UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

# Uloga fazi skupova u rangiranju objekata

- Master rad -

Mentor:
Prof. dr Ivana Štajner-Papuga

Kandidat:
Biljana Bašić
507m/11

Novi Sad, 2017.

## Sadržaj

# Uvod

Proces donošenja odluka spada u najznačajnije aktivnosti ljudi. Tokom vremena, donošenje odluka se razvilo u bogatu i značajnu oblast istraživanja. U ovom radu će biti predstavljena uloga fazi skupova u procesu donošenja odluka s posebnim osvrtom na rangiranje objekata tako sto će biti prikazano nekoliko fazi modela odlučivanja.

Rad se bazira na teoriji fazi skupova. Reč fazi (eng.fuzzy) je engleskog porekla i označava neodređen, neprecizan pojam, a prvi put se kao takav javlja u delu ,,Fuzzy sets''– Lofti Zadeh-a 1965.godine (videti[18]).
Fazi skupovi se razlikuju od klasičnih skupova kod kojih je granica skupa precizna, tj. kod kojih se za dati element nedvosmisleno može reći da li jeste ili nije unutar skupa. Zahvaljujući fazi skupovima i fazi logici omogućeno je modelovanje vrednostima koje ne moraju samo da pripadaju ili ne pripadaju skupu već mogu samo u određenoj meri da pripadaju. U kojoj meri pripadaju određene vrednosti fazi skupu pokazuje funkcija pripadnosti koja može uzeti vrednosti iz celog zatvorenog jediničnog intervala.

U prvom delu predloženog rada biće dat pregled osnovnih pojmova potrebnih za razumevanje rada u celini. Biće predstavljeni fazi skupovi, fazi relacije, trougaone norme, operacije na fazi skupovima zasnovane na trougaonim normama, OWA uređeni operatori usrednjavanja sa težinama, fazi brojevi i trougaoni fazi brojevi, L-R interval, sabiranje L-R fazi brojeva. Literatura korišćena pri izradi ovog dela je iz [1,2,4,6,7,14].

U drugom delu rada biće predstavljeno donošenje odluka u fazi okruženju. Donošenje odluka se modeluje uz pomoć probabilističkih teorija odlučivanja i teorija igara, pokušavajući da se izađe na kraj sa neodređenošću i nespecifičnošću. Biće razmatrano pojedinačno odlučivanje i odlučivanje sa više donosioca odluke.
Kod pojedinačnog odlučivanja bitni su ciljevi i ograničenja izraženi kao fazi skupovi, a odluku određuju odgovarajući zbirovi fazi skupova. Kada se donese odluka u formi fazi skupa, iz fazi skupa će biti potrebno izabrati najbolji pojedinačni izbor. To se postiže biranjem onog izbora (objekta) koji postiže maksimalan stepen pripadnosti u tom fazi skupu (proces defazifikacije).
Kada imamo rangiranje objekata kod odlučivanja sa više donosioca odluke tada imamo više ciljeva jer svako drugačije rangira svoje izbore.
Funkcija zajedničkog izbora se tada mora naći tako da prikaže najprihvatljivije grupno rangiranje preferencija. Ovaj model daje mogućnost svakom donosiocu odluke pojedinačno da ima različite ciljeve i vrednosti ali celokupna suština je da se donese zajednička prihvatljiva odluka(videti[7]).

Poslednji deo rada se bavi ulogom fazi skupova pri višekriterijumskom odlučivanju. Kod odlučivanja sa više kriterijuma izbore (objekte) procenjujemo na osnovu više kriterijuma. Dakle, imamo skup izbora i skup kriterijuma koji karakterišu situaciju odlučivanja. Svaki kriterijum podstiče rangiranje svakog izbora pojedinačno pa se tek onda vrši ukupno rangiranje preferencija. Očita je sličnost između ovih problema odlučivanja i problema odlučivanja sa više donosioca odluka, a razlika je u tome što višestruko rangiranje predstavlja ili preferencije različitih ljudi ili klasifikovanje na osnovu drugih kriterijuma.

Problem odlučivanja sa više kriterijuma najčešće se u praksi koristi za problem angažovanja i biranja kadra na mnogim poslovnim funkcijama. Takođe će biti predstavljena primena OWA operatora kroz primer. Literatura korišćena pri izradi ovog dela je iz [5,7].

* * *

*Izuzetnu zahvalnost dugujem svom mentoru, prof. dr Ivani Štajner-Papuga, na ukazanom poverenju, pruženom znanju, požrtvovanosti, velikom strpljenju i pomoći, kao i na korisnim sugestijama i primedbama bez kojih ne bih uspela da završim ovaj rad. Takođe, zahvaljujem se dr Mirjani Štrboja kao i dr Aleksndru Takači članovima komisije.*
*Posebnu zahvalnost dugujem i svojoj porodici, naročito roditeljima koji su mi bili podrška tokom čitavih studija.*

*Biljana Bašić*

# 1. Uvodni pojmovi

U prvom delu rada biće prikazani osnovni pojmovi o fazi skupovima i funkciji pripadnosti. Kako bi izlaganje bilo jasnije i potpunije biće predstavljeni fazi brojevi, trougaone norme i konorme, fazi intervali i fazi relacije(videti [1,2,4,6,7,14]).

## 1.1. Fazi skupovi

Karakteristična funkcija $\chi_A$ kod klasičnih skupova uzima samo dve vrednosti ukazujući da li je ili nije $x \in$U elemenat skupa A:

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & za \quad x \in A, \\ 0, & za \quad x \notin A. \end{cases}$$

Svaki skup je jedinstveno određen sa karakterističnom funcijom.

Univerzalni skup $U$ ima za karakterističnu funciju $\chi_U(x)$čija vrednost je 1 za svaki element skupa U, tj. $\chi_U(x) = 1$ za svako $x$. Jasno, karakteristična funkcija praznog skupa je 0.

**Primer1.1.** Neka je univerzalni skup $U$ skup voća i povrća,
U=$\{banana, krompir, jabuka, kruška, paprika, luk\}$, a neka je njegov podskup A skup povrća A=$\{krompir, paprika, luk\}$.

Koristeći se karakterističnom funkcijom dobijamo:

$$\chi_A(banana) = 0, \qquad \chi_A(jabuka) = 0, \qquad \chi_A(paprika) = 1,$$
$$\chi_A(krompir) = 1, \qquad \chi_A(kruška) = 0, \qquad \chi_A(luk) = 1.$$

Odnosno, karakteristična funkcija skupa A je sledeće forme:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & za \quad x = krompir, paprika, luk, \\ 0, & za \quad x = banana, jabuka, kruška. \end{cases}$$

Skup A, odnosno skup povrća, može biti predstavljen kao

$$\mathrm{A} = \{(banana, 0), (krompir, 1), (jabuka, 0),$$

$$(kruška, 0), (paprika, 1), (luk, 1)\}.$$

Pripadnost elementa nekom skupu je precizan i jasan concept.Objekat pripada ili ne pripada skupu, član je ili nije, pa funkcija pripadanja može uzeti samo dve vrednosti 1 ili 0. Problem se javlja kada su termini koje posmatramo neprecizni.

Mnogi pojmovi u kojima su neprecizno definisane granice koristimo u svakodnevnom životu. Neki takvi pojmovi su: mršav, nizak, mnogo, visok, težak, …

U sledećem primeru biće prikazan jedan od takvih nejasnih pojmova.

**Primer 1.2.** Potrebno je opisati težinu ljudi srednjeg rasta uz pomoć klasičnog skupa. Pretpostavićemo da je čovek težak ili debeo ako ima preko 90kg a inače je mršav (pretpostavićemo da je početna težina ljudi od 55kg).

Znači skup A je A=$\{debelji\ ljudi\}$, a njegova karakteristična funkcija ima sledeći oblik:

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & za\ \ x \geq 90kg, \\ 0, & za\ \ 55kg \leq x < 90kg. \end{cases}$$

Po ovom načinu razmišljanja dolazimo do logički pogrešnih zaključaka. Osoba koja je teška 89,5kg bi bila okarakterisana kao mršava osoba i ako je to samo 0,5kg manje od osobe koja je okarakterisana kao gojazna.

U nastojanju da se izbegnu oštre granice i da se sačuva fleksibilnost prisutna u ljudskoj komunikaciji uveden je pojam fazi skupa.Za razliku od isključive pripadnosti i isključive ne pripadnosti elemenata klasičnom skupu, elementi pripadaju fazi skupu sa određenom merom. Zbog toga bi na primer osoba sa 89,5kg imala stepen pripadnosti 0,95.

Problem opisan u prethodnom primeru, tj.problem koji podrazumeva rad sa lingvističkim promenljivim, kao i problemi slični ovima moraju se posmatrati na drugi način.

Za ovakve pojmove se kaže da su neprecizni (eng.vague) ili fazi. Teorija koja omogućava rad sa ovakvim pojmovima naziva se teorija fazi skupova.

Pojam fazi skupa je 1965.godine uveo dr. Lofti Zadeh[1] u svom radu pod nazivom „Fuzzy sets" (videti[18]) i to predstavlja matematički aparat koji omogućava rad sa nepreciznim podacima i informacijama.

Koncept karakteristične funkcije pripadanja kakav poznajemo u klasičnim skupovima se proširuje na način da se sada meri ,,stepen pripadnosti" skupa tj. svim elementima se dodeljuje odredjena vrednost iz intervala $[0,1]$, što pokazuje sledeća definicija.

**Definicija 1.1.** [1] Neka je $U$ univerzalni skup. Fazi podskup skupa $U$, u oznaci $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, je određen funkcijom pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}}: U \to [0,1]$.

Svaki element iz skupa $U$ pripada posmatranom fazi skupu sa određenim stepenom između 0 i 1.

**Primer 1.3.** [11] Potrebno je iskazati koja starosna dob između 10 i 30 godina spada u ,,mladiće''.

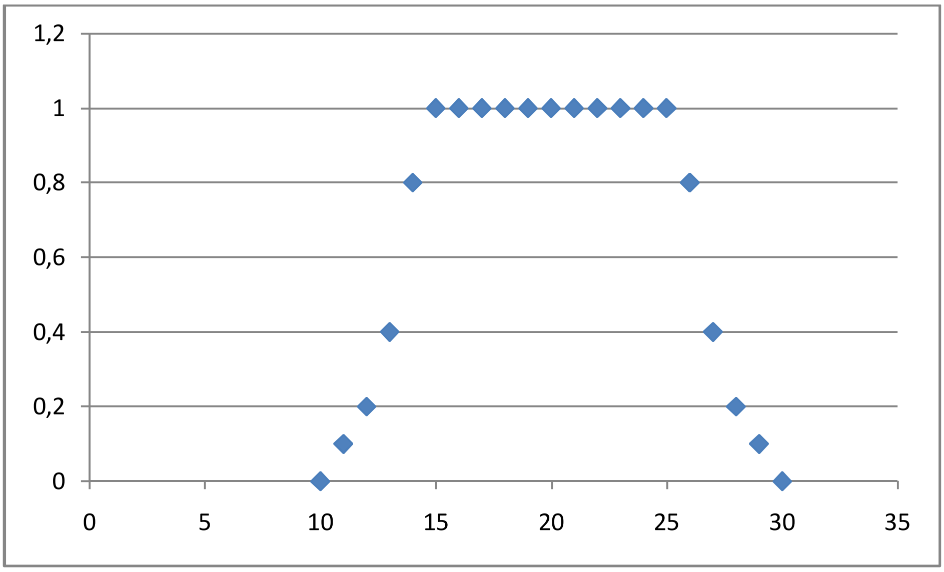
Kada univerzalni skup ima najviše prebrojivo mnogo elemenata imamo diskretan slučaj funkcije pripadanja, što je i slučaj u ovom primeru.

Vrednosti funkcije pripadanja su date sledećom tabelom (Tabela 1.1.) a zatim i slikom (Slika 1.1.).

| Godine | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | ... | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Stepen pripadanja | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.8 | 1 | ... | 1 | 0.8 | 0.6 | 0.4 | 0.2 | 0 |

**Tabela 1.1. Prikaz diskretnog slučaja funkcije pripadanja za pojam ,,mladić''.**

[1] Lotfali Askar Zadeh (1921- ) je poznati matematičar, elektroinženjer, istraživač u oblasti veštačke inteligencije i računarskih nauka. Definisao je fazi skupove kao matematički formalan pojam kojim se modelira neodređenost u lingvistici.

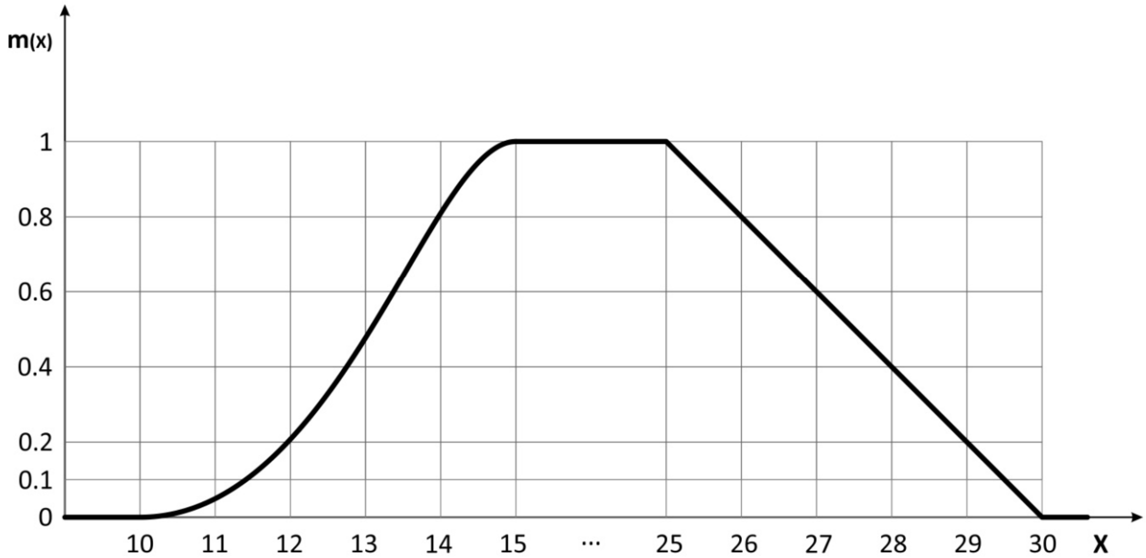



**Slika1.1. Diskretan slučaj funkcije pripadnosti za pojam ,,mladić''.**

Sada možemo odrediti fazi skup $\mathcal{A}$ koji će odgovarati našoj predstavi pojma ,,mladić''. U posmatranom primeru, funkcijom pripadnosti određeno je područje fazi skupa za pojam ,,mladić'' od 10 do 30 godina. Pri tome $\mu_{\mathcal{A}}(x) = 1$ važi od 15 do 25 godina, što znači da su ljudi te starosti potpuno kompatibilni sa pojmom,, mladić''. Ljudi od 13, odnosno od 28 godina mogu se smatrati mladićima sa merom 0.4 dok se ljudi ispod 10, odnosno preko 30 godina nikako ne ubrajaju u mladiće.

**Napomena 1.1.**

Funkcija pripadnosti može biti i neprekidna, pa ako je u prethodnom primeru univerzalni skup $R^+$ ceo problem se može predstaviti sledećom slikom i neprekidnom funkcijom pripadnosti.




**Slika 1.2. Neprekidan slučaj funkcije pripadnosti u odnosu na pojam „mladić".**

Vrlo često fazi skup poistovećujemo sa odgovarajućom funkcijom pripadnosti.

Fazi skupovi će se označavati velikim pisanim slovima: $\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{C}}$, ...

Odgovarajuće funkcije pripadnosti će se označavati sa $\mu_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ , $\mu_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ , $\mu_{\boldsymbol{\mathcal{C}}}$, ...

Diskretan fazi skup možemo zapisati $(x_1, \mu_A(x))$, dok neprekidan slučaj zapisujemo odgovarajućom funkcijom pripadnosti.

Za razliku od skupa A koji je podskup unuverzalnog skupa U, skup $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ to nije.

Pored pomenutog zapisa diskretnog fazi skupa, postoji još nekoliko načina predstavljanja fazi skupova koje pojedini autori koriste:

$\boldsymbol{\mathcal{A}}= \{\mu_{\mathcal{A}}(x)/x,\ x \in \mathrm{A},\ \mu_{\mathcal{A}}(x) \in [0,1]\}$, gde simbol „/" nije znak deljenja već pokazuje da je $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ vrednost funkcije pripadanja za element $x$.

**Primer 1.4.** Neka je dat sledeći fazi skup:

$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{(x_1, 0.3)\,, (x_2, 0.5)\,, (x_3, 0.2)\,, (x_4, 0.8), (x_5, 1)\}$

koji se može zapisati i na sledeći način:

$\mathcal{A} = \{(0.3/x_1), (0.5/x_2), (0.2/x_3), (0.8/x_4), (1/x_5)\}.$

To je primer diskretnog fazi skupa sastavljenog od pet uređenih parova. Elementi $x_i$, $i = 1,2, \dots 5$ ne moraju da budu brojevi, oni pripadaju klasičnom skupu $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

Funkcija pripadnosti na skupu $A$ uzima vrednosti iz jediničnog intervala:

$$\mu_{\mathcal{A}}(x_1) = 0.3, \quad \mu_{\mathcal{A}}(x_2) = 0.5, \quad \mu_{\mathcal{A}}(x_3) = 0.2,$$

$$\mu_{\mathcal{A}}(x_4) = 0.8, \quad \mu_{\mathcal{A}}(x_5) = 1.$$

Dakle iz priloženog se vidi da elemenat $x_5$ u potpunosti pripada skupu, dok elemenat $x_3$ jako malo pripada fazi skupu $\mathcal{A}$ jer je 0.2 jako blizu nule.

Fazi skup $\mathcal{A}$ može biti dat i narednom tabelom

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.3 | 0.5 | 0.2 | 0.8 | 1 |

**Definicija 1.2.** [1] Visina fazi skupa $\mathcal{A}$**,** u oznaci $hgt(\mathcal{A})$, je supremum funkcije pripadnosti, tj.

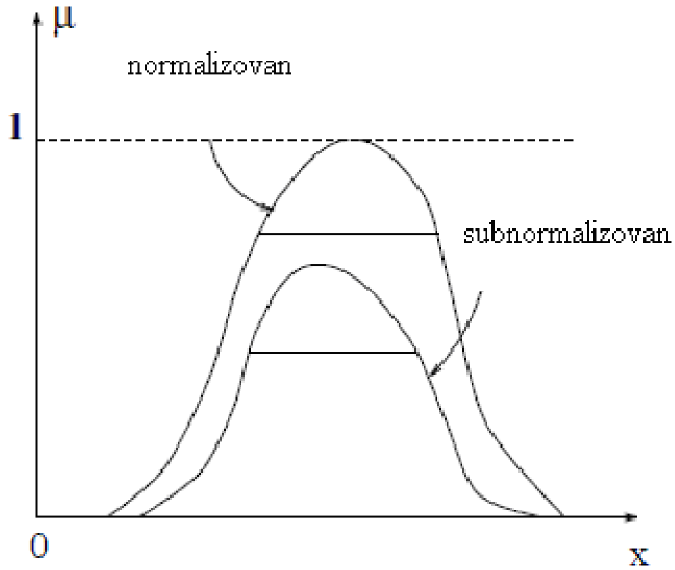
$$hgt(\mathcal{A}) = \sup_{x \in U} \mu_{\mathcal{A}}(x).$$

U slučaju da fazi skup $\mathcal{A}$ broji konačno mnogo elemenata visina se definiše kao maksimum funkcije pripadnosti tj.

$$hgt(\mathcal{A}) = \max_{x \in U} \mu_{\mathcal{A}}(x).$$

**Definicija 1.3.** [2] Fazi skup $\mathcal{A}$ je normalizovan ako je $hgt(\mathcal{A}) = 1$, odnosno ako postoji bar jedan elemenat iz univerzalnog skupa, takav da je vrednost funkcije pripadnosti jednaka jedinici.

U suprotnom fazi skup se naziva subnormalizovan.




**Slika 1.3. Normalizovan i subnormalizovan skup.**

**Definicija 1.4.** [1] Jezgro fazi skupa $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, u oznaci $core\boldsymbol{\mathcal{A}}$, je klasičan skup svih elemenata $x \in U$ takvih da je vrednost funkcije pripadnosti jednaka jedinici tj.

$$core\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{x \in U \mid \mu_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(x) = 1\}.$$

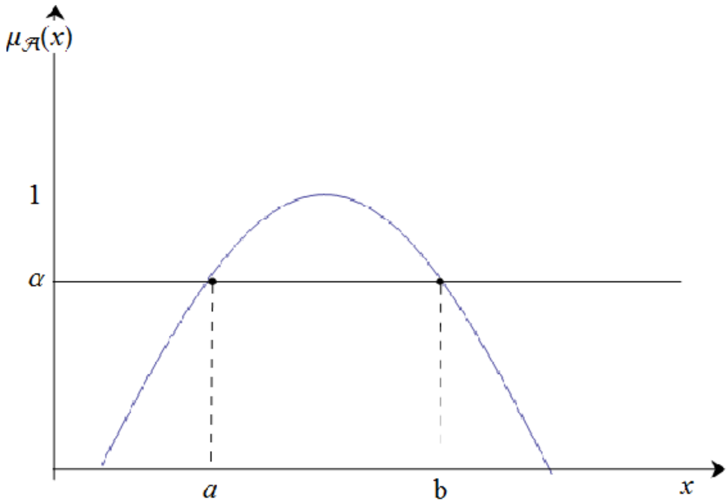
To je skup svih onih elemenata koji u potpunosti pripadaju datom skupu.

**Definicija 1.5.** [1] Nosač fazi skupa $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, u oznaci $supp\boldsymbol{\mathcal{A}}$, je klasičan skup svih elemenata $x \in U$ čija je vrednost funkcije pripadnosti veća od nule tj.

$$supp\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{x \in U \mid \mu_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(x) > 0\}.$$

**Definicija 1.6.** [1] $\alpha - presek\ (eng.\alpha - cut)$ fazi skupa $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, u oznaci $A^{\alpha}$, je klasičan skup elemenata $x \in U$ koji pripadaju skupu $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ sa stepenom pripadnosti bar $\alpha$, tj.

$$A^{\alpha} = \{x \in U \mid \mu_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(x) \geq \alpha\} \quad \alpha \in [0,1].$$

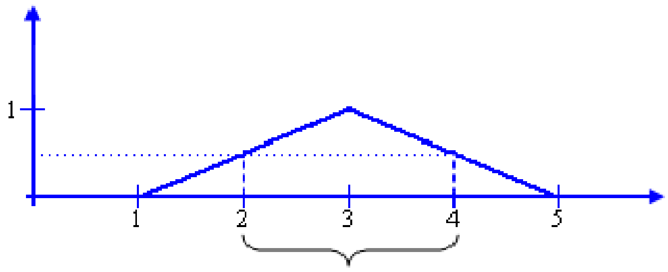



**Slika 1.4.** $\boldsymbol{\alpha - presek\ fazi\ skupa}$.

Sada može da se definiše granica stepena pripadnosti i da se recimo svi elementi čiji je stepen pripadnosti strogo manji od $\alpha$ recimo ne uzmu u obzir.

**Primer 1.5.** Neka je dat sledeći diskretan fazi skup

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{(1,0), (2,0.5), (3,1), (4,0.5), (5,0)\}$$




**Slika 1.5. Fazi skup $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.**

Za $\alpha = 0.5$ jedan $\alpha - presek$ fazi skupa $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ je klasičan skup elemenata, odnosno $A^{0.5}$ ={2,3,4}.

**Primer 1.6.** Ako se vratimo na (Primer 1.3) sa neprekidnom funkcijom pripadnosti, gde je data funkcija pripadnosti u odnosu na pojam ,,mladić'' za $\alpha = 0{,}2$, jedan $\alpha - presek$ fazi skupa $\mathcal{A}$ je $A^{0.2} = \{x \in U \mid \mu_{\mathcal{A}}(x) \geq 0{,}2\} = [12{,}29]$.


**Slika 1.6.** $\boldsymbol{\alpha - presek\ fazi\ skupa}$.

## 1.2. Operacije sa fazi skupovima

Sledi pregled definicija osnovnih operacija nad fazi skupovima u skladu sa [2].

Operacije sa fazi skupovima su date preko operacija nad njihovim funkcijama pripadnosti. Neka je $U$ univerzalni skup, a skupovi $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ fazi skupovi dati svojim funkcijama pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ i $\mu_{\mathcal{B}}(x)$.

Jednakost dva fazi skupa se definiše preko odgovarajućih funkcija pripadnosti.

**Definicija 1.7.** [2]Neka su fazi skupovi $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dati svojim funkcijama pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ i $\mu_{\mathcal{B}}(x)$. Tada

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \quad <=> \quad \mu_{\mathcal{A}}(x) = \mu_{\mathcal{B}}(x) \qquad \forall x \in U.$$

I ostale pojmove karakteristične za klasične skupove je moguće primeniti i na fazi skupove prelaskom na odgovarajuće funkcije pripadnosti.

**Definicija 1.8.** [2] a) Fazi skup $\mathcal{A}$ je podskup fazi skupa $\mathcal{B}$, u oznaci $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, ako za svako $x \in U$ važi da je:

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) \leq \mu_{\mathcal{B}}(x).$$

b) Fazi skup $\mathcal{A}$ je pravi podskup fazi skupa $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, ako je $\mathcal{A}$ podskup od $\mathcal{B}$ i $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$, tj. ako važe sledeća dva uslova istovremeno:

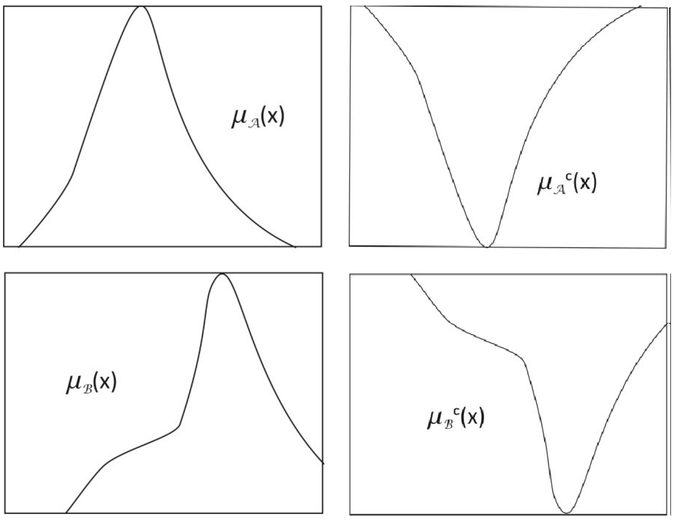
$(i)$ $\mu_{\mathcal{A}}(x) \leq \mu_{\mathcal{B}}(x),$ $za\ svako\ x \in U,$

$(ii)$ $\mu_{\mathcal{A}}(x) < \mu_{\mathcal{B}}(x),$ $za\ bar\ jedno\ x \in U.$

**Definicija 1.9.** [2] Fazi skupovi $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^C$ su komplementi ako važi:

$\mu_{\mathcal{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\mathcal{A}}(x)$ tj. $\mu_{\mathcal{A}}(x) + \mu_{\mathcal{A}^c}(x) = 1$.

Funkcije su simetrične u odnosu na pravu $\mu = 0{,}5$.



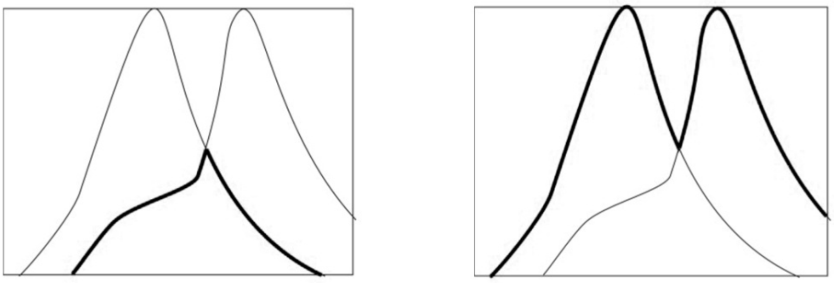

**Slika 1.7. Funkcije pripadnosti fazi skupova (levo) i njihovih komplemenata (desno).**

**Definicija 1.10.** [2] Za data dva fazi skupa $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subseteq$ U sa funkcijama pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ i $\mu_{\mathcal{B}}(x)$, funkcija pripadnosti $\mu_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x)$ preseka, u oznaci $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, je

$$\mu_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(x) = \min\big(\mu_{\mathcal{A}}(x),\ \mu_{\mathcal{B}}(x)\big), \quad \forall x \in U.$$

**Definicija 1.11.** [2] Unija dva fazi skupa $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, u oznaci $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, je takođe fazi skup dat sledećom funkcijom pripadnosti

$$\mu_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(x) = \max\big(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)\big), \quad \forall x \in U.$$



**Slika1.8. Presek i unija dva fazi skupa.**

Funkcija pripadnosti preseka fazi skupova predstavljena je tamnijom bojom na slici levo, a unije na slici desno.

## 1.3. Trougaone norme i trougaone konorme

Trougaone norme i trougaone konorme (eng. Triangular norms and triangular conorms) generalizuju operacije sa fazi skupovima. Predstavljaju specijalne operacije na jediničnom intervalu koje se mogu koristiti za uopštavanje operacija preseka i unije kod skupova, odnosno konjukcije i disjunkcije u logici.

U matematičkoj literaturi, trougaone norme i konorme, prvi put su se javile 1942.godine u radu Karl Mengera[2]. Danas se najviše koristi definicija koju su dali Berthold Schweizer[3] i Abe Sklar[4] koristeći ideje Mengera (videti[16]).

Rezultati prikazani u ovom poglavlju su iz [5,12,13].

---

[2] Karl Menger (1902-1985) je bio austrijsko-američki matematičar. Bavio se matematičkom algebrom i geometrijom. Dao je veliki doprinos za teoriju igara i društvene nauke.

[3] Berthold Schweizer (1929-2010) rođen je u Nemačkoj u Jevrejskoj porodici koja je emigrirala u SAD 1937.godine.Osnivač je teorije verovatnoće i metričkih prostora.

[4] Abe Sklar (1910-1996) je američki matematičar koji je studirao ranih 1960-ih i bavio se t-normama. Švajcer-Skalar t- norme su dobile po njima ime.

**Definicija 1.12.** [12] Trougaona norma (t-norma) je binarna operacija $T$ na jediničnom intervalu, $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ takva da za svako $x, y, z \in [0,1]$ sledeća četiri uslova moraju biti zadovoljena:

$$(T1) \quad T(x,y) = T(y,x) \qquad \textit{komutativnost}$$

$$(T2) \quad T\big(x, T(y,z)\big) = T(T(x,y), z) \qquad \textit{asocijativnost}$$

$$(T3) \quad T(x,y) \le T(x,z) \;\; gde\ je\ y \le z \qquad \textit{monotonst}$$

$$(T4) \quad T(x,1) = x \qquad \textit{granični uslovi}\ .$$

Pošto su $t - norme$ algebarske operacije na intervalu $[0,1]$, takođe je moguće koristiti oznaku $x * y$ umesto $T(x,y)$. Uslovi $(T1)$ – $(T4)$ se mogu drugačije zapisati na sledeći način:

$$(T1) \quad x * y = y * x$$

$$(T2) \quad x * (y * z) = (x * y) * z$$

$$(T3) \quad x * y \;\le\; kada\ je\;\; y \le z$$

$$(T4) \quad x * 1 = x.$$

Četiri elementarne $t$-norme su: minimun $T_M$, algebarski proizvod $T_P$, Lukašijevičeva (Lukasiewicz) $T_L$ i norma drastičnog preseka (eng. Drastic intersection) $T_D$:

1. $T_M\,(x,y) = \min(x,y)$

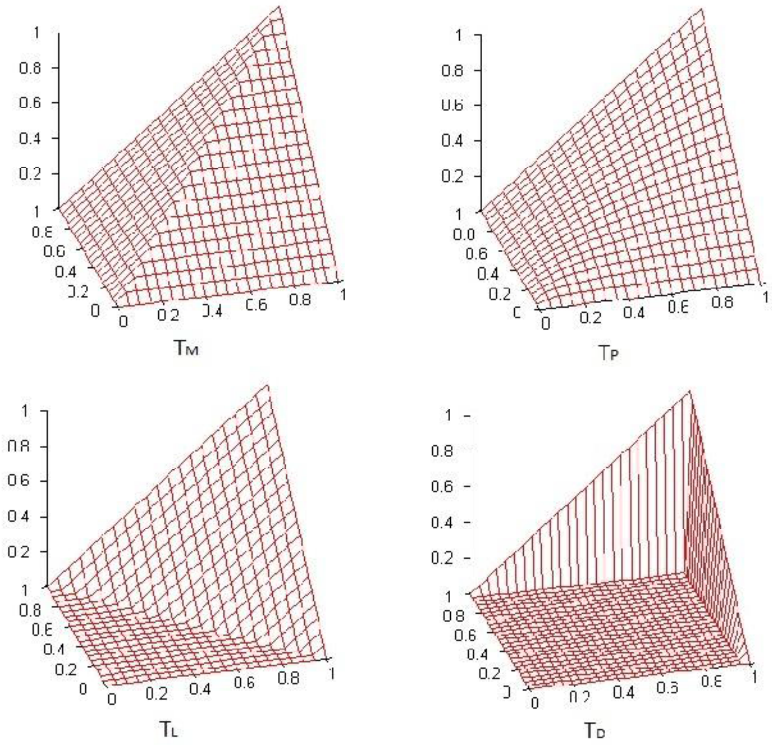
2. $T_P\,(x,y) = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$

3. $T_L(x,y) = \max\;(0, x + y - 1)$

4. $T_D = \begin{cases} x\,, & y = 1, \\ y\,, & x = 1, \\ 0\,, & inače. \end{cases}$

Pored elementarnih postoji veliki broj trougaonih normi koje se uspešno koriste u različitim oblastima, videti [11].

Grafički prikaz elementarnih t-normi je dat Slikom1.9. preuzetom iz [10].




**Slika 1.9. Grafik za četiri osnovne $t - norme$.**

**Definicija 1.13.** [13] Trougaona norma $T_1$ je slabija od trougaone norme $T_2$ , u oznaci $T_1 \leq T_2$ , ako je $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$ za svako $(x,y) \in [0,1]^2$ . Isto se može reći da je $t - norma \ T_2$ jača od $t - norma \ T_1$ .

Trougaona norma $T_M$ je najjača a trougaona norma $T_D$ je najslabija, što se vidi u narednom tvrđenju.

**Teorema1.1.**[12] Za svaku $t - normu \ T$ važi da za $\forall x, y \in [0,1]$

$$T_D(x,y) \ \leq T(x,y) \leq \ T_M(x,y).$$

**Dokaz:** Neka je $x, y \ \in [0,1]$ i neka je $T(x,y)$ proizvoljna $t - norma$ . Koristeći da je $y \leq 1$ i osobine (T2) i (T1) dobijamo $T(x,y) \leq T(x,1) = x \leq x$ . Ako se iskoristi činjenica da je i $x \leq 1$ kao i osobine (T3) , (T2) i (T1) redom , dobija se

$$T(x,y) = T(y,x) \leq T(y,1) = y \leq y.$$

Dakle, $T(x,y) \leq x$ $i$ $T(x,y) \leq y$ a odatle sledi da je $T(x,y) \leq min(x,y)$ a to je *t-norma* minimuma tj. $T(x,y) \leq T_M(x,y)$.

Za $x = 1$ se dobija $\mathrm{T}(x,y) = T(1,y) = y = T_D(x,y)$, a za $y = 1$ $T(x,y) = T(x,1) = x = T_D(x,y)$.

