UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Biljana Jovanovski

Intertemporalni izbor i optimalno upravljanje

Master rad

Mentor:
Prof. dr Nenad Teofanov

Novi Sad, 2016

Sadržaj

Predgovor **3**

1 Uvod **5**

1.1 Uvodni pojmovi 5
1.2 Diferencijal funkcionele i potreban uslov za ekstrem funkcionele 7
1.3 Ojlerova jednačina 9
1.4 Granični uslovi 12
1.5 Varijacioni račun sa ograničenjima 15

2 Optimalno upravljanje **19**

2.1 Pojam optimalnog upravljanja 19
2.2 Hamiltonova funkcija 21
2.3 Princip maksimuma 22
2.4 Optimalno upravljanje sa diskontovanjem 24
2.5 Fazni dijagrami 25

3 Intertemporalni izbor **29**

3.1 Pojam intertemporalnog izbora 29
3.2 Preferencije potrošača 34
3.3 Slutsky jednačina 35
3.4 Intertemporalna funkcija korisnosti 37
3.5 Fišerova investicija 42

4 Primena optimalnog upravljanja u rešavanju modela intertemporalnog izbora **45**

4.1 Model intertemporalne korisnosti 45
4.2 Model eksploatacije obnovljivog resursa 51

Dodatak **59**

Zaključak **65**

Literatura **67**

Biografija **68**

Ključna dokumentacija **69**

Predgovor

Osnovni cilj rada je predstavljanje i rešavanje modela intertemporalnog izbora pomoću teorije optimalnog upravljanja. Sledi prikaz organizacije rada.

U uvodnom delu rada, navedene su osnovne definicije i pojmovi koji su neophodni za razumevanje rada. Uvode se osnovni pojmovi među kojima su norma, diferencijal funkcionele, potrebni uslov za ekstrem funkcionele. Izvodi se Ojler-Lagranžova jednačina. Prikazuje se varijacioni račun sa ograničenjima, jer su funkcije stanja u varijacionom računu često vezane za unapred data ograničenja.

Drugi deo rada posvećen je optimalnom upravljanju. Definisano je optimalno upravljanje i prikazana matematička formulacija optimalnog upravljanja. Optimalno upravljanje delimo na statičku i dinamičku optimizaciju. U ovom radu bavimo se dinamičkom optimizacijom i navedene su tehnike za rešavanje problema dinamičke optimizacije. Prikazana je Hamiltonova funkcija i princip maksimuma. Posebno se navodi optimalno upravljanje uz diskontovanje. Na kraju ove glave prikazana je i tehnika kojom se rešava sistem diferencijalnih jednačina, a to su fazni dijagrami.

U trećem delu bavimo se intertemporalnim izborom. Navodi se definicija i ekonomska interpretacija intertemporalnog izbora. Uvedeni su pojmovi koji su neophodni za razumevanje intertemporalnog izbora kao što su efekat supstitucije i efekat dohotka, oportunitetni troškovi.

U četvrtom delu rada prikazujemo primenu optimalnog upravljanja na probleme intertemporalnog izbora. Navodi se model intertemporalne maksimizacije korisnosti i prikazano je rešenje tog modela, koristeći metode koje su navedene u prethodnim glavama.

***

Zahvaljujem se svom mentoru dr Nenadu Teofanovu na svim savetima, sugestijama i pruženoj pomoći prilikom izrade ovog rada. Takođe, zahvaljujem se članovima komisije, dr Ljiljani Gajić i dr Ljiljani Teofanov, svim ostalnim profesorima sa kojima sam sarađivala tokom osnovnih i master akademskih studija, kao i svim kolegama i koleginicama sa kojima je studiranje bilo lepo iskusvo.

Najveću zahvalnost dugujem mojoj porodici na podršci i razumevanju tokom školovanja i života.

Biljana Jovanovski

1

Uvod

U ovom delu navedene su osnovne definicije koje su potrebne za razumevanje rada. Uvedeni su pojmovi norme, diferencijala funkcionele, potreban uslov za ekstrem funkcionele koji će imati značajnu ulogu u uvođenju varijacionog računa. Izvedena je Ojler-Lagranžova jednačina. Objašnjen je varijacioni račun sa ograničenjima. Posebno nas zanimaju ograničenja u vidu diferencijalnih jednačina.
Korišćena je literatura [2], [3], [4].

1.1 Uvodni pojmovi

U ovom radu ćemo tražiti rešenja nad prostorom koji je podskup klase neprekidnih (dva puta neprekidno diferencijabilnih) funkcija nad nekim zadatim intervalom i zbog toga ćemo definisati metričke, normirane i pred-Hilbertove prostore.

Skup X je vektroski prostor nad poljem realnih brojeva $(R, +, \cdot)$ ako je $(X, +)$ komutativna grupa i ako je definisano preslikavanje $R \times X \to X$, tako da za $\forall \alpha, \beta \in R, x, y \in X$ važi:

1. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
2. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
3. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
4. $1x = x$,

pri čemu je slika para (α, x) označena sa αx.

Prostor $(X, \|\cdot\|)$ je normiran ako preslikavanje $\|\cdot\|$:X$\rightarrow R$ ispunjava sledeće uslove:

1. $\|x\| \geq 0$, i $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$,
2. $\|x + y| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$,
3. $\|\alpha x\| =| \alpha | \, \|x\|, \forall \alpha \in R, \forall x \in X$.

Tada je $\|\cdot\|$ norma u X.

Metrički prostor je uređen par (X, d), gde je X neprazan skup, a $d : X \times X \rightarrow R$ je funkcionela za koju važi:

1. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$,
2. $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$,
4. $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$.

Definisaćemo metriku na sledeći način:

$$d(x, y) := \|x - y\|, \forall x, y \in X.$$

Možemo zaključiti da je svaki normiran prostor metrički, dok obrnuto ne mora da važi.

Neka je X vektorski prostor nad poljem realnih brojeva. Preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow R$ za koje važi:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ i $\langle x, x \rangle = 0$ ako i samo ako je $x = 0$,
2. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \forall \alpha, \beta \in R, \forall x, y, z \in X$,
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in X$

se naziva skalarni proizvod ili drugačije untrašnji proizvod.

Skalarni proizvod indukuje normu na sledeći način:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, x \in X.$$

Uređeni par $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ zove se unitarni vektorski prostor ili pred-Hilbertov prostor. Ako je unitarni prostor kompletan onda se on naziva Hilbertov prostor.

U metričkom prostoru niz $\{x_n\}_{n\in N}, x_n \in N, n \in N$ konvergira ka $x \in X$ ako i samo ako

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \geq n_0)(d(x_n, x) < \varepsilon),$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ako i samo ako } \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

U metričkom prostoru niz $\{x_n\}_{n\in N}, x_n \in N, n \in N$ je Košijev ako važi

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in N)(\forall n, m \in N)(n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon).$$

Kaže se da je prostor kompletan ako svaki Košijev niz u metričkom prostoru konvergira.

Označićemo neke prostore na sledeći način:
$C[a, b]$ je prostor neprekidnih funkcija nad $[a, b]$.
$C^1[a, b]$ je prostor neprekidno diferencijablinih funkcija nad $[a, b]$.
$C^n[a, b]$ je prostor n puta neprekidno diferencijabilnih funkcija nad $[a, b]$.

Prostor $C[a, b]$ ima normu

$$\|x\| = max_{t\in[a,b]}|x(t)\ vert,$$

dok prostor $C^1[a, b]$ ima normu

$$\|x\|_1 = max_{t\in[a,b]}(x(t)) + max_{t\in[a,b]}(x'(t)).$$

1.2 Diferencijal funkcionele i potreban uslov za ekstrem funkcionele

Neka je dat normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ i funkcionela $J : X \to R$. Priraštaj funkcionele J u tački $x \in X$ dat je sa

$$\triangle J_x(h) = J(x + h) - J(x),$$

gde je $h \in X$ priraštaj nezavisno promenljive $x \in X$. Korističemo oznake $\triangle J_x(h) = \triangle J(x) = \triangle J$.

Definicija 1.2.1. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor i neka je $J : X \to R$. Funkcionela J je diferencijabilna u tački $x_0 \in X$ ako se njen priraštaj $\triangle J_{x_0}$ može zapisati u obliku*

$$\triangle J_{x_0(h)} = \theta_{x_0}(h) + r_{x_0}(h),$$

gde je $\theta_{x_0}(h)$ neprekidna linearna funkcionela po $h \in X$, a $r_{x_0}(h) = o(\|h\|)$, kada $\|h\| \to 0$. Linearna funkcionela θ_{x_0} zove se varijacija ili diferencijal funkcionele J, a može se označiti i sa δJ.

Funkcionela J dostiže lokalnu ekstremnu vrednost u tački $x_0 \in X$ ako njen priraštaj ne menja znak u nekoj okolini tačke x_0, odnosno ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da za sve $x \in X$ za koje je $\|x - x_0\| < \varepsilon$ važi $\triangle J \geq 0$ ili $\triangle J_{x_0} \leq 0$.

Sledeća teorema nam daje jedan potreban uslov za ekstrem diferencijabilne funkcionele.

Teorema 1.2.1. *Neka je $J : X \to R$ diferencijabilna funkcionela nad normiranim prostorom $(X, \|\cdot\|)$. Tada J ima lokalni ekstrem u tački x_0 ako je njen diferencijal (ako postoji) jednak nuli u nekoj okolini tačke x_0, odnosno ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da za sve h za koje je $\|h\| \leq \varepsilon$ važi $\delta J_{x_0}(h) = 0$.*

Dokaz:
Pretpostavićemo da funkcionela J ima tačku lokalnog minimuma $x_0 \in X$. Tada znamo da postoji $\varepsilon > 0$ tako da za sve h za koje je $\|h\| < \varepsilon$ važi $J(x_0 + h) - J(x_0) \geq 0$.
Kako je J diferencijabilna u tački x_0, na osnovu definicije 1.2.1. njen priraštaj u toj tački se može zapisati

$$J(x_0 + h) - J(x_0) = \delta J_{x_0}(h) + r_{x_0}(h),$$

gde je $\delta J_{x_0}(h)$ neprekidna linearna funkcionela po h, a $r_{x_0}(h) = o(\|h\|)$ kada $\|h\| \to 0$.
Posmatraćemo $\tilde{h} = \varepsilon h \in X$, gde se ε može birati tako da važi $\|\tilde{h}\| < \varepsilon$. Posmatraćemo 2 slučaja. Prvo kada je $\varepsilon > 0$. Tada je

$$\frac{J(x_0 + \varepsilon h) - J(x_0)}{\varepsilon\|h\|} \geq 0. \tag{1.1}$$

Iz uslova diferencijabilnosti i (1.1):

$$\frac{\delta J_{x_0}(\varepsilon h) + r_{x_0}(\varepsilon h)}{\varepsilon\|h\|} \geq 0$$

Kako je varijacija linearna funkcionela i kako znamo da je $r_{x_0}(\tilde{h}) = o(\|\tilde{h}\|)$ kada $\|\tilde{h}\| \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\delta J_{x_0}(h)}{\|h\|} + \frac{r_{x_0}(\varepsilon h)}{\|\varepsilon h\|}\right) = \frac{\delta J_{x_0}(h)}{\|h\|} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{r_{x_0}(\varepsilon h)}{\|\varepsilon h\|} = \frac{\delta J_{x_0}(h)}{\|h\|} \geq 0.$$

Iz predhodnog izraza sledi da je $\delta J_{x_0}(h) \geq 0$ za sve $\|h\| < \varepsilon$.
Kada je $\varepsilon < 0$:

$$\frac{J(x_0 + \varepsilon h) - J(x_0)}{\varepsilon\|h\|} \leq 0. \tag{1.2}$$

Iz diferencijabilnosti funkcionele J, (1.2), definicije i linearnosti varijacije dobijamo

$$\delta J_{x_0}(h) \leq 0 \text{za sve} \|h\| < \varepsilon.$$

Zaključak je da ako je x_0 tačka lokalnog minimuma diferencijabilne funkcionele J onda postoji $\varepsilon > 0$ tako da za sve $h \in X$ za koje je $\|h\| < \varepsilon$ važi $\delta J_{x_0}(h) = 0$. Dokazali smo teoremu u slučaju kada je tačka x_0 tačka lokalnog minimuma. Analogno se dokazuje u slučaju kada je tačka x_0 tačka lokalnog maksimuma.
$\square$

Analizirajući dokaz ove teoreme možemo zaključiti da je dovoljno pretpostaviti da je funkcionela J diferencijabilna u tački x_0.

1.3 Ojlerova jednačina

Izvešćemo Ojler-Lagranžovu jednačinu koja predstavlja potreban uslov za ekstrem funkcionele. S obzirom da ćemo tražiti slabi ekstrem funkcionele $J(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))dt$, uz date uslove $x(a) = A$ i $x(b) = B$ i pri čemu je podintegralna funkcija f glatka, za početak ćemo definisati slab ekstrem koji posmatramo u prostoru $C^1[a, b]$.

Definicija 1.3.1. *Funkcionela J ima slab lokalni ekstrem u tački x_0, ako za $x_0 \in C^1[a, b]$ važi $J(x_0) \leq J(x)$ za sve $x \in C^1[a, b]$ za koje važi $\|x - x_0\|_1 < \varepsilon$.*

U nastavku navodimo leme koje će nam pomoći u izvođenju Ojler-Lagranžove jednačine.

Lema 1.3.1. *a) Neka je data funkcija $f \in C[a, b]$ i neka važi $\int_a^b f(t)x(t)dt = 0$, za sve $x \in C^1[a, b]$ za koje je $x(a) = x(b) = 0$. Tada je $f \equiv 0$.*

b) Neka je data funkcija $g \in C[a,b]$ i neka važi $\int_a^b g(t)x'(t)dt = 0$, za sve $x \in C^1[a,b]$ za koje je $x(a) = x(b) = 0$. Tada je $g(t) = const.$

Dokaz:
(a) Treba pokazati da je $f = 0$. Pretpostavimo suprotno, i do dokaza dolazimo kontradikcijom. Neka postoji $x_0 \in (a,b)$, tako da je $f(x_0) > 0$. Tada iz neprekidnosti funkcije $f(x)$, sledi da je na nekom intervalu $(c,d) \subset (a,b)$ koji sadrži tačku x_0 ispunjeno $f(x_0) > 0$, za sve $x \in (c,d)$.

Izabraćemo $h(x) := (c-x)^2(d-x)^2$ za $x \in (c,d)$ i $h(x) = 0$ za $x \in (a,b)\backslash(c,d)$. Tada važi

$$\int_a^b f(x)h(x)dx > 0,$$

što nas dovodi u kontadikciju sa pretpostavkom leme.

(b) Iz teoreme o srednjoj vrednosti za integral sledi da postoji $c \in R$ tako da važi

$$\int_a^b (g(x) - c)dx = 0.$$

Pokazaćemo da za proizvoljnu neprekidnu funkciju $f(x)$, $x \in [a,b]$ važi

$$\int_a^b (g(x) - c)f(x)dx = 0.$$

f možemo zapisati u obliku $f(x) = \lambda(x) + \alpha$, pri čemu je $\int_a^b \lambda(x)dx = 0$, a α je odgovarajuća konstanta data sa $\alpha = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Funkcija $h(x) = \int_a^x \lambda(\tau)d\tau$ ispunjava uslove zadatka ($h'(x) = \lambda(x)$). Dobijamo

$$\int_a^b (g(x)-c)f(x)dx = \int_a^b g(x)\lambda(x)dx - c\int_a^b \lambda(x)dx + \alpha\int_a^b (g(x)-c)dx = 0$$

za proizvoljnu funkciju $f \in C[a,b]$. Za funkciju $f(x) = g(x) - c$, dobija se

$$\int_a^b (g(x) - c)^2 dx = 0$$

što je u stvari $g(x) \equiv c$. □

Lema 1.3.2. *Neka su date funkcije $f, g \in C[a,b]$ i neka važi*

$$\int_a^b (f(t)x(t) + g(t)x'(t))dt = 0,$$

za sve $x \in C^1[a,b]$ za koje je $x(a) = x(b) = 0$. Tada je g diferencijabilna i važi $f(t) - g'(t) = 0$.

