UNIVERZITET U NOVOM SADU,
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET,
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

KAUZALNOST NA LORENCOVIM MNOGOSTRUKOSTIMA

Master rad

Mentor: dr Sanja Konjik

Kandidat: Andrija Blesić

Novi Sad, 2015.

Sadržaj

Uvod

"Ubi materia, ibi geometria."

Johannes Kepler, (1571-1630)

Uspešnost opšte i specijalne teorije relativnosti jasno je signalizirala korisnost upotrebe Lorencovih mnogostrukosti u modeliranju prostor-vremena. Prednost Lorencovih mnogostrukosti odmah je prepoznata u činjenicama da se Lorencova metrika može definisati na svakoj nekompaktnoj mnogostrukosti i na pojedinim klasama kompaktnih mnogostrukosti, kao i u tome što nijedna tačka na Lorencovim mnogostrukostima (koja odgovara posmatraču ili objektu u prostor-vremenu) ne može postići superluminalnu brzinu. Poslednja osobina zapravo je od presudnog značaja, jer da su prvobitni rezultati OPERA neutrino eksperimenta u podzemnoj *Gran Sasso* laboratoriji bili ispravni, modeliranje prostor-vremena Lorencovim mnogostrukostima bi u najmanju ruku bilo dovedeno u pitanje.

Iz tog razloga se rano krenulo sa analizom metrika na Lorencovim mnogostrukostima. Ova simetrična, nedegenerisana bilinearna preslikavanja (koja strogo govoreći nisu "metrike" u smislu preciziranom u definicijama topologije ili funkcionalne analize, već pseudoskalarni proizvodi) predstavljaju elegantan način na koji se jedna Lorencova mnogostrukost može razlikovati od drugog. Štaviše, metrički koeficijenti predstavljaju polaznu tačku za definisanje brojnih kvantiteta, te se uz pomoć njih mogu definisati i Kristofelovi simboli, kao i Rimanov, Ričijev i Ajnštajnov tenzor, te posrednije dati kompletniji opis globalnih i lokalnih svojstava svakog prostor-vremena.

Stoga je velika pažnja u pravoj glavi posvećena upravo metrikama. U prvoj glavi se takođe izlaže linearna algebra prostor-vremena, uvodi se pojam kauzalnog karaktera (koji nema preciznog ekvivalenta u Rimanovoj geometriji), i daje nekoliko teorema koji pomažu lakšem prepoznavanju kauzalnog karaktera vektorskih prostora. Svetlosnim i vremenskim konusima, koji su poznati koncepti specijalne teorije relativnosti, pristupa se sistematično, naglašavajući njihov međusoban odnos i pokazujući koliko je uslov da se vektori nalaze u istom vremenskom konusu neophodan za ispravnost obrnutih nejednakosti Lorencovih mnogostrukosti. Uvođenjem pojma vremenske orijentabilnosti na kraju ove glave, moguće je precizno definisati pojam prostor-vremena, nad kojim se dalje razvija teorija kauzalnosti.

U drugoj glavi dat je pregled teorije kauzalnosti. Uvođenjem relacija kauzalnosti omogućeno je uopšte razmatranje i ispitivanje uzročno posledinčnog odnosa između dve tačke na prostor-vremena, tj. između dva događaja u prostor-vremenu. Tehnike diferencijalne topologije korištene su kako bi se analizirali kauzalne i hronološke budućnosti podskupova prostor-vremena, zajedno sa ahronalnim skupovima koji se koriste radi definisanja Košijevih površi, oblasti zavisnosti i Košijevih horizonata. Veza ovih pojmova sa uslovima kauzalnosti istaknuta je u kasnijim poglavljima glave, sa naglaskom na osobinu globalne hiperboličnosti, koja se smatra poželjnom osobinom za dobro definisan determinizam u prostor-vremenu.

Treća glava tiče se primene teorije kauzalnosti kako bi se ispitale neobične fizičke pojave koje se javljaju u jednostavnim prostor-vremenima i prvim rešenjima Ajnštajnovih jednačina gravitacionog polja. O ovim pojavama, tzv. singularitetima, se govori na početku glave, kao i o poteškoći pronalaska jedinstvene i odgovarajuće definicije singulariteta, koja bi, dakle, objedinila jednim imenom, klasifikovala više klasa (sve klase) singulariteta, ali koja ne bi podrazumevala, na primer, nefizičke singularitete (kakvi su, na primer, koordinatni artefakti). Akcenat se dalje stavlja na geodezijsku nekompletnost kao pokazatelj singulariteta u prostor-vremena, i koristeći pojmove geodezijske devijacije, Jakobijevih polja, kongruencije i Rejšodurijeve jednačine, pokazuju Hokingova, Penrouzova i Hoking-Penrouzova teorema singulariteta. Na kraju rada prezentovana je kratka diskusija kosmičke cenzure, fizički realističnih prostor-vremena i zanimljivih posledica njihovih svojstva.

Napomenimo ovde da se u ovom radu podrazumevalo izvesno (osnovno) predznanje iz diferencijalne geometrije, topologije i teorije relativnosti. Zbog opširnosti teme, prvenstveni fokus ovog rada nije bio priložiti jedan zaokružen i samosadržan pregled tehnika i primena geometrijskih i topoloških metoda u teoriji relativnosti, koliko jeste bio da prikaže veliki značaj teorije kauzalnosti u modeliranju i ispitivanju različitih klasa prostor-vremena, kao i njeno mesto u aktuelnim poljima istraživanja vezanih za geometriju prostor-vremena.

Glava 1

Lorencovi vektorski prostori

Već u XIX veku se intenzivno radilo na generalizaciji euklidskog prostora, uglavnom zahvaljujući Gausu i Rimanu. Naravno, nakon 1915. godine, kada se opšta teorija relativnosti polako afirmisala kao zasebna disciplina u fizici, došlo se do nove generalizacije, kojom prilikom je postala jasna dobra definisanost prostora u kojima se pozitivna definitnost skalarnog proizvoda oslabila do nedegenerisanosti. Ovo bilinearno preslikavanje, tj. metrika definisana na mnogostrukostima, je na kraju i doprinelo uvođenju pojma pseudo-Rimanovih mnogostrukosti, i razvoju Rimanove i Lorencove geometrije.

Štaviše, kao što se značajni pojmovi već poznate geometrije euklidskog $\mathbb{R}^n$ prostora mogu dovesti u vezu sa standardnim skalarnim proizvodom definisanim na njemu, tako se i osnovni pojmovi na pseudo-Rimanovim prostorima mogu dovesti u vezu sa metrikama na njima. Metrika pomaže da se definišu opšta prostor-vremena i da se analizira kauzalnost na njima, a promena ili perturbacija metrike često može pomoći da se definišu i ispitaju svojstva fizički realističnog prostor-vremena.

1.1 Pseudo-Rimanove mnogostrukosti

Kako bi se pseudo-Rimanovi prostori mogli uvesti, neophodno je najpre definisati *metrički tenzor*, kao u nastavku. Radi lakšeg razumevanja, bitno je podsetiti se definitnosti (simetričnih) bilinearnih formi i pojma indeksa forme:

Definicija 1.1.1 *Simetrična bilinearna forma b na vektorskom prostoru V je:*

- *pozitivno definitna, akko $v \neq 0$ implicira $b(v, v) > 0$;*
- *pozitivno semidefinitna, akko je za svako $v \in V$ ispunjeno $b(v, v) \geq 0$;*
- *negativno definitna, akko $v \neq 0$ implicira $b(v, v) < 0$;*
- *negativno semidefinitna, akko je za svako $v \in V$ ispunjeno $b(v, v) \leq 0$;*
- *nedegenerisana, akko $(\forall v \in V)\ b(v, w) = 0$ implicira $w \equiv 0$;*
- *degenerisana, akko postoji $w \neq 0$ tako da je $b(v, w) = 0$, za svako $v \in V$.*

U nekim izvorima se posebno napominje da se za vektorski prostor V takođe može reći da je nedegenerisan akko je $b|_V$ nedegenerisana forma na V.

Definicija 1.1.2 *Indeks simetrične, bilinearne forme b na (realnom) vektorskom prostoru V je najveći ceo broj α koji predstavlja dimenziju potprostora $W \subset V$ na kome je $b|_W$ negativno definitna forma.*

U slučaju unitarnih prostora $(V, \langle\rangle)$, potprostor W dimenzije α iz prethodne definicije generisan je sa onih α baznih vektora prostora V od kojih za svaki par važi $\langle e_i, e_j \rangle_W < 0$. Indeks forme (skalarnog proizvoda) na V zato je jednak broju α. Sledi definicija metričkog tenzora.

Definicija 1.1.3 *Metrički tenzor g na glatkoj mnogostrukosti M predstavlja simetrično nedegenerisano tenzorsko polje tipa* $\binom{0}{2}$ *definisano na M, koje u svakoj tački mnogostrukosti ima osobinu konstantnosti indeksa.*

Gornja definicija implicira da metrički tenzor $g \in T^0_2(M)$ glatko pridružuje svakoj tački p na mnogostrukosti bilinearnu, simetričnu i nedegenerisanu formu g_p koja deluje na vektore tangentnog prostora T_pM. Treba naglasiti da je pritom indeks svih ovih formi g_p jednak. Sada se mogu definisati pseudo-Rimanove mnogostrukosti:

Definicija 1.1.4 *Pseudo-Rimanova mnogostrukost je glatka mnogostrukost M, nad kojom je definisan metrički tenzor* $g \in T^0_2(M)$.

Indeksom same pseudo-Rimanove mnogostrukosti (i indeksom odgovarajućeg metričkog tenzora) se naziva zajednička celobrojna vrednost indeksa α svake bilinearne forme g_p. Naravno, važi nejednakost $0 \leq \alpha \leq n = \dim(M)$, a kako se mnogostrukosti sa vrednostima 0 i 1 indeksa g_p često pominju u literaturi, ove mnogostrukosti se posebno imenuju. Na taj način se ističu mnogostrukosti sa indeksom $\alpha = 0$, tzv. *Rimanove mnogostrukosti* i mnogostrukosti sa $\alpha = 1$, tzv. *Lorencove mnogostrukosti*.

Takođe, iz definicije sledi da se pseudo-Rimanove mnogostrukosti istog nosača, ali različitog metričkog tenzora na njemu posmatraju kao dve zasebne, *različite* pseudo-Rimanove mnogostrukosti. Stoga je, kako bi se jedna mnogostrukost mogla na prvi pogled razlikovati od druge istog nosača, neophodno uvesti jedinstven, koncizan zapis metričkog tenzora na svakoj koordinatnoj karti, koristeći lokalne koordinatne funkcije, te definisati *linijski element*, na osnovu kojeg se tačno može videti kako metrički tenzor deluje u svakoj tački na mnogostrukosti.

Neka je, dakle, sa M označena $(n+1)$-dimenzionalna mnogostrukost, i neka se posmatra tačka $p \in M$, koja pripada koordinatnoj karti $\mathcal{U}$. U ovoj tački je definisana bilinearna funkcionela g_p, koja deluje na sve vektore iz $(n+1)$-dimenzionalnog tangentnog prostora T_pM, uključujući i bazne, označene sa $\partial_0, \partial_1, \ldots, \partial_n$. Eksplicitno se mogu označiti koeficijenti $g_{ij} = g_p(\partial_i, \partial_j)$ i na osnovu njih konstuisati kvadratna matrica:

$$\begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & \cdots & g_{0n} \\ g_{10} & g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n0} & g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix},$$

koja se zove *matrica metričkog tenzora* ili, ukoliko ne postoji opasnost od zabune, *metrički tenzor*. Bitno je naglasiti da je svaki element matrice metričkog tenzora funkcija čija se vrednost menja u svakoj tački mnogostrukosti. Ipak, zbog nedegenerisanosti metričkog tenzora, ova matrica je invertibilna, dok je zbog simetričnosti metričkog tenzora ona i simetrična.

Sada se na svakoj tački p posmatrane koordinatne karte $\mathcal{U}$ može definisati *linijski element* ds^2 preko diferencijala dx^i lokalnih koordinatnih funkcija x^i, $i = 0, 1, \ldots n$:

$$ds^2(V) = \sum_{i,j=0}^{n} g_{ij}\, dx^i(V)\, dx^j(V), \text{ za svako } V \in T_pM,$$

ili, još konciznije i u matričnom zapisu:

$$ds^2 = \sum_{i,j=0}^{n} g_{ij}\, dx^i\, dx^j = [dx^0\ dx^1\ \dots\ dx^n] \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & \cdots & g_{0n} \\ g_{10} & g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n0} & g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{bmatrix}. \qquad (1.1.1)$$

Treba ovde napomenuti da se metrički tenzor, čije je delovanje u svakoj tački mnogostrukosti predstavljeno linijskim elementom kao u (1.1.1), češće naziva samo *metrika* (*pseudo-Rimanovih mnogostrukosti*), te će se ova dva termina u nastavku koristiti ravnopravno.

Na osnovu eksplicitnog zapisa matrice metričnog tenzora i linijskog elementa moguće je razlikovati jedan metrički tenzor od drugog, tj. jednu pseudo-Rimanovu mnogostrukost od druge. Štaviše, ds^2 se može iskoristiti i kako bi se utvrdilo da li je neka mnogostrukost zaista Lorencova, kao u nastavku.

Posmatra se matrica metričkog tenzora. Ukoliko je ona dijagonalna (ima nenula elemente samo na glavnoj dijagonali), indeks metrike α moguće je utvrditi jednostavnim brojanjem negativnih elemenata na dijagonali. Ukoliko je ovaj broj jednak jedinici, i taj se jedini negativni element nalazi u i-toj vrsti i i-toj koloni matrice metričkog tenzora, to znači da je potprostor generisan odgovarajućim normiranim vektorom ∂_i ujedno i potprostor najveće dimenzije na kojoj je g_p negativno definitna forma, što opet znači da je metrika Lorencova, $\alpha = 1$.

Jasno, ukoliko broj negativnih elemenata na djagonali nije isti za svaku tačku p na mnogostrukosti, tj. ukoliko je variranjem vrednosti lokalnih koordinata $x^1, x^2, \dots, x^n$ tačke p moguće dobiti razne vrednosti za α, to predstavlja jasan pokazatelj da odgovarajući g ne zadovoljava definiciju metričkog tenzora. Primeri su dati u nastavku.

Primer 1.1.1 *Najjednostavnija Lorencova mnogostrukost je prostor Minkovskog, $\mathbb{R}^4$, čiji je metrički tenzor opisan matricom:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

i linijski element (1.1.1) dat u koordinatama (ct, x, y, z) kao:

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

U gornjem izrazu c predstavlja konstantu brzine svetlosti, koja je uvedena iz čisto fizičkih razloga, kako bi se standardizovale jedinice (dužine) u kojima se vrednost svake koordinate predstavlja.

□

Primer 1.1.2 *Još jedan klasičan primer Lorencove mnogostrukosti je jedinični cilindar $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, sa linijskim elementom:*

$$ds^2 = -d\theta^2 + dt^2 = [d\theta\ dt] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta \\ dt \end{bmatrix}.$$

Ovo je još jedan primer u kojem je matrica metričkog tenzora dijagonalna.

□

Primer 1.1.3 (Schwarzschildova metrika) *Švarcšildova metrika opisana je na $\mathbb{R}^4$ linijskim elementom:*

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dr^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_S}{r}} dt^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2(\varphi)\, d\theta^2,$$

u (r, t, φ, θ) koordinatama, gde je $r_S > 0$ vrednost takozvanog Švarcšildovog radijusa.

Unutar ovog radijusa važi $r < r_S$, te je:

$$\begin{cases} g_{00} = g_{rr} = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) > 0, & g_{22} > 0, \\ g_{11} = g_{tt} = +\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} < 0, & g_{33} > 0, \end{cases}$$

i vrednost indeksa metrike je 1. Van radijusa važi $r_S < r$:

$$\begin{cases} g_{00} = g_{rr} = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) < 0, & g_{22} > 0, \\ g_{11} = g_{tt} = +\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} > 0, & g_{33} > 0, \end{cases}$$

te je i ovde $\alpha = 1$. Treba dodatno napomenuti da je prividan singularitet metrike za $r = r_S$ identifikovan kao koordinatni artefakt, tj. nefizički singularitet (videti diskusiju Edington-Finkelštajn i Kruskal-Sekereš koordinata u [1]). Ovo je, dakle, takođe Lorencova metrika.

□

Situacija se menja u slučaju matrice koja ima nenula vandijagonalne elemente, jer nije više toliko lako odrediti indeks metričkog tenzora. Zato se u praksi metrički tenzor "dijagonalizuje", u smislu da se formiraju nove lokalne koordinatne funkcije, koje su (linearne) transformacije starih lokalnih koordinatnih funkcija, ali tako da matrica metričkog tenzora zapisana u ovim koordinatama bude dijagonalna. U opštem slučaju, ovo nije jednostavno uraditi, ali kako je matrica metričkog tenzora kvadratna i simetrična, dijagonalizaciju je moguće izvršiti primenom posebne vrste dekompozicije matrica, takozvane *dekompozicije po karakterističnim korenima* (eng. *eigenvalue decomposition*).

Naime, pokazano je (videti, na primer, u knjizi Trefethena i Baua, *Numerical Linear Algebra*) da svaka kvadratna matrica A ima dekompoziciju po karakterističnim korenima, $A = X\Lambda X^{-1}$, gde je sa X obeležena matrica karakterističnih vektora, a sa Λ dijagonalna matrica na čijoj se dijagonali nalaze karakteristični koreni. Pritom, spektralna teorema simetričnih matrica garantuje da je svaku simetričnu, kvadratnu matricu A moguće zapisati i kao $A = Q\Lambda Q^T$, gde je $Q = [q_{ij}]$ unitarna matrica, što znači i da se linijski element metrike može napisati kao:

$$ds^2 = [dx^0\ dx^1\ \dots\ dx^n] \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & \cdots & g_{0n} \\ g_{10} & g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n0} & g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{bmatrix}$$

$$= [dx^0\ dx^1\ \dots\ dx^n] \begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0n} \\ q_{10} & q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n0} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0n} \\ q_{10} & q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n0} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{bmatrix}$$

$$= [dy^0\ dy^1\ \dots\ dy^n] \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy^0 \\ dy^1 \\ \vdots \\ dy^n \end{bmatrix}.$$

Odavde je jasno da se indeks mnogostrukosti poklapa sa brojem negativnih karakterističnih korena matrice metričkog tenzora, dok su odgovarajuće koordinatne transformacije dijagonalizacije date sa:

$$dy^j = \sum_{i=0}^{n} q_{ij}\, dx^i, \quad j \in \{0, 1, \dots n\}.$$

Primer 1.1.4 *Metrika opisana sledećim linijskim elementom:*

$$ds^2 = dy^2 - 2dx\,dz,$$

primer je metrike koje se može definisati na $\mathbb{R}^3$ *u* (x, y, z) *koordinatama. Da je ova metrika i Lorentzova, može se videti i na osnovu jednakosti:*

$$\begin{aligned} ds^2 &= \begin{bmatrix} dx & dy & dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} dx & dy & dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d\pi & d\sigma & d\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\pi \\ d\sigma \\ d\tau \end{bmatrix} = -d\pi^2 + d\sigma^2 + d\tau^2, \end{aligned}$$

gde je korišćena dekompozicija po karakterističnim korenima i transformacija $(dx, dy, dz) \mapsto (d\pi, d\sigma, d\tau)$.

□

Primer 1.1.5 *Na cilindru* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ *u* (θ, t) *koordinatama moguće je definisati i Lorencovu metriku datu linijskim elementom* $ds^2 = d\theta\, dt$. *Zaista, primenom dekompozicije po karakterističnim korenima, odgovarajuća matrica metričkog tenzora se zapisuje kao:*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

što znači da je linijski element moguće zapisati i kao:

$$ds^2 = -d\xi^2 + d\sigma^2, \text{ gde su: } \begin{cases} d\xi = \frac{1}{2}(-d\theta + dt), \\ d\sigma = \frac{1}{2}(d\theta + dt). \end{cases}$$

Sada je očigledno da je indeks ove metrike $\alpha = 1$.

□

1.2 Kauzalni karakter

Geometrijski značaj indeksa postaje vidljiv pri klasifikaciji tangentih vektora. Ako se, radi preglednosti zapisa, metrički tenzor g i funkcionele g_p sve obeleže sa $\langle , \rangle$ — ovaj zapis se često koristi u literaturi, bez opasnosti od zabune — tangentni vektori se mogu podeliti na osnovu njihovih kauzalnih karaktera:

Definicija 1.2.1 *Za zadatu pseudo-Rimanovu mnogostrukost, nenula tangentni vektor* $v \in TM$ *je vektor:*

- *prostornog tipa, akko je* $\langle v, v \rangle > 0$,
- *svetlosnog tipa, akko je* $\langle v, v \rangle = 0$,
- *vremenskog tipa, akko je* $\langle v, v \rangle < 0$.

Nula vektor je po definiciji prostornog tipa.

Generalno, kauzalni karakter se može definisati ne samo za tangentne vektore, već se kao pojam može uopštiti i na tangentne prostore, tangentna raslojenja, i na opštije vektorske prostore. Za definiciju kauzalnog karaktera 1-formi videti [5].

Kako će se većina teorema u nastavku odnositi na vektorske prostore dimenzije bar 2, nad kojima je globalno definisana simetrična bilinearna funkcionela indeksa 1, ovi prostori će se u nastavku posebno nazivati *Lorencovim vektorskim prostorima*. Ključno svojstvo ovih prostora zapravo se može uočiti na osnovu mogućnosti dijagonalizacije matrice metričkog tenzora. Naime, dijagonalizaciji odgovara nalaženje ortonormirane baze Lorencovog vektorskog prostora. Međutim, kako na dijagonali matrice metričkog tenzora može biti samo jedan negativni element, to znači da svaka baza ovog prostora (ortogonalni i normirani vektori) mora imati *tačno jedan* vektor vremenskog tipa, dok su svi ostali bazni vektori prostornog tipa.

Ovde se navodi definicija kauzalnog karaktera potprostora Lorencovih vektorskih prostora:

Definicija 1.2.2 *Neka je W potprostor Lorencovog vektorskog prostora V, i neka je g simetrična bilinearna forma (indeksa 1) definisana nad V. Tada je W potprostor:*

- *prostornog tipa, akko je $g|_W$ pozitivno definitna forma (W je tada unitarni prostor),*
- *vremenskog tipa, akko je $g|_W$ nedegenerisana forma indeksa 1,*
- *svetlosnog tipa, ako je $g|_W$ degenerisana forma.*

Trivijalni nula potprostor je takođe po definiciji prostornog tipa.

Svaki potprostor Lorencovog vektorskog prostora može biti samo jednog tipa, tj. nije moguće konstruisati potprostor koji se ne može klasifikovati u pomenute tri grupe. Ovo je posledica činjenice da se kauzalni karakter vektora v poklapa sa kauzalnim karakterom potprostora kojeg generiše, da se u svakom k-dimenzionalnom potprostoru mogu definisati ortonormirani vektori $e_1, \dots, e_k$ koji ga generišu, kao i da broj baznih vektora tog potprostora za koji važi $\langle e_i, e_i \rangle = -1$ ostaje konstantan, za svaku bazu potprostora $e_1, \dots, e_k$ (videti Sylvesterovu teoremu, [11]).

Jedna značajna lema (iz [4]), koja se tiče ortogonalnih vektora (u smislu funkcionele g_p) i njihovog kauzalnog karaktera data je u nastavku (videti i [3]):

Lema 1.2.1 *Neka je dat vektor z vremenskog tipa, koji pripada Lorentcovom vektorskom prostoru V dimenzije n. Svaki vektor iz V ortogonalan na z je prostornog tipa. Tada je $z^\perp = \{v \in V | v \perp z\}$ unitarni vektorski prostor i važi:*

$$V = \operatorname{span}(z) \oplus z^\perp. \tag{1.2.1}$$

Dokaz.

Kako je z vektor vremenskog tipa, ne može važiti $z = \emptyset$, po definiciji, što znači da se z može normirati, te neka je $e_\emptyset = z/|\langle z, z \rangle|^{1/2}$. Kako je V Lorencov vektorski prostor dimenzije n, uvek je moguće konstruisati ortonormiranu bazu ovog prostora koja će sadržati vektor $e_\emptyset$, označenu ovde kao $\{e_\emptyset, e_1, \dots, e_{n-1}\}$. U ovoj bazi, u skladu sa ranijim razmatranjima, $e_\emptyset$ je jedini vektor vremenskog tipa, dok za ostale važi:

$$\langle e_i, e_i \rangle = +1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Ako je neki vektor v ortogonalan na z (time i na $e_\emptyset$), onda se on može zapisati i kao:

$$v = a_1 e_1 + \cdots + a_{n-1} e_{n-1}, \tag{1.2.2}$$

za neke koeficijente $a_i \in \mathbb{R}$, a odatle je i:

$$\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \langle e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \geq \emptyset, \tag{1.2.3}$$

takođe zbog ortonormiranosti baze.

Ako važi stroga nejednakost u (1.2.3), onda je v po definiciji prostornog tipa, a ukoliko važi jednakost, onda je $v \equiv 0$, ponovo po definiciji, prostornog tipa. Činjenica da se ovo odnosi na proizvoljni vektor $v \perp z$ implicira da su svi vektori u $z^{\perp}$ prostornog tipa, što znači da je $\langle , \rangle_{z^{\perp}}$ pozitivno (semi)definitna forma na $z^{\perp}$, čime je $z^{\perp}$ i unitarni prostor.

Drugi deo leme direktno sledi, jer je, na osnovu jednakosti (1.2.2), prostor $e_0^{\perp} \equiv z^{\perp}$ očigledno generisan vektorima $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$, a kako je $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ ortonormirana baza za V, sledi da je svaki vektor iz V moguće napisati kao linearnu kombinaciju vektora iz lineala $\mathrm{span}(z)$ i vektora iz $z^{\perp}$.

■

Mada se to posebno ne naglašava, primetno je da se ovde pod normiranim vektorima podrazumevaju oni za koje važi $\langle u, u \rangle = \pm 1$. Iz praktičnih razloga, takođe, u mnogim je situacijama korisno predstaviti vektore v kao vektorski zbir oblika $v = au + v_{\perp}$, gde je u jedinični vektor vremenskog tipa, vektor $v_{\perp} \in u^{\perp}$ prostornog tipa, i $a \in \mathbb{R}$. Tada se može zapisati $\langle v, v \rangle = \langle v_{\perp}, v_{\perp} \rangle - a^2$.

Može se takođe pokazati i opštije tvrđenje od gornje leme: ceo potprostor W je vremenskog tipa akko je $W^{\perp}$ prostornog tipa, ali kako je $(W^{\perp})^{\perp} = W$, važi i obrnuto. Odavde se može zaključiti da je W potprostor svetlosnog tipa akko je i $W^{\perp}$ svetlosnog tipa.

Potprostori vremenskog tipa često se pominju u teoriji kauzalnosti, te je korisno razmatrati kriterijume na osnovu kojih se može zaključiti da je neki potprostor zaista tog tipa. Međutim, pre nego što se prezentuje odgovarajući kriterijum, potrebno je, radi kompletnosti, pokazati i sledeći rezultat, u vidu leme. Ideja dokaza preuzeta je iz [2], a alternativni dokazi se mogu naći u [5] ili u [9].

Lema 1.2.2 *Za dva vektora u i v svetlosnog tipa u n-dimenzionalnom Lorencovom vektorskom prostoru V važi sledeća ekvivalencija:*

$$u, v \text{ su linearno zavisni vektori} \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0.$$

Dokaz.

Jedan smer dokaza je trivijalan, jer ako su u i v linearno zavisni vektori svetlosnog tipa, tj. $u = av$, gde je $a \in \mathbb{R}$, onda direktno važi:

$$\langle u, v \rangle = \langle u, au \rangle = 0,$$

jer je u vektor svetlosnog tipa.

Drugi smer se može pokazati ako se pretpostavi da su vektori u i v predstavljeni u obliku:

$$u = e_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i =: e_0 + u_E, \quad \text{i} \quad v = e_0 + \sum_{i=1}^{n-1} b_i e_i =: e_0 + v_E.$$

u bazi prostora $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ u kojoj je e_0 jedini vektor vremenskog tipa. Ovakva reprezentacija je moguća jer se skaliranjem (svih) komponenti ne menja karakter vektora, dok koeficijenti uz e_0 ne smeju biti nula, jer bi tada u i v bili vektori prostornog tipa.

Tada se jednakost $\langle u, v \rangle = \langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle = 0$ može još zapisati kao:

$$a_1 b_1 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} - 1 = a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2 - 1 = b_1^2 + \cdots + b_{n-1}^2 - 1 = 0,$$

ili, prebacivanjem jedinice na drugu stranu jednakosti:

$$a_1 b_1 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} = a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2 = b_1^2 + \cdots + b_{n-1}^2 = 1. \quad (1.2.4)$$

Međutim, ova jednakost posmatrana u kontekstu $(n-1)$-dimenzionalnog Rimanovog vektorskog prostora generisanog sa vektorima $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ ekvivalentna je izrazu:

$$\langle u_E, v_E \rangle_E = \langle u_E, u_E \rangle_E = \langle v_E, v_E \rangle_E = 1,$$

gde je sa $\langle , \rangle_E$ označen standardni skalarni proizvod u ovom prostoru. Odavde se može zaključiti da se Koši-Švarcova nejednakost Rimanovih vektorskih prostora svodi na jednakost:

$$\langle u_E, v_E \rangle_E = \langle u_E, u_E \rangle_E \cdot \langle v_E, v_E \rangle_E,$$

te na osnovu klasičnih teorema linearne algebre sledi da su vektori u_E i v_E kolinearni sa pozitivnom konstantom proporcionalnosti. Kako su im i norme jednake, prema (1.2.4), direktno sledi $u_E = v_E$, što znači da važi i $u = v$, te su ova dva vektora svetlosnog tipa zaista linearno zavisna.