Znači u oba slučajaje $T(x,y) = T_D(x,y)$ pa samim tim važi da je $T(x,y) \geq T_D(x,y)$, jer s druge strane ako $x,y \in (0,1)$ sledi $T_D(x,y) = 0 \leq T(x,y)$. ■

Takođe za elementarne trougaone norme važi:

$$T_D \leq T_L \leq T_P \leq T_M \, .$$

**Definicija 1.14.**[13] Trougaona konorma $S$, ili kraće rečeno $t-konorma$, je funkcija $S\colon [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ takva da važe sledeće osobine:

(S1) $S(x,y) = S(y,x)$ $\quad komutativnost$

(S2) $S\big(x, S(y,z)\big) = S(S(x,y),z)$ $\quad asocijativnost$

(S3) $S(x,y) \leq S(x,z)\ za\ y \leq z$ $\quad monotonost$

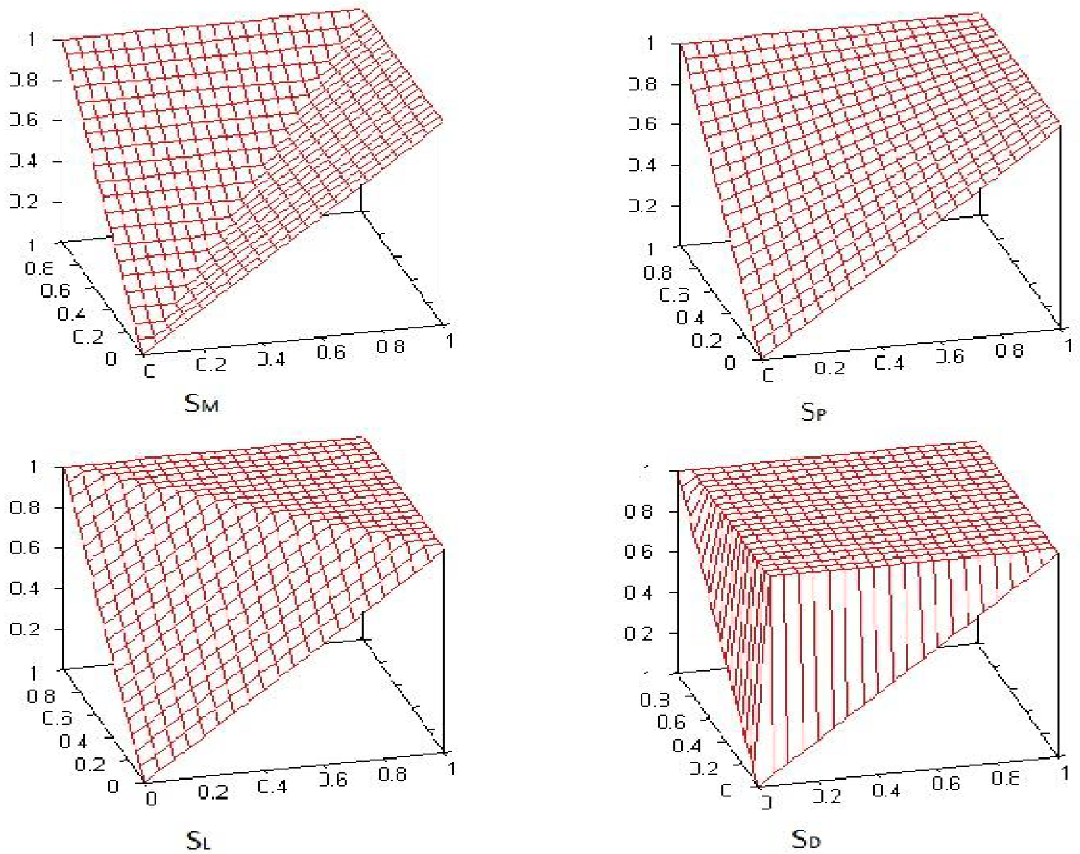
(S4) $S(x,0) = x\ , S(x,1) = 1$ $\quad rubni\ uslovi$

za svako $x,y,z \in [0,1]$.

Četiri elementarne konorme su:

a) $S_M(x,y) = \max(x,y)$
b) $S_P(x,y) = x + y - x \cdot y$
c) $S_L(x,y) = \min(1, x+y)$
d) $S_D(x,y) = \begin{cases} \max(x,y)\ , & za\ \min(x,y) = 0 \\ 1, & inače \end{cases}$

Grafički prikaz elementarnih t-normi je dat Slikom1.10. preuzetom iz [10].




**Slika 1.10. Konturni grafik za četiri osnovne $t - norme$.**

Trougaona norma i trougaona konorma razlikuju se samo po rubnim uslovima.

**Teorema 1.2.** $[12]$ Funkcija $S: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ je trougaona konorma ako i samo ako postoji trougaona norma $T$ takva da za sve $(x, y) \in [0,1]^2$ važi $S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$.

**Dokaz**: $(=>)$ Neka je $S$ trougaona konorma i neka je preslikavanje $T: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ definisano sa $T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y)$. Treba pokazati da je ovako definisano preslikavanje trougaona norma (pokazati da su zadovoljene osobine (T1)-(T4) iz Definicije o trougaonim normama:

1. $(T1)$ $T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y) = 1 - S(1 - y, 1 - x) = T(y, x)$-važi zbog pretpostavke da je $S$ trougaona konorma, a ona ima osobinu komutativnosti.
2. $(T2)$ $T\big(x, T(y, z)\big) = 1 - S\big(1 - x, 1 - T(y, z)\big) =$
$= 1 - S\Big(1 - x, 1 - \big(1 - S(1 - y, 1 - z)\big)\Big) =$

$= 1 - S(1 - x, 1 - 1 + S(1 - y, 1 - z)) =$
$= 1 - S(1 - x, S(1 - y, 1 - z)) = 1 - S(S(1 - x, 1 - y), 1 - z)) =$
$= 1 - S(1 - 1 + S(1 - x, 1 - y), 1 - z) = 1 - S(1 - T(x, y), 1 - z) =$
$= T(T(x, y), z)$ – ovo sve važi jer $S$ kao trougaona konorma ima osobinu asocijativnosti.

3. $(T3)$ Neka je $y \leq z$.
   Onda važi i da je $1 - y \geq 1 - z$ (*).
   Iz (*) i iz osobine monotonosti za trougaone konorme, važi da je:
   $S(1 - x, 1 - y) \geq S(1 - x, 1 - z)$ iz čega sledi da je :
   $1 - S(1 - x, 1 - y) \leq 1 - S(1 - x, 1 - z)$ i tada imamo :
   $T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y) \leq 1 - S(1 - x, 1 - z) = T(x, z)$.
4. (T4) $T(x, 1) = 1 - S(1 - x, 1 - 1) = 1 - S(1 - x, 0) = 1 - (1 - x) = x$
   $T(x, 0) = 1 - S(1 - x, 1 - 0) = 1 - S(1 - x, 1) = 1 - 1 = 0.$

($<=$) Sada se pretpostavlja da je $T$ trougaona norma takva da za svako $x, y \in [0,1]$ važi $S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$. Na analogan način kao što je pokazano da važi smer (=>), pokazuje se da je preslikavanje $S$ trougaona konorma ■

Za trougaonu konormu $S$ definisanu u *Teoremi 1.2* kaže se da je *dualna* trougaonoj normi $T$, i obrnuto, $t - norma\, T$ je *dualna* $t - konormi\, S$. Upoređujući odgovarajuće elementarne trougaone norme i konorme, vidi se da su jedne drugima dualne.Upravo zbog dualnosti, menja se poredak koji važi za trougaone norme, pa za elementarne $t - konorme$ važi da je:

$$S_M \leq S_P \leq S_L \leq S_W.$$

U skladu sa tim, dualnost utiče i na jačinu $t$ −konormi. Pa tako sledi teorema:

**Teorema 1.3.** [12] Za svaku trougaonu konormu $S$ i svako $x, y \in [0,1]$ važi:

$$S_M(x, y) \leq S(x, y) \leq S_D(x, y).$$

**Dokaz**: Kako je $S$ trougaona konorma za koju važi $S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$ tj. dualna trougaonoj normi $T$ imamo:

$1 - T_M(1 - x, 1 - y) \leq 1 - T(1 - x, 1 - y) \leq 1 - T_D(1 - x, 1 - y).$

Ako i levoj i desnoj strani dodamo (-1) dobijamo:

$-T_M(1 - x, 1 - y) \leq -T(1 - x, 1 - y) \leq -T_D(1 - x, 1 - y)$, odnosno

$T_M(1 - x, 1 - y) \geq T(1 - x, 1 - y) \geq T_D(1 - x, 1 - y)$ što je dokazano u Teoremi 1.1. ■

### 1.3.1. Operacije na fazi skupovima zasnovane na $t-normama$ i $t-konormama$

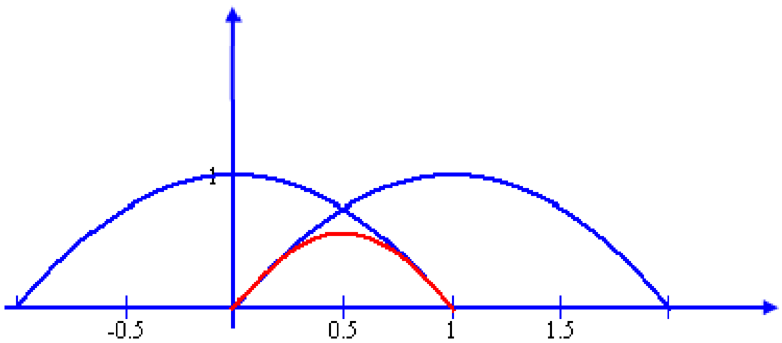
U ovom poglavlju biće predstavljene definicije preseka i unije fazi skupova koje se baziraju na trougaonim normama i trougaonim konormama.

**Definicija 1.15.** [13] $T-presek$ fazi skupova $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, u oznaci $\mathcal{A} \cap_T \mathcal{B}$, definiše se kao $\mu_{\mathcal{A} \cap_T \mathcal{B}}(x) = T\ (\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x))$, za svako $x \in U$.

**Primer 1.7.** Neka su dati fazi skupovi $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, neka su date njihove funkcije pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}}(x) = 1 - x^2$ koja je definisana za $x \in [-1,1]$, i $\mu_{\mathcal{B}}(x) = 1 - (1-x)^2$ koja je definisana za $x \in [0,2]$, i neka je data trougaona norma $T_P(x,y) = x \cdot y$, onda sledi da je funkcija pripadnosti preseka fazi skupova $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$:

$$\mu_{\mathcal{A} \cap_T \mathcal{B}}(x) = \mu_{\mathcal{A}}(x) \cdot \mu_{\mathcal{B}}(x) = (1-x^2) \cdot (1-(1-x)^2).$$

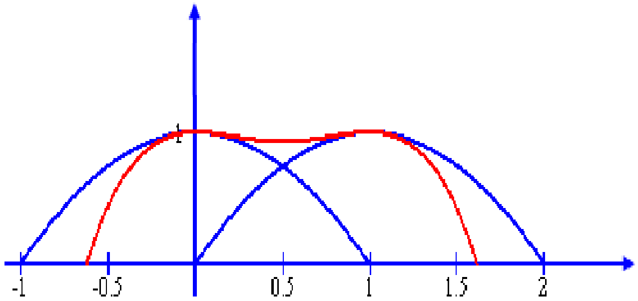
Na sledećoj slici je prikazan crvenom bojom presek fazi skupova $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.




**Slika 1.11.** $\boldsymbol{T-presek}$ **fazi skupova** $\mathcal{A}$ **i** $\mathcal{B}$**.**

**Definicija 1.16.** [12] Neka je $S$ proizvoljna trougaona konorma. $S-unija$ fazi skupova $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, u oznaci $\mathcal{A} \cup_S \mathcal{B}$, definiše se kao $\mu_{\mathcal{A} \cup_S \mathcal{B}}(x) = S\big(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)\big),\ za\ svako\ x \in U$.

Na sledećoj slici (Slika 1.12.) biće prikazana unija fazi skupova $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ crvenom bojom.




**Slika 1.12.** $\boldsymbol{S-unija}$ **fazi skupova.**

**Primer 1.8.** Neka su dati fazi skupovi $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, i ako su njihove funkcije pripadnosti definisane kao u prethodnom primeru, i ako je data trougaona konorma $S_P(x,y) = x + y - x \cdot y$ , onda je funkcija pripadnosti unije fazi skupova $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$:

$$\mu_{\mathcal{A} \cup_S \mathcal{B}}(x) = \mu_{\mathcal{A}}(x) + \mu_{\mathcal{B}}(x) - \mu_{\mathcal{A}}(x) \cdot \mu_{\mathcal{B}}(x)$$
$$= 1 - x^2 + 1 - (1-x)^2 - (1-x^2) \cdot (1-(1-x)^2) = -x^4 + 2 \cdot x^3 - x^2 + 1.$$

## 1.3.2. OWA- uređeni operatori usrednjavanja sa težinama

Teorija fazi skupova pruža mnoštvo agregacijskih veza za predstavljanje vrednosti funkcije pripadnosti. U procesu odluke ideja kompromisa odgovara globalnoj proceni koja teži između najboljih i najgorih ocena [6,7,11].

Operatori proseka realizuju kompromise između ciljeva.

**Definicija 1.17.** [7] Operator proseka $M$ je funkcija $M: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ koja zadovoljava sledeće uslove

- $idempotentnost \quad M(x,x) = x \quad \forall x \in [0,1]$
- $komutativnost \quad M(x,y) = M(y,x) \quad \forall x,y \in [0,1]$
- $granični \ \ uslovi \quad M(0,0) = 0 \quad M(1,1) = 1$
- $monotonost \quad M(x,y) \le M(x',y') \ \ ako \ \ x \le x' \ \ i \ \ y \le y'$
- $M \ \ je \ \ neprekidno.$

Kakva god da je definicija proseka $M$ globalna ocena će biti između najgore i najbolje lokalne ocene.

**Lema 1.1.** [7] Ako je $M$ operator proseka onda $min\{x,y\} \leq M(x,y) \leq max\{x,y\}$ $\forall x, \forall y \in [0,1]$.

**Dokaz**: Iz idempotencije i monotonosti $M$ sledi da je

$$min\{x,y\} = M(min\{x,y\}, min\{x,y\}) \leq M(x,y) \quad \text{i}$$

$$M(x,y) \leq M(max\{x,y\}, max\{x,y\}) = \max\{x,y\} \quad \blacksquare$$

Operatori proseka imaju sledeće interesantne karakteristike:

- Strogo rastući operator proseka ne može biti asocijativan.
- Jedini asocijativni operator proseka definisan je sa

$$M(x,y,\alpha) = med(x,y,\alpha) = \begin{cases} y, & ako \ \ x \leq y \leq \alpha, \\ \alpha, & ako \ \ x \leq \alpha \leq y, \\ x, & ako \ \ \alpha \leq x \leq y, \end{cases}$$

gde je $\alpha \in (0,1)$.

Važna familija operatora proseka je formirana u kvazi-aritmetičkom značenju

$$M(a_1, a_2, \dots, a_n) = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right).$$

**Primer 1.9.** Kvazi-aritmetičko značenje za $a_1$ $i$ $a_2$ je definisano sa

$$M(a_1, a_2) = f^{-1}\left(\frac{f(a_1)+f(a_2)}{2}\right).$$

Sledeća tabela prikazuje najčešće korišćena značenja operatora.

| Ime | $M(x,y)$ |
|---|---|
| Harmonijska Sredina | 2xy / x+y |
| Geometrijsa sredina | $\sqrt{xy}$ |
| Aritmetička Sredina | (x+y) / 2 |
| Dual-geometrijska Sredina | 1 - $\sqrt{(1-x)(1-y)}$ |
| Srednja Vrednost | $med(x,y,\alpha)$ , $\alpha \in (0,1)$ |
| Uopštena p-srednja vrednost | $((x^p + y^p) \,/\, 2)^{1/p}$ , $p \geq 1$ |

**Tabela 1.2. Značenje operatora.**

*Yager*[5] je uveo novu tehniku agregacije koja se oslanja na ponderisano osrednjavanje (OWA) operatora (videti[15]).

**Definicija 3.18.** [6] OWA operator dimenzije n je preslikavanje $F: R^n \rightarrow R$ koji ima sličan vektor ponderisanja $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ kao što su $w_i \in [0,1]$, 1≤ $i \leq n$ i $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$.

Pored toga,

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = w_1 b_1 + \cdots + w_n b_n = \sum_{i=1}^{n} w_j b_j,$$

gde je $b_j$ $j - ti$ najveći elemenat iz $< a_1, \dots, a_n >$.

**Primer 1.10.** Pretpostavimo da je $W = (0.4\ ,0.3\ ,0.2\ ,0.1\ )^T$ onda je

$$F(0.7\ ,1\ ,0.2\ ,0.6\ ) = 0.4\ \times 1 + 0.3 \times 0.7 + 0.2 \times 0.6 + 0.1 \times 0.2 = 0.75.$$

**Definicija 1.19.** [11] Može se definisati kvazi-uređena ponderisana funkcija $OWA_{w,f}$ : $\mathrm{I}^{\mathrm{n}} \rightarrow \mathbf{R}$ koja je definisana sa:

[5]Ronald Robert Yager –američki istraživač u uslovima neizvesnosti i fazi logike.

$$OWA_{w,f}(x) := f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)\right),$$

gde je generator $f: I \to R$ neprekidna i strogo monotona funkcija.

Ističu se tri važna specijalna slučaja OWA agregacije:

- $F^*$ : $U\ ovom\ slučaju\ W = W^* = (1,0,\dots,0)^T \quad i$

$$F^*(a_1, a_2, \dots, a_n) = max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

- $F_*$ : $U\ ovom\ slučaju\ W = W_* = (0,0,\dots,0)^T \quad i$

$$F_*(a_1, a_2, \dots, a_n) = min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

- $F_A$ : $U\ ovom\ slučaju\ W = W_A = (\frac{1}{n},\dots,1/n)^T \quad i$

$$F_A(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1, a_2, \dots, a_n}{n}.$$

Za sve OWA operatore $F$ važi:

$$F_*(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq F\ (a_1, a_2, \dots, a_n) \leq F^*(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Iz navedenog jasno je da $za\ \forall F$ važi:

$min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \leq F\ (a_1, a_2, \dots, a_n) \leq max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$

Može se videti da je OWA operator komutativan. Neka je $< a_1, a_2, \dots, a_n >$ skup agregata i neka su $\{d_1, \dots, d_n\}$ permutacije od $a_i$ . Tada za svaki OWA operator važi

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = F(d_1, \dots, d_n).$$

Treća karakteristika u vezi sa ovim operatorima je monotonost. Pretpostavimo da su $a_i\ i\ c_i$ kolekcije agregata, $i = 1, \dots, n$ , takve da za svako $i \quad a_i \geq c_i$. Tada je

$F(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq F(c_1, \dots, c_n)$, gde je $F$ neki neki fiksiran merač OWA operatora.

Sledeća karakteristika u vezi sa ovim operatorima je idempotencija. Ako je $a_i = a$ za svako $i$ onda za svaki OWA operator važi

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = a.$$

Da bi se klasifikovali OWA operatori u smislu njihove lokacije da li je $(između, i\ , ili)$ data je mera za $orness$ , povezana sa bilo kojim vektorom W, na sledeći način

$$orness(W) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(n-i)w_i. \tag{1.1.1}$$

Lako je uočiti da za svako $W$, $orness(W)$ je u jediničnom intervalu.

**Lema 2.2.** Za sledeće vektore

$$W^* = (1,0,\dots,0)^T, \qquad W_* = (0,0,\dots,1)^T, \qquad W_A = (\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n})^T,$$

se može dokazati da je $orness(W^*) = 1, orness(W_*) = 0 \quad i \quad orness(W_A) = 0.5$.

Mera $andness$ se definiše kao

$$andness(W) = 1 - orness(W). \tag{1.1.2}$$

Kod OWA operatora ako na vrhu nema puno nula onda je $orness \geq 0.5$ i naziva se $orlike$ operator, a ako na kraju nema puno nula onda $andness \geq 0.5$ i OWA operator će biti $andlike$ operator.

**Primer 1.11.** [7] Neka je $W = (0.8\ ,\ 0.2\ , 0.0)^T$. Tada ako iskoristimo formulu (1.1.1) dobijamo

$$orness(W) = \frac{1}{3}(2 \times 0.8 + 0.2) = 0.6,$$

i ako iskoristimo (1.1.2) dobijamo

$$andness(W) = 1 - orness(W) = 1 - 0.6 = 0.4.$$

To znači da OWA operator definisan sa

$$F(a_1 a_2 a_3) = 0.8b_1 + 0.2b_2 + 0b_3 = 0.8b_1 + 0.2b_2,$$

je jedna $orlike$ agregacija, gde je $b_j\ j-ti$ najveći elemenat skupa $< a_1, a_2, a_3 >$.

## 1.4. Fazi brojevi

Fazi brojevi su specijalni fazi skupovi koji predstavljaju uopštenje klasičnih brojeva. U ovom poglavlju dat je pregled elementarnih pojmova vezanih za fazi brojeve koji se mogu pronaći u [4,9,13].

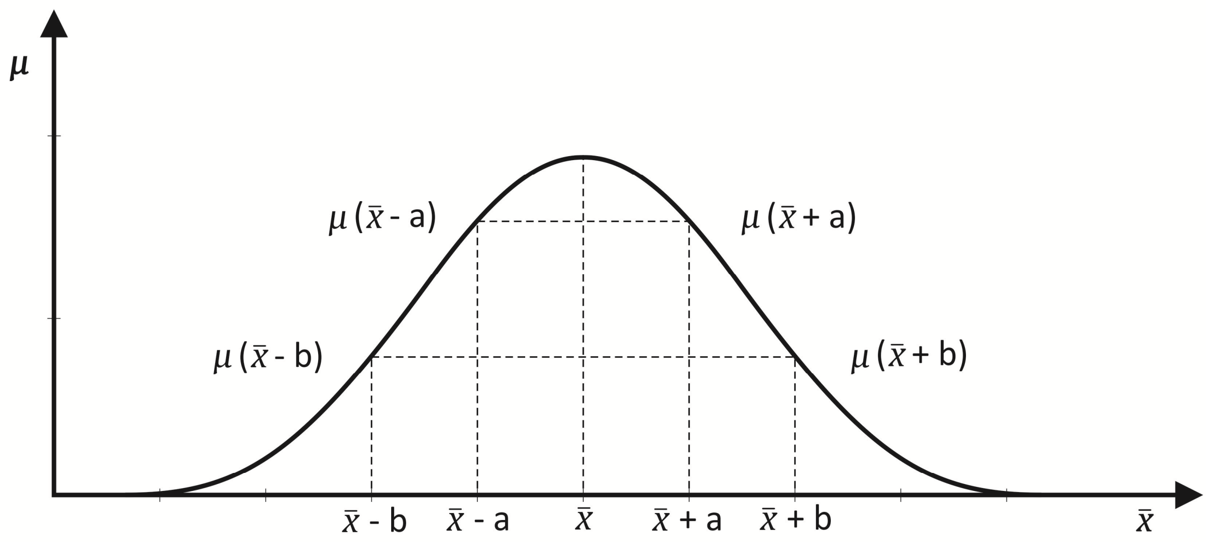
**Definicija 1.20.** [9] Za fazi skup $\mathcal{A}$ nad skupom realnih brojeva, kaže se da je fazi broj ***A*** ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

1. $\mathcal{A}$ je konveksan
2. Postoji tačno jedno $\bar{x} \in R$ takvo da je $\mu_{\mathcal{A}}(\bar{x}) = 1$, tj. $core(\mathcal{A}) = \bar{x}$
3. Funkcija pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ za $x \in R$ je bar po delovima neprekidna.

**Definicija 1.21.** [9] Vrednost $\bar{x}$ koja pokazuje maksimalni stepen pripadnosti, $\mu_{\mathcal{A}}(\bar{x}) = 1$, se naziva modalna vrednost fazi broja ***A.***

Fazi brojeve ćemo označavati velim kosim masnim slovima: ***A, B, C, ...*** a njihove funkcije pripadnosti sa: $\mu_{\boldsymbol{A}}(x), \mu_{\boldsymbol{B}}(x), \mu_{\boldsymbol{C}}(x), \ldots$

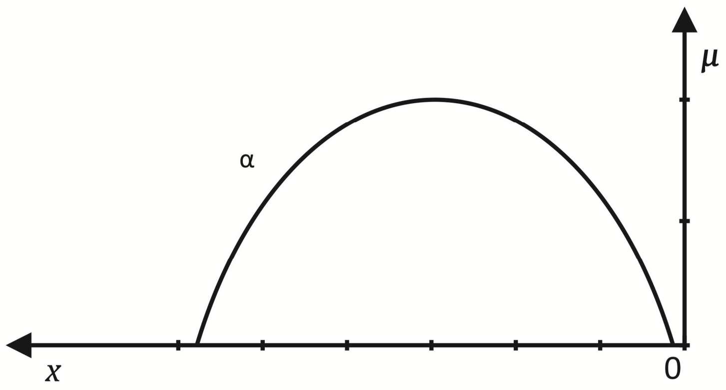
**Definicija 1.22.** [9] Fazi broj ***A*** iz prethodne definicije je simetričan ako njegova funkcija pripadnosti zadovoljava $\mu_{\boldsymbol{A}}(\bar{x} + x) = \mu_{\boldsymbol{A}}(\bar{x} - x)$, za svako $x \in R$.




**Slika 1.13. Funkcija pripadnosti simetričnog fazi broja.**

Treba primetiti da su $\alpha - preseci$ klasični zatvoreni intervali.

**Definicija 1.23.** [9] Fazi broj je strogo pozitivan,tj. $\boldsymbol{A} > 0$ , ako je nosač tog fazi broja, $supp(\boldsymbol{A}) \subseteq (0, \infty)$, odnosno strogo negativan, tj. $\boldsymbol{A} < 0$, ako je $supp(\boldsymbol{A}) \subseteq (-\infty, 0)$.




**Slika 1.14. Funkcija pripadnosti strogo negativnog fazi broja.**

Na Slici1.13. pored toga što je predstavljena funkcija pripadnosti simetričnog fazi broja, istovremeno je dat i primer funkcije pripadnosti jednog strogo pozitivnog fazi broja, dok je na (Slici 1.14.) data funkcija pripadnosti strogo negativnog fazi broja.

U literaturi se često pojavljuju i fazi intervali kao proširenje fazi broja. Fazi interval nema samo jednu vrednost nego ceo modalni interval, odnosno

$$\mu_{\boldsymbol{A}}(\bar{x}) = 1 \ \ za \ \ x \in [\bar{x}_1, \bar{x}_2].$$

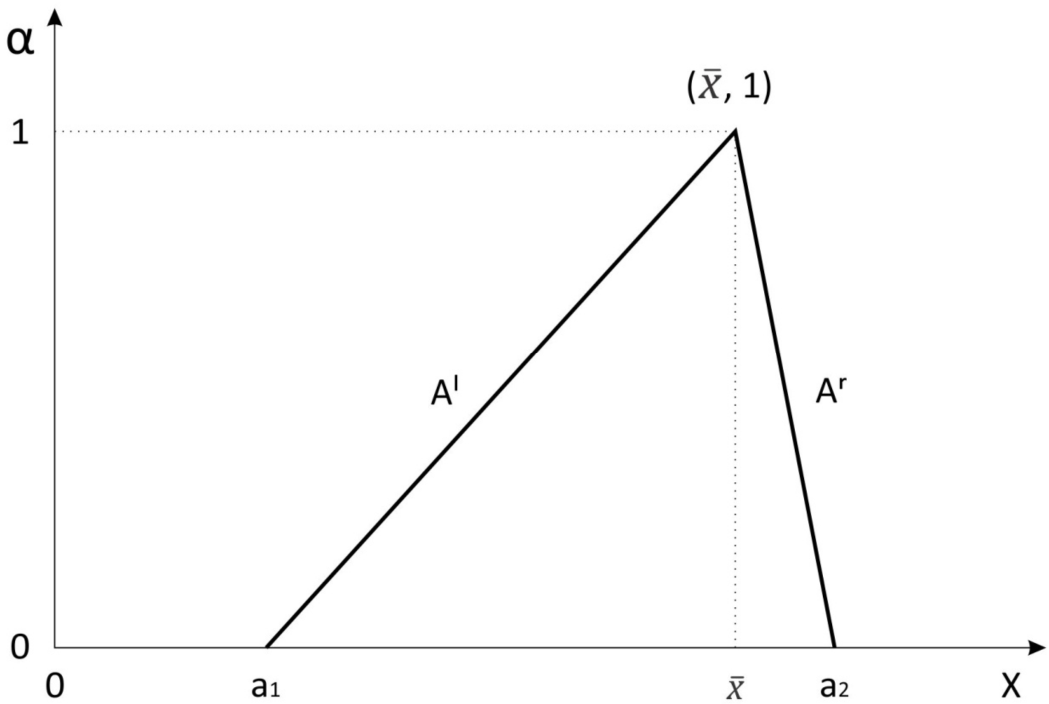
Sledi pregled nekih važnih oblika fazi brojeva

### 1.4.1. Trougaoni fazi brojevi

Trougaoni fazi broj ***A*** ili jednostavnije trougaoni broj sa funkcijom pripadnosti $\mu_{\boldsymbol{A}}(x)$ je definisan funkcijom pripadanja sledećeg oblika:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{\bar{x}-a_1}, & za \ a_1 \le x \le \bar{x}, \\ \frac{x-a_2}{\bar{x}-a_2}, & za \ \bar{x} \le x \le a_2, \\ 0, & inače, \end{cases}$$

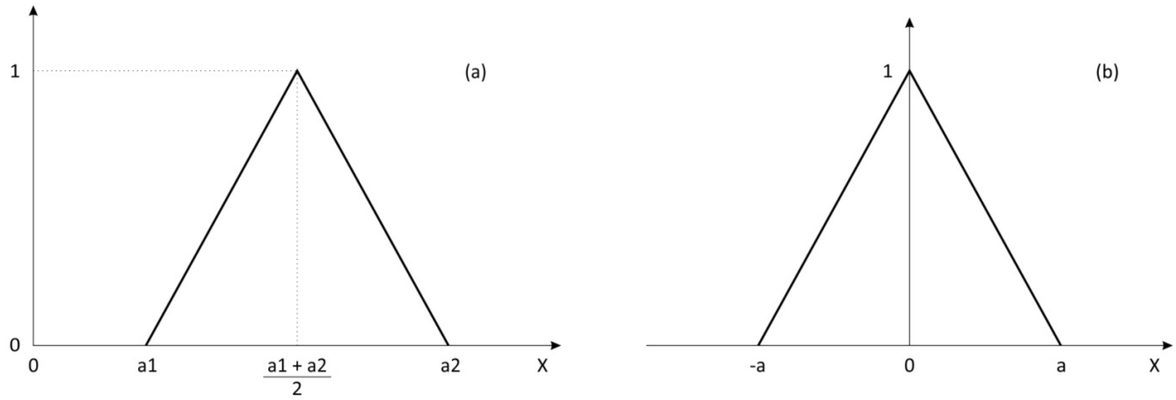
gde je interval $[a_1, a_2]$ nosač a $\bar{x}$ je modalna vrednost.




**Slika 1.15. Trougaoni fazi brojevi.**

Ako se tačka $\bar{x} \in (a_1, a_2)$ nalazi na sredini nosača tj. $\bar{x} = \frac{a_1+a_2}{2}$ u pitanju je simetrični trougaoni broj čije funkcije pripadnosti imaju sledeću formu:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 2\,\frac{x-a_1}{\bar{x}-a_1}, & za \ a_1 \le x \le \bar{x}, \\ 2\,\frac{x-a_2}{\bar{x}-a_2}, & za \ \bar{x} \le x \le a_2, \\ 0, & inače. \end{cases}$$




**Slika 1.16. a) Centralni trougaoni broj b) Centralni trougaoni broj simetričan u odnosu na $\boldsymbol{\mu}$**

Trougaoni brojevi imaju funkciju pripadnosti koja se sastoji od dva linearna segmenta, $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{l}}(levo)$ i $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{r}}(desno)$, koja se spajaju pri vrhu $(\bar{x}, 1)$, što čini operacije sa trougaonim brojevima veoma jednostavnim.

Trougaoni broj može biti konstruisan na osnovu tri vrednosti $a_1, \bar{x}\ \ i\ a_2$ , a pomoću tih vrednosti se može napisati i njegova funkcija pripadnosti . Zato se trougaoni broj označava i kao:

$$\boldsymbol{A} = (a_1, \bar{x}, a_2).$$

Desni segment fazi broja $\boldsymbol{A} = (-a, 0, a)$,(Slika 1.16.b) ,opisuje *pozitivno malo*, npr. mlade godine, mali profit, mali rizik… , i može se tumačiti kao novi fazi broj $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{r}} = (0,0,a)$.

Levi segment $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{l}}$ opisuje *pozitivno veliko*, npr. stare godine, veliki profit, visok rizik,… Znači imamo:

$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{l}} = (a_1, \bar{x}, \bar{x})\quad i\quad \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{r}} = (\bar{x}, \bar{x}, a_2)$ što je predstavljeno Slikom 1.15.

## 1.4.2. L-R fazi brojevi

L-R fazi brojevi predstavljaju nadogradnju trougaonih brojeva. Osnovna ideja L-R reprezentacije fazi brojeva je da se funkcija pripadnosti $\mu_{\boldsymbol{A}}(x)$ fazi broja $\boldsymbol{A}$ podeli na dva dela $\mu_l(x)\ i\ \ \mu_r(x)$, levo i desno od modalne vrednosti $\bar{x}$, odnosno preko funkcija oblika,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left[\dfrac{\bar{x}-x}{\alpha}\right], & za\, x < \bar{x}, \\ R\left[\dfrac{x-\bar{x}}{\beta}\right], & za\, x \geq \bar{x}, \end{cases}$$

gde $\alpha\ i\ \beta$ predstavljaju odstupanja u levu, odnosno desnu stranu od $\bar{x}$, a L i R su funkcije koje diktiraju oblik posmatranog fazi broja i nazivaju se referentne funkcije. L-R fazi broj se u skraćenoj formi može zapisati sa $\boldsymbol{A} =< \bar{x}, \alpha, \beta >_{L,R}$.

Da bi funkcije $L(u)\ i\ R(u)$, $u \in R_0^+$, bile referentne funkcije za L-R fazi brojeve treba da zadovoljavaju sledeće uslove:

1. $L(u) \in [0,1]$ za svako $u\ \ i\ R(u) \in [0,1]\ za\ svako\ u.$
   Vrednosti funkcije pripadnosti su u interval $[0,1]$ pa onda $L\ i\ R$ koje figurišu u funkcijama pripadnosti, moraju biti u istom interval.
2. $L(0) = R(0) = 1.$
3. $L(u) = R(u)$ *su opadajuće na intervalu* $[0, \infty)$.
4. $L(1) = 0 \quad ako \quad min_u L(u) = 0\, , \lim_{u\to\infty} L(u) = 0 \quad ako \quad L(u) > 0 \quad za\, \forall u,$

   $R(1) = 0 \quad ako \quad min_u R(u) = 0\, , \lim_{u\to\infty} R(u) = 0 \quad ako \quad R(u) > 0 \quad za\, \forall u.$

**Definicija 1.24.**$[9]$ L-R fazi broj je semi-semitričan ako su funkcije *L* i *R* jednake, tj. $L(u) = R(u)$ za svako $u \in R_0^+$. Ako su odstupanja od modalne vrednosti $\alpha\ i\ \beta$ jednaka, $L - R$ fazi broj je simetričan.

Trougaoni fazi brojevi su specijalan slučaj L-R fazi brojeva, a dobijaju se kada su L i R linearne funkcije.

## 1.5. L-R fazi intervali

Ako neki fazi skup $\mathcal{A}$ ne zadovoljava jedan od tri uslova iz definicije fazi broja, on se ne može smatrati fazi brojem. Ukoliko je narušen drugi uslov, odnosno ako postoji više od jedne modalne vrednosti onda se takvi fazi skupovi nazivaju fazi intervali ([9,12]).

**Definicija 1.25.** $[13]$ Neka su $L$ i *R* referentne funkcije. Fazi $L$-*R* interval, u oznaci

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} =< l, r, \alpha, \beta >_{L,R},$$

se definiše preko funkcije pripadnosti date sa:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & r+\beta \leq x \leq l-\alpha, \\ L\left(\frac{l-x}{\alpha}\right), & l-\alpha \leq x \leq l, \\ 1, & l \leq x \leq r, \\ R\left(\frac{x-r}{\beta}\right), & r \leq x \leq r+\beta. \end{cases}$$

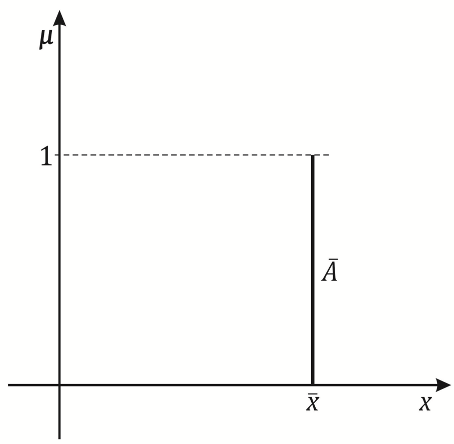
Ako su L i R linearni, u pitanju je trapezoidni interval često zvan i trapezoidan fazi broj.

**Napomena 1.2.**

S obzirom da su svi fazi skupovi uopštenje klasičnih skupova na isti način se i klasični brojevi mogu predstaviti kao fazi brojevi. Neka je $\tilde{x}$ "običan" broj, tada se on može zapisati kao fazi broj preko funkcije pripadnosti na sledeći način:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < \tilde{x}, \\ 1, & x = \tilde{x}, \\ 0, & x > \tilde{x}, \end{cases}$$

za svako $x \in R$. Kada se broj u klasičnom smislu posmatra kao fazi broj, tada fazi broj predstavlja jednočlan fazi skup kao na Slici 1.17.




**Slika 1.17. Fazi broj $\bar{A}$.**

Takođe i klasičan interval se može smatrati specijalnim slučajem fazi intervala sa funkcijom pripadnosti

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < l, \\ 1, & x \in [l, r], \\ 0, & x > r, \end{cases}$$

pri čemu $x$ prolazi kroz ceo skup realnih brojeva.

## 1.6. Sabiranje L-R fazi brojeva

Osnovne operacije na skupu fazi brojeva se zasnivaju na primeni uopštene verzije Zadehovog principa proširenja. Ovaj princip je osnovni koncept u teoriji fazi skupova jer omogućava da se klasična matematička relacija proširi tako da može da se primenjuje na fazi skupove. Izlaganje u ovom poglavlju zasnovano na [7,9,4].

Sledi formulacija Zadehovog principa proširenja:

**Definicija1.26.** [9] Neka su $\boldsymbol{\mathcal{A}_1}, \dots, \boldsymbol{\mathcal{A}_n}$ fazi podskupovi klasičnih skupova $X_1, \dots, X_n$ respektivno i neka je dato preslikavanje $f: X_1 \times \dots \times X_n \to Y$ takvo da za svaku n-torku $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ važi $f(x_1, \dots, x_n) = y \in Y$. Tada je $\boldsymbol{\mathcal{B}} = f(\boldsymbol{\mathcal{A}_1}, \dots, \boldsymbol{\mathcal{A}_n})$ fazi podskup od Y čija je funkcija pripadnosti:

$$\mu_{\mathcal{B}} = \begin{cases} sup_y min\{\mu_{\mathcal{A}_1}(x_1), \dots \mu_{\mathcal{A}_n}(x_n)\}, & ako\ postoji\ \ y = f(x_1, \dots, x_n), \\ 0, & inače, \end{cases}$$

tj. princip proširenja kaže da je slika nekog fazi skupa opet fazi skup čija je funkcija pripadnosti upravo ova gore navedena.

**Definicija1.27.**[7,9] Neka su $\boldsymbol{\mathcal{A}_1}, \dots, \boldsymbol{\mathcal{A}_n}$ fazi podskupovi klasičnih skupova $X_1, \dots, X_n$ respektivno i neka je dato preslikavanje $f: X_1 \times \dots \times X_n \to Y$ takvo da za svaku n-torku $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ važi $f(x_1, \dots, x_n) = y \in Y$. Za neku proizvoljnu trougaonu normu $T$ kao rezultat uopštenog principa proširenja dobija se fazi podskup $\boldsymbol{\mathcal{B}} \in Y$, $\boldsymbol{\mathcal{B}} = f(\boldsymbol{\mathcal{A}_1}, \dots, \boldsymbol{\mathcal{A}_n})$, sa funkcijom pripadnosti:

$$\mu_{\mathcal{B}} = \begin{cases} sup_y T\{\mu_{\mathcal{A}_1}(x_1), \dots \mu_{\mathcal{A}_n}(x_n)\}, & ako\ postoji\ \ y = f(x_1, \dots, x_n), \\ 0, & inače. \end{cases}$$

Ovaj princip proširenja se zove još i Zadehov $sup - T$ princip proširenja. Ukoliko se za trougaonu normu iz definicije uzme baš $t - norma$ minimuma $T_M$, dobija se originalni Zadehov princip proširenja.

Primenom uopštenog principa proširenja, mogu se dobiti formule za izračunavanje zbira fazi brojeva pomoću odredjenih $t - normi$:

**Teorema 1.3.** [4] Neka su $\boldsymbol{A_i} =< l, r, \alpha, \beta >_{L,R}$ , $i = 1, \dots , n$, $n$ L-R fazi interval. Njihov zbir u oznaci $\oplus_{T_M}{}_{i=1}^{n}\boldsymbol{A_i}$ (ukoliko se posmatra trougaona norma $T_M$) je dat sa:

$$\oplus_{T_M}{}_{i=1}^{n}\boldsymbol{A_i} = (\sum_{i=1}^{n} l_i, \sum_{i=1}^{n} r_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i )_{L,R.}$$

Ukoliko se umesto najjače trougaone norme $T_M$ posmatra najslabija $T_D$, formula za izračunavanje zbira daje naredna teorema:

**Teorema 1.4.** [4] Neka su $\boldsymbol{A_i} =< l, r, \alpha, \beta >_{L,R}$ , $i = 1, \dots , n$, $n$ L-R fazi interval. Njihov zbir u oznaci $\oplus_{T_M}{}_{i=1}^{n}\boldsymbol{A_i}$ je dat sa:

$$\oplus_{T_M}{}_{i=1}^{n}\boldsymbol{A_i} = (\sum_{i=1}^{n} l_i, \sum_{i=1}^{n} r_i, max_{i=1}^{n}\alpha_i, max_{i=1}^{n}\beta_i )_{L,R.}$$

Potrebno je napomenuti da fazi intervali dobijeni primenom prethodne dve teoreme i dalje ostaju L-R fazi intervali.

**Primer 1.12.** Neka su dati fazi brojevi $\boldsymbol{A_1} =< 0,1,3 >_{L,R}$ $i$ $\boldsymbol{A_2} =< -1,1,2 >_{L,R}$. Njihov zbir $\boldsymbol{A_1} \oplus \boldsymbol{A_2}$ je fazi broj $\boldsymbol{B} =< -1,2,5 >_{L,R}$.

## 1.7. Fazi relacije

Fazi relacije imaju široku primenu u praktičnim problemima, jer za razliku od klasičnih relacija koje pokazuju da li su neki elementi u relaciji ili ne, fazi relacija omogućava da elementi budu u određenoj meri u relaciji ([2,9]).

**Definicija 1.28.** [2] Neka je dat Dekartov proizvod:

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A}, \mathrm{y} \in \mathrm{B}\},$$

gde su skupovi A i B podskupovi univerzalnih skupova $U_1$ $i$ $U_2$ respektivno. Fazi relacija na $A \times B$ u oznaci $\mathcal{R}(x,y)$ se definiše kao skup:

$$\boldsymbol{\mathcal{R}} = \{(x,y), \mu_{\mathcal{R}}(x,y) \mid (x,y) \in A \times B,\ \mu_{\mathcal{R}}(x,y) \in [0,1]\},$$

gde je $\mu_{\mathcal{R}}(x,y)$ funkcija dve promenljive koja se zove funkcija pripadnosti. Ova funkcija daje stepen pripadnosti uređenog para $(x,y)$ u $\boldsymbol{\mathcal{R}}$**,** pridružujući svakom paru $(x,y)$ $u$ $A \times B$ jedan realan broj iz intervala [0,1].
Stepen kojim je $x$ u relaciji sa $y$ pokazuje stepen pripadanja.

**Definicija 1.29.** [2] $n - arna$ fazi relacija $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ je uređen par:

$\boldsymbol{\mathcal{R}} = ((a_1, a_2, \dots, a_n), \mu_{\mathcal{R}}(a_1, a_2, \dots, a_n))$ gde je

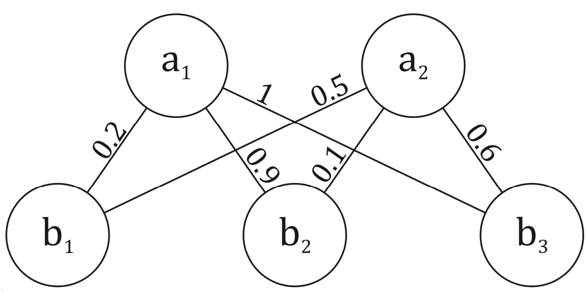
$(a_1, a_2, .., a_n) \in A_1 \times A_2 \times A_n$ , $i$ $\mu_{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(a_1, a_2, \dots, a_n) \in [0,1]$.

Za razliku od običnih relacija, fazi relacije u većoj meri povezuju elemente koji su u relaciji kao na primer $x$ $je$ $mnogo$ $veće$ $od$ $y$ , $x, y$ $su$ $jako$ $daleki$, ...

**Primer 1.13.** Neka postoje dva skupa privatnih škola: $A = \{a_1, a_2\}$ $i$ $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ i neka je $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ fazi relacija između ta dva skupa koja predstavlja jezičku promenljivu $velika\ udaljenost$ koja se zapravo odnosi na udaljenost među privatnim školama skupa $A$ $i$ $B$ , i koja je data sa: $\boldsymbol{\mathcal{R}} = \{((a_1, b_1), 0{,}2), ((a_1, b_2), 0{,}9), ((a_1, b_3), 1), ((a_2, b_1), 0{,}5), ((a_2, b_2), 0{,}1), ((a_2, b_3), 0{,}6)\}$.

Ovo će biti predstavljeno i tabelom:

| | škola $b_1$ | škola $b_2$ | škola $b_3$ |
|---|---|---|---|
| škola $a_1$ | 0.2 | 0.9 | 1 |
| škola $a_2$ | 0.5 | 0.1 | 0.6 |




**Slika 1.18. Fazi relacija $\mathcal{R}$ iz primera predstavljena kao graf.**

Funkcija pripadnosti pokazuje koliko su škole udaljene jedna od druge, pa se tako može utvrditi da su Škola $a_1$ i Škola $b_3$ na velikoj udaljenosti (vrednost funkcije pripadnosti je 1), dok Škola $a_2$ $i$ Škola $b_2$ nisu na velikoj udaljenosti (vrednost funkcije pripadnosti je 0,1).

Udaljenost između škola je prikazana i grafom Slika 1.18.

### 1.7.1. Operacije na fazi relacijama

Neka su $\mathcal{R}_1$ $i$ $\mathcal{R}_2$ dve fazi relacije definisane nad $A \times B$, takve da

$$\mathcal{R}_1 = \{((x,y), \mu_{\mathcal{R}_1}(x,y))\}, \quad (x,y) \in A \times B,$$

$$\mathcal{R}_2 = \{((x,y), \mu_{\mathcal{R}_2}(x,y))\}, \quad (x,y) \in A \times B.$$

Dakle koristiće se funkcije $\mu_{\mathcal{R}_1}(x,y)$ i $\mu_{\mathcal{R}_2}(x,y)$.

**Definicija 1.30.** [2] Dve fazi relacije su ekvivalentne, u oznaci $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$, ako i samo ako za svaki par $(x,y) \in A \times B, važi$ $\mu_{\mathcal{R}_1}(x,y)$= $\mu_{\mathcal{R}_2}(x,y)$.

**Definicija 1.31.** [2] Unija dve fazi relacije $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ definiše se kao:

$$\mu_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2}(x,y) = max\{\mu_{\mathcal{R}_1}(x,y), \mu_{\mathcal{R}_2}(x,y)\}, \quad (x,y) \in A \times B.$$

**Definicija 1.32.** [2] Presek dve fazi relacije $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ definiše se kao:

$$\mu_{\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2}(x,y) = min\{\mu_{\mathcal{R}_1}(x,y), \mu_{\mathcal{R}_2}(x,y)\}, \quad (x,y) \in A \times B.$$

**Definicija 1.33.** [2] Fazi relacija $\mathcal{R}^C$ je complement fazi relacije $\mathcal{R}$ i definiše se na sledeći način: za svaki par

$$(x,y) \in A \times B \;\; važi \qquad \mu_{\mathcal{R}^C}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y).$$

## 1.8. Rangiranje fazi brojeva

Kod mnogih fazi problema odlučivanja konačni rezultati predstavljeni su kao fazi brojevi. Potrebno je da nađemo metodu za konstrukciju jasnog ukupnog rangiranja fazi brojeva( [8]).

Nažalost, rešetka fazi brojeva nije linearno poređana pa neki fazi brojevi nisu direktno uporedivi.

Postoje brojne metode za ukupno rangiranje fazi brojeva. Svaka metoda ima neke mane I vrline , i jedna je uvek više prihvatljivija od druge. Da bi bio prikazan problem ukupnog rangiranja fazi brojeva , biće opisane tri metode koje će biti ilustrovane primerima ([8]).

Prva metoda se bazira na definiciji Hamingove dinstance na skupu $\boldsymbol{R}$ svih fazi brojeva**.**

**Definicija 1.34.** [8] Za sve fazi brojeve $\boldsymbol{A}\ i\ \boldsymbol{B}$ , $Hamingova\ distanca$, $d(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ se definiše formulom

$$d(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \int_R \left| \mu_{\boldsymbol{A}}(x) - \mu_{\boldsymbol{B}}(x) \right| dx. \qquad (3.1.1)$$

Za bilo koje fazi brojeve $\boldsymbol{A}\ i\ \boldsymbol{B}$ koje želimo da uporedimo, prvo utvrđujemo njihovu najmanju granicu, odnosno $max(\boldsymbol{A}\ ,\boldsymbol{B})$**.**

Zatim, izračunavamo $Hamingovu\ distancu$ $d(max(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\ ,\boldsymbol{A})$ i $d(max(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\ ,\boldsymbol{B})$ pa definišemo

$\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$ $\quad ako \quad$ $d(max(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\ ,\boldsymbol{A}) \geq$ $d(max(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\ ,\boldsymbol{B})$.

Ako je $A \preceq B$ (tj, fazi brojevi su direktno uporedivi) onda $max(\boldsymbol{A}\ i\ \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}$ i stoga $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$**.**

To znači da je rangiranje definisano $Hamingovom\ distancom$ kompatibilno sa rangiranjem uporednih fazi brojeva u skupu realnih brojeva $\boldsymbol{R}$**.** Takođe , slično se definiše rangiranje fazi brojeva $\boldsymbol{A}\ i\ \boldsymbol{B}$ putem najveće donje granice $min(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ **.**

Druga metoda se zasniva na $\alpha - presecima$.

Dati fazi brojevi $\boldsymbol{A}\ i\ \boldsymbol{B}$ se porede, bira se vrednost $\alpha \in [0,1]$ i određuju se $\alpha - preseci$

$$\boldsymbol{A}^{\alpha} = [a_1, a_2], \quad \boldsymbol{B}^{\alpha} = [b_1, b_2].$$

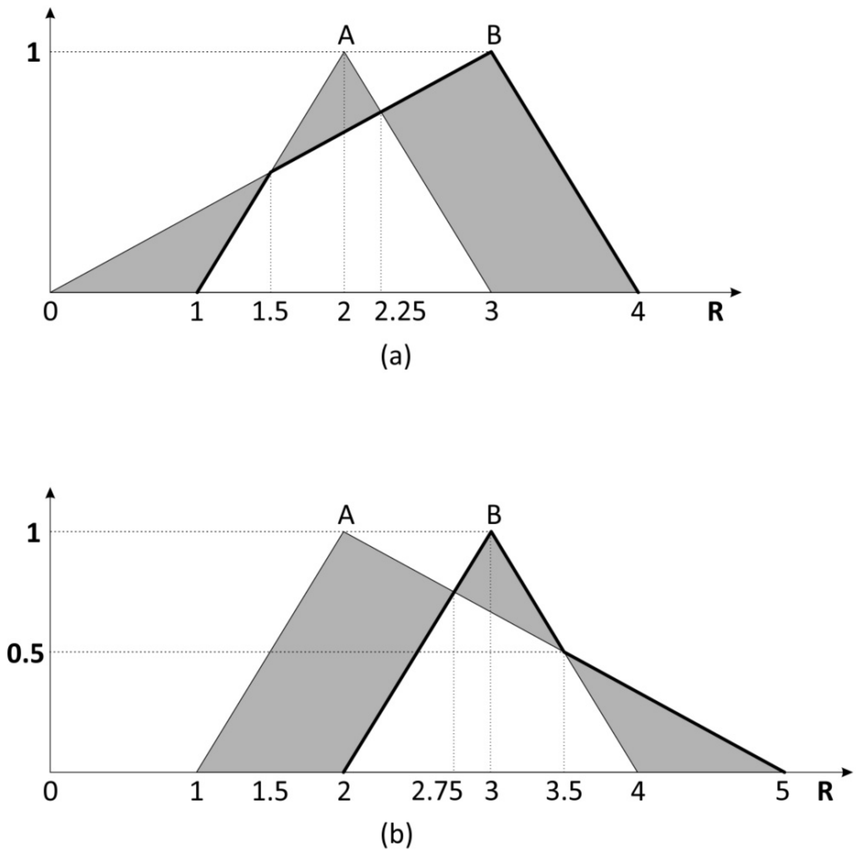
Zatim se definiše da je $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$ ako $a_2 \leq b_2$.

Ova definicija zavisi od izabrane vrednosti $\alpha$. Obično treba da je $\alpha > 0{,}5$. Ova metoda sabira adekvatno definisane stepene koji iskazuju dominaciju jednog fazi broja nad drugim za sve $\alpha - preseke$.

Treća metoda se zasniva na principu ekstenzije. Ova se metoda može primeniti za rangiranje nekoliko fazi brojeva, recimo $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_{2,\dots}\boldsymbol{A}_n$. Osnovna ideja je da se formira prioritetni skup $\mathbf{P}$ na $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \dots, \boldsymbol{A}_n\}$ tj. $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_i)$ koji će predstavljati stepen na kom se $\boldsymbol{A}_i$ rangira kao najveći fazi broj**.** Koristeći se principom ekstenzije dobijamo sledeću definiciju.

**Definicija1.35.** [8]Prioritetni skup $\mathbf{P}$ se definiše za svako $i \in N_n$ sa $\mathbf{P}(\mathbf{A_i}) = \sup min_{k \in N_n} \boldsymbol{A_k}(r_k)$ gde supremum preuzima sve vektore $\{r_1, \dots, r_n\} \in R^n$ tako da je $r_i \geq r_j$ za svako $j \in N_n$.

**Primer 1.14.** U ovom primeru će biti upoređene tri fazi metode rangiranja. Neka su $\boldsymbol{A}\ i\ \boldsymbol{B}$ fazi brojevi čije funkcije pripadnosti su prikazane na Slici 1.19. preuzete iz [8].




**Slika 1.19. Rangiranje fazi članova.**

$max(\boldsymbol{A}\ ,\boldsymbol{B})$ je fazi broj čija je funkcija pripadnosti prikazana podebljano na Slici 1.19.

$Hamingove\ distance\ \ d(max(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\ ,\boldsymbol{A})$ i $d(max(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\ ,\boldsymbol{B})$ su iskazane oblastima horizontalno i vertikalno na slici.

Uz pomoć (3.1.1) dobijamo:

$$d(max(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\ ,\boldsymbol{A}) = \int_{1.5}^{2}\left[x-1-\frac{x}{3}\right]dx + \int_{2}^{2.25}\left[-x+3-\frac{x}{3}\right]dx + \int_{2.25}^{3}\left[\frac{x}{3}+x-3\right]dx + \int_{3}^{4}[4-x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2} = 1.$$

$$d(max(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\ ,\boldsymbol{B}) = \int_{\mathbf{0}}^{1.5}\frac{\mathrm{x}}{3}\,\mathrm{dx} - \int_{1}^{1.5}[\mathrm{x}-1]\,\mathrm{dx}$$

$$= \frac{3}{8}-\frac{1}{8} = 0.25.$$

Pošto je $d(max(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\ ,\boldsymbol{A}) > \ d(max(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\ ,\boldsymbol{B})$ zaključujemo da je prema prvoj metodi rangiranja $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$.

Kada primenjujemo drugu metodu na isti primer uviđamo sa slike, da je $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B} \quad za\ svako \quad \alpha \in [0,1]$.

Prema trećoj metodi formiramo prioritetni skup **P** na $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}$ na sledeći način:

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \sup min\ [A(r_1),B(r_2)] = 0.75 \qquad r_1 \geq r_2$

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \sup \min\ [A(r_1),B(r_2)] = 1 \qquad r_1 \geq r_2.$

Pa zaključujemo da je $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$.

Sada razmatramo fazi brojeve $\boldsymbol{A}\ i\ \boldsymbol{B}$ čije su funkcije pripadnosti date na Slici1.19. pod b). Horizontalno i vertikalno postavljene oblasti imaju isto značenje.

Vidimo da je

$$d(max(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),\boldsymbol{A}) = 1 \qquad i \qquad d(max(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),\boldsymbol{B}) = 0.25,$$

pa je $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$ prema prvoj metodi.

Druga daje isti rezultat samo kada je $\alpha > 0.5$. Znači druga metoda je nedosledna.

A prema trećoj metodi opet dobijamo da je

$\mathbf{P}(\boldsymbol{A}) = 0.75 \quad i \quad \mathbf{P}(\boldsymbol{B}) = 1 \quad \text{pa je} \quad \boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}.$

# 2. Uloga fazi skupova u donešenju odluka

Donošenje odluka je nesumnjivo jedna od najznačajnijih aktivnosti ljudi. U svakodnevnom životu se svi mi suočavamo sa različitim alternativnim akcijama koje su nam na raspolaganju i makar u nekim slučajevima moramo da odlučimo koju od aktovnosti, koje su na raspolaganju, ćemo preduzeti. Začetak donošenja odluka, kao predmeta izučavanja, vuče korene s kraja $XVIII$ veka ([8]).

Predmet izučavanja odlučivanja je baš kao i što sam naziv kaže - proučavanje načina na koji se odluke zapravo donose. Najveća pažnja tokom razvoja ove oblasti je zapravo oblast upravljanja gde je proces odlučivanja najvažniji za funkcije poput kontrole zaliha, investicija, aktivnosti zaposlenih, razvoja novog proizvoda i raspodele svih sredstava kao i mnoge druge.

Zbog izuzetnog značaja u radu, problem odlučivanja biće definisan sledećom definicijom.

**Definicija 2.1.**[13] Problem odlučivanja je petorka ( $\mathrm{A}, \Theta, \varphi, X, \succeq$ ) u kojoj je:

- $A$: skup alternative ili akcija, među kojima donosilac odluke mora da bira;
- $X$: skup posledica ili rezultata koji dolaze na osnovu izbora alternative;
- $\Theta$: skup stanja sveta: zavisno od, obično nepoznatog, stanja sveta $\theta \in \Theta$, posledice izbora alternative $a \in A$ mogu se razlikovati;
- $\varphi$: $A \times \Theta \rightarrow X$ određuje za svako stanje sveta $\theta$ i svaku alternativu $a$ rezultujuću posledicu $x = \varphi(a, \theta)$;
- $\succeq$: relacija slabog poretka na $X$, tj. binarna relacija koja ispunjava uslove:
  (i) $x \succeq y \ ili \ y \succeq x, \ \forall x, y \in X$
  (ii) $\succeq$ je tranzitivna, tj. $x \succeq y, \ y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$.

Relacija $\succeq$ je relacija preferencije koja karakteriše donosioca odluke.

Primena fazi skupova u okviru polja odlučivanja najvećim delom obuhvata fazifikaciju klasičnih teorija odlučivanja. Dok se donošenje odluka u uslovima rizika modeluje uz pomoć probabilističkih teorija odlučivanja i teorija igara, fazi teorije odlučivanja pokušavaju da izađu na kraj sa neodređenošću i nespecifičnošću.

Klasično odlučivanje se bavi skupom alternativnih stanja prirode i skupom alternativnih akcija koje su donosiocu odluke na raspolaganju. Odluka se donosi u uslovima izvesnosti kada se ishodi svake aktivnosti mogu precizno odrediti i rasporediti. Bira se izbor koji će dovesti do ishoda koji donosi najveću korisnost.

Kada verovatnoća ishoda nije poznata i kada se ishodi svake akcije opisuju samo približno, kažemo da se odluke donose u uslovima neizvesnosti. Ovo je glavni domen fazi odlučivanja.

Odlučivanje u uslovima neizvesnosti je možda i najvažnija kategorija problema odlučivanja koju je okarakterisao britanski ekonomista Šekl (Shakle, 1961):

*,, U unapred predodređenom svetu, odluka bi bila iluzorna. U svetu sa savršenim predznanjem, isprazna. U svetu bez prirodnog poretka, slaba. Naš intuitivni odnos prema životu podrazumeva neiluzornu, smislenu, snažnu odluku. S obzirom da odluka u ovom smislu isključuje i savršeno predznanje i anarhiju u prirodi, mora se definisati kao izbor suočen sa neizbežnom neizvesnosti. ''*

Ovo pokazuje značaj teorije fazi skupova kod odlučivanja.

Problemi odlučivanja se klasifikuju na one koji podrazumevaju jednog donosioca odluke i one koji podrazumevaju nekoliko njih. Ove klase problema se nazivaju pojedinačno odlučivanje i odlučivanje sa više donosioca odluka.

## 2.1. Pojedinačno odlučivanje

Kod pojedinačnog odlučivanja gde imamo mnogo ciljeva i ograničenja pojedinac je taj koji donosi odluku. Bellman i Zadeh (1970) predložili su fazi model odlučivanja u kojem su bitni ciljevi i ograničenja izraženi kao fazi skupovi a odluka se donosi na osnovu odgovarajućih zbirova fazi skupovi (videti[17]).

U ovom modelu skup $A$ će predstavljati skup svih mogućih aktivnosti odnosno alternativa, $\boldsymbol{\mathcal{G}_i}(i \in N_n)$ će predstavljati skup ciljeva od kojih će svaki biti predstavljen kao fazi skup iskazan sa $A$, i skup $\boldsymbol{\mathcal{C}_j}$ $(j \in N_m)$ koji će predstavljati ograničenja takođe će biti predstavljen fazi skupom definisanim sa A.

Ponekad fazi skupovi koji iskazuju ciljeve i ograničenja u formulaciji nisu definisani direktno na skupu aktivnosti već indirektno kroz druge skupove koji karakterišu relevantna stanja prirode.

**Napomena 2.1.**

Funkcijom $g_i$ skup alternativa A se prebacuje u skup novčanih vrednosti u zavisnosti od cilja.

Funkcijom $c_j$ skup alternative $A$ prebacuje se u skup kilometara i skup sati, tj.

$$g_i : A \to X_i$$

$$c_j : A \to Y_j,$$

(gde $g_i$ i $c_j$ predstavljaju $\varphi$ iz definicije 2.1.).

Sa $\boldsymbol{\mathcal{G}}_i'$ $(i \in N_n)$ i $\boldsymbol{\mathcal{C}}_j'(j \in N_m)$ biće označeni fazi skupovi izraženi preko novčane vrednosti odnosno kilometraže i sati.

Kompozicija funkcija $g_i$ i $\boldsymbol{\mathcal{G}}_i'$ iskazuje cilj $\boldsymbol{\mathcal{G}}_i$ a kompozicija $c_j$ i $\boldsymbol{\mathcal{C}}_j'$ iskazuje ograničenje $\boldsymbol{\mathcal{C}}_j$, tj.

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_i(a) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_i'\big(g_i(a)\big) \tag{2.1.}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_j(a) = \boldsymbol{\mathcal{C}}_j'\left(c_j(a)\right) \tag{2.2.}$$

za svako $a \in A$.

U datoj situaciji odlučivanja koju karakterišu fazi skupovi $\boldsymbol{\mathcal{G}}_i$ $(i \in N_n)$ i $\boldsymbol{\mathcal{C}}_j$ $(j \in N_m)$, $fazi\,odluka$ $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ se dobija kao fazi skup na $A$ koji u isto vreme ispunjava date ciljeve $\boldsymbol{\mathcal{G}}_i$ i ograničenja $\boldsymbol{\mathcal{C}}_j$, odnosno

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}(a) = min\big[inf\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_i(a), inf\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_j\,(a)\big] \tag{2.3.}$$

za sve $a \in A$.

Što znači da za $n$ ciljeva $\boldsymbol{\mathcal{G}}_i$, $i = 1, \dots, n$, i $m$ ograničenja $\boldsymbol{\mathcal{C}}_j$, $j = 1, \dots, m$, odluka je $\boldsymbol{\mathcal{D}} = \boldsymbol{\mathcal{G}}_1 \cap \dots \cap \boldsymbol{\mathcal{G}}_n \cap \boldsymbol{\mathcal{C}}_1 \cap \dots \cap \boldsymbol{\mathcal{C}}_m$.

Kada se jednom donese $fazi\ odluka$ možda će biti potrebno odabrati „najbolju" pojedinačnu alternativu iz ovog fazi skupa. To se postiže direktnim putem biranjem alternative $a^* \in A$ koja postiže maksimalni stepen pripadnosti u $\boldsymbol{\mathcal{D}}$.

**Primer 2.1.**

Pretpostavimo da pojedinac treba da izabere jedan od četiri moguća posla $a_1, a_2, a_3, a_4$.

Njegov cilj jeste da izabere posao koji nudi veliku platu ali pod uslovom da je posao ima kratko radno vreme i da nije mnogo udaljen od mesta stanovanja.

U tom slučaju, $\mathrm{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ a fazi skupovi kojim su opisani ciljevi i ograničenja odgovaraju ličnim shvatanjima pojedinca i mogu se lingvistički opisati kao *velika plata, kratko radno vreme i mala udaljenost.*

Izrazi poput ($velika\ plata$ , $kratko\ radno\ vreme\ i\ mala\ udaljenost$) su subjektivne prirode pa ih pojedinac mora jasno definisati.

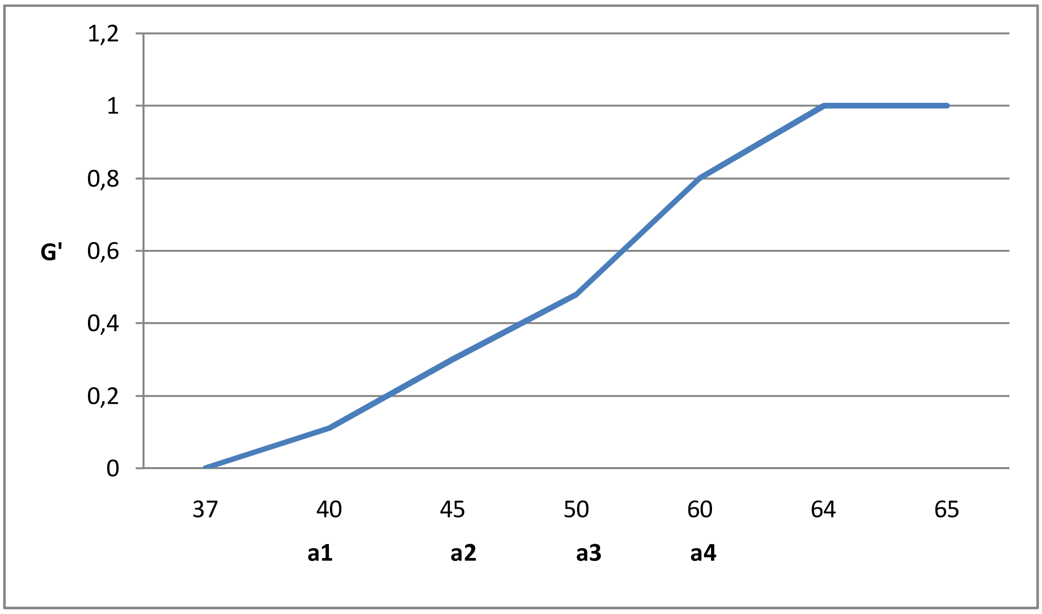
Označimo cilj koji iskazuje $veliku\ platu$ sa $\mathcal{G}'$. Kako bi iskazali cilj u smislu skupa $A$ potrebna je funkcija $A \to R^+$ koja svakom poslu dodeljuje određenu platu. Pretpostavićemo sledeće:

$$g(a_1) = 40\ 000\ din$$

$$g(a_2) = 45\ 000\ din$$

$$g(a_3) = 50\ 000\ din$$

$$g(a_4) = 60\ 000\ din.$$




**Slika 2.1. Plata koju svaki od poslova nudi (vrednosti na vertikalnoj osi predstavljaju plate u hiljadama dinara).**

Posao $a_1$ pruža platu od 40 000 dinara , posao $a_2$ pruža platu od 45 000 dinara, posao $a_3$ pruža platu od 50 000 dinara i posao $a_4$ platu od 60 000 dinara.

$$\mathcal{G}' = 0.11/40000 + 0.3/45000 + 0.48/50000 + 0.8/60000$$

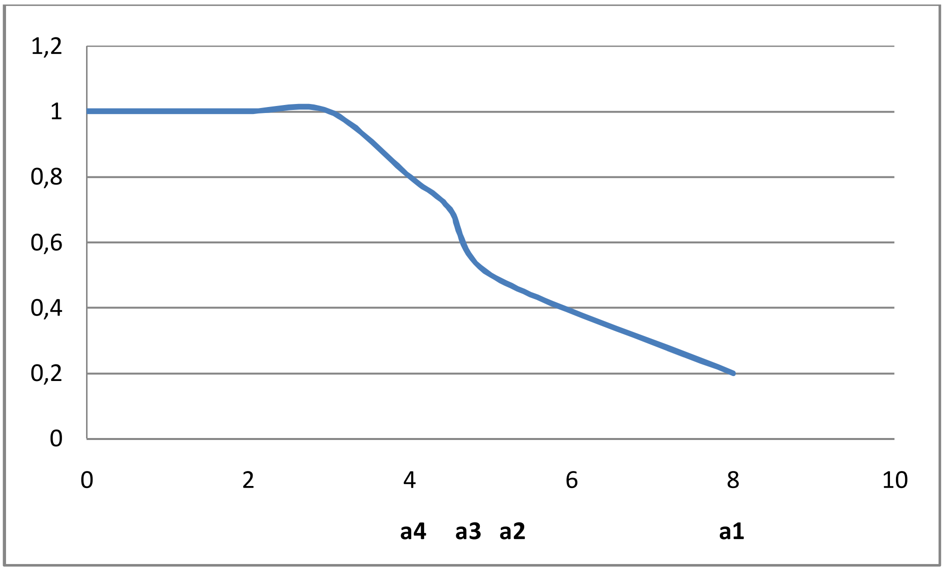
Spajanjem funkcije $g$ i $\mathcal{G}'$ prema (2.1) dobijamo fazi skup

$$\mathcal{G} = 0.11/a_1 + 0.3/a_2 + 0.48/a_3 + 0.8/a_4$$

koji iskazuje cilj u smislu poslova u skupu A.

Imamo dva ograničenja, posao treba da ima kratko radno vreme i da je mala udaljenost između mesta stanovanja i posla.

Za prvo ograničenje $\boldsymbol{C}'_{\boldsymbol{1}}$, da posao ima kratko radno vreme, na Slici2.2. prikazano je radno vreme sva četiri posla.




**Slika 2.2. Radno vreme koje svaki od poslova nudi.**

Odnosno,

$$c_1(a_1) = 8h$$

$$c_2(a_2) = 5h$$

$$c_3(a_3) = 4{,}5h$$

$$c_4(a_4) = 4h.$$

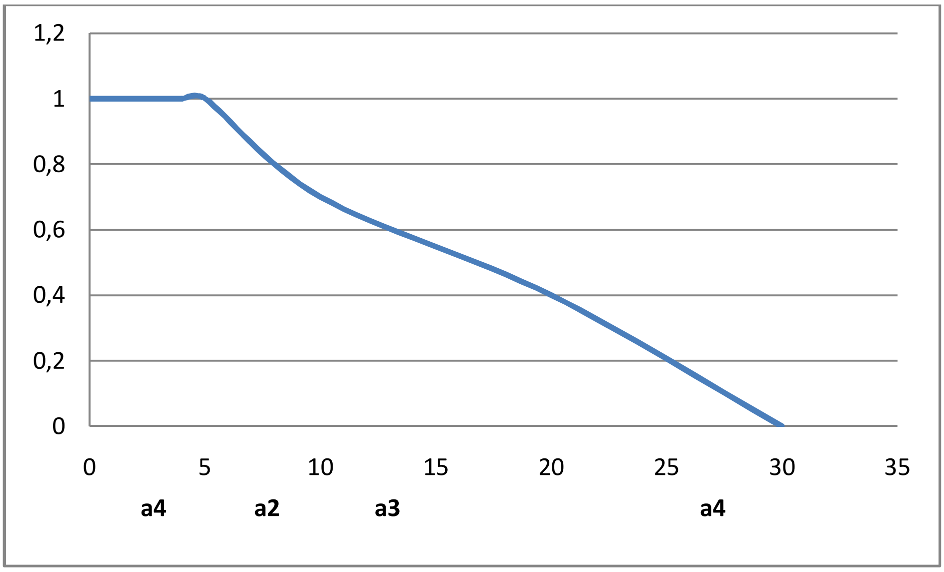
Fazi skup izražen preko sati provedenih na poslu:

$$\boldsymbol{C}'_{\boldsymbol{1}} = 0.2/8 + 0.5/5 + 0.7/4.5 + 0.8/4.$$

Iz (2.2.) imamo:

$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{1}} = 0.2/a_1 + 0.5/a_2 + 0.7/a_3 + 0.8/a_4.$

Drugo ograničenje izraženo je u vidu vožnje od kuće do posla. Fazi skup koji iskazuje ovo ograničenje biće označen sa $\boldsymbol{C}_2'$. Na Slici 2.3. prikazana je udaljenost sva četiri radna mesta.




**Slika 2.3. Udaljenost ponuđenih poslova.**

Konkretno,

$$c_2(a_1) = 27\ km$$

$$c_2(a_2) = 7{,}5\ km$$

$$c_2(a_3) = 12\ km$$

$$c_2(a_4) = 2{,}5\ km.$$

$$\boldsymbol{C}_2' = 0.2/27km + 0.9/7.5km + 0.7/12km + 1/2{,}5km.$$

Spajanjem funkcija $c_2$ i $\boldsymbol{C}_2'$ , odnosno na osnovu (2.2), dobijamo fazi skup

$$\boldsymbol{C}_2 = 0.2/a_1 + 0.9/a_2 + 0.7/a_3 + 1/a_4,$$

koji iskazuje ograničenje u vidu skupa A.

$Fazi\ odluku$ tj fazi skup dobijamo primenom formule (2.3.)

odnosno

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = 0.11/a_1 + 0.3/a_2 + 0.48/a_3 + 0.8/a_4,$$

koji predstavlja fazi karakterizaciju koncepta poželjnog posla. Posao koji će biti izabran je $a^{\Delta} = a_4$. Ovo je najpoželjniji posao među četiri dostupna posla sa datim ciljem $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ i ograničenjima $\boldsymbol{\mathcal{C}_1}, \boldsymbol{\mathcal{C}_2}$ pod uslovom da se sjedine cilj i ograničenja baš kao što je i urađeno.

## 2.2. Odlučivanje sa više donosilaca odluke

Odluke koje se formiraju na osnovu mišljenja više ljudi razlikuju se od slučaja kada imamo samo jednog donosioca odluke. Ciljevi pojedinačnih donosioca mogu se razlikovati po tome da svaki drugačije rangira alternative (izbore).

U fazi modelu grupnog odlučivanja svaki član grupe od *n* pojedinačnih donosilaca odluka smatra se da ima refleksivno, antisimetrično i tranzitivno rangiranje preferencija $P_k, k \in N_n$, što u potpunosti ili delimično rangira skup izbora *X*. Potrebno je naći funkciju ,,zajedničkog izbora'' koja će uzeti u obzir rangiranje pojedinačnih preferencija, i koja će dati najprihvatljivije grupno rangiranje preferencija. Dakle, ovaj model daje mogućnost pojedinačnim donosiocima odluka da imaju različite ciljeve i vrednosti ali je i dalje poenta da se donese zajednička prihvatljiva odluka.

**Napomena 2.2.**

Kako bi se rešio problem različitih mišljenja u grupi, grupna preferencija $P_g$ će biti definisana kao fazi binarni odnos

$$P_g : X \times X \rightarrow [0,1],$$

pri čemu se meri stepen preferencije $x_i \, u \; odnosu \; na \; x_j$. Da bi došli do ove grupne preferencije potrebna su nam odgovarajuća sredstva za zbrajanje pojedinačnih preferencija.

U ovoj metodi broj osoba koje daju prednost $x_i$ u odnosu na $x_j$ ($N(x_i, x_j)$) deli se sa ukupnim brojem donosilaca odluke.

Ovom metodom dobijamo odgovor o većinskom glasanju.

Pa je:

$$P_g(x_i, x_j) = \frac{N(x_i, x_j)}{n},$$

gde je $n - broj \; donosilaca \; odluke.$

Druge metode sabiranja pojedinačnih prioriteta se koriste kada postoji različiti uticaj koji imaju pojedinci u grupu. Na primer,diktatorsku situaciju može odlikovati odnos grupne preferencije $P_g$ za koju je

$$P_g(x_i, x_j) = \begin{cases} 1, & ako\ je\ x_i \succeq^k x_j\ za\ nezavisno\ k, \\ 0, & inače, \end{cases}$$

gde znak $\succeq^k$ predstavlja preferirano rangiranje jednog pojedinca $k$ koji ima potpunu kontrolu nad grupnom odlukom.

Kada se jednom definiše fazi veza $P_g$, konačna grupna preferencija se može utvrditi pretvaranjem $P_g$ u formu odluke

$$P_g = \cup_{\propto \in [0,1]} {P_g}^{\alpha}$$

koja predstavlja uniju veze ${P_g}^{\alpha}$ koja obuhvata $\alpha$ −preseke fazi relacije $P_g$. Svaka vrednost $\alpha$ predstavlja stepen slaganja između pojedinaca.

Sa $O$ će biti označena ukupna rangiranja koja su kompatibilna sa parovima u jasnim relacijama.

Na kraju kada izvršimo preseke ukupnih rangiranja koja su kompatibilna sa parovima u jasnim relacijama dolazimo do jednog jasnog ukupnog rangiranja.

Ova metoda odlučivanja sa više donosilaca odluke biće prikazana u sledećem primeru koji je rađen po ugledu na primer iz [4].

**Primer 2.2.**

Pretpostavimo da svaki pojedinac u grupi od osam donosilaca odluke daje sledeću listu rangiranja prioriteta $P_i$ iz skupa izbora $X = \{w, x, y, z\}$:

$$P_1 : w \succeq x \succeq y \succeq z$$

$$P_2 = P_5 : x \succeq y \succeq z \succeq w$$

$$P_3 = P_7 : x \succeq w \succeq y \succeq z$$

$$P_4 = P_8 : w \succeq z \succeq x \succeq y$$

$$P_6 : z \succeq w \succeq x \succeq y$$

Odlučilac $P_1$ na prvo mesto stavlja *w* i bira pre nego *x* zatim na drugo mesto stavlja *x*, na treće *y* na poslednje mesto *z*.

Uz pomoć funkcije pripadnosti koja je data formulom u gore navedenoj metodi ($P_g(x_i, x_j) = \frac{N(x_i,x_j)}{n}$), gde je *n*=8, dolazimo do sledeće fazi relacije zajedničkog izbora:

$$P_g = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} w \\ x \\ y \\ z \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.75 & 0.625 \\ 0.5 & 0 & 0.75 & 0.375 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0.375 \\ 0.375 & 0.625 & 0.625 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (2.2.1.)$$

U matrici $p_{11}$ smo dobili 0 jer niko od odlučilaca nije odabrao *w* pre *w*, a to je zapravo indukovano njihovim sistemon $P_i$.

Na isti način posmatranja došli smo i do drugih vrednosti koje su date u fazi relaciji $P_g$.

Sada određujemo $\alpha - preseke$ ove relacije:

${P_g}^1 = \emptyset$.Prazan skup je zato što nijedan uređen par nije u relaciji jedan sa drugim.

${P_g}^{0.75} = \{(w,y),(x,y)\}$ - zbog preglednosti u nastavku će se koristiti ovaj zapis.

Ako pogledamo fazi relaciju $P_g$ (2.2.1.) vidimo da je w u relaciji sa $y$ i da je $x$ u relaciji sa $y$, odnosno to su uređeni parovi iz $\alpha - preseka$ relacije $P_g$ gde je $\alpha = 0.75$.

Isto uradimo i za ostale $-preseke$:

$${P_g}^{0.625} = \{(w,z),(z,x),(z,y),(w,y),(x,y)\}$$

$${P_g}^{0.5} = \{(x,w),(w,x),(w,z),(z,x),(z,y),(w,y),(x,y)\}$$

$${P_g}^{0.375} = \left\{ \begin{matrix} (x,w),(x,z),(y,z),(x,w),(w,x),(w,z),(z,x) \\ ,(z,y),(w,y),(x,y) \end{matrix} \right\}$$

$${P_g}^{0.25} = \left\{ \begin{matrix} (y,w),(y,x),(z,w),(x,z),(y,z),(x,w),(w,x), \\ (w,z),(z,x),(z,y),(w,y),(x,y) \end{matrix} \right\}$$

Sada možemo primeniti proceduru kako bi dobili jasno rangiranje koje čini grupni izbor.

Sva ukupna rangiranja $O^1$ su kompatibilna sa praznim skupom odnosno $O^1$ su sva moguća uređenja na skupu od 4 elemenata $(w, x, y, z)$.

$$O^1 = \emptyset.$$

Ukupna rangiranja $O^{0.75}$ koja su kompatibilna sa parovima u jasnim relacijama ${P_g}^{0.75}$ su

$$O^{0.75} = \begin{Bmatrix} (z, w, x, y), (w, x, y, z), (w, z, x, y), (w, x, z, y), \\ (z, x, w, y), (x, w, y, z), (x, z, w, y), (x, w, z, y) \end{Bmatrix},$$

pa je $O^1 \cap O^{0.75} = O^{0.75}$.

Rangiranja kompatibilna sa ${P_g}^{0.625}$ su

$O^{0.625} = \{(w, z, x, y), (w, z, y, x)\}$ i

$$O^1 \cap O^{0.75} \cap O^{0.625} = \{(w, z. x, y)\}.$$

Vrednost 0.625 predstavlja grupni stepen saglasnosti vezano za grupni izbor koji ima ukupno rangiranje $\{w, x, y, z\}$.

## 2.3. Rangiranje izbora pojedinaca

Sledeća metoda koja će biti predstavljena je slična predhodnoj, s tim što će se sad porediti parovi između datih izbora.

$f(x_i, x_j)$ označava će stepen poželjnosti kojim pojedinac rangira $x_i$ u odnosu na $x_j$. Ove procene prave pojedinci za sve parove izbora u datom skupu. One se zatim konvertuju u stepene relativnih prioriteta $F(x_i, x_j)$ prema formuli

$$F(x_i, x_j) = min\left[1, \frac{f(x_j, x_i)}{f(x_i, x_j)}\right], \tag{2.3.}$$

za svaki par $(x_i, x_j) \in X^2$.

Kada je $F(x_i, x_j) = 1$, $x_i$ se smatra jednako poželjnim kao i $x_j$.

Funkcija $F$ koja se može posmatrati i kao funkcija pripadnosti fazi relacije gde svaki par $(x_i, x_j) \in X^2$ ima svojstvo

$$max[F(x_i, x_j), F(x_j, x_i)] = 1, \tag{2.3.1.}$$

što znači da makar jedan mora biti poželjan kao onaj drugi.

Ukupni stepen relativne preferencije $p(x_i)$,za svako $x_i \in X$, možemo izračunati formulom

$$p(x_i) = \min F(x_i, x_j). \tag{2.3.2.}$$

**Primer 2.3.**

Opisana metoda će biti prikazana kroz primer gde grupa ljudi uključena u poslovno partnerstvo želi da kupi zajednički auto za potrebe posla. Odluka koji auto da kupe jeste odluka sa više donosilaca odluke. Da bi se primenila opisana metoda svaka osoba u grupi mora da rangira prvo raspoložive izbore. Kako bi se to postiglo može se primeniti metoda zasnovana na stepenu privlačnosti.

Razmatra se pet modela automobila: Opel, Fiat, Audi, Nissan i Citroen. Sledećom tabelom (Tabela 2.1.) biće prikazani brojevi za određivanje stepena poželjnosti.

Tabela 2.2. će predstavljati procenu jedne osobe iz grupe, dok će stepeni relativne preferencije i ukupni stepen relativne preferencije (izračunati u (2.3.) i (2.3.1.)) biti predstavljeni (Tabelom 2.3.).

| $f(x_i, x_j)$ | $Atraktivnost\ x_i\ u\ odnosu\ na\ x_j$ |
|---|---|
| 1 | $Slabo\ atraktivno$ |
| 3 | $Umereno\ atraktivno$ |
| 5 | $Jako\ atraktivno$ |
| 7 | $Veoma\ jako\ atraktivno$ |
| 9 | $Ekstremno\ atraktivno$ |
| 2,4,6,8 | $Srednje\ vrednosti\ između\ nivoa$ |

**Tabela 2.1. Određivanje stepena poželjnosti.**

| $f(x_i, x_j)$ | $Opel$ | $Fiat$ | $Audi$ | $Nissan$ | $Citroen$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $Opel$ | 1 | 7 | 9 | 3 | 8 |
| $Fiat$ | 3 | 1 | 3 | 2 | 4 |
| $Audi$ | 1 | 1 | 1 | 3 | 5 |
| $Nissan$ | 2 | 7 | 7 | 1 | 7 |
| $Citroen$ | 2 | 6 | 8 | 3 | 1 |

**Tabela 2.2. Procena jedne osobe iz grupe.**

Sada kada imamo ove dve tabele do (Tabele 2.3.) ćemo doći tako što ćemo izračunati stepene relativne preferencije $F(x_i, x_j)$ prema prikazanoj formuli a zatim i ukupni stepen relativne preferencije $p(x_i)$.

Odnosno,

$$F(x_2, x_1) = min\left[1, \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2, x_1)}\right] = min\left[1, \frac{7}{7}\right] = 1$$

$$F(x_2, x_3) = min\left[1, \frac{f(x_3, x_2)}{f(x_2, x_3)}\right] = min\left[1, \frac{1}{3}\right] = 0{,}33.$$

Na analogan način dolazimo i do ostalih relativnih preferencija u Tabeli 2.3.

| $F(x_i, x_j)$ | $Opel$ | $Fiat$ | $Audi$ | $Nissan$ | $Citroen$ | $p(x_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Opel$ | 1 | 0,43 | 0,11 | 0,67 | 0,25 | 0,11 |
| $Fiat$ | 1 | 1 | 0,33 | 1 | 1 | 0,33 |
| $Audi$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $Nissan$ | 1 | 0,29 | 0,43 | 1 | 0,43 | 0,29 |
| $Citroen$ | 1 | 0,66 | 0,625 | 1 | 1 | 0,63 |

**Tabela 2.3. Stepeni relativne preferencije.**

Tabela 2.3. indukuje sledeće rangiranje preferencija kada su u pitanju modeli automobila: Audi, Citroen, Fiat, Nissan i Opel.

Ukupni stepen relacije preferencije $p(x_i)$ dobija se na osnovu (2.3.2.). Iz prikazane tabele se vidi da je za pojedinca najviše poželjan automobile marke Audi jer je njegov stepen preferencije najveći.

Rangiranje koje iskazuje preferencije ostalih članova grupe može se odrediti na sličan način.

# 3.Odlučivanje sa više kriterijuma

Kod problema odlučivanja sa više kriterijuma alternative se procenjuju na osnovu nekoliko kriterijuma.

Svaki kriterijum podstiče posebno rangiranje alternativa pa je iz tog razloga potrebna procedura po kojoj se dobija ukupno rangiranje preferencija. Postoji očita sličnost između ovih problema odlučivanja i problema odlučivanja sa više donosioca odluka. Razlika je u tome što višestruko rangiranje predstavlja ili preferencije različitih ljudi ili klasifikovanje na osnovu drugih kriterijuma.

U ovom poglavlju biće predstavljeno da je broj razmotrenih alternativa ograničen, dok se situacijama odlučivanja sa beskonačnim skupovima alternativa bavi fazi matematičko programiranje. ([7,8]).

**Napomena 3.1.**

Neka je $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ skup alternativa i skup kriterijuma koji karakterišu situaciju odlučivanja. Tada se osnovna informacija uključena u odlučivanje sa više kriterijuma može iskazati matricom

$$R = \begin{array}{c} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \dots \quad x_n \\ \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}_{C\times X.} \end{array}$$

Pretpostavimo da su svi članovi matrice realni brojevi i da svaki član $r_{ij}$ iskazuje stepen u kom alternativa $x_j$ zadovoljava kriterijum $c_i (i \in N_m, j \in N_n)$. U ovom slučaju se $\boldsymbol{R}$ može tumačiti kao reprezent matrice fazi relacije na $C \times X$.

Može se desiti da se umesto matrice $\boldsymbol{R}$ čiji su članovi $[0,1]$ u početku koristi alternativna matrica $\boldsymbol{R}' = [r_{ij}]$ čiji su članovi arbitrarni realni brojevi ili iskazani lingvistički. U tom slučaju, $\boldsymbol{R}'$ se može konvertovati u željenu matricu $\boldsymbol{R}$ uz pomoć formule

$$r_{ij} = \frac{r'_{ij} - min r'_{ij}}{max r'_{ij} - min r'_{ij}},$$

za sve $i \in N_m$ $i$ $j \in N_n$.

Najčešći pristup problemu odlučivanja sa više kriterijuma jeste njihova konverzija u probleme odlučivanja sa jednim kriterijumom. To se može uraditi nalaženjem globalnog kriterijuma

$r_j = h(r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{mj})$ koji je za svaki $x_j \in X$ odgovarajući zbir vrednosti $r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{mj}$ koji zadovoljava pojedinačni kriterijum $c_1, c_2, \dots, c_m$.

Primer problema odlučivanja sa više kriterijuma jeste problem angažovanja i biranja kadra. Kod tog konkretnog problema odabir iz datog skupa pojedinaca, recimo $x_1, x_2, \dots, x_n$, poređenje kandidata se vrši u smislu datih kriterijuma $c_1, c_2, \dots, c_m$. Ovo dovodi do matrice $\boldsymbol{R}$ (ili matrice koja se može konvertovati u matricu $\boldsymbol{R}$).

Članovi $r_{ij}$ iskazuju za svako $i \in N_m$ i $j \in N_n$ stepen u kom se kandidat $x_j$ uklapa u traženi profil u smislu kriterijuma $c_i$. Funkcija $h$ može biti bilo koja od operacija sabiranja. Najčešće primenjivani operator sabiranja jeste ponderisana srednja vrednost

$$r_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i r_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} w_i},\ j \in N_n, \tag{3.1.}$$

gde su $w_1, w_2, \dots, w_m$ ponderi koji označavaju relativnu važnost kriterijuma $c_1, c_2, \dots, c_m$.

Formulom kojom se dobija određena klasa mogućih ponderisanih zbirova je

$$r_j = h\left(r_{1j}^{w_1}, r_{2j}^{w_2}, \dots, r_{mj}^{w_m}\right),$$

gde je $h$ zbirni operator a $w_1, w_2, \dots, w_m$ su ponderi.

**Primer 3.1.** Uspešnoj kompaniji je potreban sposoban radnik visokog obrazovanja i dobrog izgleda koji će da uspešno posluje na tržištu. Dakle, kompaniji je potreban radnik koji treba da zadovolji tri kriterijuma (visoko obrazovanje, sposobnost i fizički izgled).

Neka je skup $X = \{Petar, Janko, Miloš\}$ skup pojedinaca koji su konkurisali na posao, a skup kriterijuma je $C = \{visoko\ obrazovanje, sposobnost\ i\ fizički\ izgled\}$.

Koliko je svako od pojedinaca zadovoljio određen kriterijum biće prikazano matricom R.

$$R = \begin{array}{r} \\ obrazovanje \\ sposobnost \\ izgled \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Petar & Janko & Miloš \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 & 0.9 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrica nam pokazuje da npr. Petar zadovoljava kriterijum obrazovanje stepenom 0.5, ili recimo da Miloš zadovoljava kriterijum izgleda koji je potreban za taj posao čak stepenom 0.9.

Kompanija je prilikom oglašavanja konkursa za posao još i odredila vrednosti za pondere $w_1 = 0.5, w_2 = 0.3, w_3 = 0.2$ koji označavaju relativnu važnost kriterijuma. Dakle, po ovim vrednostima kompaniji je najbitnije da je pojedinac visokog obrazovanja, zatim na drugom mestu im je da poseduje mnogo sposobnosti potrebnih za posao i na kraju im je izgled pojedinca.

Kompanija će izabrati jednog od ova tri kandidata tako što će primeniti formulu (3.1), odnosno naći će globalni kriterijum $r_j$ uz pomoć ponderisane srednje vrednosti.

Pa će biti,

$$r_1 = \frac{w_1 r_{11} + w_2 r_{21} + w_3 r_{31}}{w_1 + w_2 + w_3}$$

$$r_1 = \frac{0.5 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.3}{0.5 + 0.3 + 0.2}$$

$r_1 = 0.37.$

Uzimajući u obzir važnost kriterijuma $(w_1, w_2, w_3)$ globalni stepen kojim Petar zadovoljava objavljen konkurs je 0.37.

$r_2 = 0.59$ , Jankov globalni kriterijum je 0.59.

$r_3 = 0.45$ , Milošev globalni kriterijum je 0.45.

Prema tome, od ova tri kandidata Janko u najvećoj meri zadovoljava sva tri kriterijuma pa će on dobiti posao.

## 3.1. Primena OWA operatora - primer

Primenjivost OWA operatora na problem odabira doktoranata na postdiplomskim studijama informatike je od velikog značaja[7].

Škola za postdiplomske studije u Turskoj nudi program za sticanje zvanja doktora, i otvoreno je za sve studente sveta. Preduslov je završen master. Ne postoji konkretan obrazac za podnošenje prijava već bi kandidati trebalo da napišu pismo direktoru škole. Pismo treba da sadrži sem formalne prijave i sledeća dokumenta: biografiju, finansijski plan studija, prijava za finansijsku pomoć (ukoliko se traži), dva pisma preporuke, zvanična fotokopija sa položenim ispitima, potvrda znanja engleskog jezika i kratak opis oblasti interesovanja.

S obzirom da je broj kandidata obično između 20-40, odnosno mnogo veći od dostupnih stipendija (oko 6), moramo da rangiramo kandidate na osnovu njihovog uspeha. Može se i desiti da dodeli samo deo dostupnih stipendija jer je broj dobrih kandidata manji od broja slobodnih mesta.

Problem odabira $mladih\ perspektivnih\ istraživača\ doktoranata$ ima tri komponente.

Prva komponenta je zbir $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ kandidata za doktorski program.

Druga komponenta je zbir 6 kriterijuma Tabela 3.1. koji se smatraju važnima u procesu ocenjivanja.

| **Istraživanja** | Odličan | Dobar | Loš |
|---|---|---|---|
| Sposobnost u istraživačkim grupama | ○ | ○ | ○ |
| Mogućnost napredovanja | ○ | ○ | ○ |
| Saradnja | ○ | ○ | ○ |
| **Akademsko Obrazovanje** | | | |
| Univerzitet | ○ | ○ | ○ |
| Prosečna ocena studija | ○ | ○ | ○ |
| Vreme trajanja studija | ○ | ○ | ○ |

**Tabela 3.1. Kriterijumi važni u procesu ocenjivanja.**

Treća komponenta je grupa od 11 stručnjaka čija mišljena su zatražena u rangiranju alternative.

Tako da imamo sledeći problem: više stručnjaka- više kriterijuma u odlučivanju.

Sistem rangiranja koji će biti opisan u daljem tekstu je proces koji se odvija u dve faze.

U prvoj fazi, pojedinačni stručnjaci treba da daju svoju procenu alternative. Ova procena podrazumeva ocenjivanje svake alternative u skladu sa svakim kriterijumom, gde su ocene date na skali od 1 do 3, gde 3 znači $odličan$, 2 $prosečan$ i 1 $slab$. Svaki stručnjak daje 6-torku

$$(a_1, \dots, a_6),$$

za svakog kandidata, gde je $a_i \in \{1,2,3\}$ $i = 1, \dots, 6$. Sledeći korak je u tom procesu je davanje celokupne procene za neku alternativu od strane svakog stručnjaka.

U drugoj fazi, sakupljaju se procene svakog pojedinačnog stručnjaka kako bismo dobili ukupnu vrednost za svakog kandidata.

Ako $Q$ predstavlja redovni monotoni kvantifikator koji se povećava, onda merimo celokupni uspeh alternative $x = a_1, \dots, a_n$ uz pomoć formule

$$F_Q(a_1, \dots, a_n),$$

gde $F_Q$ predstavlja OWA operator, a ponderi koji se dovode u vezu sa ovim kvantifikatorom dobijaju se na sledeći način:

$$w_i = Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right) \quad gde\ je\ i = 1, \dots, n.$$

Ako razmotrimo porodicu redovnog monotonog kvantifikatora

$$Q_a(r) = r^{\alpha}, \alpha \geq 0,$$

jasno je da $ornes(Q_\alpha) = \int_0^1 r^\alpha \, dr = \frac{1}{\alpha+1}$.

$$orness(Q_\alpha) < 0.5 \quad za \ \ \alpha > 1, \quad orness(Q_\alpha) > 0.5 \quad za \ \ \alpha < 1 \qquad i$$

$$orness(Q_\alpha) = 0.5 \quad za \ \ \alpha = 1.$$

Pošto imamo 6 kriterijuma, ponderi dobijeni iz $Q_\alpha$ se određuju kao

$$w_1 = \left[\frac{1}{6}\right]^\alpha - 0$$

$$w_2 = \left[\frac{2}{6}\right]^\alpha - \left[\frac{1}{6}\right]^\alpha$$

$$w_3 = \left[\frac{3}{6}\right]^\alpha - \left[\frac{2}{6}\right]^\alpha$$

$$w_4 = \left[\frac{4}{6}\right]^\alpha - \left[\frac{3}{6}\right]^\alpha$$

$$w_5 = \left[\frac{5}{6}\right]^\alpha - \left[\frac{4}{6}\right]^\alpha$$

$$w_6 = 1 - \left[\frac{5}{6}\right]^{\alpha}.$$

Koji god da je lingvistički kvantifikator u pitanju $Q_\alpha$ koji predstavlja izjavu da je većina kriterijuma zadovoljena od strane x-$a$, vidi se da je

$$1 \leq Q_\alpha(a_1, \ldots, a_6) \leq 3.$$

Traži se indeks $\alpha \geq 0$ takav da se lingvistički kvantifikator $Q_\alpha$ približava izboru stručnjaka u što većoj meri. Stručnjaći se slažu sa sledećim principima:

(i) ako kandidat ima više od dve neuspešne komponente, onda njegov celokupni uspeh biti manje od dva;

(ii) ako kandidat ima maksimalno dve neuspešne komponente, onda će njegov celokupni uspeh biti više od dva;

(iii) ako kandidat ima sve uspešne komponente osim jedne, onda bi njegov celokupni uspeh trebalo da bude oko 2.75;

(iv) ako kandidat ima tri neuspešne komponente i jedna od njih potpada pod kriterijum $na\ granici\ istraživanja$, onda njegov celokupni uspeh ne bi trebalo da bude iznad 1.5.

Iz (i) dobijamo,

$Q_\alpha(3,3,3,1,1,1) = 3 \times (w_1, w_2, w_3) + w_4 + w_5 + w_6 < 2.$

Odnosno,

$$3 \times \left[\frac{3}{6}\right]^{\alpha} + 1 - \left[\frac{3}{6}\right]^{\alpha} < 2 <=> \left[\frac{1}{2}\right]^{\alpha} < \left[\frac{1}{2}\right] <=> \alpha > 1.$$

Iz (ii) dobijamo,

$Q_\alpha(3,3,3,1,1,1) = 3 \times (w_1, w_2, w_3) + 2 \times w_4 + w_5 + w_6 > 2.$

Odnosno,

$$3 \times \left[\frac{3}{6}\right]^{\alpha} + 2 \times \left(\left[\frac{4}{6}\right]^{\alpha} - \left[\frac{3}{6}\right]^{\alpha}\right) + 1 - \left[\frac{4}{6}\right]^{\alpha} > 2 \ <=> \left[\frac{1}{2}\right]^{\alpha} + \left[\frac{2}{3}\right]^{\alpha} > 1.$$

Što znači da je $\alpha < 1{,}293$. Tako da iz (i) i (ii) dobijamo $1 < \alpha \leq 1{,}293$.

Veoma je lako utvrditi da (iii) i (iv) ne može ispuniti nijedan kvantifikator $Q_a$, jer (iii) zahteva da je $\alpha \approx 0{,}732$ što je manje od 1 , a (iv) se može ispuniti ako je $\alpha \geq 2$ što je veće od 1,293. Pravila (iii) i (iv) imaju prednost kad god je to primenjivo.

U drugoj fazi, tehnika kombinovanja procene stručnjaka kako bi se dobila kompletna procena za svaku alternativu zasniva se na OWA operatorima. Svaki kandidat je prikazan 11-ocifreno na sledeći način $(b_1, \ldots, b_{11})$ $gde\ je$ $b_i \in [0,1]$ jedinični rezultat dobijen iz $i$ po redu ocene stručnjaka.Pretpostavimo da su članovi $b_i$ organizovani u opadajućem nizu, odnosno $b_i$ se može protumačiti kao najbolji među rezultatima $i$.

Uzimajući u obzir da se stručnjaci biraju iz 9 različitih istaživačkih grupa, ne postoji kandidat koji ima dobar rezultat za prvi kriterijum ,,Odgovara istraživačkoj grupi''. Za kvalifikovanje kandidata neophodna je podrška najmanje četiri stručnjaka.

Pošto ima 11 stručnjaka kandidati se procenjuju na osnovu prva četiri rezultata sa liste

$$(b_1, \ldots, b_4).$$

Ako se makar tri stručnjaka slaže sa tim da je kandidat odličan onda bi njegova konačna ocena trebalo da bude 2,75 što je granična vrednost za najboljeg studenta. To je

$$Q_\alpha(3{,}3{,}3{,}1) = 3 \times (w_1 + w_2 + w_3) + w_4 = 2{,}75.$$

Što je,

$$3 \times \left[\frac{3}{4}\right]^\alpha + 1 - \left[\frac{3}{4}\right]^\alpha = 2{,}75 \quad <=> \left[\frac{3}{4}\right]^\alpha = 0{,}875 \quad <=> \quad \alpha = 0{,}464.$$

Znači u drugoj fazi je potrebno izabrati drugačiji OWA operator sa $\alpha \approx 0{,}464$ kod sabiranja prvih šest kandidata kako bi se dobio konačni rezultat.

Ukoliko je konačni rezultat manji od 2, kandidat se diskvalifikuje a ako je konačni rezultat najmanje 2,5 tada bi mu se trebala dati stipendija. Ukoliko je konačni rezultat između 2 i 2,5, onda se stipendija može dodeliti kandidatu u zavisnosti od ukupnog broja dostupnih stipendija.

Predstavljen je proces od dve faze kod problema izbora doktoranata. U prvoj fazi korišćen je OWA operator kako bi se primenila neka osnovna pravila izvedena iz određenih ekstremnih situacija. U drugoj fazi, korišćen je $drugačiji$ OWA operator, jer bi konačni rezultat kandidata trebalo da bude visok ako je njegov uspeh zadovoljio bar tri stručnjaka (nije potrebna podrška svih stručnjaka).

# Zaključak

U ovom radu predstavljeno je rangiranje objekata u fazi okruženju, uloga fazi skupova u donošenju odluka i OWA-uređeni operatori usrednjavanja. Kako se ceo rad bazira na fazi skupovima dat je detaljan prikaz osnovnih definicija i operacija sa fazi skupovima.

Karakteristika fazi skupa je zapravo mogućnost da elemenat pripada skupu do određene mere. Kako je fazi skup dat funkcijom pripadnosti koja može uzeti vrednosti iz celog zatvorenog jediničnog interval to predstavlja uopštenje u odnosu na klasične skupove kod kojih elemenat pripada ili ne pripada skupu.

Da bi bilo uspešno rangiranje objekata predstavljeno je nekoliko fazi modela odlučivanja. Razmatrano je pojedinačno odlučivanje i odlučivanje sa više donosioca odluka. Kod pojedinačnog odlučivanja od izuzetnog su značaja ciljevi i ograničenja izraženi kao fazi skupovi. Donošenje fazi odluke postiže se biranjem onog objekta ili izbora koji postiže maksimalan stepen pripadnosti tom skupu. Kod odlučivanja sa više donosioca odluka, postoji više ciljeva jer svako drugačije rangira svoje izbore.

Kod odlučivanja sa više kriterijuma koje je predstavljeno u poslednjem delu rada prikazane su metode rangiranja i fazi multikriterijumsko odlučivanje koje se bazira na operatorima proseka (OWA operatori). Kako se kod problema sa više kriterijuma alternative ocenjuje na osnovu nekoliko kriterijuma u radu je prikazana procedura po kojoj se dobija ukupno rangiranje preferencija. Multikriterijumsko odlučivanje primenjeno je na odabir doktoranata gde je korišćen OWA operator koji je prethodno detaljno prikazan.

Kako se sa donošenjem odluka srećemo u svakodnevnom životu, a isto tako smo i u dodiru sa nepreciznim i neodređenim informacijama, rad ima veliku primenu. Takođe je primena rada zanimljiva i za poslovne zahteve, u smislu odabira osoblja ili rangiranja određenih preferencija.

# Literatura

[1] Bojadziev G., Bojadziev M.; Fuzzy logic for business, finance and management, World Scientific, 1999.

[2] Bojadziev G., Bojadziev M.; Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Application, World Scientific, 1995.

[3] Buckley J.J; The multiple judge, multiple criteria ranking problem: A fuzzy set approach, Fuzzy sets and systems, 1984.

[4] De Baets Bernard,Markova – Stupňanová Andrea, Analytical expressions for the addition of fuzzy intervals, Fuzzy sets and systems, 1997.

[5] Endre Pap, Zita Bošnjak,Saša Bošnjak; Application of fuzzy sets with diferent t-norms in the interpretation of portfolio matrices in strategic management, Fazzy sets and systems, 2000.

[6] Erich Peter Klement; Radtko Mesier, Endre Pap; On the relationship of associative compensatory operators to triangular norm and conforms.

[7] Fulleér Robert; Fuzzy Reasoning and Fuzzy Optimization, Turku Centre for Computer Science, 1998.

[8] George J. Klir, Bo Yuan; Fuzzy sets and fuzzy logic, New Jersey 1995.

[9] Hans M.; Applied fuzzy arithmetic – an introduction with engineering applications, Springer, 2005.

[10] http: //en.wikipedia.org/

[11] Jose M. Merigo; Decision making with distance measures OWA operator and weighted averages, 2010.

[12] Klement E. P., Mesier R., Pap E; Triangular norms, Kluwer Academic Puslisher, 2000.

[13] Pap E.: Fazi mere i njihova primena, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno matematički fakultet, Novi Sad, 1999.

[14] Petar Hotomski, Dušan Malbaški; Matematička logika i principi programiranja, Univerzitet u Novom Sadu, Tehnički fakultet ,,Mihajlo Pupin'', Zrenjanin 2000.

[15] Ronald R. Yager; Oredered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making 1988; 183-190.

[16] Schwizer B., Scalar A.; Associative functions and abstract semigroups, Publ. Math. Debrecen, 1963.

[17] Zadeh L.A., Bellman R.E. 1970; Decision making in a fuzzy environment, Management Science, 141-164.

[18] Zadeh L.A.; Fuzzy sets. Information and Control. 1965; 8: 338-353.

# Biografija

Bašić Biljana je rođena 2. novembra 1987. godine u Subotici. Osnovnu školu ,,Osma vojvođanska brigada'' završila je 2002.godine kao dobitnik Vukove diplome. Gimnaziju ,,Svetozar Marković" u Subotici završava 2006.godine sa odličnim uspehom. Iste godine upisuje Prirodno matematički fakultet u Novom Sadu, odsek za matematiku i informatiku, smer matematika finansija. Osnovne studije završava 2011.godine, i iste godine upisuje master studije, smer primenjena matematika. Polaže i predmete pedagoško-psihološke zajedno sa geometrijom koji su sa profesorskog smera istog fakulteta. Položila je sve ispite predviđene planom i programom 2012.godine i time stekla uslov za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

**RBR**

Identifikacioni broj:

**IBR**

Tip dikumentacije: Monografska dokumentacija

**TD**

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

**TZ**

Vrsta rada: Master rad

**VR**

Autor: Biljana Bašić

**AU**

Mentor: Prof. dr Ivana Štajner-Papuga

**ME**

Naslov rada: Uloga fazi skupova u rangiranju objekata

**NR**

Jezik publikacije: srpski (latinica)

**JP**

| | |
|---|---|
| Jezik izvoda: | srpski/engleski |
| **JI** | |
| Zamlja publikovanja: | Republika Srbija |
| **ZP** | |
| Uže geografsko područje: | Vojvodina |
| **UGP** | |
| Godina: | 2017. |
| **GO** | |
| Izdavač: | Autorski reprint |
| **IZ** | |
| Mesto i adresa: | Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4, PMF |
| **MA** | |
| Fizički opis rada:<br>**FOR** | (3/63/1/7/22/18)<br>(broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/referenci) |
| Naučna oblast: | Matematika |
| **NO** | |
| Naučna disciplina: | Primenjena matematika |
| **ND** | |
| Predmetne odrednica, | Fazi skup, fazi broj, donošenje odluka |
| ključne reči:(**PO**, **UDK**) | |

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

**ČS**

Važna napomena: Nema

**VN**

Izvod (**IZ**): U ovom radu predstavljeno je rangiranje objekata u fazi okružeju i uloga fazi skupova u donošenju odluka. Na početku rada, radi uspešnog razumevanjarada u celini, objašnjeni su osnovni pojmovi fazi skupova, fazi brojevi, fazi relacije. U drugom i trećem delu rada prikazana je uloga fazi skupova u donošenju odluka. Kako bi se sve što jasnije približilo čitaocu, dato je dosta primera koji su iz realnog života, na koje su primenjeni pomenuti principi.

Datum prihvatanja teme
od strane NN veća: 18.05.2016.
**DP**

Datum odbrane: februar 2017.

**DO** .

Članovi komisije:

**KO**

Predsednik: dr. Mirjana Štrboja, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu.

Član: dr. Aleksandar Takači, vanredni profesor Tehnološkog fakulteta u Novom Sadu.

Mentor: dr. Ivana Štajner-Papuga, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES & MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

**ANO**

Identification number:

**INO**

Document type: Monograph type

**DT**

Type of record: Textual printed material

**TR**

Contents code: Master's thesis

**CC**

Author: Biljana Bašić

**AU**

Mentor: prof. dr Ivana Štajner-Papuga

**ME**

Title: The Role of Fuzzy Sets in Object Ranking

**TI**

Language of text: Serbian (Latin)

**LT**

Language of abstract: s /en

**LT**

Country of publication: Republic of Serbia

**CP**

Locality of publication: Vojvodina

**LP**

Publication year: 2017.

**PY**

Publisher: Author's reprint

**PU**

Publ. place: Novi Sad, Trd D. Obradovića 4

**PP**

Physical description: (3/63/1/7/22/18)

# PD

Scientific field: Mathematics

**SF**

Scientific discipline: Applied mathematics

**SD**

Subject Key words: Fuzzy set, fuzzy number, decision making

**SKW**

Holding data: In the library of Department of Mathematics and Informatics

**HD**

Note:

**N**

Abstract (**AB**): This paper presents the ranking of objects in a Fuzzy environment and the role of fuzzy sets in decision making. At the begining, the basic concept of fuzzy sets, fuzzy numbers and fuzzy relations are explaned. In the second and third part discusses the role of fuzzy sets in decision making. To make it clearer to the reader, a lot of examples from real life, that have been applied the mentioned principles, are given.

Accepted on Scientific board on: 18.05.2016.

**AS**

Defended: Februar 2017.

**DE**

Thesis Defend board:

**DB**

President: dr. Mirjana Štrboja, docent, Faculty of Natural Sciences

Member: dr. Aleksandar Takači, associate professor, Faculty of Technical Sciences

Mentor: dr. Ivana Štajner-Papuga, full professor, Faculty of Natural Sciences