Dokaz:
Neka je $k(x) = \int_a^x f(\tau)d\tau$. Primenom parcijalne integracije dobijamo

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = h(x)k(x)\mid_a^b - \int_a^b k(x)h'(x)dx = -\int_a^b k(x)h'(x)dx.$$

Dalje imamo

$$\int_a^b [f(x)h(x) + g(x)h'(x)]dx = -\int_a^b k(x)h'(x)dx + \int_a^b g(x)h'(x)dx$$

$$= \int_a^b [g(x) - k(x)]h'(x)dx = 0.$$

Na osnovu prethodne leme dobijamo $g(x) = k(x) + c$, za neko $c \in R$.
Desna strana ove jednačine je diferencijabilna ($k'(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$), odakle sledi $g \in C^1[a,b]$ i $g'(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$ što je i trebalo pokazati. $\square$

Posmatramo nezavisnu promenljivu x i njen priraštaj $x(t) + h(t)$. Kako smo rekli da tražimo ekstrem funkcionele uz uslove $x(a) = A$ i $x(b) = B$, pretpostavićemo da važi $h(a) = h(b) = 0$, kako bi bili ispunjeni ti granični uslovi. Znamo da je potreban uslov da funkcionela J ima ekstrem da je $\delta J = 0$, odnosno da je varijacija funkcionele J jednaka nuli. Sada ćemo naći tu varijaciju.

Priraštaj $\Delta J(x)$ je dat kao

$$\Delta J(x) = \int_a^b [f(t, x+h, x'+h') - f(t, x, x')]dt.$$

Kako je podintegralna funkcija diferencijabilna, na osnovu definicije 1.2.1. imamo

$$[f(t, x+h, x'+h') - f(t, x, x')] = (\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial x'}h') + r(t, x, x', h, h').$$

Kako $r \to 0$ kad $\|h\|_1 \to 0$, važi

$$\delta J = \int_a^b (\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial x'}h')dt.$$

Zaključujemo da je potreban uslov za slab ekstrem funkcionele J:

$$\delta J = \int_a^b (\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial x'}h')dt = 0. \tag{1.3}$$

Kada na (1.3) primenimo lemu 1.3.2. dobijamo Ojler-Lagranžovu jednačinu koja je data u sledećem obliku

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0.$$

Možemo videti da je potreban uslov koji funkcija x_0 mora ispunjavati da bi bila ekstrem funkcionele J jeste da je x_0 rešenje Ojlerove jednačine.
Ekstremale su integralne krive koje zadovoljavaju Ojlerovu jednačinu.
Sledi teorema o dovoljnom uslovu za ekstrem funkcionele.

Teorema 1.3.1. *Neka je data funkcionela $J(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))dt$, pri čemu $x \in C^1[a, b]$ i važi $x(a) = A, x(b) = B$. Ako funkcionela J ima ekstrem u $x_0 \in C^1[a, b]$, onda je x_0 rešenje Ojlerove jednačine*

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0,$$

sa graničnim uslovima $x(a) = A, x(b) = B$.

Dokaz:

Za sve $h(x) \in C^1[a, b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$ znamo da važi

$$\int_a^b [\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}]h(x)dx = 0.$$

Ako uzmemo da je

$$F = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}$$

koristeći lemu 1.3.1. pod (a) dobijamo

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

□

1.4 Granični uslovi

Znamo da je

$$\delta J = \int_a^b (\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial x'}h')dt = 0$$

uslov stacionarnosti.
Ako primenimo parcijalnu integraciju dobijamo

$$\int_a^b (\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'})hdt + (\frac{\partial f}{\partial x'}h \mid_{t=b} - \frac{\partial f}{\partial x'}h \mid_{t=a}) = 0.$$

Kako ova jednakost važi za sve h, tako važi i za one koje imaju osobinu $h(a) = h(b) = 0$, pa sledi

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial x'} \mid_{t=b} h(b) - \frac{\partial f}{\partial x'} \mid_{t=a} h(a) = 0. \tag{1.4}$$

Posmatramo 4 mogućnosti, koje su prikazane na slici (1.1):

1. Ako je x zadato i u a i u b, tj. važi $x(a) = A$ i $x(b) = B$, jednakost (1.4) je ispunjena trivijalno, jer važi da je $h(a) = h(b) = 0$.

2. Ako x nije zadato ni u a ni u b, njena varijacija ne mora biti jednaka 0, odnosno $h(a)$ i $h(b)$ ne moraju biti nula. Tada iz (1.4) važi

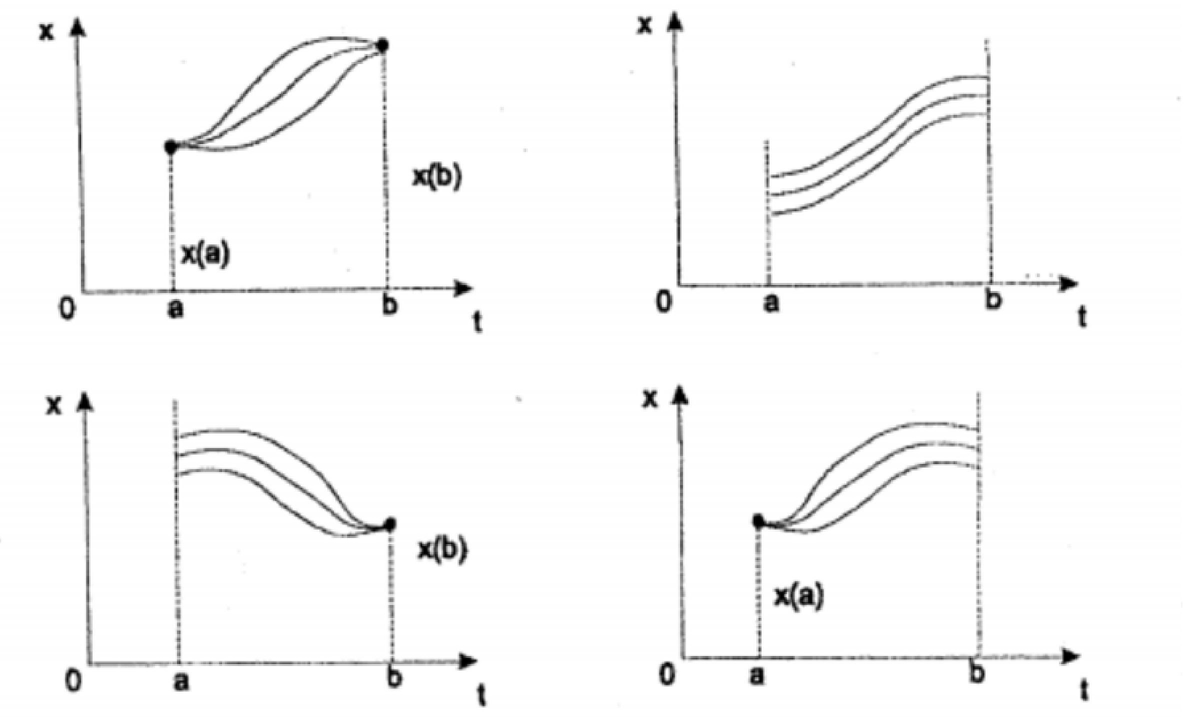
$$\frac{\partial f}{\partial x'} \mid_{t=b} = 0 \text{ i } \frac{\partial f}{\partial x'} \mid_{t=a} = 0.$$

3. Ako x nije zadato u a, a jeste u b i važi $x(b) = B$, onda iz (1.4) sledi

$$\frac{\partial f}{\partial x'} \mid_{t=a} = 0.$$

4. Ako x nije zadato u b, a jeste u a i važi $x(a) = A$, onda iz (1.4) sledi

$$\frac{\partial f}{\partial x'} \mid_{t=b} = 0.$$



Slika 1.1

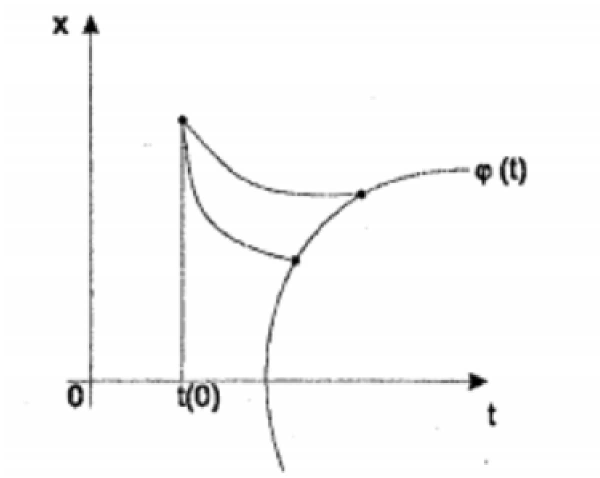
U praksi najčešće nisu date granice integrala ili je data samo jedna granica. Posmatraćemo problem (slika 1.2) koji se naziva problem sa pokretnim granicama:

$$J(x) = \int_a^{\gamma+\Delta\gamma} f(t, x, x')dt \to min,$$

uz uslove $x(a) = A$, $x(\gamma) = \varphi(\gamma)$. Vidimo da i nezavisna promenljiva t varira od γ do $\gamma + \Delta\gamma$. U ovakvim slučajevima kada jedna granica nije zadata dobijamo uslov transferzalnosti

$$f + (\varphi' - x')f_{x'} \mid_{t=\gamma} = 0.$$

Ako nije zadata i druga granica, dobijamo još jedan uslov transferzalnosti.



Slika 1.2

Dakle, u problemima sa nepokretnim granicama potreban uslov za ekstrem funkcionele je Ojler-Lagranžova jednačina, dok u problemima sa pokretnim granicama osim Ojler-Lagranžove jednačine mora biti ispunjen i uslov transferzalnosti.

1.5 Varijacioni račun sa ograničenjima

Ograničenja mogu biti u vidu određenih integrala, algebarskih jednačina, diferencijalnih jednačina ili njihova kombinacija. U problemima intertemporalnog izbora koje ćemo mi posmatrati u ovom radu ograničenja su diferencijalne jednačine.

Pre nego što izanaliziramo ograničenja u vidu diferencijalnih jednačina, posmatraćemo izoperimetrijski zadatak. Traženje uslovnog ekstrema vršićemo metodom neodređenih Lagranžovih množitelja.

Posmatramo sledeći problem: Tražimo ekstrem funkcionele

$$J(x)] = \int_a^b f(t, x, x')dt$$

uz granične uslove $x(a) = A$ i $x(b) = B$ i ograničenje

$$M(x) = \int_a^b g(t, x, x')dt = m,$$

gde je broj m unapred dat.

Napomenućemo da su funkcije f i g dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije po promeniljivim t,x i x'. Takođe ono što pretpostavljamo je i da traženo rešenje nije ekstrem funkcionele M.

Teorema 1.5.1. *Neka je $x = x(t), t \in [a, b]$ ekstremna vrednost integrala*

$$J(x)] = \int_a^b f(t, x, x')dt$$

i za nju važi da ispunjava uslove

$$M(x) = \int_a^b g(t, x, x')dt = m$$

$$x(a) = A, x(b) = B$$

i da nije ekstrem funkcionele M. Tada postoji konstanta $\lambda \in R$ takva da je to x ekstrem funkcionele

$$\int_a^b (f + \lambda g)dt.$$

Rezultat dokaza ove teoreme je potreban uslov za ekstrem i on je dat kao izraz

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} + \lambda(g_x - \frac{d}{dt} g_{x'}) = 0.$$

Iz prethodne jednačine određuje se opšte rešenje, koje zavisi od λ i još dve konstante. Te dve konstante i λ se određuju iz uslova $x(a) = A$, $x(b) = B$ i $M(x) = m$.

Sada posmatramo problem pronalaženja potrebnih uslova za ekstrem funkcionele uz ograničenja u vidu diferencijalnih jednačina:

$$\int_a^b f(t,x,x')dt \tag{1.5}$$

gde je $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, uz ograničenja

$$x_i(a) = A_i, \ \ x_i(b) = B_i, \ \ i = 1,2,...,n \tag{1.6}$$

i

$$g_j(t,x,x') = 0, \ \ j = 1,2,...,k \tag{1.7}$$

gde je $k < n$.

S obzirom na to da je na n funkcija $x_i(t), i = 1,2,...,n$ nametnuto k ograničenja (1.7), pa će $n-k$ funkcija $x_i(t)$ biti nezavisno, a preostalih k određeno iz diferencijalnih jednačina (1.6).

Tvrdimo da postoji k funkcija $\lambda_j(x), j = 1,2,...,k, \ t \in [a,b]$ takvih da je kriva $x(t), \ t \in [a,b]$ ekstremala funkcionele

$$\int_a^b (f(t,x,x') + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(t) g_j(t,x,x'))dt.$$

Ekstremalu dobijamo rešavanjem sistema Ojlerovih jednačina

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial f}{\partial x'_j} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x'_j}) = 0, \ \ j = 1,2,...,n \tag{1.8}$$

Ove jednačine obrazuju sistem od $n+k$ jednačina za određivanje $n+k$ nepoznatih

$$x_1(t), ..., x_n(t), \lambda_1(t), ..., \lambda_k(t), \ \ t \in [a,b].$$

Ako uvedemo oznaku

$$\Phi = \Phi(t,x,x',\lambda) = f(t,x,x') + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(t) g_j(t,x,x'),$$

gde je $\lambda = (\lambda_1(t), ..., \lambda_k(t))$, sistem (1.8) možemo zapisati u obliku

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{d}{d}\frac{\partial \Phi}{\partial x'_j} = 0, \quad j = 1, ..., n.$$

2

Optimalno upravljanje

U ovom delu rada prikazujemo tehnike koje će se koristiti u rešavanju modela intertemporalnog izbora. Definisano je optimalno upravljanje. Mi se bavimo dinamičkom optimizacijom, pa uvodimo princip maksimuma koji predstavlja tehniku za rešavanje problema dinamičke optimizacije. Uvodimo optimalno upravljanje sa diskontovanjem i predstavljamo fazne dijagrame.
Korišćena je literatura [2], [3], [4], [6].

2.1 Pojam optimalnog upravljanja

Optimizacija je matematički postupak koji se primenjuje da bi se dostiglo optimalno, tj. najbolje rešenje. Matematički rečeno, iz skupa dopustivih stanja biramo one promenljive koje su minimum ili maksimum date funkcije cilja. Optimizacija se deli na statičku i dinamičku optimizaciju. Statička optimizacija se odnosi na probleme koji su definisani u određenom trenutku i tehnike za rešavanje su teorija igara, linearno i nelinearno programiranje. Problemi dinamičke optimizacije su opisani u nekom vremenskom intervalu, a tehnike za njihovo rešavanje su varijacioni račun, dinamičko programiranje i princip maksimuma. U ovom radu ćemo koristiti dinamičku optimizacju. Pretpostavimo da se procesi koje želimo optimizovati mogu opisati nekim matematičkim modelom. Matematički model dinamičkog procesa je najčešće sistem običnih diferencijalnih jednačina koje opisuju posmatranu pojavu.

Osnovni parametri dinamičkog sistema su:

- VREME t
  Vreme je nezavisna promenljiva. Ona se definiše na intervalu $[t_0, t_1]$. t_0 je trenutak u kome proces počinje, a t_1u kom se proces završava. Obično

ćemo uzimati da je početni trenutak jednak nuli, a krajnji trenutak nepoznat.

- PROMENLJIVE STANJA $x_i(t)$
  Promenljive stanja su neprekidne funkcije vremena i one određuju stanje sistema u nekom datom vremenskom intervalu. Vektor stanja se sastoji od n promenljivih stanja $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)), t \in [t_0, t_1]$. Ako je dato početno stanje sistema, npr. $x(t_0) = A$, pri čemu je A unapred dat n dimenzionalni vektor sa realnim koeficijentima, to znači da trajektorija počinje baš u tom stanju. Ako bi nam bilo dato krajnje stanje sistema znali bismo i gde se trajekorija završava ali to najčešće nije slučaj.

- PROMENLJIVE UPRAVLJANJA $u_i(t)$
  Promenljive upravljanja su neprekidne ili po delovima neprekidne funkcije vremena. Vektor upravljanja se sastoji od m promenljivih upravljanja $u(t) = (u_1(t), ..., u_m(t)), t \in [t_0, t_1]$. Mogu se nametnuti neka ograničenja na vektor upravljanja, tada kažemo da vektori upravljanja koji zadovoljavaju to ograničenje pripadaju dopustivom skupu U. Takve vektore zovemo dopustivim vektorima. Skup U je najčešće konveksan i kompaktan.

- SLUČAJNI PARAMETRI $s_i(t)$
  Slučajni parametri su oni koji se slučajno javljaju i mi na njih ne možemo da utičemo. U ovom radu nećemo raditi probleme sa slučajnim parametrima.

Sada ćemo dati matematičku formulaciju optimalnog upravljanja.
Neka su dati parametri stanja

$$x_1(t), ..., x_n(t), t \in [t_0, t_1]$$

i parametri upravljanja

$$u_1(t), ..., u_j(t), j = 1, 2..., mt \in [t_0, t_1].$$

Uvešćemo neprekidno diferencijabilne funkcije $f_j, j = 1, ..., n$ koje su unapred date. To su funkcije koje zavise od vremena, parametara stanja i parametara upravljanja i one definišu promenu parametra stanja u zavisnosti od vremena:

$$x'_j(t) = f_j(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m), j = 1, 2..., n, t \in [t_0, t_1]. \tag{2.1}$$

Sistem (2.1) predstavlja sistem n diferencijalnih jednačina prvog reda.
U ovom radu posmatraćemo kriterijume optimalnosti u obliku

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x')dt, \tag{2.2}$$

gde su dati početno i krajnje stanje sistema $x(t_0) = A$ i $x(t_1) = B$. Ovo je poseban slučaj problema optimalnog upravljanja gde je $u(t) = x'(t), t \in [t_0, t_1]$.

Da sumiramo, cilj je da se odrede promenljive stanja i promenljive upravljanja tako da budu zadovoljene jednačine (2.1) i da budu ispunjeni početni uslovi, a da pri tome kriterijum optimalnosti bude optimalan. Treba da napomenemo da na vektor stanja i upravljanja mogu biti nametnuta razna ograničenja.

2.2 Hamiltonova funkcija

Posmatramo funkcionelu

$$J(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))dt.$$

Želimo da nađemo ekstrem ove funkcionele, a potreban uslov za to je sistem od n diferencijabilnih jednačina drugog reda

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'_k} = 0, k = 1, ..., n. \tag{2.3}$$

Hamiltonova ideja je bila da se sistem (2.3) zameni sa $2n$ diferencijabilnih jednačina prvog reda. Takođe on je definisao n konjugovanih promenljivih, koje su međusobno nezavisne funkcije

$$p_k = \frac{\partial f}{\partial x'_k}, k = 1, ..., n. \tag{2.4}$$

Pretpostavljamo da važi $\mid \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \mid \neq 0, j, k = 1, ..., n.$

Iz (2.4), primenom teoreme o implicitnim funkcijama, dobijamo $x'_k = x'_k(t, x, p)$, gde je $p = (p_1, ..., p_n)$. Dakle promena promenljive stanja zavisi od vremena, vektora stanja i novog vektora p.

Hamilton je definisao i funkciju H koja zavisi od vremena, vektora stanja i novog vektora p na sledeći način

$$H = H(t,x,p) = \sum_{k=1}^{n} p_k x'_k - f(t,x,x'). \tag{2.5}$$

Kada diferenciramo H po t dobija se

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t}dt + \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial p}dp.$$

Kada sredimo gornji izraz i primenimo (2.3) i (2.4) dobija se

$$dH = \sum_{k=1}^{n} x'_k dp_k - \frac{\partial f}{\partial t}dt - \sum_{k=1}^{n} p'_k dx_k.$$

Dalje, dobijamo da je $\dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial f}{\partial t}$.

Kada izjednačimo članove uz iste diferencijale dobijamo

$$x'_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, p'_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, k = 1,...,n. \tag{2.6}$$

To je sistem $2n$ jednačina i zove se sistem Hamiltonovih diferencijalnih jednačina.
Kada uradimo integraciju sistema (2.6) dobijamo

$$x_k = x_k(t, C_1, ..., C_{2n})$$

i

$$p_k = p_k(t, C_1, ..., C_{2n}).$$

Konstante $C_1, ..., C_{2n}$ određujemo iz početnih uslova.
Dakle, uradili smo ono što je rečeno na početku. Sistem Ojler-Lagranžovih jednačina (2.3) smo zamenili sistemom (2.6).

2.3 Princip maksimuma

U prethodnom delu smo posmatrali slučaj kada je $u = x'$. Sada to neće biti slučaj.
Neka je data funkcionela

$$J = J(u) = \int_0^T F(t,x,u)dt,$$

gde je T dato.
Ponašanje parametara stanja, odnosno proces dato je jednačinom

$$x' = f(t, x, u.)$$

U početnom trenutku $t = 0$ stanje sistema je

$$x(0) = \beta.$$

Naš zadatak je da nađemo ekstrem funkcionele J uz gore navedene uslove.
Dobićemo novu funkcionelu tako što ćemo uvesti Lagranžov množitelj
$\lambda = \lambda(t), t \in [0, T]$ i ona ima oblik

$$\tilde{J} = \int_0^T (F(t, x, u) - \lambda(t)(x' - f(t, x, u)))dt.$$

Dakle, nova funkcionela $\tilde{J}$ predstavlja integral čija je podintegralna funkcija jednaka razlici podintegralne funkcije stare funkcionele J i proizvoda Lagranžovog množitelja i date jednačine koja opisuje ponašanje parametara stanja.
Variranjem nezavisnih promenljivih x, u i λ, dobijamo

$$\delta\tilde{J} = \int_0^T [\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial u}\delta u - \delta\lambda(x' - f(t, x, u)) - \lambda(\delta x' - \frac{\partial f}{\partial x}\delta x - \frac{\partial f}{\partial u}\delta u)]dt.$$

Koristeći osobinu $\delta x' = (\delta x)'$, parcijalnu integraciju, uslov stacionarnosti $\delta\tilde{J} = 0$, lemu 1.3.2. dobija se sistem jednačina

$$x' = f(t, x, u),\ \lambda' = -\frac{\partial F}{\partial x} - p\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \lambda\frac{\partial f}{\partial u} = 0 \tag{2.8}$$

i

$$\lambda(0)\delta x(0) - \lambda(T)\delta x(T) = 0. \tag{2.9}$$

Iz (2.9), zbog $\delta x(0) = 0$, sledi da je $\lambda(T) = 0$. Iz (2.8) određujemo vektor upravljanja $u = u(t, x, \lambda)$, pri čemu je baš on optimalan. Kada to u uvrstimo u (2.7) dobićemo vektore x' i λ'. Rešenje će nam zavisiti i od dve konstante koje dobijamo iz datog uslova $x(0) = \beta$ i uslova $\lambda(T) = 0$.
Princip maksimuma glasi: Ako je vektor upravljanja optimalan, onda je Hamiltonijan H maksimalan (minimalan) u odnosu na komponente vektora upravljanja u dozvoljenom skupu upravljanja.

2.4 Optimalno upravljanje sa diskontovanjem

Posmatramo sledeći problem

$$max\ J = \int_0^T W(x,u)e^{-\rho t}dt$$

pri čemu je

$$x' = f(x,u)$$

i dati su početni uslovi

$$x(0) = x_0$$

$$x(T) = x_T.$$

$W(x,u)$ je funkcija cilja koju želimo da maksimiziramo. U ekonomskim problemima ona najčešće označava profit. Kada želimo da odredimo sadašnju vrednost nekog budućeg prihoda, on se prvo mora diskontovati. Stopa po kojoj se vrši diskontovanje naziva se diskontna stopa i označavaćemo je sa ρ.

Formiramo Hamiltonovu funkciju

$$H(x,u) = W(x,u)e^{-\rho t} + \lambda f(x,u),$$

a zatim trenutnu Hamiltonovu funkciju

$$\mathcal{H}(x,u) = W(x,u) + \mu f(x,u).$$

Trenutnu Hamiltonovu funkciju smo dobili tako što smo Hamiltonovu funkciju pomnožili sa $e^{\rho t}$, pri čemu je $\mu = \lambda e^{\rho t}$. Dakle, $\mathcal{H} = He^{\rho t}$.
Napomenućemo da sa H označavamo Hamiltonovu funkciju, a sa $\mathcal{H}$ trenutnu Hamiltonovu funkciju kako ne bi došlo do zabune.

Sada želimo da odredimo uslove optimalnosti za ovaj problem.
Diferenciraćemo $\mathcal{H}$ po u, x i μ, pa krenimo redom.
Znamo da će prvi uslov biti

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0,$$

i time smo promenljivu upravljanja u, što će nam olakšati pronalaženje rešenja ovog problema.

Dalje, znamo, iz poglavlja 2.2, da je pridružena jednačina

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}e^{-\rho t}. \tag{2.10}$$

Kako je $\lambda = \mu e^{-\rho t}$, onda je

$$\lambda' = \mu' e^{\rho t} - \rho \mu e^{\rho t}. \tag{2.11}$$

Kada izjednačimo jednačine (2.10) i (2.11) dobijamo

$$\mu' = -\frac{\partial H}{\partial x} + \rho \mu.$$

Kada diferenciramo $\mathcal{H}$ po μ dobijamo

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu} = f(x, u) = x'.$$

Znamo, iz poglavlja 2.3, da je $\lambda(T) = 0$. Kako je $\mu = \lambda e^{\rho t}$ sledi $\mu(T)e^{\rho t} = 0$, to jest, $\mu(T) = 0$.

Uslovi optimalnosti za ovaj problem, gde $t \in [0, T]$ su

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$$

$$\mu' = -\frac{\partial H}{\partial x} + \rho \mu.$$

$$x' = f(x, u)$$

$$x(0) = x_0$$

$$x(T) = x_T.$$

Dakle, rešavamo sistem dve diferencijalne jednačine, jedna je po x, a druga po μ.

2.5 Fazni dijagrami

Ukoliko imamo nelinearan sistem jednačina, možemo ga analizirati primenom faznih dijagrama. Treba napomenuti da je ispravno koristiti ovaj postupak samo ako se radi o autonomnim sistemima diferencijalnih jednačina[1]. Ovaj postupak nam daje odgovore samo na pitanja o lokaciji i dinamičkoj stabilnosti ravnoteže.

[1]Autonomni sistemi diferencijalnih jednačina su sistemi diferencijalnih jednačina koji su nezavisni od promenljive t koja predstavlja vreme. Oni se javljaju u mnogim oblastima tehnike i nauke (biologiji, fizici, ekonomiji,...)

Sada ćemo prikazati postupak.

Neka je

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y)$$

autonomni sistem diferencijalnih jednačina.

Linije koje dele fazni prostor na četiri dela su

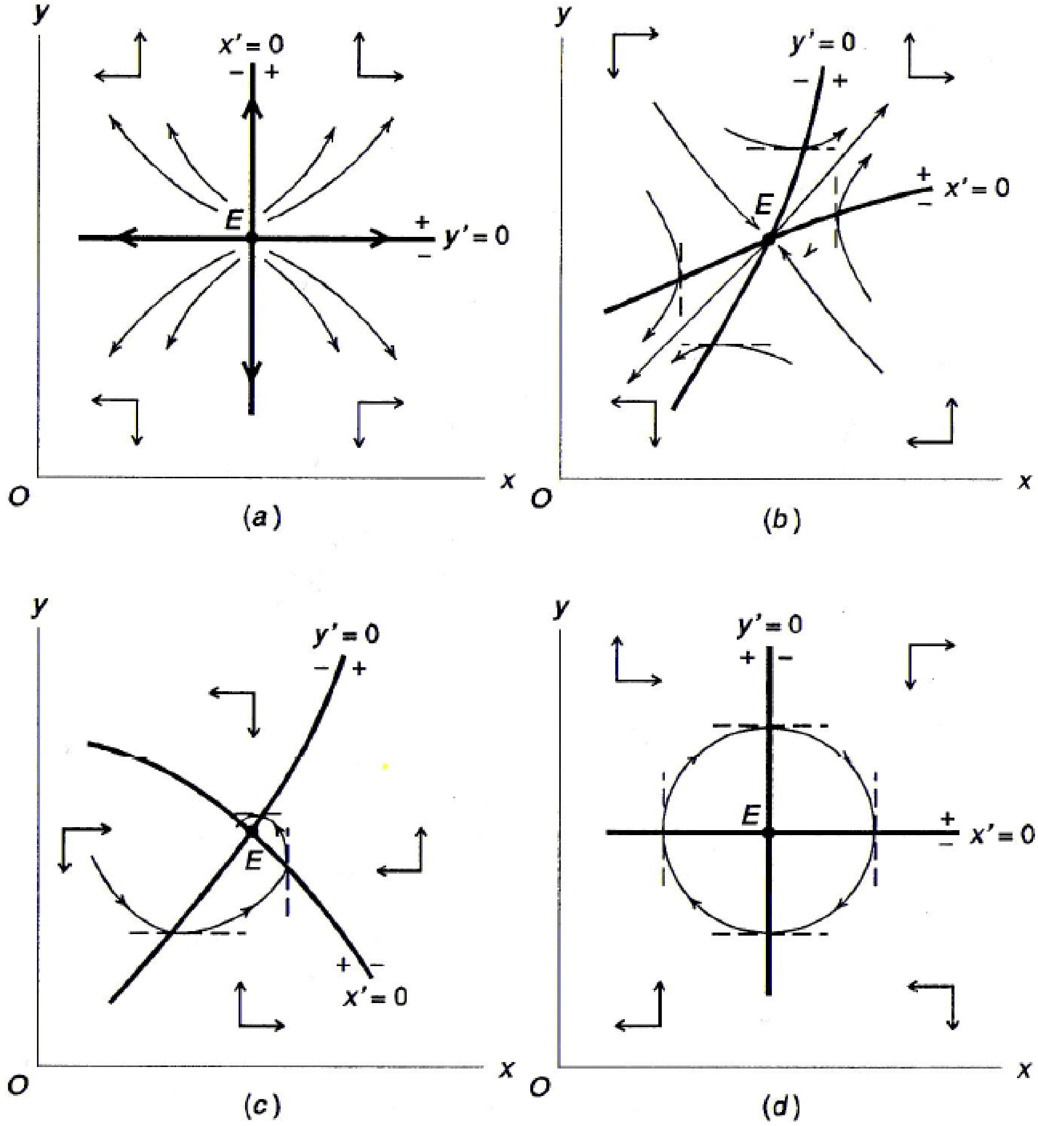
$$x' = 0 \text{ i } y' = 0,$$

to jest

$$f(x, y) = 0 \text{ i } g(x, y) = 0$$

i one se zovu linije razgraničenja.

Presek ove dve linije razgraničenja daje ravnotežnu tačku sistema. Ravnotežnu tačku sistema ćemo označiti sa $E(\tilde{x}, \tilde{y})$.
Linije toka, koje nazivamo fazne trajektorije, služe za crtanje dinamičkog kretanja sistema iz bilo koje početne tačke.



Slika 2.1

U zavisnosti od linija toka u okolini ravnoteže, postoje četiri ravnotežne tačke:

- ČVOR (Slika 2.1 pod (a))
  Postoji stabilni i nestabilni čvor. Čvor je stabilan ako se sve njegove linije neciklično kreću prema ravnoteži. Čvor je nestabilan ako se sve njegove linije toka neciklično udaljavaju od ravnoteže.