■

Imajući ovaj rezultat na umu, sledeća teorema može poslužiti da se prepozna vektorski potprostor vremenskog tipa, na osnovu karaktera vektora koji joj pripadaju (videti [2], [3], [4]):

Teorema 1.2.1 *Neka je W potprostor dimenzije bar 2 Lorencovog vektorskog prostora V. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:*

i. W je potprostor vremenskog tipa, te time i Lorencov vektorski prostor;

ii. W sadrži dva linearno nezavisna vektora svetlosnog tipa;

iii. W sadrži vektor vremenskog tipa.

Dokaz.

i. $\Rightarrow$ *ii.* Neka vektori $e_0, e_1, \ldots, e_m$ čine ortonormiranu bazu potprostora W, pri čemu se bez gubitka opštosti može pretpostaviti da je vektor e_0 vektor vremenskog tipa (nužno jedini vektor tog tipa). Tada su, na primer, $e_0 + e_1$ i $e_0 - e_1$ linearno nezavisni vektori svetlosnog tipa, zato što je:

$$\begin{aligned}
\langle e_0 + e_1, e_0 + e_1 \rangle &= \langle e_0, e_0 \rangle + \langle e_1, e_1 \rangle = -1 + 1 = 0,\\
\langle e_0 - e_1, e_0 - e_1 \rangle &= \langle e_0, e_0 \rangle + \langle e_1, e_1 \rangle = -1 + 1 = 0,
\end{aligned}$$

gde linearna nezavisnost direktno sledi iz linearne nezavisnosti samih baznih vektora:

$$0 = a(e_0 + e_1) + b(e_0 - e_1) = (a+b)e_0 + (a-b)e_1 \quad \Leftrightarrow \quad a, b = 0.$$

ii. $\Rightarrow$ *iii.* Neka su u i v linearno nezavisni vektori svetlosnog tipa, koji pripadaju W. Prema prethodnoj lemi važi $\langle u, v \rangle \neq 0$, a odatle je tačno jedan od vektora $u + v$ ili $u - v$ vremenskog tipa:

$$\begin{aligned}
\langle u + v, u + v \rangle &= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = 2\langle u, v \rangle,\\
\langle u - v, u - v \rangle &= \langle u, u \rangle - 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = -2\langle u, v \rangle.
\end{aligned}$$

iii. $\Rightarrow$ *i.* Ako je v vektor vremenskog tipa u W, onda je, prema klasičnim rezultatima linearne algebre, $W^\perp \subset v^\perp$, pri čemu je $v^\perp$ potprostor prostornog tipa na osnovu Leme 1.2.1. Odatle sledi da je i $W^\perp$ prostornog tipa, te je i $W = (W^\perp)^\perp$ potprostor vremenskog tipa.

■

1.3 Svetlosni konus

Ako se sa Λ označi skup svih vektora svetlosnog tipa u T_pM, tzv. *svetlosni konus*, može se pokazati da:

Lema 1.3.1 ([3]) *Za potprostor W Lorencovog vektorskog prostora V sledeći iskazi su ekvivalentni:*

i. W je potprostor svetlosnog tipa;

ii. W sadrži vektor svetlosnog tipa, ali ne i vektor vremenskog tipa;

iii. $W \cap \Lambda = L \backslash \{0\}$, gde je Λ svetlosni konus, a L jednodimenzionalni potprostor vektorskog prostora V.

Dokaz.

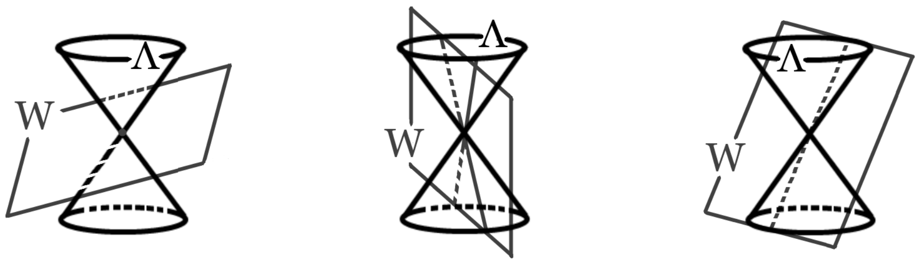
i. $\Rightarrow$ *ii.* Budući da je W svetlosnog tipa, to jest, da je $g|_W$ degenerisana forma na W, mora postojati vektor svetlosnog tipa u W. Sa druge strane, zbog toga što W nije prostor vremenskog tipa, prema Teoremi 1.2.1, W ne može imati vektor vremenskog tipa.

ii. $\Rightarrow$ *iii.* W sadrži vektor svetlosnog tipa, te je očigledno $W \cap \Lambda$ neprazno. Međutim, ako bi se u W nalazila dva linearno nezavisna vektora svetlosnog tipa, onda bi, prema Teoremi 1.2.1, važilo da W sadrži i vektor vremenskog tipa. Dakle, ako je $w \in W$ vektor svetlosnog tipa, onda je $L = \text{span}(w)$, a budući da je nula vektor po definiciji prostornog tipa, važi i $W \cap \Lambda = \text{span}(w) \backslash \{0\}$.

iii. $\Rightarrow$ *i.* W očigledno ne može biti prostornog tipa, ali, prema prethodnoj Teoremi, ne može biti ni vremenskog tipa. Kao potprostor Lorencovog vektorskog prostora, dakle, W mora biti svetlosnog tipa.

■

Svetlosni konusi se nazivaju konusima prvenstveno zbog toga što u trodimenzionalnim Lorencovim vektorskim prostorima za svaki vektor oblika $v = (x_0, x_1, x_2)$ iz T_pM važi da je svetlosnog tipa akko je ispunjeno $\langle v, v \rangle = 0$, odnosno $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, što predstavlja analitički opis beskonačnog konusa u $\mathbb{R}^3$ (analogno za $\mathbb{R}^n$). Na Slici 1.1 prikazani su međusobni odnosi svetlosnih konusa i potprostora različitih kauzalnih karaktera.



(a) W je prostornog tipa. (b) W je vremenskog tipa. (c) W je svetlosnog tipa.

Slika 1.1: Potprostori W Lorencovih vektorskih prostora i svetlosni konusi Λ.

Svaki svetlosni konus moguće je posmatrati kao uniju dva međusobno disjunktna skupa, koja će se u nastavku obeležavati kao Λ^+ i Λ^-. U principu, njihovoj konstrukciji se pristupa tako što se fiksira normirani vektor u vremenskog tipa, te ovi skupovi definišu kao:

$$\Lambda^+(u) := \{v \in V \,|\, \langle v, v \rangle = 0 \ \wedge (\exists a > 0)(\exists v_\perp \in u^\perp)\ v = au + v_\perp\},$$
$$\Lambda^-(u) := \{v \in V \,|\, \langle v, v \rangle = 0 \ \wedge (\exists a < 0)(\exists v_\perp \in u^\perp)\ v = au + v_\perp\}.$$

Međutim, valja napomenuti da, iako to notacija možda sugeriše, ukoliko se posmatraju svetlosni konusi svakog tangentnog prostora T_pM, ne postoji aprioran i invarijantan način odabira vektora u na osnovu kojih bi se skupovi $\Lambda^+(u)$ i $\Lambda^-(u)$ razlikovali, a ne mora ni postojati glatko vektorsko polje, koje svakoj tački na mnogostrukosti dodeljuje vektor vremenskog tipa na osnovu kojeg se generišu $\Lambda^+(u)$ (videti [6]).

Ipak, radi kraćeg zapisa, u nastavku se neće posebno naglašavati uloga vektora u, te će se ovi skupovi obeležavati samo kao Λ^+ i Λ^-. Imajući prethodno na umu, sledeće leme ispituju njihov međusoban odnos, kao i njihov odnos sa ambijentalnim prostorom.

Lema 1.3.2 ([2]) *Svetlosni konus n-dimenzionalnog Lorencovog vektorskog prostora V sastoji se od dve komponente Λ^+ i Λ^-, pri čemu važi sledeća jednakost:*

$$\Lambda^- = \Lambda^-(u) = \Lambda^+(-u) = -\Lambda^+. \tag{1.3.1}$$

Dokaz.

Ova dva skupa su, najpre, očigledno disjunktna po definiciji. Neka je u jedinični vektor vremenskog tipa u V, i neka je v vektor svetlosnog tipa iz $\Lambda^-(u)$. Prema definiciji ovog skupa, mora važiti:

$$(\exists a < 0)(\exists v_\perp \in u^\perp) \quad v = au + v_\perp.$$

Međutim, to znači da takođe važi i:

$$(\exists a < 0)(\exists v_\perp \in u^\perp) \quad v = (-a)(-u) + v_\perp.$$

Ako se sada primeti da je svaki vektor ortogonalan na u istovremeno ortogonalan i na $-u$, nije teško utvrditi jednakosti prostora $u^\perp$ i $(-u)^\perp$. Uvođenjem konstante $b := -a > 0$, može se zapisati:

$$(\exists b > 0)(\exists v_\perp \in (-u)^\perp) \quad v = b(-u) + v_\perp,$$

što znači da je $v \in \Lambda^+(-u)$. Time je dokaz završen.

■

Od značaja je i pomenuti da, pod uslovima gornje leme, kako je v vektor svetlosnog tipa, važi i jednakost:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v, v\rangle = \langle au + v_\perp, au + v_\perp\rangle \\ &= a^2\langle u, u\rangle + 2a\langle u, v_\perp\rangle + \langle v_\perp, v_\perp\rangle \\ &= -a^2 + \langle v_\perp, v_\perp\rangle, \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

odnosno, prebacivanjem člana a^2 na levu stranu jednakosti, $\langle v_\perp, v_\perp\rangle = a^2$.

Lema 1.3.3 ([3]) *Svaka komponenta svetlosnog konusa n-dimenzionog Lorencovog vektorskog prostora V difeomorfna je prostoru $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-2}$, gde je $\mathbb{S}^{n-2}$ jedinična sfera u unitarnom prostoru $\mathbb{R}^{n-1}$.*

Dokaz.

Najpre se fiksira jedinični vektor u vremenskog tipa i posmatra skup Λ^+, kao i u prethodnoj lemi. Proizvoljni vektor v svetlosnog tipa tada se može zapisati kao $v = au + v_\perp$, za $v_\perp \in u^\perp$ i $a > 0$.

U skladu sa gornjim razmatranjima (1.3.2), vektor v pripada svetlosnom konusu akko je $\langle v_\perp, v_\perp\rangle = a^2$, što opet implicira da je $v_\perp/a$ normiran vektor (prostornog tipa). Odavde se može doći do ideje za konstrukciju preslikavanja $\varphi : V \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-2}$ i njene inverzne funkcije:

$$\begin{cases} \varphi(v) = \varphi(au + v_\perp) = (a, v_\perp/a), \\ \varphi^{-1}(r, s) = r \cdot (u + s). \end{cases}$$

Ovo preslikavanje zaista je bijektivno i dobro definisano:

$$\varphi^{-1}(\varphi(v)) = \varphi^{-1}\left(a, \frac{v_\perp}{a}\right) = a\left(u + \frac{v_\perp}{a}\right) = au + v_\perp = v,$$
$$\varphi(\varphi^{-1}(r, s)) = \varphi(r(u + s)) = \varphi(ru + rs) = \left(r, \frac{rs}{r}\right) = (r, s),$$

dok se činjenica da je φ difeomofizam dokazuje uz pomoć složenijih argumenta, koji ovde neće biti pokazani. Zainteresovani mogu naći više o ovome u [5].

■

1.4 Vremenski konusi

Na analogan način kao u slučaju svetlosnog konusa, može se definisati skup $\mathcal{T}$ kao skup svih vektora vremenskog tipa u Lorencovom vektorskom prostoru V. Pritom, za svako $u \in \mathcal{T}$ se može definisati skup:

$$T^+(u) := \{v \in \mathcal{T} | \langle u, v \rangle < 0\},$$

koji se naziva *vremenskim konusom* vektorskog prostora V, *koji sadrži vektor* u. Takođe, u literature se često pominje i *suprotan* vremenski konus, dat sa:

$$T^-(u) := \{v \in \mathcal{T} | \langle u, v \rangle > 0\}.$$

Nužno je napomenuti još da, analogno kao kod skupova $\Lambda^+(u)$ i $\Lambda^-(u)$, i ovde važi jednakost:

$$T^-(u) = T^+(-u) \quad \text{odnosno:} \quad T^- = -T^+,$$

ako se ne naglašava uloga vektora u u generisanju ovih skupova. Gornje jednakosti slede na osnovu samih definicija.

Uz to, budući da je $T^+(u/|\langle u, u \rangle|^{1/2}) = T^+(u)$, često je opravdano smatrati da su vektori vremenskog tipa koji generišu konus normirani. Takođe, kako $u \in \mathcal{T}$, sledi da je $u^\perp$ potprostor prostornog tipa, te je otuda $\mathcal{T}$ disjunktna unija ova dva vremenska konusa T^+ i T^-.

U nastavku se ispituje na koji način se utvrđuje da li dva vektora vremenskog tipa pripadaju istom vremenskom konusu:

Lema 1.4.1 ([2], [3]) *Neka su data dva vektora v i w vremenskog tipa iz Lorencovog vektorskog prostora V. Tada se ova dva vektora nalaze u istom vremenskom konusu akko važi $\langle v, w \rangle < 0$.*

Dokaz.

Pretpostavimo da je dat normiran vektor vremenskog tipa $u \in V$ i vektori $v, w \in V$ vremenskog tipa, pri čemu je $v \in T^+(u)$. Tada se vektori v i w mogu zapisati u obliku vektorskog zbira:

$$\begin{aligned} v &= a_v\, u + v_\perp \\ w &= a_w\, u + w_\perp, \end{aligned}$$

gde su $a_v, a_w \in \mathbb{R}$ i $v_\perp, w_\perp \in u^\perp$. Vektori v i w su vremenskog tipa, te se izrazi $\langle v, v \rangle < 0$ i $\langle w, w \rangle < 0$ svode na $|a_v| > |\langle v_\perp, v_\perp \rangle|^{1/2}$ i $|a_w| > |\langle w_\perp, w_\perp \rangle|^{1/2}$. Pritom, jasno je da je:

$$\langle v, w \rangle = -a_v\, a_w + \langle v_\perp, w_\perp \rangle, \tag{1.4.1}$$

te, kako $v_\perp$ i $w_\perp$ pripadaju potprostoru prostornog tipa, to jest unitarnom, Rimanovom prostoru, prema odgovarajućoj Švarcovoj nejednakosti važi:

$$|\langle v_\perp, w_\perp \rangle| \leq |\langle v_\perp, v_\perp \rangle|^{1/2} \cdot |\langle w_\perp, w_\perp \rangle|^{1/2} < |a_v\, a_w|. \tag{1.4.2}$$

Prema (1.4.1) i (1.4.2), znak $\langle v, w \rangle$ zavisi od znaka izraza $a_v\, a_w$. Međutim, budući da je, po pretpostavci, $v \in T^+(u)$, mora važiti $a_v > 0$, što znači da je znak izraza $\langle v, w \rangle$ dat sa:

$$\operatorname{sgn}(\langle v, w \rangle) = \operatorname{sgn}(-a_v\, a_w) = \operatorname{sgn}(-a_w) = -\operatorname{sgn}(a_w),$$

što opet uzima strogo negativne vrednosti akko je $a_w > 0$, tj. akko je i $w \in T^+(u)$.

■

Primetimo da gornja lema sugeriše sledeće ekvivalencije:

$$u \in T^{+}(v) \quad \Leftrightarrow \quad v \in T^{+}(u) \quad \Leftrightarrow \quad T^{+}(u) \equiv T^{+}(v).$$

Ovi konusi su i konveksni, zato što važi da ako $v, w \in T^{+}(u)$, onda na osnovu njihove pripadnosti istom vremenskom konusu za $\beta \in [0, 1]$ važi:

$$\langle \beta v + (1-\beta)w, \beta v + (1-\beta)w \rangle = \beta^2 \langle v, v \rangle + 2\beta(1-\beta)\langle v, w \rangle + (1-\beta)^2 \langle w, w \rangle < 0,$$

jer se sabiraju tri negativne vrednosti, što znači da konveksna kombinacija dvaju vektora iz $T^{+}(u)$ pripada $T^{+}(u)$. Analogno važi i za $T^{-}(u)$.

Veza između vremenskih i svetlosnih konusa može se koncizno izraziti putem sledeće teoreme, čiji dokaz je delimično preuzet iz [4]:

Teorema 1.4.1 *Skup $\mathcal{T}$ čine dve komponente T^{+} i T^{-}, koji su konveksni, otvoreni skupovi. Uz konzistentan odabir znakova $\pm$, važe jednakosti:*

$$\begin{cases} \partial T^{+} = \Lambda^{+} \cup \{0\}, \\ \partial T^{-} = \Lambda^{-} \cup \{0\}, \end{cases} \qquad \textit{odnosno:} \qquad \begin{cases} \partial T^{+}(u) = \Lambda^{+}(u) \cup \{0\}, \\ \partial T^{-}(u) = \Lambda^{-}(u) \cup \{0\}, \end{cases}$$

za fiksirani jedinični vektor u vremenskog tipa.

Dokaz.

Za zadati jedinični vektor u vremenskog tipa, svaki vektor $v \in V$ se može zapisati kao zbir $v = au + v_{\perp}$, za neko $v_{\perp} \in u^{\perp}$, pri čemu je taj vektor vremenskog tipa akko je $a^2 > \|v_{\perp}\|^2$. Na osnovu ekvivalencije:

$$\langle u, v \rangle = \langle u, au + v_{\perp} \rangle = a\langle u, u \rangle < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > 0,$$

jasno je da skup $T^{+}(u)$ sadrži one $v \in \mathcal{T}$ za koje je $a > 0$, a skup $T^{-}(u)$ one $v \in \mathcal{T}$ za koje je $a < 0$, te se $\mathcal{T}$ zaista sastoji od ova vremenskog konusa koji sadrži u i njemu suprotnog konusa. Konveksnost skupova je već pokazana, a otvorenost direktno sledi na osnovu jednakosti:

$$\begin{cases} T^{+}(u) = \{v \in \mathcal{T} | \langle u, v \rangle < 0\}, \\ T^{-}(u) = T^{+}(-u). \end{cases}$$

Dalje, da je, na primer, $\partial T^{+}(u) = \Lambda^{+}(u) \cup \{0\}$, lako se pokazuje, zato što je zbog osobine otvorenosti $\operatorname{int}(T^{+}(u)) = T^{+}(u)$, te se unutrašnjost i adherencija skupa T^{+} mogu zapisati kao:

$$\begin{cases} \operatorname{int}(T^{+}(u)) = \{v \in V | (\exists a > 0)(\exists v_{\perp} \in u^{\perp})\ v = au + v_{\perp}\ \wedge \langle v_{\perp}, v_{\perp} \rangle < a^2\}, \\ \operatorname{cl}(T^{+}(u)) = \{0\} \cup \{v \in V | (\exists a > 0)(\exists v_{\perp} \in u^{\perp})\ v = au + v_{\perp}\ \wedge \langle v_{\perp}, v_{\perp} \rangle \leq a^2\}. \end{cases}$$

Zato je rub $\partial T^{+}(u) = \operatorname{cl}(T^{+}(u)) \backslash \operatorname{int}(T^{+}(u))$ dat sa:

$$\partial T^{+}(u) = \{0\} \cup \{v \in V | (\exists a > 0)(\exists v_{\perp} \in u^{\perp})\ v = au + v_{\perp}\ \wedge \langle v_{\perp}, v_{\perp} \rangle = a^2\},$$

što, na osnovu (1.3.2) znači da je $\partial T^{+}(u) = \Lambda^{+}(u) \cup \{0\}$.

Potpuno analogno se pokazuje i deo teoreme za $\partial T^{-}(u)$.

■

1.5 Obrnute nejednakosti Lorencovih vektorskih prostora

Pojam vremenskog konusa često se dovodi u vezu sa *obrnutom Švarcovom nejednakošću*, ali i sa *obrnutom nejednakošću trougla*, koje se izlažu u nastavku i koje se, zanimljivo, mogu dovesti u vezu sa paradoksom blizanaca iz specijalne teorije relativnosti. Radi lakšeg zapisa, izraz $|\langle v, v\rangle|^{1/2}$ će se obeležavati sa $\|v\|$, za proizvoljan vektor v iz Lorencovog vektorskog prostora, bez opasnosti od zabune.

Teorema 1.5.1 (Obrnuta Švarcova nejednakost, [2], [3]) *Neka su v i w vektori vremenskog tipa iz Lorencovog vektorskog prostora V. Tada važi:*

i. $|\langle v, w\rangle| \geq \|v\|\|w\|$, *pri čemu jednakost važi akko je* $w = \beta v, \beta \in \mathbb{R}$;

ii. Ako se v i w nalaze u istom vremenskom konusu, tada postoji jedinstvena nenegativna konstanta φ, koja se naziva hiperbolični ugao *između v i w, za koju važi:*

$$\langle v, w\rangle = -\|v\|\|w\| \cosh \varphi.$$

Dokaz.

i. Neka je $w = av + w_\perp$, za neko $w_\perp \in v^\perp$. Otuda trivijalno sledi da je:

$$\langle w, w\rangle = a^2\langle v, v\rangle + \langle w_\perp, w_\perp\rangle,$$

odakle važi i sledeća relacija:

$$\langle v, w\rangle^2 = a^2\langle v, v\rangle^2 = a^2\langle v, v\rangle \cdot \langle v, v\rangle = [\langle w, w\rangle - \langle w_\perp, w_\perp\rangle]\,\langle v, v\rangle.$$

Po definiciji svojih kauzalnih karaktera, važi da je $\langle w_\perp, w_\perp\rangle \geq 0$ i $\langle w, w\rangle < 0$, te je zato:

$$\langle w, w\rangle - \langle w_\perp, w_\perp\rangle \leq \langle w, w\rangle,$$
$$[\langle w, w\rangle - \langle w_\perp, w_\perp\rangle]\,\langle v, v\rangle \geq \langle w, w\rangle\langle v, v\rangle,$$

jer je v vremenskog tipa. Zato konačno važi tražena nejednakost:

$$\langle v, w\rangle^2 \geq \langle w, w\rangle\langle v, v\rangle = \|w\|^2\|v\|^2.$$

Jednakost očigledno važi akko je $\langle w_\perp, w_\perp\rangle = 0$, tj. $w_\perp \equiv 0$, što je ekvivalentno sa $w = \beta v, \beta \in \mathbb{R}$.

ii. Ako su v i w u istom vremenskom konusu, onda mora važiti $\langle v, w\rangle < 0$, pa je:

$$\frac{\langle v, w\rangle}{-\|v\|\|w\|} \geq 1,$$

što znači da se takav član može predstaviti kao hiperbolični kosinus nekog ugla φ. Generalno se uvek bira da je $\varphi \geq 0$, što garantuje jedinstvenost prikaza.

∎

Na osnovu rezultata ove teoreme, lako se dokazuje i sledeći korolar, takozvana *obrnuta nejednakost trougla* (videti [2], [3], [4], [9]).

Korolar 1.5.1 (Obrnuta nejednakost trougla) *Ako su v i w vektori vremenskog tipa i nalaze se u istom vremenskom konusu, onda važi:*

$$\|v + w\| \geq \|v\| + \|w\|, \tag{1.5.1}$$

pri čemu jednakost važi akko su v i w kolinearni.

Dokaz.

Budući da je prema prethodnoj teoremi $\langle v, w \rangle < 0$, obrnuta Švarcova nejednakost daje:

$$\|v\|\|w\| \leq |\langle v, w \rangle| = -\langle v, w \rangle.$$

Kako su vektori v i w vremenskog tipa, važi sledeća nejednakost:

$$\begin{aligned} (\|v\| + \|w\|)^2 = \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \ \leq \ \|v\|^2 - 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 = \\ = -\langle v, v \rangle - 2\langle v, w \rangle - \langle w, w \rangle = -\langle v + w, v + w \rangle = \\ = |\langle v + w, v + w \rangle| = \|v + w\|^2. \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Jednakost u (1.5.2) će važiti akko je $\|v\|\|w\| = -\langle v, w \rangle = |\langle v, w \rangle|$, tj. ako se i Koši-Švarcova nejednakost svodi na jednakost, što je prema prethodnoj teoremi ispunjeno akko su v i w kolinearni.

■

Ove obrnute nejednakosti, mada ne u potpunosti u skladu sa intuicijom stečenog sa radom iz unitarnih prostora, veoma su značajne u Lorencovoj geometriji i njenim primenama u teoriji relativnosti.

1.6 Vremenski-orijentabilne Lorencove mnogostrukosti

Na osnovu svega dosad rečenog, na svakom tangentnom prostoru mogu se definisati po dva vremenska konusa, te na proizvoljan način obeležiti jedan od njih sa T^+, a drugi sa T^-. Činjenica da, ako je u vektor vremenskog tipa, onda mora biti da je i $-u$ istog tipa, potkrepljuje ovu arbitrarnost obeležavanja.

Međutim, u svetlu fizičkog aspekta priče, često je potrebno na jedinstven način odabrati koji vremenski konus će biti takozvani *vremenski konus budućnosti*, a koji *vremenski konus prošlosti*. Drugim rečima, često je nužno naći glatku funkciju na osnovu koje je moguće birati vremenski konus budućnosti u svakom tangentnom prostoru. Ovo vodi do pojmova *vektorskih polja vremenskog tipa* i *vremenske orijentabilnosti*.

Definicija 1.6.1 *Vektorsko polje X definisano na Lorencovoj mnogostrukosti M je vremenskog tipa ako je vektor $X(p) \equiv X_p$ vremenskog tipa za svako $p \in M$.*

Definicija 1.6.2 *Lorencova mnogostrukost M se naziva vremenski orijentabilnom ukoliko postoji glatko vektorsko polje X na M vremenskog tipa. Vremenska orijentacija mnogostrukosti M tada predstavlja izbor vremenskog konusa $T^+(p) \subset T_pM$ za svako $p \in M$ za koje je $X_p \in T^+(p)$.*

Nije teško uvideti da se u ovom kontekstu pojam vremenskog konusa $T^+(p)$ vezuje za tačno određen vektor $X_p \in T_pM$ vremenskog tipa koji mu pripada, ali se zbog konciznosti koristi oznaka $T^+(p)$ umesto $T^+(X_p)$.

Definicija 1.6.3 *Skup $T^+(p)$ naziva se* pozitivnim vremenskim konusom, budućim vremenskim konusom *ili* vremenskim konusom budućnosti *u tački p. Vektori vremenskog tipa koji pripadaju ovom konusu nazivaju se* buduće usmerenim *vektorima.*

Skup $T^-(p)$ naziva se negativnim vremenskim konusom, prošlim vremenskim konusom *ili* vremenskim konusom prošlosti *u tački p. Vektori vremenskog tipa koji pripadaju ovom konusu nazivaju se* prošlo usmerenim *vektorima.*

Ovde je data definicija *buduće usmerenog* i *prošlo usmerenog* vektora svetlosnog tipa:

Definicija 1.6.4 *Neka je M vremenski orijentabilna Lorencova mnogostrukost. Vektor $v \in T_pM$ svetlosnog tipa naziva se* buduće usmerenim *vektorom svetlosnog tipa ako postoji niz buduće usmerenih vektora vremenskog tipa čija je on granica. Analogno se definišu i* prošlo usmereni *vektori svetlosnog tipa, te se kaže da je svetlosni konus u T_pM particionisan na* svetlosni konus budućnosti *i* svetlosni konus prošlosti.

Na osnovu gornjih definicija može se govoriti o globalnosti vremenske orijentabilnosti, zato što je potrebno napraviti odabir vremenskog konusa budućnosti u svakom tangentnom prostoru, te ovaj odabir učiniti glatko. Međutim, ako se uvedu oznake kao u nastavku, sledeća teorema pokazuje da se uslov glatkosti može opisati uz pomoć lokalnih vektorskih polja.

Definicija 1.6.5 *Neka je τ funkcija na M koja svakoj tački $p \in M$ dodeljuje tačno jedan vremenski konus $T^+(p) \in T_pM$. Funkcija τ se naziva glatkom ako za svako $p \in M$ postoji glatko vektorsko polje X definisano na okolini $\mathcal{U}$ te tačke, takvo da vektor $X_q \in T^+(q)$, za svako $q \in \mathcal{U}$.*

Imajući u vidu ove oznake, nije teško zaključiti da je vremenska orijentabilnost mnogostrukosti M implicira da je moguće definisati na njoj glatku funkciju $\tau : M \ni p \mapsto T^+(p) \in T_pM$. Funkcija τ tada vrši odabir vremenskih konusa budućnosti, te se naziva *vremenskom orijentacijom* mnogostrukosti M. Obrnuto važi na osnovu leme u nastavku:

Lema 1.6.1 ([3]) *Neka je data glatka Lorencova mnogostrukost M na kojoj je moguće vršiti odabir konusa $T^+(p)$ iz T_pM tako da u okolini svake tačke postoji lokalno definisano glatko vektorsko polje čije vrednosti u p pripadaju odgovarajućim konusima $T^+(p)$. Tada je M vremenski orijentabilna.*

Dokaz.

Neka je dat pokrivač mnogostrukosti M, označen kao $\{\mathcal{U}_\alpha \,|\alpha \in A\}$, gde je A neki indeksni skup, i neka je, prema uslovima leme, na svakom elementu pokrivača dato lokalno definisano glatko vektorsko polje X_α čija slika $X_\alpha(p)$ u tački p pripada vremenskom konusu $T^+(p)$.

Na osnovu poznatog rezultata iz diferencijalne geometrije, za svaki otvoreni pokrivač $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ glatke mnogostrukosti M postoji glatka particija jedinice $\{\chi_j | j \in \mathbb{N}\}$ koja odgovara ovom pokrivaču, što znači da ove funkcije χ_j zadovoljavaju uslove:

- Skup $\{\mathrm{supp}(\chi_\alpha) \,|\alpha \in A\}$ je lokalno konačan,
- Za svako $\alpha \in A$ postoji element $\mathcal{U}_\alpha$ iz pokrivača takav da je $\mathrm{supp}(\chi_\alpha) \subset \mathcal{U}_\alpha$,
- Za svako $p \in M$ važi:
$$\sum_{\alpha \in A} \chi_\alpha(p) = 1.$$

Funkcionele χ_α uzimaju nenegativne vrednosti, te sledi da je:

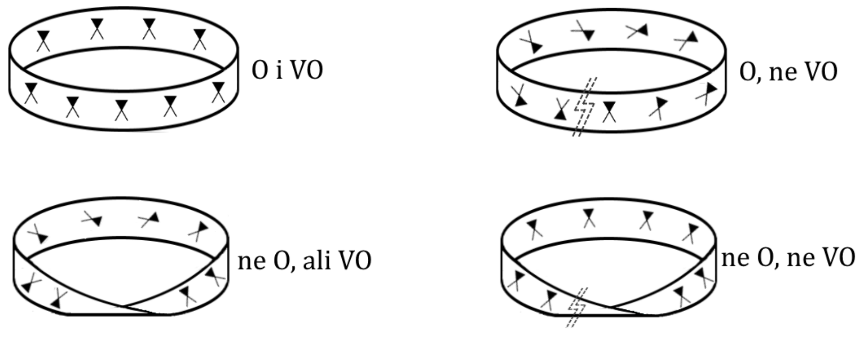
$$X = \sum_{\alpha \in A} \chi_\alpha X_\alpha$$

glatko vektorsko polje čije vrednosti u p pripadaju odgovarajućim konusima $T^+(p)$, te je time i vremenskog tipa. To po definiciji znači da je M vremenski orijentabilna.

■

Alternativan dokaz prethodne teoreme može se naći i u [6], više o klasama orijentabilnosti na Lorencovim mnogostrukostima u [8], a više o testiranju vremenskoj orijentabilnosti prostor-vremena u [13].

Moguće je takođe primetiti da orijentabilnost Lorencove mnogostrukosti ne zavisi od njene vremenske orijentabilnosti (videti [10]), kao što se može videti na slici dole. Tu konusi zapravo predstavljaju vremenske konuse, a, po konvenciji, zatamljena polovina konusa predstavlja $T^{+}(p)$:



Slika 1.2: Nezavisnost orijentabilnosti Lorencove mnogostrukosti od vremenske orijentabilnosti:
O - orijentabilno, VO = vremenski orijentabilno.

Treba ovde posebno napomenuti da je vremenska orijentabilnost bitan koncept u teoriji gravitacije, zato što se u njoj prostor, vreme i gravitacija posmatraju kao aspekti takozvanog *prostor-vremena*, koja se modelira sa četvorodimenzionalnom Lorencovom mnogostrukošću ([5]):

Definicija 1.6.6 Prostor-vreme *je povezana i vremenski orijentabilna Lorencova mnogostrukost.*

Iako se to eksplicitno vrlo retko naglašava, treba ovde istaknuti da se podrazumeva da je Lorencova mnogostrukost iz definicije realna, Hauzdorfova, konačno-dimenzionalna i parakompaktna (ali ne nužno i glatka) mnogostrukost.

U pojedinim izvorima (na primer, u [4]) se *prostor-vremenom* još naziva povezana i vremenski orijentabilna Lorencova mnogostrukost dimenzije 4, zato što se u teoriji gravitacije često radi sa četvorodimenzionalnim prostorima. Ipak, u ovom radu će se posebno naglašavati dimenzija prostor-vremena, gde je to neophodno.

U gornjoj definiciji pretpostavka vremenske orijentabilnosti intuitivno služi kako bi se naznačilo da je moguće analizirati kauzalni poredak dvaju događaja, uzroka i posledice. Ovo nije previše restriktivan uslov, zato što je pokazano (videti dokaz u [15] ili pregled rezultata u [8] i [14]) da ako prostor-vreme (M, g) nije vremenski orijentabilno, njen dvostruki pokrivač $(\tilde{M}, g)$ jeste. Preciznije:

Teorema 1.6.1 ([8]) *Neka je $\tilde{M}$ dvostruki pokrivač prostor-vremena M, tj. neka je $\tilde{M}$ skup svih parova (p, o), gde je $p \in M$, o jedno od dve vremenske orijentacije u p i odgovarajuće projektivno preslikavanje $\pi : \tilde{M} \mapsto M$ dato sa $\pi(p, o) = p$.*

Tada važi da ukoliko je $\tilde{M}$ disjunktna unija dva neprazna skupa, mora važiti i da je (M, g) vremenski orijentabilno prostor-vreme. Ako je $\tilde{M}$ povezano, tada (M, g) nije vremenski orijentabilno, ali $(\tilde{M}, g)$ jeste.

■

Stoga se do mnogih zaključaka koji zavise od vremenske orijentabilnosti može doći i u slučaju prostor-vremena koja nisu vremenski-orijentabilna, budući da se odgovarajuće teoreme mogu primeniti na njihovim dvostrukim pokrivačima ([14]). U nastavku će zato biti najviše reči o prostor-vremenima.

Glava 2

Kauzalnost na Lorencovim mnogostrukostima

Teorija kauzalnosti posmatra svojevrsnu osobinu povezanosti datih tačaka na prostor-vremenu, ispitujući posledice i mogućnosti konstruisanja krive vremenskog (kauzalnog) tipa između njih. Fizički, svaka tačka na mnogostrukosti predstavlja *događaj*, a svaka kriva vremenskog (kauzalnog) tipa između tačaka pokazuje da je ova dva događaja moguće dovesti u uzročno-posledičnu vezu. Zahvaljujući ovim pojmovima i kauzalnim relacijama, moguće je probleme istovremenosti, uzroka i posledice opisati matematički i analizirati topološki.

Glavni matematički aparat ove glave razvili su Rodžer Penrouz i Stiven Hoking, kako bi razumeli razlog zbog kojeg čak i neki od najjednostavnijih modela u teoriji relativnosti impliciraju postojanje singulariteta. U ovoj glavi će se prezentovati matematika teorije kauzalnosti, i biće reči o osobinama koje čine određeno prostor-vreme dobrim kandidatom za modeliranje fizički realističnog prostor-vremena. Ovde, i u nastavku, M će označavati povezanu, vremenski orijentisanu Lorencovu mnogostrukost dimenzije n.

2.1 Relacije kauzalnosti

Kao što se za svaki vektor iz tangentnog prostora T_pM može odrediti kauzalni karakter, tako se i za svaku glatku krivu $\gamma : I \mapsto M$, gde je I nedegenerisani interval (povezan, netrivijalan skup), a M povezana Lorencova mnogostrukost, može uraditi isto. Naime:

Definicija 2.1.1 *Glatka kriva $\gamma : I \mapsto M$ na povezanoj Lorencovoj mnogostrukosti M je vremenskog, svetlosnog ili prostornog tipa ako su svi njeni tangentni vektori redom vremenskog, svetlosnog ili prostornog tipa. Kauzalne krive (tj. krive kauzalnog tipa) čine sve krive vremenskog ili svetlosnog tipa.*

U kontekstu teorije gravitacije, često se u definiciji dodatno zahteva da krive na mnogostrukosti budu takođe i regularne, kako zatvorene kauzalne krive ne bi bile dobro definisane na svim prostor-vremenima (videti u nastavku ili u [12]).

Ako se dodatno pretpostavi da je M vremenski orijentabilna (dakle, prostor-vreme), glatke kauzalne krive na M mogu se dodatno kategorizovati kao *buduće usmerene* i *prošlo usmerene* krive:

Definicija 2.1.2 *Glatka kriva vremenskog ili svetlosnog tipa na prostor-vremenu M naziva se* buduće usmerena *(resp.* prošlo usmerena*) kriva, ukoliko za svaku tačku na njoj važi da je odgovarajući tangentni vektor buduće usmeren (resp. prošlo usmeren) vektor.*

Sada se mogu definisati relacije kauzalnosti na prostor-vremenu M (videti sliku u nastavku):

Definicija 2.1.3 *Ako tačke $p, q \in M$, gde je M prostor-vreme (proizvoljne dimenzije), onda:*

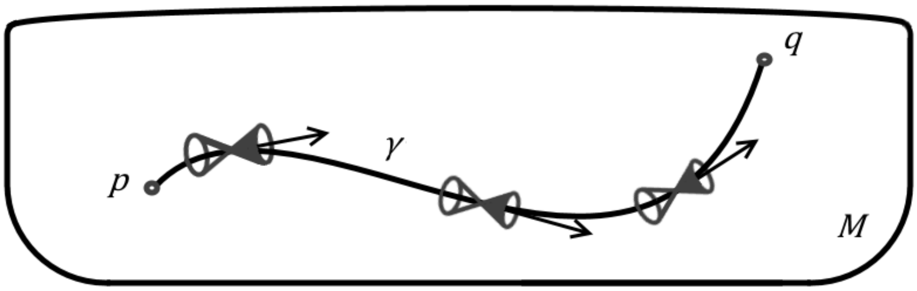
i. *$p \ll q$ označava da postoji buduće usmerena kriva vremenskog tipa na M između tačaka p i q. Tada se kaže da p* hronološki prethodi *q;*

ii. *$p < q$ označava da postoji buduće usmerena kriva kauzalnog tipa na M između tačaka p i q. Tada se kaže da p* kauzalno prethodi *q.*

Na osnovu definicije krive kauzalnog tipa očigledno sledi implikacija $(p \ll q) \Rightarrow (p < q)$. Takođe se može se uvesti relacija $\leqslant$ definisana preko sledeće ekvivalencije:

$$(p \leqslant q) \quad \Leftrightarrow \quad (p < q) \vee (p = q),$$

gde jednakost označava da se radi o istoj tački. Ove tri relacije nazivaju se *relacijama kauzalnosti,* sve su tranzitivne ([18]), dok refleksivnost važi samo na prostor-vremenima sa zatvorenim krivama vremenskog ili kauzalnog tipa ([14]).



Slika 2.1: Postoji buduće usmerena kriva vremenskog tipa na M između tačaka p i q.

Sledeće dve teoreme (videti dokaze u [9]) detaljnije ispituju na koji način se relacije $<$ i $\ll$ mogu definisati jedna uz pomoć druge:

Teorema 2.1.1 *Za zadate tačke p i q na prostor-vremenu M važi ekvivalencija:*

$$p < q \quad \text{ako i samo ako} \begin{cases} \text{ne važi } p \ll q \text{ i} \\ q \ll r \text{ implicira } p \ll r. \end{cases}$$

■

Teorema 2.1.2 *Za zadate tačke p i q na prostor-vremenu M važi ekvivalencija:*

$$p \ll q \quad \text{ako i samo ako} \begin{cases} \text{ne važi } p < q \text{ i} \\ p < r < q \text{ za neko } r \in M. \end{cases}$$

■

Zahvaljujući relacijama kauzalnosti, za svaku tačku $p \in M$ mogu se dodatno definisati skupovi:

$$\begin{cases} I^+(p) := \{q \in M \mid p \ll q\}, \\ I^-(p) := \{q \in M \mid q \ll p\}. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Skupovi $I^+(p)$ i $I^-(p)$ nazivaju se redom *hronološka budućnost* i *hronološka prošlost* tačke p, i predstavljaju redom skup svih tačaka koje se mogu povezati sa p putem buduće i prošlo usmerenih krivih vremenskog tipa u M (videti Sliku 2.1).

Ako se tačka p posmatra kao jednočlani skup $\{p\} \subset M$, gornje definicije se mogu ekvivalentno zapisati:

$$\begin{cases} I^+(p) := \{q \in M \mid (\exists p \in \{p\})\, p \ll q\}\,, \\ I^-(p) := \{q \in M \mid (\exists p \in \{p\})\, q \ll p\}\,, \end{cases}$$

odakle se vidi da se pojmovi hronološke budućnosti i prošlosti mogu prirodno generalizovati i definisati za proizvoljne podskupove $A \subset M$:

$$\begin{cases} I^+(A) := \{q \in M \mid (\exists p \in A)\, p \ll q\}\,, \\ I^-(A) := \{q \in M \mid (\exists p \in A)\, q \ll p\}\,. \end{cases}$$

Analogno gornjim skupovima, mogu se definisati i *kauzalna budućnost* i *kauzalna prošlost* tačke p:

$$\begin{cases} J^+(p) := \{q \in M \mid p \leqslant q\}\,, \\ J^-(p) := \{q \in M \mid q \leqslant p\}\,, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

a takođe i *kauzalna budućnost* i *kauzalna prošlost* podskupa $A \subset M$:

$$\begin{cases} J^+(A) := \{q \in M \mid (\exists p \in A)\, p \leqslant q\}\,, \\ J^-(A) := \{q \in M \mid (\exists p \in A)\, q \leqslant p\}\,. \end{cases}$$

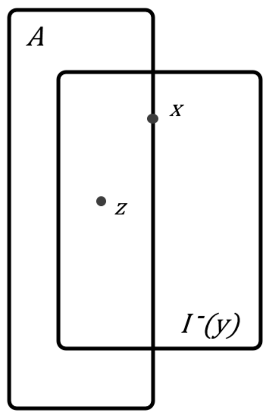
Pritom, svi dokazi predstavljeni u nastavku mogu se analogno izvesti i za hronološke i kauzalne budućnosti i prošlosti, te će se u nastavku u formulaciji teorema i definicija mahom koristiti skupovi $I^+(A)$ i $J^+(A)$.

Na osnovu (2.1.1) i (2.1.2), važi da je za tačke $p, q \in M$ uslov $p \in I^+(q)$ potreban i dovoljan da bi važilo $q \in I^-(p)$, i, analogno, da je uslov $p \in J^+(q)$ potreban i dovoljan da bi važilo $q \in J^-(p)$. Ovo svojstvo koristi se u dokazu naredne Leme, zasnovanom na ideji datoj u [14]:

Lema 2.1.1 *Za proizvoljan podskup $A \subset M$ važi $I^+(A) = I^+(\mathrm{cl}(A))$, gde je $\mathrm{cl}(A)$ adherencija skupa A.*

Dokaz.

Neka za zadati podskup $A \subset M$ važi $y \in I^+(A)$. To znači da mora postojati $x \in A$ za koje je $x \ll y$. Međutim, kako x takođe pripada skupu $\mathrm{cl}(A)$, mora važiti i da $y \in I^+(\mathrm{cl}(A))$.



Drugi smer se pokazuje na sličan način kao gore ukoliko tačka x pripada unutrašnjosti skupa A. Neka je, dakle, dato $x \in \partial A$ i neka važi $y \in I^+(x) \subset I^+(\mathrm{cl}(A))$. Po definiciji hronološke budućnosti skupa, a na osnovu gornjih razmatranja, važi i $x \in I^-(y)$, ali kako je $I^-(y)$ otvoren skup, važi da je $I^-(y)$ okolina tačke x.

Tačka x je adherentna tačka skupa A, te u svakoj njenoj okolini, uključujući i $I^-(y)$, mora postojati tačka koja pripada skupu A, pa neka je $z \in I^-(y) \cap A$. Ovo znači da postoji tačka $z \in A$ takva da važi $z \in I^-(y)$, odakle $y \in I^+(z) \subset I^+(A)$. Time je dokaz završen.

■

Poznato je da iz $x \ll z$ sledi da postoji beskonačno mnogo tačaka y takvih da je $x \ll y \ll z$, a da iz $x \leqslant z$ sledi da postoji bar jedna takva tačka y da važi $x \leqslant y \leqslant z$ (videti [3]). Primenom ove osobine, kao i osobine tranzitivnosti kauzalnih relacija može se pokazati da važi sledeća posledica.

Korolar 2.1.1 *Za proizvoljni podskup A prostor-vremena M važi:*

$$I^+(A) = I^+(I^+(A)) = I^+(J^+(A)) = J^+(I^+(A)) \subset J^+(J^+(A)) = J^+(A).$$

■

Sličnim rezonom se pokazuje i da važi sledeća teorema (detaljnije u [14]):

Teorema 2.1.3 *Neka se posmatra prostor-vreme M. Tada važe implikacije:*

i. $(a \ll b) \wedge (b < c) \Rightarrow (a \ll c)$;

ii. $(a < b) \wedge (b \ll c) \Rightarrow (a \ll c)$,

gde su $a, b, c \in M$ *proizvoljne tačke.*

■

Direktna posledica ove teoreme odnosi se na relativan odnos hronoloških budućnosti dvaju tačaka:

Korolar 2.1.2 *Ako na prostor-vremenu M tačka p hronološki prethodi tački q (tj. važi* $p \ll q$*), onda je hronološka budućnost tačke q podskup hronološke budućnosti tačke p:*

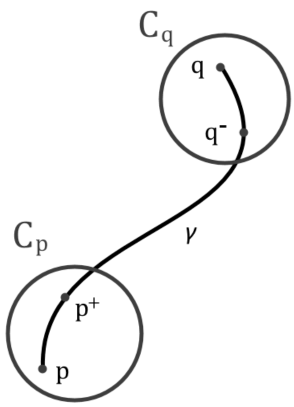
$$p \ll q \quad \Rightarrow \quad I^+(q) \subset I^+(p).$$

Obrnuto ne mora važiti.

■

Iako obrnuta implikacija ne mora važiti, u globalno hiperboličnim prostor-vremenima (npr. prostor-vremenu Minkovskog) ona zaista važi. Štaviše, poznata su prostor-vremena kod kojih ako je $p \leqslant q$ važi $I^+(q) \subset I^+(p)$, ali ne i $I^-(p) \subset I^-(q)$, kao što bi se možda intuitivno očekivalo (detaljnije u [7], [8] ili, na primer, [17]).

Pitanju otvorenosti hronološke i kauzalne budućnosti moguće je prići ukoliko se primeti da je svaki podskup U prostor-vremena M i sam prostor-vreme, i da su njegove relacije kauzalnosti indukovane odgovarajućim relacijama u M. Zato, ako se sa $I^+(A, U)$ obeleži hronološka budućnost skupa A na prostor-vremenu U, važi i $I^+(A, U) \subset I^+(A) \cap U$ (jednakost ne važi u opštem slučaju). Koristeći poznate osobine eksponencijalnog preslikavanja, pokazano je (videti [3] ili [14]) da za proizvoljan konveksan skup C važi da je hronološka budućnost $I^+(p, C)$ otvoren skup u C, a time i u M.



To znači da su za dve tačke $p, q \in M$, između kojih je moguće naći buduće usmerenu krivu γ vremenskog tipa i za dva konveksna skupa $C_p \in \mathcal{U}(p)$ i $C_q \in \mathcal{U}(q)$, moguće naći i tačke p^+ i q^- takve da važi:

$$p \ll p^+ \ll q^- \ll q, \quad p^+ \in C_p, \quad \text{i} \quad q^- \in C_q. \tag{2.1.3}$$

Tada za svako $p' \in I^-(p^+, C_p)$ i $q' \in I^+(q^-, C_q)$ važi $p' \ll q'$, tj. relacija $\ll$ je otvorena. Odatle direktno sledi da je hronološka budućnost proizvoljne tačke prostor-vremena otvoren skup, na osnovu čega, iz činjenice da je hronološka budućnost skupa unija hronoloških budućnosti elemenata skupa, direktno sledi da je $I^+(A)$ otvoren za *svaki* skup $A \subset M$.

Nasuprot tome, kauzalna budućnost $J^+(A)$ nije u opštem slučaju ni otvoren, ni zatvoren skup, zato što ne mora važiti relacija slična (2.1.3), tj. ne moraju postojati *dve* tačke p^+ i q^- tako da je $p \leqslant p^+ \leqslant q^- \leqslant q$. Ipak, unutrašnjost skupa $J^+(A)$ se može dovesti u vezu sa skupom $I^+(A)$ kao u sledećoj teoremi.

Teorema 2.1.4 ([3]) *Neka je dat proizvoljan skup A prostor-vremena M. Tada je* $\mathrm{int}(J^+(A)) = I^+(A)$.

■

Neposredna posledica ovoga je da važi i $\mathrm{cl}(I^+(A) = \mathrm{cl}(J^+(A))$, i $\partial I^+(A) = \partial J^+(A)$ (detaljnije u [15]).

Zapravo se može dokazati (videti, na primer, [3]) da ako je γ buduće usmerena kauzalna kriva od skupa A do neke tačke iz $J^+(A) \backslash I^+(A)$, ona mora biti geodezijska kriva svetlosnog tipa. To znači da se kauzalna budućnost skupa A može posmatrati kao unija skupa A, hronološke budućnosti $I^+(A)$, i eventualno nekih geodezijskih kriva svetlosnog tipa iz A.

Ukoliko je hronološka budućnost nekog skupa ujedno i podskup tog skupa, može se pokazati da važi ekvivalencija kao u narednoj teoremi, preuzetoj iz [14]:

Teorema 2.1.5 *Neka je dat skup $A \subset M$. Tada su sledeći izrazi ekvivalentni:*

i. $I^+(A) \subset A$,

ii. $I^-(A^C) \subset A^C$,

iii. $I^+(A) \cap I^-(A^C) = \varnothing$,

iv. $\mathrm{int}(A) = I^+(A)$,

v. $\partial A = (I^+(A))^C \cap (I^-(A^C))^C$,

gde je sa A^C obeležen komplement skupa A u odnosu na M.

■

2.2 Skupovi budućnosti i prošlosti

Budući i prošli skupovi su važni elementi teorije kauzalnosti, te se često ispitivanjem njihovih osobina mogu ispitati osobine samog prostor-vremena. Njihove definicije slede u nastavku:

Definicija 2.2.1 *Neka je dato prostor-vreme M. Podskup $F \subset M$ naziva se* skup budućnosti *ako je $F = I^+(A)$ za neki podskup $A \subset M$.*

Prema Korolaru 2.1.1, važi da je $I^+(A) = I^+(I^+(A))$ za svaki skup $A \subset M$, što znači da se skup F može definisati kao skup budućnosti i ako važi $F = I^+(F)$, to jest, ako je F jednak svojoj hronološkoj budućnosti (u nekim izvorima se skupovi budućnosti ovako i definišu, videti, na primer, [15]). To znači da ako tačka $x \in F$, i postoji $y \in M$ takvo da je $x \ll y$, mora važiti i $y \in F$.

Definicija 2.2.2 *Za zadato prostor-vreme M, podskup $P \subset M$ naziva se* skup prošlosti *ako je $P = I^-(A)$ za neki podskup $A \subset M$.*

Slično kao u slučaju skupa budućnosti, za skup prošlosti P važi $P = I^-(P)$, i ako važi $x \in P$ i $y \ll x$, mora važiti i $y \in P$. Takođe, kako su hronološke prošlosti i budućnosti otvoreni skupovi, nužno sledi da su i skupovi budućnosti i prošlosti otvoreni. Adherencija ovih skupova precizirana je sledećom teoremom.

Teorema 2.2.1 ([14]) *Ako je $F \subset M$ skup budućnosti, a $P \subset M$ skup prošlosti, njihova adherencija je data sa:*

$$\mathrm{cl}(F) = \{x \in M \mid I^+(x) \subset F\},$$
$$\mathrm{cl}(P) = \{x \in M \mid I^-(x) \subset P\}.$$

Dokaz.

Dokaz je izveden za skup F, ali se odgovarajuća tvrdnja za adherenciju skupova prošlosti vrlo sličnim argumentima dokazuje.

Ako je x data tačka u M koja zadovoljava uslov $I^+(x) \subset F$, onda u svakoj njenoj okolini trivijalno postoje tačke koje je hronološki slede ili, preciznije, koje pripadaju $I^+(x)$. To po definiciji znači da x pripada adherenciji skupa F.

Sa druge strane, neka je $x \in \mathrm{cl}(F)$ i neka se posmatra proizvoljna tačka $y \in I^+(x)$. Tada je takođe $x \in I^-(y)$, to jest $x \in \mathrm{cl}(F) \cap I^-(y)$, ali kako je $I^-(y)$ otvoren skup, te i okolina tačke x, sličnim argumentom kao u Lemi 2.1.1, mora postojati element $z \in F \cap I^-(y)$. Za taj element važi $z \ll y$, što znači da $y \in F$. Prema tome, svaka tačka iz $I^+(x)$ pripada skupu F, čime je teorema dokazana.

■

Većina teorema u nastavku biće formulisane za skupove budućnosti, zato što se odgovarajuće dualne teoreme mogu analogno formulisati i dokazati. Sledeće teoreme i korolar (navedeni u [14]) opisuju neke od zanimljivijih svojstava skupova budućnosti:

Teorema 2.2.2 *Ako je skup $F \subset M$ skup budućnosti, važe sledeće jednakosti:*

i. $\mathrm{cl}(F) = (I^-(F^C))^C$,

ii. $\partial F = \{x \in M \mid I^+(x) \subset F \ \wedge \ x \notin F\} = F^C \cap (I^-(F^C))^C$,

iii. $F = I^+(\mathrm{cl}(F))$,

gde je sa $\mathrm{cl}(F)$ označena adherencija, a sa F^C komplement skupa F.

■

Korolar 2.2.1 *Ako je A otvoren skup u prostor-vremenu M i važi $I^+(A) \subset A$, onda je A skup budućnosti.*

Dokaz.

Trivijalno važi na osnovu ekvivalencije iz Teoreme 2.1.5 i činjenice da je otvoren skup jednak svojoj unutrašnjosti.

■

Teorema 2.2.3 *Ako je A proizvoljan podskup prostor-vremena M, važi relacija $J^+(A) \subset \mathrm{cl}(I^+(A))$.*

■

Dokaz.

Neka je data tačka $y \in J^+(A)$, gde je A prethodno zadati skup. Tada je dovoljno posmatrati slučajeve kada $y \in J^+(A) \backslash I^+(A)$ i $y \in I^+(A)$. U prvom slučaju važi da:

$$y \in J^+(A) \backslash I^+(A) = J^+(A) \backslash \mathrm{int}(J^+(A)) \subset \partial J^+(A) = \partial I^+(A) \subset \mathrm{cl}(I^+(A)).$$

Sa druge strane, ako je $y \in I^+(A)$, onda postoji neko $x \in A$ tako da važi $x \ll y$. Prema Korolaru 2.1.2, to implicira da je $I^+(y) \subset I^+(x)$. Međutim, adherencija skupa $I^+(x)$, prema Teoremi 2.2.1, data je sa:

$$\mathrm{cl}(I^+(x)) = \{z \in M \mid I^+(z) \subset I^+(x)\},$$

odakle je jasno da $y \in \mathrm{cl}(I^+(x)) \subset \mathrm{cl}(I^+(A))$.

■

Teorema 2.2.4 *Unija skupova budućnosti je skup budućnosti. Presek svaka dva skupa budućnosti je skup budućnosti.*

DOKAZ.

Prvi deo tvrđenja vezan za uniju skupova trivijalno važi jer je:

$$\bigcup_{k\in K} I^+(A_k) = I^+\left(\bigcup_{k\in K} A_k\right),$$

gde je K odgovarajući indeksni skup i za svako $k \in K$ važi $A_k \subset M$.

Za drugi deo tvrđenja dovoljno je posmatrati dva skupa budućnosti, $F_1, F_2 \subset M$. Presek ova dva skupa trivijalno pripada svakom od njih, odakle sledi i:

$$I^+(F_1 \cap F_2) \subset I^+(F_1) = F_1,$$
$$I^+(F_1 \cap F_2) \subset I^+(F_2) = F_2,$$

što znači da je skup $I^+(F_1 \cap F_2)$ podskup oba skupa budućnosti, odnosno $I^+(F_1 \cap F_2) \subset F_1 \cap F_2$. Kako je $F_1 \cap F_2$ otvoren skup, prema Korolaru 2.2.1 važi da je $F_1 \cap F_2$ skup budućnosti.

■

2.3 AHRONALNI SKUPOVI

Ahronalni skupovi igraju veliku ulogu u teoriji kauzalnosti, a definišu se na sledeći način:

Definicija 2.3.1 *Podskup $A \subset M$ zove se* ahronalan skup *ukoliko ni za koje dve tačke skupa A ne važi da su u hronološkom odnosu, tj. ako za proizvoljne $p, q \in A$ ne važi $p \ll q$.*

Alternativna definicija može se naći i u [8], gde se ahronalni skup definiše kao onaj skup A za koji važi $I^+(A) \cap A = \varnothing$. Ovo je ekvivalentno, jer se za proizvoljnu tačku $p \in A$ sve tačke sa kojima se može povezati (buduće usmerenim) krivama vremenskog tipa nalaze u $I^+(p)$, a time i u $I^+(A)$.

Očigledno je da je i svaki podskup ahronalnog skupa ahronalan skup, a kako je $\ll$ otvorena relacija, direktno sledi i da je adherencija ahronalnog skupa ahronalan skup ([3]). Značajni primeri uključuju tako-zvane *ahronalne rubove*:

Definicija 2.3.2 *Skup $B \subset M$ zove se* ahronalni rub*, ukoliko je on rub nekog skupa budućnosti:*

$$B = \partial I^+(A), \qquad \text{za neko } A \subset M.$$

Da je ahronalni rub zaista i ahronalni skup može se pokazati na sledeći način:

Lema 2.3.1 *Neka je dat proizvoljan skup budućnosti F. Ahronalan rub $B = \partial F$ je ahronalan skup.*

DOKAZ.

Svaki skup budućnosti F je otvoren skup, te na osnovu Teoreme 2.2.2, važi da je:

$$\begin{aligned}\varnothing &= \partial F \cap F = \partial F \cap I^+(\mathrm{cl}(F)) = \partial F \cap I^+(F \cup \partial F)\\ &= \partial F \cap \left(I^+(F) \cup I^+(\partial F)\right) = (\partial F \cap F) \cup (\partial F \cap I^+(\partial F))\\ &= \partial F \cap I^+(\partial F) = B \cap I^+(B),\end{aligned}$$

gde se koristilo da je $F = I^+(F)$ i osnovno svojstvo hronološke budućnosti unije skupova. Skup B je, dakle, ahronalan skup po definiciji.

■

Zanimljivo je primetiti da se ahronalan rub može posmatrati i kao rub skupa prošlosti:

Teorema 2.3.1 ([14]) *Skup $B \subset M$ je ahronalni rub akko važi $B = \partial I^-(T)$ za neko $T \subset M$.*
Dokaz.

Jedan smer dokaza je trivijalan, zato što se $I^-(T)$ može posmatrati kao hronološka *budućnost* skupa T, ako se promeni vremenska orijentacija prostor-vremena (ovaj izbor jeste proizvoljan).

Sa druge strane, ako je B ahronalan rub, onda postoji skup budućnosti F takav da je $B = \partial F$. To znači da za svako $x \in B$ važi $x \notin F$ i $x \in \mathrm{cl}(F)$. Tačka x ne pripada skupu F, ali zato pripada komplementu F^C. Iz ove pripadnosti direktno sledi i $I^-(x) \subset I^-(F^C)$, što, prema Teoremi 2.2.1 o adherenciji skupa prošlosti, znači da je i $x \in \mathrm{cl}(I^-(F^C))$.

Iz činjenice da je $x \in \mathrm{cl}(F)$ sledi i da je $x \in (I^-(F^C))^C$, tj. $x \notin I^-(F^C)$, na osnovu prve jednakosti iz Teoreme 2.2.2. No, to znači da x pripada i rubu skupa $I^-(F^C)$, te se može uzeti da je $T \equiv I^-(F^C)$. Ovo je po definiciji skup prošlosti.

■

Ova teorema omogućuje da se skupovi $\partial I^+(p) = \partial J^+(p)$ i $\partial I^-(p) = \partial J^-(p)$ prepoznaju kao najjednostavniji primeri ahronalnih rubova.

Teorema 2.3.2 *[14] Ako je $B \neq \varnothing$ ahronalni rub, onda postoji jedinstveni skup budućnosti F i jedinstveni skup prošlosti P takav da su F, P i B po parovima disjunktni i važi $M = P \cup B \cup F$.*
Dokaz.

Prema prethodnoj teoremi, ahronalni rub B je moguće prikazati kao rub nekog skupa budućnosti F i rub skupa prošlosti P datog sa:

$$P = I^-(F^C) = (\mathrm{cl}(F))^C = (F \cup \partial F)^C = (F \cup B)^C = F^C \cap B^C,$$

prema Teoremi 2.2.2. Imajući ovo u vidu, jasno je da važi:

$$\begin{cases} F \cap P = F \cap F^C \cap B^C = \varnothing, \\ P \cap B = F^C \cap B^C \cap B = \varnothing, \end{cases}$$

ali takođe i $F \cap B = \varnothing$, zato što je F otvoren skup i $B = \partial F$. Skupovi F, P i B su, prema tome, po parovima disjunktni i važi $M = P \cup B \cup F$. Treba još pokazati da je ovakva dekompozicija jedinstvena.

Ako se sada pretpostavi da je M takođe i unija po parovima disjunktnih skupova B, $\tilde{P} = I^-(\tilde{P})$, i $\tilde{F} = I^+(\tilde{F})$, onda očigledno mora važiti da je ili skup $F \cap \tilde{P}$ ili $P \cap \tilde{F}$ neprazan, zbog načina na koji je M dekomponovan. Pretpostavimo da je, bez gubitka opštosti, $P \cap \tilde{F} \neq \varnothing$ i neka $p \in P \cap \tilde{F}$.

Kako je M povezana mnogostrukost (a time i lučno povezana), proizvoljnu tačku $q \in B$ moguće je povezati sa p krivom ξ koja se može sastojati iz više krivih vremenskog tipa, buduće usmerenih i prošlo usmerenih. Međutim, ako ξ kreće iz tačke p buduće usmerenom krivom, ona povezuje p sa nekom tačkom iz njene hronološke budućnosti, $I^+(p)$, no kako je $p \in \tilde{F}$ mora važiti i $I^+(p) \subset I^+(\tilde{F}) = \tilde{F}$. Svaka tačka iz hronoške budućnosti tačke p zato pripada i skupu $\tilde{F}$.

Analogno tome, ako ξ kreće iz tačke p prošlo usmerenom krivom, ona povezuje p sa nekom tačkom iz njene hronološke prošlosti, $I^-(p)$, no kako je $p \in P$ mora važiti i $I^-(p) \subset I^-(P) = P$, te svaka tačka iz hronoške prošlosti tačke p pripada i skupu P. To znači da svaka tačka krive ξ pripada $P \cap \tilde{F}$, što znači da krivoj ξ ne može pripadati tačka y, zato što je $y \in B$. Kontradikcija.

■

Teorema 2.3.3 *Svaka kriva vremenskog tipa između tačke iz P i tačke iz F seče skup B u jedinstvenoj tački.*

Neka je $M = P \cup B \cup F$, kao u prethodnoj teoremi, i neka je γ kriva vremenskog tipa između nekih tačaka iz P i F. Neka je takođe sa Γ obeležen skup svih tačaka koje pripadaju krivoj γ. Skupovi $\Gamma \cap F^C$ i $\Gamma \cap P^C$ su zatvoreni i njihovoj uniji pripadaju sve tačke krive γ. Otuda ovi skupovi nisu disjunktni, te postoji tačka $p \in \Gamma \cap F^C \cap P^C = \Gamma \cap (F \cup P)^C = \Gamma \cap B$, tj. postoji tačka na krivoj γ koja pripada skupu B. Ova tačka je jedinstvena, jer ukoliko bi postojala još jedna tačka $q \in \Gamma \cap B$, onda bi na osnovu kauzalnog karaktera krive γ važilo da je ili $p \ll q$ ili $q \ll p$, te barem jedna od ovih tačaka ne bi po definiciji pripadala ahronalnom skupu B.

■

Jedno od najvažnijih teorema vezanih za ahronalne rubove data je u nastavku, i ona omogućе da se ahronalni rubovi posmatraju kao svojevrsni analogoni hiperravnima u $\mathbb{R}^n$:

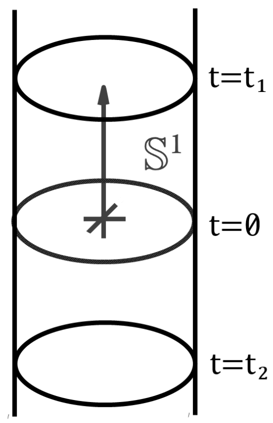
Teorema 2.3.4 ([3],[8],[14],[15]) *Svaki neprazni ahronalni rub B je zatvorena ahronalna Lipšicova topološka hiperpovrš.*

■

Odavde je lako zaključiti da je i svetlosni konus $\Lambda^+(p) = \partial J^+(p)$ u prostoru Minkovskog zatvorena ahronalna topološka hiperpovrš.

2.4 Uslovi kauzalnosti

Već je bilo reči da se može desiti da u prostor-vremenu M važi $p \in I^+(p)$., tj. da postoje zatvorene krive vremenskog tipa. Tipičan primer je tzv. Lorencov cilindar, tj. prostor-vreme $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ nad kojim je definisana metrika $ds^2 = -d\theta^2 + dt^2$, gde svaka kriva $t = \text{const}$ predstavlja zatvorenu krivu vremenskog tipa. Štaviše, u ovom primeru konkretno važi $I^+(p) \equiv M$, za svako $p \in M$.



U ovakvim slučajevima se kaže da je došlo do narušavanja kauzalnosti. Odgovarajuća prostor-vremena se često smatraju nefizičkim, zato što njihova interpretacija podrazumeva postojanje paradoksa (poznati primer je *grandfather paradox*, videti [12]). Ipak, prostori na kojima je došlo do narušavanja kauzalnosti, značajni su jer se na osnovu njih može doći do zaključaka od fizičkog značaja.

Naravno, zatvorene krive vremenskog tipa nisu jedini pokazatelji narušene kauzalnosti, već je moguće naći i slabije i jače uslove koji čine odgovarajuća prostor-vremena nefizičkim. Ovi svi uslovi zovu se *uslovi kauzalnosti* i moguće ih je poređati u takozvanu kauzalnu lestvicu, gde svaki stepen predstavlja sve strožiji uslov kauzalnosti. Više o ovome se može naći u [15] ili [18]. Dve klase prostor-vremena definisane su uz pomoć uslova hronologije i kauzalnosti, kao u nastavku:

Definicija 2.4.1 *Prostor-vreme koje ne sadrži zatvorene krive vremenskog (resp. kauzalnog) tipa naziva se* hronološko *(resp.* kauzalno*) prostor-vreme.*

Svako kauzalno prostor-vreme je i hronološko, a da suprotno ne važi može se ilustrovati na primeru Lorencovog cilindra $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ sa metrikom $ds^2 = d\theta\, dt$. Jedine kauzalne krive na ovom prostor-vremenu, naime, su krive $t = \text{const}$, koje se mogu posmatrati i kao geodezijske linije svetlosnog tipa, nakon odgovarajuće reparametrizacije ([15]).

Kompaktna prostor-vremena primeri su prostor-vremena koja ne mogu biti hronološka ([8], [15]):

Teorema 2.4.1 *Svako kompaktno prostor-vreme M sadrži zatvorene krive vremenskog tipa.*

DOKAZ.

Skupovi $I^+(p)$ su otvoreni i čine otvoreni prekrivač mnogostrukosti M, te je na osnovu svojstva kompaktnosti moguće konstruisati potpokrivač kojeg čini konačno mnogo ovih skupova, obeleženih sa $I^+(p_1)$, $I^+(p_2), \ldots, I^+(p_k)$. Tačka p_1 tada očigledno mora pripadati nekom od ovih skupova, te neka je $p_1 \in I^+(p_{i_1})$, odnosno $p_{i_1} \ll p_1$ za neko $i_1 \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Za tačku p_{i_1} važe slične tvrdnje: $p_{i_1} \in I^+(p_{i_2})$ odakle i $p_{i_2} \ll p_{i_1}$, za $i_2 \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Ponavljajući ovaj postupak, moguće je konstruisati beskonačan niz tačaka za koji važi $\ldots \ll p_{i_3} \ll p_{i_2} \ll p_{i_1} \ll p_1$. Međutim, kako je k konačan broj, u ovom nizu može biti samo konačan broj različitih tačaka p_{i_j}, te moraju postojati tačke koje se ponavljaju. To znači da, na osnovu tranzitivnosti relacije $\ll$, mora postojati tačka p_l za koju važi $p_l \ll p_l$, odnosno mora postojati zatvorena kriva vremenskog tipa, koja prolazi kroz p_l.

■

Da bi se definisali stroži uslovi kauzalnosti, neophodno je najpre uvesti pojam *prostor-vremena koje izdvaja tačke* (eng. *distinguishing space-times*):

Definicija 2.4.2 *Prostor-vreme M naziva se* prostor-vreme koje izdvaja tačke *ako za sve tačke $p, q \in M$ važi:*

$$
\begin{aligned}
I^+(p) = I^+(q) \quad &\Rightarrow \quad p = q, \quad \textit{ili} \\
I^-(p) = I^-(q) \quad &\Rightarrow \quad p = q.
\end{aligned}
$$

Alternativna karakterizacija može se postići koristeći i sledeću teoremu (preuzetu iz [18]):

Teorema 2.4.2 *Neka je dato prostor-vreme M. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

i. *Za svake dve tačke $p, q \in M$ važi implikacija $I^+(p) = I^+(q) \;\Rightarrow\; p = q$;*

ii. *Preslikavanje $I^+ : p \mapsto I^+(p)$ je injektivno;*

iii. *Za svaku tačku $p \in M$ i okolinu $U \in \mathcal{U}(p)$ postoji okolina $V \subset U$, $p \in V$ tako da svaka tačka buduće usmerene kauzalne krive $\gamma : I = [a, b] \mapsto M$ pripada V, ukoliko važi $\gamma(a) = p$ i $\gamma(b) \in V$;*

iv. *Za svaku tačku $p \in M$ i okolinu $U \in \mathcal{U}(p)$ postoji okolina $V \subset U$, $p \in V$, pri čemu važi jednakost $J^+(p, V) = J^+(p) \cap V$.*

Analogna teorema važi i u slučaju kada važi implikacija $I^-(p) = I^-(q) \;\Rightarrow\; p = q$.

■

Veoma zanimljivo svojstvo prostor-vremena koja izdvajaju tačke opisano je sledećom teoremom:

Teorema 2.4.3 ([18]) *Neka su (M_1, g_1) i (M_2, g_2) dva prostor-vremena, od kojih M_1 izdvaja tačke. Neka je dat i difeomorfizam $f : M_1 \mapsto M_2$, koji očuvava odnos između kauzalno povezanih tačaka:*

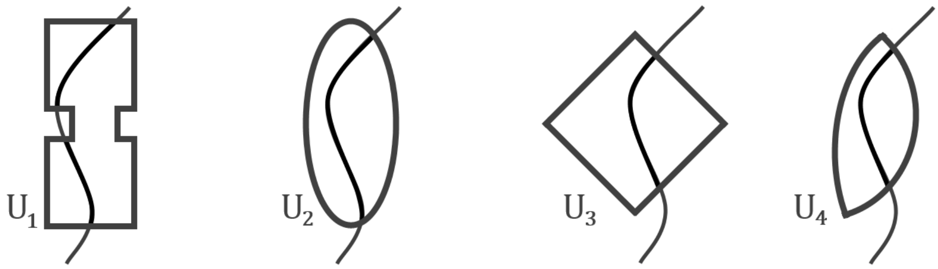
$$p \leqslant q \;\Leftrightarrow\; f(p) \leqslant f(q).$$

Tada je i (M_2, g_2) prostor-vreme koje izdvaja tačke.

■

Strožiji uslov kauzalnosti može se definisati uz pomoć pojmova kauzalne konveksnosti:

Definicija 2.4.3 *Otvoren skup $U \subset M$ prostor-vremena M naziva se* kauzalno konveksnim *ako ne postoji kauzalna kriva čiji presek sa U čine disjunktni skupovi (videti Sliku 2.2).*



Slika 2.2: Presek kauzalnih kriva sa četiri različita skupa. Skup U_1 nije kauzalno konveksan, ali ostali jesu.

Definicija 2.4.4 *Neka se posmatra tačka $p \in M$. Prostor-vreme M* zove se jako kauzalno *u tački p ako ova tačka ima proizvoljno male kauzalno konveksne okoline U. M je* jako kauzalno prostor-vreme *ako je jako kauzalno u svakoj svojoj tački.*

Gornja definicija zapravo znači da u jako kauzalnim prostor-vremenima svaka tačka p ima proizvoljno male okoline koje kauzalne krive ili ne napuštaju ili koje tačno jednom ulaze i jednom izlaze iz tih okolina. Ovde se odrednica "proizvoljno male" koristi u smislu da je za svaki otvoren skup tačke $p \in M$ moguće naći odgovarajuću konveksnu okolinu U iz definicije. Bez ove odrednice, svako prostor-vreme bi se moglo smatrati jako kauzalnim, zato što je prostor-vreme M kauzalno konveksna okolina svake svoje tačke .

Jako kauzalna prostor-vremena, dakle, mogu se i drugačije definisati, zahvaljujući lemi u nastavku:

Lema 2.4.1 ([18]) *Neka je M jako kauzalno prostor-vreme i $p \in M$. Tada za svaku okolinu $U \in \mathcal{U}(p)$ postoji okolina $V \in \mathcal{U}(p)$ koja je podskup od U, pri čemu svaka tačka svake kauzalne krive $\gamma : I \mapsto M$ pripada okolini U, ukoliko važi da $\partial I \in V$.*

■

Može se pokazati da je skup tačaka u kojem je dato prostor-vreme M jako kauzalno zapravo otvoren skup u M, kao i da je svako prostor-vreme, čiji je nosač prost, povezan i otvoren skup jako kauzalno prostor-vreme (dokazano u [14]).

U [8] se može se naći dokaz tvrđenja da svako jako kauzalno prostor-vreme izdvaja tačke, zasnovano na ispitivanju geodezijskih kriva svetlosnog tipa na M. Alternativni dokaz sledi na osnovu sledeće teoreme (detaljnije u [14]):

Teorema 2.4.4 *Neka je dato prostor-vreme M i tačka $p \in M$. Uslov jake kauzalnosti nije ispunjen u p akko postoje različite tačke p i q za koje je $q < p$ tako da važi implikacija:*

$$(x \ll p) \wedge (q \ll y) \quad \Rightarrow \quad x \ll y, \tag{2.4.1}$$

za proizvoljne dve tačke $x, y \in M$.

■

Korolar 2.4.1 ([8], [15], [18]) *Svako jako kauzalno prostor-vreme predstavlja prostor-vreme koje izdvaja tačke. Obrnutno ne mora važiti.*

■

Više o graničnim krivama, C^0 topologiji prostor-vremena, topologiji Aleksandrova i njihovim vezama sa jako kauzalnim prostor-vremenima može se naći u [2], [3], [8], [15] ili [17], ali kako ovi pojmovi neće igrati veću ulogu u nastavku, ovde će biti reči o uslovu *stabilne kauzalnosti.*

Osnovna ideja je da čak i jako kauzalna prostor-vremena mogu omogućavati formiranje zatvorenih krivih vremenskog tipa pri perturbacijama metrike. Ovakva situacija onda ne bi bila fizički realistična jer bi Hajzenbergov princip neodređenosti sprečavao precizno utvrđivanje oblika metrike u svakoj tački prostor-vremena, a pretpostavlja se da bi dobro definisana kvantna teorija gravitacije podrazumevala ispravnost ovog principa ili neke njene generalizacije (videti [8]). Stoga, da bi prostor-vreme bilo fizički značajno, ono mora imati neku osobinu stabilnosti u odnosu na "bliska" prostor-vremena (bliskost se definiše uz pomoć C^0 topologije definisane na prostoru Lorencovih metrika prostor-vremena):

Definicija 2.4.5 *Prostor-vreme (M, g) zadovoljava uslov stabilne kauzalnosti ukoliko metrika g na M ima otvorenu okolinu U u C^0 topologiji takvu da je za svaku Lorencovu metriku $g' \in U$ prostor-vreme (M, g') hronološko.*

Ovo intuitivno znači da se svetlosni konusi mogu donekle "proširiti" u svakoj tački prostor-vremena, bez da ovo omogućuje konstrukciju zatvorenih krivih vremenskog tipa:

Definicija 2.4.6 *Prostor-vreme (M, g) zadovoljava uslov stabilne kauzalnosti ukoliko postoji Lorencova metrika g' na M takva da je svaki vektor v kauzalnog tipa u prostor-vremenu (M, g) ujedno i vektor vremenskog tipa u prostor-vremenu (M, g'):*

$$g(v, v) \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad g'(v, v) < 0.$$

Gornja osobina se često kraće zapisuje izrazom $g \prec g'$.

Analizi stabilno kauzalnog prostor-vremena moguće je prići i razmatranjem takozvane *funkcije vremena* $t : M \mapsto \mathbb{R}$. Ovo odgovara intuiciji prema kojoj u fizički validnom prostor-vremenu mora postojati neki oblik "globalno definisanog vremena" ili "kosmičkog vremena", u smislu da ono monotono raste duž svake buduće usmerene kauzalne krive ([20]). Ipak, povezivanje uslova jake kauzalnosti sa funkcijom vremena nije trivijalan rezultat, već je za to najpre potrebno definisati na prostor-vremenu Borelovu meru μ i dve poluneprekidne, monotono rastuće funkcije hiperzapremina.

U principu se podrazumeva da bi funkcija vremena morala biti neprekidna, mada se u literaturi može naići i na diskusije vezane za (generalizovane) funkcije vremena sa prekidima (videti, na primer, [18]). Imajući ovo na umu, veza stabilne kauzalnosti i funkcije vremena opisana je sledećom teoremom:

Teorema 2.4.5 ([2], [18]) *Za proizvoljno prostor-vreme M sledeći uslovi su ekvivalentni:*

i. M je stabilno kauzalno prostor-vreme;

ii. Postoji funkcija vremena t, tj. postoji neprekidna funkcija koja strogo monotono raste duž svake buduće usmerene kauzalne krive;

iii. Postoji temporalna funkcija, tj. postoji glatka funkcija čiji je gradijent u svakoj tački prošlo usmeren vektor vremenskog tipa.

■

Treba napomenuti da je stabilno kauzalno prostor-vreme moguće još definisati i uz pomoć pojma K-kauzalnosti, ali to ovde neće biti učinjeno zbog kompleksnosti matematičkog aparata uz pomoć kojeg se ovaj pojam uvodi. Detalji se mogu naći u [21]. Takođe, koristeći gornju teoremu, moguće je pokazati i da je svako stabilno kauzalno prostor-vreme istovremeno i jako kauzalno, bazirajući se na Lemu 2.4.1. Videti još [6] ili [18].

U nastavku se opisuje još jedan uslov kauzalnosti, *globalna hiperboličnost*, koja se najčešće navodi kao osnovna, polazna osobina fizički realističnih prostor-vremena.

2.5 Globalno hiperbolična prostor-vremena

Globalna hiperboličnost prvi put je definisana polovinom XX veka u [23] u kontekstu hiperboličnih diferencijalnih jednačina i nazvana tako jer na globalno hiperboličnom skupu N talasna jednačina koja za izvor ima $\delta(p)$, tj. Dirakovu δ-distribuciju u $p \in N$, ima jedinstveno rešenje koje nestaje izvan $N \setminus J^+(p, N)$.

Matematički, osobina globalne hiperboličnosti igra analognu ulogu kao geodezijska kompletnost u Rimanovoj geometriji. Ovo znači da je svaka maksimalna geodezijska kriva definisana na čitavoj realnoj pravoj, odnosno da je trajektorija svake čestice koja se kreće u tom prostor-vremenu potpuno poznata, neprekidna i dobro definisana, pod uslovom da se znaju podaci o početnom položaju i brzini.

Fizički, globalna hiperboličnost se povezuje sa Penrouzovom (jakom) kosmičkom cenzurom, tj. pretpostavkom da prostor-vremena koja zadovoljavaju Ajnštajnove jednačine polja (dakle, na kojoj se mogu primenjivati rezultati i metodologije opšte teorije relativnosti) ne dozvoljavaju "očigledne" singularitete, već da ih na neki način "prikrivaju" od svih posmatrača u tim prostor-vremenima.

Definicija 2.5.1 *Podskup N prostor-vremena M naziva se* globalno hiperboličnim skupom *ako su zadovoljeni uslovi jake kauzalnosti na N, i za svake dve tačke $p, q \in N$ važi da je skup $J^+(p) \cap J^-(q)$ kompaktan podskup skupa N.*

U izvesnom smislu, gornja definicija govori da za $p, q \in N$, gde je N globalno hiperboličan skup, skupovi $J^+(p) \cap J^-(q)$ ne sadrže tačke na rubu prostor-vremena, tj. u "beskonačnosti" ili u tačkama singulariteta.

Sledeće dve teoreme dokazane su u [8]:

Teorema 2.5.1 *Neka je dato prostor-vreme M i globalno hiperboličan skup $N \subset M$. Ako je N otvoren skup, onda je on i kauzalno prost skup, tj. za svaki kompaktni podskup $K \Subset N$ važi da su skupovi $J^+(K) \cap N$ i $J^-(K) \cap N$ zatvoreni u N.*

■

Teorema 2.5.2 *Neka je dato prostor-vreme M. Ako su K_1 i K_2 kompaktni podskupovi globalno hiperboličnog skupa $N \subset M$, onda je skup $J^+(K_1) \cap J^-(K_2)$ kompaktan.*

■

Zapravo, globalna hiperboličnost je definisana u [23] uz pomoć prostora $C(p, q)$ i odgovarajuće topologije na ovom prostoru (videti i [12]). Ovde $C(p, q)$ predstavlja prostor svih neprekidnih kauzalnih krivih koje povezuju posmatrane tačke $p, q \in M$:

$$C(p, q) := \{\lambda : I_\lambda \mapsto M \mid \lambda \text{ je neprekidna buduće usmerena kauzalna kriva između } p \text{ i } q\} / \sim,$$

gde I_λ predstavlja kompaktan interval. Smatra se da dve krive λ i γ pripadaju istoj klasi ekvivalencije, $\lambda \sim \gamma$, ako postoji reparametrizacija koja očuvava orijentaciju.

Topologija τ na $C(p, q)$ tada je definisana na sledeći način: ako je $U \subset M$ skup otvoren u prirodnoj topologiji prostor-vremena, i Λ je slika krive λ, tj. $\Lambda = \lambda(I_\lambda)$, onda skupovi:

$$\mathcal{B}(U) := \{\lambda \in C(p, q) \mid \Lambda \subset U\}$$

čine bazu topologije τ na $C(p, q)$ ([25]). Tada se otvoren skup N može smatrati globalno hiperboličnim skupom ukoliko je $C(p, q)$ kompaktno za svako $p, q \in N$. Da je ovo ekvivalentna definicija, posebno se treba pokazati:

Teorema 2.5.3 ([24]) *Neka je ispunjen uslov kauzalnosti na otvorenom skupu N koji zadovoljava jednakost $N = J^+(N) \cap J^-(N)$. Tada je N globalno hiperbolični skup akko je $C(p, q)$ kompaktno za svako $p, q \in N$.*

■

Jasno je da se jedna karakterizacija globalno-hiperboličnih prostor-vremena može dobiti i na osnovu ove teoreme, kada se postavi da je $M = N$, u kom slučaju je direktno zadovoljen uslov $M = J^+(M) \cap J^-(M)$. Ipak, definicija globalno hiperboličnih prostor-vremena najčešće je data kao u nastavku:

Definicija 2.5.2 *Prostor-vreme M je globalno hiperbolično ako zadovoljava sledeća dva uslova:*

i. M je jako kauzalno prostor-vreme;

ii. Skupovi $J^+(p) \cap J^-(q)$ su kompaktni za svako $p, q \in M$.

Ova dva uslova iz definicije su međusobno nezavisna. Drugi uslov (u literaturi nazivan *unutrašnja kompaktnost*) grubo rečeno govori o nemogućnosti postojanja "rupa" ili "otvora" na prostor-vremenu. Tako je, na primer, prostor-vreme Minkovskog globalno-hiperbolično, dok na primer prostor-vreme dobijeno oduzimanjem bar jedne (proizvoljne) tačke iz prostora Minkovskog nije.

Takođe, 2007. godine je pokazano (videti [22]) da na kauzalnim prostor-vremenima osobina unutrašnje kompaktnosti implicira jaku kauzalnost, te se u novijim izvorima globalna hiperboličnost definiše na kauzalnim prostor-vremenima. Zanimljivo je primetiti da ukoliko se glatkost (tj. dva puta diferencijabilna neprekidnost) metrike oslabi samo do neprekidnosti, nepostojanje zatvorenih kauzalnih krivih nije dovoljno da garantuje da je i relacija $\leqslant$ zatvorena, te se često u tom slučaju prvi uslov iz definicije zamenjuje sa jačim uslovom (detaljnije u [25] ili [26]).

Nekoliko osnovnih posledica globalne hiperboličnosti dato je u nastavku:

Teorema 2.5.4 ([15], [18], [31]) *Neka je M globalno hiperbolično prostor-vreme. Tada za sve kompaktne skupove $A, B \subset M$ važe tvrđenja:*

i. Skupovi $J^+(A)$ i $J^-(A)$ su zatvoreni;

ii. Skupovi $J^+(A) \cap J^-(B)$ su kompaktni.

Dokaz.

i. Dokaz prvog dela je izveden za skupove oblika $J^+(p)$, gde je $p \in A$, jer ukoliko su oni zatvoreni i njihova unija mora biti zatvorena (a to je upravo kauzalna budućnost skupa A):

$$\bigcup_{p \in A} J^+(p) = J^+\left(\bigcup_{p \in A} p\right) = J^+(A),$$

i analogno za kauzalnu prošlost tačke p.

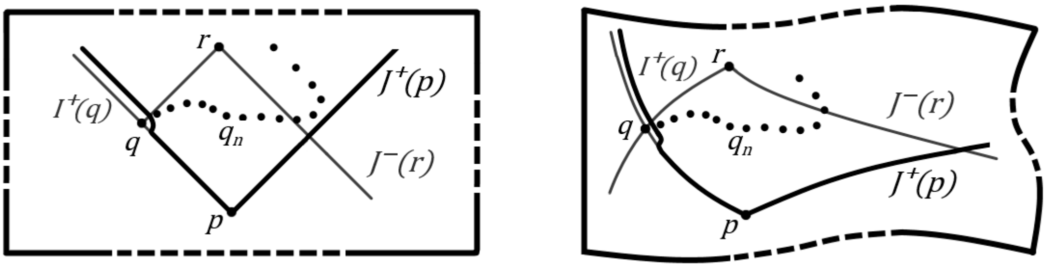
Dakle, ako se pretpostavi da skup $J^+(p)$ nije zatvoren, gde je p proizvoljna tačka iz M, mora postojati neka tačka $q \in \mathrm{cl}(J^+(p)) \setminus J^+(p)$. Neka je sada r proizvoljna tačka iz $I^+(q)$ i neka je dat niz tačaka $\{q_n\} \subset J^+(p)$ koji konvergiraju ka q (videti Sliku 2.3).

Budući da je skup $I^-(r)$ otvorena okolina tačke q, postoji indeks n_0 nakon kojeg sve tačke iz niza $\{q_n\}$ pripadaju i skupu $I^-(r)$, tj. skupu $J^-(r)$. Tada za svako $n > n_0$ važi:

$$q_n \in J^+(p) \cap J^-(r),$$

što opet znači da granica ovog podniza pripada odgovarajućoj adherenciji:

$$q \in \mathrm{cl}(J^+(p) \cap J^-(r)).$$



Slika 2.3: Ilustracija dokaza u prostor-vremenu Minkovskog (levo) i Rindlera (desno).

Međutim, po pretpostavci tvrđenja, skupovi ovakvog oblika su kompaktni, a time i zatvoreni, te je:

$$q \in J^+(p) \cap J^-(r),$$

što je kontradikcija jer je q birano tako da ne pripada skupu $J^+(p)$. Dakle, skup $J^+(p)$ jeste zatvoren skup. Zatvorenost se analogno pokazuje i slučaju skupa $J^-(p)$.

ii. Ovo je trivijalna posledica prethodnog dela teoreme, zato što je svako prostor-vreme po definiciji i Hauzdorfov, parakompaktan topološki prostor. Dokaz zato sledi na osnovu poznatih teorema iz topologije.

■

Treba naglasiti da je i osobina globalne hiperboličnosti stabilna u smislu da za zadato globalno hiperbolično prostor-vreme (M, g) postoji metrika $g' \succ g$ tako da je (M, g') globalno hiperbolično prostor-vreme (ovo je dokazano u [24]). Stabilnost važi i u slučaju kada je metrika g samo neprekidna ([25]).

2.6 Košijeve površi

Kao što je nagovešteno na početku prethodnog poglavlja, globalna hiperboličnost se može povezati i sa postojanjem "idealnih hiperpovrši početnih vrednosti" koje se zovu *Košijeve površi*. One se definišu uz pomoć pojma *neprodužive* kauzalne krive:

Definicija 2.6.1 *Neka je $\gamma : [a, b) \mapsto M$ kriva u prostor-vremenu M. Tačka $p \in M$ je* rubna tačka *(još se naziva i* granična tačka*) krive γ ako važi jednakost:*

$$\lim_{t \mapsto b^-} \gamma(t) = p.$$

Ako je γ buduće usmerena (resp. prošlo usmerena) kauzalna kriva, tačka p se naziva buduća *(resp.* prošla*) rubna tačka krive γ.*

Definicija 2.6.2 *Kauzalna kriva γ se naziva* buduće neproduživa *ako nema buduću rubnu tačku. Dualno,* prošlo neproduživa *kauzalna kriva je kauzalna kriva koja nema prošlu rubnu tačku, dok se kauzalna kriva $\gamma : (a, b) \mapsto M$ naziva* neproduživom *ako je i buduće neproduživa i prošlo neproduživa.*

Definicija 2.6.3 *Košijeva površ za prostor-vreme M predstavlja ahronalan podskup $S \subset M$ kojem pripada tačno jedna tačka svake neprodužive krive vremenskog tipa u M.*

S tim u vezi, u nekim izvorima (na primer u [3]) se za Košijeve površi ahronalnost ne navodi u definiciji, već se dokazuje uz pomoć sledeće leme, čiji se dokaz zasniva na Teoremama 2.3.3 i 2.3.4:

Teorema 2.6.1 ([3]) *Podskup S koji sadrži tačno jednu tačku svake neprodužive krive vremenskog tipa predstavlja zatvorenu ahronalnu topološku hiperpovrš koju seče svaka neproduživa kauzalna kriva.*

Zbog ove osobine se Košijeve površi često nazivaju i Košijevim *hiperpovršima*.

Može se takođe pokazati da za Košijeve površi S važi $S = \partial I^{+}(S) = \partial I^{-}(S)$ (videti [16]), što na osnovu Teoreme 2.3.2 znači da se svaka mnogostrukost M koja sadrži Košijevu površ može zapisati kao u nastavku:

Teorema 2.6.2 *Prostor-vreme M koje sadrži Košijevu površ S može se zapisati u obliku unije:*

$$M = I^{-}(S) \cup S \cup I^{+}(S),$$

pri čemu su skupovi S, $I^{+}(S)$ i $I^{-}(S)$ po parovima disjunktni.

■

Veza između globalne hiperboličnosti i Košijevih površi može se opisati sledećom teoremom:

Teorema 2.6.3 ([8], [24]) *Globalno hiperbolično prostor-vreme M sadrži Košijevu površ S.*

Ideja dokaza.

Da bi se pokazalo da globalno hiperbolično prostor-vreme ima Košijevu površ, mora se uvesti Borelova mera μ na M, tako da je $\mu(M) = 1$. Za funkciju $f: M \mapsto \mathbb{R}$ datu sa:

$$f(p) = \frac{\mu(J^{-}(p))}{\mu(J^{+}(p))},$$

može se pokazati da je neprekidna, koristeći argumente unutrašnje kompaktnosti. Jaka kauzalnost se koristi kako bi se pokazalo da je f strogo rastuća funkcija duž svake buduće usmerene kauzalne krive. Štaviše, ako je $\gamma: (a,b) \mapsto M$ buduće usmerena neproduživa kauzalna kriva u M, onda se može pokazati da važi:

$$\lim_{t \mapsto a^{+}} f(\gamma(t)) = 0, \quad \text{i} \quad \lim_{t \mapsto b^{-}} f(\gamma(t)) = \infty.$$

Tada je Košijeva površ S data kao skup opisan sa:

$$S = \{p \in M \mid f(p) = 1\}.$$

■

Napomena. Zapravo se može pokazati da važi i obrnuto, da postojanje Košijevih površi implicira globalnu hiperboličnost, ali će to biti urađeno u nastavku, nakon što se nekoliko pojmova definišu i njihova svojstva ispitaju. Takođe , funkcija f iz dokaza ovde predstavlja funkciju vremena, videti stranu 28.

Geroch je 1970. godine (u svom radu [24]) dokazao sledeću teoremu, koja se tiče strukture globalno hiperboličnih prostor-vremena (videti još [5] i [32]):

Teorema 2.6.4 *Ako je M globalno hiperbolično prostor-vreme dimenzije n, onda je M homeomorfno prostoru $\mathbb{R} \times S$, gde je S topološka podmnogostrukost od M dimenzije $(n-1)$ i za svako $t \in \mathbb{R}$ važi da je $\{t\} \times S$ Košijeva površ.*

Ideja dokaza.

Da bi se teorema dokazala, nužno je uvesti buduće usmereno vektorsko polje X vremenskog tipa na M. Onda X može biti "skalirano" tako da je svaka integralna kriva na X dobro definisana za sve vrednosti svog parametra t, pri čemu tačke koje odgovaraju $t = 0$ pripadaju skupu S.

Svaka tačka $p \in M$ tada se nalazi na integralnoj krivi koja seče S u tačno jednoj tački q. Ovo omogućava definisanje preslikavanja $p \leftrightarrow (t,q)$, za koje se posebno dokazuje da je homeomorfizam kakav se traži u teoremi.

■

Sličnim argumentima se pokazuje da važe i sledeće teoreme:

Teorema 2.6.5 ([14], [24]) *Ako je $f : M \mapsto \mathbb{R} \times S$ homeomorfizam iz prethodne teoreme, onda je:*

i. $f(t, S)$ Košijeva površ za svako $t \in \mathbb{R}$;

ii. $f(\mathbb{R}, s)$ kriva vremenskog tipa za svako $s \in S$.

■

Teorema 2.6.6 ([3], [16]) *Svake dve Košijeve površi su homeomorfne.*

■

Košijeve površi S (i generalno potprostori) mogu biti i prostornog tipa u smislu da su svi vektori iz T_pS prostornog tipa, odnosno da su svi vektori normalni na S vektori vremenskog tipa. Tada važi:

Teorema 2.6.7 ([27]) *Neka je M proizvoljno prostor-vreme i neka postoji glatka Košijeva površ $S \subset M$ prostornog tipa. Tada je M difeomorfno prostoru $\mathbb{R} \times S$. Štaviše, ako je S' još jedna glatka Košijeva površ prostornog tipa, onda su S i S' difeomorfne Košijeve površi.*

■

Ove teoreme pomogle su da se Košijeve površi shvate kao projekcije prostor-vremena u nekom zadatom trenutku. Ovo je ujedno i jedan od razloga zbog kojeg se globalna hiperboličnost navodi kao osobina fizički validnih prostor-vremena, tim pre što se u klasičnoj mehanici kinematika i dinamika objekta ispituju nezavisno od vremena kada se opservacije izvode, te, dakle, na Košijevim površima (prostornog tipa). Zanimljivo je primetiti i da gornje teoreme impliciraju da se celokupna "budućnost" i "prošlost" prostor-vremena može predvideti (ili sagledati) na osnovu podataka o fizičkoj situaciji prostor-vremena u nekom trenutku, tj. na Košijevoj površi tog prostor-vremena ([12]).

Zahvaljujući Košijevim površima, globalna hiperboličnost se može povezati sa funkcijama vremena na sledeći način. Sirjektivna funkcija vremena $t : M \mapsto \mathbb{R}$ naziva se *Košijeva funkcija vremena* ako svaki skup $t^{-1}(c)$ predstavlja Košijevu površ u M za svako $c \in \mathbb{R}$. Slično, *Košijeva temporalna funkcija* predstavlja temporalnu funkciju $\mathcal{T}$ takvu da svaki skup $\mathcal{T}^{-1}(c)$ predstavlja Košijevu površ u M. Tada sledi:

Teorema 2.6.8 ([2]) *Neka je dato prostor-vreme M. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

i. M je globalno hiperbolično;

ii. Postoji glatka Košijeva površ koja je prostornog tipa;

iii. Postoji Košijeva funkcija vremena t;

iv. Postoji (glatka) Košijeva temporalna funkcija $\mathcal{T}$, pri čemu su Košijeve površi $\mathcal{T}^{-1}(c)$ prostornog tipa.

■

Korolar 2.6.1 ([18]) *Neka je (M, g) globalno hiperbolično prostor-vreme. Tada postoji izometrija između (M, g) i prostor-vremena $(\mathbb{R} \times S, g_S)$, gde je S Košijeva površ prostornog tipa, a metrika g_S definisana na sledeći način:*

$$g_S := -\beta \, d\mathcal{T}^2 + g_{\mathcal{T}},$$

pri čemu je $\beta : \mathbb{R} \times S \mapsto \mathbb{R}$ glatka, pozitivna funkcija, $\mathcal{T}$ Košijeva temporalna funkcija i $g_{\mathcal{T}}$ Rimanova metrika na svakoj Košijevoj površi $\mathcal{T}^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, koja se glatko menja sa promenom vrednosti funkcije $\mathcal{T}$.

■

Prethodni korolar značajan je jer omogućava da se svako globalno hiperbolično prostor-vreme posmatra kao izometrično prostor-vremenu generisanom uz pomoć bilo koje svoje Košijeve površi. Činjenica da su površi $\mathcal{T}^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, Košijeve i prostornog tipa bitna je za validnost Ajnštajnovih jednačina polja i Penrouzove nejednakosti na globalno hiperboličnim prostor-vremenima. Detalji su dati u [18] i [29].

2.7 Oblast zavisnosti i Košijev horizont

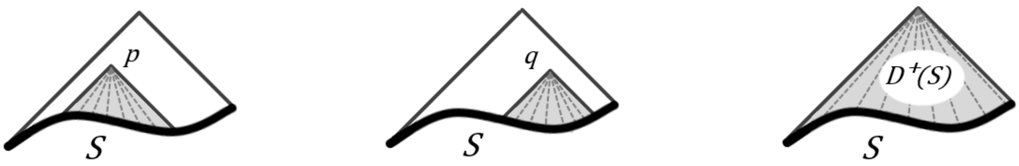
Definicija 2.7.1 *Neka je S ahronalan skup u prostor-vremenu M. Tada su buduća oblast zavisnosti $D^+(S)$ skupa S i prošla oblast zavisnosti $D^-(S)$ skupa S data sa:*

$$D^+(S) = \{p \in M \mid \textit{svaka prošlo neproduživa kauzalna kriva iz } p \textit{ seče skup } S\},$$
$$D^-(S) = \{p \in M \mid \textit{svaka buduće neproduživa kauzalna kriva iz } p \textit{ seče skup } S\}.$$

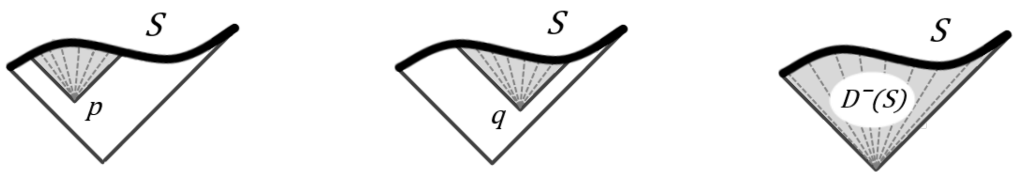
Oblast zavisnosti skupa S tada predstavlja uniju ova dva skupa, $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$.

Skup $D(S)$ treba intuitivno shvatiti kao oblast prostor-vremena u kojoj se fizička situacija može predvideti znajući fizičku situaciju u tačakama na ahronalnom skupu S. Preciznije rečeno, ponašanje rešenja hiperboličnih parcijalnih diferencijalnih jednačina izvan skupa $D(S)$ nije određeno početnim vrednostima na skupu S (videti [14], [27] ili [28]), što je tim pre značajnije jer se ovom klasom parcijalnih diferencijalnih jednačina i modeliraju fizička polja u zakrivljenim prostor-vremenima ([12]).

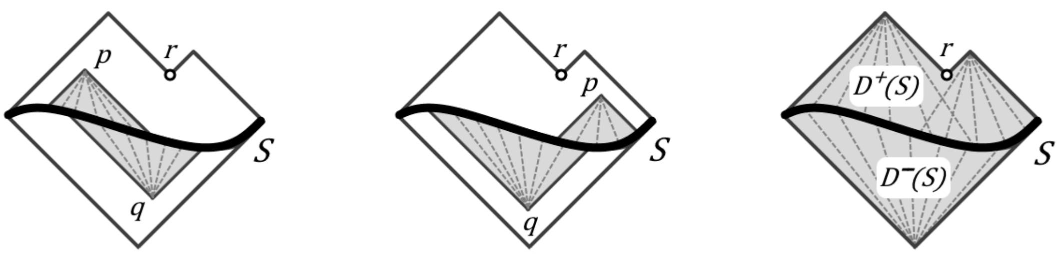
Primeri na Slikama 2.4, 2.5 i 2.6 prikazani su u dvodimenzionalnom prostoru Minkovskog zato što se ovde rubovi hronološke prošlosti i budućnosti mogu prikazati kao dve međusobno normalne poluprave. Ovde su kauzalne krive od skupova S do odgovarajućih tačaka iz domena zavisnosti prikazane isprekidanim linijama. Takođe, na Slici 2.6 tačka r ne pripada prostor-vremenu, pa je oblik domena zavisnosti drugačiji nego na prethodnim slikama.



Slika 2.4: Tačke p i q pripadaju skupu $D^+(S)$. Budući domen zavisnosti prikazan je desno.



Slika 2.5: Tačke p i q pripadaju skupu $D^-(S)$. Prošli domen zavisnosti prikazan je desno.



Slika 2.6: Tačke p i q pripadaju redom skupovima $D^+(S)$ i $D^-(S)$. Domen zavisnosti prikazan je desno.

Ako je skup S ahronalan, *budući Košijev horizont* se može shvatiti kao rub skupa $D^+(S)$. Preciznije:

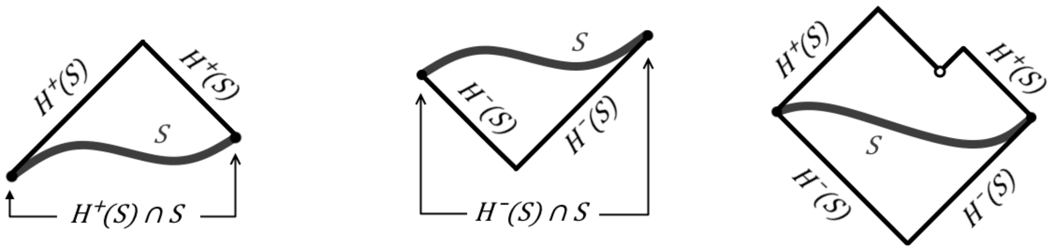
Definicija 2.7.2 *Neka je $S \subset M$ ahronalan skup u prostor-vremenu M.* Budući Košijev horizont $H^+(S)$ *definisan je na sledeći način:*

$$H^+(S) = \{p \in \mathrm{cl}(D^+(S)) \mid I^+(p) \cap D^+(S) = \varnothing\} = \\ = \mathrm{cl}(D^+(S)) \backslash I^-(D^+(S)),$$

i dualno se definiše i prošli Košijev horizont*:*

$$H^-(S) = \{p \in \mathrm{cl}(D^-(S)) \mid I^-(p) \cap D^-(S) = \varnothing\} = \\ = \mathrm{cl}(D^-(S)) \backslash I^+(D^-(S)).$$

Unija ova dva skupa obeležava se sa $H(S)$ i često naziva samo Košijev horizont *(videti Sliku 2.7).*



Slika 2.7: Tipični oblici Košijevih horizonta na dvodimenzionalnim prostor-vremenima.

U teoriji relativnosti, Košijev horizont predstavlja granicu oblasti prostor-vremena koje se može predvideti znajući fizičko stanje na skupu S. Nekoliko osnovnih svojstava oblasti zavisnosti i Košijevih horizonta dato je u nastavku:

Teorema 2.7.1 ([12],[14]) *Neka je S ahronalni podskup prostor-vremena M. Tada važi:*

i. $S \subset D^+(S) \subset J^+(S)$;

ii. $D^+(S) \cap I^-(S) = \varnothing$;

iii. *Ako* $p \in D^+(S)$ *onda* $I^-(p) \cap I^+(S) \subset D^+(S)$;

iv. $\partial D^+(S) = H^+(S) \cup S$;

v. $\partial D(S) = H(S)$;

vi. $H^+(S)$ *je ahronalan skup.*

■

Ako se dodatno pretpostavi da je S i zatvoren skup, može se pokazati da važi sledeća teorema:

Teorema 2.7.2 ([12][14]) *Neka je S zatvoren i ahronalan podskup prostor-vremena M. Tada važi:*

i. $H^+(S)$ *je zatvoren i ahronalan skup;*

ii. $H^+(S) = (I^+(S) \cup S) \cap (I^-(D^+(S)))$;

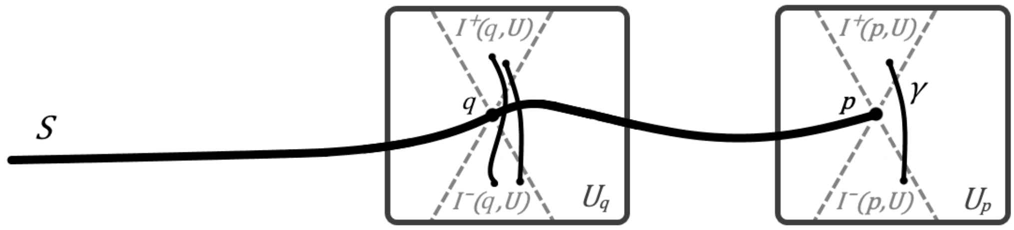
iii. $I^+(H^+(S)) = I^+(S) \backslash D^+(S)$;

iv. $\mathrm{int}(D^+(S)) = I^-(D^+(S)) \cap I^+(S)$;

v. $\mathrm{int}(D^+(S)) = I^-(D^+(S)) \cap I^+(D^-(S))$.

■

Definicija 2.7.3 *Neka je S ahronalan skup u prostor-vremenu M. Ivica skupa S, u oznaci* edge(S)*, predstavlja skup svih tačaka* $p \in \text{cl}(S)$*, za koje važi da svaka okolina* $U_p \in \mathcal{U}(p)$ *sadrži krivu vremenskog tipa od* $I^-(p, U)$ *do* $I^+(p, U)$ *koja ne seče skup S.*



Slika 2.8: Tačka p pripada skupu edge(S), za razliku od tačke q.

Svojstva Košijevih horizonta sada omogućuju da se uvidi da Košijevi horizonti imaju strukturu sličnu kao ahronalni rubovi (videti Teoremu 2.3.4):

Korolar 2.7.1 ([31]) *Neka je S ahronalan skup u prostor-vremenu M. Ako je* $H^+(S) \backslash \text{edge}(H^+(S))$ *neprazan, tada je ovaj skup i zatvorena i ahronalna topološka hiperpovrš u M.*

■

Teorema 2.7.3 ([8], [12],[14]) *Ako je S ahronalan skup u prostor-vremenu M, onda je svaka tačka iz skupa* $H^+(S) \backslash \text{edge}(S)$ *buduća rubna tačka geodezijske krive svetlosnog tipa u* $H^+(S)$*. Ova geodezijska linija je tad ili prošlo neproduživa u M ili ima prošlu rubnu tačku na* edge(S)*.*

■

Sledeća teorema povezuje Košijeve površi, oblasti zavisnosti i Košijeve horizonte, te se u nekim izvorima navodi i kao definicija Košijeve površi. Dokaz sledi na osnovu definicija ovih skupova i Teoreme 2.7.1:

Teorema 2.7.4 ([12],[18]) *Ako je S ahronalan skup u prostor-vremenu M, onda su sledeći uslovi ekvivalentni:*

i. *S je Košijeva površ u M;*

ii. $D(S) = M$*;*

iii. $H(S) = \varnothing$.

■

Ako se unutrašnost oblasti zavisnosti ahronalnog skupa u *proizvoljnom* prostor-vremenu posmatra kao zasebno prostor-vreme, može se sledećim teoremama pokazati da je ono i globalno hiperbolično:

Teorema 2.7.5 ([8]) *Ako je S zatvoren i ahronalan skup u M i* $p \in D^+(S) \backslash H^+(S)$*, onda svaka prošlo neproduživa kauzalna kriva koja prolazi kroz p seče* $I^-(S)$*.*

Dokaz.

Neka je $p \in D^+(S) \backslash H^+(S)$ i neka je γ prošlo neproduživa kauzalna kriva kroz p. Tada je moguće naći tačku $q \in D^+(S) \cap I^+(p)$ i prošlo neproduživu kauzalnu krivu λ koja prolazi kroz q tako da za svaku tačku $x \in \lambda$ postoji tačka $y \in \gamma$ za koju je ispunjeno $y \in I^-(x)$. Kako kriva λ seče skup S u nekoj tački $x_0 \in \lambda \cap S$, mora postojati tačka $y_0 \in \gamma \cap I^-(S)$. To znači da kriva γ seče skup $I^-(S)$.

■

Teorema 2.7.6 ([8]) *Neka je dat zatvoren i ahronalan skup S u M i tačka $p \in \mathrm{int}(D(S))$. Tada svaka neproduživa kauzalna kriva kroz p seče skupove $I^-(S)$ i $I^+(S)$.*

Dokaz.

Na osnovu Teoreme 2.7.1, unutrašnjost skupa $D(S)$ data je sa:

$$\mathrm{int}(D(S)) = D(S) \backslash \partial D(S) = D(S) \backslash H(S) = (D^+(S) \cup D^-(S)) \backslash (H^+(S) \cup H^-(S)),$$

što znači da su za proizvoljnu tačku $p \in \mathrm{int}(D(S))$ zadovoljeni uslovi prethodne teoreme. Zato i među svim prošlo neproduživim kauzalnim krivama koje prolaze kroz p, sve neprodužive krive vremenskog tipa seku skup $I^-(S)$.

Sa druge strane, na osnovu četvrte stavke iz Teoreme 2.7.2 sledi da $p \in I^+(S)$, te tada svaka neproduživa kauzalna kriva po definiciji povezuje tačku p sa svojom kauzalnom budućnošću, tj. seče skup $I^+(p) \subset I^+(S)$. Time je dokaz završen.

■

Treba napomenuti da je analogna teorema za $p \in \mathrm{cl}(D^+(S))$ dokazana u [32]. Sada se može pokazati:

Teorema 2.7.7 ([6], [8],[14]) *Neka je S zatvoren i ahronalan skup u prostor-vremenu M. Tada je:*

i. *uslov jake kauzalnosti zadovoljen na* $\mathrm{int}(D(S))$;

ii. *uslov unutrašnje kompaktnosti zadovoljen na* $\mathrm{int}(D(S))$.

■

Ova teorema pokazuje da je $\mathrm{int}(D(S))$, ako se posmatra kao prostor-vreme, globalno hiperbolično. Da bi se pokazala globalna hiperboličnost za čitav skup $D(S)$, moraju se nametnuti dodatni uslovi:

Teorema 2.7.8 ([8]) *Neka je dat zatvoren i ahronalan skup S u M takav da je skup $J^+(S) \cap J^-(S)$ kompaktan i da je na njemu uslov jake kauzalnosti zadovoljen. Tada je $D(S)$ globalno hiperbolično prostor-vreme.*

■

Sličnim se argumentima kao u dokazu prethodne teoreme može pokazati sledeća teorema:

Teorema 2.7.9 ([10]) *Neka je S topološka hiperpovrš u prostor-vremenu M, koja je akauzalna, tj. za koju važi:*

$$p, q \in S \quad \Rightarrow \quad p \not< q.$$

Tada je $D(S)$ globalno-hiperbolično prostor-vreme.

■

Takođe, zahvaljujući Teoremama 2.7.4 i 2.7.7, može se pokazati i drugi smer Teoreme 2.6.3:

Korolar 2.7.2 ([8],[10], [14]) *Ako je S Košijeva površ u prostor-vremenu M, onda je M globalno hiperbolično prostor-vreme.*

Dokaz.

Korolar sledi direktno ako se primeti da na osnovu Teoreme 2.7.4 važi da je $D(S) = M$, kao i da je $\partial D(S) = H(S) = \varnothing$. Kako je tada $\mathrm{int}(D(S)) = D(S) \backslash \partial D(S) = D(S) = M$, sledi i da je M globalno hiperbolično prostor-vreme, na osnovu Teoreme 2.7.7.

■

Ova ekvivalencija prostor-vremena sa Košijevim površima i globalno hiperboličnih prostor-vremena jedna je od najpoznatijih, najznačajnijih i najkorisnijih u Lorencovoj geometriji.

Glava 3

Teoreme singulariteta

Ajnštajnove jednačine gravitacionog polja predstavljaju sistem nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina koje povezuju geometriju prostor-vremena (preko Ričijevog tenzora) sa tzv. *materijalnim sadržajem* tog prostor-vremena (preko tenzora energije-impulsa). Kao takve, da bi se rešile po metričkim koeficijentima, bilo je nužno koristiti ili izrazito komplikovane pristupe ili uvesti dodatne fizičke argumente (na primer, savršena sferno simetrična distribucija mase), koje uprošćavaju sistem.

Zanimljivo, prva rešenja ovih jednačina (Švarcšildov i Fridmanov model) opisivala su prostor-vremena, koja su sadržala tačke singulariteta, u kojima su krivina, masa i energija divergirale i postale proizvoljno velike. Štaviše, ovi singulariteti nisu bili singulariteti polja definisanih na prostor-vremenu, već su bili singulariteti samog prostor-vremena, u kojima je bilo kakva fizička deskripcija bila nemoguća. Iz ovog je razloga bilo problematično najpre definisati singularitete, naći njihove pokazatelje, pokušati ih klasifikovati, i ispitati koji su to razlozi koji dovode do pojave singulariteta u prostor-vremenu. Ova pitanja i pristupi njihovim razrešenjima predstavljena su u nastavku.

3.1 Uvod

Singulariteti u Švarcšildovom i Fridmanovom rešenju jednačina polja bili su očigledni iz odgovarajućih metričkih koeficijenata, ali su se isprva objašnjavali kao posledica pojednostavljujućeg uslova visokog stepena simetrije prostor-vremena. Sam Ajnštajn je verovao da geometrijska teorija prostor-vremena ne bi smela sadržati ovakve neregularnosti, te je objavio nekoliko radova kojima je podržavao ovakav stav (tada su i definisani Ajnštajn-Rozenov most i postavljena hipoteza nepravilnog širenja i sabijanja asimetričnog Univerzuma).

Međutim, situacija se promenila kada se otkrilo da je “singularitet” Švarcšildovog rešenja $r = 2\gamma m/c^2$ zapravo koordinatni artefakt, te da ga je moguće pogodnom koordinatnom transformacijom otkloniti. Sa druge strane, singularitet u $r = 0$ bio je drugačije prirode i i nije mogao biti otklonjen nikakvom transformacijom koordinata. Uz to, Penrouz i Hoking pokazali su da čak i pri dovoljno malom perturbacijom rešenja ovakvi singulariteti moraju postojati, te je njihova egzistencija na kraju i prihvaćena kao generalno svojstvo geometrije prostor-vremena.

Tada se pristupilo problemu definisanja singulariteta. Za razliku od singulariteta nekog polja definisanog na prostor-vremenu okarakterisanog eksplozijom vrednosti neke komponente polja, ovde treba uočiti singularitet same metrike, koja je dobro definisana u *svakoj* tački prostor vremena. Stoga nijedna tačka singulariteta ne sme biti deo prostor-vremena, već mora biti “van” njega. Za singularitet se zato ne može reći “kad” ili “gde” se tačno nalazi.

Sa druge strane, definisanje singulariteta može takođe biti otežano činjenicom da divergencije tenzora krivine (Rimanov tenzor) mogu zavisiti od izbora baze, te što se čak i invarijante krivine mogu "lepo ponašati" u blizini singulariteta (npr. Kretschmannov skalar $\kappa = R^{ijkl}R_{ijkl}$, skalar krivine R ili polinomi po izvodima tenzora krivine). Ipak, ako ove invarijante zaista teže beskonačnosti kad neka koordinata teži kritičnoj vrednosti, to može biti pokazatelj posebne klase singulariteta, koji se nazivaju *singulariteti jakih krivina* i generalno odvojeno razmatraju (videti kraći pregled u [33]).

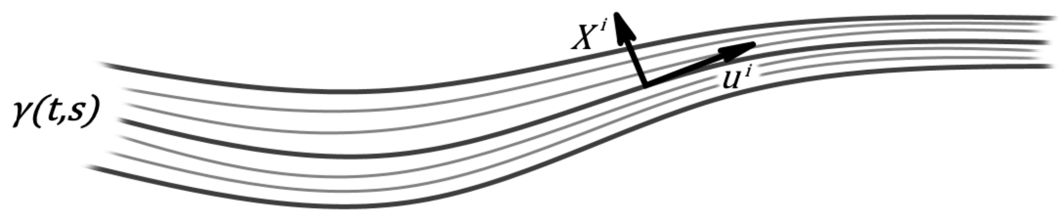
Klasična definicija singulariteta zasniva se krivama na prostor-vremenu, jer su one objekti koji pripadaju samom prostor-vremenu, i pokazuju kako se neki posmatrač (u smislu teorije relativnosti) kreće u vremenu i prostoru. U tom slučaju bi se singularitet mogao definisati kao tačka u kojoj svaki posmatrač "nestane" sa prostor-vremena *u konačnom vremenu*. Singularitetom se onda može nazvati i tačka u prostor vremenu, iz koje se čini da je sav materijalan sadržaj *trenutno* nastao, pre *konačno mnogo* vremena. Oba ova singulariteta mogu se tumačiti uz pomoć neprodužive kriva, čiji parametar (najčešće sopstveno vreme) uzima vrednosti iz ograničenog skupa, odnosno čiji se domen ne može produžiti na čitav skup $\mathbb{R}$. Ovo je u bliskom odnosu sa *geodezijskom kompletnošću* mnogostrukosti:

Definicija 3.1.1 *Mnogostrukost M se naziva* geodezijski kompletna *ako je domen svake neprodužive geodezijske krive na M skup realnih brojeva* $\mathbb{R}$. *Prostor-vreme M naziva se* vremenski *(resp.* prostorno, svetlosno*)* geodezijski kompletno *ako su sve neprodužive geodezijske krive vremenskog (resp. prostornog, svetlosnog) tipa na M dobro definisane nad čitavim* $\mathbb{R}$.

Zbog gornjih razloga, vremenska ili svetlosna geodezijska nekompletnost generalno se uzima kao kriterijum za egzistenciju singulariteta prostor-vremena. Mada ono ne pokriva sve slučajeve (npr. pomenute singularitete jakih krivina), jasno je da nekompletnost signalizira neregularno ponašanje. Teoreme singulariteta, koje su nastale kao rezultat analize gravitacionog fokusiranja i globalnih svojstava prostor-vremena, dokazuju ispravnost ovog zaključka za široku klasu prostor-vremena, i to pri dosta generalnim uslovima.

3.2 Jednačina geodezijske devijacije

Kako bi se argumentovale teoreme singulariteta, neophodno je izvesti jednačinu geodezijske devijacije. Ova jednačina povezuje tendencije geodezijskih krivih da se približavaju ili udaljavaju jedna od druge sa krivinom mnogostrukosti, te se može koristiti u opisu dejstva gravitacionih privlačenja.



Slika 3.1: Familija geodezijskih krivih $\gamma(t,s)$ i tipični vektori iz oba polja.

Neka je data jednoparametarska familija geodezijskih krivih $\gamma(t,s)$, takva da je za svako $s \in \mathbb{R}$ kriva $\gamma_s(t)$ geodezijska kriva parametrizovana affinim parametrom t. Neka je ova familija glatka u smislu da postoji glatko preslikavanje $(t,s) \mapsto \gamma_s(t)$, lokalno obeleženo kao $x^i(t,s)$, sa glatkom inverznom funkcijom. Tada je na prirodan način moguće definisati dva vektorska polja tangentna na dvodimenzionalnu površ Σ generisanu geodezijskim krivama: $u^i(s,t) = \partial x^i(s,t)/\partial t$, koje je tangentno geodezijskim krivama (time važi $\langle u, \nabla u^i \rangle = 0$), i $X^i(s,t) = \partial x^i(s,t)/\partial s$, koje je tzv. *polje vektora devijacije*.

Da bi se jednačina geodezijske devijacije izvela, neophodno je najpre poznavati svojstva ovih polja, od kojih su najznačajnija pomenuta u sledećoj teoremi:

Teorema 3.2.1 ([12],[34]) *Za vektorska polja u i X važi da je:*

i. $\langle u, X\rangle$ *nezavisno od parametra t, a da je* $\langle u, u\rangle$ *nezavisno od oba parametra;*

ii. *moguće naći afinu transformaciju parametra t tako da uvek važi relacija* $\langle X, \nabla u^2\rangle = 0$*;*

iii. *moguće naći afinu transformaciju parametara tako da važi* $\langle u, X\rangle = 0$*, za svaku geodezijsku krivu vremenskog ili prostornog tipa za koju važi* $u^2 \neq 0$*.*

■

Poslednja teorema zapravo govori o tome koliko je korisno praviti reparametrizaciju familije geodezijskih kriva vremenskog ili prostornog tipa, jer se time može ostvariti da u svakoj tački elementa ove familije vektor devijacije bude *ortogonalan* na tangentne vektore geodezijskih krivih. Primetimo da tada važi i $[\partial_t, \partial_s] = 0$, što se svodi na jednakost $\langle X, \nabla u^i\rangle = \langle u, \nabla X^i\rangle$.

Radi konciznosti zapisa, neophodno je uvesti sledeće oznake:

- vektor priraštaja: X^i, za koji je $\langle X, u\rangle = 0$,
- relativna brzina: $v^i = \langle u, \nabla X^i\rangle = u^k\nabla_k X^i$,
- relativno ubrzanje: $a^i = \langle u, \nabla v^i\rangle = \langle u, \nabla\langle u, \nabla X^i\rangle\rangle = u^j\nabla_j(u^k\nabla_k X^i)$,

pri čemu se onda v^i tumači kao relativna brzina objekta koje se kreće duž jedne geodezijske krive, u odnosu na neku infinitezimalno blisku geodezijsku krivu. Slično tumačenje važi i za relativno ubrzanje.

Pažljivim raspisivanjem, relativno ubrzanje a^i se može dovesti u vezu sa Rimanovim tenzorom na sledeći način (Ajnštajnova konvencija sumiranja se i ovde podrazumeva):

$$\begin{aligned}
a^i &= u^j\nabla_j(u^k\nabla_k X^i) = u^j\nabla_j(X^k\nabla_k u^i)\\
&= (u^j\nabla_j X^k)(\nabla_k u^i) + u^j X^k\nabla_j\nabla_k u^i\\
&= (X^j\nabla_j u^k)(\nabla_k u^i) + u^j X^k\nabla_k\nabla_j u^i - R^i_{\ jkl}\, u^j X^k u^l\\
&= X^j\nabla_j(u^k\nabla_k u^i) - R^i_{\ jkl}\, u^j X^k u^l\\
&= X^j\nabla_j\langle u, \nabla u^i\rangle - R^i_{\ jkl}\, u^j X^k u^l.
\end{aligned}$$

Nakon što se iskoristi činjenica da je prvi član identički jednak nuli, direktno sledi jednakost:

$$a^i = -R^i_{\ jkl}\, u^j X^k u^l. \tag{3.2.1}$$

Jednačina (3.2.1) naziva se *jednačina geodezijske devijacije*. Ona omogućava da se krivina posmatra i na alternativan način, jer je na osnovu nje moguće zaključiti da je ispunjeno $a^i = 0$ za sve familije geodezijskih krivih ako i samo ako važi $R^i_{\ jkl} = 0$, tj. ako je metrika uočenog prostor-vremena ravna.

To znači da geodezijske krive u neravnim prostor-vremenima ubrzavaju jedna prema drugoj ili jedna od druge, što na primer ne bi bilo ispunjeno u prostor-vremenu Minkovskog. To takođe znači da će se čak i geodezijske krive (putanje slobodnih objekata), koje su prvobitno bile paralelne, približavati ukoliko postoji gravitaciono privlačenje nekog objekta u prostor-vremenu (npr. zvezde ili planete).

3.3 Kongruencije geodezijskih krivih

Matematički aparat teorema singulariteta treba upotpuniti uvođenjem još nekoliko pojmova, u prvom redu pojma kongruencije krivih. Neka se zato posmatra mnogostrukost M dimenzije n i otvoren skup O u M. Važi sledeća definicija:

Definicija 3.3.1 *Kongruencija u O je familija krivih sa osobinom da svaka tačka $p \in O$ pripada tačno jednoj krivoj iz ove familije. Kongruencija geodezijskih krivih u O se naziva geodezijskom kongruencijom u O.*

Nije teško zaključiti da tangentni vektori na krive neke kongruencije formiraju vektorsko polje na O, a može se pokazati (videti npr. [12]) da svako neprekidno vektorsko polje na O generiše jedinstvenu kongruenciju krivih. Ako su svi vektori iz ovog polja vremenskog (resp. svetlosnog, prostornog tipa), onda se odgovarajuća kongruencija zove *kongruencija vremenskog* (resp. *svetlosnog, prostornog*) *tipa*.

Treba naglasiti da će se nadalje krive u kongruencijama smatrati glatkim, jer neprekidnost krivih u kongruenciji nije dovoljna kako bi se mogle iskoristiti određene korisne relacije. Svojstvo glatkosti geodezijskih kongruencija može se opisati i uz pomoć glatkosti odgovarajućeg vektorskog polja:

Definicija 3.3.2 *Glatku kongruenciju na O (kauzalnih) geodezijskih krivih čine integralne krive (kauzalnog tipa) definisane uz pomoć glatkog vektorskog polja u na O:*

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = u^\alpha(x),$$

Glatka vektorska polja u i βu, gde je β glatka nenula funkcija, definišu istu glatku kongruenciju.

Neka je sada data glatka kongruencija buduće usmerenih geodezijskih kriva vremenskog tipa na prostor vremenu dimenzije n. Bez gubitka opštosti se može pretpostaviti da su geodezijske krive parametrizovane sopstvenim vremenom τ, tako da je odgovarajuće polje u vektora tangentnih na geodezijske krive normalizovano, $\langle u, u\rangle = -1$. Primetno je da za ovo polje u mora važiti:

$$\nabla_u u = 0, \quad \text{i} \quad \frac{1}{2}\nabla\langle u, u\rangle = \langle u, \nabla u\rangle = 0.$$

Tada je tenzor $B_{\alpha\beta}$ definisan preko relacije:

$$B_{\alpha\beta} := \nabla_\alpha u_\beta,$$

i predstavlja tenzor "prostornog tipa", u smislu da za njegovo dejstvo na vektore vremenskog tipa iz polja u važi $B_{\alpha\beta}\, u^\alpha = 0 = B_{\alpha\beta}\, u^\beta$ (videti [12]).

Fizička interpretacija ovog tenzora može se uvideti posmatranjem date glatke familije krivih u kongruenciji, pri čemu je sa X označeno polje vektora devijacije. Tada se relacija $[u, X] = 0$ svodi na:

$$\nabla_u X = \nabla_X u = X^\beta \nabla_\beta u^\alpha = X^\beta g^{\alpha\mu} \nabla_\beta u_\mu = X^\beta g^{\alpha\mu} B_{\beta\mu} = X^\beta B^\alpha_\beta,$$

što znači da B^α_β pokazuje da li je polje X paralelno preneseno duž polja u.

Pozitivno definitan simetrični tenzor projekcije $h_{\alpha\beta}$ asociran jediničnom vektoru u dat je sa:

$$h_{\alpha\beta} := g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta,$$

te se preko njega mogu još definisati:

- *skalar ekspanzije*: $\theta := h^{\alpha\beta}\, B_{\alpha\beta}$;
- *tenzor uvijanja*: $\omega_{\alpha\beta} := \frac{1}{2}(B_{\alpha\beta} - B_{\beta\alpha})$;
- *tenzor smicanja*: $\sigma_{\alpha\beta} := \frac{1}{2}(B_{\alpha\beta} + B_{\beta\alpha}) - \frac{\theta}{n-1} h_{\alpha\beta}$.

Značaj ovih veličina sledi direktno kada se primeti da je $B_{\alpha\beta}$ moguće zapisati kao:

$$B_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{\theta}{n-1} h_{\alpha\beta}, \tag{3.3.1}$$

koja je, dakle, dekompozicija na tenzore koji su svi ortogonalni na u i ortogonalni jedni na druge, pri čemu $\omega_{\alpha\beta}$ i $\sigma_{\alpha\beta}$ nemaju trag, tj. važi $\omega^{\alpha}_{\ \alpha} = 0 = \sigma^{\alpha}_{\ \alpha}$. Za generalizaciju gornjih tenzora i dekompozicije na negeodezijskim kongruencijama videti [32].

No to onda znači da je trag tenzora $B_{\alpha\beta}$ dat sa:

$$B^{\alpha}_{\ \alpha} = 0 + 0 + \frac{\theta}{n-1} h^{\alpha}_{\ \alpha} = \frac{\theta}{n-1} h^{\alpha}_{\ \alpha} = \frac{\theta}{n-1}(n-1) = \theta,$$

zato što je $h^{\alpha}_{\ \alpha} = g^{\alpha}_{\ \alpha} + u^{\alpha} u_{\alpha} = n + (-1) = n - 1$.

Stopa promene veličine $B^{\alpha}_{\ \alpha} = \theta$ može se dobiti ukoliko se analizira izraz $u^{\gamma}\nabla_{\gamma} B_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}
u^{\gamma}\nabla_{\gamma} B_{\alpha\beta} &= u^{\gamma}\nabla_{\gamma}\nabla_{\alpha} u_{\beta} = u^{\gamma}\nabla_{\alpha}\nabla_{\gamma} u_{\beta} + R^{\delta}_{\ \gamma\alpha\beta}\, u^{\gamma} u_{\delta} = \\
&= \nabla_{\alpha}(u^{\gamma}\nabla_{\gamma} u_{\beta}) - (\nabla_{\alpha} u^{\gamma})(\nabla_{\gamma} u_{\beta}) + R^{\delta}_{\ \gamma\alpha\beta}\, u^{\gamma} u_{\delta} = \\
&= \nabla_{\alpha}(u^{\gamma} B_{\gamma\beta}) - B^{\gamma}_{\ \alpha}\, B_{\gamma\beta} + R^{\delta}_{\ \gamma\alpha\beta}\, u^{\gamma} u_{\delta} = \\
&= -B^{\gamma}_{\ \alpha}\, B_{\gamma\beta} + R^{\delta}_{\ \gamma\alpha\beta}\, u^{\gamma} u_{\delta},
\end{aligned}$$

odakle se može zaključiti da je i:

$$\begin{aligned}
u^{\gamma}\nabla_{\gamma} B^{\alpha}_{\ \beta} &= u^{\gamma}\nabla_{\gamma}(g^{\alpha\varepsilon} B_{\varepsilon\beta}) = g^{\alpha\varepsilon}\, u^{\gamma}\nabla_{\gamma} B_{\varepsilon\beta} = \\
&= g^{\alpha\varepsilon}(-B^{\gamma}_{\ \varepsilon}\, B_{\gamma\beta} + R^{\delta}_{\ \gamma\varepsilon\beta}\, u^{\gamma} u_{\delta}) = \\
&= -B^{\gamma\alpha}\, B_{\gamma\beta} + g^{\alpha\varepsilon}\, R^{\delta}_{\ \gamma\varepsilon\beta}\, u^{\gamma} u_{\delta} = \\
&= -B^{\gamma\alpha}\, B_{\gamma\beta} - g^{\alpha\varepsilon}\, R^{\delta}_{\ \gamma\beta\varepsilon}\, u^{\gamma} u_{\delta},
\end{aligned}$$

gde poslednja jednakost važi zato što je $R^{\alpha}_{\ \beta\mu\nu} = -R^{\alpha}_{\ \beta\nu\mu}$. Kontrakcijom se dobija:

$$\begin{aligned}
u^{\gamma}\nabla_{\gamma}\theta &= u^{\gamma}\nabla_{\gamma} B^{\alpha}_{\ \alpha} = -B^{\gamma\alpha}\, B_{\gamma\alpha} - g^{\alpha\varepsilon}\, R^{\delta}_{\ \gamma\alpha\varepsilon}\, u^{\gamma} u_{\delta} = \\
&= -B^{\gamma\alpha}\, B_{\gamma\alpha} - g^{\delta\mu}\, g^{\alpha\varepsilon}\, R_{\mu\gamma\alpha\varepsilon}\, u^{\gamma} u_{\delta} = \\
&= -B^{\gamma\alpha}\, B_{\gamma\alpha} - g^{\delta\mu}\, R_{\mu\gamma}\, u^{\gamma} u_{\delta} = \\
&= -B^{\gamma\alpha}\, B_{\gamma\alpha} - R_{\mu\gamma}\, u^{\gamma} u^{\mu}.
\end{aligned}$$

Uvrštavajući onda izraz (3.3.1) u gornju jednačinu, dobija se:

$$u^{\gamma}\nabla_{\gamma}\theta = -\frac{\theta^2}{n-1} - \sigma^{\gamma\alpha}\sigma_{\gamma\alpha} + \omega^{\gamma\alpha}\omega_{\gamma\alpha} - R_{\mu\gamma}\, u^{\mu} u^{\gamma}, \tag{3.3.2}$$

gde su prva tri člana dobijena raspisivanjem izraza $B^{\gamma\alpha}\, B_{\gamma\alpha}$, koristeći svojstva ortogonalnosti, simetričnosti tenzora smicanja i antisimetričnosti tenzora uvijanja. Skalari $\sigma^{\gamma\alpha}\sigma_{\gamma\alpha}$ i $\omega^{\gamma\alpha}\omega_{\gamma\alpha}$ su pozitivni ([34]).

Ako se sad primeti da je $d\theta/d\tau = u^{\gamma}\nabla_{\gamma}\theta$, jednačina (3.3.2) se može zapisati kao:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{\theta^2}{n-1} - \sigma^{\gamma\alpha}\sigma_{\gamma\alpha} + \omega^{\gamma\alpha}\omega_{\gamma\alpha} - R_{\mu\gamma}\, u^{\mu} u^{\gamma}. \tag{3.3.3}$$

Ova jednačina zove se *Rejšodurijeva jednačina* i predstavlja ključnu jednačinu u dokazima teorema singulariteta, te se sa njom može pokazati da su singulariteti prirodna pojava u opštoj teoriji relativnosti. Ona ima velikog značaja i u ispitivanju klasičnih rešenja Ajnštajnovih jednačina polja.

3.4 Rejšodurijeva teorema

Sledeća teorema predstavlja prvi rezultat koji se tiče predviđanja singulariteta pod generalnim uslovima, i smatra se prvom teoremom singulariteta (objavljena je 1955. godine). Jedna od osnovnih pretpostavki teoreme jeste da je kongruencija *irotaciona* u smislu da je tenzor uvijanja jednak nuli, $\omega_{\alpha\beta} = 0$, kao i da je tzv. *Rejšodurijev skalar* nepozitivan, $R_{\mu\nu}\, u^{\mu} u^{\nu} \geq 0$.

Teorema 3.4.1 ([32]) *Neka je u tangentno vektorsko polje irotacione geodezijske kongruencije vremenskog tipa i neka važi uslov $R_{\mu\nu}\, u^{\mu} u^{\nu} \geq 0$. Ako ekspanzija θ uzima negativnu vrednost θ_0 u nekoj tački geodezijske krive iz kongruencije, tada θ divergira duž te krive u konačnom vremenu.*

Dokaz.

Pod pretpostavkama teoreme, Rejšodurijeva jednačina (3.3.3) implicira da je:

$$\frac{d\theta}{d\tau} \leq -\frac{1}{n-1}\theta^2.$$

Ovo znači da se vrednost ekspanzije θ smanjuje duž geodezijskih krivih, te da će i ostati negativna ukoliko je θ inicijalno uzimalno negativne vrednosti. Neka je $\tilde{\theta} = -\theta$. Na osnovu gornje nejednakosti je:

$$\frac{d\tilde{\theta}}{d\tau} \geq \frac{1}{n-1}\tilde{\theta}^2 \quad \text{odnosno:} \quad \frac{d\tau}{d\tilde{\theta}} \leq \frac{n-1}{\tilde{\theta}^2},$$

te se na $\tau(\tilde{\theta})$ može gledati kao na funkciju koja pokazuje u kom trenutku sopstvenog vremena će vrednost $\tilde{\theta}$ biti dostignuta.

Međutim, to implicira da za svako fiksirano $\tilde{\theta} > \tilde{\theta}_0$, gde je $\tilde{\theta}_0 = -\theta_0$, važi:

$$\tau(\tilde{\theta}) \leq \tau(\tilde{\theta}_0) + \int_{\tilde{\theta}_0}^{\tilde{\theta}} \frac{n-1}{\tilde{\theta}^2}\, d\tilde{\theta} = \tau(\tilde{\theta}_0) + (n-1)\left(\frac{1}{\tilde{\theta}_0} - \frac{1}{\tilde{\theta}}\right) \leq \tau(\tilde{\theta}_0) + \frac{n-1}{\tilde{\theta}_0} =: \tau_{\infty},$$

što znači da će čak i vrednost $\tilde{\theta} = \infty$, tj. vrednost $\theta = -\infty$, biti dostignuta najkasnije u nekom konačnom trenutku τ_{∞} sopstvenog vremena.

■

Treba ovde naglasiti da činjenica da apsolutna vrednost ekspanzije dostiže beskonačnost ne mora signalizirati postojanje singulariteta u prostor-vremenu, već da može samo implicirati singularnost krivih u kongruenciji, tj. pojavu konvergencije krivih (gravitaciono fokusiranje), u kom slučaju se mogu konstruisati odgovarajuće obvojnice, tj. *kaustike*. Ipak, kada se uvedu dodatna globalna razmatranja, egzistencija singulariteta se može pokazati.

Bitan uslov u formulaciji Rejšodurijeve teoreme svakako je nenegativnost Rejšodurijevog skalara. Ova veličina je geometrijska u smislu da zavisi isključivo od metrike (tj. metričkih koeficijenata) i geodezijskih krivih u kongruenciji. Ipak, ako se pretpostavi da su Ajnštajnove jednačine gravitacionog polja zadovoljene:

$$R_{\mu\nu} = \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \quad \text{gde je } T = T^{\mu}_{\ \mu} \text{ i } \kappa = \frac{8\pi\gamma}{c^2},$$

onda je poslednji član u Rejšodurijevoj jednačini moguće izraziti kao:

$$R_{\mu\nu}\, u^{\mu} u^{\nu} = \kappa\left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T\, g_{\mu\nu}\right] u^{\mu} u^{\nu} = \kappa\left[T_{\mu\nu}\, u^{\mu} u^{\nu} - \frac{1}{2}T\,\langle u, u\rangle\right] = \kappa\left[T_{\mu\nu}\, u^{\mu} u^{\nu} + \frac{1}{2}T\right].$$

Međutim, izraz $T_{\mu\nu}\, u^{\mu} u^{\nu}$ fizički predstavlja vrednost energetske gustine materije, kako bi ona delovala posmatraču čiji je kvadrivektor brzine u^{μ}. Zato se generalno smatra da u prostor-vremenu koji zadovoljava Ajnštajnove jednačine i koji ima fizičkog smisla mora važiti da je energetska gustina nenegativna, $T_{\mu\nu}\, u^{\mu} u^{\nu} \geq 0$, za svako u^{μ} vremenskog tipa. Ova pretpostavka se zove *slab energetski uslov*.

Sa druge strane, pretpostavka po kojoj važi:

$$T_{\mu\nu}\, u^{\mu} u^{\nu} \geq -\frac{1}{2} T,$$

za svako u^{μ} vremenskog tipa zove se *jak energetski uslov* i bazira se na shvatanju po kome pritisci kojima je materija izložena ipak nisu toliko veliki da bi Rejšodurijev skalar bio negativan. Vredi napomenuti i da su ove dve pretpostavke matematički ne zavisne, to jest jak energetski uslov ne implicira nužno slab energetski uslov, a ne važi ni obrnuto.

U slučaju geodezijskih kongruencija svetlosnog tipa, osnovni problem je što ne postoji jedinstven, prirodan način na koji bi se normalizovalo tangentno polje na kongruenciji i skalirao afini parametar λ ovih krivih. Ipak, postoji više načina na koji se mogu postaviti jednačine geodezijske devijacije za geodezijske krive svetlostnog tipa (videti [8] ili [14]), kao i jednačina analogna Rejšodurijevoj jednačini (3.3.3):

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{\theta^2}{n-2} - \hat{\sigma}^{\gamma\alpha} \hat{\sigma}_{\gamma\alpha} + \hat{\omega}^{\gamma\alpha} \hat{\omega}_{\gamma\alpha} - R_{\mu\gamma}\, k^{\mu} k^{\gamma}, \tag{3.4.1}$$

gde je k odgovarajuće tangentno vektorsko polje. Može se pokazati i analogna teorema:

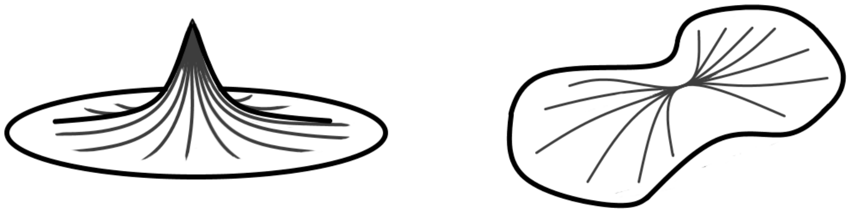
Teorema 3.4.2 ([12]) *Neka je k tangentno vektorsko polje irotacione geodezijske kongruencije svetlosnog tipa i neka važi uslov $R_{\mu\nu}\, k^{\mu} k^{\nu} \geq 0$. Ako ekspanzija θ uzima negativnu vrednost θ_0 u nekoj tački geodezijske krive iz kongruencije, tada θ divergira duž te krive.*

3.5 Konjugovane tačke

Ispitivanje konjugovanih tačaka predstavlja jedan od najelegantijih načina da se dokaz Hoking-Penrouzove teoreme singulariteta izvede. Konjugovane tačke definisane su uz pomoć Jakobijevih polja, kao u nastavku:

Definicija 3.5.1 *Jakobijevo polje na geodezijskoj krivoj γ je vektorsko polje X definisano duž γ i ortogonalno na γ (tj. na njeno tangentno polje u), koje zadovoljava jednačinu geodezijske devijacije (3.2.1):*

$$a^i = -R^i_{\ jkl}\, u^j X^k u^l.$$



Slika 3.2: Izvori i ponori kongruencija mogu biti pokazatelji geodezijske nekompletnosti prostora.

Nestajanje netrivijalnog (nenula) Jakobijevog polja, dakle, znači da tu geodezijske krive u kongruenciji ne ubrzavaju jedna od druge, već da sve one imaju jednu zajedničku tačku, za koji se kaže da je *izvor* ili *ponor* geodezijske kongruencije. Zato izvori i ponori kongruencija mogu biti pokazatelji geodezijske nekompletnosti prostor-vremena. Na Slici 3.2 levo, prostor-vreme je geodezijski nekompletno jer mu je oduzeta jedna tačka (ne pripada mu "vrh" mnogostrukosti). Sa druge strane, na Slici 3.2 desno je prikazano geodezijski kompletno prostor-vreme, samo je tu došlo do gravitacionog fokusiranja.

Sada se mogu definisati konjugovane tačke ali i navesti teoreme (dokazane u [32] i [34] primenom dva različita pristupa) o njihovoj egzistenciji:

Definicija 3.5.2 *Dve tačke p i q na geodezijskoj krivoj γ nazivaju se konjugovanim tačkama ako postoji Jakobijevo polje duž krive γ koje nestaje u tačkama p i q.*

Teorema 3.5.1 *Neka je M prostor-vreme dimenzije n koje zadovoljava jaki energetski uslov i neka je data geodezijska kriva γ vremenskog tipa sa tačkom p na njoj, koja predstavlja izvor geodezijske kongruencije. Ako postoji tačka $r = \gamma(\tau_r)$, takva da je vrednost ekspanzije u njoj negativna, $\theta_r < 0$, i ako je γ dobro definisana (produživa) na intervalu $I = (\tau_r - (n-1)/|\theta_r|, \tau_r + (n-1)/|\theta_r|)$, onda postoji tačka $q \in \gamma(I)$, koja je konjugovana tački p.*

■

Teorema 3.5.2 *Neka je γ geodezijska kriva u prostor-vremenu M, i neka je ispunjen uslov $R_{\mu\nu}\, u^\mu u^\nu \geq 0$ duž ove krive. Ako postoji tačka $\gamma(\tau_1)$ takva da je $R_{\mu\nu}\, u^\mu u^\nu(\tau_1) \neq 0$, onda postoje vrednosti τ_0 i τ_2 takve da je $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2$ i da su $\gamma(\tau_0)$ i $\gamma(\tau_2)$ konjugovane tačke, pod uslovom da je γ dobro definisana (produživa) za ove vrednosti svog parametra.*

■

Napomena. Treba primetiti da prema Teoremi 3.5.1 važi da ako je p izvor kongruencije te postoji tačka r na geodezijskoj krivoj kongruencije u kojoj vrednost ekspanzije teži ka $-\infty$, onda je tačka r konjugovana tački p. Da važi i obrnuto, pokazano je u [32].

Mogu se definisati i tačke koje su konjugovane hiperpovršima prostornog tipa:

Definicija 3.5.3 *Neka je Σ hiperpovrš prostornog tipa i neka je data kongruencija geodezijskih krivih ortogonalna na Σ. Tačka p iz ove kongruencije zove se* tačka konjugovana hiperpovrši Σ *ako postoji netrivijalni vektor devijacije geodezijske krive $X \neq 0$ koji nestaje u p.*

Istim argumentima kao u slučaju parova konjugovanih tačaka se pokazuje i da će p biti konjugovanovana hiperpovrši Σ akko ekspanzija kongruencije ortogonalne na Σ teži ka $-\infty$ u tački p. Primena Rejšodurijeve teoreme onda daje teoremu egzistencije konjugovane tačke između p i Σ:

Teorema 3.5.3 *Neka je M prostor-vreme koje zadovoljava jak energetski uslov, i neka je $\Sigma \subset M$ hiperpovrš prostornog tipa za koju važi da postoji tačka $q \in \Sigma$ u kojoj je ekspanzija negativna, $\theta_q < 0$. Tada duž geodezijske krive γ ortogonalne na Σ, koja prolazi kroz q, postoji tačka p konjugovana hiperpovrši Σ, koja se nalazi najviše udaljena od q za vrednost sopstvenog vremena manjeg od $(n-1)/|\theta_q|$.*

■

U ovom trenutku je nužno obratiti pažnju na dužinu luka geodezijske krive i napraviti analogiju sa geodezijskim krivama u Rimanovim prostorima. U Rimanovim prostorima, dužina luka krive data je sa:

$$L(\gamma) = \int_{\tau_p}^{\tau_q} \sqrt{\langle u, u\rangle_E(\tau)}\, d\tau = \int_{\tau_p}^{\tau_q} \sqrt{g_{\mu\nu}\, u^\mu\, u^\nu(\tau)}\, d\tau,$$

i njena interpretacija je nedvosmislena: ona predstavlja rastojanje između dve tačke određene parametrima τ_p i τ_q mereno duž krive γ, koja ih povezuje. Geodezijske krive su onda one duž kojih funkcija dužine $L(\gamma)$ dostiže minimalnu vrednost.

Situacija se menja u slučaju Lorencovih prostora. Ovde je funkcija "dužine" definisana preko relacije:

$$L(\gamma) = \int_{\tau_p}^{\tau_q} \sqrt{|\langle u, u\rangle(\tau)|}\, d\tau = \int_{\tau_p}^{\tau_q} \sqrt{|g_{\mu\nu}\, u^{\mu}\, u^{\nu}(\tau)|}\, d\tau, \tag{3.5.1}$$

i njena interpretacija uveliko zavisi od kauzalnog karaktera krive γ. Specijalno, ako je kriva γ kauzalnog tipa i njeno odgovarajuće tangentno vektorsko polje je dato sa u, onda je izraz $g_{\mu\nu}\, u^{\mu}\, u^{\nu}$ nepozitivan. To znači da se jednačina (3.5.1) svodi na:

$$L(\gamma) = \int_{\tau_p}^{\tau_q} \sqrt{-\langle u, u\rangle(\tau)}\, d\tau = \int_{\tau_p}^{\tau_q} \sqrt{-g_{\mu\nu}\, u^{\mu}\, u^{\nu}(\tau)}\, d\tau, \tag{3.5.2}$$

i ona se često naziva *funkcija sopstvenog vremena*, jer zaista predstavlja funkciju vremena (u smislu kao iz prethodne glave), tj. funkciju koja raste duž svake buduće usmerene krive. To znači da se "rastojanje" između dva događaja koja su kauzalno povezana meri sopstvenim vremenom koje je proteklo između njih. Zato se ponegde u literaturi funkcija dužine data u (3.5.2) obeležava i sa $\tau(\gamma)$, bez opasnosti od zabune.

Ključna prednost ove funkcije vremena u odnosu na sve ostale svodi se na to da se ona može uzeti kao parametar svake krive kauzalnog tipa. Zato se, na kauzalnoj krivoj γ sa parametrom τ, dve tačke $p = \gamma(\tau_p)$ i $q = \gamma(\tau_q)$ nalaze na međusobnom "rastojanju" jedna od druge koje odgovara razlici parametra krive u tim tačkama:

$$L(\gamma) \equiv \tau(\gamma) = \tau_p - \tau_q, \tag{3.5.3}$$

i upravo ovo svojstvo omogućava da se prethodne tri teoreme egzistencija konjugovanih tačaka mogu iskoristiti u dokazima teorema singulariteta.

Treba još dodatno naglasiti da su na Lorencovim mnogostrukostima krive duž koje funkcija sopstvenog vremena dostiže maksimum (supremum) od većeg značaja za analizu, upravo zbog negativne vrednosti izraza $g_{\mu\nu}\, u^{\mu}\, u^{\nu}$ u jednačini (3.5.2). Štaviše, u dovoljno fizički realističnim prostor-vremenima, funkcija sopstvenog vremena je *maksimalna* duž geodezijske krive (vremenskog tipa) između dva događaja.

Gornji zaključak se često ilustruje *paradoksom blizanaca*: jedan blizanac se nalazi u inercijalnom sistemu reference (te putuje geodezijskom krivom vremenskog tipa), a drugi u neinercijalnom sistemu (te putuje negeodezijskom krivom vremenskog tipa jer na njega utiču sile koje nisu gravitacionog porekla). Naravno, duže je sopstveno vreme između dva referentna događaja blizanca koji se nalazio u inercijalnom sistemu reference.

Na maksimizaciju funkcije sopstvenog vremena može uticati prisustvo konjugovanih tačaka:

Teorema 3.5.4 ([34]) *Neka je γ geodezijska kriva vremenskog tipa između dve tačke p i q. Potreban i dovoljan uslov da γ maksimizuje funkciju dužine između p i q u odnosu na glatke, jednoparametarske varijacije krive γ jeste da γ ne sadrži konjugovane tačke između p i q.*

■

Teorema 3.5.5 ([32], [34]) *Neka je γ glatka kriva vremenskog tipa u prostor-vremenu između tačke $p \in M$ i tačke $q \in \Sigma$, gde je sa Σ obeležena hiperpovrš prostornog tipa. Tada γ maksimizuje funkciju sopstvenog vremena između p i Σ akko je ona geodezijska kriva ortogonalna na Σ, bez konjugovanih tačaka između p i Σ.*

■

U slučaju geodezijskih krivih svetlosnog tipa, analogoni prethodne dve teoreme su slično formulisani.

3.6 Hokingova teorema singulariteta

U prethodnoj glavi je u kontekstu globalne hiperboličnosti pomenut i skup svih neprekidnih i buduće usmerenih kauzalnih kriva između tačaka p i $q \in J^+(p)$, u oznaci $C(p,q)$. Na sličan način se za glatku, ahronalnu hiperpovrš Σ može definisati skup $C(\Sigma,q)$ kao prostor svih neprekidnih (buduće usmerenih) kauzalnih krivih od proizvoljne tačke $p \in \Sigma$ do fiksirane tačke $q \in J^+(\Sigma)$.

Sada se za maksimalnost funkcije dužine u jako kauzalnom prostor-vremenu može pokazati:

Teorema 3.6.1 ([12], [34]) *Neka je M jako kauzalno prostor-vreme i neka se posmatra funkcija dužine $L(\gamma)$ definisana za svako $\gamma \in C(p,q)$. Tada važe implikacije:*

i. Ako funkcija dužine dostiže svoju maksimalnu vrednost za krivu $\hat{\gamma}$, tada je $\hat{\gamma}$ geodezijska kriva bez konjugovanih tačaka.

ii. Ako funkcija dužine definisana na $C(\Sigma,q)$ dostiže maksimalnu vrednost za krivu $\hat{\gamma}$, onda je $\hat{\gamma}$ geodezijska kriva, ortogonalna na Σ i bez konjugovanih tačaka.

■

Jača teorema može se pokazati za globalno hiperbolična prostor-vremena:

Teorema 3.6.2 ([12], [34]) *Ako je M globalno hiperbolično prostor-vreme, onda postoji kriva $\hat{\gamma} \in C(p,q)$ na kojoj funkcija dužine dostiže svoj maksimum. Ako je, dodatno, Σ Košijeva površ prostornog tipa, tada mora postojati kauzalna kriva $\hat{\gamma} \in C(\Sigma,q)$ na kojoj se maksimum funkcije dužine dostiže.*

■

Gornjim teoremama dobijeni su rezultati uz pomoć kojih je moguće dokazati određene teoreme singulariteta. U nastavku sledi formulacija i dokaz tri teoreme egzistencije singulariteta, u smislu geodezijske nekompletnosti vremenskog ili svetlosnog tipa. Četvrta teorema dokazuje postojanje singulariteta pri značajno oslabljenim uslovima.

Prva teorema zove se *Hokingova teorema singulariteta* i može se tumačiti kao teorema koja pokazuje da ako je prostor-vreme globalno hiperbolično prostor-vreme koje se nekom fiksiranom vrednošu skalara ekspanzije širi, onda je ono moralo nastati iz singularnog stanja (tačke) pre konačno mnogo vremena:

Teorema 3.6.3 (Hawkingova teorema singulariteta) *Neka je M globalno hiperbolično prostor-vreme dimenzije n koje zadovoljava jak energetski uslov, i neka u M postoji Košijeva površ Σ regularnosti bar C^2, sa ekspanzijom $\theta \leq c$, za neko fiksirano $c < 0$. Tada nijedna prošlo usmerena kriva vremenskog tipa od Σ ne može imati dužinu veću od $(n-1)/|c|$. Specijalno, sve past-pointing geodezijske krive vremenskog tipa su nekompletne.*

Dokaz.

Pretpostavimo da postoji prošlo usmerena kriva λ vremenskog tipa ortogonalna na Σ, koja počinje iz neke tačke $\lambda(0)$ na Σ i čija je dužina veća od $\tau_c = (n-1)/|c|$, tj. koja je dobro definisana na intervalu $[-\tau_c - \varepsilon, 0]$, za neko $\varepsilon > 0$. Neka je onda $p = \lambda(-\tau_c - \varepsilon)$. Prema Teoremi 3.6.2, mora postojati kriva γ maksimalne dužine, koja spaja tačku p i Košijevu površ Σ i čija je dužina zbog osobine maksimalnosti jednaka ili veća od dužine krive λ.

Onda prema Teoremi 3.6.1, kriva γ ne sme imati konjugovanih tačaka između p i Σ. Međutim, kako je, prema uslovima teoreme, na Košijevoj površi ekspanzija (restrikcija ekspanzije) negativna, prema Teoremi 3.5.3, kriva γ bi morala imati konjugovanu tačku između p i Σ, što je kontradiktorno. Početna kriva λ dužine veće od $(n-1)/|c|$, dakle, ne može postojati.

■

Treba naglasiti da se analogna teorema može dobiti za buduće usmerene geodezijske krive vremenskog tipa, pri čemu odgovarajuća konstanta c mora biti veća od nule. Takva teorema bi, dakle, pokazala postojanje budućeg singulariteta na "rastojanju" najviše $(n-1)/c$.

Takođe, najjači uslov u Teoremi 3.6.3 jeste uslov globalne hiperboličnosti, te može delovati kao da prostor-vreme koje ima pozitivnu ekspanziju pre neće zadovoljavati uslov globalne hiperboličnosti, nego posedovati singularitet. Ipak, uslov globalne hiperboličnosti može da se oslabiti, no tada se mora dodatno zahtevati da posmatrana hiperpovrš bude kompaktna, te se dobija značajno oslabljen zaključak:

Teorema 3.6.4 *Neka je M jako kauzalno prostor-vreme dimenzije n koje zadovoljava jak energetski uslov, i neka u M postoji kompaktna, ahronalna, glatka hiperpovrš Σ prostornog tipa, za koju važi da je $\mathrm{edge}(\Sigma) = \varnothing$. Neka pritom važi da je za svaku prošlo usmerenu geodezijsku kongruenciju normalnu na Σ ekspanzija negativna, tj. neka važi $\theta \leq c < 0$, gde je c maksimalna vrednosti ekspanzije. Tada postoji bar jedna neproduživa past-pointing geodezijska kriva vremenskog tipa čija dužina ne prelazi vrednost $(n-1)/|c|$.*

Ideja dokaza.

Pretpostavimo da važi suprotno, tj. da sve neprodužive past-pointing geodezijske krive vremenskog tipa imaju dužinu veću od $(n-1)/|c|$. Kako je $\widetilde{M} = \mathrm{int}(\mathrm{D}(\Sigma))$ globalno hiperbolično, sve pomenute geodezijske krive prema prethodnoj teoremi moraju biti nekompletne, što znači da one napuštaju $\widetilde{M}$ i seku horizont $H^-(\Sigma)$. Kako je $H(\Sigma)$ rub skupa $D(\Sigma)$, svaka geodezijska kriva mora seći $H^-(S)$ u tačkama koje se nalaze na rastojanju manjem od $(n-1)/|c|$ od hiperpovrši Σ. Odavde je $H^-(S)$ neprazno, a kontradikcija se dobija kada se pokaže da je $H^-(S)$ kompaktno, te sadrži buduće neproduživu geodezijsku krivu svetlosnog tipa, što je nemoguće za kompaktne skupove u jako kauzalnim prostor-vremenima.

■

3.7 Penrouzova teorema singulariteta

Hokingove teoreme singulariteta govore o nekompletnosti geodezijskih krivih u kosmološkom kontekstu, i koriste pretpostavku konstantnosti znaka ekspanzije. Naredne dve teoreme pokazuju nekompletnost geodezijskih krivih svetlosnog tipa u kontekstu relevantnom za gravitacione kolapse. Da bi se do toga došlo, neophodno je definisati *zarobljene površi*, kao u nastavku.

Posmatra se kompaktna podmnogostrukost Σ prostor-vremena kodimenzije 2 prostornog tipa. Svaki normalni prostor ove podmnogostrukosti, označen kao $[T_p\Sigma]^\perp$ za $p \in \Sigma$, je onda prostornog tipa i dvodimenzionalan, što znači da dozvoljava dva buduće usmerena pravca svetlosnog tipa ortogonalna na Σ, tj. moguće je konstruisati dva glatka netrivijalna buduće usmerena normalna vektorska polja svetlosnog tipa, l_+ i l_-, koji su jedinstveni do na skaliranje pozitivnom konstantnom. Po konvenciji, polje l_+ se naziva *odlazeće vektorsko polje*, a l_- *dolazeće vektorsko polje*.

Mogu se definisati i takozvane *druge forme svetlosnog tipa* χ_+ i χ_-, koje redom odgovaraju poljima l_+ i l_-. Za svako $p \in \Sigma$, ove simetrične bilinearne forme $\chi_\pm : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \mapsto \mathbb{R}$ date su sa:

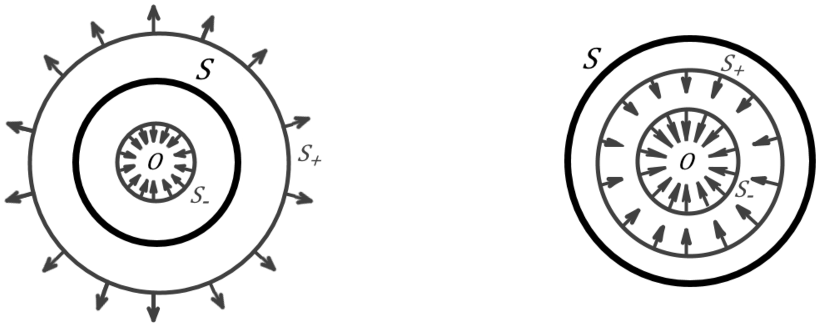
$$\chi_\pm(X, Y) = g(\nabla_X l_\pm, Y), \qquad \text{za svako } X, Y \in T_p\Sigma.$$

Ako se od ovih formi uzme trag u odnosu na indukovanu metriku h na Σ, dobijaju se skalari, koji se nazivaju *ekspanzije svetlosnog tipa*:

$$\theta_\pm = \mathrm{tr}_h(\chi_\pm) = h^{ij}(\chi_\pm)_{ij} = \mathrm{div}_\Sigma(l_\pm),$$

koje, kao i dosad, fizički predstavljaju mere divergencije dolazećih i odlazećih svetlosnih zraka iz Σ. Bitno je naglasiti da znak ovih ekspanzija ne zavisi od skaliranja polja $l_\pm$ pozitivnom funkcionelom.

Ideja iza zarobljenih površi može se sada neformalno ilustrovati uz pomoć dvodimenzionalne sfere $\mathcal{S}$ u četvorodimenzionalnom prostor-vremenu, koje okružuje neki objekat $\mathcal{O}$ (npr. zvezdu). Neka je sada u nekom fiksiranom trenutku emitovan svetlosni signal sa površine ove sfere. Nakon nekog vremena, izlazeći i ulazeći svetlosni frontovi odgovaraće redom sferama $\mathcal{S}_+$ i $\mathcal{S}_-$, kao na Slici.



Slika 3.3: Svetlosni front signal emitovan sa $\mathcal{S}$ nakon nekog vremena odgovara sferama $\mathcal{S}_+$ i $\mathcal{S}_-$.

U standardnom slučaju, površina sfere $\mathcal{S}_+$ će biti veća od površine sfere $\mathcal{S}$ (jer odgovara zracima koji se udaljavaju od objekta), a površina sfere $\mathcal{S}_-$ manja (jer odgovara zracima usmerenim ka objektu). Međutim, može se desiti da objekat $\mathcal{O}$ ima dovoljnu količinu materije (tj. postoji dovoljno jako gravitaciono privlačenje) da privlači čak i inicijalno odlazeće svetlosne zrake tako da površina *obe* sfere $\mathcal{S}_+$ i $\mathcal{S}_-$ bude manja od površine $\mathcal{S}$, tj. tako da *obe* ekspanzije svetlosnog tipa budu negativne. U ovom se slučaju $\mathcal{S}$ naziva *zarobljena površ*. Formalna definicija sledi:

Definicija 3.7.1 *Kompaktna podmnogostrukost Σ kodimenzije 2 prostornog tipa predstavlja* zarobljenu površ *ako su ekspanzije θ_+ i θ_-, koje odgovaraju dolazećim i odlazećim geodezijskim krivama svetlosnog tipa ortogonalnim na podmnogostrukost, strogo negativne u svim tačkama iz Σ.*

Tipični primer zarobljene površi predstavlja oblast $0 < r < r_S$ u n-dimenzionalnom Švarcšildovom prostor-vremenu, koji se koristi za modeliranje statičnih crnih rupa, a dodatni primeri mogu se naći i u Kerovom, Ker-Njumanovom i Rajsner-Nordstremovom prostor-vremenu (detaljnije u [1]). Godine 1983. je dokazano da zarobljene površi moraju nastati kada je dovoljna količina materije skoncentrisana u dovoljno maloj oblasti.

Pri odgovarajućim uslovim energetske i kauzalne prirode, pojava zarobljenih površi signalizira nastajanje gravitacionog kolapsa, nakon kojeg se u prostor-vremenu javlja singularitet. Ovo predstavlja implikaciju *Penrouzove teoreme singulariteta*, objavljene 1965. godine, koja se navodi u nastavku:

Teorema 3.7.1 (Penrouzova teorema singulariteta) *Neka je M globalno hiperbolično prostor-vreme koje sadrži nekompaktnu Košijevu površ takvu da za svaki vektor X kauzalnog tipa zadovoljava uslov $R_{\mu\nu}X^\mu X^\nu \geq 0$. Tada je je M kauzalno geodezijski nekompletno ako sadrži zarobljenu površ Σ.*

IDEJA DOKAZA.

Ideja dokaza ove teoreme svodi se na korišćenje Rejšodurijeve jednačine kako bi se dokazalo da ako je M kauzalno geodezijski kompletno, onda ahronal rub $\partial I^+(\Sigma)$ mora biti kompaktan skup, a time i kompaktna Košijeva površ. Na osnovu ovoga je moguće pokazati da i Σ mora biti kompaktno, što je kontradikcija.

■

Zanimljivo je primetiti da izuzev globalne hiperboličnosti, nijedan od uslova prethodne teoreme nije suviše jak. Ako su, naime, Ajnštajnove jednačine polja zadovoljene, uslov $R_{\mu\nu}X^\mu X^\nu \geq 0$ je zadovoljen za veliki broj prostor-vremena, a kada se posmatra izolovan gravitacioni sistem (npr. sistem u kome se ispituje gravitacioni kolaps zvezde), uobičajeno je koristiti modele asimptotski ravnih prostor-vremena, odakle je pretpostavka da prostor-vreme može sadržati nekompaktnu Košijevu površ prirodna.

Poznata varijacija Penrouzove teoreme data je u sledećem obliku:

Teorema 3.7.2 *Neka je M globalno hiperbolično prostor-vreme koje sadrži nekompaktnu Košijevu površ takvu da za svaki vektor k svetlosnog tipa važi uslov* $R_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} \geq 0$. *Neka ovo prostor-vreme dodatno sadrži i zarobljenu površ* Σ, *pri čemu je* $\theta_0 < 0$ *maksimalna vrednost obe ekspanzije svetlosnog tipa. Tada postoji barem jedna buduće usmerena, neproduživa geodezijska kriva* γ *svetlosnog tipa ortogonalna na* Σ, *takva da je* $\gamma(0) \in \Sigma$ *i koja je afine dužine manje od* $2/|\theta_0|$.

■

Značaj ovih teorema sledi i iz činjenice da se ono može koristiti kako bi se potvrdili i objasnili singulariteti koji se javljaju u Švarcšildovom i Kerovom rešenju Ajnštajnovih jednačina polja. Štaviše, upotrebom gornjih teorema se može pokazati da osobina geodezijske nekompletnosti nije posledica visokog stepena simetrije rešenja, već da se mora javiti i pri dovoljno malim perturbacijama metrike.

3.8 Hoking-Penrouzova teorema singulariteta

Najjači uslov u Penrouzovoj teoremi singulariteta je uslov globalne hiperboličnosti prostor-vremena. Međutim, sa dodatnim pretpostavkama, ovaj uslov se može eliminisati argumentima sličnim kao u dokazu Teoreme 3.6.4, u kojem slučaju se dolazi do takozvane *Hoking-Penrouzvoj teoremi singulariteta*. Pre same teoreme neophodno je definisati sledeće pojmove:

Definicija 3.8.1 *Prostor vreme zadovoljava generički uslov vremenskog tipa ako svaka geodezijska kriva vremenskog tipa u kongruenciji čije je tangentno polje obeleženo sa u sadrži barem jednu tačku u kojoj važi:*

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, u^{\alpha}u^{\delta} \neq 0.$$

.

Definicija 3.8.2 *Prostor vreme zadovoljava generički uslov svetlosnog tipa ako svaka geodezijska kriva svetlosnog tipa u kongruenciji čije je tangentno polje obeleženo sa k sadrži barem jednu tačku u kojoj važi:*

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, k^{\alpha}k^{\delta} \neq 0 \quad \text{ili} \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, k^{\alpha}k^{\delta}x^{\beta}y^{\gamma} \neq 0,$$

za sva vektorska polja x i y normalna na k.

Teorema 3.8.1 (Hoking-Penrouzova teorema singulariteta) *Neka je dato prostor-vreme M koje zadovoljava sledeća četiri uslova:*

i. $R_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} \geq 0$ *za sve kauzalne vektore u;*

ii. *Ispunjeni su generički uslovi vremenskog i svetlosnog tipa;*

iii. *Ne postoje zatvorene krive vremenskog tipa;*

iv. *Barem jedan od sledećih uslova važi:*

   (a) *Postoji kompaktan ahronalan skup A za koji važi* $\mathrm{edge}(A) = \varnothing$;
   (b) *Postoji zarobljena površ u M;*
   (c) *Postoji izvor* $p \in M$ *kongruencije buduće usmerenih (ili prošlo usmerenih) geodezijskih krivi svetlosnog tipa, pri čemu je ekspanzija negativna duž svake krive iz ove kongruencije.*

Tada prostor-vreme M mora sadržati bar jednu nekompletnu geodezijsku krivu vremenskog ili svetlosnog tipa.

■

Treba naglasiti da su svi uslovi ove teoreme geometrijski uslovi. Nenegativnosti izraza $R_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}$ pretpostavlja se da važi u svakom fizički realističnom prostor-vremenu, a generički uslovi direktno su zadovoljeni ako su sve kauzalne geodezijske krive bile pod uticajem gravitacionalnih plimnih sila. Ipak, uz pomoć ova dva uslova se može pokazati egzistencija konjugovanih tačaka na kompletnim geodezijskim krivama.

Uslov (a), sa druge strane, označava da je prostor-vreme barem u jednom trenutku bilo zatvoreno, dok fizički značaj uslova (b) sledi iz činjenice da se zarobljene površi formiraju tokom gravitacionog kolapsa materijalnog objekta. Na kraju, za uslov (c) se može očekivati da važi u velikom broju prostor-vremena koje kolapsiraju u prošlosti ili budućnosti (videti odgovarajuću diskusiju u [36]).

Takođe, u poređenju sa Teoremom 3.6.4, Hoking-Penrouzova teorema singulariteta dodaje hipotezu da su generički uslovi zadovoljeni, ali eliminiše pretpostavku da se univerzum širi u svakoj svojoj tački. Kada se uzme u obzir da se od kauzalnih uslova pominje samo nepostojanje zatvorenih krivih vremenskog tipa, jasno je da ova teorema ima veću primenu nego prethodne dve teoreme singulariteta. Sa druge strane, i njen zaključak je slabiji u smislu da nije data informacija o tome koja je geodezijska kriva vremenskog ili svetlosnog tipa nekompletna.

Da bi se ova teorema najelegantnije dokazala, potrebno ju je reformulisati u ekvivalentnom obliku:

Teorema 3.8.2 *Neka je dato prostor-vreme M koje zadovoljava sledeća tri uslova:*

i. $R_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} \geq 0$ *za sve kauzalne vektore u;*

ii. Ispunjeni su generički uslovi vremenskog i svetlosnog tipa;

iii. Barem jedan od sledećih uslova važi:

- *(a) Postoji kompaktan ahronalan skup A za koji važi* $\mathrm{edge}(A) = \varnothing$*;*
- *(b) Postoji zarobljena površ u M;*
- *(c) Postoji izvor* $p \in M$ *kongruencije buduće usmerenih (ili prošlo usmerenih) geodezijskih krivi svetlosnog tipa, pri čemu je ekspanzija negativna duž svake krive iz ove kongruencije.*

Tada sledeća tri uslova ne mogu sva istovremeno važiti:

i. Svaka neproduživa kauzalna geodezijska kriva sadrži par konjugovanih tačaka;

ii. Ne postoje zatvorene krive vremenskog tipa;

iii. Postoji ahronalan skup S takav da je $J^{+}(S)\backslash I^{+}(S)$ *ili* $J^{-}(S)\backslash I^{-}(S)$ *kompaktan skup.*

■

Međutim, u ovom obliku postaje jasnije da se pod datim uslovima u odgovarajućem prostor-vremenu mogu javiti zatvorene kauzalne krive, a ne nužno singulariteti. Na pitanje da li zatvorene kauzalne krive mogu na neki način predupprediti nastanak singulariteta delimično odgovara sledeća Hokingova teorema:

Teorema 3.8.3 *Prostor-vreme M nije vremenski geodezijski kompletno ako:*

i. Važi $R_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} \geq 0$ *za sve kauzalne vektore u;*

ii. Postoji kompaktna hiperpovrš Σ *prostornog tipa za koju važi* $\mathrm{edge}(\Sigma) = \varnothing$*;*

iii. Restrikcija ekspanzije na Σ *je konstantnog znaka.*

■

U gornjoj teoremi je uslov na kauzalnost implicitno naveden u uslovu (ii), i ovaj uslov izbacuje iz razmatranja brojna akauzalna prostor-vremena. To znači da pod određenim kauzalnim uslovima pojava singulariteta ne može biti predupređena. Štaviše, u kasnim sedamdesetim godinama XX veka je pokazano da je moguće konstruisati svetlosno geodezijski nekompletno prostor-vreme u kome istovremeno postoje i zatvorene krive vremenskog tipa. Dakle, ako se konstruiše prostor-vreme koje ima zatvorene krive vremenskog tipa, to ne mora nužno značiti da ono neće imati i singularitete.

3.9 Kosmička cenzura i fizički realistična prostor-vremena

Zaključak koji prirodno sledi iz prethodnih teorema jeste da postoji velika klasa rešenja Ajnštajnovih jednačina gravitacionog polja koja su singularna. Pritom, činjenica da ove teoreme koriste Ajnštajnove jednačine samo da bi naznačile da je gravitacija privlačnog karaktera pokazuje da bi konstrukcija nove teorije u kojoj ne bi bilo singulariteta bila izuzetno teška. Sa druge strane, nije ni očigledan odgovor na pitanje da li može postojati teorija koja bi bila alternativa opšte teorije relativnosti, a koja ne bi sadržala singularitete.

Glavna poteškoća u prihvatanju postojanja singulariteta jeste to što se geodezijska nekompletnost asocira sa nemogućnošću da se predvidi budućnost na osnovu informacija iz sadašnjosti, jer bi to značilo da neki nekontrolisani uticaji iz prostor-vremena mogu uticati na fizičku situaciju. Geodezijska nekompletnost je problematična, dakle, jer je egzistencija neke determinističke veze između sadašnjosti i budućnosti podrazumevana i fundamentalna odlika klasičnih fizičkih disciplina.

Ipak, postoji nekoliko ideja na koji način bi se dobio rezultat koji bi pokazivao da prostor-vremena koja bi se mogla smatrati kao dobri modeli za naš Univerzum mogu biti singularna, ali ne "primetno" singularna. Ove ideje predstavljaju ideje o *kosmičkoj cenzuri*, po kojima singularni karakter prostor-vremena ne utiče previše dramatično na intuitivno shvatanje determinizma.

Postoji četiri različita pristupa kosmičkoj cenzuri:

- *Kauzalni pristup*, koji se tiče pitanja koji posmatrači mogu detektovati da je prostor-vreme singularno, gde se "detektovati" koristi u smislu da postoji buduće usmerena kriva vremenskog tipa koja povezuje posmatrače u dve različite tačke prostor-vremena. Posmatrač bi onda mogao shvatiti da je prostor-vreme buduće nekompletno ako može detektovati signale koje neprekidno dolaze od drugog posmatrača koji se kreće nekompletnom krivom, pri čemu ti signali nakon konačno mnogo vremena naglo prestaju dolaziti.

- *Asimptotski pristup*, koji pravi razliku između posmatrača, te po kojemu samo "bliski" posmatrači mogu detektovati singularno ponašanje, za razliku od "udaljenih" posmatrača. Glavni problem ovog pristupa je konzistentno definisati razliku između ove dve klase posmatrača, mada se ovo donekle uspešno može uraditi u asimptotski ravnim prostor-vremenima, dodavanjem svojevrsnog ruba prostor-vremenu, koji bi predstavljao skup tačaka u "beskonačnosti".

- *Pristup stabilnosti*, koji je baziran na pokušaju da se mogućnost percepcije singulariteta analizira na čitavim klasama prostor-vremena. Ovaj pristup bi, dakle, podrazumevao rezultat po kome su prostor-vremena u kojima je moguće direktno posmatrati singularitet "retke" u svojoj klasi, tj. po kome se "perturbacijom" singularnog prostor-vremena može dobiti nesingularno prostor-vreme.

- *Evolutivni pristup*, koji se zasniva na teoremi po kojoj je za svaku zadatu trodimenzionalnu mnogostrukost S sa pozitivno definitnom metrikom $h_{\mu\nu}$ i simetričnim tenzorskim poljima (koji predstavljaju početne vrednosti za materijalna polja) moguće konstruisati odgovarajuće prostor-vreme u kome je S Košijeva površ i u kome su Ajnštajnove jednačine i sve jednačine ograničenja za polja materije zadovoljene. Fiksiranjem ovih početnih vrednosti moguće je isključiti posmatranje onih prostor-vremena čija je singularnost ostvarena odstranjivanjem skupa tačaka iz nekog početno nesingularnog prostor-vremena.

Treba napomenuti da još uvek nije jasno da li je neki oblik kosmičke cenzure važeći u opštoj teoriji relativnosti, kao i da ovo predstavlja aktivno polje rada. Osnovna poteškoća je precizno formulisati i dokazati tvrdnju o nemogućnosti percepcije uticaja singulariteta, ili putem kontraprimera pokazati da ne postoji tačna tvrdnja koja se odnosi na kosmičku cenzuru.

Poslednji slučaj takođe bi bio značajan, jer ukoliko zaista nije moguće potvrditi postojanje kosmičke cenzure, to bi moglo značiti da postoji mogućnost direktne opservacije oblasti prostor-vremena u kojima je krivina vanredno velika, što bi dalo prilike da se opšta teorija relativnosti (ali i kvantna teorija polja) dalje eksperimentalno testira i pod ekstremnijim uslovima.

Naravno, čak i ako se prihvati stanovište da prostor-vreme ima singularitet, koji nije odmah vidljiv ili koji ne utiče značajnije na fizičku situaciju, i dalje ostaje problem definisati šta znači da je takvo prostor-vreme fizički realistično. Drugim rečima, pitanje se svodi na to kako utvrditi da li je neko prostor-vreme sa singularitetom fizički realističnije (i time bolji model za naš Univerzum) od prostor-vremena koje nema singularitet.

Nažalost, ovo pitanje je još otvoreno, iako većina istraživača u kontekstu fizički realističnih prostor vremena prvenstveno ističu osobine *izotropije* i *globalne hiperboličnosti* prostor-vremena, zajedno sa dve srodne osobine, *maksimalnost (neproduživost) prostor-vremena* i *neprisutnost rupa*. Odgovarajuće definicije slede:

Definicija 3.9.1 *Prostor-vreme M je izotropno ako postoji polje $u = \{u_p\}_{p\in M}$ vektora vremenskog tipa tako da za svako $p \in M$, i svaka dva jedinična vektora $\sigma_1^a, \sigma_2^a \in T_pM$ ortogonalna na u_p, postoji izometrija $\varphi : M \mapsto M$ koja slika vektor σ_1^a u σ_2^a, ne utičući na tačku p i polje u.*

Definicija 3.9.2 *Prostor-vreme M je maksimalno ako ne postoji prostor-vreme N, čiji je pravi podskup $N' \subsetneq N$ izometričan sa M.*

Definicija 3.9.3 *U prostor-vremenu M nisu prisutne rupe ako ni za jednu hiperpovrš $\Sigma \subset M$ prostornog tipa ne postoji izometrija $\varphi : D(\Sigma) \mapsto N$, gde je N neko drugo prostor-vreme, takva da važi $\varphi(D(\Sigma)) \neq D(\varphi(\Sigma))$.*

Sa druge strane, svaka od ovih osobina ima razumno objašnjenje, ali i svoje poteškoće:

- *Izotropija* ilustruje da ne postoji privilegovana pozicija u prostor-vremenu, što se slaže sa opservacijama po kojima ne postoji preferirani prostorni pravac u našem Univerzumu. Problem je što su konstruisana prostor-vremena koja se ponašaju "približno izotropno" proizvoljno dugo, iako su se u ranim i kasnim fazama formiranja ponašala ekstremno anizotropno.

- *Globalna hiperboličnost* služi kako bi se osigurao deterministički poredak u prostor-vremenu. Ipak, ovo je veliko ograničenje za metriku prostor-vremena, jer ako u njemu postoji bar jedna tačka u kome metrika nije $C^{1,1}$ regularnosti, to može značiti da prostor-vreme nije maksimalno.

- *Maksimalnost* prostor-vremena osigurava da posmatrač neće naglo nestati jer je njegova svetska linija naišla na "rupu" u prostor-vremenu. Uprkos tome, ekstenzija nekog prostor-vremena ne mora zadržavati njene (lepe) globalne osobine, a ne mora čak biti ni jedinstvena. Nije jasno koji su i da li postoje kriterijumi za odabir privilegovane ekstenzije.

- *Neprisutnost rupa* je neophodno kako ne bi došlo do spontanog pojavljivanja singularnosti koji nisu izazvani nikakvim dramatičnim dešavanjima (npr. kolapsima) u prostor-vremenu. Poteškoće u vezi sa ovom osobinom zasnivaju se na činjenici da postoje maksimalna, globalno hiperbolična prostor-vremena u kojima su prisustne rupe. Takođe, nema svako prostor-vreme u kome ne prisustvuju rupe maksimalnu ekstenziju sa istom osobinom.

S tim u vezi, u nekim radovima se i lokalna osobina zadovoljavanja Ajnštajnovih jednačina smatra fizički realističnom osobinom. Ovo bi praktično značilo da bi se slabi ili jaki energetski uslovi mogli smatrati trivijalno zadovoljenim ukoliko se razmatra fizički realistično prostor-vreme, ali je u [37] pokazano da, uprkos možda intuitivnoj pretpostavci, prostor-vremena koja zadovoljavaju prethodnih četiri osobine ne moraju uopšte zadovoljavati Ajnštajnove jednačine.

Radi zaokruženosti teme, treba naglasiti da se u nekim radovima (videti pregled u [39]) diskutuje i značaj dodatnih osobina (kauzalna regularnost, kauzalna benignost, kompaktna generisanost Košijevog horizonta i kauzalna zatvorenost), čijom daljom analizom bi se možda moglo doći do precizne formulacije definicije fizički realističnog prostor-vremena.

Jasno je, dakle, da se (globalne) osobine fizički realističnog prostor-vremena mogu nalaziti u različitim odnosima, što se može ilustrovati neobičnim primerima. Jedan zanimljiv zaključak može se videti i iz posledice Teoreme 3.8.3, prema kojoj je prostor-vreme, koje zadovoljava uslov hronologije, jak energetski uslov i oba generička uslova, geodezijski nekompletno akko sadrži kompaktnu Košijevu površ. Ako se tome doda činjenica da je 2008. godine (u [38]) pokazano da je postojanje ovakve Košijeve površi neophodan uslov da bi se budući događaji prostor-vremena mogli predvideti, dolazi se do zaključka da je predviđanje moguće u fizički realističnom prostor-vremenu ukoliko su prisutni singulariteti.

Na osnovu dosad rečenog, jasno je da je pitanje fizički realističnog prostor-vremena daleko od odgovora, a dodatnu komplikaciju predstavlja i eksperimentalno potvrđivanje četiri svojstva fizički realističnih prostor-vremena. Naime, u [35] ili [40] se sugeriše da čak i ako su sva četiri uslova ispunjena u našem Univerzumu, to nikakvim eksperimentom neće biti moguće pokazati. Nasuprot tome, izostanak bilo koje osobine bi mogao biti lako identifikovan.

Zaključak

> Our feeble attempts at mathematics enable us to understand a bit of the universe, and as we proceed to develop higher and higher mathematics we can hope to understand the Universe better.
>
> Paul Dirac (1902-1984)

Na osnovu svega dosad rečenog i svih argumenata dosad izloženih, jasno je da teorija kauzalnosti predstavlja jedno od najmoćnijih matematičkih aparata za primenu u analizi geometrije prostor-vremena. Zahvaljujući njenim metodama je lako uvideti da jednostavnom promenom ili perturbacijom metrike može da se menja ne samo način merenja rastojanja između dve tačke, već i kauzalni karakter njenih vektora, krivih, potprostora. Ovakva promena onda može drastično uticati na oblik svetlosnih i vremenskih konusa, na relacije kauzalnosti, definiciju kauzalnih kriva, oblik ahronalnih skupova i Košijevih površi, što opet može dovesti do takvih promena kauzalnih svojstva samog prostor-vremena koje bi dozvoljavale pojave koje nisu ni fizički validne.

Zato je metrika jedna od centralnih pojmova u psedo-Rimanovoj i Lorencovoj geometriji, i u ovom radu se nastojalo istaknuti njen značaj ukazujući na kauzalne osobine izvedenih prostor-vremena i promene na kauzalnosti koje mogu nastati njenom perturbacijom. Potom je značaj fundamentalnih koncepta teorije kauzalnosti izložen i njihova zanimljivija svojstva, kao i svojstva ponašanja objekta ili posmatrača na odgovarajućim prostor-vremenima, ispitana. Na kraju je dat pregled značajnijih teorema singulariteta, gde je naglašeno koliko je pojava singulariteta očekivana posledica u dosta generalnoj klasi prostor-vremena. Usledela je diskusija prisutnosti singulariteta u fizički realističnim prostor-vremenima i kraće objašnjenje poteškoća na koje istraživači nailaze prilikom pokušaja definisanja fizički realističnog prostor-vremena.

Nekoliko mogućih pravaca daljeg istraživanja već je pomenuto u radu, u prvom redu one koje se tiču diferencijabilnosti metrike. Naime, opšta teorija relativnosti je tradicionalno podrazumevala rad sa glatkim metrikama, a ovo je kasnije generalizovano radom sa metrikom koja je po delovima regularnosti C^3, ali koja je lokalno samo C^1. Kasnije je pokazano da brojni rezultati Lorencove geometrije važe i ukoliko je metrika regularnosti C^2, a u skorije vreme i ako je regularnosti $C^{1,1}$. Ova klasa, naime, garantuje jedinstvenost rešenja geodezijske jednačine, pritom ne uzrokujući patološka ponašanja vezana za svojstva kauzalne konveksnosti. Pritom, C^2 diferencijabilnost metrike se dugo smatrala minimalnim uslovom na regularnost metrike (i nekada eksplicitno navodila) u formulacijama teorema singulariteta, pa je pitanje da li je ovaj uslov moguće oslabiti bilo prirodno. Potvrdan odgovor na ovo dat je u godini pisanja ovog rada, kada je Hokingova i Penrouzova teorema singulariteta dokazana za slučaj metrike regularnosti $C^{1,1}$.

Slično tome, Hoking-Penrouzova teorema singulariteta generalizovana je i upotpunjena Gerohovom, Ganonovom, Tiplerovom i Krileovom teoremom singulariteta, te bi se pažnja mogla posvetiti pokušaju njihovom uopštenju za slučaj metrike niže regularnosti.

Aktuelni problemi vezani za teoreme singulariteta tiču se ispitivanja uticaja ili značaja tačke singulariteta u prostorima koje dozvoljavaju zatvorene krive vremenskog tipa, te se nastoji dati odgovor na pitanje da li se prostor-vremena u kojima postoje zatvorene krive vremenskog tipa i koje zadovoljavaju Ajnštajnove jednačine (npr. Gedelovo prostor-vreme) mogu klasifikovati kao fizički realistična.

Istraživači se takođe bave problemom generalizacije osobine globalne hiperboličnosti definišući pojmove kao što su pseudokonveksnost i ispitujući geodezijsku kompletnosti i geodezijsku povezanost prostor-vremena. Veliki napori se ulažu i u to da se nađu precizni analogoni nekih klasičnih teorema iz Rimanove geometrije.

Značajno je napomenuti da su u skorije vreme dobijeni značajni rezultati i u oblastima koja se tiču K-kauzalnosti, Zajfertovom relacijom, topologijom Aleksandrova, topološkim ekvivalencijama na Lorencovim prostor-vremenima, kauzalnih i konformalnih rubova, kao i globalne hiperboličnosti u standardnim stacionarnim prostor-vremenima.

Još otvorenih problema u Lorencovoj geometriju mogu se naći u analizi hiperpovrši prostornog ili svetlosnog tipa i njihovih singulariteta, kao i odgovarajućih Košijevih horizonta. Takođe se radi na ispitivanju obvojnica familije hipersfera u prostor-vremenu, ahronalnih granica, svojstva sfera i horosfera u prostor-vremenu, osobinama konveksnosti i krutosti prostor-vremena, te nejednakosti srednjih krivina. Interesantno je da se prethodni pojmovi mogu dovesti u vezu sa kosmološkom konstantom (i gravitacionim talasima), te pružiti alternativan pogled na određene klase rešenja Ajnštajnovih jednačina.

Gornja lista otvorenih pitanja dovoljna je da se stekne utisak o opširnosti teme i brojnosti mogućih pravca istraživanja u Lorencovoj geometriji. Vidljivo je da je u 100 godina, koliko je prošlo od objavljivanja Ajnštajnove opšte teorije relativnosti (u trenutku pisanja ovog rada), geometrija prostor-vremena značajno razvijena, te da se na njoj još uvek radi. Uz to, bogatiji repertoar sve tačnijih astronomskih instrumenata i njihova zapažanja, izvor su inspiracije za istraživače i vidljiv je trend kooperacije među astronomima, kosmolozima, teoretskim fizičarima i matematičarima. Ujedinjeni napori stručnjaka iz diferencijalne geometrije, teorijske fizike, kvantne mehanike i kvantne teorije polja daju nade da će kompletan, precizan i sistematičan opis našeg Univerzuma biti prezentovan u predstojećim godinama.

Literatura

[1] Misner Charles, Thorne Kip, Wheeler John, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.

[2] Victoria Miguel Ángel Javaloyes, Caja Miguel Sánchez, *An introduction to Lorentzian Geometry and its applications*, beleške sa letnje škole XVI Escola de Geometria Diferencial, São Paulo, 2010.

[3] O'Neill Barrett, *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[4] O'Neill Barrett, *The Geometry Of Kerr Black Holes*, A. K. Peters Ltd., Wellesslay, 1983.

[5] Sachs Rainer, Wu Hung-Hsi, *General Relativity for Mathematicians*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[6] Chruściel Piotr, *Elements of Causality Theory*, arXiv:1110.6706 [gr-qc], 2011.

[7] Hawking Stephen, Israel Werner (urednici), *General Relativity: An Einstein centenary survey*, Cambrigde University Press, Cambridge, 1979.

[8] Hawking Stephen, Ellis George, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[9] Naber Gregory, *The Geometry of Minkowski Spacetime*, Springer-Verlag, New York, 2012.

[10] Bär Christian, *Lorentzgeometrie*, lekcije sa Univerziteta u Portsdamu, 2006.

[11] Shafarevich Igor, Remizov Alexey, *Linear Algebra and Geometry*, Springer, Heidelberg, 2013.

[12] Wald Robert, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago, 1984.

[13] Hadley Mark, *The orientability of spacetime*, Classical and Quantum Gravity, vol. 19, issue 17, 2002.

[14] Penrose Robert, *Techniques of Differential Topology in Relativity*, Regional Conference Series in Applied Math., vol. 7, SIAM, Philadelphia, 1972.

[15] Beem John, Ehrlich Paul, Easley Kevin, *Global Lorentzian Geometry*, Marcel Dekker Inc., New York, 1996.

[16] Galloway Gregory, *Notes on Lorentzian causality*, beleške sa letnje škole ESI-EMS-IAMP Summer School on Mathematical Relativity, Miami, 2014.

[17] Hawking Stephen, Sachs Rainer, *Causally continuous space-times*, Communications in Mathematical Physics, vol. 35, num. 4, 1974.

[18] Minguzzi Ettore, Sánchez Miguel, *The causal hierarchy of spacetimes* iz: Baum Helga, Alekseevsky Dmitri (urednici), *Recent developments in pseudo-Riemannian geometry*, ESI Lectures in Mathematical Physics, European Mathematical Society Publishing House, Zurich, 2008.

[19] Bernal Antonio, Sánchez Miguel, *Smoothness of Time Functions and the Metric Splitting of Globally Hyperbolic Spacetimes*, Communications in Mathematical Physics, vol. 257, issue 1, 2005.

[20] Hawking Stephen, *The existence of cosmic time functions*, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences vol. 308, no. 1494, 1969.

[21] Minguzzi Ettore, *K-Causality Coincides with Stable Causality*, Communications in Mathematical Physics, vol. 290, issue 1, 2009.

[22] Bernal Antonio, Sánchez Miguel, *Globally hyperbolic spacetimes can be defined as "causal" instead of "strongly causal"*, Classical and Quantum Gravity, vol. 24, issue 3, 2007.

[23] Leray Jean, *Hyperbolic Differential Equations*, duplicated notes, Princeton Institute for Advanced Studies, 1952.

[24] Geroch Robert, *Domain of Dependence*, Journal of Mathematical Physics, vol. 11, no. 1, 1970.

[25] Sämann Clemens, *Global hyperbolicity for spacetimes with continuous metrics*, arXiv:1412.2408v2 [math.DG], 2015.

[26] Chruściel Piotr, James Grant, *On Lorentzian causality with continuous metrics*, Classical Quantum Gravity, vol. 29, issue 14, 2012.

[27] Ringström Hans, *The Cauchy Problem in General Relativity*, ESI Lectures in Mathematics and Physics, European Mathematical Society Publishing House, Zürich, 2009.

[28] Townsend Paul, *Black Holes, lecture notes*, arXiv:9707012v1 [gr-qc], 1997.

[29] Sánchez Miguel, *Cauchy hypersurfaces and global Lorentzian geometry*, iz: XIV Fall Workshop on Geometry and Physics, vol. 10 of Publ. R. Soc. Mat. Esp., R. Soc. Mat. Esp., Madrid, 2006.

[30] Galloway Gregory, *Some results on Cauchy surface criteria in Lorentzian geometry*, Illinois Journal of Mathematics, vol. 29, no. 1, 1985.

[31] Galloway Gregory, *Null Geometry and the Einstein Equations*, iz: Chruściel Piotr, Helmut Friedrich (urednici), *The Einstein Equations and the Large Scale Behavior of Gravitational Fields*, Springer, Basel, 2004.

[32] Choquet-Bruhat Yvonne, *General Relativity and the Einstein Equations*, Oxford University Press, Oxford, 2009.

[33] Joshi Pankaj, *Spacetime Singularities*, iz: Ashtekar Abhay, Petkov Vesselin (urednici), *Springer Handbook of Spacetime*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2014.

[34] Date Ghanashyam, *General Relativity: Basics and Beyond*, CRC Press, London, 2015.

[35] Manchak John, *Can We Know the Global Structure of Space-time?*, Studies in History and Philosophy of Modern Physics, vol. 40, issue 1, 2009.

[36] Ellis George, *Issues in the Philosophy of Cosmology*, iz: Butterfield James, Earman John (urednici), *Handbook of the Philosophy of Physics*, Elsevier, Oxford, 2007.

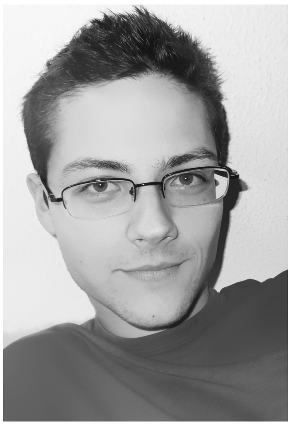
[37] Vollick Dan, *How to Produce Exotic Matter Using Classical Fields*, Physical Review D, vol. 56, issue 8, 1997.

[38] Manchak John, *Is Prediction Possible in General Relativity?*, Foundation of Physics, vol. 38, issue 4, 2008.

[39] Manchak John, *Global Spacetime Structure*, iz: Batterman Robert (urednik), *The Oxford Handbook of Phylosophy of Physics*, Oxford University Press, Oxford, 2013.

[40] Malament David, *Observationally Indistinguishable Space-Times*, iz: Earman John, Glymour Clark, Stachel John (urednici), *Foundations of Space-Time Theories*, University of Minnesota Press, Minneapolis, 1977.

Biografija



Andrija Blesić je rođen 17.06.1991. godine u Subotici. Završio je Osnovnu školu “Matko Vuković” u Subotici 2006. godine. Iste godine je upisao Gimnaziju “Svetozar Marković u Subotici, gde je sa odličnim uspehom završio prirodno-matematički smer. Nakon toga, 2010. godine upisuje osnovne studije Primenjene matematike, modul Tehnomatematika, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, koje završava 2013. godine sa prosekom 9.88.

Iste godine u Novom Sadu upisuje master studije Primenjene matematike, modul Tehnomatematika. Položio je sve ispite predviđene planom i programom master studija u junskom roku 2015. godine, sa prosečnom ocenom 10.00. Primao je stipendiju Fonda za mlade talente i stipendiju za izuzetno nadarene učenike i studente Republike Srbije.

Novi Sad, novembar 2015. godine

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Andrija Blesić
AU

Mentor: dr Sanja Konjik
MN

Naslov rada: Kauzalnost na Lorencovim mnogostrukostima
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2015
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (3/70/40/0/16/0/0)
(broj poglavlja/strana/lit. citata/ tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Diferencijalna geometrija
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: Lorencova geometrija, metrički koeficijenti, prostor-vreme, teorija kauzalnosti, kauzalni karakter, kauzalne relacije, ahronalni skupovi, uslovi kauzalnosti, Košijeve površi, kongruencije geodezijskih krivih, konjugovane tačke, teoreme singulariteta
PO

UKD

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
Glavni cilj ovoga rada bio je izložiti značaj teorije kauzalnosti u modeliranju i ispitivanju različitih klasa prostor-vremena. U tu svrhu, na početku rada se prezentuju osnove linearne algebre prostor-vremena, i uvode se pojmovi Lorencovih vektorskih prostora, klasa njihovih potprostora, kauzalnih karaktera vektora i vektorskih potprostora. Svetlosnim i vremenskim konusima pristupa se sistematično, naglašavajući njihov međusobni odnos i vezu sa obrnutim nejednakostima Lorencovih vektorskih prostora. U drugom delu rada se detaljnije obrazlažu fundamentalni koncepti teorije kauzalnosti na

prostor-vremenima, u prvom redu relacije i uslovi kauzalnosti, kauzalne i hronološke budućnosti, ahronalni skupovi, Košijeve hiperpovrši, oblast zavisnosti i Košijevi horizonti. Veza ovih pojmova sa uslovima kauzalnosti ispitana je u kasnijim poglavljima glave, sa naglaskom na osobinu globalne hiperboličnosti. Na kraju rada se daje kratak pregled primene teorije kauzalnosti u analizi singulariteta, oslanjajući se na teoreme singulariteta, hipotezu kosmičke cenzure i diskusiju fizički realističnih prostor-vremena.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 24.03.2015
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Sanja Konjik, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Milica Pavkov-Hrvojević, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORD DOCUMENTATION

Accesion number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Content Code: Master's thesis
CC

Author: Andrija Blesić
AU

Mentor: Sanja Konjik, Ph.D.
MN

Title: Causality on Lorentzian manifolds
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publicaition: Vojvodina
LP

Publication year: 2015
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Dositeja Obradovića Sq. 4
PP

Physical description: (3/70/40/0/16/0/0)
(number of sections/pages/references/tables/pictures/graphs/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific Discipline: Differential Geometry
SD

Subject/Key words: Lorentzian geometry, metric coefficients, space-time, causality theory, causal character, causal relations, achronal sets, causality conditions, Cauchy surfaces, congruence of geodesic curves, conjugated points, singularity theorems
SKW

UC

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
The main purpose of this thesis was to illustrate the importance of causality theory in the modelling and analysis of various classes of space-time. To this end, we begin with presenting the basics of space-time linear algebra, and introduce the concepts of Lorentzian vector spaces, classes of their subspaces, as well as the causal character of vectors and vector subspaces. We approach lighcones and timecones systematically, emphasizing their mutual relations and connections with the reverse inequalities of Lorentzian vector spaces. In the second part of the thesis, we give a detailed elaboration of the

fundamental concepts of causality theory, primarily causal relations and conditions, causal and chronological futures, achronal sets, Cauchy hypersurfaces, domains of dependence and Cauchy horizons. The connection between these concepts and causal conditions, especially global hyperbolicity, is investigated in the later chapters. At the end of the thesis, we give a short overview of the applications of causality theory in examining singularities of space-time, based upon singularity theorems, cosmic censorship hypothesis and a discussion of physically realistic space-times.

Accepted by the Scientific Board on: 24.03.2015
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Marko Nedeljkov Ph.D., full professor,
Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Sanja Konjik Ph.D., associate professor,
Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad,
mentor

Member: Milica Pavkov-Hrvojević Ph.D., full professor,
Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad