoistavke da se desni i levi koraci pojavljuju sa jednakom verovatnoćama, može se reći da razlika u broju desnih i levih koraka ima veličinu $\bar{m}$ koja će biti mnogo manja od ukupnog broja N koraka. Dakle, može se iskoristiti formula:

$$\ln\left(1 \pm \frac{m}{N}\right) \approx \pm \frac{m}{N} - \frac{m^2}{2N^2} + \dots$$

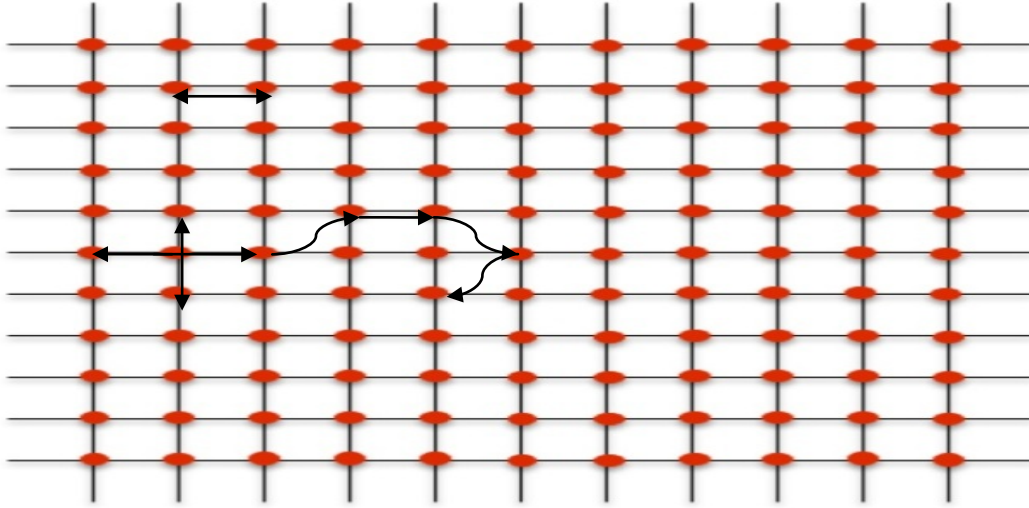
Koristeći jednačinu (1.29), dobija se:

$$P_N(m) = \sqrt{\frac{2}{N\pi}} \exp\left(-\frac{m^2}{2N^2}\right) \quad (1.30)$$

jednačina (1.30) ima istu strukturu kao i jednačina (1.7). Problem slučajnog hoda u smislu stvarnog položaja i vremena će pokazati da postoji difuzija koja je sadržana u rešenju jednačine (1.30). [3], [4]

1.4 Slučajni hod po rešetci

Posmatra se jednodimenzionalna rešetka sa korakom l na kojoj slučajni šetač počinje kretanje iz sredine (Slika 1.3). U bilo kom trenutku sa proizvoljnog mesta i nakon nekog vremena čekanja ($1/\lambda$) šetač može skočiti do najbližeg susednog mesta na desno ili na levo. Verovatnoća mirovanja (odnosno kretanja) za šetača sa mesta m data je sledećom jednačinom:



(Slika 1.3) Jednodimenzionalna rešetka

$$\frac{\partial}{\partial t} P_m = -2\lambda P_m + \lambda (P_{m+1} + P_{m-1}). \quad (1.31)$$

Ovaj izraz na desnoj strani predstavlja verovatnoću za mogućnost kretanja na dva proizvoljna mesta. Jednačina (1.31) je u obliku diferencijalne jednačine. Prelaz iz diskretnog u granični slučaj se može dobiti pretvaranjem diferencijalne jednačine (1.31) u diferencijalnu jednačinu sa zanemarljivo malim korakom rešetke l , koristeći identitet:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, t) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l^2} ((P_{m+1}(t) + P_{m-1}(t) - 2 P_m(t))). \quad (1.32)$$

Jednačina (1.31) sada daje jednačinu difuzije:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = D_s \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) \quad (1.33)$$

sa koeficijentom difuzije D_s .

$$D_s = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{\lambda} l^2}{2} \right), \quad \bar{\lambda} = 2\lambda \quad (1.34)$$

gde je $\bar{\lambda}^{-1}$ vreme trajanja zadržavanja u mestu. Činjenica je da se posmatra stohastička difuzija umetanjem indeksa s u D . Ova dva pristupa mogu posmatrati N i n u Furijeovoj jednačini kao kontinuirane promenljive i slede iz izraza (1.30) na parcijalne diferencijalne jednačine:

$$\frac{\partial}{\partial N} P_N(m) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial m^2} P_N(m). \quad (1.35)$$

Jednačina (1.35) je upravo istog oblika kao i stohastička difuzija jednačine (1.33), dajući sledeći izraz:

$$N = 2D_s \frac{t}{l^2}. \quad (1.36)$$

Osim toga, matematička svojstva jednačine (1.33) su ista kao ona u Furijeovoj fizičkoj difuziji jednačine (1.3) i svi raniji granični uslovi jednako važe i ovde. Bitno je napomenuti da je jednodimenzionalna slučajna šetnja identičan problem kao bacanje novčića kod koga je verovatnoća da padne "glava" m puta veća nego da padne "pismo" od ukupnog broja N bacanja i zadovoljava istu jednačinu kao jednačina (1.35).

Osim toga, stohastička difuzija karakteriše jedan parametar D_s , dok toplotna difuzija zavisi od dva fizička parametra, a to su specifična toplota c i toplotna provodljivost K koji su nezavisni. [3],[5]

1.5 Ajnštajn i Braunovo kretanje

Ajnštajnova teza o Braunovom kretanju stvara interesovanje za novi pristup u utvrđivanju Avogadrovog⁷ broja (N_a) i veličine molekula (a) u vreme kada hemičari i fizičari nisu mogli postići sliku o postojanju molekula. Ajnštajn je bio usmeren na procenu broja N_a . Njegova analiza temelji se na dve odvojene ideje koje su dovele do dva različita odnosa brojeva N_a i a .

On je izveo jednačinu za koeficijente difuzije i viskoznost u kojima se pojavljuje Avogadrov broj. Za fenomen Braunovog kretanja kao "drhtavog kretanja" polenovih zrna koja lebde u vodi Ajnštajn daje metod za određivanje N_a , ali još uvek ne konkretnu vrednost.

Iz eksperimentalnih vrednosti koeficijenata difuzije i viskoznosti šećera rastvora u vodi Ajnštajn je procenio $N_a = 2,1 * 10^{23}$. U kasnijem radu je dao bolju procenu uz poboljšane eksperimentalne podatke: $N_a = 4,15 * 10^{23}$. Kasnije (1911) je otkriveno da je Ajnštajn napravio algebarske greške u tezama i u radu. Kada je to ispravljeno isti eksperimentalni podaci su dali $N_a = 6,6 * 10^{23}$. [3]

⁷ Amedeo Avogadro (1776-1856), italijanski fizičar

1.5.1 Viskoznost⁸

Ako se posmatra izuzetno razređena koncentracija rastvorenog (otopljenog) molekula, kao što je šećer u rastvaraču- vodi. Rastvorene čestice će biti puno veće od čestica rastvarača, što dovodi Braunovo kretanje do važnog aspekta pri posmatranju tečnosti. Ajnštajn je pretpostavio da sa dodavanjem rastvora očekujemo da će se smanjiti pokretljivost rastvarača. Nova viskoznost η^* mora biti veća od početne, originalne viskoznosti rastvarača η . Razlika između η^* i η mora biti mala zbog razređenog rastvora i proporcionalna je zapremini rastvora po jedinici zapremine rastvarača. Sledi:

$$\frac{\eta^*}{\eta} = 1 + \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{N}{M}\rho. \quad (1.37)$$

gde je $\frac{4}{3}\pi a^3$ zapremina svakog rastvora čestice (pretpostavljamo sferne) poluprečnika a , dok je ρ masena gustina rastvora. M je molekulska masa rastvora tako da N / M meri masu svake čestice rastvora. Prema tome, proizvod $\frac{N}{M}\rho$ određuje broj čestica rastvora po jedinici zapremine rastvarača.

Ajnštajn je pretpostavio da će svernost rastvorene čestice kao granični uslov za protok rastvarača rastvora pojednostaviti pristup problemu i radi jednostavnosti dodaje konstantu od $5/2$ množenjem drugog člana. Tada se jednačina (1.37) može zapisati kao:

$$\frac{\eta^*}{\eta} = 1 + \frac{5}{2} \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{N}{M}\rho \quad (1.38)$$

Stoga su ograničenja za N i a poznata. Ajnštajn je koristio raspoložive podatke i uspeo da proceni veličinu Na^3 . Kako bi pojedinačno odredio vrednosti N i a , trebala mu je još jedna jednačina za povezivanje ta dva parametara. [2]

⁸ **Viskoznost** (unutrašnje trenje) je osobina tečnosti i gasova da pružaju otpor međusobnom kretanju njihovih slojeva.

Jača viskoznost utiče da fluid deluje lepljivo i teško se preliva. Ulje ima veću viskoznost od vode, ali je manje gustine. Grejanjem ulje znatno gubi na viskoznosti, dok se viskoznost vode smanjuje manje pri zagrevanju. Viskoznost fluida opisuje koeficijent viskoznosti η i meri se u Paskal-sekundama ($Pa \cdot s$).

1.5.2 Međudelovanje termodinamike i kinetike

Na osnovu Braunovih zapažanja slučajnog cik-cak kretanja čestica polena pod mikroskopom, Ajnštajn je shvatio da kretanje nikad ne prestaje, iako su tegla koja sadrži vodu i polen u Braunovom eksperimentu bile u ravnoteži pri konstantnoj temperaturi i pritisku. On je tada postavio merenje trenutne sile F na označenom rastvoru, zbog jednostavnosti u $\vec{x}$ -smeru. Tada će sila F biti proporcionalna gradijentu pritiska $\partial\pi / \partial x$. Proporcionalni faktor će biti potreban da bi se obe strane dimenzionalno usaglasile. Sila je data sa:

$$F = \frac{M}{N} \frac{1}{\rho} \frac{\partial\pi}{\partial x} \quad (1.39)$$

gde je faktor zapremine ρ već uveden u vezu u jednačini (1.37). Ajnštajn se oslonio na holandskog hemičara Vant Hofa⁹ koji je postavio hipotezu da kinetikom rastvora u rastvaraču vladaju zakoni idealnog gasa. Idealni gas je takav gas čije čestice (atomi ili molekuli) imaju ukupno zanemarljivo mali obim. Takođe, između njih ne postoje međumolekularne sile, pa se idealni gas ne može pretvoriti u tečno ili čvrsto stanje. Idealni gas je teorijski pojam, a stvarni gasovi mu se približavaju tek pri niskom pritisku i visokoj temperaturi. Uvodeći formulu:

$$\frac{\partial\pi}{\partial x} = \frac{RT_B}{M} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1.40)$$

gde je R je gasna konstanta. Kombinovanjem jednačina (1.39) i (1.40) dobija se:

$$F = \frac{RT_B}{N} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.41)$$

Ajnštajn je u narednim koracima koristio dve ključne ideje hemijskog inženjerstva. Prva je bila prepoznati da sila F nije ni spoljašnja, ni mehanička. Sila F sa unutrašnjim izvorom je bila u vezi s viskoznim trenjem rastvora čestica zbog neprekidnih sudara sa česticama rastvarača. Prema Stoksovom¹⁰ zakonu:

$$F = -6\pi\eta a v \quad (1.42)$$

⁹ Jacobus Hendricus vant Hoff (1852–1911), nemački fizičar

¹⁰ Georg Gabriel Stoks (1819–1903), irski matematičar

negativni predznak pokazuje da su sila trenja F i trenutna brzina v rastvora čestice u suprotnom smeru, η je dinamička viskoznost fluida, dok je a - radijus sferičnog predmeta.

Brzinu čestice v je formulisao Fik¹¹, što dovodi do Fikovog zakona prema kome se tok čestica kreće od područja visoke koncentracije ka područjima niske koncentracije, sa veličinom koja je proporcionalna koncentraciji gradijenta ili pojednostavljeno, koncept da će se otopljene čestice premeštati iz regije visoke koncentracije u regije niske koncentracije preko koncentracijskog gradijenta:

$$v = -D_p \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (1.43)$$

Za idealne mešavine ρ je koncentracija, u položaju x . Broj D_p je koeficijent difuzije. U indeksu p naglašava činjenicu da predstavlja fizičku difuziju (Furijeovog tipa). Kombinovanjem jednačina (1.42) i (1.43), dobija se:

$$F = D_p \frac{6\pi\eta a}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (1.44)$$

Kombinacijom jedanačina (1.43) i (1.44) Ajnštajn određuje fiktivnu silu F :

$$D_p = \frac{RT}{6\pi\eta aN}. \quad (1.45)$$

Jednačina (1.45) je tada davala konstantan rezultat koji se dobija i sa dugim brojevima (aN) iz eksperimenata. Ajnštajn je tada eliminisao promenljivu a određenu faktorom Na^3 i dobio Avogadrov broj. Njegova procenjena vrednost N je 6.6×10^{23} koji se približno i danas koristi. [3]

¹¹ Adolf Eugen Fik (1829–1901), nemački fizičar

1.5.3 Braunovo ketanje i stohastička difuzija

Ajnštajn je objavio rad u kome je posmatrao molekule pod mikroskopom. Osnovna pretpostavka je da se istovremeno sa difuzijom u rastvoru neprekidno obavlja slučajna šetnja. U jednoj dimenziji u kojoj $n(x, t)$ označava broj čestica rastvora po jedinici zapremine rastvarača oko x u vremenu t . Broj $n(x, t)$ je proporcionalan verovatnoći prostiranja (rastvora) oko x :

$$n(x, t) = \bar{n} P(x, t) \quad (1.46)$$

gde je $\bar{n}$ srednja gustina data sa:

$$\bar{n} = \int dx n(x, t) \quad (1.47)$$

u skladu sa očuvanjem verovatnoće:

$$\int P(x, t) dx = 1. \quad (1.48)$$

Iz jednačine (1.33), broj $n(x, t)$ ispunjava stohastičku difuziju jednačine:

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x, t) = D_s \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x, t). \quad (1.49)$$

U skladu sa tim, rešenje jednačine (1.49) je analogno rešenju jednačine (1.7), čime se dobija granični uslov:

$$n(x, t) = \frac{\bar{n}}{(4\pi D_s t)^{1/2}} \exp\left[\frac{-(x)^2}{4D_s t}\right]. \quad (1.50)$$

Jednačina (1.50) je uskladu sa početnim stanjem:

$$n(x, 0) = \bar{n} \delta(x). \quad (1.51)$$

U eksperimentu ako se posmatra rastvor čestica u trenutku $t = 0$ u početnoj tački, čestica se kreće cik-cak i pomera se ka tački x u trenutku t . Ako se nastavi eksperiment i uporedi sa velikim brojem unosa za x , tada će $\bar{x}$ biti srednja vrednost različita od nule za nezavisne slučajne šetnje. Srednja kvadratna vrednost od x će biti:

$$\bar{x}^2 = \int dx \frac{n(x, t)}{\bar{n}} (x)^2. \quad (1.52)$$

Iz jednačine (1.50) sledi da je

$$\bar{x}^2 = 2D_s t. \quad (1.53)$$

Upoređivanjem jednačina (1.53) i (1.36) primećuje se da na rešetci važi:

$$\bar{x}^2 = N (l)^2 \quad (1.54)$$

Ajnštajn je dokazao da su fizička i stohastička difuzija sinonimi kod Braunovog kretanja. Zbog toga sledi izjednačavanje koeficijenata D_s i D_p i dolaska na:

$$\bar{x}^2 = \frac{RT}{3\pi\eta aN} t. \quad (1.55)$$

Bilo da je molekul šećera u vodi ili kuglica stiropora u fluidu, pomeranje srednje kvadratne vrednosti je linearno proporcionalno vremenu t . Jednačina (1.55) osigurava univerzalno izračunavanje Avogadrovog broja. Leva strana jednačine (1.55) meri svojstvo fluktuacija (pomeranja), dok desna strana zavisi od viskoznosti η koja karakteriše rasipanje.

Ova jednakost je osnova za vezu fluktuacija-rasipanje u teoremi neravnotežne statističke mehanike koju je kasnije razvio Okubo.¹²

Ajnštajnov rad na difuzionim procesima ima ogromnu primenu u industriji gde se koriste zrnasti materijali za izgradnju, tehnologiji mleka (koloidna svojstva čestica razmucenih u mleku) i ekologiji (Braunovo kretanje čestica u atmosferi). [3], [5]

¹² Akira Okubo (1924 - 1996), japanski hemičar

2. Lanci Markova

Literatura za ovo poglavlje je korištena iz [3].

2.1 Poreklo lanaca Markova

U svom radu Ajnštajn je dao matematičku osnovu za svoju tezu i zastupao ideju Markovljevog¹³ stohastičkog procesa. Ajnštajnova analiza Braunovog kretanja zavisi od pretpostavke da se čestice kreću nezavisno jedna od druge na potpuno slučajan način. On je dokazao da je koncentracija rastvora bila veoma niska, a time je i međučelijska interakcija zanemarljiva. Prema tome, ako je gustina rastvorene čestice unutar domena x i $x + dx$, gustina će rasti od $n(x, t)$ u vremenu t za $n(x, t + \tau)$ u vremenu $t + \tau$ pri čemu važi ($\tau \ll t$). Rast gustine prati gustinu iz prethodnog koraka ($x - \Delta$) (za $\Delta \ll x$) mereno sa $n(x - \Delta, t)$. U skladu sa tim konceptom je posmatran slučajni hod.

Zavisnost $n(x, t)$ samo od gustine iz prethodnog koraka je glavna pretpostavka Markovljevog procesa $n(x - \Delta, t)$. Ajnštajn je pretpostavio da:

$$n(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} n(x - \Delta, t) \Phi(\Delta) d\Delta, \quad \tau \ll t \quad (2.1)$$

gde je $\Phi(\Delta)d\Delta$ verovatnoća da će sferna oblast iscuriti kroz tačku koja se nalazi između Δ i $\Delta + d\Delta$. Δ može biti bilo gde u posmatranom domenu. Odnos n i Φ je dat u obliku prizvoda, što podrazumeva nezavisnost procesa. $\Phi(\Delta)$ mora da zadovolji uslov normalizacije:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta = 1. \quad (2.2)$$

Osim toga, pošto postoji neprestano nasumično hodanje, skokovi na levo i desno su jednako verovatni. Stoga važi uslov simetrije:

$$\Phi(\Delta) = \Phi(-\Delta). \quad (2.3)$$

Sada primenom Tejlorovog razvoja sa obe strane jednačine (2.1) u skladu sa jednakosti:

$$n(x, t + \tau) \approx n(x, t) + \tau \frac{\partial}{\partial t} n(x, t) + \dots \quad (2.4)$$

¹³ Andrey Andreyevich Markov (1856-1922), ruski matematičar

i sa

$$n(x - \Delta, t) \approx n(x, t) - \Delta \frac{\partial}{\partial x} n(x, t) + \frac{\Delta^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x, t) + \dots \quad (2.5)$$

uvrštavanjem jednačina (2.4) i (2.5) u (2.1) i pomoću jednačina (2.2) i (2.3), dobija se:

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} n(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x, t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2} \Phi(\Delta) d\Delta. \quad (2.6)$$

Jednačina (2.6) je identična jednačini difuzije (1.49). Ako je stohastički koeficijent difuzije:

$$D_s = \frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 \Phi(\Delta) d\Delta. \quad (2.7)$$

Jednačina (2.7) je analogna formuli (1.53).

2.2 Definicija lanaca Markova i uslovne verovatnoće

Stohastički proces može značiti statičnost ili pomeraj (ili kombinaciju oba). U slučajnom procesu $\xi(t)$, vrednost ξ je zavisna od vremena t , nezavisne promenljive, suprotno od determinističke situacije. Različitim pristupima jedna promenljiva se dobija preko druge funkcijom $\xi(t)$.

Sledeći skup zajedničkih verovatnoća gustine u potpunosti određuje stohastički proces $\xi(t)$.

$P_1(\xi_1, t_1)d\xi_1$ je verovatnoća pronalaženja ξ u rasponu $\xi_1, \xi_1 + d\xi_1$ i vremenu t_1 .

$P_2(\xi_1, t_1; \xi_2 t_2)d\xi_1 d\xi_2$ je zajednička verovatnoća pronalaženja ξ u rasponu $\xi_1, \xi_1 + d\xi_1$, u vremenu t_1 i u rasponu $\xi_2, \xi_2 + d\xi_2$ u vremenu t_2 .

$P_3(\xi_1, t_1; \xi_2 t_2; \xi_3 t_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ je zajednička verovatnoća pronalaženja skupa od tri vrednosti ξ u rasponu $d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3$ u vremenu t_1, t_2 i t_3 .

Tada P_S zadovoljava uslove:

- **nenegativnosti:** $P_n \geq 0$
- **simetrije:** $P_n(\xi_1, t_1; \xi_2 t_2 \dots \xi_n t_n)$ je simetrična funkcija skupa promenljivih $(\xi_1, t_1), (\xi_2 t_2), \dots, (\xi_n t_n)$, tako da važi $P_2(\xi_1, t_1; \xi_2 t_2) = P_2(\xi_2, t_2; \xi_1 t_1)$,

- **projekcije:** $P_m(\xi_1, t_1 \dots \xi_m, t_m) = \iint d\xi_{m+1} \dots d\xi_n P_n(\xi_1, t_1 \dots \xi_n, t_n)$ za $m < n$. (2.8)

Uslovne verovatnoće se definišu koristeći zajedničke verovatnoće. Tako na primer, treći red zajedničkih verovatnoća se može zapisati kao:

$$P_3(\xi_1, t_1; \xi_2, t_2; \xi_3, t_3) = P_2(\xi_1, t_1; \xi_2, t_2)P(\xi_1, t_1; \xi_2, t_2 | \xi_3, t_3). \quad (2.9)$$

Drugi član na desnoj strani predstavlja uslovnu verovatnoću da stohastički proces $\{\xi, t\}$ uzima vrednost između ξ_3 i $\xi_3 + d\xi_3$ u trenutku t_3 , s obzirom da je imala vrednost ξ_1 na t_1 i ξ_2 na t_2 ($t_3 > t_2 > t_1$). Vertikalna linija u izrazu se koristi za defisanje uslovne verovatnoće. Uopšteno govoreći $P_n(\xi_1, t_1; \xi_2, t_2; \dots; \xi_{n-1}, t_{n-1} | \xi_n, t_n)$ određuje uslovnu verovatnoću da ξ leži u intervalu ξ_n i $\xi_n + d\xi_n$ u vremenu t_n , s obzirom da je ξ formulisano sa $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ u trenucima $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ gde je $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1}$.

Distribucija verovatnoće izražena u jednačini (1.30) ili jednačini (1.50) je prisutna u prirodi i smatra se Gausovom¹⁴ distribucijom. Time povezujemo stohastičku difuziju i Gausov stohastički proces. Jednačina (1.30) predstavlja gustinu verovatnoće jedne slučajne promenljive m što Gausovom osobinom pripisujemo samo jednoj tački verovatnoće $P_1(\xi_1, t_1)$ u smislu jednačine (2.8). Slučajna promenljiva je Gausova ako je iz domena od $-\infty$ do $+\infty$, a ako je distribucija verovatnoća van tog domena, onda je Gausova funkcija sa srednjom vrednosti $\bar{\xi}$ i varijansom σ :

$$P(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\xi - \bar{\xi})^2}{2\sigma^2}\right).$$

Ako u Markovski proces i Gausov stohastički proces uključimo Braunovo kretanje nalazimo klasu Gausovog procesa koji su Markovski i stacionarni. [3]

¹⁴ Johann Carl Friedrich Gauss (1777 –1855), nemački matematičar

3. Matematička difuzija u prirodnim naukama

Literatura za ovo poglavlje je korištena iz [6], [7], [8], [9].

3.1 Istorija istraživanja difuzije u ekologiji

Matematički pristup pri posmatranju odnosa organizama i njihovog staništa je ključan u problemima ekologije. Matematička ekologija ima korene u ekološkoj populaciji koja obuhvata povećanje i migracije stanovništva. Lotka¹⁵ i Volter¹⁶ su u svojim radovima ustanovili pojam ‘plen-predator’ konkurentskih vrsta pomoću nelinearnih diferencijalnih jednačina, što je bio prvi ulazak u savremenu matematičku ekologiju. Cilj ovog modela je brojanje interakcija unutar i između vrsta. Uzimali su u obzir vremenske varijacije unutar grupa, međutim prostorne varijacije se nisu razmatrale. Samo kada populaciju organizama posmatramo i u vremenu i u prostoru možemo razumeti ekološku situaciju. Činjenica da se većina modela matematičke ekologije posmatra samo kroz vremensku varijaciju je uzrokovana teškoćama dobijanja preciznog matematičkog izraza. Brzina promene stope jedinki N u populaciji može se izraziti preko odnosa $\frac{\partial N}{\partial t}$. Jednačinu ekosistema utvrđujemo izjednačavanjem ovog odnosa sa drugim odnosom koji izražava uticaj interakcije vrsta na populaciju. Međutim, takva analiza nije moguća ako se posmatraju i prostorne varijacije.

Ono što je u direktnoj vezi sa interakcijom vrsta je **fluks (tok) populacije** kroz proizvoljne beskonačno male delove prostora. Što je bolje nego promena prostorne stope stanovništva a time je i tačan izraz nedostižan bez poznavanja načina kretanja organizama. Ako posmatramo neorganski svet, tamo se pojavljuje prostorna nehomogenost temperature. Tokovi toplote se kreću iz područja visoke temperature u područje niske temperature i pojavljuje se nehomogenost u koncentraciji materije. Materija teče od više do niže koncentracije difuzije. Iako prelazak populacije organizama predstavlja proces drugačiji od protoka toplote ili mase, treba iskoristiti tehnike neorganskog sveta kao temelj za matematiku prostornih promena u populaciji. Takvo razmišljanje se već počelo razvijati u teorijama slučajnog hoda organizama. Dalji razvoj su omogućili modeli širenja gena i epidemija. Istraživanja su pokazala da se u određenoj meri čak i ljudi mogu posmatrati kao skup neorganskih čestica i da se na njih mogu primeniti metode statističke fizike.

¹⁵ Alfred James Lotka (1880-1949), američki biolog

¹⁶ Vito Volterra (1860 – 1940), italijanski matematičar

U radu Skelama¹⁷ osnove teorije stohastičkih disperzija bioloških populacija su dobile svoj oblik. Skelamov model uključuje primenu analitičkih izraza molekularne difuzije direktno u ekološke probleme, što se odnosi na interakciju unutar i između vrsta. Njegova rasprava predstavlja jednu od klasičnih radova u biološkoj disperziji. Skelam smatra da se za proces biološke difuzije ne može reći da je čista stohastička. Često se kod životinja može videti da biraju posebni deo prostora za upotrebu. Životinje se često nalaze u grupama formirajući roj pčela, jata ptica, jata riba, stada goveda itd. Jedan od važnih osobina koja razlikuje kretanje životinja od slučajnog kretanja neorganskog materijala je ravnoteža između razmnožavanja i naseljenosti u staništu. Iako slučajna šetnja čini polaznu tačku, neće se na tome zadržati. Razmnožavanje vrste se kreće u smeru stvaranja prostorno-naseljenih modela organizama. Bakterije u vazduhu, gljivice i polen su bili nastavak istraživanja botaničara. Prenos vetra i atmosferska difuzija su smatrani procesima koji doprinose rezultatu difuzije spora. Moguće je odrediti broj spora difuzije.

Istraživanja u meteorologiji i mehanici fluida se odnose na atmosfersku difuziju. Kretanje organizama kao što su planktoni koji lebde u vodi kontrolisani su tokovima vode. Time se disperzija jezera ili okeana ne može zanemariti u razmatranju disperzije organizma. Čak i kada neorgansko okruženje okeana postane homogeno, gustina planktona postoji. Takva osobina planktona je predmet izučavanja bioloških okeanografa.

Eksperimentalna istraživanja disperzije životinja su se prvo razvila kod insekata, jer ih je lako dobiti u velikom broju. Uključeni su radovi Japanskog insektologa Ita¹⁸ koji je doprineo razvoju biološke difuzije uključujući sile između jedinki u disperzije zavisnih gustina. On je naglasio da model disperzije mora uzeti u obzir sile koje deluju između populacija jedinki i one se ne mogu ograničiti na slučajni hod.

Postoje dva aspekta pomoću kojih istražujemo kretanje populacije. Lagranžovo¹⁹ gledište uključuje obeležavanje svake jedinke. Dok Ojler²⁰ posmatra prolazak populacije jedinki pored posmatrane fiksirane tačke. Lagranžov protok čestica fluida je složeniji nego Ojlerov tok i može biti nemogući u nekim slučajevima. Lagranžovo posmatranje je pogodnije za proučavanje bioloških organizama. Izučavanje difuzije kod životinja se može primeniti na proučavanje ekologije, jer će se zasnivati na takvim eksperimentalnim istraživanjima. Za to su bili zaslužni Jensen²¹ i Sinif²² koji su izučavali kretanje životinja, o čemu će biti kasnije reč. [6]

¹⁷ John Gordon Skellam (1914-1979), engleski statističar i ekolog

¹⁸ Kiyosi Itô (1915 –2008), japanski insektolog i matematičar

¹⁹ Giuseppe Lodovico Lagrangia (1736-1813), italijanski matematičar

²⁰ Leonhard Euler (1707 -1783) , švajcarski matematičar

²¹ C. R.Jessen (1933-), američki biolog

3.2 Pojam matematičkog modela

Matematički pristup je neophodan ako kretanje u ekosistemima treba analizirati ili predvideti. Postupak je isti kao u područjima kao što je molekularna biologija i biofizika. Ako se posmatra difuzija primećujemo da iako molekularna difuzija izvršava Fikov zakon, difuzija u delu ekosistema poznata kao prirodno staniste nije pronašla čvrstu osnovu primene Fikovog zakona.

Kvantna mehanika je bila nejasna u svojim ranim fazama. Postojale su dve metode:

1. izgradnja modela koji se temelji na poređenju;
2. formulisanje i rešavanje hipoteze koja karakteriše pojam razmatranja i pruža vrlo koristan pristup ka izučavanju.

Sama činjenica da se matematički model podudara sa malom količinom podataka nije dovoljna, jer bi sličnost mogla biti slučajna. Modeli se ne smatraju zakonima, već samo hipotezama koje su ispitane puno puta. Praktični modeli se temelje na realnim pretpostavkama i na taj način uključuju međuođnose velikog broja promenljivih. U takvim slučajevima analitičko računanje postaje nemoguće i mora se oslanjati na rad računara. Što je više parametara uključeno, model postaje složeniji. Kako modeli postaju sve složeniji, to je sve teže statistički dokazati da oni zapravo ne opisuju stvarnost. Svaki put kada se novi parametar uvodi u model gubi se stepen slobode, dok je postojanje greške u statističkim testovima zanemarljivo. [6]

3.2.1 Deterministički i stohastički modeli

Matematički modeli mogu biti predstavljeni u determinističkoj ili stohastičkoj prirodi. Modeli edukativnog tipa su često determinističke prirode, a praktični modeli imaju tendenciju da se predstave stohastički. Gotovo svi biološki procesi su stohastički.

Na primer, stanovništvo je sklono eksponencijalnom rastu broja ljudi. Prema teoriji determinističkog modela, stopa rasta stanovništva je proporcionalna broju osoba u vremenu t : $\frac{\partial N}{\partial t}$

Ako λ označava koeficijent rasta populacije (tj. nataliteta), tada sledi:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \lambda N. \quad (3.1)$$

²² Donald B. Siniff (1936-), americki biolog

Rešavanjem (3.1) sa početnim stanjem $N = N_0$ i trenutkom $t = 0$ dobija se:

$$N = N_0 e^{\lambda t}. \quad (3.2)$$

Promena u populaciji je data sa jednačinom (3.2) i λ konstantom, za svaku vrednost se dobija isti deterministički rezultat. Međutim, proces rasta populacije nije uvek deterministički. U određenom trenutku rast se ne mora striktno odvijati po stopi λN , kao što je prikazano u eksperimentima. Dakle, mora se uzeti u obzir verovatnoća $p(N, t)$ da će u nekom trenutku t stanovništvo biti N . Prema Pielou²³ koja je značajno doprinela razvoju matematičke ekologije i matematičkog modeliranja prirodnih sistema postoji formula:

$$p(N, t) = \frac{(N - 1)!}{(N_0 - 1)! (N - N_0)! e^{-\lambda N_0 t} (1 - e^{-\lambda t})^{N - N_0}} \quad (3.3)$$

koja predstavlja verovatnoću da će se u malom vremenskom intervalu Δt roditi osoba. U tom smislu λ treba smatrati prosečnom stopom rasta. Prema (3.3), stanovništvo u određenom trenutku varira od eksperimenta do eksperimenta, iako su λ i N_0 ostale konstante.

Rešenje se može razmatrati po determinističkom i stohastičkom modelu. Budući da funkcija gustine daje verovatnoću datu izrazom (3.3), može se izračunati očekivana vrednost $\bar{N}$ (verovatnoća srednje vrednosti populacije) a to se podudara s determinističkom vrednosti:

$$\bar{N} = \sum_{N=0}^{\infty} N p(N, t) = N_0 e^{\lambda t}.$$

Deterministički način izražava prosečno stanje stohastičkog procesa, što je tačno u slučaju eksponencijalnog rasta, ali nije tačno uvek. Da bi se dobila srednja vrednost stanja koja predstavlja stvarne eksperimentalne rezultate treba izračunati standardnu devijaciju od N oko svoje prosečne vrednosti:

$$\sigma = \sqrt{e^{\lambda t} - 1} \sqrt{\bar{N}} = \sqrt{N_0} e^{\lambda t} \sqrt{(1 - e^{-\lambda t})}.$$

Postavljajući proporciju standardne devijacije sa prosečnom vrednošću dobija se:

$$\frac{\sigma}{\bar{N}} = \frac{\sqrt{(1 - e^{-\lambda t})}}{\sqrt{N_0}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N_0}} \quad \text{kada } t \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

²³ Evelyn Chrystalla Pielou (1924-), engleska biologičarka

To je relativna greška determinističke metode koja obrnuto proporcionalna sa $\sqrt{N_0}$ nakon dovoljno vremena. Što je veća početna populacija, bolji je odnos između eksperimentalnih vrednosti (koje nisu nužno jednake prosečnoj vrednosti) i vrednosti dobijene iz determinističke metode. Ovaj rezultat se ne odnosi samo na jednostavan eksponencijalni rast, već važi u opštem slučaju.

Međutim, postoje slučajevi u kojima je velika razlika između ove dve metode. Ako se procesi rođenja i smrti javljaju istovremeno, stopa nataliteta je λ a stopa smrtnosti μ . Prema determinističkoj teoriji važi: $N = N_0 e^{\lambda t - \mu t}$, tako da se uvek poveća populacija.

Sa druge strane, prema teoriji stohastičnosti, postoji mogućnost da stanovništvo izumre. Verovatnoća izumiranja nakon dovoljno dugo vremena data je izrazom: $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{N_0}$.

Budući da je $\lambda > \mu$, za dovoljno veliko N_0 dobija se vrlo mala verovatnoća, ali ona nije nula. Postojanje mogućnosti izumiranja se ne može ni na koji način dobiti iz determinističke teorije. Ovde se pojavljuje osnovna razlika između dve metode. U nekim slučajevima deterministička metoda mora biti odbačena. Stohastička metoda je znatno manje tolerantna.

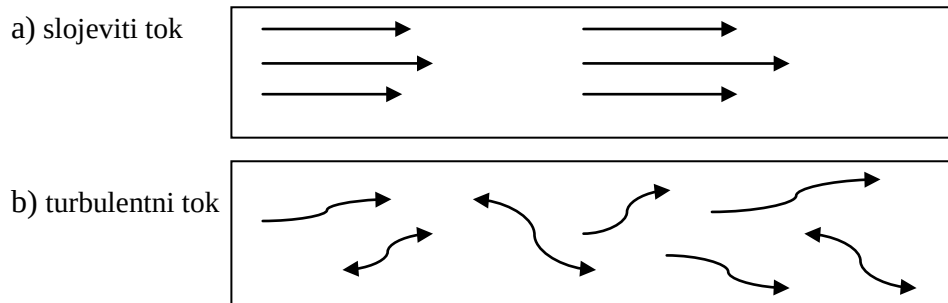
Difuzija je dakle stohastički proces u kome se posmatra verovatnoća funkcije gustine $p(S, x, t)$, za pronalaženje gustine naseljenosti S u vremenu t , i mestu x . Međutim, procena ove funkcije za difuziju ekosistema je izuzetno složena. U suštini to podrazumeva deterministički pristup. Na žalost, susrećemo mnogo slučajeva u kojima gustina populacije jedinki nije dovoljno velika da se potvrdi upotreba determinističke metode. U posmatranju determinističkog modela stanovništva, pretpostavka je da je rast populacije stalan proces i da postoji preklapanje generacija. Za mnoge vrste, kao što su insekti, rast populacije se odvija u diskretnim vremenskim intervalima pa se ne posmatraju preklapanja generacija. Odgovarajući matematički opis za ovaj proces rasta je nelinearna diferencijalna jednačina. Takve nelinearne jednačine pokazuju dinamičko ponašanje kao što su slučajne haotične fluktacije. Dinamičke fluktacije sistema se u mnogim aspektima razlikuju od uzorka slučajnog procesa. Ova dinamička struktura nelinearnih diferencijalnih jednačina je postala predmet posmatranja u matematici i ekologiji. [6]

3.3 Teorija difuzije u prirodnim sredinama

Difuzija se može posmatrati kao tendencija da se grupa čestica koncentrisana u jednoj tački širi u prostoru i vremenu. Zauzimajući sve veće područje oko početne tačke. Pojam čestice se ne odnosi samo na fizičke čestice već i na biološku populaciju jedinki. Termin prostora se odnosi kako na običan Euklidski prostor, tako i na apstraktni prostor kao što je ekološka sredina. Međutim, tako definisana difuzija može dovesti do konfuzije. Na primer, u slučaju čestica puštenih istovremeno iz aviona, tako da svaka leti svojom brzinom i u svom smeru. Čestice će se širiti iz početne tačke i zauzimati sve veće područje, međutim takav se proces ne zove difuzija.

Difuzija je fenomen kojim se grupa čestica u celini širi nepravilnim kretanjem svake čestice. Pomak (kada su mikroskopski nepravilna kretanja čestica) dovodi do pravilnosti kretanja ukupne grupe čestica čineći fenomen difuzije. Razmatranje nepravilnog kretanja jedne čestice takođe dovodi do koncepta difuzije. Iz ovog modela sledi pojam slučajnosti.

Slika 3.1 Tok fluida:



Kada fluid teče po nekom redu i poretku, njegov tok je **slojevit** (Slika 3.1a)). Kada je tok fluida nepravilan, protok se naziva **turbulentnim** (Slika 3.1b)). Tokovi u atmosferi i u okeanima su uglavnom turbulentnog karaktera.

Turbulencije se posmatraju kao slučajni pokreti jer se sastoje od puno (malih i velikih) virova koji se kreću na način koji je prostorno i vremenski komplikovan. Kretanje male čestice smeštene u tečnost je pod uticajem turbulencije i zbog toga je slučajano. Kada pokret sadrži slučajnost, on je praćen difuzijom. Razlikujemo turbulentnu i molekularnu difuziju koja je povezana sa slučajnim pokretima molekula koji emituju toplotu. Prosečno vreme pokreta molekula je 10^{-10} sekundi u vazduhu i 10^{-12} sekundi u vodi. Molekularna difuzija ispunjava Fikov zakon, ali i pored toga turbulentna difuzija je efikasnija od molekularne difuzije. Difuzija ekoloških sistema je zasebna vrsta difuzije. Zbog slučajnog kretanja samih organizama javlja se kao dopuna turbulentne difuzije i naziva se **biodifuzijom**.

Pored opisanog fenomena difuzije čestica, u stvarnosti postoje i drugi procesi koji utiču na čestice. Na primer, u slučaju vertikalne raspodele polena u atmosferi osim atmosferske turbulentne difuzije, mora se uzeti u obzir i efekat taloženja čestica na osnovu sopstvene težine. Na taj način difuzija je pod uticajem zemljine gravitacije. Postojanje sila koje deluju na pojedine organizme je važan aspekt biodifuzije. Takve sile uključuju uticaj prirodne sredine na jedinke, privlačnost ili odbijanje između jedinki, pritisak populacije i sile unutar polja koje određuju ponašanje čestica. U principu, sila se može rastaviti na slučajne i neslučajne komponente. Slučajne sile se odnose na slučajna kretanja jedinki i mogu biti uključene u proces difuzije. [6]

3.3.1 Fizička difuzija

U fizici i hemiji postoje mehanizmi prenosa neke fizičke veličine sa jednog mesta na drugo. Osnovni mehanizmi prenosa su:

- **provođenje** (difuzija),
- **prenošenje** (konvekcija)
- **zračenje** (radijacija).

Osnovne veličine koje se posmatraju u procesima prenosa su: prenos toplote, prenos mase i prenos količine kretanja.

Difuzija je spontani transport materije ili energije pod uticajem odgovarajućeg gradijenta iz zone više u zonu niže energije ili koncentracije. Kao i ostali spontani procesi, difuzija je proces u kome se energija ili materija raspoređuje u raspoloživom prostoru. Svaki proces difuzije se odvija pod uticajem odgovarajućeg gradijenta. Tako se difuzija materije odvija pod uticajem gradijenta koncentracije, dok se difuzija toplote dešava pod uticajem gradijenta temperature. Difuzija je direktna posledica drugog principa termodinamike koji govori da entropija nekog neravnotežnog sistema može samo da raste sve dok sistem ne dođe u ravnotežu. Entropija je težnja sistema da spontano pređe u stanje veće neuređenosti, dakle, entropija je merilo neuređenosti sistema. S obzirom da se materija kreće iz oblasti veće koncentracije u oblast manje koncentracije, sistem prelazi iz uređenog u manje uređeni sistem pa entropija raste. Najveća uređenost sistema je temperatura apsolutna nula. Pošto ona ne može da se postigne, uzima se da entropija asimptotski teži nuli kada temperatura sistema prilazi apsolutnoj nuli. Difuzija se opisuje Fikovim zakonima.

Prvi Fikov zakon ukazuje na to da je fluks Φ proporcionalan gradijentu koncentracije:

$$\Phi = -D \frac{\partial c}{\partial x}.$$

Drugi Fikov zakon se izvodi iz jednačine kontinuiteta. U jednodimenzionalnom sistemu:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Kada postoji gradijent temperature, doći će do transporta energije:

$$\Delta Q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta S \Delta t$$

gde je λ koeficijent toplotne provodljivosti. Toplota se prenosi u pravcu opadanja temperature.

Prenošenje toplote

Prema drugom principu termodinamike toplota prelazi spontano sa tela više temperature na telo niže temperature. Prenošenje toplote može se vršiti: provođenjem, konvekcijom i zračenjem.

Provođenje toplote

Provođenje toplote se odvija među telima bez njihovog kretanja. Ako se uzme primer metalnog štapa, poznato je da ako se jedan kraj štapa zagreje toplota će se preneti i na ostale delove štapa. Ovakav način prenošenja toplote objašnjava se kinetičkom teorijom. Kinetička energija molekula se prenosi sa molekula na molekul, pa se na taj način javlja protok toplote kroz telo. Kod metala ulogu prenosioca toplote imaju elektroni. Ako se deo bilo kog materijala zagreva na jednom mestu, tada sledi zagrevanje i ostalih delova tog materijala. Toplota se kod metala prenosi provođenjem, putem slobodnih elektrona tj. atoma koji prenose svoje vibracije susednim atomima. Ustanovljeno je da su metali najbolji provodnici toplote.

Ako je na jednoj strani metalne ploče debljine d i površine S temperatura T_2 , a na drugoj T_1 , pri čemu je $T_2 > T_1$, tada će stalno proticati neka količina toplote sa toplije strane na hladniju stranu. Ovakvo stanje se naziva stacionarno stanje. Eksperimentalno je dokazano da je količina toplote koja prođe kroz tu ploču u određenom vremenskom intervalu srazmerna površini te ploče S ,

temperaturnoj razlici $T_2 - T_1$ i koeficijentu toplotne provodljivosti koji zavisi od vrste materijala λ . Dok je obrnuto srazmerna debljini ploče d .

Neka je Q količina toplote koja proteče za neko vreme, onda je protok toplote u jedinici vremena:

$$q = \frac{Q}{\tau} = \frac{\lambda(T_2 - T_1)S}{d} = \frac{(T_2 - T_1)S}{\frac{d}{\lambda}}$$

gde je q protok toplote, a λ koeficijent toplotne provodljivosti.

Ako je izolator sastavljen od dva različita materijala debljina d_1 i d_2 sa koeficijentom toplotne provodljivosti λ . Tako da su materijali naslonjeni jedan na drugi. Neka je T_1 temperatura jedne strane, T_2 temperatura druge strane, a T_0 temperature na zajedničkoj (dodirnoj) površini. Tada će protok toplote kroz površinu S biti:

$$q = \frac{Q}{\tau} = \frac{(T_2 - T_1) S}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}} .$$

Odatle sledi formula za protok toplote kroz zid sastavljen iz n slojeva

$$q = \frac{Q}{\tau} = \frac{(T_2 - T_1) S}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i}} .$$

Konvekcija

Konvekcija podrazumeva prenos toplote putem strujanja (kretanja) nekog fluida. Strujanjem se prenose molekuli sa mesta na mesto, a sa njima i njihova kinetička energija, tj. toplota. Za primer se može uzeti fen.

Konvekcija je prenos toplote koja se vrši na osnovu zakona kretanja fluida. Obično se za ovakav način prenošenja toplote koriste prirodna strujanja fluida koja se javljaju usled gravitacije ili drugih uzroka. Ove konvekcije pokazuje primer centralnog grejanja. Topla voda sa manjom specifičnom težinom ide naviše cevovodom do radijatora i tu odaje toplotu. Rashlađena voda sa većom specifičnom težinom ide cevovodom naniže pod uticajem gravitacije i ulazi u donji deo

kotla. Tako voda cirkulišući od radijatora prenosi toplotu po celom objektu. U samoj prostoriji toplota se odvodi od radijatora takođe putem konvekcije vazduha. Vazduh koji zagreje radijator ima manju specifičnu težinu, pa ide naviše, dok hladan vazduh odlazi na dole. Na taj način se obrazuje prirodno strujanje vazduha pomoću koga se toplota od radijatora raspoređuje po prostoriji.

Vetrovi u atmosferi su takođe vrsta konvekcije kojom se topao vazduh prenosi sa jednog dela Zemljine površine na drugi. Golfska struja toplotu sa Ekvatora prenosi na velike daljine pomoću površinskog strujanja morske vode, dok se hladna voda kreće po dnu okeana u suprotnom smeru.

Toplotno zračenje

Zračenje je način prenošenja toplote posredstvom elektromagnetnih talasa. Toplota prvo prelazi u energiju zračenja koja se prenosi brzinom svetlosti do tela u kome se ona apsorbira i ponovo prelazi u toplotnu energiju. Najrasprostranjenije zračenje predstavlja zračenje Sunca.

Od ranije je poznato da sva tela, na svim temperaturama emituju zračenje koje će se najčešće naziva toplotno zračenje. Ono zavisi od temperature i od osobina samog predmeta.

Toplotno zračenje je elektromagnetno zračenje emitovano sa površine tela. Poznato je da naelektrisanje čestice koje se kreću ubrzano emituju elektromagnetno zračenje. S obzirom da su sva tela sastavljena od naelektrisanih čestica, sva tela emituju elektromagnetno zračenje. Na većim temperaturama kretanje naelektrisanih čestica je intenzivnije, pa je veća i emitovana toplotna snaga. Toplotno zračenje se generiše kada se energija pokretnih naelektrisanih čestica u okviru atoma transformiše u elektromagnetno zračenje. Emitovanjem i apsorbovanjem toplotnog zračenja se vrši razmena toplote između dva tela. Ljudi takođe emituju zračenje u infracrvenom delu spektra. Toplotno zračenje je sinonim za infracrveno zračenje koje zrače objekti na temperaturama koji se često sreću na Zemlji. Toplotno zračenje se ne odnosi samo na zračenje, već i na proces u kome neka površina zrači svoju toplotnu energiju u vidu zračenja crnog tela. Infracrveno ili crveno zračenje iz običnog radijatora ili električnog grejača su primer toplotnog zračenja. Kao i toplota koju emituje obična užarena sijalica.

Na primeru žice u grejaču, na početku zagrevanja kada su temperature niske, toplotno zračenje je nevidljivo tj. nalazi se u infracrvenoj oblasti elektromagnetnog spektra. Sa porastom temperature, žica postaje crvena, a na dovoljno visokim temperaturama emituju se sve boje iz spektra pa žica postaje bela. Čak i toplotno zračenje niske frekvencije može izazvati toplotnu jonizaciju kad god skladišti dovoljno toplotne energije da podigne temperaturu na dovoljno visok nivo. Uobičajeni primeri za to su jonizacija koja se vidi u običnom plamenu, kao i molekularne

promene koje izazivaju „zatamnjenje“ tokom pečenja hrane što je hemijski proces koji počinje sa velikim količinom jonizacije.

Sva tela koja se zagrevaju prolaze kroz iste faze, ali kvantitativno određivanje datog zračenja je otežano zbog različitih osobina tela. Bilo je potrebno pronaći neko telo čije će zračenje moći da bude opisano samo pomoću veličine za toplotu, a to je temperatura. Samo na taj način je bilo moguće formulisati zakon zračenja koji će biti primenljiv na sva tela, bez obzira na materijal, strukturu i površinu. Usvojeno je da se posmatra zračenje tzv. **apsolutno crnog tela**. Apsolutno crno telo je telo koje potpuno apsorbira zračenje svih talasnih dužina. Takvo telo ne postoji u prirodi, ali može se dobro zameniti kutijom sa hrapavim zidovima i malim otvorom. Kada se zračenje pusti u takvu kutiju, dolazi do višestruke refleksije i zračenje biva uhvaćeno unutar kutije. Crno telo je predmet koji emituje na bilo kojoj temperaturi maksimalnu moguću količinu zračenja na bilo kojoj talasnoj dužini. Ono će takođe apsorbovati maksimalno moguće zračenje na bilo kojoj talasnoj dužini. Telo sa temperaturom oko ili ispod sobne temperature će izgledati apsolutno crno, jer neće odbijati nikakvu upadnu svetlost, niti će emitovati dovoljno zračenja na vidljivim talasnim dužinama da bi ljudske oči to primetile. Osobine slične osobinama apsolutno crnog tela imaju čađ, crna hartija i crni somot.

Plankov²⁴ zakon opisuje intenzitet zračenja nepolarizovanog elektromagnetskog zračenja, kojeg emituje idealno crno telo, zavisno od termodinamičke temperature T :

$$I(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} . \quad (3.5)$$

Gde su:

- I intenzitet zračenja;
- ν frekvencija [Hz];
- λ talasna dužina, podrazumeva najmanju udaljenost između dve tačke istog pokreta jednog talasa. Talasna dužina odgovara razmaku između dva brega ili dve doline. Talasi se periodično ponavljaju. Važi formula:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad [m]$$

pri čemu je c brzina prostiranja i f frekvencija talasa.

- T temperatura idealnog crnog tela [K];
- h Plankova konstanta, $h=6.6260693 \cdot 10^{-34}$ [Js];

²⁴ Max Ernst Ludwig Planck (1858-1947), nemački fizičar

- c brzina svetlosti u vakuumu [m/s];
- k Bolcmanova konstanta, $k = 1.38065 \cdot 10^{-23}$ [J/K].

Funkcija data formulom (3.5) predstavlja snagu emitovanog zračenja idealnog crnog tela. Plankova raspodela intenziteta zračenja je jedinstvena raspodela, koja može postojati u termodinamičkom ravnotežnom stanju. Budući da idealno crno telo upija sve talasne dužine, ono takođe emituje sve talasne dužine bez gubitaka, zavisno samo o termodinamičkoj temperaturi tog tela.

Plankov zakon važi ako se zračenje posmatra normalno na šupljinu idealnog crnog tela. Ako se promatra pod bilo kojim drugim uglom, onda je intenzitet zračenja dat formulom:

$$I(\nu, \theta) \cos(\theta)$$

gdje je ugao θ između normale i pravca posmatranja. [8]

3.3.2 Difuzija atmosferskog graničnog sloja

Atmosferska regija se proteže od visine terena 10 metara do 100 metara iznad Zemljine površine i poznata je kao atmosferski površinski granični sloj. U atmosferi se prosečna brzina vetra povećava sa visinom. Mnogi organizmi nastanjuju delove ovog graničnog sloja kada je atmosfera u stanju neutralne stabilnosti. Temperatura Zemljine atmosfere se menja sa visinom. Između različitih atmosferskih slojeva menja se matematički odnos temperature i visine. Ispod visine od 100 km Zemljina atmosfera ima uglavnom jednoličan sastav (osim vodene pare). Iznad 100 km Zemljina atmosfera počinje imati sastav koji se menja sa visinom. To je bitno jer u odsustvu mešanja, gustina gasa pada eksponencijalno sa porastom visine ali po stopi koja zavisi od molekulske mase. Stoga čestice veće mase (kiseonik i azot) padaju brže nego lakše čestice (helijum, vodonik). Precizna visina slojeva od kojih je sastavljena atmosfera menja se značajno s temperaturom.

Svi slojevi Zemljine atmosfere imaju značajan uticaj na prostiranje elektromagnetnih talasa, pa zato od njihovih fizičkih svojstava zavisi kvalitet prijema. Zemljina atmosfera se može podeliti na tri osnovna sloja:

- **troposfera;**
- **stratosfera;**

- **jonosfera.**

Troposfera je sloj atmosfere uz Zemljinu površinu koja se proteže do oko 8-11 km nadmorske visine. U troposferi nastaju gotovo sve meteorološke pojave i ona sadrži oko 75% ukupne materije atmosferskog omotača. Uslovi u troposferi (pritisak, temperatura, vlažnost vazduha) utiču na svojstva emitovanja elektromagnetnih talasa. Područje troposfere najvažnije je za širenje ultra-kratkih talasa.

Stratosferski sloj proteže se na visinama od 11-80 km i to je sloj bez uobičajenih meteoroloških pojava. Za stratosferu je bitno da uopšte ne sadrži vodenu paru.

Za prostiranje elektromagnetnih talasa najznačajnija je **jonosfera** koja po svojim fizičkim svojstvima nije homogena. Utvrđeno je da pojedini delovi imaju različite osobine, odnosno da postoje slojevi koji nejednako utiču na prostiranje elektromagnetnih talasa. Jonosfera se prostire iznad 80-ak km Zemljine površine do 1000 km. Jonosfera je spoljašnji sloj atmosfere sačinjen od gasovite plazme koji zbog prisutnih jonizacija uzrokovanim Sunčevim i kosmičkim zračenjem sadrži veliki broj jona i slobodnih elektrona, pa je to vidljiv sloj atmosfere. Jonosfera ima svojstvo da reflektuje elektromagnetne talase određenih frekvencijskih područja. [6]

Izvori disperzije

Postoje dva izvora disperzije svetlosti:

- 1) materijalna disperzija
- 2) disperzija u talasnim česticama.

Materijalna disperzija je zavisna od talasne dužine nekog materijala na svetlosne talase. Ta materijalna disperzija može biti neželjan efekat u optičkim uređajima. Disperzija svetla u staklenim prizmama može biti korišćena u spektrometrima²⁵. Međutim, disperzija svetlosti u fotografskim objektivima i sočivima uzrokuje hromatsku aberaciju. Hromatska aberacija je optička mana zbog koje se svetlosni zraci različite talasne dužine fokusiraju na različitim tačkama duž optičke ose sočiva. Razlog tome je različiti indeks prelamanja za različite talasne dužine. Fazna brzina talasa, v računa se izrazom:

$$v = \frac{c}{n}$$

²⁵ Za posmatranje i analizu spektra upotrebljava se uređaj koji se zove *spektroskop*. Ako spektroskop ima dodatni deo pomoću koga se određuje talasna dužina pojedinih linija, onda se zove *spektrometar*.

gde je c brzina svetlosti u vakuumu, a n indeks prelamanja.

Prilikom razlaganja bele svetlosti kroz prizmu, ugao prelamanja svetla u prizmi je zavisen od indeksa prelamanja materijala od kojeg je sačinjena prizma. Pošto indeks prelamanja zavisi od talasne dužine svetlosti, sledi da će ugao pod kojim je svetlost prelomljena varirati zajedno sa talasnom dužinom, što stvara ugaonu disperziju. Za vidljivu svetlost, indeks prelamanja opada sa povećanjem talasne dužine. U ovakvom slučaju se kaže da u raspodeli postoji normalna disperzija. Ukoliko se indeks prelamanja povećava povećavanjem talasne dužine (što je slučaj sa x -zracima), postojaće nepravilna disperzija.

Disperzija u talasinim česticama se najčešće javlja u optičkim vlaknima. Disperzija u ovim vlaknima je jedan od limitirajućih faktora koji određuju kolika se količina podataka može preneti jednim vlaknom.

Disperzija se javlja i u ostalim uslovima. Tako se disperzija javlja i u međuzvezdanim prostorima. Astronomi veruju da se impulsi emituju istovremeno u velikom pojasu talasnih dužina. Gledano sa Zemlje, komponente svakog pulsa emitovane na višim talasnim dužinama dolaze pre onih sa nižim talasnim dužinama. Disperzija se javlja zbog jonizovane komponente međusazvežđa, zbog koga grupna brzina postaje zavisna od talasne dužine. [6]

3.3.3 Okeanografska i hidrološka difuzija

Čovečenstvu je potrebno sve više energije, budući da potrošnja energije znatno raste. Jedan od obnovljivih izvora energije je svakako energija okeana. Okeani pokrivaju više od 70% Zemljine površine te time predstavljaju vrlo bitan izvor energije koji bi u budućnosti mogao davati energiju kako domaćinstvima, tako i industrijskim postrojenjima. Postoje tri osnovna tipa koja se koriste u iskorišćavanju energije okeana. Može se koristiti energija talasa, okeanska energija plime i oseke, kao i temperaturna razlika vode kako bi se dobila energija.

Energija talasa je oblik kinetičke energije koja postoji u kretanju talasa u okeanu, a njihovo kretanje uzrokuje duvanje vetrova po površini okeana. Ta energija može biti iskorišćena da pokrene turbine, te postoji dosta mesta gde su vetrovi dovoljno snažni da proizvedu stalno kretanje talasa. Ogromne količine energije kriju se u energiji talasa, pa joj to daje ogromni energetski potencijal. Talasi nastaju usled interakcije vetra i vodene površine. Sve dok se talasi prostiru sporije od brzine vetra, vetar predaje energiju talasu. Na visinu i snagu talasa utiču mnogi faktori. Najvažniji su: brzina, vremensko trajanje vetra, površina koju vetar zahvata i dubina vode. Oscilatorno kretanje talasa je najveće na površini vode i eksponencijalno se smanjuje sa povećanjem dubine. Energija talasa zavisi od visine talasa, ali utiču i drugi faktori

kao što su talasna dužina i gustina vode. U dubokoj vodi, gde je dubina vode veća od polovine talasne dužine, energija talasa se izračunava po formuli:

$$P = \frac{pg^2}{64\pi} H^2 T;$$

P – snaga talasa po jedinici dužine [W/m];

p – gustina vode $p = 1025 \text{ kg}/m^3$;

g – zemljino ubrzanje; $g = 9,81 \text{ m}/s^2$;

π – konstanta $\pi \approx 3.1415926$;

H – visina talasa [m];

T – vremenski period talasa [s].

Drugi tip energije okeana je energija plime i oseke. Energija plime i oseke je ustvari forma hidroenergije koja iskorišćava kretanja vode, a koja se događa zbog spuštanja i dizanja u nivou mora. Energija plime i oseke se stvara zahvaljujući generatorima koji su ustvari velike podvodne turbine, dizajnirane tako da uhvate kinetičko kretanje kako bi se stvorila električna energija. Energija plime i oseke ima potencijal za buduće energetske projekte, najviše zbog ogromnih površina svetskih okeana.

Razređivanje ili širenje talasa podrazumeva smanjenje gustine, suprotno od kompresije ili skupljanja talasa. Kod kompresije su sile usmerene u samo jednom pravcu. Kompresije mogu putovati u talasima, tako da one deluju u pravcu smanjenja dužine objekta. Razređenost talasa je područje niskog relativnog pritiska nakon udara talasa. Razređenost talasa se širi tokom vremena. U većini fluida razređenost talasa zadrži isti oblik u svakom trenutku kroz pokret talasa. Svaki deo talasa putuje svojom brzinom.

Profesor Atangana²⁶ je opisao probleme toka podzemne vode pomoću koncepta frakcionog derivata. Problem podzemnih voda je možda jedan od najtežih stvarnih problema koji se rešavaju matematički. Da bi se precizno modelirao ovaj problem mora se znati ponašanje medija kroz koji se voda kreće. Međutim, ovaj medij kroz koji se javlja može promeniti tok od jedne do druge tačke. Atangana je ispitaivao rešenje jednačine toka podzemne vode preko Frobenijusovih metoda. Rezultati dobijeni iz njegovih radova su se pokazali kao dobri. On je dalje proširio jednačine podzemne vode na frakcijsko-varijacioni koncept podzemnih voda. Do tada, nije postojao približan analitički izraz koji se može koristiti za opisivanje rešenja frakcijske jednačine toka podzemne vode. Test pumpanja se izvodi za procenu pumpe na "stimulisanje" kroz stalno pumpanje, a zatim se posmatra "odgovor" pumpe na povlačenje vode u bunaru. U složenijim slučajevima, numeričko modeliranje se može koristiti za analizu rezultata testa pumpe i osigurava precizne rezultate.

²⁶ Abdon Atangana, University of the Free State, Južna Afrika (1985-)

Frakciona difuzija talasne jednačine (fractional diffusion wave equation: FDWE) je nedavno generalizovana difuzijom i talasnom jednačinom posmatrajući vreme i prostor frakcionih derivata. Jednačina je u osnovi slučajan hod i Braunovo kretanje. Pre svega je važna u matematičkoj fizici, finansijama, računarskoj biologiji i akustici. Za FDWE je utvrđeno da odražava anomaliju zakona rasturanja. Nedostaci procesa difuzije u složenim medijima se mogu zanemariti koristeći frakcioni model difuzije jednačine. Interpretiraće se FDWE za nove podatke o vremenu i prostoru talasne jednačine koja frekvencijski zavisi od rasipanja. Što ukazuje da je difuzija suprotan proces od zakona rasipanja frekvencije u stvarnom svetu. Standardni matematički pristupi su fizički teški za izvođenje jednačine difuzije iz talasne jednačine.

Frakciona difuzionna talasna jednačina je oblika:

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} = -\kappa(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u; \quad 0 < \alpha, \beta \leq 2 \quad (3.6)$$

gde je Δ operator Laplasijana; κ označava konstantu; α i β su proizvoljni realni brojevi.

- Za $\alpha = \beta = 2$, jednačina (3.6) je *normalna talasna jednačina* oblika:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \kappa \Delta u .$$

- Za $\alpha = 2$, $\beta = 1$ jednačina (3.6) je *normalna difuzionna jednačina* oblika:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u .$$

Za necelobrojne α i β , jednačinu predstavljaju frakciono vreme derivata i frakcioni Laplasijan. [6], [7]

3.4 Difuzija u ekosistemu

Razmotrićemo aspekt pasivne difuzija u prirodnom okruženju. Pasivna difuzija obuhvata abiotičke objekte koji nisu u stanju da obavljaju slučajne pokreta bez pomoći prirodne turbulencije. Aktivna difuzija je definisana kao difuzija objekata, uglavnom životinja, koje vrše kretanje samostalno. Takođe, kada se transport odvija sa energijom iz organizma disperzija je aktivna, a kada se snabdeva od energije izvan tela disperzija se zove pasivna. Manji organizam je više podložan uticaju turbulencije staništa. Zbog toga difuziju malih životinja treba razmotriti i pasivnim i aktivnim delom. Na primer, bakterije i polen u vazduhu i fitoplanktoni u vodi se kreću pasivno. Insekti lete i menjaju sredinu i pasivno i aktivno u neravnomernim proporcijama. Teorija turbulentne difuzije se odnosi na organizme koji su difuzno pasivni. U zavisnosti od veličine organizama, kratke distance kretanja u staništu neće biti od značaja. Pad ili rast lebdećeg organizma se odvija kada se gustina organizma značajno razlikuje od gustine sredine u kojoj lebdi.

Ako posmatramo odgovore u ponašanja malih organizama, uključujući fototaksije i geotaksije, možemo dobiti disperzije koji su na neki način usmerene. Fototaksija je vrsta putujućeg pokreta, koji se javlja kada se čitav organizam kreće prema ili od izvora svetlosti. To je prednost za fototropične organizme jer se mogu sami najefikasnije orijentisati da prime svetlost za fotosintezu. Fototaksija je pozitivna ako je pokret u pravcu povećanog intenziteta svetlosti, a negativna ako je pravac suprotan. Geotaksija daje reakciju na kretanje pod uticajem gravitacije. Primer je leteći insekt koji je u mogućnosti da leti gore ili dole.

Međutim, disperzije turbulentnih fluida su istovremeno i usmerene i slučajne:

- 1) usmerene u smeru kretanja fluida;
- 2) slučajne ili haotične – u virovima povezanim sa turbulencijom. [6]

3.4.1 Brzina taloženja

U antici su ljudi verovali da vetrovi raznose bolesti kod čoveka, životinja i poljoprivrednih kultura. Ovaj koncept uzima svoj moderni oblik u smislu problema difuzije i transporta malog broja organizama u vazduhu. Ovi mikrobi su spore, kao što su endospore bakterija, gljiva, paprati, polen cvetnica, semena i plodovi biljaka.

Spora je posebna tvorevina koju grade pojedini organizmi kako bi preživeli nepovoljne životne uslove kao što su: manjak hrane ili vode, previsoka ili preniska temperatura.

Spore imaju bakterije, alge, gljive, praživotinje i necvetajuće biljke poput paprati. Spore se javljaju prvenstveno kod jednoćelijskih organizama. Okružene su debelim omotačem, što im omogućava da prežive dugo vremena. Kada nastupe povoljni uslovi, iz spora se razvije organizam. Bakterijske spore su vrlo otporne.

Za rešavanje pod uticajem gravitacije, spore se kreću pasivnom difuzijom u atmosferi.

Proces disperzije spora ima četiri glavna stanja:

- 1) oslobođenje spore;
- 2) disperzija u vazduhu ili u vodi;
- 3) taloženje;
- 4) klijanje.

Razmatra se prvenstveno druga faza tj. disperzija u vazduhu.

Faze 1) i 3) su važne da bi se našli početni i granični uslovi.

Disperzija spora se može sastojati od jedne ili više ćelija. Njihova specifična težina je malo teža od vode. Veličina spora varira. Gljive i polen su najmanje, potom slede bakterije. Semenke i plodovi, poznate kao dijaspore su znatno veće. Spore su teže od vazduha, one imaju tendenciju da padaju u mirnom vazduhu.

Prema Stoksovom zakonu mala sfera radijusa a se kreće brzinom v u viskoznom fluidu sa viskoznošću η . Sila otpora je data izrazom:

$$F = 6\pi\eta av.$$

Kada je sila otpora u vodi, težina sfere opada sa konstantnim brzinom.

Pod pretpostavkom da postoji ravnotežna sila, dobija se:

$$6\pi\eta av = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_1 g - \frac{4}{3} \pi a^3 \rho g = \frac{4}{3} \pi a^3 (\rho_1 - \rho) g$$

tj.

$$\text{otpor} = \text{apsolutna težina} - \text{sila potiska}$$

gde je ρ_1 gustine sfere, ρ gustina fluida, a g je ubrzanje gravitacije.

Brzina taloženja čestica v_s je:

$$v_s = \frac{2(\rho_1 - \rho)ga^2}{9\eta}$$

Budući da je gustine spore oko $1 \frac{g}{cm^3}$ a vazduha je oko $10^{-3} \frac{g}{cm^3}$ uticaj potiska sile se može zanemariti za spore koje padaju u atmosferi. Ovo nije tačno za spore u vodi jer je tamo $\rho_1 = \rho$. Spore mogu polako pasti u vodu ili čak plutati po površini.

Stoksov zakon važi za spore poluprečnika a od 1 do $100 \mu m$ koje padaju u atmosferi, za koje je izračunata brzina taloženja od 0.01 do $100 \frac{cm}{s}$.

U vodi, Stoksov zakon obuhvata mikrobe poluprečnika a od 1 do $250 \mu m$, za koje je brzina taloženja od 10^{-6} do $0.1 \frac{cm}{s}$. Stoksov zakon se ne primjenjuje u uslovima inercije zbog turbulencije. Inercija je jedno od osnovnih osobina svih čestica koje imaju masu, tj. masa je mera inercije tela. Ta se osobina manifestuje kao suprotstavljanje tela promeni stanja kretanja. To znači da bi se telu promenio intenzitet brzine ili smer brzine na to telo mora delovati sila. Možemo proceniti v_s pre početka turbulencije koristeći sledeći odnos:

$$v_s = \frac{2 K_I a_0^3 \sqrt{\left(\frac{\rho_1 - \rho}{\rho}\right)^2}}{v^{\frac{1}{3}}}$$

gde je K_I dimenzionalna konstanta, a a_0 je relativni radijus dat sa: $a_0 = a - \xi A$.

ξ je konstanta (iznosi 0,4 za sfere), a A je najveći radijus koji zadovoljava Stoksov zakon. Odnos između oblika čestica i njihovih brzina taloženja je bila područje velikog interesovanja. Izvedena je jednačina za brzinu taloženja elipsoidnih i cilindričnih čestica u vodi. Te brzine su niže od onih koje je predviđao Stoksov zakon. Razlog tome su samo neposredno izmerene gustine taloga čestica. [6]

3.4.2. Difuzioni model spora

Utvrđeno je da nema značajne razlike u oceni potapanja embriona u bilo koje vreme tokom embrionalnog razvoja. Ovaj rezultat ukazuje na to da dok voda povećava gustinu na većim dubinama, gustina embriona se takođe povećava čime se održava ista razlika u gustini. Ovi podaci su korišćeni za analizu pokreta i ispitivanje efekata saliniteta na rast jaja jedinki.

Utvrđeno je da su najviše pokretljivi embrioni u srednjim nivoima salinitetima, dok su nešto manje zastupljeni pokreti u kasnijim fazama embrionalnog razvoja.

Kada je koncentracija čestica veća od kritične vrednosti, nastaje novi fenomen grupe čestica koja se nastani kao celina formirajući vertikalni sloj.

Ispitivanjem taloženja dve pomešane komponente čvrstih čestica zapaženo je da kada je ukupna koncentracija lebdećih delića u nekoj sredini manja od 10%, komponente će se nastaniti sa manjom stopom. Dok sa koncentracijom većim od 10%, relativno kretanje između čestica dovodi do nestabilnosti. U tom kontekstu, opisani su delovi vertikalnih lebdećih pokreta dobijeni razilaženjem dve različite vrste sitnih čestica na jedinstven način u tečnosti i njihovo taloženje na osnovu gravitacije.

Uvedena je metoda merenje stope potapanja koja je bila pogodna za analizu prirodnih skupova jedinki. Rezultati ove metode pokazuju da:

- u grupi potopljenih čestica dominiraju velike ćelije;
- smanjena je stopa potapanja nakon prehrane čestica;
- plutanje se javlja kao odgovor na svetlost.

To bi značilo da brzina taloženja fitoplanktona zavisi od uslova u kojima su ćelije. Kod starih ćelija potapanje je brže nego kod mlađih ćelija. Analiza eksperimentalnih podataka o disperziji spora i polena sa stanovišta atmosferske teorije difuzije pružila je uvid u disperziju biljaka i drugih nepokretnih organizama.

U odnosu na epidemiologiju, odnosno širenja bolesti putem letećih čestica izučavani su teorijski aspekti disperzije spora u atmosferi koristeći jednostavan model turbulentne difuzije.

Problem se smatra samo u dvodimenzionalnom prostoru, gde je x –osa usmerena naniže, a z –osa usmerena vertikalno naviše. [6]

Početak koordinatnog sistema se postavlja u središte kretanja spora. Pod pretpostavkom konstantnog prenosa protoka i difuzije, koncentracija S ravnotežnog stanja distribucije spora zadovoljava jednačinu:

$$u \frac{\partial S}{\partial x} - w_s \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial S}{\partial z} \right)$$

gde je:

- u brzina vetra;
- w_s je brzina taloženja spora;
- S je koncentracija spora u vazduhu;
- K_z je vertikalna raspršenost tj. difuzivnost (konstanta).

3.5 Difuzija životinja u staništu

Stanište životinja ili populacija se definiše kao područje ili zapremina na kojoj se svakodnevno kreću u cilju postizanja svojih svakodnevnih aktivnosti. Stanište obuhvata i gnezda, skloništa, mesta za odmor i prikupljanje hrane. Kopneni i vodeni sisari imaju svoja utvrđena staništa. Ta staništa se kod nekih vrsta u manjoj ili većoj meri mogu preklapati. Svako stanište ima više i manje naseljenu teritoriju. Više naseljeni delovi čine gnezda, dok su udaljeni i manje naseljeni delovi ispunjeni skloništima.

S obzirom na važnost lokacije životinja, bilo je potrebno izučiti je. Kretanje životinja je u početku bilo ograničeno na pojedinačno ucrtavanje staništa. Položaj staništa može uticati na pojedinačni status životinje. Posmatrala se promena staništa u različitim životnom fazama. Izraz **aktivno stanište** se primjenjuje prilikom razmatranja pokreta u određenom vremenskom periodu. **Centralna oblast** je onaj deo površine najčešće korišćen od strane pojedinca, što odgovara sigurnoj verovatnoći da će na tom području pojedinac boraviti. Metoda koja se koristi za lociranje položaja životinja je korišćenje rasipanja i uzimanja u obzir i najmanjeg područja koje čini neki procenat boravka životinje. Zbog statističkog problema u proceni, veličina staništa se određuje preciznije distributivnim merenjem. [6]

Veličina staništa i njegova veza sa težinom životinja

Prirodna staništa se široko razlikuju među životinjskim vrstama. Gustina područja naseljena životinjama mogu varirati u zavisnosti od količine hrane potrebne jedinki ili populaciji. Postoji jedinstveni odnos između veličine staništa i stope unosa potrebne energije po životinji.

Poznati ljubitelj ptica Armstrong²⁷ je istraživao odnos između veličine staništa ptica i njihove telesne težine. Slične studije su imali naučnici sa gušterima, sisarima i primatima. Svi ovi rezultati mogu se sažeti u sledećoj formuli:

$$R = aW^b \quad (3.7)$$

gde je R veličina staništa, W je telesna težina, dok su a i b konstante. Vrednost b zavisi od životinjskih vrsta i kreće se od 0,63 do 1,23.

Sa druge strane, postoji uopšten odnos između stope baznog metabolizma M i telesne težine W :

$$M = cW^{0.75} \quad (3.8)$$

²⁷ Edward Allworthy Armstrong (1900-1978), britanski biolog

gde je c konstanta.

Za velike sisare eksponent se značajno razlikuje od 0.75, na nivou poverenja od 95%. On obuhvata interval $[0.8, 1.24]$ za biljojede, $[0.57, 1.26]$ za svaštojede i $[1.04, 1.68]$ za mesojede.

Za sisare konkretno, približna srednja vrednost konstante b u jednačini iznosi 0.75, tako da je iz jednačina (3.7) i (3.8) veličina stanista približno proporcionalna bazalnoj stopi metabolizma, odnosno:

$$R = kM \quad (3.9)$$

gde je k konstanta.

Ipak, još uvek je nedostajala veza između veličine staništa i stvarno potrošene energije E u prirodnom okruženju. Postavljena je hipoteza da stvarno potrošena energija E treba da bude proporcionalna stopi baznog metabolizma M . Tada je veličina staništa R linearno proporcionalna sa E .

Pojedine životinjske vrste kao što su pčele, mravi, šišmiši, foke, morski lavovi i ptice su smešteni u fiksna staništa. Sa njih su se životinje razilazile i vraćale svaki dan da bi obezbedile hranu. U obrazac ove disperzije treba uvesti ravnotežu između dva međusobno suprotna efekta. Prvi efekt je bio povoljan kod više izraženih disperzija, smanjenjem pritiska na potrošnju resursa. Drugi efekt je nedostatak vremena i povećanje potrošnje energije kod više udaljenih resursa. Naučnici su koristili ove podatke da bi analizirali disperziju potrage čvorka za hranom. Nešto kasnije se javila radoznalost za kretanje guštera iguane. Rešenja su dobijena difuzijom pomoću parcijalne diferencijalne jednačine za gustinu životinja u prostoru i vremenu. [6]

Matematički modeli disperzije životinja u prirodnim staništima

Posmatra se uticaj modela slučajne šetnje na matematički model disperzije. Pokreti jedne životinje u svom staništu se mogu smatrati stohastičkim procesom u prostoru, tj. slučajnom šetnjom. Međutim, hod nije isključivo nasumičan. On mora biti posmatran kao usmerena šetnja. Verovatnoće koraćanja ka središtu staništa su veće od verovatnoće da se ide ka mestima udaljenih od centra. Takva nasumična šetnja se može nazvati **centralno usmerena**. Verovatnoće mogu da budu date na različite načine. Radi jednostavnosti, može se analizirati hod u jednodimenzionalnom prostoru, tj. x – osi, uzimanjem za centar aktivnosti mesto koordinatnog početka $x = 0$.

Postoje dva slučaja.

Slučaj1:

Pretpostavlja se da kretanje ka centru zavisi samo od memorije životinje i poznavanja staništa.

Pretpostavka je da je verovatnoća centralno usmerenog koraka opada sa udaljenošću od centra. Dakle, verovatnoća životinje da se kreće od x ka $x - 1$ i ka $x + 1$ može biti data respektivno:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{x}\right) \text{ i } \left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{x}\right) \text{ gde je } \varepsilon \text{ konstanta i važi } \varepsilon < 1.$$

Neka je $p(x_0|x_1, t)$ verovatnoća da će životinja koja kreće iz x_0 stići u x_1 u trenutku t , verovatnoća životinje koja se locira na m u trenutku $t + 1$ je zbir:

- verovatnoće da se životinja nalaziti na $m + 1$ u trenutku t pomera na m tokom narednog vremenskog intervala;
- verovatnoće da se životinja nalazi se na $m - 1$ u trenutku t pomera na m u narednom vremenskom intervalu.

Prema tome, jednačina

$$p(x_0|m, t + 1) = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{\varepsilon}{m+1}\right\}p(x_0|m + 1, t) + \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{\varepsilon}{m-1}\right\}p(x_0|m - 1, t)$$

daje formulu za generalizaciju slučajne šetnje.

Ova jednačina se može rešiti u skladu sa početnim uslovom da je životinja počela kretanje u nekoj poznatoj tački x_0 u trenutku $t = 0$. Nakon dobijanja $p(x_0|m, t + 1)$, može se izračunati na primer verovatnoća da se životinja vraća u početno stanje prvi put nakon $2n$ koraka. Dobija se procenat koji predstavlja koliko je životinja udaljena od centra. Iako ovaj model uključuje centralnu usmerenost ka sredini, tendencija kretanja ka centru se smanjuje sa udaljenosti.

Slučaj 2

Životinja je privučena svojim gnezdnom u kojem su mladuci koji čekaju hranu

U ovom slučaju postoji veća tendencija za kretanje u pravcu stanista a ne daleko od njega. Jer se životinja pomera još dalje od gnezda tragajući za hranom.

Dakle, verovatnoća životinje da se kreće od x ka $x - 1$ i ka $x + 1$ može biti data respektivno sa:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{L}\right) \text{ i } \left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{L}\right) \text{ gde je } -L \leq x \leq L.$$

Ako se sada, kao u prvom slučaju pasmatra verovatnoća $p(x_0|x_1, t)$ kojom se životinja kreće od x_0 do x_1 u vremenu $t = 0$. Tada je verovatnoća da se životinja nađe na mestu m posle vremena $t + 1$ data sa:

$$p(x_0|m, t + 1) = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{m + 1}{L}\right\}p(x_0|m + 1, t) + \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{m - 1}{L}\right\}p(x_0|m - 1, t).$$

Dobijeno je rešenje za ovu jednačinu, uz početni uslov da se životinja nalazi u poznatoj tački x_0

u trenutku $t = 0$. Ustanovljeno je da je prosečna dužina kretanja od početne tačke: $\sqrt{L\pi}$ u jednodimenzionalnom prostoru, odnosno $L\pi$ u dvodimenzionalnom prostoru.

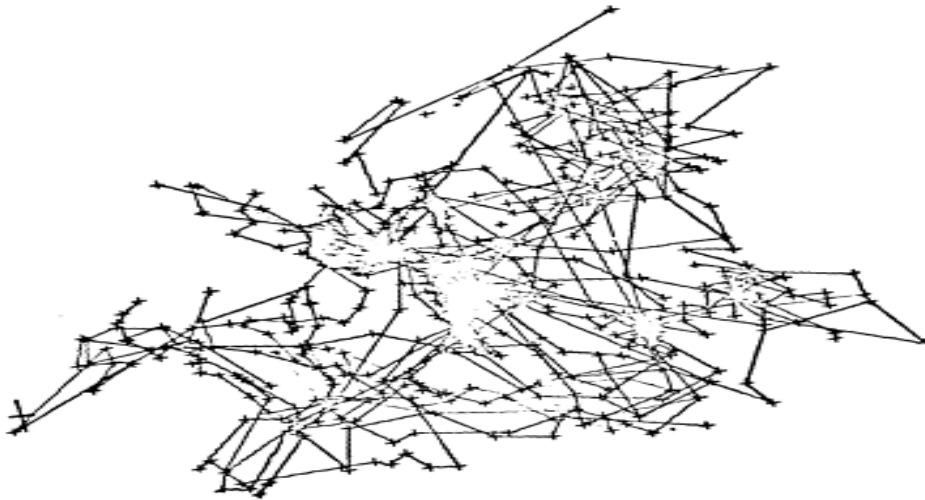
Vidimo razliku između ova dva modela. U modelu prvog slučaja, centralna usmerenost hoda slabi sa udaljenosti od centra. Difuzivna tendencija podrazumeva beskonačni obim staništa zbog faktora slučajne šetnje. Životinje su sklonije razilaženju nego povratku u prvobitno boraviste.

Sa druge strane, u modelu drugog slučaja, povratak u početno boravište se povećava sa udaljenošću, a samim tim je tendencija razilaženja manje izražena. Tada veličina staništa postaje konačna. U slučajnoj šetnji se pretpostavlja da je kretanje diskretno. Ograničenjem broja koraka, jednačina za verovatnoću postaje generalizovana difuzijom koja opisuje stalne pokrete.

Proces difuzije je funkcionalni model za proučavanje staništa životinja. Model se odlikuje svojstavima kao što su aktivnost u staništu i raseljavanje. Potom se javio problem teritorijalnih interakciju između dve ili više životinja unutar iste populacije i između različitih populacija posmatrajući jelene, lisice, vukove i ptice, što će biti opisano u daljem tekstu.[6]

3.5.1 Model kretanja životinja u staništu

Sinif i Jesen (1969) su pokušali da modeliraju kretanje životinja sa matičnog stanista na osnovu uzetih podataka putem senzora za crvenu lisicu, polarnog zeca i rakuna. Telemetrijski podaci su dobijeni sa univerziteta u Minesoti automatskim sistemom praćenja, koji kontinuirano prati kretanje životinja nošenjem minijaturnih radio-odašiljača. Zabeležen je primer pokreta crvene lisice dobijene telemetrijom (Slika 3.2).



Slika 3.2 Primer kretanja crvene lisice dobijeno telemetrijom [6]

Opisi su ograničeni na kretanje crvene lisice, iako je način posmatranja kretanja drugih životinja u suštini isto.[6]

Sinif i Jesen su analizirali podatke po sledeće tri elementarne stavke:

- 1) Određena je udaljenost od početne lokacije do mesta gde se snima naredna lokacija. Srednja vrednost brzine kretanja je izračunata deljenjem pređene razdaljine proteklom vremenom između dva mesta.
- 2) Relativni ugao je meren u smeru kazaljke na satu. Ako bi životinja menjala svoj smer kretanja, relativni ugao bi bio 0° . Preciznost merenja relativnog ugla je bila 0.5° .
- 3) Određeno je relativno trajanje mirovanja i kretanja.

Poređene su raspodele brzina pređenih razdaljina u metarima po minuti za odrasle ženke, mužjake i mladunčad crvene lisice. Svi slučajevi kod kojih je došlo do menjanja smera, su eliminisani iz distribucije. Za sve tri grupe u čoporu, distribuciona kriva u početku naglo raste i opada polako na desno. Sporije kretanje mladunaca pokazuje da su u tom periodu bili i dalje pod uticajem roditeljskog staranja.

Posmatrana distribucija brzine može biti predstavljena uz pomoć gama distribucije:

$$f(v) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} v^{\alpha} e^{-\frac{v}{\beta}}; \quad (3.10)$$

gde je v brzina, α i β su konstante koje zadovoljavaju ograničenja: $\alpha > -1 \wedge \beta > 0$. Gama funkcija je data u oznaci $\Gamma(\alpha+1)$.

Podaci za odrasle mušjake i ženke crvene lisice su slični i prikazani su normalnom raspodelom. Sa maksimumom na sredini oko 180° , dok su podaci za mladunce crvene lisice prikazani uniformnom distribucijom.

Distribucije ugla θ su aproksimirane kružnim normalnim distribucijama:

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \pi I_0(c) e^{c \cos(\theta-m)}. \quad (3.11)$$

Gde je $I_0(c)$ modifikovana Beselova²⁸ funkcija reda nula. Oblika diferencijalne jednačine:

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

sa kanoničkim rešenjima $y(x)$, reda $\alpha = 0$. Koristimo je zbog cilindričnih svojstava funkcije.

Ugao m je ugao za maksimalnu verovatnoću, a c je parameter distribucijske koncentracije. Kako se c povećava, širenje distribucije se smanjuje a distribucija postaje uniformna kako se vrednost c približava nuli.

Telemetrijski podaci su potvrdili da je crvena lisica noćna vrsta. Kreće se tokom noći a tokom dana ostaje relativno statična. Iz tog razloga, jedino podaci uzeti tokom noći su uzeti u obzir u izračunavanju aktivnosti lisice. Najčešća dužina odmora je oko 60 minuta, odmor se retko produzi na više od 4 sata. Trajanje kretanja razlikuje se između mladunaca i odraslih. Za mladunce aktivnosti su obično kraće od 3 sata, ali za odrasle može da bude duže od 10 sati.

Za kompijuterske simulacije Sinif i Jesen su prvi put pokušali trivijalnim modelom koristeći zakone distribucije (3.10), (3.11) kao i distribuciju trajanja odmora i kretanja dobijene od posmatranog uzorka sa navedene tri elementarne stavke.

²⁸ Friedrich Bessel (1784-1846), nemački matematičar

U ovom modelu, pretpostavlja se da je pokret u svakom trenutku nezavisan od svakog prošlog pokreta. Relativni ugao izabran za kretanje od jednog do drugog položaja nije bio pod uticajem izabranog puta ili lokacijom u stanistu. Ukupna slika se može menjati variranjem distribucije relativnog ugla i pređenog puta.

Statistička preciznost simuliranih pokreta u uzorku u odnosu na telemetriju posmatranih pokreta uzorka je ista. Kriterijum preciznosti je potreban za ovaj uzorački test što predstavlja težak problem.

Sinif i Jesen primenjuju metodu kvadratnih jedinica uzimanja uzorka. Što se često koristi u ekologiji uzoraka za merenje razlike pokreta životinja. Tako je stanište podeljeno u kvadratne jedinice, a broj životinja u jedinici, u oznaci n , predstavlja aproksimaciju negativne binomne distribucije. Vrednosti disperzije parametra k su korišćene da uporede kretanja uzorka. Negativna binomna distribucija je data sa:

$$f(n) = \frac{(k + n - 1)!}{(k - 1)! n!} \left(\frac{m^n}{m + k} \right) \left(1 + \frac{m^{-k}}{k} \right), \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

gde m predstavlja aritmetičku (srednju) vrednost. Broj $k > 0$, male vrednosti k označavaju izraženu disperziju, dok velike vrednosti k ukazuju na značajne slučajnosti u distribuciji.

Vrednosti od k za model kretanja lisice dobijen telemetrijski u staništu se kreće od 0,1 do 0,7. To znači da kretanje lisica u svom staništu nije sasvim slučajno i da se određeni delovi staništa probirljivo koriste.

Sa druge strane, vrednost k dobijen simuliranim podacima predstavljaju uzorak koji je mnogo više slučajan nego stvarni podaci. Takav raskorak može biti prvenstveno zbog dva razloga:

- 1) Simulaconi model se eksplicitno ne računa za graničnu oblast. Životinja obično prepoznaje granice svog staništa sa koje se retko udaljava.
- 2) Životinja koja se kreće unutar stanista nastoji da ponovo koristi željenu oblast, uključujući i mesta mirovanja i prikupljanje hrane. Dok su i nepoželjna područja bila uključena u simulaciju modela.

Sinif i Jesen zatim predstavljaju poboljšan simulacijski model u kojem se definišu i pokreti prema ponderisanim verovatnoćama. Vrednosti k u stanistu postaju precizniji u domenu od 0,12 do 3,6.

Zbog toga u simulaciju modela moraju biti uključeni sledeći elementi:

- 1) Za neke vrste životinja granice staništa variraju iz dana u dan. Može postojati više od jednog mesta preferencije i njegove lokacije se mogu razlikovati iz dana u dan.
- 2) Kretanja jedinki u zajednici mogu uticati na prisustvo drugih pojedinaca. Efekat napuštanja staništa pod pritiskom populacije bi trebao uzeti u obzir.
- 3) Odnos između životinje i staništa koje ima različite vrste vegetacije, treba da bude različit i obuhvaćen istraživanjem.
- 4) Simulaciju modela treba razvijati kao instrument poboljšavanja hvatanja životinja u cilju popisa njihovog broja.

Kako računar povećava mogućnosti, obim simulacije se može povećavati za izgradnju realnog modela. Proučavanje bioloških sistema putem simulacije može biti prvi korak ka razumevanju uloge različitih elemenata uključenih u sistem.

Radio telemetrija omogućava evidenciju i pojedinačno obeležavanje životinja i pokazala se kao izuzetno moćan alat za osnovna proučavanja životinjskih kretanja. Zajedno sa istovremenim merenjima ekoloških faktora i fizioloških podataka, telemetrija poseduje neprocenjiv potencijal.

Međutim, čak i telemetrija ima određena značajna ograničenja. Ne sme se pretpostaviti da simulacije mogu dati odgovore na sva postavljena pitanja. Pre svega, efekat odašiljača na životinju se mora dobro ispitati. Pored toga, iako se trenutna pozicija životinje može pratiti, telemetrija obezbeđuje samo indirektne nagoveštaje šta životinja ustvari radi. Takođe, mnoge jedinke moraju biti praćene istovremeno u cilju proučavanja interakcija životinja.

Za vrlo male životinja kao što su insekti korišćenje telemetrija može biti teško. U proučavanju distribucije leta pčele, pričvršćen je komadić metala sa brojem na poleđini svake pčele. Hvatanje i registrovanje je postignuto sa malim magnetima postavljenim na ulazu košnice i neposredno iznad cveća koje pčele mogu posetiti. Nakon što je zarobljena, zabeležena je relacija kretanja pčele i ona je puštena. [6]

3.5.2 Disperzija životinja u novim staništima

Proces disperzije seobe životinje sa početnog staništa radi osnivanja novog doma ima suštinsku ulogu u opstanku vrste. Tokom seobe, pojedinci mogu umreti od faktora kao što su nedostatak hrane, pogoršanje ekoloških uslova i napada predatora. Čak i ako jedinka dođe u odgovarajuće stanište, ono može biti već zauzeto ostalim životinjama koje odbijaju uljeza. Predstavimo dva modela koji se odnose na ovaj proces.

Model1:

Slučajan šetač koji skuplja hranu (energiju) jer je udaljen od staništa.

Problem jednodimenzionog slučajnog hoda se smatra problemom u kome se životinja kreće nasumično jer prikuplja hranu i locirana je u svakoj tački mreže, što čini **model skitanja**.

Pretpostavimo da je životinja na početku u ishodištu $x = 0$.

Neka su parametri $l, \tau, m(x)$ redom: dužina koraka, vremenski interval između uzastopnih koraka, količina hrane locirana u ishodištu x .

U svakom trenutku životinja troši količinu hrane $f(m)$ u zavisnosti od količine prikupljene hrane $m(x)$. Neka je $p(x, Q, t)dx dQ$ verovatnoća da je nakon vremena t životinja u ishodištu x i prikupila je količinu hrane Q . Izvešćemo jednačinu za p .

U trenutku $t - \tau$ životinja se nalazi na mestu $x - l$ ili $x + l$ i ima skupljenu količinu hrane $Q - f(m)$, pa se dobija:

$$p(x, Q, t) = \frac{1}{2}p\{x - l, Q - f(m(x)), t - \tau\} + \frac{1}{2}p\{x + l, Q - f(m(x)), t - \tau\}. \quad (3.12)$$

Izraz (3.12) pokazuje da se slučajni hod ponaša na isti način i da će verovatnoća ostanka životinje u istoj tački rešetke u uzastopnim vremenskim intervalima biti nula.

Razvijanjem desne strane (3.12) u Tejlorov²⁹ red, dobijamo:

²⁹ Brook Taylor (1685-1731), engleski matematičar

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{f}{\tau} \frac{\partial p}{\partial Q} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\tau} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \mathcal{O}(x, Q, t) \quad (3.13)$$

gde je odbačen član višeg reda od dva koji je proširen u odnosu na l, τ i f .

Ako ograničimo (3.13) tako da l, τ i f teže nuli u sledećim oblicima:

$$\lim_{f, \tau \rightarrow 0} \frac{f}{\tau} = F(m(x)) \quad \lim_{l, \tau \rightarrow 0} \frac{l^2}{2\tau} = D. \quad (3.14)$$

Član višeg reda od dva tada konvergira nuli, pa (3.13) postaje:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -F(m(x)) \frac{\partial p}{\partial Q} + D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{\partial(Fp)}{\partial Q} + D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (3.15)$$

Ova jednačina je ekvivalent jednačini difuzije. Stoga se $F(m(x)) = F(x)$ može smatrati brzinom kretanja u pravcu Q . Osim toga, ova brzina zavisi i od položaja x . Tako da kod

Tejlorov polinom za neku funkciju $f(x)$ i datu tačku a je definisan na sledeći način:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \end{aligned}$$

Pošto se pri takvoj aproksimaciji funkcije polinomom pravi nekakva greška, deo za koji se razlikuje funkcija i polinom se zove ostatak polinoma i on iznosi: $\mathcal{O}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$.

Tako se svaka funkcija može predstaviti kao zbir odgovarajućeg Tejlorovog polinoma (za tačku a koja se proizvoljno bira) i greške koja se pravi tom aproksimacijom: $f(x) = T_n(x) + \mathcal{O}(x)$.

pojedinačnih difuzija u pravcu x , difuzivnost D se prenosi odgovarajućim protokom F u pravac Q . Kao rezultat toga, uzorak je raspršen u pravcu $x - Q$ ravni sa verovatnoćom p (Slika 3.15).

Jednačina (3.15) može da se reši po p ako je $f(m(x))$ je pozitivno. Dakle, verovatnoća preživljavanja nakon vremena t se može izračunati postavljanjem ograničenja na x i Q .

Ako integralimo (3.15) po Q , jednačina za gustinu populacije se dobija sa:

$$S(x, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} p \, dQ \text{ i važi jednakost } \frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}.$$

Model 2: Kompjuterska simulacija

Izvršena je simulacija disperzije životinja konstruisanjem mreže u $x - y$ oblasti u kojoj su locirana staništa životinja. Staništa životinja su smeštena u koordinatni centar. Od trenutnih kretanja uzoraka i stope mortaliteta, ocenjuje se uspeh disperzije. Simulacija prestaje kada svaka životinja dođe u jedno od dostupnih staništa ili uginu. Detalje kompjuterskog rada predstavio je Kitčing³⁰ 1971. Kitčing na graficima predstavlja dužinu hoda po jedinici vremena, odnosno dužinu staze. Udvostručavanjem dužine staze DS , disperzija raste.

Odstupanje od pravca kretanja životinja određena je sa S^2 . Veće vrednosti S^2 podrazumevaju veću tendenciju kružnog kretanja oko staništa i manju sklonost za disperzijom.

M označava stopu smrtnosti. Simulacija omogućava da se dobije gustina distribucije životinja oko centra rasipanja. Kitčing je pokušao da uporedi distribucije simulirane na računaru sa postojećim empirijskim zakonima. Dobio je sledeće rezultate:

- Za iste vrednosti dužine staze DS i iste stope smrtnosti M , a različitog odstupanja od pravca S_1^2 i S_2^2 , biće veća disperzija za manju vrednost odstupanja od pravca.
- Za iste vrednosti S^2 i iste stope smrtnosti M , a različite dužine staze DS_1 i DS_2 biće veća disperzija za veću dužinu staze.
- Za iste vrednosti stope smrtnosti M , a različite dužine staze DS_1 i DS_2 , i različitog odstupanja od pravca S_1^2 i S_2^2 , biće veća disperzija za veću dužinu staze i manje odstupanje od pravca kretanja. [6], [9]

³⁰ Roger L. Kitching Ecological and Entomological Society of Australia; Griffith university

4. Model disperzije i rasta populacije životinja

Literatura za ovo poglavlje je korištena iz [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18].

Potreba za poznavanjem veličine populacije, kao i promena broja te populacije je verovatno stara koliko i ljudska civilizacija. Modeliranje rasta populacije je staro oko dve stotine godina i vezano je za engleskog demografa Maltusa³¹. Njegov model rasta, tzv. Maltusov model, se može smatrati početkom važne oblasti matematičkog modeliranja - **populacione dinamike**. Danas je to veoma razvijena i kompleksna nauka, koja zahteva dobro poznavanje raznih matematičkih disciplina pre svega diferencijalnih i diferencnih jednačina, zatim verovatnoće i statistike i biologije. Početkom 19. veka se ljudska populacija stalno povećavala, pa se moglo postaviti pitanje da li će se dugoročno ljudi moći prehraniti ako se rast nastavi. Da bi dao odgovor na ovo pitanje, Maltus je krenuo od nekoliko pretpostavki koje su dovele do jednog veoma uprošćenog i globalnog modela rasta svetske populacije. Radi jednostavnosti, on je pretpostavio da se broj stanovnika na svetu menja na isti način, ne uzimajući u obzir razlike između ljudi kao što su podela prema starosti, polu, podneblju, ekonomskom i kulturnom razvoju. Model koji je uveo je prvi matematički model rasta jedne populacije u okviru nekog ekosistema. Ta populacija može biti stanovništvo jednog grada, regije, države ili čak čitavog sveta, ali može biti i neka životinjska ili biljna populacija unutar jednog ekosistema.

Suština Maltusove teorije se sastoji u činjenici da se populacija razmnožava brže nego što raste proizvodnja hrane. Populacija raste geometrijskom progresijom, a količina hrane uz najpovoljnije uslove raste po aritmetičkoj progresiji. Shodno tome, u određenom trenutku mora doći do prenaseljavanja, tj. veličina populacije će biti veća od raspoloživih resursa za život.

Pretpostavka je da se populacija menja samo zbog rađanja i umiranja. Rast populacije je prekidna pojava, ali kad posmatramo dovoljno veliku populaciju, uvećanje će biti vrlo malo u odnosu na čitavu populaciju pa ćemo smatrati da se rast populacije neprekidno menja. Neka je N veličina populacije koja se neprekidno menja. Tada je $N(t)$ diferencijabilna funkcija vremena, tj. veličina populacije u vremenskom trenutku t . Stopa rasta (opadanja) populacije je konstantna, tj. da je promena u populaciji proporcionalna veličini populacije. Tada se dobija najjednostavniji model rasta populacije na sledeći način koji je korišten u (3.1):

$$\frac{\partial N}{\partial t} = rN \quad (4.1)$$

³¹ Thomas Robert Malthus(1766- 1834), engleski demograf

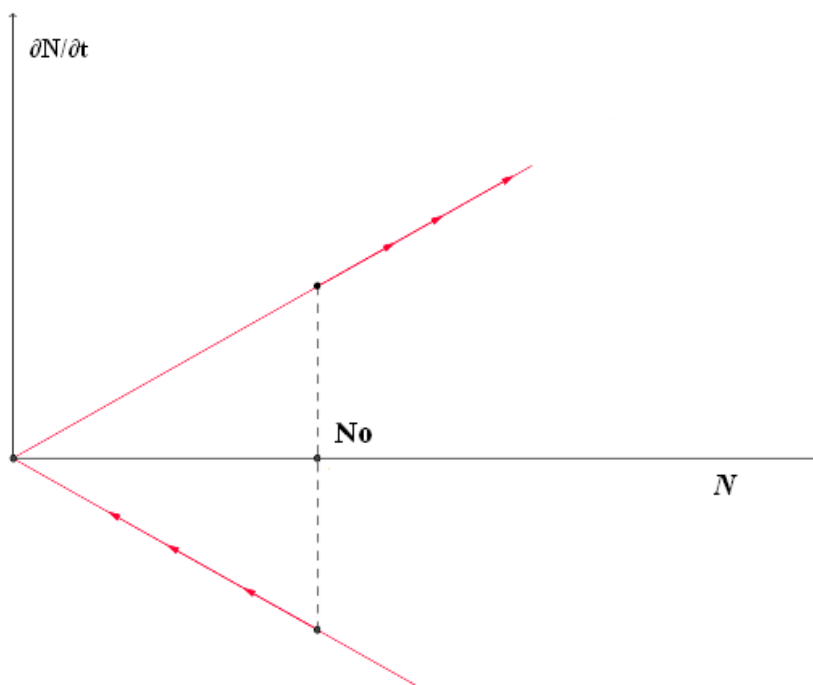
gde je r stopa rasta (opadanja) i važi:

za $r < 0$ populacija opada,

za $r > 0$ populacija raste.

Početno stanje N_0 predstavlja veličinu populacije u početnom trenutku t_0 i važi $N(t_0) = N_0$. Važi da je za $r > 0$ kriva rasta linearna, pozitivnog nagiba i prolazi kroz koordinatni početak. Ravnoteža se postiže kada je veličina populacije nula, što sledi iz uslova $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$. Ako je $N > 0$, tj. ukoliko je veličina populacije veća od nule $\frac{\partial N}{\partial t}$ je veće od nule pa će populacija rasti tokom vremena.

Analogno za $r < 0$ je $\frac{\partial N}{\partial t}$ je manje od nule pa će populacija opadati tokom vremena sve dok ne nestane. Ova situacija se može ilustrovati sledećim grafikom (Grafik 4.1):



Grafik 4.1 Opadanje populacije tokom vremena

Ako se uzme u obzir već viđeni model (4.1): $\frac{\partial N}{\partial t} = rN$ sa početnim uslovom $N(t_0) = N_0$, rešavanjem početnog problema integracijom obe strane jednačine i dolazi se do rešenja početnog problema:

$$N = c_0 e^{rt}$$

koristeći početni uslov dobijamo $c_0 = N_0 e^{-rt_0}$, rešenje će imati sledeći oblik:

$$N = N_0 e^{r(t-t_0)}. \quad (4.2)$$

Zaključuje se da veličina populacije raste ili opada eksponencijalno u zavisnosti od stope k . Opisani model naziva se **Maltusov model rasta populacije**. [14]

Ako se posmatra vreme potrebno da se populacija udvostruči, primenjujući Maltusov model zaključuje se da traženi period zavisi samo od stope rasta r , a ne i od veličine populacije N . Neka je u početnom trenutku t_0 , veličina populacije N_0 .

t_1 je trenutak u kome će se populacija N_0 udvostručiti, pa je potrebno vreme da se posmatrana populacija udvostruči $t_1 - t_0$.

Kako je $N_1 = 2N_0$ dobija se: $2N_0 = N_0 e^{r(t_1-t_0)}$,

pa sledi: $\ln 2 = r(t_1 - t_0)$

i konačno:

$$t_1 - t_0 = \frac{\ln 2}{r} = \frac{0,6931}{r}.$$

To znači da ako je uzeto da je stopa rasta $r = 7\%$ godišnje, tada će se populacija udvostručiti za otprilike 9,9014, tj. za 10 godina bez obzira na početnu veličinu populacije.

Diskretni oblik ovog modela je:

$$N_{t+1} = N_t + rN_t. \quad (4.3)$$

Opšte rešenje ove rekurentne jednačine je:

$$N_t = (1 + r)^t N_0. \quad (4.4)$$

Primer 4.1

U prikazanoj tabeli se nalaze podaci o broju zečeva u Vojvodini od 1997. do 2011. godine. Parametar r se računa na sledeći način: $N_0=263.570$ je veličina populacije na početku perioda

koji se posmatra, tj. za godinu koja predstavlja trenutak $t_0 = 0$. Iz ovog podatka i podatka da je 1999. godine broj zečeva je bio **215.554**, odakle se dolazi do sledećeg:

$$t_1 = 2 = t_1 - t_0 \text{ pri čemu je } N(2) = 215.554.$$

Sada se iz poznatih podataka:

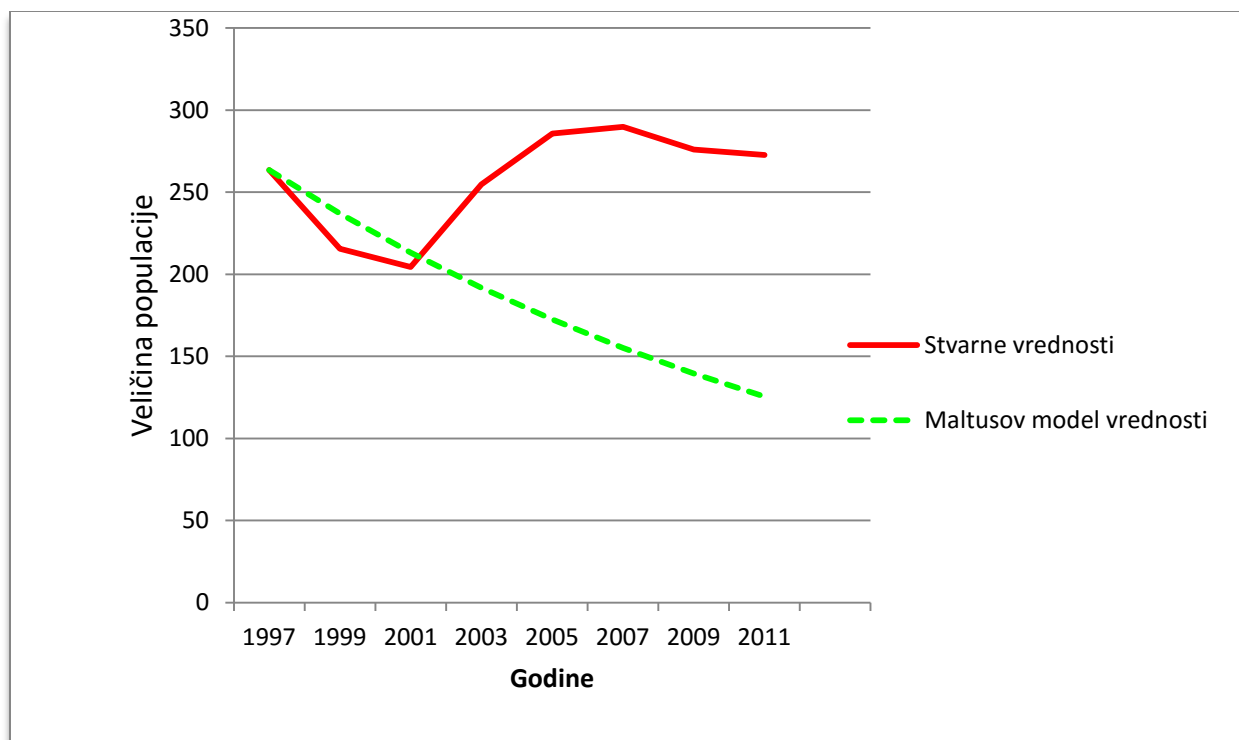
$$N_0 = 263.570;$$

$$N(2) = 263.570 * e^{2r} = 215.554$$

$$\text{dobija: } r = \frac{\ln[215.554] - \ln[263.570]}{2} = \frac{12.28096674 - 12.48207427}{2} = -\frac{0.20110753}{2} = \mathbf{-0.100553765}$$

Godina	Brojnost (poznato)	Maltusov model-vrednosti (predviđeno)
1997	263.570	263.570
1999	215.554	$263.570 + (-0.100553765) * 263.570 = 237.067$
2001	204.528	$237.067 + (-0.100553765) * 237.067 = 213.229$
2003	254.786	$213.229 + (-0.100553765) * 213.229 = 191.788$
2005	285.806	$191.788 + (-0.100553765) * 191.788 = 172.503$
2007	289.897	$172.503 + (-0.100553765) * 172.503 = 155.157$
2009	275.909	$155.157 + (-0.100553765) * 155.157 = 139.555$
2011	272.760	$139.555 + (-0.100553765) * 139.555 = 125.522$

Tabela 4.1: Populacija zečeva u periodu od 1997. do 2011. godine [15]



Grafik 4.2 Populacija zečeva u periodu od 1997. do 2011. godine po Maltusovom modelu

Maltusov model daje približne podatke do određenog momenta, a kasnije su greške sve veće. Jedan od nedostataka koji je uzrok ovome jeste to što se r računa na osnovu prva dva perioda pa kako vreme prolazi razlika između stvarnih i aproksimiranih vrednosti je sve veća. Još jedan nedostatak jeste to što se pretpostavlja da populacija raste istom stopom neograničeno, tj. što se ne uzima u obzir ograničenost raspoloživih resursa koji usporavaju rast populacije i zbog kojih populacija teži ka graničnom zasićenju■

Modeliranje promene populacije se može posmatrati i iz druge perspektive. Na populaciju u nekom momentu se može gledati kao na zalihe čiji nivo zavisi od razlike između priliva i odliva tih zaliha. Zavisno od populacije koja se posmatra razlikovaće se faktori koji utiču na prilive (povećanja) i odlive (smanjenja) populacije. Kao tipičan primer povećanja populacije se posmatra natalitet i imigracije, a smanjenja mortalitet i emigracije. Ako se posmatra populacija insekata, postoje periodi zaprašivanja kada se populacija naglo smanjuje i periodi koji utiču na njihovo povećano razmnožavanje.

$$\begin{aligned} \text{Neto promena populacije} &= \text{povećanje} - \text{smanjenje} = \\ &= (\text{natalitet} + \text{imigracije}) - (\text{mortalitet} + \text{emigracije}). \end{aligned}$$

Posmatrajući natalitet i mortalitet kao unutrašnje promene populacije, a imigracije i emigracije kao spoljašnje promene, može se drugačije zapisati neto promena populacije:

$$\begin{aligned}\text{Neto promena populacije} &= \text{unutrašnje promene} + \text{spoljašnje promene} = \\ &= (\text{natalitet} - \text{mortalitet}) + \text{migracije}.\end{aligned}$$

Gde je priraštaj razlika nataliteta i mortaliteta, a migracija razlika imigracija i emigracija. Ovakva interpretacija je posebno korisna za otvorene sisteme, kao na primer, životinje u Vojvodini, gde možemo posmatrati sve gore navedene faktore. Međutim, ako se posmatraju sve životinje na Zemlji to predstavlja zatvoreni sistem, jer se ne mogu posmatrati migracije, tj. ne postoji priliv ni odliv, pa se mogu posmatrati samo procenti nataliteta i mortaliteta. Zanemarujući karakteristike populacije kao što su godine, pol, plodnost, može se posmatrati veličina koja doprinosi smanjivanju ili povećavanju neto promene populacije, a u kojoj su zapravo sadržane sve navedene karakteristike. Ta veličina deluje na neto promenu populacije posredstvom unutrašnjih promena. Označavaćemo je sa n . Neka je veličina populacije u nekom trenutku $N(t)$, i označava broj jedinki u trenutku t . Unutrašnja promena u populaciji je data sa $nN(t)$. Neka je $m(t)$ oznaka za migracije tokom nekog perioda u kom posmatramo unutrašnje promene. Tada $m(t)$ zapravo označava veličinu spoljašnje promene.

Prema tome, promena populacije:

$$\frac{\partial N(t)}{\partial t}$$

je data sa:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = nN(t) + m(t).$$

- U Maltusovom modelu rasta populacije se pretpostavlja da ne postoje migracije pa je bilo $m(t) = 0$.
- Takođe, pretpostavka da se populacija menja po konstantnoj stopi r tj. doprinos jedinke rastu populacije je bio r . Dakle, bilo je $n(t) = r$.

Sada za: $n(t) = r$ i $m(t) = 0$, posmatrajući gornji pristup, dobija se:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = nN(t) + m(t) = rN(t) \quad (4.5)$$

što je upravo Maltusov model. [14]

Primer 4.2

Disperzija zečeva u odnosu na stopu nataliteta, mortaliteta i temperaturu prirodnog staništa.

- Divlji zečevi žive u prostoru gde disperzija direktno zavisi od količine hrane. Oni obeležavaju svoju teritoriju i teritoriju svojih potomaka. Sada se razmatraju ključni faktori koji utiču na prirodno stanište zeca. Može se primeniti prethodno rečeno na disperziju zečeva u odnosu na njihov **natalitet i mortalitet**.

U ovom slučaju broj rođenih je uzročno povezan sa dinamikom naseljavanja teritorije. Kako broj rođenih raste, veličina populacije zečeva raste. Ako broj rođenih opada, broj zečeva opada. Sledi da su direktno proporcionalne ove dve promenljive. Kako broj zečeva raste, broj mladunaca takođe raste. Slično tome, ako stepen smrtnosti raste, broj zečeva pada. Treba uzeti u obzir činjenicu da je smrt jednog zeca obrnuto proporcionalno stotini potomaka. Ove dve promenljive su obrnuto proporcionalne. S obzirom na porast stope nataliteta, rast populacije je eksponencijalna. Ako se zanemare prirodni predatori i pretpostavi se da postoji izobilje hrane, neće proći puno vremena do prenaseljenosti zečeva.

Ovaj ekološki problem se može modelirati matematičkim jednačinama.

Ako je broj zečeva koji se rađaju i umiru u određenom periodu proporcionalan ukupnom broju zečeva tog perioda, promena u njihovoj populaciji je data izrazom:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = rN.$$

Gde je N broj zečeva u trenutku t , a r je stopa rasta populacije zeca tj. razlika stope nataliteta i mortaliteta.

Rešavanje diferencijalne jednačine daje, kao u (3.2) dobija se:

$$N = N_0 e^{rt}$$

gdje je N_0 veličina populacija zečeva u trenutku $t = 0$. Jednačina je eksponencijalna funkcija, zbog čega je ovaj model zove eksponencijalnim modelom rasta. Ovde postoje dva moguća ishoda. Ako ima više rođenih nego umrlih zečeva, onda je stopa rasta je pozitivna i populacija raste eksponencijalno. Ako je stopa rasta negativna, populacija zečeva će početi izumirati. [13]

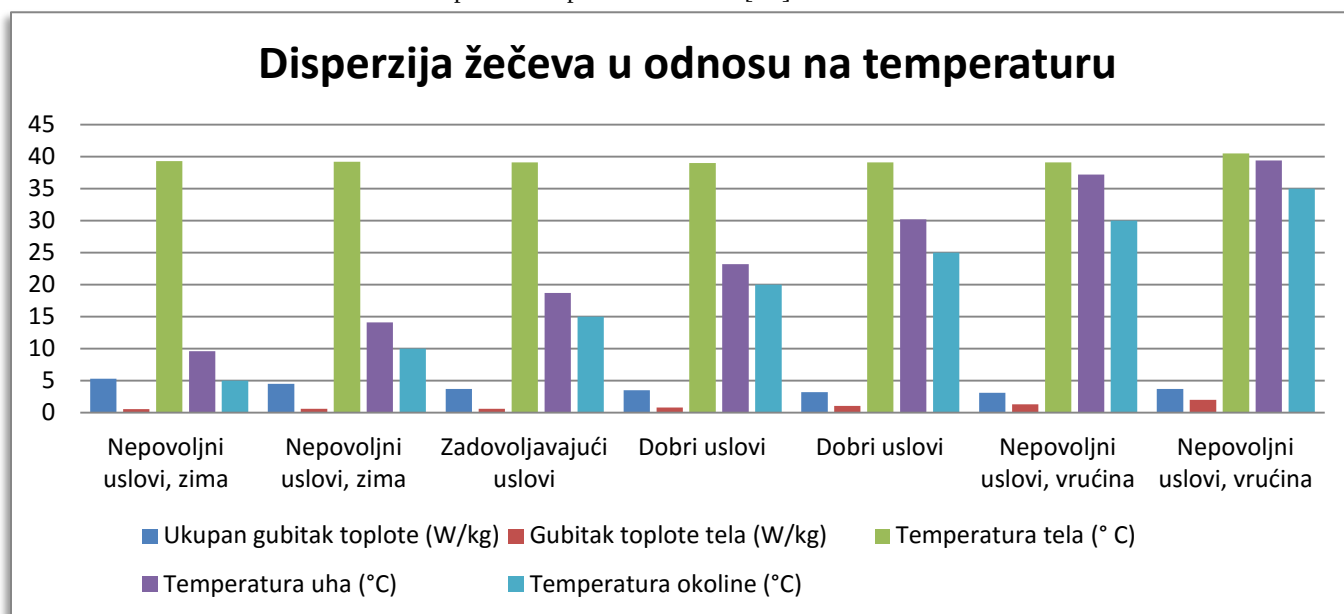
- **Temperatura** je jedan od važnijih faktora koji utiče na stanište zečeva. Zečevi imaju stalnu temperaturu tela tako da promena temperature vazduha mora uticati na održavanje telesne temperature (Tabela 4.2). Oni koriste tri načina za održavanje toplote: položaj tela, disanje i temperatura uha.

Ako je temperatura vazduha niska (ispod 10 °C) životinja se sklopča kako bi se smanjila ukupna površina gubitka topline i smanjiti njihovu temperaturu uha. Ako postoji visoka temperatura (iznad 25°C do 30 °C), životinje se ispruži kako bi izgubila višak toplote zračenjem i konvekcijom, i intenzivira svoju temperaturu uha. Oba slučaja su nepovoljna za stanište belog zeca.

Temperatura okoline (°C)	Ukupan gubitak toplote (W/kg)	Gubitak toplote tela (W/kg)	Temperatura tela (°C)	Temperatura uha (°C)
5	5.3 ± 0.93	0.54 ± 0.16	39.3 ± 0.3	9.6 ± 1.0
10	4.5 ± 0.84	0.57 ± 0.15	39.2 ± 0.2	14.1 ± 0.8
15	3.7 ± 0.78	0.58 ± 0.17	39.1 ± 0.1	18.7 ± 0.6
20	3.5 ± 0.76	0.79 ± 0.22	39.0 ± 0.3	23.2 ± 0.9
25	3.2 ± 0.32	1.01 ± 0.23	39.1 ± 0.4	30.2 ± 2.5
30	3.1 ± 0.35	1.26 ± 0.38	39.1 ± 0.3	37.2 ± 0.7
35	3.7 ± 0.35	2.00 ± 0.38	40.5 ± 0.8	39.4 ± 0.47

Tabela 4.2

Gubitak toplote, temperature tela i temperature uha odraslih belih zečeva na Novom Zelandu, prema temperaturi okoline [11]



Grafik 4.3 Gubitak toplote, temperature tela i temperature uha odraslih belih zečeva

Dakle, idealna situacija za naseljavanje belog zeca je na staništima temperature od 10-25°C.

4.1. Logistička kriva

Za razliku od prethodnog modela sada se prati rast populacije pretpostavljajući da rastom populacije njeni članovi dolaze u konkurenciju za hranom i drugim ograničenim resursima. Pretpostavlja se da postoji:

$$\frac{N(N-1)}{2}$$

interakcija u populaciji veličine N koje će dovesti do nekih smrti što će narušiti rast populacije. Shodno tome rast populacije će se smanjiti proporcionalno tom faktoru čime se dolazi do sledećeg modela:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = rN - \frac{mN(N-1)}{2} = rN + \frac{mN}{2} - \frac{mN^2}{2} = \left(r + \frac{m}{2}\right)N - \frac{mN^2}{2} \quad (4.6)$$

koji se naziva **logistička jednačina rasta**. [14]

Kada se uvede smena u (4.6) jednačinu:

$$\left(r + \frac{m}{2}\right) = a$$
$$\frac{m}{2} = b$$

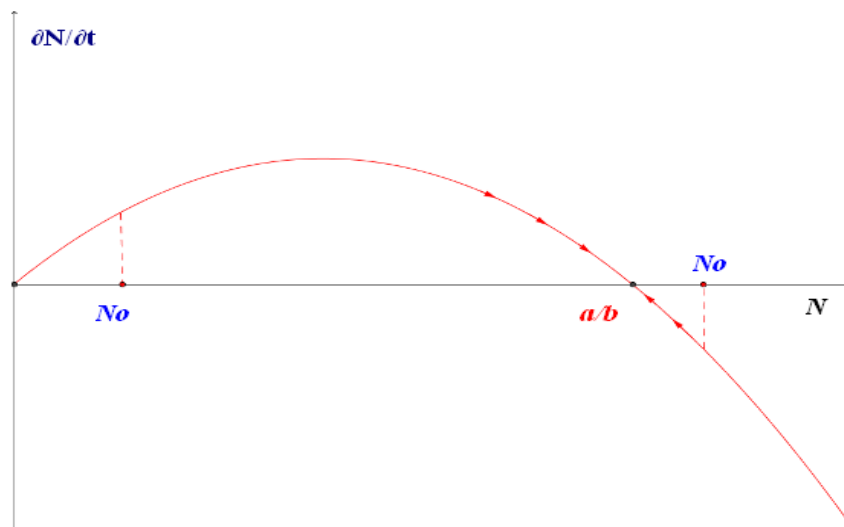
dobija se sledeći oblik:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = aN - bN^2 = N(a - bN) \text{ i } a > 0, b > 0 \quad (4.7)$$

Parametar b je mali u odnosu na parametar a , pa se deo $-bN^2$ često zanemaruje. Međutim, kako se veličina populacije menja (raste) i konkurencija postaje sve veća deo $-bN^2$ postaje značajan pa se time redukuje rast populacije. Logistička jednačina rasta

$$\frac{\partial N}{\partial t} = N(a - bN) \text{ } a, b > 0$$

je diferencijalna jednačina koja se može eksplicitno rešiti. Prvo se razmatraju neke njene osobine pomoću sledećeg grafika:



Grafik 4.4 Logistička jednačina rasta

Ravnotežna tačka se dobija za nulti rast populacije, tj. tamo gde je $N=0$.

To se dešava u $N_1^* = 0$ i $N_2^* = \frac{a}{b}$. Prvo rešenje zanemarujemo jer nas ne zanima slučaj kada je $N=0$.

- Za $N_0 < \frac{a}{b}$, gde je N_0 veličina početne populacije i $\frac{\partial N}{\partial t} > 0$, pa N raste tokom vremena.
- Za $N_0 > \frac{a}{b}$ važi $\frac{\partial N}{\partial t} < 0$ pa N tokom vremena opada.
- Tačka $N^* = \frac{a}{b}$ je privlačna ravnotežna tačka.

Sada se rešava eksplicitno po N jednačina (4.7): $\frac{\partial N}{\partial t} = N(a - bN)$ $a, b > 0$

$$\int_{N_0}^N \frac{\partial N}{N(a - bN)} = \int_{N_0}^N dt.$$

Pošto je:

$$\frac{1}{N(a - bN)} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{N} - \frac{-b}{a - bN} \right)$$

sledi

$$\frac{1}{a} \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} - \frac{1}{a} \int_{N_0}^N \frac{-bdN}{(a - bN)} = \int_{t_0}^t dt$$

Tako se dobija:

$$\left[\frac{1}{a} \ln N - \frac{1}{a} (-b) \ln (a - bN) \left(-\frac{1}{b}\right) \right] \Big|_{N_0}^N = t - t_0$$

$$\ln \left(\frac{N(a - bN_0)}{N_0(a - bN)} \right) = a(t - t_0)$$

$$N_0(a - bN)e^{a(t-t_0)} = N(a - bN_0)$$

Rešavanjem jednačine po N dobija se:

$$N(t) = \frac{aN_0}{bN_0 + (a - N_0)e^{a(t-t_0)}} .$$

Uočava se da ova jednačina zavisi od tri parametra a , b i N_0 . [14]

Gornja granica je:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{a}{b} \text{ i nulti rast populacije se nikad ne dostiže.}$$

Logistička funkcija ima tačku prevoja $N = \frac{a}{2b}$ koja se može dobiti i kao maksimum logističke funkcije rasta

$$f(N) = aN - bN^2$$

$$f'(N) = a - 2bN = 0$$

$$N = \frac{a}{2b} .$$

Oblik logističke krive zavisi od toga da li je početna populacija ispod ili iznad vrednosti populacije u prevojnoj tački i da li je ispod ili iznad granice

$$\frac{a}{b}.$$

4.2 Disperzija za dve životinjske vrste

Dosad je posmatrana samo jedna populacija jedinki u staništu. Međutim, mogu se posmatrati više populacija, na primer dve vrste. Te dve vrste mogu imati različite međusobne odnose:

- da su nezavisne jedna od druge;
- da su u sukobu (konkurenciji) jedna sa drugom;
- jedna vrsta je lovac, a druga plen;
- da se međusobno pomažu.

Ako su vrste nezavisne jedna od druge, populacija će rasti u skladu sa već razmatranim modelima. Ako se više pažnje posveti njihovom međusobnom odnosu, prvo će se definisati problem. Oznaka za prvu vrstu je $x(t)$, a za drugu $y(t)$. Tada će rast svake vrste pojedinačno (ako pretpostavimo da nema migracija) biti:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = Rx(t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Qy(t)$$

pri čemu je R doprinos svake jedinke rastu populacije koja čini x –vrstu, a Q doprinos svake jedinke rastu populacije koja čini y –vrstu. Stepen u kome svaka jedinka jedne populacije doprinosi rastu populacije ne zavisi samo od broja rađanja i umiranja, već i od odnosa sa drugom vrstom. Što se može pratiti sa formulama:

$$R = \alpha + \beta x(t) + \gamma y(t) \text{ i } Q = \delta + \varepsilon y(t) + \xi x(t)$$

- Za obe vrste parametri α i δ označavaju koeficijent prirodnog priraštaja vrsta.
- Drugi sabirak u obe jednačine predstavlja koeficijent prenaseljenosti ili koeficijent samoograničavanja svake od vrsta. Ukoliko su β i ε negativni tada postoji prenaseljenost i članovi vrste dolaze u sukob sa drugim članovima iste vrste.

- Ukoliko su β i ε pozitivni, možemo primetiti da sa porastom populacije rastu i R i Q . Može se zaključiti da sa porastom populacije raste i sposobnost rađanja. Tada se može reći da jedinke u te dve vrste žive u simbiozi.
- Ako su γ i ξ jednaki nuli onda su dve date vrste nezavisne jedna od druge.
- Ako su γ i ξ negativni, onda dve date vrste dolaze u sukob zbog ograničenih životnih resursa. Rast jedne populacije dovodi do smanjenja druge i obratno.
- Ako su pak γ i ξ pozitivni, tada je moguća zajednička egzistencija dve vrste i one se uzajamno pomažu. Rast jedne vrste doprinosi rastu druge i obratno.
- Konačno, ako su γ i ξ različitog znaka, tada važi lovac-plen odnos.
- Ako je γ pozitivno a ξ negativno, onda je x –vrsta lovac a y –vrsta plen.
- Ako je γ negativno a ξ pozitivno, onda je x –vrsta plen, y –vrsta lovac. [14]

Predator-plen model u slučaju nepostojanja prenaseljenosti (model Lotka-Voltera)

Ovaj problem se razlikuje u zavisnosti od staništa. Život u prirodnom staništu je stalna borba za opstanak. U naseljima glavna opasnost za mele životinje mogu biti psi. Glodari su takođe opasni predatori jer napadaju mladunce i prenose bolesti. Zmije u zemlji i ptice grabljivice u vazduhu mogu da utiču na populaciju zečeva. Biljojedi kao što su zečevi moraju izbegavati zveri koje ih love. Na poljima i šumama najčešće zec postaje žrtva lisice.

Kako broj zečeva konstantno raste, povećavaće se broj naseljenih lisica, što će dovesti do smanjenja broja zečeva. U mnogim državama ova prenaseljenost lisica ima neželjene posledice. Sve veći broj lisica ugrožavaće lokalno stanovništvo i njihove uzvove hrane. Tada, ako lov na lisice poraste i dovede do toga da broj lisica opadne broj smrtnih slučajeva zeca će opasti. [13]

Predator-plen ciklusi se ponavljaju periodično. Predator je vrsta mesoždera, a plen je vrsta biljojeda. Klasično objašnjenje ovog modela je da predator pokreće promene u populaciji plena, a plen kao zaliha hrane predatora utiče na veličinu populacije predatora. Modeli su korisni jer se promene mogu očekivati sa određenim očekivanjem. Postavku predator-plen modela je bio važan pokušaj matematičkog modeliranja u ekologiji. Alfred Lotka i Vito Volter su razvili matematički model. [17]

Logistički model je dobar opis jedne populacije životinja, ali u stvarnom životu zečevi neće biti jedina populacija u šumi. Čak i male naseljene površine ekosistema mogu sadržavati stotine različitih životinja. Polazište je predator-plen model, koji opisuje interakciju između jedne vrste i plena. Veliki broj zečeva će ugroziti i najmanja populacija lisica. Tada natalitet nije jedini faktor koji određuje populaciju zeca, već se uzima u obzir i lov lisice. U ovom modelu y -vrsta je predator, a x -vrsta je plen.

$$\frac{\partial x}{\partial t} = ax - bxy; a > 0, b > 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -cy + dxy; c > 0, d > 0.$$

Ako nema lisica tj. $y = 0$, prva jednačina se svodi na:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = ax$$

što predstavlja jednostavan eksponencijalni model. Pošto plen ne zavisi od predatora u smislu materije kojom se hrani, koeficijent a je pozitivan tj. ako nema predatora dolaziće do rasta populacije x -vrste. Kako x -vrsta predstavlja plen za y -vrstu, povećavanjem predatora smanjiće se broj jedinki x -vrste, što je predstavljeno sa $-bxy$.

Ovaj dodatni član $-bxy$ predstavlja broj zečeva koje je uhvatila lisica i time je smanjena ukupna populacija zečeva.

Druga jednačina je posledica prve. dxy predstavlja porast populacije lisica usled lova na zečeve, što su veće zalihe hrane veća je vrednost populacije x -vrste, pa će se povećati broj predatora. Negativna stopa rasta $-cy$ znači da bi lisice izumrle da se ne hrane zečevima, u slučaju da nema dovoljno zečeva ili da ih nema uopšte $x = 0$.

Kao što se može videti u modelu predator-plen populacija raste i pada u ciklusima. Kako se populacija zečeva povećava ima više hrane za lisice, pa će se i populacija lisica povećavati. U jednom trenutku lisica će biti previše, neće dobiti dovoljno hrane i počće da izumiru dozvoljavajući populaciji zečeva da ponovo raste.

Ravnotežna tačka se dobija rešavanjem sistema:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0$$

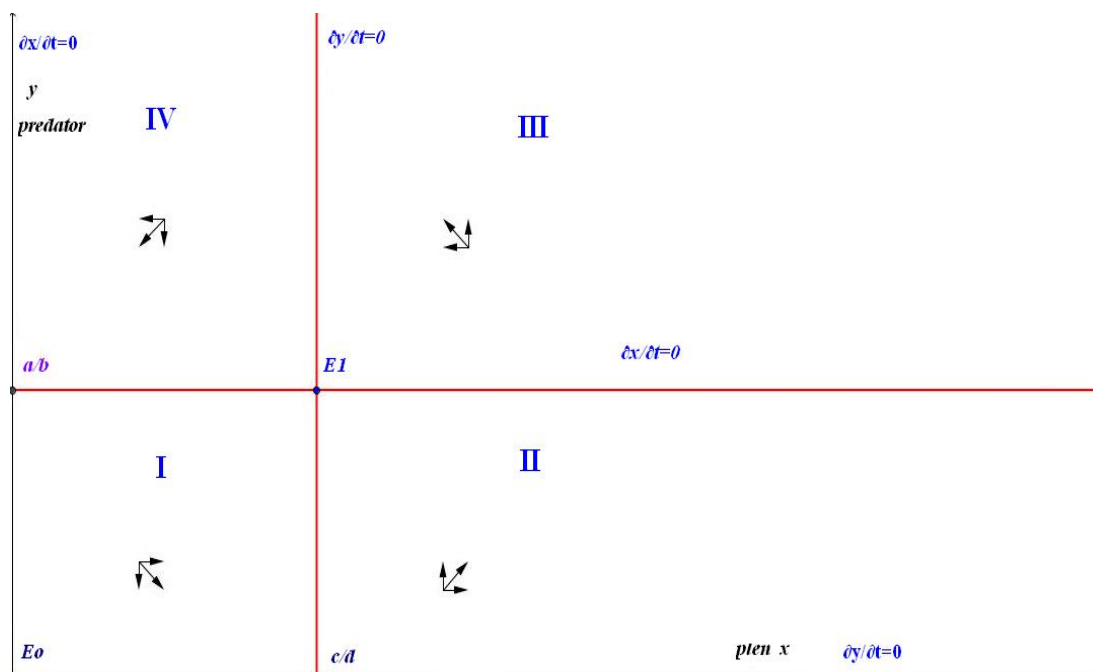
$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

po x i y . Tada se dobija:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (a - by)x = 0 \rightarrow y = \frac{a}{b} \text{ ili } x = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = (-c + dx)y = 0 \rightarrow x = \frac{c}{d} \text{ ili } y = 0.$$

Dakle, stacionarne tačke za ovaj sistem su $(x_1^*, y_1^*) = (0,0)$ i $(x_2^*, y_2^*) = (0,0)$ u oznaci E_0 i E_1 , respektivno.



Grafik 4.5 Model Lotka-Voltera

- I kvadrant $\rightarrow x < \frac{c}{d} \wedge y < \frac{a}{b} - c + dx < 0 \wedge a - by > 0$;

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} < 0 \wedge \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} > 0$$
- II kvadrant $\rightarrow x > \frac{c}{d} \wedge y < \frac{a}{b} - c + dx > 0 \wedge a - by > 0$;

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} > 0 \wedge \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} > 0$$
- III kvadrant $\rightarrow x > \frac{c}{d} \wedge y > \frac{a}{b} - c + dx > 0 \wedge a - by < 0$;

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} > 0 \wedge \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} < 0$$
- IV kvadrant $\rightarrow x < \frac{c}{d} \wedge y > \frac{a}{b} - c + dx < 0 \wedge a - by < 0$;

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} < 0 \wedge \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} < 0$$

Ono što možemo zaključiti jeste da bi trajektorije trebale da imaju smer obrnut od kazaljke na satu, što zaključujemo na osnovu strelica. [14]

Logistički model za rast populacije

Eksponencijalni model je lako shvatiti, ali on nije sasvim realan. Uz pozitivnu stopu nataliteta i dovoljno vremena, zečevi će zauzeti sav prostor i nastaviti da se šire u beskonačnost. Međutim, to se neće dogoditi, jer će u jednom trenutku zečevi ostati bez hrane i slobodnog prostora. Bilo koje naseljeno područje ima nivo zasićenosti. Može podržati maksimalan broj zečeva. Ako se uvede pojam kapaciteta primljenih jedinki na stanište u oznaci K , u eksponencijalni model rasta, diferencijalna jednačina postaje:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{rN(K - N)}{K}.$$

Ova jednačina predstavlja logistički model rasta populacije koji je bio baza za model predator-plen Lotka-Voltera. U kojem je:

$$\frac{\partial N}{\partial t}$$

promena veličine populacije N sa vremenom t . Na desnoj strani jednačine, r je stopa rasta populacije pod idealnim uslovima. Ukupan broj svih ekoloških faktora koji ugrožavaju rast populacije ili otpor prirodne sredine rastu populacije:

$$\frac{(K - N)}{K}.$$

Važe sledeće relacije:

- Za zanemarljive vrednosti parametra N , broj $(K - N) / K$ konvergira jedinici, tako da nema promene u jednačini.
- Ako je N približne vrednosti sa K , broj $(K - N) / K$ konvergira nuli, tako da populacija jedinki prestane rasti.
- Ako je broj N veći od broja K , što znači da je populacija jedinki veća od kapaciteta terena, veličina $(K - N) / K$ postaje negativna. [10]

Jednačina ovog modela ne izgleda isto kao logistička jednačina zbog pretpostavke da:

- (1) Veličina populacije plena u potpunosti zavisi od hvatanja predatora.
- (2) Veličina populacije predatora u potpunosti zavisi od dostupnosti hvatanja plena.

Svi ostali aspekti otpora prirodne sredine smatraju se nevažnim. S obzirom da je ovo model za samo jednu vrstu predatora i samo jednu vrstu plena, model se sastoji se od dve jednačine. Jedna jednačina za rast populacije za predatora i jedna za plen. [17]

Ako se te dve vrste životinja obeleže kao vrsta 1 i vrsta 2, svaka će imati veličinu populacije N_1 i N_2 , stopu rasta r_1 i r_2 i kapacitet staništa K_1 i K_2 . Ukupan broj ekoloških faktora koji ugrožavaju rast populacije:

$$\frac{(K_1 - N_1)}{K_1}$$

$$\frac{(K_2 - N_2)}{K_2}.$$

Iz tih podataka dobijamo sistem:

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{r_1 N_1 (K_1 - N_1)}{K_1}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{r_2 N_2 (K_2 - N_2)}{K_2}.$$

Efekat druge vrste-lisice, na rast populacije prve vrste-zečeva zavisi od dva faktora:

(1) Veličine populacije predatora N_2 ;

(2) Intenzitet lova predatora na plen (označeno kao A_{21} koeficijent uticaja predatora na rast populacije plena). Što će biti negativan faktor jer usporava rast jedne vrste populacije, tj. plena. Dakle, jednačina za modeliranje rasta populacije plena suočenog sa predatorskom vrstom postaje:

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{r_1 N_1 (K_1 - N_1 - A_{21} N_2)}{K_1};$$

Ista logika se koristi za modeliranje rasta populacije predatora suočenog sa mogućnošću nedostupnosti plena (A_{12} je koeficijent merenja uticaja dostupnosti plena na predatora):

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{r_2 N_2 (K_2 - N_2 - A_{12} N_1)}{K_2}.$$

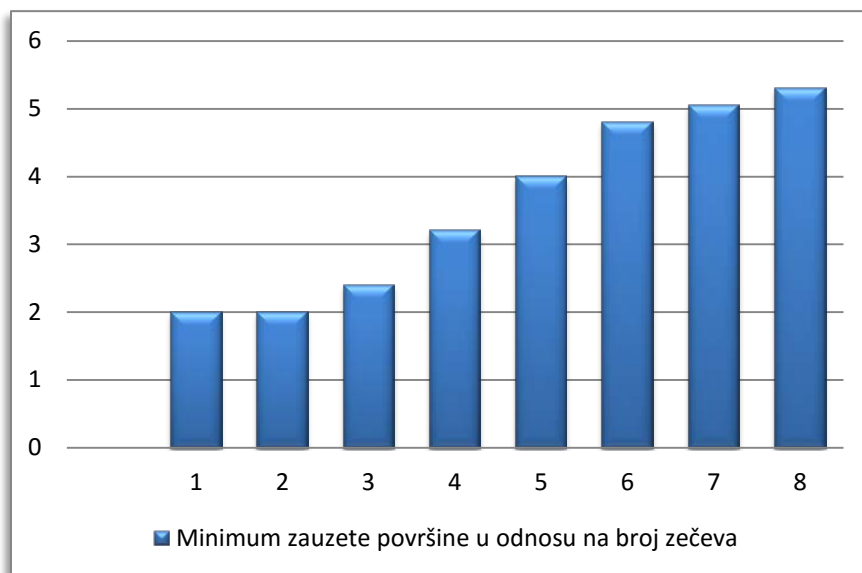
Da bi se grafički prikazao rast populacije, rešavaju se ove dve jednačine tako da populacija plena bude x -osa, a populacija predatora bude na y -osi. Što će biti detaljno prikazano u daljem tekstu.

Primer 4.3

Zečevi prema starosti i aktivnosti naseljavaju prostor. Mladi zečevi zauzimaju više prostora nego odrasli. Najmanja površina za jednog zeca je oko $2 m^2$, što eksponencijalno raste sa brojem zečeva.

Broj zečeva	Minimum zauzete površine (m^2)
1	2.00
2	2.00
3	2.25-2.40
4	3.00-3.20
5	3.75-4.00
6	4.50-4.80
7	4.75-5.05
8	5.00-5.30

Tabela 4.3 Naseljena površina u zavisnosti od broja zečeva [12]



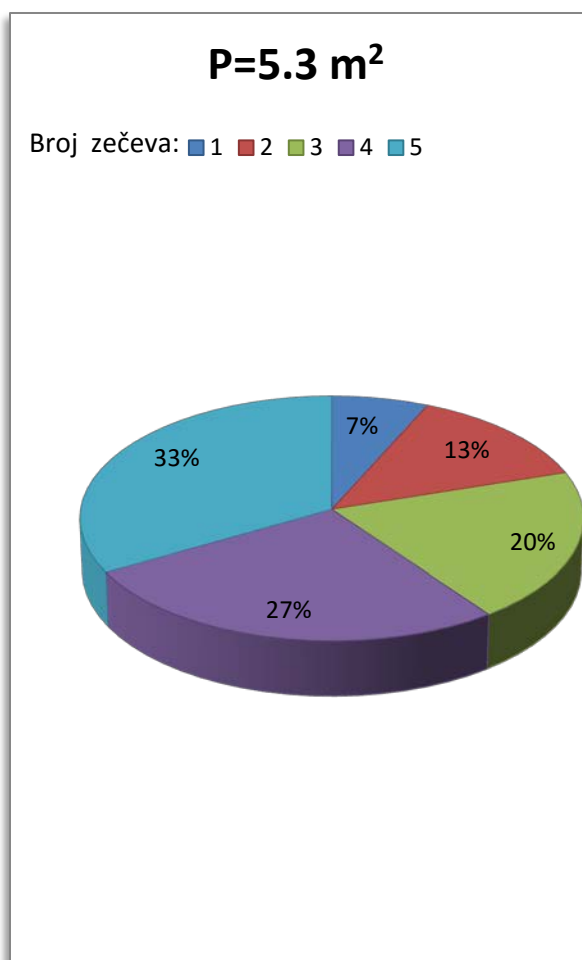
Grafik 4.6 Naseljena površina u zavisnosti od broja zečeva

Ako bi se zadržali na površini od 5.3 m^2 maksimalni broj zečeva pre nego sto bi počeli da izumiru od nedostatka hrane usled prenaseljenosti je dat u tabeli:

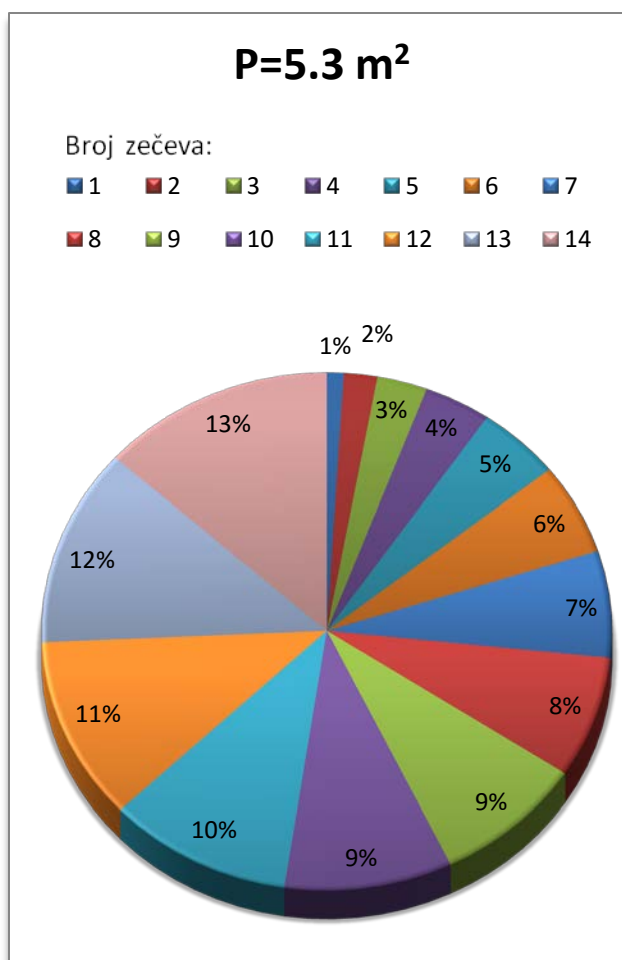
$\frac{(K - N)}{K}$		<u>0.81</u>	<u>0.62</u>	<u>0.43</u>	<u>0.24</u>	<u>0.05</u>	-0.13	-0.32	-0.51	-0.7	-0.9	-1.1	-1.3	-1.45	-1.64
$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{rN(K - N)}{K}$		0.03	0	-0.07	-0.09	-0.08	-0.10	-0.18	-0.28	-0.43	-0.62	-0.82	-1.06	-1.32	-1.60
K		5.3	5.3	5.3	5.3	5.3	5.3	5.3	5.3	5.3	5.3	5.3	5.3	5.3	5.3
N		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
G O D	r	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%

Tabela 4.4 Maksimalni broj zečeva do prenaseljenosti [12]

- Za zanemarljive vrednosti parametra $N = 1$, broj $0.81 = (K - N) / K$ konvergira jedinici, tako da nema promene u jednačini.
- Ako je $N = 5$ približne vrednosti sa $K = 5.3$, broj $0.05 = (K - N) / K$ konvergira nuli, tako da populacija jedinki prestane rasti.
- Ako je broj $N = 6, \dots, 14$ veći od broja $K = 5.3$, to znači da je populacija jedinki veća od kapaciteta terena, veličina $(K - N) / K$ postaje negativna.



Grafik 4.7 Tačno 5 zečeva na površini od 5.3m²



Grafik 4.8 Tačno 14 zečeva na površini od 5.3m²

Na grafiku 4.7 se posmatra slučaj kada ne bi bilo prenaseljenosti zečeva, što se vidi iz tabele (4.4). Za 5 zečeva je na teritoriji površine 5.3m² tj. obeležava se sa 100% popunjene površine da ne bi bilo međusobne konkurencije između jedinki zbog teritorije i hrane. Slučaj sa 5 zečeva je granični i poslednji gde nema sukoba.

Kada bi broj zečeva nastavio da raste bez obzira na pun kapacitet površine, nastaju slučajevi za više od 5 zečeva. Grafik (4.8) pokazuje da u slučaju prenaseljenosti jedna jedinka koja je zauzimala 7% površine, sada zauzima 1%. Dve jedinke koje su zauzimale ukupno 20% površine, sada zauzimaju 3%; tri jedinke od 40%, sada su na 6%; četiri jedinke od ranijih 67% sad su na 10%; i najzad 5 jedinki od prvobitnih 100% prostora bez konkurencije sada zauzimaju svega 15% teritorije.

Sve ostale vrednosti od 6, 7, ..., 14 jedinki čine višak i prenaseljenost.

4.3 Konkurentski modeli u slučaju prenaseljenosti

Razmatran je konkurentski model prema kome su jedinke dveju različitih vrsta bile suparnici u prisvajanju ograničenih resursa, uzimajući za primer lisicu i zeca. Međutim, postoje slučajevi kada i jedinke iste vrste imaju suprotne interese, tj. kada i u okviru iste vrste postoji borba radi dobijanja što veće količine neophodnih sredstava. Posmatra se sledeći model:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (a - by - ux)x \\ \dot{y} &= (c - dx - vy)y.\end{aligned}$$

Parametri a i c predstavljaju stopu rasta prve i druge populacije, respektivno. Njihovu prenatrpanost označavaju $-ux^2$ i $-vy^2$, dok $-by$ i $-dx$ označavaju međusobni uticaj među dvema vrstama.

Ovaj sistem je nelinearan i mnogo složeniji od prethodnog modela, ali se i dalje može dobiti ravnotežna tačka sistema. Stacionarne tačke datog sistema su $x = 0$ i $y = 0$ tj. ravnotežna tačka je koordinatni početak. Da bi se utvrdilo ponašanje trajektorija datog sistema treba primeniti pravilo o izvodu, pa sledi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(c - dx - vy)y}{(a - by - ux)x}.$$

Izokline predstavljaju dve prave u ravni, gde četiri položaja zavisi od vrednosti šest parametara a, b, c, d, u i v . Odavde vidimo da je prva izoklina :

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

kada $(c - dx - vy) = 0$.

U slučaju druge izokline:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

kada $(a - by - ux) = 0$.

Dakle, da bi se videle osobine trajektorija neophodno je posmatrati sledece dve prave:

$$a - by - ux \text{ i } c - dx - vy.$$

Važi:

$\dot{x} = 0$ kada je $a - by - ux = 0$ tada je $y = (a/b) - (u/b)x$ i $\frac{dy}{dx} \rightarrow \infty$;

$\dot{y} = 0$ kada je $c - dx - vy = 0$ tada je $y = (c/v) - (d/v)x$ i $\frac{dy}{dx} = 0$

Ispod i znad datih izoklina postoje sledeće situacije:

$\dot{x} > 0$ ako je $a - by - ux > 0$ tada je $y < (a/b) - (u/b)x$;

$\dot{x} < 0$ ako je $a - by - ux < 0$ tada je $y > (a/b) - (u/b)x$;

$\dot{y} > 0$ ako je $c - dx - vy > 0$ tada je $y < (c/v) - (d/v)x$;

$\dot{y} < 0$ ako je $c - dx - vy < 0$ tada je $y > (c/v) - (d/v)x$.

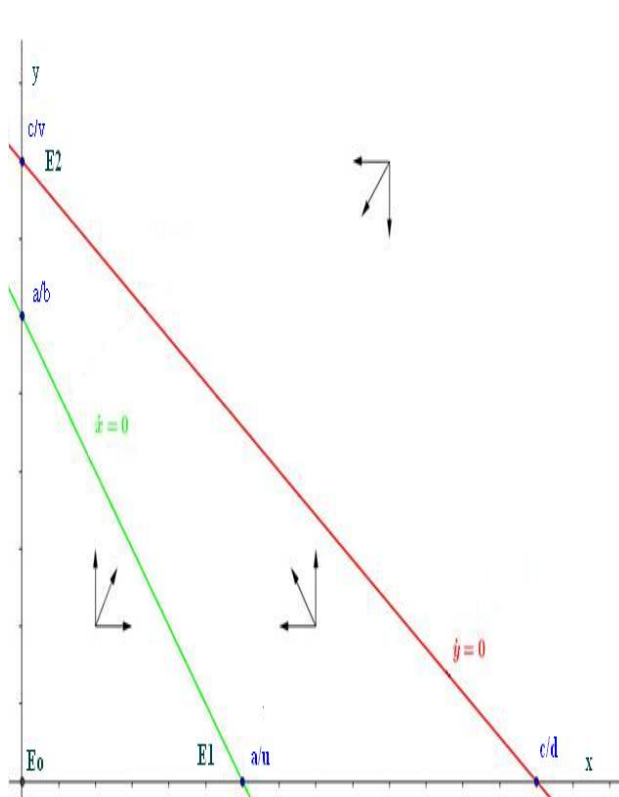
Različite situacije se mogu videti na sledećim graficima.

- Na Grafiku 4.9 se primećuje da postoje tri ravnotežne tačke označene sa E_0, E_1, E_2 . Vidi se da ravnotežna tačka E_0 neće biti stabilna jer ako se izabere tačka iz neke njene okoline trajektorija će se kretati od date tačke. Na osnovu usmerenih strelica se zaključuje da će se nakon proteka određenog vremena sistem naći u tački E_1 , što znači da će x -vrsta izumreti.
- U drugom slučaju analogno se zaključuje da se sistem kreće iz E_0 ka ravnotežnoj tački E_2 , pa će y -vrsta izumreti. (Grafik 4.10)
- Treći i četvrti slučaj se razmatra na osnovu grafika 4.11 i grafika 4.12.

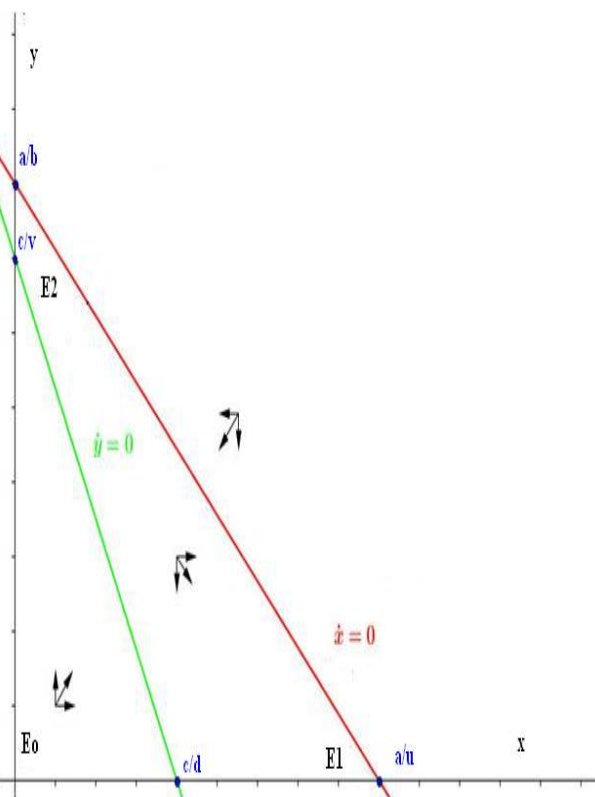
Ono što ova dva slučaja razlikuje od prethodna dva je mogućnost koegzistencije dveju vrsta. Takva situacija se pojavljuje se u tački **E₃**. Ta tačka se nalazi u preseku dve izokline i ona ima koordinate date sa :

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{av-bc}{uv-bd}, \frac{uc-ad}{uv-bd} \right).$$

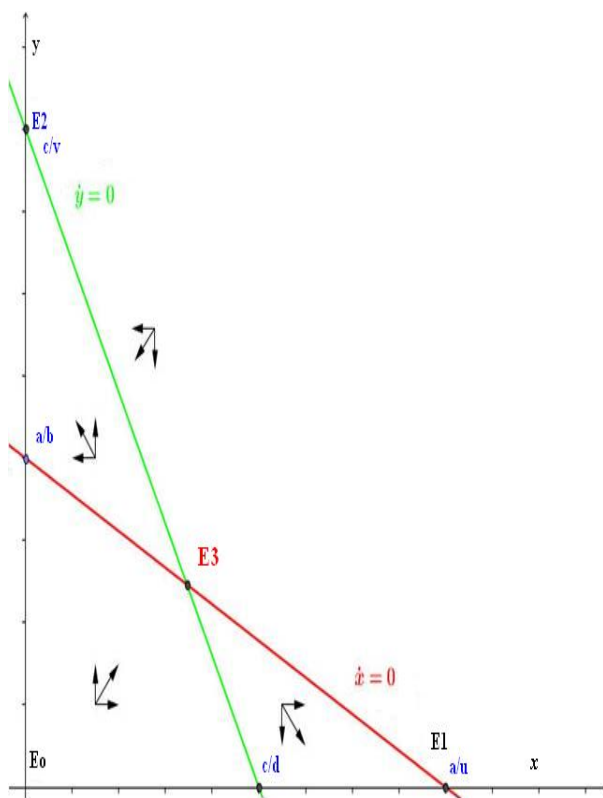
Međutim postavlja se pitanje kada će ta tačka biti stabilna ravnotežna tačka. Na osnovu silnica mogli bismo zaključiti da u slučaju grafika 4.11 tačka **E₃** nije stabilna ravnotežna tačka, dok na grafiku 4.12 jeste satabilna ravnotežna tačka.



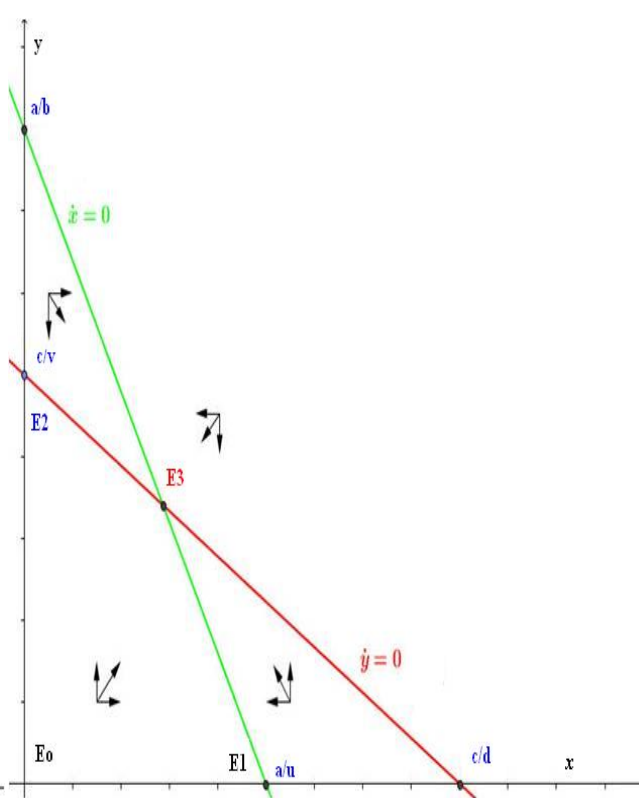
Grafik 4.9



Grafik 4.10



Grafik 4.11



Grafik 4.12

Zaključuje se sledeće:

- u/a je veličina uzajamnog uticaja između jedinki x -vrste a u odnosu na vrednost prirodnog rasta x -vrste;
 - b/a je veličina uticaja jedinki y -vrste na jedinke x -vrste a u odnosu na vrednost prirodnog rasta x -vrste;
 - v/c je veličina uzajamnog uticaja jedinki y -vrste a u odnosu na vrednost prirodnog rasta y -vrste;
 - d/c je veličina uticaja jedinki x -vrste na jedinke y -vrste a u odnosu na vrednost prirodnog rasta y -vrste.
-
- Na grafiku 4.9 se vidi da je $\frac{d}{c} < \frac{u}{a}$ i $\frac{b}{a} > \frac{v}{c}$. To praktično znači da je veličina uzajamnog uticaja između jedinki x -vrste veća od veličine uticaja te vrste na y -vrstu i da je veličina uticaja y -vrste na x -vrstu veća nego veličina uticaja te vrste na samu sebe. Usled toga, može se zaključiti da dolazi do izumiranja x -vrste.
 - U obrnutoj situaciji, tj. kada je prava u kojoj je $\dot{x} = 0$ iznad prave u kojoj je $\dot{y} = 0$ kao na grafiku 4.10 došlo bi do izumiranja y -vrste.
 - Neka je na grafiku 4.11: $\frac{d}{c} > \frac{u}{a}$ i $\frac{v}{c} < \frac{b}{a}$. Drugim rečima, uticaj jedinki x -vrste na jedinke y -vrste je veći nego međusobni uticaj jedinki u okviru x -vrste, a uticaj jedinki y -vrste na jedinke x -vrste je veći nego međusobni uticaj jedinki u okviru y -vrste. U ovom slučaju ne postoji stabilan ekvilibrijum, a prema analizi koja od vrsta će opstati zavisi samo od početnih uslova.
 - Grafik 4.12 je slučaj kada je $\frac{u}{a} > \frac{d}{c}$ i $\frac{v}{c} > \frac{b}{a}$. Dakle, relativni uzajamni uticaj jedinki x -vrste je veći od relativnog uticaja na jedinke y -vrste i relativni uzajamni uticaj jedinki y -vrste je veći od relativnog njihovog uticaja na jedinke x -vrste. Analizom se zaključuje da je u ovom slučaju moguće da date vrste koegzistiraju, tj. da postoji stabilan ekvilibrijum koji ne leži na jednoj od osa što znači da nijedna od vrsta neće izumreti.

[14]

Primer 4.4

Ako tačka u preseku dve izokline ima ravnotežne koordinate: $(x^*, y^*) = (900, 50)$, diskutovati rešenja.

- Broj zečeva je **tačno** 900, a broj lisica je **tačno** 50.

Tada je postignuta ravnoteža. Lisice imaju dovoljno hrane za opstanak i reprodukciju. Uzimajući u obzir i njihovu smrtnost, neće im se narušiti broj. Sa druge strane, postoji dovoljno zečeva da bi se omogućila njihova dalja reprodukcija, iako su ugroženi od strane predatora to na njih neće uticati.

- Broj zečeva je **veći** od 900, broj lisica je **manji** od 50.

Postoji obilje zečeva, koji raste velikom brzinom koji za sada nisu ugroženi previše od strane malog broja lisica. Postojeće lisice se hrane zečevima i imaju tendenciju stvaranja velikog broja mladunaca. Više lisica se rađa nego što umire. Sve dok je broj lisica ispod 50 populacija zečeva će rasti istim intenzitetom.

- Broj zečeva je **veći** od 900, broj lisica je **veći** od 50.

Postoji veliki broj lisica. One imaju dovoljno hrane da prežive, ali će im vremenom ponestati. Populacija zečeva se smanjuje, ali lisice još uvek nisu gladne. Lisice jedu više zečeva nego što se reprodukuje. Sledi izumiranje populacije zečeva. Na smanjenje populacije zečeva utiče populacija lisica veća od 50. Kada je smanjenje postignuto, populaciju lisice treba smanjiti na 50.

- Broj zečeva je **manji** od 900, broj lisica je **veći** od 50.

Ovde se nalazi veliki broj lisica, a mali broj zečeva. Lisice gladuju i njihova stopa nataliteta je mala. Kada je broj zečeva manji od 900, tada ima premalo hrane za lisice. Stopa mortaliteta postaje veća od stope nataliteta. Sledi izumiranje lisica.

- Broj zečeva je **manji** od 900, broj lisica je **manji** od 50.

U staništu sa malim brojem lisica i malim brojem zečeva, ostavljajući lisice sa oskudnim resursom hrane i niskom stopom nataliteta zečeva, a samim tim i lisica. I u ovom slučaju sledi izumiranje lisica.

U ovom slučaju kada je broj zečeva manji od 900, ima dva slučaja broja lisica: može ih biti manje ili više od 50. Dva različita slučaja ilustruju dve situacije, ali zaključak je isti. Da lisice ne bi gladovale, treba da bude veći broj zečeva od 900. U slučaju većeg broja gladnih lisica sa oskudnom brojem zečeva, kao i u slučaju sa samo nekoliko lisica, mali broj zečeva ukazuje na izumiranje lisica usled nedostatka hrane. [18]

Zaključak

Zakone difuzije za gasove formulisao je Graham (1829), a za rastvore Adolf Fik (1855). U biologiji difuzija podrazumeva širenje ili rasprostiranje (poljoprivredne kulture, lokacije životinja i njihova staništa). U fizici difuzija se posmatra kroz raspršivanje svetlosti.

Difuzija atoma nastaje u metalnim čvrstim telima određenim mehanizama. Prema Prvom Fikovom zakonu difuzije, difuzija nastaje zbog razlike koncentracije atoma od jednog mesta do drugog i može se primeniti za uslove stacionarnog stanja (tj.uslovi koji se ne menjaju sa vremenom). Gradijent koncentracije se menja sa promenom vremena i određen je drugim Fikovim zakonom.

Difuzija se izučava već dva veka. Teoriju difuzije su razvili prvenstveno Furije i Laplas, koji nas je upoznao sa dve različite teorije difuzije: fizičke i slučajne. Difuzija je tema koja prepliće matematika sa uočenim pojavama. Braunova analiza slučajnih cik-cak pokreta polena čestica u vodi na fiksnoj temperaturi. Tako je skoro sto godina nakon što su Furije i Laplas razgovarali o fizičkim i slučajnim difuzijama,

Ajnštajn je ujedinio ova dva različita koncepta kroz njegov pojednostavljen rad u odnosu na Braunovo kretanje. Teorija verovatnoće je razvijena uz Gausov proces i lance Markova. Lanci Markova primenjuju se u različitim oblastima jer važi da pored datog trenutnog stanja, buduće stanje sistema ne zavisi od prošlih stanja. Prirodne nauke pokrivaju različiti spektar naučnih studija o životu, počev od međucelijskih procesa na molekularnom nivou do globalnog širenja zaraznih bolesti kod ljudi. Difuziju molekula predstavlja se trodimenzionalnom jednačinom, uz pomoć Stoksove formule.

Grana matematike pod nazivom stohastika je napredovala uz Plankov pristup difuzije. Matematički modeli su neophodan alat za razumevanje složenih prirodnih fenomena. Da bi se opisao vremenski kontinuiran razvoj datog sistema, praktikuju se deterministički modeli jer oni omogućavaju relativno jednostavne simulacije. Takvi modeli ne obuhvataju slučajnosti osnova dinamike i zbog toga se ispostavlja da su neadekvatni u primeni. Stohastičko modeliranje u prirodnim pojavama kao što je rast vrsta populacije, širenje epidemije ili mutacije gena su podložne slučajnim varijacijama. Njihova evolucija nije predvidiva. Međutim, primenama matematičkih modela omogućava se uvid u takve složene procese. Primena stohastičkih diferencijalnih jednačina daje rešenja, stoga je difuzija postala važno sredstvo za statističku analizu. Parcijalne diferencijalne jednačine su najpogodnije za opis ovakvih procesa.,a uz rubne i početne uslove, dobijaju se modeli.

Osnovne pretpostavke Maltusovog populacionog modela su odgovarale za populacije bakterija ili životinja u idealnim uslovima, odnosno populaciju kod koje postoje neograničeni resursi,

odgovarajuća ishrana, nepostojanje bolesti, nepostojanje prirodnih neprijatelja... Maltusov model ima bitan nedostatak: nijedna realna sredina ne može da održava neograničeno veliki broj ljudi. Kako Maltusov model ima manu, tj. neograničen rast, ovaj nedostatak moguće je ispraviti modelom koji ograničava rast do neke maksimalne fiksne vrednosti specifične za sistem koji se posmatra. Maltusov eksponencijalni populacioni model nije realan jer ograničeni resursi (hrana, voda, vazduh) usporavaju rast populacije. Populacija teži teritorijalnom zasićenju.

Drugi nedostatak je taj što linearne brzine rađanja i umiranja nisu konstantne. Na osnovu navedenog, model logističkog rasta kod koga postoji granica do koje vrednost veličine populacije raste je prihvatljiviji.

Posmatrajući model Lotka-Voltera utvrđeno je da postoji ravnotežna tačka i da ni u kom slučaju ne dolazi do nestanka vrste koja predstavlja plen, što opet ne odgovara realnoj slici. Primećeno je da su ovi modeli izuzetno pojednostavljeni, tj. u obzir uzimaju mali broj okolnosti. Da bi se dobile kvalitetnije procene moramo uvažiti veći broj pretpostavki.

Maltus u jednom od svojih eseja objašnjava kako se može postići idealna ravnoteža između broja stanovnika i količine hrane:

'Sva deca koja se rode iznad broja potrebnog za održavanje broja stanovnika na željenom nivou, neizbežno bi morala nestati, osim ako se za njih napravi mesta smrću odraslih osoba... Treba podsticati delovanje prirode u stvaranju tog mortaliteta umesto da ga glupo i uzaludno sprečavamo. A ako se bojimo prečestih poseta strašnog oblika gladi, trebamo pobunama potaknuti druge oblike prisilnog i prirodnog uništenja. Umesto preporučivanja čistoće siromašnima potaknuti suprotne navike. U našim gradovima trebamo praviti uže ulice, nagomilavati više ljudi u kuće i izazivati povratak kuge. Na selu trebamo graditi naselja blizu stajaćih voda i posebno ih razvijati u svim močvarnim i nezdravim uslovima. Ali iznad svega trebamo strogo osuđivati specifične lekove protiv harajućih bolesti i one dobronamerne ljude, koji su u zabludi, a koji misle da su čovečanstvu učinili uslugu time što su doveli do istrebljenja određene bolesti'.³²

³² Thomas Robert Malthus, An Essay on the principle of population, [16]

Literatura

- [1] Hoffman, Joe D., Steven Frankel, Numerical methods for engineers and scientists, CRC press, New York, 2001.
- [2] Nedeljkov Marko, Parcijalne diferencijalne jednačine, Prirodno - matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 2004.
- [3] Dattagupta Sushanta, Diffusion formalism and applications. CRC Press Taylor i Francis group, New York, 2014.
- [4] Daniel ben-Avraham, Shlomo Havlin. Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems, Cambridge University Press, United Kingdom, 2005.
- [5] Зельдович, Я.Б. Мышкис, А.Д. Элементы математической физики среда из невзаимодействующих частиц. Наука, Москва, 1973.
- [6] Okubo Akira, Simon A. Levin, Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives. Springer, New York, 2001.
- [7] W. Chen, S. Holm, Physical interpretation of fractional diffusion-wave equation via lossy media obeying frequency power law. Simula Research Laboratory, P. O. Box. Lysaker, Norway, 2003.
- [8] Marković Dragan, Procesna i energetska efikasnost, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2010.
- [9] Roger Kitching, A simple simulation model of dispersal of animals among units of discrete habitats, Springer, Canada, 1971.
- [10] Boyce William, Richard C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley and Sons, USA, 2001.
- [11] Gonzales, Kluger, Hardy, The Rabbit - Husbandry, health and production - Chapter 6 Housing and equipment, Toulouse Centre: Food and Agriculture Organization of the United Nations, 1971.
- [12] Bannerman Sally, Animals in Schools, NSW Department of Education and Communities — Association of Independent Schools of NSW Level 3, 1; Oxford St Darlinghurst, NSW, 2010.
- [13] Senge Peter, The Fifth Discipline, Currency Doubleday, United States of America, 2004.

- [14] Ronald Shone, *Economic Dynamics Phase Diagrams and their Economic Application*, (Chapter 14) Cambridge University Press, 2002.
- [15] M. Beuković, Z. Popović, N. Đorđević, *Međunarodni simpozijum o lovstvu »Savremeni aspekti održivog gazdovanja populacijama divljači« Analiza gazdovanja populacijom zeca u Vojvodini u period od 1997–2011. godine*; Zemun-Beograd, Srbija, 22.–24. jun, 2012.
- [16] Thomas Robert Malthus, *An Essay on the Principle of Population*, J. Johnson, England, 1798.
- [17] May Robert, *Theoretical Ecology: Principles and Applications* (Chapter 5), Oxford, New York, 2007.
- [18] Eva Jensen, *Is Explicit Information Important for Performance in Dynamic Systems*, Department of Social Sciences, Örebro University, Sweden, 2015.

Biografija



Biljana Mijatović je rođena 27.09.1989. u Osijeku. Osnovnu školu "23. Oktobar" je završila u Sremskim Karlovcima 2004. godine. Iste godine je upisala Gimnaziju "Svetozar Marković" u Novom Sadu, opšti smer, koju završava 2008. godine.

Po završetku gimnazije, 2008. godine, upisala je osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer primenjena matematika, modul matematika finansija, koje je završila 2012. godine. Potom je upisala master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija matematike finansija i nastave matematike u septembarskom roku 2015. godine.

Novi Sad, 2015.

Biljana Mijatović

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Završni rad

VR

Autor: Biljana Mijatović

AU

Mentor: dr. Marko Nedeljkov

MN

Naslov rada: Modeliranje difuzionih procesa u prirodnim naukama

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / e

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2015

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet,

Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada : (4, 92,18, 4, 5, 12, 0)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Parcijalne diferencijalne jednačine

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči:

Difuzija, Disperzija, Parcijalne diferencijalne jednačine, Braunovo kretanje, Slučajan hod, Stohastičnost, Lanci Markova, Matematički model, Prirodno stanište, Fluid, Čestica, Maltusov model rasta populacije, Populacija zečeva, Natalitet i mortalitet, Lisica, Logistička kriva, Predator-plen model.

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

Ovaj rad se bavi opisom matematičkog modeliranja difuzionih procesa u prirodnim naukama, odnosno problemom difuzije u prirodi.

U prvom poglavlju sledi kratak opis parcijalnih diferencijalnih jednačina i njihova veza sa Furijeovim redom, potom proučava Braunovo kretanje preko Furijeove jednačine. Opisan je slučajni hod po kristalnoj rešetci, zatim kako je Ajnštajn posmatrajući Braunovo kretanje došao do Avogadrovog broja. Stoksovim zakonom se objasnjava međudelovanje termodinamike i kinetike.

Drugo poglavlje pojašnjava poreklo lanaca Markova preko Braunovog kretanja, Ajnštajnove analize i Tejlrorovog razvoja.

Treće poglavlje se odnosi na matematičku difuziju u prirodnim naukama. Proučava difuzijske procese u ekologiji i paralelu između determinističkog i stohastičkog modela, zatim sledi opis difuzije u prirodnim sredinama i tokova fluida, bavi se fizičkom difuzijom i načinima prenosa toplote, difuzijom atmosferskog graničnog sloja, okeanografskom i hidrološkom difuzijom. Difuzijom u ekosistemu opisuju se načini transporta među životinjama i organizmima. Daje formulu za brzinu taloženja čestica i opis difuzionog modela spora. Sledi opis difuzije životinja u staništu, osnovni pojmovi načina kretanja životinja i veza telesne težine životinja i staništa. Preko matematičkog modela disperzije životinja u prirodnim staništima posmatra se preko dva slučaja kretanja. U modelu kretanja životinja u staništu daje se primer kretanja crvene lisice za odrasle ženke, mužjake i mladunce. Posmatra zapažanje Sinifa i Jesena, kao i model skitanja životinja.

Na kraju pomoću Maltusovog modela rasta populacije i logističke jednačine rasta dolazi se do disperzije za dve životinjske vrste.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: Jul, 2015.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr . Danijela Rajter Ćirić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Milica Žigić, docent, Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Biljana Mijatović

AU

Mentor: Marko Nedeljkov, Ph.D.

MN

Title: Modeling of diffusion processes in the natural sciences

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2015.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: (4, 92, 18, 4, 5, 12, 0)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Partial Differential Equations

SD

Subject/Key words:

Diffusion, Dispersion, Partial differential equations, Brownian motion, Random walk, Stochastic, Markov chain, Mathematical model, Natural habitat, Fluid, Particle, Malthus's model of population growth, Rabbit population, Birth rate and mortality, Fox, Logistic curve, Predator-prey model.

SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract:

This master thesis deals with the description of mathematical modeling of diffusion processes in the natural sciences, ie the problem of dispersion in nature.

The first chapter gives a brief description of partial differential equations and their connection with Fourier series. Then study the Brownian motion via Fourier equation. A random walk on the lattice is described, then as Einstein observing Brownian motion came to the Avogadro number. Stokes explains the interaction of the law of thermodynamics and kinetics.

The second chapter explains the origins of chains Markov through Brownian motion, Einstein's analysis and Taylor's development.

The third chapter refers to the mathematical diffusion in the natural sciences. The first study of diffusion processes in ecology and paralelu between deterministic and stochastic models. This is followed by a description of diffusion in natural environments and fluid flows. It deals with the

physical diffusion and modes of heat transfer, diffusion of atmospheric boundary layer, oceanographic and hydrological diffusion. Diffusion in the ecosystem describes modes of transport between animals and organisms, provides a formula for rate of deposition of particles and a description of the diffusion model of the dispute. The following describes the diffusion of animals in the habitat, the basic concepts of ways of movement of animals and the connection weight of animals and habitats. Through mathematical models of dispersion of animals in their natural habitats is seen through two cases of movement. In the model the movement of animals in the habitat gives the example of movement of red fox adult females, males and calves. Watching drawing observation Sinif and Jensen, as well as model wandering animals.

At the end of this thesis, model by Malthus population growth and logistic equation of growth leads to dispersion of two species.

AB

Accepted by the Scientific Board on: July, 2015.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: Dr. Danijela Rajter Ćirić, full professor, Faculty of Science and Mathematics,
University of Novi Sad

Member: Dr. Marko Nedeljkov, full professor, Faculty of Science and Mathematics,
University of Novi Sad

Member: Dr. Milica Žigić, docent, Faculty of Science and Mathematics,
University of Novi Sad