- SEDLASTA TAČKA (Slika 2.1 pod (b))
  Sedlasta tačka predstavlja nestabilnu ravnotežu. Ova tačka ima linije toka koje se stalno kreću ka ravnoteži i linije toka koje se stalno udaljavaju od ravnoteže.

- FOKUS (Slika 2.1 pod (c))
  Postoji stabilni i nestabilni fokus. Fokus je stabilan ako se njegove linije toka ciklički kreću ka ravnoteži (u obliku vrtloga), a nestabilan ako se sve njegove linije toka ciklički udaljavaju od nje.

- CENTAR (Slika 2.1 pod (d))
  Centar predstavlja nestabilnu ravnotežu. To je ravnotežna tačka koja ima linije toka koje čine skup koncentričnih krugova (prstenova). One neprekidno kruže oko ravnoteže.

Na slici 2.1 prikazan je slučaj kada imamo jednu ravnotežnu tačku. Može se desiti i da se linije razgraničenja seku u više od jedne tačke i na taj način imamo više ravnotežnih tačaka. Međutim, to u ovom radu neće biti slučaj.

3

Intertemporalni izbor

Ovaj deo rada posvećen je intertemporalnom izboru. Uvodimo definiciju i ekonomsku interpretaciju intertemporalnog izbora.
Korišćena je literatura [1], [7], [9], [11], [12].

3.1 Pojam intertemporalnog izbora

Intertemporalni izbor je izbor potrošnje tokom vremena. Posmatraćemo ponašanje potrošaca tokom vremena, odnosno kako potrošač raspoređuje prihode u odnosu na potrošnju. Možemo primetiti da su studenti uglavnom siromašni, što dovodi do toga da mladi ljudi uglavnom pozajmljuju od drugih. Ljudi u srednjem starosnom dobu zarađuju najviše, pa oni tada pozajmljuju novac drugima (na primer: investiranje u penzioni fond). Zarade nakon penzionisanja opadaju.

Vidimo da se prihodi zarađuju u nejednakom obrascu, pa osobe pokušavaju da izravnaju tu neravnotezu kroz pozajmice drugima ili od drugih, jer na taj način njihova potrošnja varira manje nego što variraju njihovi prihodi.

Za početak ćemo pretpostaviti da potrošač nema mogučnost da se uključi u proizvodjnju i da je tržište kapitala savršeno, tj. da je kamatna stopa fiksna i jedinstvena (videćemo u nastavku da je zbog toga budžetsko ograničenje prava linija). Još pretpostavljamo da je cena potrošnje u oba perioda 1.

Na početku posmatramo dva vremenska perioda, period 1 i period 2. Uvodimo sledeće oznake:

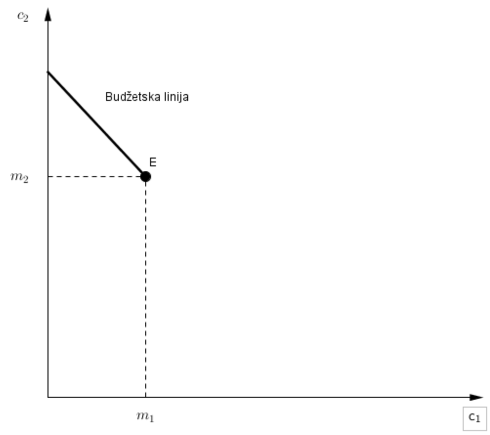
- period 1 predstavlja sadašnjost (npr. tekuća godina),
- period 2 prestavlja budućnost (npr. sledeća godina),
- c_1 potrošnja u sadašnjosti (periodu 1),
- c_2 potrošnja u budućnosti (peridu 2),
- m_1 prihod u sadašnjosti(periodu 1),
- m_2 prihod u budućnosti (periodu 2).

Prvo da vidimo šta se dešava u slučaju kada potrošač nema mogućnost da pozami novac, pa je m_1 najviše što može da potroši u periodu 1. Isto tako, jedini način prenosa novca iz perioda 1 u period 2 je štednja novca bez zarade kamate. Dakle, kamanta stopa je 0. Logično je da što se manje novca potroši u periodu 1, više će moći da se troši u periodu 2. Vidimo dva moguća izbora potrošnje:

- Potrošač može da potroši ceo prihod m_1 iz perioda 1 i da ne prenese novac u period 2, tako da u periodu 2 može da troši samo prihod m_2 koji je ostvario u priodu 2.
- Potrošač može da u periodu 1 ne potroši ceo iznos prihoda m_1 i na taj način je sačuvao novac iz perioda 1 kako bi ga potrošio kasnije, tj. u ovom slučaju u periodu 2.

Ovo je prikazano na slici 3.1.
Tačka E predstavlja tačku u kojoj potrošač u oba perioda potroši ceo prihod, tj. tačka u kojoj potrošač niti štedi niti daje na zajam. Budžetska linija ima nagib -1.

Sada pretpostavljamo da pojedinac može da se zadužuje i daje na zajam drugima po kamatnoj stopi r. Izvešćemo bužetsko ograničenje za ovaj slučaj. Prvo ćemo posmatrati slučaj kada je $c_1 < m_1$, a zatim slučaj kada je $c_1 > m_1$. Pretpostavimo da je $c_1 < m_1$, što znači da je potrošač odlučio da štedi. Dakle, potrošač je štediša. Tada će on zaraditi kamatu na iznos koji je sačuvao $m_1 - c_1$ po kamatnoj stopi r. Iznos koji on može da troši u periodu 2 je zbir prihoda iz perioda 2, iznosa koji je sačuvao iz perioda 1 i kamate koju je



Slika 3.1: *Budžetska linija kada je kamatna stopa 0*

zaradio štedeći novac iz perioda 1. To je prikazano u sledećoj jednačini, koja predstavlja budžetsko ograničenje:

$$\begin{aligned} c_2 &= m_2 + (m_1 - c_1) + r(m_1 - c_1) \\ &= m_2 + (1 + r)(m_1 - c_1). \end{aligned}$$

Sada pretpostavljamo da je $c_1 > m_1$, što znači da je potrošač pozajmio novac od nekoga, on je dužnik i da će morati da plati kamatu. Kamata koju on treba da plati u periodu 2 iznosiće $r(c_1 - m_1)$. On u periodu 2 još mora da vrati iznos koji je pozajmio, a to je $c_1 - m_1$. Njegovo budžetsko ograničenje je:

$$\begin{aligned} c_2 &= m_2 - r(c_1 - m_1) - (c_1 - m_1) \\ &= m_2 + (1 + r)(m_1 - c_1). \end{aligned}$$

Vidimo da je budžetsko ograničenje potrošača u slučaju kada je on dužnik isto kao i budžetsko ograničenje kada je on štediša. Tako da koristimo isto budžetsko ograničenje bez obzira da li je potrošač dužnik ili štediša.

Dakle, ako je $m_1 - c_1 > 0$, potrošač je zaradio kamatu na štednji.
Ako je $m_1 - c_1 < 0$, potrošač plaća kamatu jer je pozajmio novac.
Ako je $m_1 - c_1 = 0$, tj. $m_1 = c_1$, tada je i $m_2 = c_2$, pa potrošač nije ni dužnik ni štediša.

Budžetsko ograničenje potrošača govori da potrošač ne može da potroši više od svog prihoda, tj. onoga čime raspolaže.

Budžetka ograničenja potrošača možemo zapisati na sledeće načnine:

$$(1+r)c_1 + c_2 = (1+r)m_1 + m_2 \tag{3.1}$$

i

$$c_1 + \frac{c_2}{(1+r)} = m_1 + \frac{m_2}{(1+r)}. \tag{3.2}$$

Jednačina (3.1) predstavlja budžetsko ograničenje u pogledu buduće vrednosti, dok jednačina (3.2) u pogledu sadašnje vrednosti. Sada ćemo dati objašnjenje za ovakvo tvrđenje.
Obe jednačine (3.1) i (3.2) imaju oblik

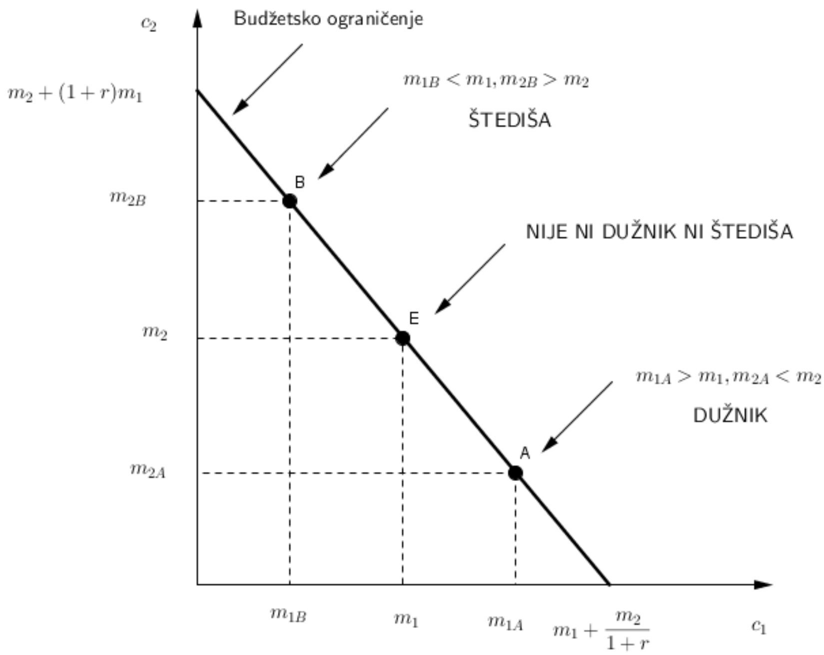
$$p_1x_1 + p_2x_2 = p_1m_1 + p_2m_2,$$

pri čemu je u jednačini (3.1) $p_1 = 1 + r$, a $p_2 = 1$, dok je u jednačini (3.2) $p_1 = 1$, a $p_2 = \frac{1}{1+r}$. Vidimo da u (3.1) je cena buduće potrošnje 1, pa zbog toga ona prestavlja budžetsko ograničenje u pogledu buduće vrednosti. Razlog zašto smo rekli da (3.2) prestavlja budžetsko ograničenje u pogledu sadašnje vrednosti je taj što je cena sadašnje potrošnje u (3.2) jednaka 1. Dakle, prvo budžetsko ograničenje pokazuje cenu iz perioda 1 u odnosu na cenu iz perioda 2, dok drugo budžetsko ograničenje pokazuje obrnuto, cenu iz perioda 2 u odnosu na cenu iz perioda 1.

Kada je $c_1 = 0$, dobijamo $c_2 = m_2 + (1+r)m_1$, što predstavlja maksimalan iznos potrošnje u periodu 2 (buduća vrednost).
Kada je $c_2 = 0$, dobijamo $c_1 = m_1 + \frac{m_2}{1+r}$, što predstavlja maksimalan mogući iznos potrošnje u periodu 1 (sadašnja vrednost).

Lako je izraziti nagib budžetskog ograničenja koji je negativan i iznosi $-(1+r)$. On nam govori da ako kamatna stopa raste, nagib je veći, tj. budžetska linija je strmija. Takođe možemo uočiti da budžetsko ograničenje prolazi kroz tačku E(m_1, m_2).
Uglavnom ćemo posmatrati budžetsko ograničenje u obliku (3.2), jer je logičnije meriti budućnost u odnosu na sadašnjost.

Potrošači su spremni da se odreknu sadašnje potrošnje kako bi povećali potrošnju u budućnosti. Tada očekuju da će biti nagrađeni za svoje odlaganje sadašnje potrošnje. Ta nagrada je kamatna stopa.
Svaki prihod y koji nije potrošen ove godine, može biti pozajmljen drugima,



Slika 3.2: *Budžetsko ograničenje, dozvoljeno zaduživanje i štednja uz zaradu kamate*

a za uzvrat potrošač dobija neku veću sumu $y+ry = y(1+r)$ sledeće godine. Postoji mogućnost da potrošač pozajmi novac od nekoga, to jest poveća sadašnju potrošnju za neki iznos y i mora da otplati iznos $y(1+r)$ sledeće godine.
Ako potrošač ne konzumira prihod y danas, sledeće godine dobija $y(1+r)$, što znači da konzumiranje danas ima cenu $1+r$ u smislu budućih dobara. Cena sadašnje potrošnje je $1+r$ jedinica buduće potrošnje. Cena buduće potrošnje je $\frac{1}{1+r}$ jedinica sadašnje potrošnje.

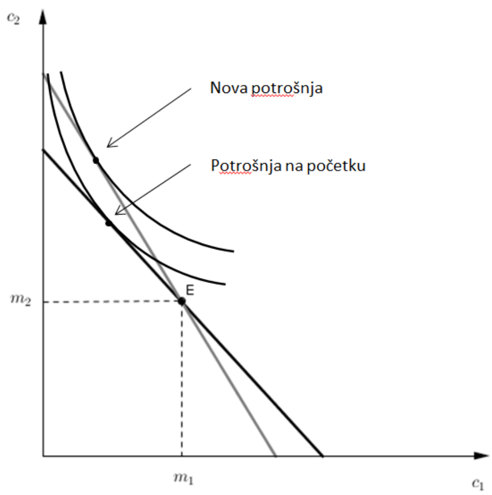
3.2 Preferencije potrošača

Preferencije potrošača su predstavljene njegovim indiferentnim krivama. Oblik indiferentnih kriva pokazuje sklonost potrošača da troši u različitim trenucima.
Postoji potrošač kome nije bitno da li će trošiti danas ili sutra, i takva sklonost potrošaca bi bila predstavljena krivom indiferencje koja ima nagib -1. Postoji i potrošač koji ne želi da prenosi potrošnju iz jednog u drugi period. Postoji još jedna vrsta potrošača koji želi da prebaci potrošnju iz jednog perioda u drugi. Uglavnom su svi potrošači kao ova treća vrsta i zato je kriva indiferencije konveksna. Razlog za to je što će potrošač radije imati prosečan iznos potrošnje u svakom periodu, nego da danas ima puno, a sutra ništa i obrnuto.

Razmotrićemo kako potrošač reaguje na promene u kamatnoj stopi. Tumačićemo sa stanovišta kada je potrošač štediša i kada je dužnik. Već smo rekli da sa povećanjem kamatne stope budžetska linija postaje strmija (za dato c_1 biće veća potrošnja u periodu 2).

Sada se ćemo razmotriti kako se menja izbor potrošača da li će biti štediša ili dužnik u odnosu na promenu kamatne stope. Razmotrićemo dva slučaja:

1. slučaj: Potrošač je štediša (slika 3.3)
   Ako kamatna stopa raste, on će ostati štediša. Sledi i objašnjenje za to. Kada kamatna stopa raste, budžetska linija se rotira kroz tacku (m_1, m_2) i postaje strmija. Tada se nova potrošnja nalazi levo od te tačke, jer smo rekli da je on štediša. Sada se pitamo da li nekako nova potrošnja može biti desno od tačke (m_1, m_2). Odgovor je ne, jer kada pogledamo novu budžetsku liniju sve tačke koje su na njoj a desno su od (m_1, m_2) nalaze se unutar prvobitnog bužetskog skupa, a to ne možemo da biramo, jer nova tačka mora biti van starog budžetskog



Slika 3.3: *Promena izbora potrošača ako je on štediša*

skupa, odnosno levo od tačke (m_1, m_2).
Ako kamatna stopa opada, pojedinac može odlučiti da li će ostati štediša ili postati dužnik.

2. slučaj: Potrošač je dužnik
Ako kamatna stopa opada, on će ostati dužnik. Objašnjenje je slično kao u prvom slučaju.
Ako kamatna stopa raste, pojedinac može odlučiti da li će ostati dužnik ili postati štediša. Ako je izabrao da ostane dužnik, on će biti u gorem položaju nego pre, jer će on biti aktivan u tački koja se nalazi ispod starog budžetskog skupa, ali nije prihvaćena. (slika 3.4)

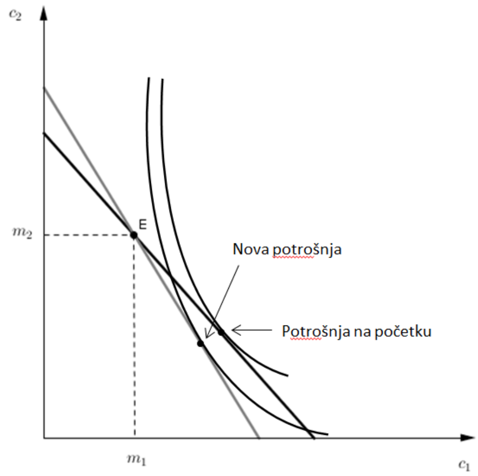
3.3 Slutsky jednačina

Slutsky[1] je otkrio da promene u tražnji za nekim dobrom usled promene njegove cene uvek predstavlja sumu čistog efekta supstitucije[2] i efektra dohotka[3]. Ovde ćemo analizirati efekat supstitucije i efekat dohotka.

[1]Eugen Slutsky (1880-1948) je bio ruski statističar i ekonomista.

[2]Efekat supstitucije predstavlja promenu tražnje zbog promene stope razmene između dva dobra. Čim se cena nekog dobra povećava, potrošač odlučuje da to dobro zameni nekim drugim sličnim dobrom. Na primer ukoliko poraste cena svinjskog mesa, potrošač će kupovati više pilećeg.

[3]Efekat dohotka predstavlja promenu tražnje zbog promene u realnoj kupovnoj moći potrošača. Ako svi uslovi ostanu nepromenjeni, samo cena raste, tada svako postaje siromašniji.



Slika 3.4: *Promena izbora potrošača ako je on dužnik*

Pretpostavićemo da kamatna stopa raste. Koristićemo budžetsko ograničenje (3.1), i uočavamo da je povećanje kamatne stope kao povećanje cene potrošnje danas u odnosu na potrošnju sutra. Pretpostavljamo i da je potrošnja normalno dobro[4]. Napisaćemo Slutsky jednačinu:

$$\frac{\triangle c_1^t}{\triangle p_1} = \frac{\triangle c_1^s}{\triangle p_1} + (m_1 - c_1)\frac{\triangle c_1^m}{\triangle m}.$$

Objasnićemo značenje svakog člana ove jednačine:

- $\frac{\triangle c_1^s}{\triangle p_1}$ promena potrošnje u sadašnjosti u odnosu na promenu cene (efekat supstitucije),
- $\frac{\triangle c_1^m}{\triangle m}$ promena potrošnje pri promeni prihoda (efekat dohotka),
- $m_1 - c_1$ razlika između prihoda u sadašnjosti i potrošnje u sadašnjosti,
- $\frac{\triangle c_1^t}{\triangle p_1}$ ukupna promena potrošnje u odnosu na promenu cene.

[4]Normalno dobro je svako dobro za koje se tražnja povećava kada se poveća dohodak, ali cena ostaje konstantna.

Izraz $\dfrac{\triangle c_1^s}{\triangle p_1}$ predstavlja efekat supstitucije i on je negativan jer efekat supstitucije uvek radi u suprotnom smeru od cene. Kako cena potrošnje u periodu 1 raste, efekat supstitucije kaže da bi potrošač trebao da troši manje u periodu 1.
Poslednji član Slutsky jednačine će biti pozitivan, jer je potrošnja normalno dobro. Poslednji član nam govori kako se menja potrošnja pri promeni prihoda.
Znak celog izraza će zavisiti od znaka izraza $(m_1 - c_1)$.
Ako je osoba dužnik, ovaj član će biti negativan, pa će ceo izraz biti negativan. To nam govori da će za dužnike povećanje kamatne stope smanjiti sadašnju potrošnju. Objašnjenje za to je sledeće: kada kamatna stopa raste uvek postoji efekat supstitucije ka trošenju manje danas. Za dužnike povećanje kamatne stope znači da će morati da plate veću kamatu sutra, što ga navodi da manje pozajmljuje i da onda i manje troši u periodu 1. I efekat dohotka isto utiče na smanjenje sadašnje potrošnje. Zaljučujemo da je ukupan efekat povećanja kamatne stope smanjenje c_1.
Za štediše efekat supstitucije je negativan, a efekat dohotka pozitivan. Dakle oni su u suprotnom smeru. Ako se poveća kamatna stopa to štediši može da donese veći prihod od onog koji je planirao da troši u periodu 1, znači to vodi ka većoj sadašnjoj potrošnji. Ukupan efekat zavisiće od veličina efekta supstitucije i efekta dohotka. Ako je efekat supstitucije veći od efekta dohotka, ako kamatna stopa raste, potrošnja u periodu 1 c_1 opada, što znači da se povećava štednja. Ako je efekat supstitucije manji od efekta dohotka, ako kamatna stopa raste i c_1 raste, što znači da će se smanjiti štednja.

3.4 Intertemporalna funkcija korisnosti

Intertemporalna funkcija korisnosti je $U(c_1, c_2)$. Želimo da maksimiziramo korisnost uz ograničenje bogatstva:

$$max\ U(c_1, c_2)$$

uz ograničenje

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = m_1 + \frac{m_2}{1+r}.$$

Pretpostavićemo da je funkcija korisnosti $U(c_1, c_2)$ strogo rastuća i kvazikonkavna[5]. Takođe pretpostavljamo da izbori koje potrošač pravi zavise

[5]Funkcija $f : X \to R$, gde je X konveksan podskup vektorskog prostora, je kvazikonkavna ako za svako $x, y \in X$ i $\lambda \in [0, 1]$ važi $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq max\{f(x), f(y)\}$.

samo od nivoa potrošnje u svakom periodu, a ne od datuma. Ovu pretpostavku možemo ugraditi tako što ćemo funkciju korisnosti napisati na sledeći način:

$$V(c_1, c_2) = U(c_1) + U(c_2),$$

pri čemu je funkcija U ista za svaki vremenski period. Korisnost dobijena u bilo kom pojedinačnom periodu je nezavisna od prošlosti i budućih očekivanja. Funkcija V je strogo separabilna u c_1 i c_2.

Ljudi su nestrpljivi i oni će se pre odlučiti za sadašnju potrošnju, ako bi imali istu sumu u budućnosti da troše. Ta nestrpljivost znači sledeće: dati nivo prihoda će stvoriti manje korisnosti ako se troši u budućnosti nego ako se troši u sadašnjosti. Nestrpljivost ćemo izraziti predstavljajući funkciju korisnosti na sledeći način:

$$V(c_1, c_2) = U(c_1) + \frac{U(c_2)}{1+\rho}, \tag{3.3}$$

gde je $\rho \geq 0$ i prestavlja stopu nestrpljivosti.

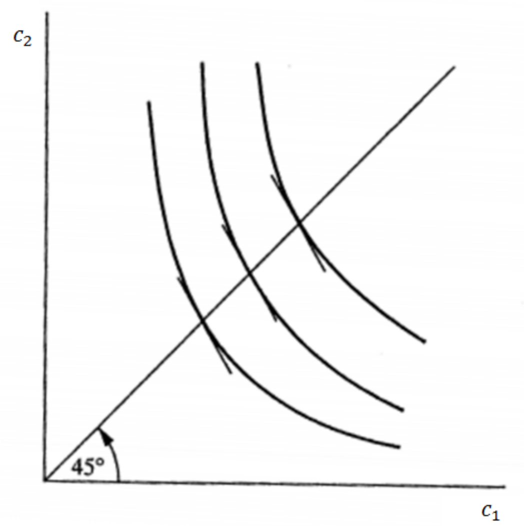
Zapisaćemo ovu funkciju za n perioda:

$$V(c_1, c_2, ..., c_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{U(c_i)}{(1+\rho)^{i-1}}. \tag{3.4}$$

Vidimo da je potrošnji u budućnosti dato manje na važnosti nego potrošnji u sadašnjosti, sa proporcionalnim smanjenjem na važnosti sa svakim sledećim vremenskim periodom. Pitamo se zašto govorimo da je budućnost manje važnija od sadašnjosti? Naravno, pretpostavljamo da znamo da će budućnost doći i tu neizvesnost nećemo smatrati kao izvor vremenskog izbora.

Postoji jedno veoma važno svojstvo intertemporalne funkcije korisnosti, a to je dinamička doslednost. Ovo svojstvo nam govori da marginalna vrednost potrošnje u periodu i u smislu propuštene potrošnje u periodu j, ne zavisi od datuma tj. od toga koja su dva vremenska perioda u pitanju, već jedino od nivoa potrošnje u ta dva vremenska perioda, s obzirom da je funkcija $U(c_i)$ ista za svako $i = 1, ..., n$. Izraz $i - j$ opet govori da nije bitno koji je period u pitanju, već samo koliko je rastojanje između ova dva perioda. Marginalna vrednost potrošnje u periodu i c_i u odnosu na c_j je:

$$\frac{dc_j}{dc_i} = \frac{-(1+r)^{j-i} U_i'(c_i)}{U_j'(c_i)}.$$



Slika 3.5: *Indiferentne krive sa nestrpljenjem*

Dakle, mi smo uvođenjem ovog svojstva dinamičke doslednosti odbacili mogućnost da potrošač neobjašnjivo menja svoj izbor.

Funkcija korisnosti (3.3) i njene krive indiferencije prikazane su na slici 3.5. Duž ugla od 45°, gde je $c_1 = c_2$, sve krive indiferencije seku tu pravu sa nagibom $-(1+\rho)$. $1+\rho$ predstavlja stopu vremenskog izbora i važi da je $1+\rho \geq 1$.
Ako bi bilo $\rho = 0$, to jest da nema nestrpljenja, onda bi indiferentne krive imale nagib -1 duž ugla od 45°.

Maksimiziramo funkciju korisnosti (3.4) uz ograničenje

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(1+r)^{i-1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{(1+r)^{i-1}}.$$

Dobićemo uslov dodira

$$\frac{-(1+\rho)U'(c_i)}{U'(c_j)} = -(1+r)$$

ili

$$\frac{U'(c_i)}{U'(c_j)} = \frac{1+r}{1+\rho}. \tag{3.5}$$

Iz ovog uslova vidimo da na potrošnju prihoda utiče odnos između tržišne cene ranije dostupnosti(raspoloživosti) $1+r$ i potrošačkog izbora ranije dostupnosti $1+\rho$.

Ako je $\rho = 0$, to jest ako potrošač nije nestrpljiv, onda krive indiferencije imaju nagib -1 duž ugla od 45°. Znamo da budžetska linija ima strmiji nagib jer on iznosi $-(1+r)$, dodirna tačka se nalazi iznad 45°, što znači da je $c_j^M > c_i^M$. Kako nema nestrpljenja, potrošač prebacuje potrošnju u budućnost.

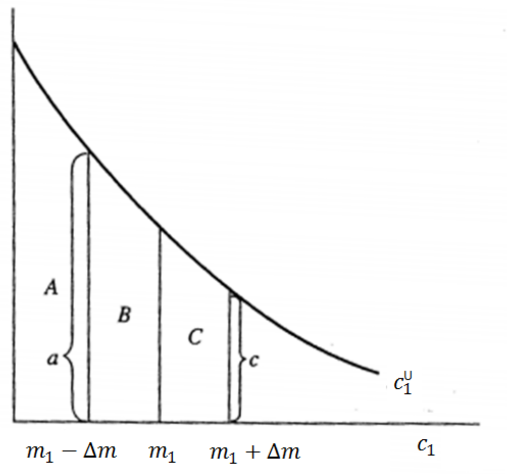
Ako je $\rho > 0$ i $\rho < r$, onda je $c_j^M > c_i^M$, odnosno potrošač će trošiti više u budućnosti.
Ako je $\rho > 0$ i $\rho > r$, onda je $c_i^M > c_j^M$, odnosno potoršač će trošiti više u sadašnjosti.

Već smo rekli da kada se prihod zarađuje neujednačenim tempom, pojedinci pokušavaju da uglade svoju potrošnju kroz pozajmljivanje od drugih i drugima. Sada ćemo to i ispitati.

Počećemo analizu uz pretpostavku da je stopa nestrpljivosti jednaka kamatnoj stopi, tj. $\rho = r$. To znači da potrošnja mora biti ista u bilo koja dva bliska vremenska perioda i da će prihod biti utrošen ujednačenim tempom. Prikazaćemo tendenciju da se izjednači potrošnja na slici 3.6, uz pretpostavke da je $\rho = r = 0$ i $c_i^M = c_j^M$. Data je kriva potražnje za sadašnju potrošnju, i njena visina je marginalna vrednost sadašnje potrošnje. Cena sadašnje potrošnje, duž ove krive, predstavlja iznos buduće potrošnje koju je osoba spremna da prihvati kako bi stekla dobit.

Sada ćemo da uporedimo stabilnu potrošnju i potrošnju koja ima svojstvo koje se naziva svojstvo gozbe i gladi.

Pretpostavićemo da osoba može da bira da li će da potroši m_1 u oba perioda ili da potroši $m_1 + \triangle m$ u periodu 1, a $m_1 - \triangle m$ u periodu 2. Tokom perioda gozbe, gde troši $m_1 + \triangle m$, marginalna vrednost sadašnje potrošnje iznosi c, što je niska vrednost.
Tokom perioda gladi, gde troši $m_1 - \triangle m$, marginalna vrednost sadašnje potrošnje iznosi a, što je visoka vrednost.
Kada je potrošnja stabilna, marginalna vrednost sadašnje potrošnje iznosi b.



Slika 3.6: *Dobit od potrošnje u različitim trenucima*

Ako potrošač trguje sa jedinicom prihoda od vremena gozbe do vremena gladi imaće dobit od $a - c$.

U maksimalnoj korisnosti su marginalne vrednosti robe proporcionalne sa cenom. U ovom slučaju kada je $\dfrac{1+r}{1+\rho} = 1$, osoba može da raspoređuje svoju potrošnju tokom vremena pozajmljujući od drugih i drugima. Dobit će biti na maksimumu kada je $c_1^U = c_2^U = m_1$.

Sada ćemo ovo razmotriti na drugi način. Dakle, želimo da vidimo koja je dobit od ujednačene potrošnje. To ćemo uraditi tako što ćemo razmotriti ukupne dobiti od potrošnje različitih nivoa sadašnje potrošnje. Ove ukupne dobiti prikazane su delovima ispod krive potražnje i oni predstavljaju iznose budućih prihoda koje bi potrošač platio da bi trošio određeni nivo sadašnje potrošnje. Obeležićemo deo ispod krive potražnje do $m_1 - \triangle m$ sa A, između $m_1 - \triangle m$ i m_1 sa B i između m_1 i $m_1 + \triangle m$ sa C (slika 3.6).

Ukupna dobit od potrošnje c_1 za dve godine je $2A + 2B$
Ukupna dobit ako koristimo gozba-glad potrošnju je

$$(A + B + C) + A = 2A + B + C.$$

Vidimo da jer je $C > B$ (negativan nagib krive potražnje) važi

$$2A + B + C > 2A + 2B.$$

To nam govori da se prihod vrednuje više ako se troši ujednačeno nego ako se troši neujednačeno.
Ovim smo završili analizu kada je $r = \rho$, a sada se pitamo šta se dešava kada $r \neq \rho$. Sada će potrošnja ili ujednačeno rasti ili ujednačeno opadati u tempu koji dobijamo iz jednačine (3.5). Iako potrošnja neće biti konstantna, ona će biti stabilna.

Sledi jedan primer koji objašnjava zašto se proizvođačima isplati da troše sretstva na čuvanje sezonski proizvedene robe za buduću upotrebu. Oni to rade jer potrošači više vrednuju robu koja se može konzumirati tokom cele godine, nego onu koja se može konzumirati samo u određenom delu godine. Isto tako, prihod pojedinca će biti najviši u srednjem dobu, pa će se on zaduživati dok je mlad, a pozajmljivaće drugima tokom srednjeg doba. Kako ljudi stare tako im ostaje manje godina za potrošnju prihoda, pa će oni trošiti više u sadašnjosti jer im ostaje sve manje godina za uživanje u dobitku koji može doneti odlaganje potrošnje.

3.5 Fišerova investicija

Irving Fišer[6] je analizirao sledeći problem. Pretpostavimo da posedujemo parcelu sa drvećem. To drveće raste, u početku brzo, kasnije sporije. Dakle, raste određenom brzinom. Postavlja se pitanje kada je najbolje poseći drveće? Da li kada skroz prestane da raste ili ipak ranije?

Uvešćemo sedeće oznake i pretpostavke:

- $g(t)$ vrednost drveća u trenutku t,
- $g'(t) > 0$ ovo nam govori da drveće raste,
- $g''(t) > 0$ u početku (drveće raste ubrzano), a na kraju je $g''(t) < 0$,
- r kamatna stopa alternativne investicije.

Osoba koja poseduje parcelu sa drvećem, mora razmotriti i opciju alternativne investicije na projekte manjeg rizika.

[6] Irving Fišer (1867-1947) je bio američki statističar, ekonomista i pronalazač.

Posmatraćemo prvo slučaj kada se drveće može posaditi samo jednom. Trenutna vrednost drveća u vreme seče je:

$$P = g(t)e^{-rt}.$$

Diferenciramo P po t i dobijamo

$$\frac{dP}{dt} = g'(t)e^{-rt} - g(t)re^{-rt}.$$

Kada dobijeni izraz izjednačimo sa nulomm dobićemo:

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = r. \tag{3.6}$$

Kada važi (3.6), tj. kada je stopa rasta drveća u trenutku t (izražena u procentima) jednaka kamatnoj stopi alternativne investicije, tada treba seći drveće.
Ako se poveća r, drveće se seče ranije, a ako se r smanji, ostavićemo drveće još da raste.

Sada posmatramo slučaj kada isti broj drveća možemo opet posaditi kada se prethodno iseče. Tako dobijamo beskonačnu seriju sečenja. Pretpostavićemo da je cena zemlje zadržala trenutnu vrednost nakon prve seče, ali do sadašnjosti je opala. Sada je funkcija cilja:

$$P = g(t)e^{-rt} + Pe^{-rt},$$

odnosno dobijamo

$$P = \frac{g(t)e^{-rt}}{1 - e^{-rt}}.$$

Diferenciramo P po t i izjenačavanjem dobijenog sa nulom dobijamo

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = r + r\frac{e^{-rt}}{1 - e^{-rt}}. \tag{3.7}$$

Jednačina (3.7) nam govori da je stopa rasta drveća u trenutku t (izražena u procentima) jednaka zbiru alternativne kamatne stope i kamatnog prihoda od zemlje (oportunitetni trošak[7] za to što ne sadimo ponovo) i da tada treba seći drveće. Vidimo da je ovo rešenje problema jednako zbiru Fišerovskog rešenja (kada nema ponovnog sađenja) i oportunitetnog troška.

Često se radi maksimizacija prosečne dobiti nekog obnovljivog resursa. Obnovljivi resursi mogu biti riba u jezeru, drveće i slično.
Radi se maksimizacija $\frac{g(t)}{t}$. Rešenje ove maksimizacije neće biti maksimizacija bogatstva, jer se ne vodi računa o alternativnoj investiciji.

[7]Kada na raspolaganju imamo dve investicije koje za ulozeni novac daju različitu dobit, razlika te dve dobiti prestavlja oportunitetni tošak. On predstavlja ono čega smo se odrekli da bismo pružili sebi nešto drugo.

4

Primena optimalnog upravljanja u rešavanju modela intertemporalnog izbora

U ovom delu rada prikazani su modeli intertemporalnog izbora i rešenja tih modela. Koristili smo metode koje su definisane u prethodnim poglavljima. Koristili smo princip maksimuma. Za tumačenje rešenja sistema diferencijalnih jednačina koristili smo fazne dijagrame.
Korišćena je literatura [1], [6], [8].

4.1 Model intertemporalne korisnosti

Posmatraćemo sledeći model intertemporalne maksimizacije korisnosti, u kome nema iskorišćavanja resursa:

$$max \int_0^T U(c)e^{-\rho t}dt$$

pri čemu je

$$K' = rK - C$$

$$K(0) = K_0$$

$$K(T) \geq 0.$$

Navešćemo osnovne pretpostavke:

- $U' > 0$
- $U'' < 0$
- $C(t) > 0$
- $K(t) > 0$
- Pojedinac prodajom kapitala glavnicu može trošiti u bilo koje vreme.

Sledi tumačenje oznaka iz modela koje čemo koristiti:

- $U(C(t))$ funkcija cilja potrošača
- $U'(C)$ granična korisnost potrošnje
- $C(t)$ tok potrošnje (ovo bira potrošač i predstavlja vektor upravljanja)
- $C'(t)$ promena potrošnje u odnosu na vreme
- K glavnica
- K' promena u glavnici
- rK prihod pojedinca zarađen od kapitala
- r tržišna kamatna stopa
- ρ stopa nestrpljenja
- $K' = rK - C$ predstavlja jednačinu stanja koja nam govori da je promena u glavnici jednaka razlici između prihoda zarađenog od kapitala rK i potrošnje C.

Vidimo da naš problem odgovara problemima koje smo definisali u poglavljima 1 i 2. Dakle, želimo da maksimiziramo funkcionelu koja je data u obliku integrala uz ograničenje koje je dato u obliku diferencijalne jednačine i uz dat početni uslov.

Formiramo Hamiltonovu funkciju:

$$H = U(C)e^{-\rho t} + \lambda(rK - C).$$

Diferenciranjem Hamiltonove funkcije H po potrošnji C dobijamo jednačinu koju nazivamo princip maksimuma:

$$\frac{\partial H}{\partial C} = U'(C)e^{-\rho t} - \lambda \equiv 0. \tag{4.1}$$

Diferenciranjem Hamiltonove funkcije H po glavnici K dobijamo jednačinu koju nazivamo pridružena jednačina:

$$\frac{\partial H}{\partial K} = \lambda r \equiv -\lambda'. \tag{4.2}$$

Primetimo da (4.1) pokazuje da je u svakoj tački optimalnog puta diskontovana granična korisnost potrošnje jednaka sadašnjoj vrednosti dodatne jedinice kapitala.

Primetimo i da je Hamiltonova funkcija konkavna u C i K, što nam osigurava to da će rešenja jednačina prvog reda predstavljati maksimalnu vrednost (Hamiltonova funkcija je konkavna jer je podintegralna funkcija $U(C)e^{-\rho t}$ konkavna jer je $U'' < 0$ i jednačina stanja $K' = rK - C$ je linearna funkcija u C i K).

Diferenciramo (4.1) po t i dobijamo:

$$U''(C)C'e^{-\rho t} - U'(C)\rho e^{-\rho t} - \lambda' = 0. \tag{4.3}$$

Koristeći (4.1) i (4.2) dobijamo da je $\lambda' = -rU'(C)e^{-\rho t}$. Kada ovako dobijeno λ' zamenimo u (4.3) dobijamo:

$$-\frac{U''(C)C'}{U'(C)} = r - \rho. \tag{4.4}$$

Jednačina (4.4) nam govori da je granična dobit od povećanja potrošnje u bilo kom trenutku jednaka graničnim oportunitetnim troškovima povečanja potrošnje. Granični oportunitetni troškovi povećanja potrošnje su jednaki razlici tržišne kamatne stope i stope nestrpljenja.

Posmatrajući jednačinu (4.4) i koristeći pretpostavke da je $U'' < 0$ i $U' > 0$ možemo zaključiti da su C' i $r - \rho$ istog znaka.U zavisnosti od njihovog znaka pokazaćemo ponašanje potrošnje tokom vremena.

Ako je $r = \rho$ potrošač bira konstantnu potrošnju (jer je $C' = 0$ tj. konstantno kada je $r - \rho = 0$).
Ako je $r > \rho$ tada potrošnja raste tokom vremena (jer je $C' > 0$ kada je $r - \rho > 0$).
Ako je $r < \rho$ tada potrošnja opada tokom vremena (jer je $C' < 0$ kada je $r - \rho < 0$).
Ako bi se kamatna stopa r povećala u nekom trenutku t, potrošač će ubrzati tok potrošnje, prebacujući potrošnju na sadašnjost.

Sada posmatramo jednačinu (4.2): $r\lambda = -\lambda'$. Uočavamo da je ova jednačina prosta linearna homogena diferencijalna jednačina koja ima rešenje:

$$\lambda = \lambda_0 e^{-rt}, \tag{4.5}$$

gde je konstanta integracije $\lambda_0 > 0$.

Jednačina (4.5) predstavlja sadašnju vrednost granične vrednosti kapitala i iz te jednačine možemo zaključiti da je λ opadajuča funkcija (λ_0 je konstanta, a e^{-rt} opadajuća funkcija), što znači da se sadašnja vrednost granične vrednosti kapitala smanjuje vremenom.

Kombinacijom (4.1) i (4.5) dobijamo:

$$U'(C(t)) = \lambda_0 e^{(\rho - r)t}. \tag{4.6}$$

Sada ćemo posmatrati uslov transferzalnosti $\lambda(T)K(T) = 0$ kako bismo razmotrili šta se mora dogoditi na kraju perioda planiranja. Iz uslova transferzalnosti znamo da se kapital ili mora istrošiti na kraju perioda ili njena granična vrednost mora pasti na 0 tj. $K(T) = 0$ ili $\lambda(T) = 0$. Kako je $U'(C(t)) > 0$ za $\forall t$, tj. potrošnja raste tokom vremena, zaključujemo da će se kapital na kraju perioda planiranja potrošiti, tj. da je $K(T) = 0$.

Jednačine (4.4),(4.5) i (4.6) opisuju rešenja ovog modela. Da bismo prikazali rešenja ovog modela, pretpostavićemo da je funkcija cilja logaritamska funkcija, to jest da je $U(C) = \log C$.
Kada smo izabrali da nam je funkcija cilja logaritamska funkcija, jednačina (4.4) postaje:

$$\frac{C'}{C} = r - \rho = \frac{1}{C}\frac{dC}{dt},$$

odakle dobijamo da je

$$\frac{dC}{C} = (r - \rho)dt.$$

Ovu diferencijalnu jednačinu ćemo rešiti primenom metode razdvajanja promenljivih i dobićemo:

$$C(t) = C_0 e^{(r-\rho)t}. \tag{4.7}$$

Na ovaj način smo odredili vektor upravljanja, tj. tok potrošnje C.

Kada (4.7) zamenimo u jednačinu stanja $K' = rK - C$ dobijamo:

$$K' - rK = -C_0 e^{(r-\rho)t}.$$

Množenjem prethodne jednačine integralnim činiocem e^{-rt} dobijamo:

$$e^{-rt}(K' - rK) = -C_0 e^{-\rho t}$$

$$\frac{d(e^{-rt}K)}{dt} - rKe^{-rt} = -C_0 e^{-\rho t}.$$

Kako je $\frac{d(e^{-rt}K)}{dt} = \frac{d(e^{-rt}K)}{dt} - rKe^{-rt}$ imamo

$$\frac{d(e^{-rt}K)}{dt} = -C_0 e^{-\rho t}.$$

Integracijom obe strane dobijamo:

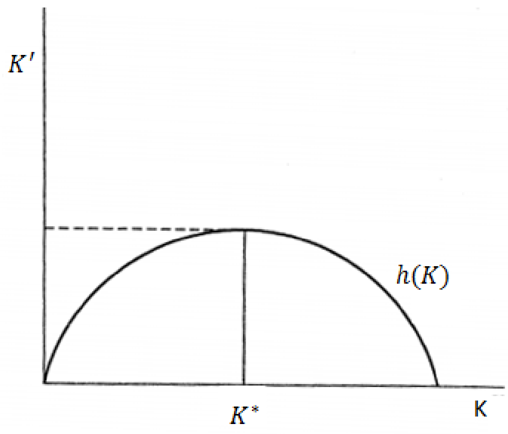
$$e^{-it}K(t) = \frac{C_0}{\rho} e^{-\rho t} + A. \tag{4.8}$$

Koristeći početni uslov u $t = 0$ $K(0) = K_0$ i uslov koji smo dobili iz uslova transferzalnosti $K(T) = 0$ naćićemo konstante A i C_0. Pa krenimo redom. Kako je $K(0) = 0$, iz jednačine (4.8) imamo da je

$$A = K_0 - \frac{C_0}{\rho}. \tag{4.9}$$

Kako je $K(T) = 0$, iz jednačine (4.8) imamo da je

$$A = -\frac{C_0}{\rho e^{-\rho T}}. \tag{4.10}$$



Slika 4.1: Prikaz funkcije $K' = h(K)$

Kada rešimo sistem jednačina (4.9) i (4.10) dobijamo:

$$C_0 = \frac{K_0 \rho}{1 - e^{-\rho T}}$$

$$A = \frac{-K_0 e^{-\rho T}}{1 - e^{-\rho T}}.$$

Zamenom ovoga u (4.7) i (4.8) dobijamo:

$$C(t) = \frac{\rho K_0 e^{(r-\rho)t}}{1 - e^{-\rho T}}$$

$$K(t) = K_0 e^{rt} \frac{(e^{-\rho t} - e^{-\rho T})}{1 - e^{-\rho T}}.$$

Funkcija $K' = h(K)$ predstavlja stopu promene glavnice kada nema iskorišćavanja resursa. Maksimalna vrednost funkcije K' se pojavljuje na K^*.
Kada je $K < K^*$ onda glavnica(zalihe ribe) raste.
Kada je $K > K^*$ onda glavnica(zalihe ribe) opada.
Međutim, ova stopa iskoriščavanja nije efektna.

4.2 Model eksploatacije obnovljivog resursa

U ovom delu ćemo predstaviti model blizak prethodnom problemu. Problem se primenjuje na eksploataciju obnovljivog resursa, dakle u ovom modelu ima iskorišćavanja resursa, a kao primer obnovljivog resursa uzećemo ribu.

Za početak ćemo napisati neke osnovne pretpostavke, a to su da je funkcija cilja ovog modela ista kao i funkcija cilja prethodnog, s tim da ćemo u ovom primeru smatrati da je vremenski interval beskonačan. Pretpostavljamo i da zalihe ribe rastu nekom brzinom do neke maksimalne veličine, a kada zalihe budu veće od te maksimalne veličine riba bi izumrla smanjujući zalihe na količinu koja predstavlja stabilno stanje.

Model koji posmatramo u ovom delu je:

$$max \int_0^\infty U(c)e^{-\rho t}dt$$

pri čemu je

$$K' = h(K) - C \tag{4.11}$$

$$K(0) = K_0.$$

Sledi tumačenje oznaka iz ovog modela:

- K zaliha obnovljivog resursa (ribe),
- $h(K)$ biološki rast resursa (slika 4.1).

Kada je $K = 0$, što znači da nema ribe, onda je $h(K) = h(0) = 0$, tj. nema reprodukcije.
Kada je $K > 0$ zalihe rastu nekom stopom $K' = h(K)$.
Iz analize slike (4.1) znamo da je K^* maksimalno održivi prinos i on postoji gde je $h'(K) = 0$.

Takođe, kao u prethodnom primeru, važi sledeće:

- $h'(K) > 0$ (tj. $h(K)$ raste) za $K < K^*$
- $h'(K) < 0$ (tj. $h(K)$ opada) za $K > K^*$.

Iz prethodno navedenog vidimo da je $h''(K) < 0$. Možemo zaključiti da ako je K^* trenutna zaliha ribe, bilo bi moguće trošiti(konzumirati) $K' = h(K^*)$ zauvek. Vrlo je moguće da je baš ovo rešenje koje nam se traži, međutim ovaj stav nećemo prihvatiti jer moramo uzeti u obzir dinamičke aspekte modela kao što su izbor vremena i uticaj veličine zalihe ribe na granične troškove ribolova.

Formiraćemo trenutnu Hamiltonovu funkciju za model (4.11):

$$\mathcal{H} = U(C) + \mu(t)(h(K) - C). \tag{4.12}$$

Diferenciranjem $\mathcal{H}$ po C i po K dobijamo princip maksimuma i pridruženu jednačinu:

$$\mathcal{H}_C = U'(C) - \mu = 0 \tag{4.13}$$

$$\mathcal{H}_K = \mu h'(K) = \rho\mu - \mu'(t). \tag{4.14}$$

Kao i u prethodnom primeru zaključujemo da je Hamiltonova funkcija konkavna u C i K (koristim pretpostavke o $U(C)$ i $h(k)$), što nam govori da su rešenja jednačina prvog reda trajektorije koje maksimiziraju ovaj integral.
Jednačina (4.13) pokazuje da je duž optimalnog puta, trenutna granična pretpostavljena vrednost zaliha ribe μ jednaka graničnoj korisnosti potrošnje ribe $U'(C)$.

Jednačinu (4.14) možemo zapisati u sledećem obliku:

$$h'(K) = \rho - \frac{\mu'}{\mu}. \tag{4.15}$$

Funkcija $h'(K)$ predstavlja stopu rasta zaliha ribe odnosno prinos od cekanja ili odlaganja potrošnje za budućnost. U nedinamičnim modelima zahtevalo bi se da je granična dobit jednaka stopi nestrpljenja. Međutim, u dinamičkim modelima kao što je ovaj, odluke u sadašnjosti utiču na budučnost, tj. potrošnja ribe utiče na iznos stope promene granične vrednosti ribe. Tako da u dinamičkim modelima troškovima čekanja treba dodati i trošak $-\dfrac{\mu'}{\mu}$, koji se naziva kapitalni gubitak i on može biti i negativan. Ukoliko ne odredimo funkcije za $U(C)$ i $h(K)$, analitičko rešenje modela nije moguće. Kako je ovaj model autonoman, možemo koristiti analitički alat koji se naziva fazni dijagram.

Iz (4.13) znamo da je $U'(C) = \mu$. Kako znamo da je $U'(C) < 0$, sledi da je $U'(C)$ monotona funkcija, što znači da je i μ monotona funkcija, pa ona može biti inverzna. Koristeći opštu verziju teoreme o implicitnoj funkciji, dobijamo $C = c(\mu)$.

Kada ovo uvrstimo u jednačinu stanja $K' = h(K) - C$ dobićemo

$$K' = h(K) - c(\mu).$$

Jednačinu (4.15) mogu zapisati u sledećem obliku:

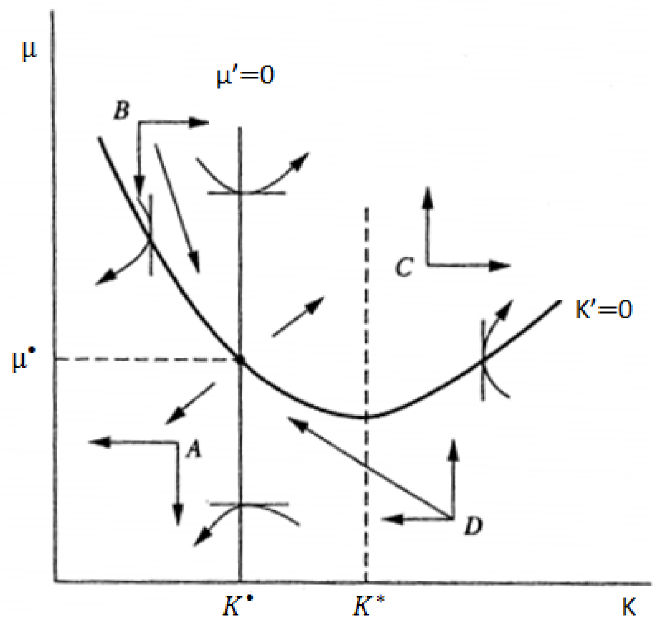
$$\mu' = \rho\mu - \mu h(K).$$

Stacionarnu tačku ćemo naći tako što ćemo rešiti $K' = 0$ i $\mu = 0$, tj.

$$h(K) - c(\mu) = 0 \tag{4.16}$$

$$\rho - h'(K) = 0. \tag{4.17}$$

Jednačine (4.16) i (4.17) prikazane su na slici (4.2).



Slika 4.2 Fazni dijagram

U tački ($K^\bullet$, $\mu^\bullet$) se seku jednačine $K' = 0$ i $\mu' = 0$ i ona predstavlja ravnotežnu tačku. Vrednosti $K^\bullet$ i $\mu^\bullet$ predstavljaju vrednosti stabilnog stanja.

Prvo razmatramo skup tačaka koji dobijamo kada je $K' = 0$, tj. $h(K) = c(\mu)$. Ranije smo pretpostavili da je $U'(C) > 0$ i $U''(C) < 0$ i iz toga možemo zaključiti da je $c'(\mu) = \dfrac{1}{U''} < 0$. Iz ranije analize znamo da $h(K)$ prvo raste, pa posle K^* opada, pa kako je $h(K) = c(\mu)$ sledi da $c(\mu)$ prvo raste, pa posle opada. Kako smo pokazali da je $c'(\mu) < 0$, kako K raste μ mora opadati, pa dostići minimalnu vrednost na K^* (tamo gde je $h(K)$ najveći), a zatim rasti. Na ovaj način smo pokazali da je posmatrani skup tačaka prikazana kriva u obliku U.

Drugo što ćemo razmatrati je skup tačaka kada je $\mu' = 0$, tj. $h'(K) = \rho$. Takav skup tačaka u ovom slučaju je vertikalna linija, kada je $K = K^*$.
Iz ranijih razmatranja znamo da je $h'(K) = 0$ na $K = K^*$ i da je
$h'(K^*) = \rho > 0$ kada je $K^\bullet$ levo od K^*.

Optimalna stopa iskorišćavanja(prinosa, žetve) se pojavljuje na $K^\bullet$.
S pozitivnim vremenskim izborom, stabilno stanje potrošnje je pomereno ka sadašnjosti. Kako stopa vremenskog izbora (ili tržišna kamatna stopa) raste, stabilno stanje glavnice K i $\mu(t)$ opadaju jer je levo od K^* $h'(K) > 0$ i $h''(K) < 0$.

Vidimo da krive $K' = 0$ i $\mu' = 0$ obrazuju 4 dela faznog dijagrama. Sada želimo da vidimo kako će se vrednosti K i μ ponašati u ta 4 dela faznog dijagrama.

Već smo napomenuli da se stabilno stanje pojavljuje u tački $(K^\bullet, \mu^\bullet)$, tj. na mestu preseka $K' = 0$ i $\mu' = 0$.

Možemo uočiti sledeće:

- iznad $K' = 0$, K vremenom raste,
- ispod $K' = 0$, K vremenom opada,
- levo od $\mu' = 0$, μ opada,
- desno od $\mu' = 0$, μ raste.

Kada K i μ nemaju vrednost $(K^{\bullet}, \mu^{\bullet})$, već imaju neke druge vrednosti, kretaće se u smerovima koji su označeni strelicama na slici 4.2.

Od tačaka A i C, put se udaljava od stabilnog stanja $(K^{\bullet}, \mu^{\bullet})$.
Od tačaka B i D, put se približava stablinom stanju $(K^{\bullet}, \mu^{\bullet})$.

Možemo zaključiti da je ova stacionarna tačka $(K^{\bullet}, \mu^{\bullet})$ tačka prevoja (sedlo).

Treba napomenuti da je ispravno koristiti ovaj postupak samo zato što je ovo autonomni model.

Često se tvrdi da je stabilno stanje optimalan put. Postoje opravdanja za ovakvo tvrđenje. Navešćemo dva opravdanja:

1. Prvo opravdanje se nalazi u osobinama funkcija u modelu. Navešćemo jedan primer. Pretpostavićemo sledeće: $C \to 0$ kada $U'(C) \to \infty$ i $C \to \infty$ kada $U'(C) \to 0$. Kada potrošnja konvergira ka nuli, takvi putevi ne mogu biti optimalni, jer će granična vrednost povećanja potrošnje za male vrednosti C biti veća od celog graničnog troška iskorišćavanja (prihoda).
   Kada potrošnja divergira u beskonačnost, takvi putevi ne mogu biti optimalni, jer granični troškovi ribolova teže nuli, to jest ne mogu biti optimalni sa pozitivnim graničnim troškovima ribolova.

2. Drugo opravdanje nalazimo u tome da je važnije stabilno stanje nego eksplozivno ponašanje. Retko imamo primere gde kapital teži beskonačnosti i primere gde svi resursi izumiru.

U nastavku posmatramo primer ribolova.

Zamislimo neko jezero koje je u privatnom vlasništvu u kome se nalazi riba. Smatramo da se vrednost jezera menja u zavisnosti od toga kako se riba lovi tokom vremena, tj. u zavisnosti od promene zaliha ribe. Što je veća količina ribe u jezeru, lakše ju je uloviti. Razlog toga je to što će odluke u sadašnjosti uticati na granični trošak ribolova u budućnosti, pa tako i na vrednost resursa.

Posmatramo model ekploatacije obnovljivog resursa u kome maksimizujemo bogatstvo. Taj model je:

$$max \int_0^{\infty} [pu(t) - c(X,u)]e^{-rt}dt$$

pri čemu je

$$X'(t) = h(X(t)) - u(t)$$
$$X(0) = X_0.$$

Sledi tumačenje oznaka iz modela koje čemo koristiti:

- $X(t)$ zaliha ribe u jezeru u trenutku t,
- X_0 početne zalihe ribe,
- $X'(t)$ stopa promene (povećanja ili smanjenja) zaliha ribe u trenutku t,
- p cena po kojoj se riba prodaje i ona je konstantna,
- $u(t)$ stopa kojim se riba lovi i prodaje ($u(t)$ je ustvari vektor upravljanja i on sadrži sve odluke vlasnika jezera),
- $c(X,u)$ funkcija troškova koja zavisi od zaliha ribe X i stope lova i prodaje ribe u,
- r kamatna stopa,
- $h(X)$ biološka stopa rasta zaliha.

Vlasnik želi da maksimizira vrednost ribe za $t \in [0, \infty]$, nemamo krajnje ograničenje u ovom modelu. Data je jednačina stanja $X'(t) = h(X(t)) - u(t)$, koja nam govori da stopa promene zaliha ribe u trenutku t zavisi od neke biološke stope rasta i stope $u(t)$. Ograničićemo vrednost stope $u(t)$ da bude nenegativna, tj. da je $u(t) \geq 0$.

Formiraćemo trenutnu Hamiltonovu funkciju:

$$\mathcal{H} = pu - c(X,u) + \lambda e^{rt}(h(X) - u)$$

$$\mathcal{H} = pu - c(X,u) + \mu(h(X) - u).$$

Diferenciramo Hamiltonovu funkciju $\mathcal{H}$ po u i po X i dobijamo maksimalnu jednačinu i pridruženu jednačinu:

$$\mathcal{H}_u = p - c_u - \mu = 0 \tag{4.18}$$

$$\mathcal{H}_X = -c_X + \mu h'(X) = p\mu - \mu'(t) = p\mu - \mu' \qquad (4.19).$$

Prvo posmatramo jednačinu (4.18) i vidimo da važi $p - c_u = \mu$. To znači da je razlika neto trenutne dobiti od iscrpljivanja ribe i graničkog troška jednaka graničnoj trenutnoj vrednosti zaliha.
Kada sadašnje odluke ne bi uticale na budućnost bilo bi $p - c_u = 0$, tj. $p = c_u$. Međutim, u dinamickim modelima oportunitetni trošak budućih događaja je uložen u sadašnje odluke.

Sada posmatramo jednačinu (4.19) i vidimo da važi

$$h'(X) = p - \frac{\mu'}{\mu} + \frac{c_X}{\mu}. \tag{4.20}$$

Vidimo da se jednačina (4.20) i (4.15) razlikuju samo u tome što (4.20) ima i dodatni izraz $\dfrac{c_X}{\mu}$.

Iz ranije analize, kada smo posmatrali $K' = 0$ i $\mu' = 0$, znamo da se stabilno stanje pojavljuje tamo gde je $h'(X) = r$ (ili stopi nestrpljenja ρ). Kako znamo da je r (ili ρ) pozitivno, znamo da je $K^\bullet > K^*$.

Međutim, u jednačini (4.20) imamo dodatni izraz $\dfrac{c_X}{\mu}$ koji predstavlja uticaj povećanja zaliha ribe na trošak ribolova, pa moramo izvršiti još analize. Znamo da je $\mu > 0$ uvek, onda zalihe ribe X nikada nemaju negativnu graničnu vrednost.

Veće zalihe ribe smanjuju granične i ukupne troškove ribolova. U tom slučaju je $c_X < 0$, što nam govori da je $K^\bullet > K^*$. Ono što mozemo da zaključimo je da odgađanje iskorišćavanja resursa (u ovom slučaju ribe) i čekanje da se zalihe povećaju, mogu stvoriti dovoljno veliku dobiti u budućnosti da izjednači oportunitetni trošak zaliha, smanjenjem troškova iskorišćavanja resursa.

Dodatak

U dodatku ćemo prikazati jedan lep primer iz oblasti finansija. On nam pokazuje kako prilikom rešavanja tog problema koristeći varijacioni račun dolazimo do kontradikcije. Zatim primenom principa maksimuma dolazimo do rešenja problema.
Korišćena literatura je [5].

Cilj svake kompanije je da ima što veći profit, odnosno da maksimizira profit. Profit predstavlja razliku između prihoda i rashoda.
Na početku ćemo uvesti oznake i pretpostavke:

- $\phi(t),\ \phi \in [0,1]$ stopa po kojoj se reinvestira profit i ona govori nam koji deo profita kompanije treba da reinvestiramo (predstavlja promenljivu upravljanja),
- $u(t)$ profitna stopa (predstavlja promenljivu stanja),
- $u'(t)$ stopa promene profita,
- $\phi(t)u(t)$ reinvestirani profit,
- J ukupan zadržani profit,
- pretpostavljamo da važi
$$u' = \alpha\phi u, \tag{1}$$
gde je konstanta $\alpha > 0$, to jest postoji linearna zavisnost između stope reinvestiranog profita i stope promene profita.

Kompaniju zanima kojom stopom treba da reinvestira profit, to jest koliko je ϕ, kako bi maksimizirala ukupan zadržani profit tokom vremenskog intervala $[0, t_f]$. Ukupan zadržani profit se predstavlja kao

$$J(u(t), \phi(t)) = \int_0^{t_f} (1-\phi)u\,dt. \tag{2}$$

Sada ćemo definisati problem. Rekli smo, cilj kompanije je da maksimizira ukupan zadržani profit (2) uz ograničenja (1) i $\phi \in [0,1]$.
Kao što znamo iz poglavlja 2, funkcija cilja definiše cilj problema optimizacije, koji je u ovom primeru ukupan zadržani profit, dok jednačina stanja pruža informacije o tome da li je kompanija na gubitku ili je ostvarila profit.
Počinjemo rešavanje ovog problema pomoću varijacionog računa, tako što formiramo novu funkcionelu

$$\tilde{F}(u, u', \phi\lambda) = [1 - \phi(t)]u(t) + \lambda(t)[u'(t) - \alpha\phi(t)u(t)],$$

gde je $\lambda(t)$ Lagranžov množitelj.
Imaćemo dve Ojlerove jednačine, zato što imamo dve zavisne promenljive, i one glase

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u} + \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u'}\Big) = 0,$$
$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \phi} + \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \phi'}\Big) = 0.$$

Kada rešimo ove dve jednačine dobićemo

$$1 - \phi(1 + \alpha\lambda) - \lambda' = 0, \tag{3}$$

$$-u(1 + \alpha\lambda) = 0. \tag{3'}$$

Pretpostavićemo da je $u(t) \neq 0$.
Znamo da je $\lambda' = 0$, jer je λ konstanta. Znamo da je λ konstanta, jer λ mozemo izraziti kao $\lambda = -\dfrac{1}{\alpha}$, gde je α konstanta.
Kada na jednačinu (3) primenim prethodno rečeno, dobićemo da je $0 = 1$, odnosno dobićemo da je profit $u(t) = 0$, to jest da kompanija ima profit nula što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $u(t) \neq 0$.

Vidimo da se ovaj problem ne može rešiti u skupu neprekidno diferencijabilnih funkcija, to jest primenom varijacionog računa. Međutim, ovaj problem ima optimalno rešenje ukoliko primenimo princip maksimuma.

Formiramo Hamiltonovu funkciju

$$H = (1 - \phi)u - \lambda\alpha\phi u = [1 - (1 + \alpha\lambda)\phi]u. \tag{4}$$

Kada diferenciramo H po u dobijamo

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 1 - \phi - \lambda\alpha\phi \equiv \lambda'.$$

Dakle, dobijamo pridruženu jednačinu i granični uslov

$$1-(1+\lambda\alpha)\phi=\lambda',\ \lambda(t_f)=0. \tag{5}$$

Princip maksimuma nam govori da ako želimo da maksimiziramo funkcionelu, mi možemo da maksimiziramo Hamiltonovu funkciju.
Pošto želimo da maksimiziramo Hamiltonovu funkciju, dovoljno je da minimiziramo izraz $(1+\alpha\lambda)\phi$, jer je $u \geq 0$.
Kada $\phi \in [0,1], \alpha > 0$, onda će $(1+\alpha\lambda)\phi$ biti minimizirano ako važi

$$\phi(t)=\begin{cases} 0, & \lambda > -\frac{1}{\alpha} \\ 1, & \lambda < -\frac{1}{\alpha}. \end{cases} \tag{6}$$

Ovim smo pokazali da Lagranžov množitelj utiče na to kada će $\phi(t)$ prelaziti iz jedne krajnosti u drugu. Rešenje nam govori da li treba da investiramo sav profit, $\phi=1$, ili da ništa ne investiramo, $\phi=0$.

Imaćemo dva para rešenja.
Kada je $\phi(t)=0$, dobićemo sledeća rešenja:

$$u(t)=c_1, \quad \lambda(t)=t+c_2. \tag{7}$$

Kada je $\phi(t)=1$, dobićemo sledeća rešenja:

$$u(t)=c_3e^{\alpha t}, \quad \lambda(t)=c_4e^{-\alpha t}. \tag{8}$$

Iz početnog uslova $\lambda(t_f)=0$ i izraza (6) imamo da je $\phi(t_f)=0$. To nam govori da u krajnjem trenutku ne postoji reinvestiranje profita. Kada u drugu jednačinu (7) primenimo uslov $\lambda(t_f)=0$ imaćemo da je

$$c_2=-t_f.$$

Kada ovako dobijeno c_2 vratim u drugu jednačinu (7) dobićemo

$$\lambda(t)=t-t_f, t\in[t_s,t_f],$$

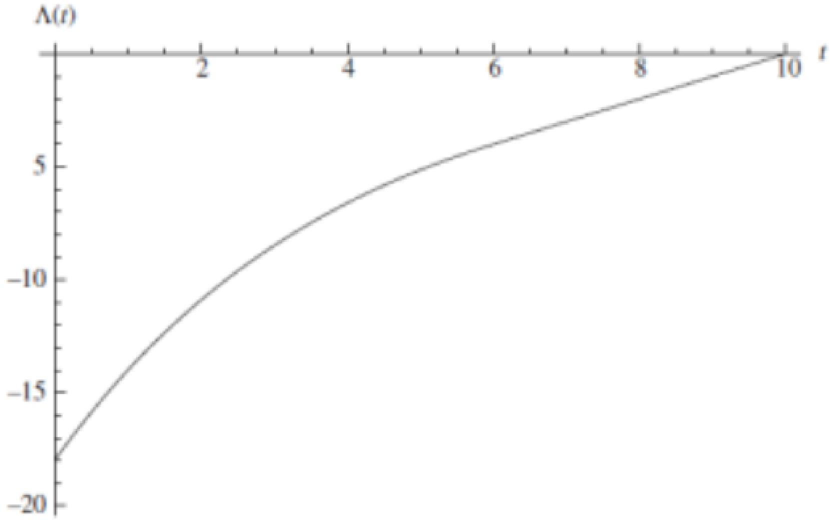
pri čemu je t_s vreme zamene. Dakle, u tom momentu se vrši zamena u ulazu upravljanja. Vidimo da se zamena u ulazu upravljanja događa kada je $\lambda=-\dfrac{1}{\alpha}$, a to se dešava kada se vrši zamena vremena $t_s=t_f--\dfrac{1}{\alpha}$. Dakle, do vremena t_s rešenje je dato sa (7), a nakon vremena t_s kada se vrši zamena, rešenje je dato sa 8. Sada želimo da nađemo konstantu c_4 koja figuriše u (8). Zamenom $\lambda=-\dfrac{1}{\alpha}$ i $t=t_f-\dfrac{1}{\alpha}$ u (8) dobićemo

$$c_4=-\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t_f-1}.$$

Kada dobijeno c_4 uvrsimo u (8) onda je

$$\lambda(t) = -\frac{1}{\alpha} e^{\alpha(t_f - t) - 1} \quad \text{za} \quad t \in [0, t_f - \frac{1}{\alpha}].$$

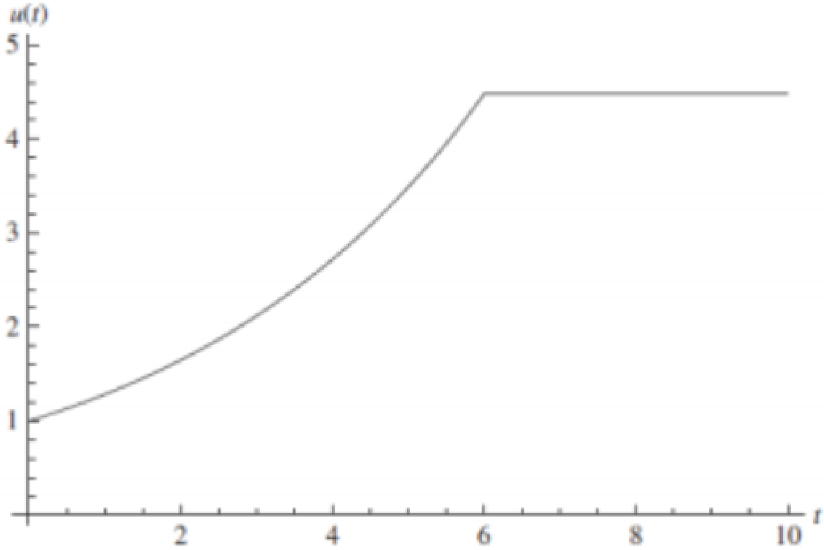
Vidimo da neće biti zamene u ulazu upravljanja, jer λ neće biti veće od $-\dfrac{1}{\alpha}$ do kraja intervala. Na slici $D.1$ prikazana je promenljiva $\lambda(t)$ i ona je na intervalu $[0, t_s]$ eksponencijalna, a zatim na intervalu $[t_s, t_f]$ linearna. To nam govori da je ukupan profit osetljiviji na promene početku intervala, nego na kraju. To je i logično jer više vremena da utiče na budući profit ima profit koji kompanija investira na početku.



Slika D.1

Dakle, ovim smo pokazali ponašanje promenljive λ, koja govori koliko je funkcionela osetljiva na promene u ulazu upravljanja. Još nismo našli koliko je promenljiva u koja je prikazana na slici $D.2$.
Dobićemo da je

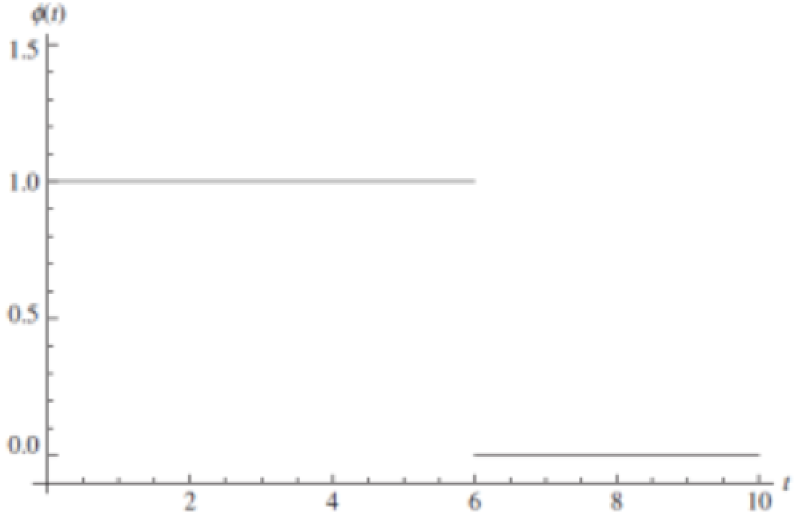
$$u(t) = \begin{cases} u_0 e^{\alpha t}, & 0 \le t \le t_f - \frac{1}{\alpha} \\ u_0 e^{\alpha t_f - 1}, & t_f - \frac{1}{\alpha} \le t \le t_f. \end{cases}$$



Slika D.2

Zatim, stopa reinvestiranog profita, koja je prikazana na slici 3 će biti

$$\phi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_f - \frac{1}{\alpha} \\ 1, & t_f - \frac{1}{\alpha} \leq t \leq t_f, \end{cases}$$



Slika D.3

Napomenućemo da su slike $D.1, D.2$ i $D.3$ nacrtane za podatke $u_0 = 1$, $\alpha = \dfrac{1}{4}, t_f = 10$ i $t_s = 6$.

Zaključujemo, da ćemo maksimizirati ukupan profit tokom vremenskog intervala $[0, t_f]$, ako sav profit reinvestiramo do t_s, a zatim posle toga ne reinvestiramo ništa.

Zaključak

U radu smo se bavili raznim problemima intertemporalnog izbora kao i primenom optimalnog upravljanja u rešavanju tih problema.

Ljudi u različitim periodima života zarađuju različite nivoe prihoda. Zbog toga oni teže da pozajmljuju drugima i od drugih kako bi ujednačili svoju potrošnju. Postoje potrošači koji potroše sav prihod stečen u određenom periodu, a postoje i oni koji prenose potrošnju u budućnost. Pokazali smo kako kamatna stopa utiče na izbor potrošača da li će da troši novac ili da štedi.

Videli smo i da su ljudi nestrpljivi, da bi se oni radije odlučili na potrošnju u sadašnjosti nego u budućnosti ako bi u budućnosti imali na raspolaganju istu sumu novca kao u sadašnjosti. U odnosu na kamatnu stopu i stopu nestrpljenja prikazano je kada će potrošač više trošiti, u budućnosti ili u sadašnjosti. Takođe smo zaključili i da se ljudi pre odlučuju za ujednačenu potrošnju.

Problemi koje smo prikazali u ovom radu su sledeći: maksimizirati funkcionelu koja je data u obliku integrala uz ograničenje koje je dato u obliku diferencijalne jednačine i uz početni uslov. Zbog toga smo uveli princip maksimuma. Rešavanje ovakvih problema započinjemo formiranjem Hamiltonove funkcije. Daljom analizom, zaključujemo da su granični oportunitetni troškovi jednaki razlici tržisne kamatne stope i stope nestrpljenja. Iz uslova transferzalnosti dobili smo da će se kapital na kraju posmatranog vremenskog perioda potrošiti. Kako bismo prikazali rešenja modela za funkciju cilja biramo odgovarajuću funkciju.

Analiziran je i problem ribolova. Ukoliko ne odredimo funkciju korisnosti i stopu rasta ribe tada ne možemo dati analitičko rešenje modela. Onda smo iskoristili fazni dijagram, alat koji se može koristiti kod autonomnih modela, kakav je i ovaj. Dobijamo dve krive koje se seku u tački koja predstavlja ravnotežu. Te dve krive obrazuju četiri dela faznog dijagrama, i u zavisnosti od izbora tačke uočavamo da li se put udaljava ili približava stabilnom stanju. Dali smo objašnjenje za često tvrđenje da je stabilno stanje optimalan put. U ovom modelu ribolova smo zaključili da čekanje da se zalihe ribe povećaju može stvoriti veliku dobit u budućnosti tako da se izjednači oportunitetni trošak zaliha.

Literatura

[1] Eugene Silberberg, Wing Suen, *The structure of economics*, 2000.

[2] N. Teofanov, Lj. Gajić, *Predavanja iz optimizacije*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, TEMPUS CD JEP 17017-2002, 2006.

[3] Milica B. Naumović, *Tehnike optimalnog upravljanja*, Elektronski fakultet u Nišu, 2007.

[4] Daniel Liberzon, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Princenton University Press, New Jersey, 2012.

[5] K.W.Cassel, *Variational Methods with Applications in Science and Engineering*, Univesity Press, Cambridge, 2013.

[6] Shone Ronald, *Economic Dynamics*, Cambrige University press, 2009.

[7] J. Kokić, *Dinamički skoring i smanjenje poreza*, master rad, Univerzitet u Novom Sadu, 2010.

[8] http://www.courseweb.uottawa.ca/eco2145/varian_chapter%2010.pdf

[9] http://www.econ.ku.dk/okocg/VM/VM-general/Kapitler%20til%20bog/Ch9-M2-2014-1.pdf

[10] http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic466990.files/Lecture_08_Intertemporal_Choice.pdf

[11] *Oportunitetni trošak,* https://bs.wikipedia.org/wiki/Oportunitetni_tro%C5%A1ak

[12] *Irving Fišer,* https://en.wikipedia.org/wiki/Irving_Fisher

Biografija

Biljana Jovanovski je rođena 28.05.1990. godine u Novom Sadu. Nakon završene Osnovne škole "Prva vojvođanska brigada" u Novom Sadu, upisala je Ekonomsku školu "Svetozar Miletić", smer finansijski tehničar, u Novom Sadu. Nakon završene srednje skole 2009. godine, upisala je osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija, koje završava u septembru 2013. godine. Iste godine upisuje master studije na istom fakultetu i usmerenju. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom, čime je stekla uslov za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Biljana Jovanovski
AU

Mentor: dr Nenad Teofanov
ME

Naslov rada: Intertemporalni izbor i optimalno upravljanje
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezk izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2016
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5/74/0/0/14/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)

FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Optimizacija
ND

Ključne reči: intertemporalni izbor, varijacioni račun, Ojlerova jednačina, diferencijalne jednačine, Hamiltonova funkcija
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Ovaj rad se bavi optimalnim upravljanjem u modelima intertemporalnog izbora. Objašnjavamo pojam varijacionog računa i izvodimo Ojlerovu jednačinu. Definišemo pojam optimalnog upravljanja, posebno objašnjavamo optimalno upravljanje sa diskontovanjem. Predstavljamo Hamiltonovu funkciju i princip maksimuma. Definisali smo pojam i dali ekonomsku interpretaciju intertemporalnog izbora, a zatim naveli modele intertemporalnog izbora koje smo rešili primenom principa maksimuma.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 09.06.2016.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Ljljana Gajić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Ljiljana Teofanov, vanredni profesor Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu
Mentor: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Biljana Jovanovski
AU

Mentor: dr Nenad Teofanov
MN

Title: Intertemporal choice and optimal control theory
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2016
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (5/74/0/0/14/0/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Optimization
SD

Subject/Key words: intertemporal choice, calculus of variations, Euler equations, differential equation, Hamiltonian function
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This master thesis is about optimal control theory in models of intertemporal choice. We explan concept of calculus of variations and Euler equation. We define the concept of optimal control theory, especially, we explain optimal control with discounting. Then, defined the term and gave economic interpretation of intertemporal choice, and then we present some of the intertemporal choice models which we solved using maximum principle.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 09.06.2016.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Ljljana Gajić, full professor at Faculty of Science in Novi Sad
Member: dr Ljiljana Teofanov, associate professor at Faculty of Technical Science in Novi Sad
Mentor: dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad