UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

**Ana Kovačević**

# Hamiltonova funkcija u modelima ekonomskog rasta

Master rad

**Mentor:**
**Prof. dr. Nenad Teofanov**

Novi Sad, 2013

# Sadržaj

# Predgovor

Ekonomski rast predstavlja povećanje ukupne proizvodnje nacije tokom vremena. Kroz rast, populacija može da očekuje viši nivo dohotka i bolji standard života. Ekonomisti su ovim problemom počeli ozbiljnije da se bave tek u dvadesetom veku. Neki od modela ekonomskog rasta se zasnivaju na primeni principa maksimuma i dinamičkog programiranja. Značajnu ulogu u matematičkim postupcima rešavanja nekih problema optimizacije ima Hamiltonova funkcija. Ovaj rad opisuje pojedine modele ekonomskog rasta koji se mogu poistovetiti sa odgovarajućim problemima optimalnog upravljanja i rešiti primenom Hamiltonove funkcije i principa maksimuma.

U prvom poglavlju izlažu se osnovni pojmovi i definicije koji su neophodni za razumevanje problema. Navode se osnove varijacionog računa i daje se dokaz teoreme o neophodnom uslovu za ekstrem.

Drugo poglavlje se bavi pojmovima dinamičkog programiranja, Hamiltonove funkcije i principa maksimuma. Takođe, dovode se u vezu postupci rešavanja problema varijacionog računa, dinamičkog programiranja i principa maksimuma pomoću Hamiltonove funkcije.

Modeli ekonomskog rasta su opisani u trećem poglavlju počevši od Domar-Harodovog modela. Posebna pažnja je posvećena neoklasičnom modelu rasta pri čemu je istaknuta veza sa drugim poglavljem, i opisan je Remzijev model rasta.

Interesantni problemi optimalnog upravljanja koji odgovaraju dinamičkim modelima u ekonomiji, a koji su se pojavili u skorijoj prošlosti rešavaju se u beskonačnom vremenskom intervalu. Stoga u četvrtom poglavlju analiziramo problem optimalnog upravljanja na beskonačnom vremenskom intervalu koristeći princip maksimuma i dajemo ekonomsku interpretaciju principa maksimuma.

Zahvaljujem se mentoru dr Nenadu Teofanovu na korisnim savetima i pomoći pruženoj prilikom izrade ovog rada, kao i svojim roditeljima na podršci pružanoj tokom dosadašnjeg školovanja i života.

Ana Kovačević

# 1

# Uvod

U uvodnom delu uvešćemo osnovne pojmove koji su neophodni za razumevanje ovog rada.

U ovom radu ćemo tražiti rešenja nad prostorom koji je podskup klase neprekidnih ((dva puta) neprekidno diferencijabilnih) funkcija nad nekim zadatim intervalom. U tu svrhu definisaćemo metričke, normirane i pred-Hilbertove prostore.

*Metrički prostor* je uređen par $(\mathbf{X}, d)$, gde je $\mathbf{X}$ neprazan skup, a $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ je funkcionela za koju važi:

1. $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbf{X},$
2. $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in \mathbf{X},$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in \mathbf{X}.$

Najznačajniji primer metričkog prostora je $\mathbb{R}^n$ sa euklidskom metrikom:

$$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

U metričkom prostoru je moguće definisati konvergenciju niza $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}, x_n \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}$ ka elementu $x \in \mathbf{X}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0)(d(x_n, x) < \varepsilon),$$

odnosno

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \text{ ako i samo ako } \lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Niz $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}, x_n \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}$ je Košijev niz u metričkom prostoru $\mathbf{X}$ ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N})(\forall n, m \in \mathbf{N})(n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon).$$

Ako svaki Košijev niz u metričkom prostoru konvergira, onda kažemo da je prostor *kompletan.*

Struktura $\mathbf{X}$ je vektorski prostor nad poljem realnih brojeva $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ako je $(\mathbf{X}, +)$ komutativna grupa i ako je definisano preslikavanje $\mathbb{R} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, tako da za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbf{X}$ važi

1. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
2. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
3. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
4. $1x = x$,

pri čemu je slika para $(\alpha, x)$ označena sa $\alpha x$.

Prostor $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ je *normiran* ako preslikavanje $\|\cdot\| : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ ispunjava sledeće uslove:

1. $\|x\| \geq 0$, i $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$,
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbf{X}$,
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbf{X}$.

Tada je $\|\cdot\|$ norma u $\mathbf{X}$.

Metriku možemo definisati pomoću norme tako da važi:

$$d(x, y) := \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbf{X},$$

pa je svaki normiran prostor metrički, dok obrnuto ne mora da važi.

Na primer, prostor neprekidnih funkcija nad intervalom $[a, b]$, u oznaci $C[a, b]$, je vektorski prostor sa normom

$$\|x\| := max_{t \in [a,b]}|x(t)|,$$

dok je prostor neprekidno diferencijabilnih funkcija nad intervalom $[a, b]$, u oznaci $C^1[a, b]$, vektorski prostor sa normom

$$\|x\|_1 = max_{t \in [a,b]}|x(t)| + max_{t \in [a,b]}|x'(t)|.$$

Tako je i prostor $C^n[a, b]$, $n$ puta neprekidno diferencijabilnih funkcija nad intervalom $[a, b]$, takođe jedan normiran vektorski prostor.

Ako je normiran prostor $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ kompletan, onda se on naziva *Banahov* prostor.

Sada uvodimo i pojam *skalarnog proizvoda*, u oznaci $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Neka je $\mathbf{X}$ vektorski prostor nad poljem realnih brojeva. Tada se preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ za koje važi

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$, i $\langle x, x\rangle = 0$, ako i samo ako je $x = 0$,
2. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y, z \in \mathbf{X}$,
3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \forall x, y \in \mathbf{X}$.

naziva skalarni ili unutrašnji proizvod. Skalarni proizvod indukuje normu na sledeći način:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad x \in \mathbf{X}.$$

Uređeni par $(\mathbf{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ zove se *pred-Hilbertov* ili *unitarni* vektorski prostor. Ako je on kompletan, onda se naziva *Hilbertov* prostor.

Prostor $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je kompletan, normiran, metrički vektorski prostor sa skalarnim proizvodom

$$\langle x, x\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \quad \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}.$$

U skladu sa temom rada u nastavku uvodimo i pojam Hamiltonove funkcije i to najpre u mehaničkim i fizičkim sistemima. Kao motivaciju za uvođenje Hamiltonovih jednačina, prema literaturi [5], iskoristićemo problem harmonijskog oscilatora i sistem $n$ nezavisnih harmonijskih oscilatora.

Posmatrajmo materijalnu tačku mase $m$ koja se kreće pod uticajem sile oblika $-aq, a > 0$, gde je $q$ otklon od ravnotežnog položaja $q = 0$ (to može biti, na primer, materijalna tačka vezana za elastičnu oprugu koeficijenta elastičnosti $a$, ili matematičko klatno jedinične dužine, gde je $a = mg$ sila Zemljine teže). U tom slučaju se kretanje materijalne tačke mase $m$ opisuje diferencijalnom jednačinom drugog reda:

$$mq'' = -aq. \tag{1.1}$$

Uvođenjem promenljive $p = mq'$ (impulsa) i funkcije

$$h(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{a}{2}q^2,$$

koja predstavlja zbir kinetičke i potencijalne energije sistema, jednačina drugog reda (1.1) se svodi na sistem jednačina prvog reda u prostoru $\mathbb{R}^2(q, p)$:

$$q' = \frac{p}{m} = \frac{\partial h}{\partial p}, \quad p' = -aq = -\frac{\partial h}{\partial q}.$$

Posmatrajmo sada sistem od $n$ nezavisnih harmonijskih oscilatora (na primer sistem od $n$ nezavisnih elastičnih opruga). U ovom slučaju kretanje sistema možemo opisati sa $2n$ jednačina u prostoru $\mathbb{R}^{2n}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbb{R}^{2n}(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$:

$$q_i' = \frac{p_i}{m_i} = \frac{\partial h}{\partial p_i}, \quad p_i' = -a_i q_i = -\frac{\partial h}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

pri čemu je $a_i > 0$ i funkcija

$$h(q,p) = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{1}{2m_i} p_i^2 + \frac{a_i}{2} q_i^2 \right)$$

predstavlja ukupnu energiju mehaničkog sistema.

Jednačine

$$q_i' = \frac{\partial h}{\partial p_i}, \quad p_i' = -\frac{\partial h}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n$$

definisane u nekoj oblasti $U$ prostora $\mathbb{R}^{2n}(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ nazivaju se *Hamiltonove jednačine*, funkcija $h$ je *Hamiltonova funkcija* ili *Hamiltonijan*, a $U$ se naziva *fazni prostor* sistema.

Suština ovog primera je u sledećem. Diferencijalna jednačina drugog reda (1.1) se uz pomoć nove promenljive $p = p(q)$ (odnosno $p = p(q')$) i pomoćne funkcije $h$ prikazuje u vidu sistema od dve jednačine prvog reda. U navedenom primeru eksplicitno je navedena fizička interpretacija ove konstrukcije.

## 1.1 Varijacioni račun

U nastavku se dokazuje potreban uslov za ekstrem funkcionele u vidu Ojler-Lagranžove jednačine. Najpre se formuliše potreban uslov u opštem slučaju kada je $J$ diferencijailna funkcionela na normiranom prostoru.

### 1.1.1 Potreban uslov za ekstrem

Klasičan problem varijacionog računa je:

$$\max_{\{x(t)\}} J = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))dt \qquad (1.2)$$
$$x(a) = A$$
$$x(b) = B$$

gde je $f(t, x, x'(t))$ data neprekidna diferencijabilna funkcija, a $a$, $b$, $A$ i $B$ su dati parametri.

Ovaj problem, kao što će se kasnije videti, predstavlja specijalan slučaj problema optimalnog upravljanja za sisteme kod kojih je upravljanje moguće poistovetiti sa promenom stanja sistema, tako da važi $u(t) = x'(t), t \in [a, b]$.

Ako trajektorija $x(t)$ zadovoljava granične uslove u problemu (1.2) i ako je $x(t)$ neprekidna i $x'(t)$ po delovima neprekidna funkcija tada se ona naziva *dopustivom trajektorijom*.

Dakle, treba odrediti ekstrem funkcionele $J(x)$ koja je data u obliku određenog integrala. Jedan od načina da se pristupi rešavanju ovog problema je formulisanje potrebnog uslova za ekstrem uz pomoć pojma diferencijala funkcionele u normiranom prostoru. U nastavku navodimo tu konstrukciju.

Neka je dat normiran prostor $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ i funkcionela $J : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$. Priraštaj funkcionele $J$ u tački $x \in \mathbf{X}$ je dat sa

$$\Delta J_x(h) = J(x + h) - J(x)$$

gde je $h \in \mathbf{X}$ priraštaj "nezavisno promenljive" $x \in \mathbf{X}$. Koristiće se i oznake $\Delta J_x(h) = \Delta J(h) = \Delta J$.

**Definicija 1.1.1.** *Neka je $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|)$ normiran prostor i neka je $J : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$. Funkcionela $J$ je diferencijabilna u tački $x_0 \in \boldsymbol{X}$ ako se njen priraštaj $\Delta J_{x_0}$ može napisati u obliku*

$$\Delta J_{x_0}(h) = \delta J_{x_0}(h) + r_{x_0}(h),$$

*gde je $\delta J_{x_0}(h)$ neprekidna linearna funkcionela po $h \in \boldsymbol{X}$, a $r_{x_0}(h) = o(\|h\|)$, kada $\|h\| \to 0$.*

Linearna funkcionela $\delta J_{x_0}$ (glavni deo priraštaja $\Delta J_{x_0}$) zove se *diferencijal ili varijacija funkcionele* $J$, a označava se i sa $\delta J$.

Neka je dat normiran prostor $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ i funkcionela $J : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$. Funkcionela $J$ dostiže lokalnu ekstremnu vrednost u tački $x_0 \in \mathbf{X}$ ako njen priraštaj $\Delta J_{x_0} = J(x) - J(x_0)$ ne menja znak u nekoj okolini tačke $x_0$, odnosno ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da za sve $x \in \mathbf{X}$ za koje je $\|x - x_0\| < \varepsilon$ važi $\Delta J_{x_0} \geq 0$ ili $\Delta J_{x_0} \leq 0$.

Jedan potreban uslov za ekstrem diferencijabilne funkcionele $J$ je dat u sledećoj teoremi:

**Teorema 1.1.1.** *Neka je $J : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcionela nad normiranim prostorom $(\boldsymbol{X}, \| \cdot \|)$. Potreban uslov da funkcionela $J$ ima lokalni ekstrem u tački $x_0$ je da postoji $\varepsilon > 0$ tako da je*

$$\delta J_{x_0}(h) = 0$$

*za sve $h \in \boldsymbol{X}$ za koje je $\|h\| \leq \varepsilon$.*

**Dokaz:** Neka je $x_0 \in \mathbf{X}$ tačka lokalnog minimuma funkcionele $J$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da važi

$$J(x_0 + h) - J(x_0) \geq 0 \quad \text{za sve } h \text{ za koje je } \|h\| < \varepsilon.$$

S obzirom da je $J$ diferencijabilna u toj tački, njen priraštaj u $x_0$ se može napisati u obliku

$$J(x_0 + h) - J(x_0) = \delta J_{x_0}(h) + r_{x_0}(h),$$

pri čemu je $r_{x_0}(h) = o(\|h\|)$ kada $\|h\| \to 0$.

Primetimo da je dovoljno posmatrati $\tilde{h} = \epsilon h \in \mathbf{X}$, pri čemu se $\epsilon$ može birati tako da je $\|\tilde{h}\| < \varepsilon$.

Kada je $\epsilon > 0$ važi

$$\frac{J(x_0 + \epsilon h) - J(x_0)}{\epsilon \|h\|} \geq 0, \tag{1.3}$$

a kada je $\epsilon < 0$ imamo

$$\frac{J(x_0 + \epsilon h) - J(x_0)}{\epsilon \|h\|} \leq 0. \tag{1.4}$$

Iz uslova diferencijabilnosti i (1.3) sledi

$$\frac{1}{\epsilon \|h\|}(\delta J_{x_0}(\epsilon h) + r_{x_0}(\epsilon h)) \geq 0,$$

pa se iz linearnosti varijacije dobija

$$\frac{1}{\|h\|}\delta J_{x_0}(h) + \frac{r_{x_0}(\epsilon h)}{\|\epsilon h\|} \geq 0.$$

S obzirom da je $r_{x_0}(\tilde{h}) = o(\|\tilde{h}\|)$ kada $\|\tilde{h}\| \to 0$, važi

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left( \frac{\delta J_{x_0}(h)}{\|h\|} + \frac{r_{x_0}(\epsilon h)}{\|\epsilon h\|} \right) \geq 0,$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{\delta J_{x_0}(h)}{\|h\|} + \lim_{\epsilon \to 0} \frac{r_{x_0}(\epsilon h)}{\|\epsilon h\|} = \frac{\delta J_{x_0}(h)}{\|h\|} \geq 0,$$

pa je $\delta J_{x_0}(h) \geq 0$, za sve $h$ dovoljno male norme.

Sa druge strane, iz uslova diferencijabilnosti i (1.4) sledi

$$\frac{1}{\epsilon \|h\|} (\delta J_{x_0}(\epsilon h) + r_{x_0}(\epsilon h)) \leq 0,$$

pa se iz linearnosti varijacije dobija

$$\frac{1}{\|h\|} \delta J_{x_0}(h) - \frac{r_{x_0}(\epsilon h))}{\|\epsilon h\|} \leq 0.$$

S obzirom da je $r_{x_0}(\tilde{h}) = o(\|\tilde{h}\|)$ kada $\|\tilde{h}\| \to 0$ dobija se $\delta J_{x_0}(h) \leq 0$, za sve $h$ dovoljno male norme.

Prema tome, zaključujemo da ako je $x_0$ tačka lokalnog minimuma diferencijabilne funkcionele $J$, onda postoji $\varepsilon > 0$ tako da važi $\delta J_{x_0}(h) = 0$ za sve $h \in \mathbf{X}$, $\|h\| < \varepsilon$. Slično se dokazuje ako je $x_0$ tačka lokalnog maksimuma. $\square$

**Napomena.** Iz dokaza sledi da je dovoljno pretpostaviti diferencijabilnost funkcionele $J$ u tački $x_0$.

### 1.1.2 Ojler-Lagranžova jednačina

Rešenje problema varijacionog računa (1.2) je dopustiva trajektorija $x(t)$ koja maksimizira ili minimizira vrednost funkcije cilja $J(x)$. Ovo rešenje, ako postoji, mora da zadovoljava određene uslove. Jedan od neophodnih uslova je Ojler-Lagranžova jednačina.

Njen značaj se ogleda u tome što određuje jednog kandidata za ekstrem, pri čemu egzistencija i jedinstvenost ekstrema najčešće slede iz fizičke interpretacije problema.

Posmatra se ponovo problem (1.2). Treba odrediti slab lokalni ekstrem funkcionele $J(x)$.

Pretpostavimo da je $f$ dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija po svakoj promenljivoj. Priraštaj $x(t)+h(t)$ nezavisno promenljive $x(t)$ ispunjava date granične uslove ako i samo ako je $h(a)=h(b)=0$. Na osnovu Teoreme 1.1.1 potreban uslov za lokalni ekstrem funkcionele $J$ u tački $x$ je dat sa $\delta J=0$. Odredimo sada varijaciju funkcionele $J$ u ovom konkretnom slučaju:

$$\Delta J(x) = J(x+h)-J(x) = \int_a^b [f(t,(x+h)(t),(x+h)'(t)) - f(t,x(t),x'(t))]dt.$$

Iz diferencijabilnosti podintegralne funkcije sledi

$$\begin{aligned}
\Delta J(x) &= \int_a^b [\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial x'}h' + r(t,x,x',h,h')]dt \\
&= \int_a^b [\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial x'}h']dt + \int_a^b r(t,x,x',h,h')dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}hdt + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x'}h'dt + \int_a^b r(t,x,x',h,h')dt,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

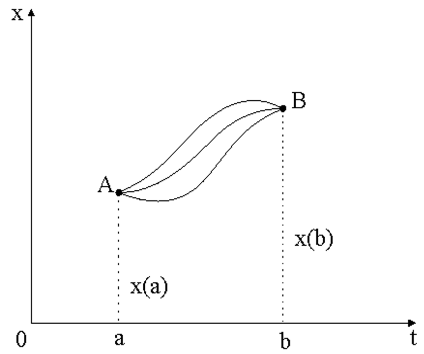
gde $r(t,x,x',h,h')$ predstavlja članove višeg reda Tejlorovog razvoja funkcije $f(t,x+h,(x+h)')$. Parcijalnom integracijom se dobija

$$\Delta J(x) = \int_a^b f_x h dt + f_{x'}h(t)\mid_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}f_{x'}hdt + \int_a^b r(t,x,x',h,h')dt.$$

Drugi sabirak se gubi, tj.

$$f_{x'}h(t)\mid_a^b = \frac{\partial f}{\partial x'}\mid_{t=b} h(b) - \frac{\partial f}{\partial x'}\mid_{t=a} h(a) = 0, \tag{1.6}$$

jer je $h(a)=h(b)=0$. Dakle, za date granične uslove $x(a)=A$ i $x(b)=B$ važi jednakost (1.6). Ovi granični uslovi su prikazani na slici 1.




Slika 1.

Uvođenjem oznake

$$\int_a^b r(t,x,x',h,h')dt = \tilde{r}(t,x,x',h,h')$$

dobija se:

$$\begin{aligned}\Delta J(x) &= \int_a^b f_x h dt - \int_a^b \frac{d}{dt} f_{x'} h dt + \tilde{r}(t,x,x',h,h') \\ &= \int_a^b (f_x - \frac{d}{dt} f_{x'}) h dt + \tilde{r}(t,x,x',h,h'),\end{aligned}$$

pri čemu važi $\tilde{r}(t,x,x',h,h') \to 0$, kada $\|h\|_1 \to 0$. Potreban uslov za slab ekstrem funkcionele $J$ je dat sa:

$$\delta J = 0,$$

odnosno

$$\delta J = \int_a^b (\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'}) h dt = 0. \tag{1.7}$$

U nastavku dokazujemo da je tada:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0. \tag{1.8}$$

Jednačina (1.8) zove se *Ojler-Lagranžova jednačina.*

**Lema 1.1.1.** *a) Neka je data funkcija $F \in C[a,b]$ i neka važi $\int\limits_a^b F(t)h(t)dt = 0$, za sve $h \in C^1[a,b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$. Tada je $F \equiv 0$.*

*b) Neka je data funkcija $G \in C[a,b]$ i neka važi $\int\limits_a^b G(t)h'(t)dt = 0$, za sve $h \in C^1[a,b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$. Tada je $G(t) = const$.*

**Dokaz:**

a) Pretpostavljamo da postoji $t_0 \in [a,b]$ u kojoj je $F(t_0) \neq 0$. Neka je, na primer, $F(t_0) > 0$. Iz neprekidnosti funkcije $F$ sledi da postoji interval $(c,d) \subset (a,b)$ koji sadrži tačku $t_0$ tako da važi $F(t) > 0$, za sve $t \in (c,d)$. Neka je $h(t) := (c-t)^2(d-t)^2, t \in (c,d)$, a $h(t) = 0$ za $t \in (a,b) \setminus (c,d)$. Tada je $\int\limits_a^b F(t)h(t)dt > 0$, što je u kontradikciji sa uslovom zadatka.

b) Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti za integral sledi da postoji $c \in \mathbb{R}$ tako da važi

$$\int_a^b (G(t) - c)dt = 0.$$

Pokažimo da za proizvoljnu neprekidnu funkciju $F(t), t \in [a,b]$, važi

$$\int_a^b (G(t) - c)F(t)dt = 0.$$

Jasno, $F$ možemo napisati u obliku $F(t) = \lambda(t) + \alpha$, pri čemu je $\int\limits_a^b \lambda(t)dt = 0$, a $\alpha = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b F(t)dt$.

Može se primetiti da funkcija $h(t) = \int\limits_a^t \lambda(\tau)d\tau$ ispunjava uslove zadatka ($h'(t) = \lambda(t)$). Dakle,

$$\int_a^b (G(t) - c)F(t)dt = \int_a^b G(t)\lambda(t)dt - c\int_a^b \lambda(t)dt + \alpha\int_a^b (G(t) - c)dt = 0$$

za proizvoljnu funkciju $F \in C[a,b]$. Za funkciju $F(t) = G(t) - c$, dobija se

$$\int_a^b (G(t)-c)^2 dt = 0,$$

odnosno $G(t) \equiv c$. $\square$

**Lema 1.1.2** (Paul du Bois-Reimond)**.** *Neka su date funkcije $F, G \in C[a,b]$ i neka važi*

$$\int_a^b (F(t)h(t) + G(t)h'(t))dt = 0,$$

*za sve $h \in C^1[a,b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$. Tada je $G$ diferencijabilna i važi $F(t) - G'(t) = 0$.*

**Dokaz:**
Neka je $\tilde{F}(t) = \int_a^t F(\tau)d\tau$. Parcijalnom integracijom dobija se

$$\int_a^b F(t)h(t)dt = h(t)\tilde{F}(t)\mid_a^b - \int_a^b \tilde{F}(t)h'(t)dt = -\int_a^b \tilde{F}(t)h'(t)dt.$$

Prema tome

$$\int_a^b [F(t)h(t) + G(t)h'(t)]dt = \int_a^b [G(t) - \tilde{F}(t)]h'(t)dt = 0.$$

Na osnovu leme 1.1.1 dobija se $G(t) = \tilde{F}(t) + c$, za neko $c \in \mathbb{R}$. S obzirom da je desna strana ove jednačine diferencijabilna ($\tilde{F}'(t) = F(t), t \in [a,b]$) sledi $G \in C^1[a,b]$ i $G'(t) = F(t), t \in [a,b]$. $\square$

Iz lema 1.1.1 i 1.1.2 sledi teorema:

**Teorema 1.1.2.** *Neka je data funkcionela $J(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))dt$, pri čemu $x \in C^1[a,b]$ i važi $x(a) = A, x(b) = B$. Ako funkcionela $J$ ima ekstrem u $x_0 \in C^1[a,b]$, onda je $x_0$ rešenje Ojlerove jednačine*

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0$$

*sa graničnim uslovima $x(a) = A, x(b) = B$.*

**Dokaz:** Znamo da je

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'}\right) h dt = 0,$$

za sve $h \in C^1[a,b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$, pa iz leme 1.1.1 a), ako je

$$F = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'},$$

dobija se izraz (1.8).

Ujedno, iz (1.5) i Leme Dibua Rejmonda takođe sledi (1.8), odnosno

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0,$$

što se i trebalo dokazati. $\square$

Dakle, rešavanje Ojlerove jednačine je samo prvi korak pri određivanju ekstrema zadate funkcionele. Integralne krive koje zadovoljavaju Ojlerovu jednačinu nazivaju se *ekstremale*. Ojlerova jednačina je jednačina drugog reda i u razvijenom obliku glasi

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x'} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x'} x' - \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} x'' = 0.$$

PRIMER 1. *Odrediti krivu minimalne dužine čiji su krajevi zadate tačke* $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

*Pošto je dužina luka krive* $y = y(x)$ *za koju važi* $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$, *data sa*

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx,$$

*treba minimizirati funkciju* $J$.

*Uvodimo oznaku* $\sqrt{1 + y'^2(x)} = F(x, y, y')$. *Iz Ojler-Lagranžove jednačine sledi*

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y, y') = \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y').$$

*Pošto* $F$ *ne sadrži* $x$, *važi*

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y, y') = 0,$$

*odnosno,*

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y') = \frac{d}{dx}\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}} = 0.$$

*Dakle, važi*

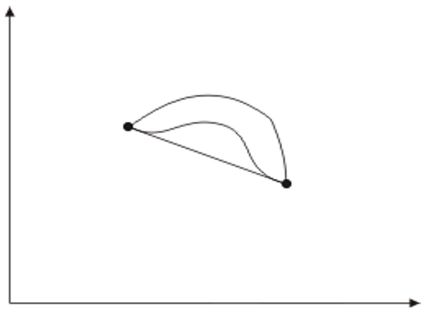
$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}} = c = const.$$

*odakle je*

$$y'(x) = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = A.$$

*Rešenje je funkcija $y(x) = Ax + B$, pri čemu se $A$ i $B$ određuju iz početnih uslova, pa se dobija jednačina tražene prave*

$$y(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}, \quad x \in [x_1, x_2].$$



*Slika 2. Ilustracija primera* 1.

Posmatrajmo ponovo problem određivanja ekstremale funkcionele $J$ kao što je to navedeno u formulaciji Teoreme 1.1.2. Ovaj pristup ukazuje na put formulisanja dovoljnog uslova za ekstrem.

Uvođenjem funkcije $\bar{x}(t)$ kao druge funkcije po $t$ koja se beskonačno malo razlikuje od $x(t)$ za svako $t \in [a,b]$, može se izvesti Ojlerova jednačina na način koji se malo razlikuje od gore prikazanog.

Definišemo varijaciju funkcije $x$ (prilikom variranja vrši se promena same funkcije, dok je $t$ fiksirano):

$$\delta_t x = \delta x = \bar{x}(t) - x(t),$$

$$\delta x = \varepsilon \phi(t),$$

gde je $\varepsilon$ "beskonačno mali" parametar, a $\phi(t)$ proizvoljna funkcija (za sada). Pošto parametar $\delta$ označava samo promenu funkcije bez promene argumenta, to je

$$\delta t = 0.$$

Pokazaćemo da je varijacioni operator $\delta$ komutativan sa operatorima diferenciranja i integraljenja, odnosno da je izvod varijacije jednak varijaciji izvoda, kao i da je varijacija integrala jednaka integralu varijacije.

Izvod varijacije je:

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = \frac{d}{dt}[\varepsilon\phi(t)] = \varepsilon\frac{d\phi}{dt}.$$

Varijacija izvoda je:

$$\delta(\frac{dx}{dt}) = \frac{d\bar{x}}{dt} - \frac{dx}{dt} = \frac{d[\bar{x}(t) - x(t)]}{dt} = \varepsilon\frac{d\phi}{dt}.$$

Dakle,

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = \delta(\frac{dx}{dt}).$$

Prilikom integraljenja dobijamo:

$$\delta\int_a^b x(t)dt = \int_a^b \bar{x}(t)dt - \int_a^b x(t)dt = \int_a^b [\bar{x}(t) - x(t)]dt = \int_a^b \delta x dt.$$

Posmatrajmo sada priraštaj funkcionele:

$$J(\bar{x}) - J(x) = \int_a^b [f(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) - f(t, x(t), x'(t))]dt. \tag{1.9}$$

Potreban uslov za ekstrem funkcionele $J$ je $\delta J = 0$. Razvojem funkcije $f$ u Tejlorov red u okolini "tačke" $x = x(t)$, pri čemu je $t$ fiksirano, dobija se:

$$f(t, \bar{x}, \bar{x}') \approx f(t, x, x') + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x} - x) + \frac{\partial f}{\partial x'}(\bar{x}' - x') +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{2\partial x^2}(\bar{x} - x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x'}(\bar{x} - x)(\bar{x}' - x') + \frac{\partial^2 f}{2\partial x'^2}(\bar{x}' - x')^2 + \dots$$

Zamenom ovog izraza u (1.9) i uvrštavanjem izraza $\delta x = \bar{x} - x = \varepsilon\phi(t)$ dobija se

$$J(\bar{x}) - J(x) = \int_a^b [f(t, x, x') + \frac{\partial f}{\partial x}\varepsilon\phi + \frac{\partial f}{\partial x'}\varepsilon\phi' + \frac{\partial^2 f}{2\partial x^2}\varepsilon^2\phi^2 +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x'}\varepsilon^2\phi\phi' + \frac{\partial^2 f}{2\partial x'^2}\varepsilon^2\phi'^2 - f(t, x, x')]dt + o(\|\varepsilon\|^2),$$

odnosno

$$J(\bar{x})-J(x)=\varepsilon\int\limits_a^b(\frac{\partial f}{\partial x}\phi+\frac{\partial f}{\partial x'}\phi')dt+\frac{1}{2}\varepsilon^2\int\limits_a^b(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\phi^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x'}\phi\phi'+\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}\phi'^2)dt+o(\|\varepsilon\|^2).$$

Uvodimo oznake

$$\delta J=\varepsilon\int\limits_a^b(\frac{\partial f}{\partial x}\phi+\frac{\partial f}{\partial x'}\phi')dt$$

$$\delta^2 J=\frac{1}{2}\varepsilon^2\int\limits_a^b(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\phi^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x'}\phi\phi'+\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}\phi'^2)dt,$$

gde $\delta J$ predstavlja prvu varijaciju, a $\delta^2 J$ drugu varijaciju.

Pretpostavimo da je parametar $\varepsilon$ toliko mali da važi

$$J(\bar{x})-J(x)=\varepsilon\int\limits_a^b(\frac{\partial f}{\partial x}\phi+\frac{\partial f}{\partial x'}\phi')dt+r(t,x,\varepsilon,\phi),$$

pri čemu $r(t,x,\varepsilon,\phi)\to 0$, kad $\varepsilon\to 0$.

Da bi $J(x)$ bilo optimalno, $\delta J$ mora biti jednako nuli jer je parametar $\varepsilon$ proizvoljnog znaka. Dakle, važi

$$\delta J=\varepsilon\int\limits_a^b(\frac{\partial f}{\partial x}\phi+\frac{\partial f}{\partial x'}\phi')dt=0.$$

Kako je

$$\frac{d}{dt}(\phi\frac{\partial f}{\partial x'})=\phi'\frac{\partial f}{\partial x'}+\phi\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'},$$

dobijamo

$$\delta J=\varepsilon\phi(t)\frac{\partial f}{\partial x'}\mid_a^b+\varepsilon\int\limits_a^b(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'})\phi(t)dt=0. \tag{1.10}$$

Pošto su granični uslovi $x(a)=A$ i $x(b)=B$, a varirane trajektorije takođe moraju ispunjavati ove uslove, to znači da važi

$$\delta x(a)=\delta x(b)=0,$$

tj.

$$\phi(a)=\phi(b)=0.$$

Dakle, izraz za prvu varijaciju (1.10) postaje

$$\delta J = \varepsilon \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'}\right)\phi(t)dt = 0,$$

odnosno, pošto je $\delta x = \varepsilon\phi(t)$

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'}\right)\delta x dt = 0.$$

Kako je $\delta x(a) = \delta x(b) = 0$, iz leme 1.1.1$a$) sledi

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0$$

što jeste Ojler-Lagranžova jednačina.

### 1.1.3 Varijacioni problemi sa ograničenjima

Varijacioni problemi mogu imati ograničenja u vidu određenih integrala, algebarskih jednačina ili diferencijalnih jednačina. U nastavku ćemo posmatrati varijacioni problem sa ograničenjem u vidu određenog integrala, tj. izoperimetrijski problem.

**Izoperimetrijski zadatak**

Posmatrajmo problem određivanja ekstremnih vrednosti funkcionele

$$J(x) = \int_a^b f(t, x, x')dt$$

pri čemu je unapred zadato ograničenje u vidu integrala

$$K(x) = \int_a^b g(t, x, x')dt = l,$$

a rešenje $x = x(t), t \in [a, b]$ treba ujedno da zadovoljava i uslove

$$x(a) = A, \quad x(b) = B.$$

Dakle, $l$ je unapred zadat broj. Pretpostavlja se da su $f$ i $g$ dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije po svim promenljivim i da rešenje $x = x(t), t \in [a, b]$ nije ekstrem funkcionele $K$. Ovako formulisani problemi nazivaju se izoperimetrijski problemi.

**Teorema 1.1.3.** *Ako je kriva $x = x(t), t \in [a, b]$, ekstremna vrednost funkcionele $J(x) = \int\limits_a^b f(t, x, x')dt$, koja ispunjava uslove*

$$K(x) = \int\limits_a^b g(t, x, x')dt = l, \quad x(a) = A, x(b) = B,$$

*i ako ona nije ekstrem funkcionele $K$, onda postoji konstanta $\lambda \in \mathbb{R}$ takva da je ta kriva $x$ ekstrem funkcionele $\int\limits_a^b (f + \lambda g)dt$.*

Glavni rezultat dokaza teoreme je potreban uslov za ekstrem dat sa

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial x'}\right) = 0.$$

Ukoliko treba odrediti ekstrem funkcionele $J$ koja zavisi od više funkcija i ograničenja, a problem je postavljen na sledeći način:

$$J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int\limits_a^b f(t, x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n')dt$$

uz ograničenja

$$x_i(a) = A_i, \quad x_i(b) = B_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\int\limits_a^b g_j(t, x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n')dt = l_j, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

potreban uslov za ekstrem je dat sistemom od n jednačina

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x_i'}(f + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j)\right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

U nastavku dajemo primer iz literature [6].

Primer 2. *Postoji legenda prema kojoj je Dido, prognana feničanska princeza, po dolasku na obalu Kartagine* 814. *godine p.n.e. zatražila od domorodaca komad zemlje. Ponudili su joj onoliko zemlje koliko može biti obuhvaćeno jednom volovskom kožom. Dido je isekla volovsku kožu na duge tanke trake pomoću kojih je omeđila najveću moguću površinu. Nakon toga Dido je postala kraljica Kartagine.*

*Intuitivno rešenje ovog problema je jednostavno, međutim matematički dokaz je dat tek u* 19. *veku.*

*Problem se svodi na određivanje zatvorene krive koja obuhvata maksimalnu površinu koju ćemo obeležiti sa* $J$

$$J = \int_a^b x(t)dt,$$

*pri čemu je* $x(t) \geq 0$ *za svako* $t \in [a, b]$. *Pretpostavimo da je dužina* $K$ *krive data sa*

$$K = \int_a^b \sqrt{1 + x'^2}dt$$

*i da je pri tome* $x(a) = 0$ *i* $x(b) = 0$. *Pod pretpostavkom da je* $a = 0$, *treba odrediti* $b$.

*Uvodimo Lagranžov množitelj* $\lambda$ *i formiramo Lagranžovu funkciju*

$$J + \lambda K = \int_0^b (x + \lambda\sqrt{1 + x'^2})dt.$$

*Iz Ojler-Lagranžove jednačine sledi*

$$1 - \lambda\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}}\right) = 0.$$

*Za fiksirano* $\lambda$ *posmatraćemo* $x$ *kao funkciju po* $t$ *i* $\lambda$. *Integraljenjem dobijamo*

$$\lambda\frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = t + C_1, \tag{1.11}$$

*gde je* $C_1$ *konstanta. Rešavanjem jednačine (1.11) po* $x'$ *i uvrštavanjem izraza* $x' = \frac{dx}{dt}$ *dobijamo*

$$dx = \pm\frac{(t - C_1)dt}{\sqrt{\lambda^2 - (t - C_1)^2}},$$

*a daljim integraljenjem*

$$x = \mp\sqrt{\lambda^2 - (t - C_1)^2} + C_2.$$

*Odavde sledi jednačina*

$$(t - C_1)^2 + (x - C_2)^2 = \lambda^2$$

*što jeste jednačina kruga sa centrom u* $(C_1, C_2)$ *i poluprečnikom* $\lambda$.

# 2

# Dinamička optimizacija i optimalno upravljanje

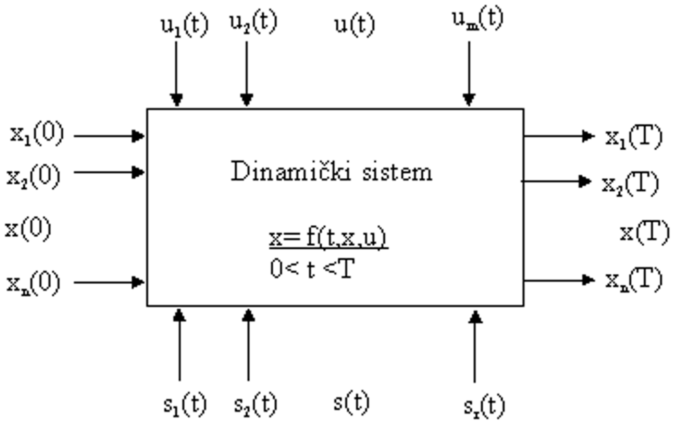
Optimizacija ima za cilj da odredi najbolje rezultate pri određenim uslovima, odnosno ograničenjima kao što je to urađeno u Didoninom problemu u prethodnoj glavi. Da bi zadatak optimizacije bio pravilno postavljen, neophodno je nedvosmisleno definisati, to jest identifikovati objekat optimizacije i kriterijum optimizacije.

Probleme optimizacije možemo podeliti na statičke i dinamičke. Statički problemi optimizacije, problemi definisani u izvesnom vremenskom trenutku, rešavaju se tehnikama kao što su linearno i nelinearno programiranje i teorija igara. Problemi definisani u nekom vremenskom intervalu, kao što je problem optimizacije ekonomskog rasta, spadaju u probleme dinamičke optimizacije. Tehnike kojima se rešavaju problemi dinamičke optimizacije su varijacioni račun, dinamičko programiranje i princip maksimuma.

Dinamički proces se odvija u nekom sistemu čije stanje se u svakom vremenskom trenutku opisuje nekom funkcijom stanja. Osnovni zadatak optimalnog upravljanja je ispunjavanje određenog kriterijuma optimalnosti za dati sistem. Matematički model dinamičkog procesa je najčešće sistem običnih diferencijalnih jednačina.

Većina dinamičkih procesa može se predstaviti shemom prikazanoj na slici 3, na kojoj su prikazani osnovni parametri koji karakterišu stanje sistema u svakom vremenskom trenutku: vreme, promenljive stanja, promenljive upravljanja i slučajni parametri.

Uobičajeno je da se vreme kao nezavisno promenljiva veličina označava sa $t$, pri čemu $t$ pripada određenom vremenskom intervalu $[t_0, t_1]$. Broj $t_0$ se naziva *početni trenutak* u kome počinje da se odvija posmatrani proces, a $t_1$ je *terminalni (finalni) trenutak* u kom se proces završava. Često se uzima da je $t_0 = 0$, i $t_1 = T$, pri čemu terminalni trenutak može da bude nepoznat, dok će se u glavi 4 razmatrati optimalno upravljanje na beskonačnom intervalu, odnosno slučaj kada $t_1 \to \infty$.




**Slika 3**. *Parametri dinamičkog sistema*

Stanje sistema je karakterisano vektorom stanja

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in [t_0, t_1],$$

pri čemu se funkcije stanja $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\dots$, $x_n(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ nazivaju promenljive stanja i koje su neprekidne funkcije vremena. Terminalno stanje sistema $x(T)$ ne mora biti uvek zadato.

Vektor upravljanja je dat sa

$$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)), t \in [t_0, t_1],$$

pri čemu su promenljive upravljanja $u_1(t)$, $u_2(t)$, $\dots$, $u_m(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, za neko $m \in \mathbb{N}$, takođe funkcije vremena. Ove funkcije mogu biti neprekidne ali i po delovima neprekidne funkcije.

Svaki dinamički sistem zavisi i od slučajnih parametara $s_1(t), s_2(t), \dots, s_p(t)$, za neko $p \in \mathbb{N}$, koji se menjaju slučajno pri promeni vremena i koji se, po pravilu, ne mogu meriti. U ovom radu se proučavaju isključivo procesi kod kojih se dejstvo slučajnih parametara može zanemariti i ovi procesi se nazivaju deterministički dinamički procesi.

Ponašanje trajektorija stanja $x_j, j = 1, \dots, n$, se karakteriše sistemom od $n$ diferencijalnih jednačina prvog reda koje izražavaju promenu parametara stanja u zavisnosti od vremena, parametara stanja i parametara upravljanja:

$$x'_j(t) = f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \quad j = 1, \dots, n, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{2.1}$$

pri čemu su funkcije $f_j, j = 1, \dots, n$ zadate i neprekidno diferencijabilne.

Neka je dat linearni sistem diferencijalnih jednačina

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + B\mathbf{u},$$

gde je $A$ matrica reda $n \times n$, a $B$ matrica reda $n \times m$ uz početni uslov za posmatrani sistem $\mathbf{x}(t_0) = C$, za neko $C \in \mathbb{R}^n$. Ako je kriterijum optimalnosti za dati sistem zadat u mešovitom obliku

$$J = J(u) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)dt + \Psi(t_1, x(t_1)), \tag{2.2}$$

gde su terminalna funkcija $\Psi$ i podintegralna funkcija $F$ zadate i neprekidno diferencijabilne, onda se posmatrani problem naziva Bolcin problem. U slučaju da je $\Psi \equiv 0$, problem je Lagranžovog tipa, a ako je $F \equiv 0$ problem je Majerovog tipa.

Rešavanjem problema optimalnog upravljanja određuju se promenljive stanja i promenljive upravljanja. Pri tome kriterijum optimalnosti treba da bude u maksimumu ili u minimumu, a diferencijalne jednačine (2.1) i zadati početni uslovi treba da budu zadovoljeni. Na vektor stanja i vektor upravljanja mogu biti nametnuta razna ograničenja.

U nastavku se posmatra problem optimalnog upravljanja kod kojeg je kriterijum optimalnosti u maksimumu, i razmotriće se metodi za rešavanje problema optimalnog upravljanja: dinamičko programiranje i princip maksimuma.

## 2.1 Dinamičko programiranje

Dinamičko programiranje je jedna od tehnika za rešavanje problema dinamičke optimizacije i jedan od pristupa problemu upravljanja.

Zasniva se na Belmanovom principu optimalnosti koji se navodi u literaturi [1]: "Optimalna strategija ima osobinu da, bez obzira na početno stanje i početne odluke (to jest upravljanje), preostale odluke moraju predstavljati najbolju moguću strategiju s obzirom na stanje koje je nastalo kao rezultat početne odluke".

Dakle, rezultat odluke u jednom stanju utiče na rezultate odluke u sledećem stanju.

Posmatrajmo sledeći problem upravljanja:

$$
\begin{gathered}
\max_{\{\mathbf{u}(t)\}} J = \int_{t_0}^{t_1} F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt + \Psi(t_1, \mathbf{x}_1) \\
\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\
\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\
\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1 \\
\{\mathbf{u}(t)\} \in \mathbf{U}.
\end{gathered}
$$

U cilju izvođenja Belmanove jednačine, odnosno osnovne parcijalne diferencijalne jednačine koja se koristi u dinamičkom programiranju, uvešćemo sledeće pretpostavke. Neka je $J^*(t, \mathbf{x})$ optimalna funkcija za problem sa početnim stanjem $\mathbf{x}$ u trenutku $t$, a $J^*(t + \triangle t, \mathbf{x} + \triangle \mathbf{x})$ optimalna funkcija za deo optimalne trajektorije sa početnim stanjem $\mathbf{x} + \triangle \mathbf{x}$ u trenutku $t + \triangle t$. Tada, tokom intervala $[t, t + \triangle t]$ jedini priraštaj optimalne funkcije proizilazi iz podintegralne funkcije $F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ kao $F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \triangle t$. Optimalna funkcija na čitavom intervalu sa početkom u trenutku $t$, uzimajući u obzir period pre kao i nakon trenutka $t + \triangle t$, data je u sledećem obliku:

$$
J^*(t, \mathbf{x}) = \max_{\{\mathbf{u}(t)\}} [F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \triangle t + J^*(t + \triangle t, \mathbf{x} + \triangle \mathbf{x})]. \tag{2.3}
$$

Tejlorovim razvojem funkcije $J^*(t + \triangle t, \mathbf{x} + \triangle \mathbf{x})$ dobijamo:

$$
J^*(t + \triangle t, \mathbf{x} + \triangle \mathbf{x}) = J^*(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} \triangle \mathbf{x} + \frac{\partial J^*}{\partial t} \triangle t + \ldots \tag{2.4}
$$

gde je $\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}$ vektor-kolona:

$$
\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial J^*}{\partial x_1}, \frac{\partial J^*}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial J^*}{\partial x_n} \right).
$$

Ubacivanjem izraza (2.4) u (2.3) dobijamo:

$$
0 = \max_{\{\mathbf{u}(t)\}} [F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} \frac{\triangle \mathbf{x}}{\triangle t} + \frac{\partial J^*}{\partial t} + \ldots].
$$

Uzimajući u obzir da važi:

$$
\lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle \mathbf{x}}{\triangle t} = \mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}),
$$

dobijamo izraz za osnovnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu koja se koristi u dinamičkom programiranju

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \max_{\{\mathbf{u}(t)\}}[F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})],$$

gde je $J^*$ optimalna funkcija, tj. maksimizirana vrednost funkcije cilja $J$. Ova jednačina se zove Belmanova jednačina. Važi granični uslov

$$J^*(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = \Psi(t_1, \mathbf{x}_1).$$

U nastavku ćemo ukratko dovesti u vezu dinamičko programiranje i varijacioni račun.

Klasičan problem varijacionog računa je specijalan slučaj problema dinamičkog programiranja. U varijacionom računu upravljanje je zamenjeno sa promenom stanja po vremenu $\mathbf{x}'$ i ne nameću se ograničenja na promenljive upravljanja, tj. važi

$$\mathbf{x}' = \mathbf{u}$$

$$\Omega = \mathbb{R}^n,$$

gde je $\Omega$ skup dopustivih upravljanja. U ovom slučaju Belmanova jednačina postaje

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \max_{\{\mathbf{x}'\}}[F(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') + \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}'].$$

Pod pretpostavkom da ovaj maksimum postoji, neophodan uslov za ekstrem po promenljivoj $\mathbf{x}'$ je dat sa:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}[F(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') + \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}'] = 0.$$

S obzirom da je $\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t))$ nezavisno od $\mathbf{x}'$ važi:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}'} = -\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}. \tag{2.5}$$

Diferenciranjem po $t$ dobija se

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}'}) = -\frac{d}{dt}(\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}) = -(\frac{\partial^2 J^*}{\partial t \partial \mathbf{x}}) - \mathbf{x}'(\frac{\partial^2 J^*}{\partial \mathbf{x}^2}), \tag{2.6}$$

pri čemu je

$$\frac{\partial^2 J^*}{\partial t \partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial t \partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^2 J^*}{\partial t \partial x_n}\right),$$

$$\frac{\partial^2 J^*}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J^*}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 J^*}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 J^*}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 J^*}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Iz Belmanove jednačine sledi da u tački maksimuma $(\mathbf{x}')^*$ važi

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{\partial J^*}{\partial t}\right) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{x}' \frac{\partial^2 J^*}{\partial \mathbf{x}^2}, \tag{2.7}$$

pa se kombinovanjem jednačina (2.6) i (2.7) dobija da, ako je $\mathbf{x}$ rešenje Belmanove jednačine, onda je $\mathbf{x}$ rešenje i Ojler-Lagranžove jednačine

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} = 0,$$

pa i u ovom slučaju Ojler-Lagranžova jednačina definiše neophodan uslov za ekstrem.

## 2.2 Hamiltonova funkcija (Hamiltonijan)

Posmatrajmo funkcionelu

$$J(\mathbf{x}) = \int_a^b F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t))dt,$$

gde je

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)),$$
$$\mathbf{x}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)).$$

Potreban uslov za ekstrem funkcionele $J(x)$ dat je sistemom Ojler-Lagranžovih jednačina, tj. sistemom $n$ diferencijalnih jednačina drugog reda

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x_k'} = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.8}$$

Hamilton je došao do ideje da se gornji sistem zameni sa $2n$ diferencijalnih jednačina prvog reda. Osim $n$ promenljivih funkcija $x_k(t), t \in [a, b], k = 1, \ldots, n$, Hamilton je uveo $n$ konjugovanih promenljivih $y_k(t), t \in [a, b], k = 1, \ldots, n$ koje su međusobno nezavisne funkcije i važi

$$y_k = \frac{\partial F}{\partial x'_k}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{2.9}$$

Uvodimo novu funkciju koju ćemo zvati Hamiltonova funkcija:

$$H = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} y_k x'_k - F(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}'),$$

gde je $x'_k = x'_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Diferenciranjem funkcije $H$ po $t$ dobija se

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial t}dt + \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy \\ &= \sum_{k=1}^{n} x'_k dy_k + \sum_{k=1}^{n} y_k dx'_k - \frac{\partial F}{\partial t}dt - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_k}dx_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x'_k}dx'_k. \end{aligned}$$

Iz (2.8) i (2.9) sledi

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'_k} = \frac{d}{dt}y_k = y'_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dalje važi

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{k=1}^{n} x'_k dy_k + \sum_{k=1}^{n} y_k dx'_k - \frac{\partial F}{\partial t}dt - \sum_{k=1}^{n} y'_k dx_k - \sum_{k=1}^{n} y_k dx'_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} x'_k dy_k - \frac{\partial F}{\partial t}dt - \sum_{k=1}^{n} y'_k dx_k. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem članova uz iste diferencijale dobija se

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial t}$$

kao i sistem $2n$ jednačina

$$x'_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad y'_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{2.10}$$

Sistem (2.10) je sistem *kanonskih ili Hamiltonovih diferencijalnih jednačina.*

Rešenje ovog sistema je

$$x_k = x_k(t, C_1, \dots, C_{2n}),$$
$$y_k = y_k(t, C_1, \dots, C_{2n}),$$

pri čemu se konstante $C_1, \dots, C_{2n}$ određuju iz unapred zadatih početnih uslova.

Sistemi (2.8) i (2.10) su ekvivalentni, pri čemu čitalac može da uoči analogiju sa primerom $n$ nezavisnih harmonijskih oscilatora iz prve glave.

Posmatrajmo sada integral

$$I = \int_a^b (\sum_{k=1}^{n} y_k x_k' - H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}))dt, \tag{2.11}$$

gde su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ nezavisne promenljive. Gornji integral se naziva kanonski integral dejstva dinamičkog sistema. Iz uslova stacionarnosti ($\delta I = 0$) kanonskog integrala dejstva mogu se izvesti kanonske jednačine. Uvedimo oznaku $L = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k' - H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$. Dalje, iz uslova stacionarnosti kanonskog integrala dejstva dobija se $2n$ Ojler-Lagranžovih jednačina po $x_k$ i $y_k, k = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x_k'} = -(\frac{\partial H}{\partial x_k} + y_k') = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y_k'} = x_k' - \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0,$$

odnosno dobijaju se kanonske diferencijalne jednačine (2.10).

## 2.3 Princip maksimuma

Posmatrajmo sledeći problem upravljanja (videti (2.2)):

$$J = J(u) = \int_0^T F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})dt + \Psi(T, \mathbf{x}(T))$$

$$\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad t \in [0, T],$$

pri čemu je $f$ neprekidno diferencijabilna funkcija po svakoj promenljivoj, a terminalni trenutak $T$ ne mora biti uvek unapred zadat.

Najpre ćemo rešavati slučaj kada za promenljivu upravljanja ne postoje ograničenja. Takođe, prvo ćemo posmatrati jednodimenzionalan slučaj gde je $\Psi \equiv 0$. Dakle, određujemo ekstremnu vrednost funkcionele

$$J = J(u) = \int_0^T F(t, x, u)dt,$$

pri čemu je $T$ zadato, a stanje sistema u trenutku $t = 0$ je dato sa

$$x(0) = \alpha.$$

Problem možemo rešiti u okviru varijacionog računa. Uvodimo Lagranžov množitelj $y = y(t)$ i posmatramo funkcionelu

$$\tilde{J} = \int_0^T (F(t, x, u) - y(t)(x' - f(t, x, u)))dt.$$

Variranjem nezavisnih promenljivih $x, u$ i $y$ dobijamo

$$\delta\tilde{J} = \int_0^T \left( \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial u}\delta u - \delta y(x' - f(t, x, u)) - y(\delta x' - \frac{\partial f}{\partial x}\delta x - \frac{\partial f}{\partial u}\delta u) \right) dt.$$

Koristeći osobinu da je varijacija izvoda jednaka izvodu varijacije, to jest $\delta x' = (\delta x)'$, a zatim parcijalnu integraciju integrala od $y\delta x'$ dobijamo

$$\begin{aligned} \delta\tilde{J} = &-y(T)\delta x(T) + y(0)\delta x(0) \\ &+ \int_0^T \left( \delta x \left( y' + \frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \delta y(x' - f(t, x, u)) + \delta u \left( \frac{\partial F}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial u} \right) \right) dt. \end{aligned}$$

Iz uslova stacionarnosti $\delta\tilde{J} = 0$, koristeći lemu Dibua-Rejmonda i činjenicu da se promenljive $x, u$ i $y$ mogu nezavisno varirati, dobijamo sledeći sistem jednačina

$$x' = f(t, x, u), \quad y' = -\frac{\partial F}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial x} \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial u} = 0, \tag{2.13}$$

$$-y(T)\delta x(T) + y(0)\delta x(0) = 0.$$

Pošto je $\delta x(0) = 0$ sledi da mora biti ispunjen *prirodni granični uslov* $y(T) = 0$. Iz jednačine (2.13) određuje se funkcija upravljanja $u = u(t, x, y)$, a to upravljanje $u_0 = \phi(t, x, y)$ je optimalno. Uvrštavanjem ove relacije u

(2.12) dobijamo $x' = \varphi(t, x, y)$ i $y' = \upsilon(t, x, y)$. Opšte rešenje ovog sistema zavisi od dve proizvoljne konstante koje se određuju iz zadatog uslova $x(0) = \alpha$ i prirodnog uslova $y(T) = 0$.

Posmatrajmo sada slučaj više promenljivih, gde je $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ u skladu sa principom maksimuma, koji je formulisan od strane Pontrjagina. Tražimo maksimum funkcionele

$$J = \int_0^T F(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)dt,$$

pri čemu je ponašanje sistema određeno sa

$$x_k' = f_k(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \quad k = 1, \dots, n,$$

i važi

$$x_k(0) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Napomenimo da je $T$ poznato i da promenljive nemaju ograničenja (osim da su po delovima neprekidne funkcije). Ideja je da se uvede nova funkcija koja je identična Hamiltonovoj funkciji.

Polazimo od funkcionele

$$\tilde{J} = \int_0^T (F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - \sum_{k=1}^n y_k(t)(x_k' - f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})))dt, \tag{2.14}$$

gde su funkcije $y_k$ Lagranžovi množitelji, odnosno dualne promenljive. U skladu sa kanonskim integralom dejstva dinamičkog sistema uvodimo Hamiltonijan

$$H = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) := F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{k=1}^n y_k f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Variranjem integrala (2.14), po analogiji sa računom izvedenim u jednodimenzionom slučaju dobijamo sledeći sistem jednačina

$$x_k' = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad y_k' = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n, \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

kao i $y_k(T) = 0, \quad k = 1, \dots, n$. Jednačine (2.15) sa $2n + m$ nepoznatih nazivaju se kanonske diferencijalne jednačine.

Jednačine

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = \frac{\partial F}{\partial u_k} + \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial f_j}{\partial u_k} = 0, \quad k = 1, \dots, m \tag{2.16}$$

daju potreban uslov optimalnosti Hamiltonijana s obzirom na komponente vektora upravljanja. Princip maksimuma glasi: *Ako je vektor upravljanja* $\mathbf{u}$ *optimalan, to jest, ako on saopštava kriterijumu optimalnosti* $J$ *maksimum (minimum), onda je Hamiltonijan* $H$ *maksimalan (minimalan) u odnosu na komponente vektora upravljanja* $\mathbf{u}$ *u dozvoljenom skupu upravljanja.*

Iz jednačina (2.16) određuje se optimalno upravljanje $\mathbf{u}_0$, a zatim se iz sistema kanonskih jednačina (2.15) određuju $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$.

Dovoljan uslov za minimum je, na primer, pozitivna definitnost matrice drugog izvoda funkcije $H$ po $\mathbf{u}$, to jest $\frac{\partial^2}{\partial u^2}H > 0$.

U slučaju kada komponente vektora upravljanja podležu izvesnim ograničenjima koristimo Pontrjaginov princip maksimuma. Na primer, ako je promenljiva upravljanja ograničena tako da važi

$$u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}, \quad t \in [t_0, T],$$

može se desiti da uslov $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ ne bude ispunjen u klasi dopustivih upravljanja $\Omega$ (na primer $u_0(t) < u_{min}, t \in [t_0, T]$ za funkciju $u_0$ koja je stacionarna tačka Hamiltonijana). Stoga se princip maksimuma formuliše na sledeći način

$$\min_{\mathbf{u}\in\Omega} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}).$$

Neka je $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{y}^*)$ rešenje problema upravljanja i $J^*$ optimalna vrednost kriterijuma optimalnosti. Tada je osetljivost (zavisnost) optimalne vrednosti u odnosu na početno stanje sistema $\mathbf{x}(t_0)$ data u vidu parcijalnog izvoda

$$\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}(t_0)} = \mathbf{y}^*(t_0).$$

Ako je $y_j(t_0) = 0$ za neko $j \in \{1, \ldots, n\}$, onda je rešenje neosetljivo u odnosu na male promene odgovarajuće komponente vektora početnog stanja $x_j(t_0)$. Ako $J$ označava prihod, trošak ili profit, a $\mathbf{x}$ ekonomsku količinu, onda dualna promenljiva predstavlja cenu i naziva se *shadow price.*

Treba napomenuti da se problem optimalnog upravljanja može javiti i u diskretnom obliku

$$\max_{u_t} J = \sum_{t=0}^{T-1} F(x_t, u_t)$$

$$x_{t+1} - x_t = f(x_t, u_t)$$

$$x_0 = a.$$

Hamiltonova funkcija je tada definisana na sledeći način

$$H(x_t, u_t) = F(x_t, u_t) + y_{t+1} f(x_t, u_t),$$

a Lagranžova funkcija je data sa

$$L = \sum_{t=0}^{T-1} \left( F(x_t, u_t) + y_{t+1}(f(x_t, u_t) - (x_{t+1} - x_t)) \right),$$

odnosno

$$L = \sum_{t=0}^{T-1} \left( H(x_t, u_t) - y_{t+1}(x_{t+1} - x_t) \right).$$

Ujedno treba da budu zadovoljeni i sledeći uslovi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial u_t} &= \frac{\partial H}{\partial u_t} = 0, \quad t = 0, \dots, T-1 \\
\frac{\partial L}{\partial x_t} &= \frac{\partial H}{\partial x_t} + y_{t+1} - y_t = 0, \quad t = 1, \dots, T-1 \\
\frac{\partial L}{\partial y_{t+1}} &= \frac{\partial H}{\partial y_{t+1}} - (x_{t+1} - x_t) = 0, \quad t = 0, \dots, T-1 \\
\frac{\partial L}{\partial x_T} &= -y_T = 0 \\
x_0 &= a.
\end{aligned}$$

U nastavku navodimo primer iz literature [4].

PRIMER 3. *Posmatrajmo sledeći problem upravljanja*

$$\max_u \left( -\int_0^1 \frac{1}{4}(x^2 + u^2) dt \right)$$

$$x' = x + u$$

$$x(0) = 2$$

$$x(1) = 0.$$

*Razvijamo Hamiltonovu funkciju*

$$\begin{aligned}
H(t, x, u, y) &= F(t, x, u) + y f(t, x, u) \\
&= \frac{-(x^2 + u^2)}{4} + y(x + u),
\end{aligned}$$

*pri čemu su uslovi prvog reda:*

1. $\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{u}{2} + y = 0$

2. $y' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(\frac{-x}{2} + y) = \frac{1}{2}x - y$

3. $x' = x + u.$

*Iz 1. uslova sledi da je* $u = 2y$. *Uvrštavanjem ovog izraza u 3. uslov dobijamo*

$$x' = x + 2y.$$

*Posmatrajmo sada sistem dve diferencijalne jednačine*

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y \\ y' &= \frac{1}{2}x - y. \end{aligned}$$

*Rešenje ovog sistema je*

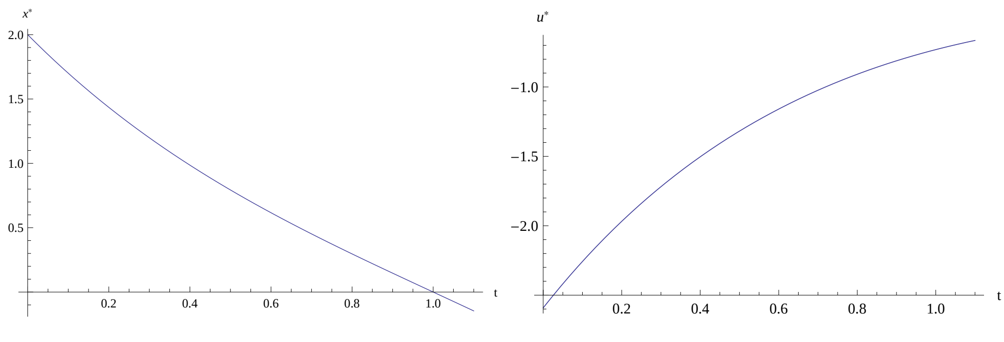
$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ y(t) &= \frac{c_1}{2}(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t} - \frac{c_2}{2}(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t}. \end{aligned}$$

*Iz uslova* $x(0) = 2$ *i* $x(1) = 0$ *sledi*

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 = 2 \\ x(1) &= c_1 e^{\sqrt{2}} + c_2 e^{-\sqrt{2}} = 0, \end{aligned}$$

*pa rešavanjem gornjeg dobijamo koeficijente* $c_1 = -0.1256$ *i* $c_2 = 2.1256$. *Dakle, optimalno rešenje početnog problema je*

$$\begin{aligned} x(t) &= -0.1256 e^{\sqrt{2}t} + 2.1256 e^{-\sqrt{2}t} \\ y(t) &= \frac{-0.1256}{2}(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t} - \frac{2.1256}{2}(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t}. \end{aligned}$$




*Slika 4. Trajektorija koju opisuje promenljiva stanja i trajektorija koju opisuje promenljiva upravljanja*

U nastavku ćemo najpre dovesti u vezu princip maksimuma i varijacioni račun, a potom ćemo dovesti u vezu princip maksimuma i dinamičko programiranje.

### 2.3.1 Princip maksimuma i varijacioni račun

Neophodan uslov za ekstrem u zadacima varijacionog računa može se izvesti iz principa maksimuma i Hamiltonove funkcije imajući u vidu da se u varijacionom računu upravljanje poistovećuje sa promenom stanja sistema $\mathbf{u} = \mathbf{x}'$.

Neka je Hamiltonova funkcija

$$H = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) = F(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') + \mathbf{y}\mathbf{x}',$$

Diferenciranjem funkcije $H$ po $\mathbf{x}'$ dobija se

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}'} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}'} + \mathbf{y},$$

a pošto je $\partial H/\partial \mathbf{x}' = 0$ neophodan uslov principa maksimuma, važi:

$$\mathbf{y} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}'}.$$

Diferenciranjem funkcije $\mathbf{y}$ po $t$ dobija se

$$\mathbf{y}' = -\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}'}, \tag{2.17}$$

a iz kanonske jednačine za promenljivu upravljanja sledi

$$\mathbf{y}' = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}. \tag{2.18}$$

Dalje, kombinovanjem jednačina (2.17) i (2.18) dolazi se do neophodnog uslova varijacionog računa, to jest Ojler-Lagranžove jednačine

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}'} = 0.$$

### 2.3.2 Princip maksimuma i dinamičko programiranje

Osnovna parcijalna diferencijalna jednačina u dinamičkom programiranju je Belmanova jednačina

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \max_{\{\mathbf{u}(t)\}}[F(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) + \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} f(t,\mathbf{x},\mathbf{u})]$$

sa terminalnim graničnim uslovom

$$J^*(\mathbf{x}_1, t_1) = \Psi(\mathbf{x}_1, t_1).$$

Za dualnu promenljivu $\mathbf{y}$ važi

$$\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{y}, \tag{2.19}$$

pa uvrštavanjem gornjeg izraza u Belmanovu jednačinu dobija se

$$\begin{aligned}-\frac{\partial J^*}{\partial t} &= \max_{\{\mathbf{u}(t)\}}[F(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) + \mathbf{y} f(t,\mathbf{x},\mathbf{u})] \\ &= \max_{\{\mathbf{u}(t)\}}[H(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{y})],\end{aligned}$$

pri čemu se vrši maksimizacija Hamiltonijana u odnosu na promenljivu upravljanja. Ovo možemo zapisati i u obliku Hamilton-Jakobijeve jednačine

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = H\left(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}\right).$$

Diferenciranjem po $\mathbf{x}$ dobija se

$$-\frac{\partial^2 J^*}{\partial \mathbf{x}\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}\right)' \frac{\partial^2 J^*}{\partial \mathbf{x}^2}.$$

Diferenciranjem izraza (2.19) dobija se

$$\mathbf{y}' = \mathbf{x}'' \frac{\partial^2 J^*}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 J^*}{\partial \mathbf{x}\partial t}.$$

Kombinovanjem poslednje dve jednačine dolazi se do kanonskih jednačina karakterističnih za princip maksimuma:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \\ \mathbf{y}' &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}},\end{aligned}$$

pri čemu je terminalni granični uslov za dualnu promenljivu dat sa

$$\mathbf{y}_1 = \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_1, t_1) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_1}.$$

## 2.4 Optimalno upravljanje sa diskontovanjem

Kada su ekonomski problemi u pitanju, funkcija $F(x, u)$ najčešće predstavlja profit ili neto dobit. Poznato je da se u ekonomiji prilikom određivanja sadašnje vrednosti nekog budućeg novčanog toka, ili u ovom slučaju prihoda, on najpre mora diskontovati pomoću diskontne stope $\rho$. Stoga se problem maksimizacije sa diskontovanjem u neprekidnom vremenu svodi na sledeći problem optimalnog upravljanja:

$$\begin{aligned} \max_{\{u(t)\}} J &= \int_0^T e^{-\rho t} F(x, u) dt \\ x' &= f(x, u) \\ x(0) &= x_0 \\ x(T) &= x_T. \end{aligned}$$

Lagranžova funkcija za ovaj problem je data u obliku

$$L = \int_0^T \left( e^{-\rho t} F(x, u) + y f(x, u) - y x' \right) dt,$$

a Hamiltonijan

$$H(x, u) = e^{-\rho t} F(x, u) + y f(x, u).$$

Sada ćemo uvesti novu funkciju

$$H_c(x, u) = F(x, u) + \delta f(x, u),$$

pri čemu je $H_c = He^{\rho t}$ i $\delta = ye^{\rho t}$. Razmatrajmo sada uslove optimalnosti. Pošto je $H = H_c e^{-\rho t}$ sledi

$$y' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial H_c}{\partial x} e^{-\rho t}, \tag{2.20}$$

a iz $y = \delta e^{-\rho t}$ sledi

$$y' = \delta' e^{-\rho t} - \rho \delta e^{-\rho t}. \tag{2.21}$$

Iz (2.20) i (2.21) sledi

$$-\frac{\partial H_c}{\partial x}e^{-\rho t} = \delta' e^{-\rho t} - \rho\delta e^{-\rho t},$$

odnosno

$$\delta' = -\frac{\partial H_c}{\partial x} + \rho\delta.$$

Dakle, uslovi optimalnosti za naš početni problem su

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_c}{\partial u} &= 0 \\
\delta' &= -\frac{\partial H_c}{\partial x} + \rho\delta \\
x' &= f(x,u) \\
x(0) &= x_0 \\
x(T) &= x_T
\end{aligned}$$

pri čemu je $t \in [0,T]$. Primenom ovih uslova dolazi do eliminisanja promenljive upravljanja $u$, te se na kraju posmatra sistem dve diferencijalne jednačine: jedna jednačina po promenljivoj stanja $x$, a druga po promenljivoj $\delta$.

U nastavku navodimo primer iz literature [4].

PRIMER 4. *Posmatrajmo sledeći problem*

$$\begin{aligned}
\max_{\{u\}} J &= -\int_0^{10} u^2 e^{-0.1t} dt \\
x' &= u \\
x(0) &= 0 \\
x(10) &= 1000.
\end{aligned}$$

*Odredićemo optimalnu trajektoriju $x^*(t)$. Prvi korak je određivanje trenutnog Hamiltonijana*

$$\begin{aligned}
H_c(x,u) &= F(x,u) + \delta f(x,u) \\
&= -u^2 + \delta u,
\end{aligned}$$

*a potom i određivanje uslova optimalnosti*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_c}{\partial u} &= -2u + \delta = 0 \\
\delta' &= 0.1\delta \\
x' &= u.
\end{aligned}$$

*Kombinovanjem prvog i trećeg uslova dobijamo jednačinu* $x' = 0.5\delta$. *Sada posmatramo sistem dve diferencijalne jednačine*

$$x' = 0.5\delta$$
$$\delta' = 0.1\delta$$

*čije je rešenje*

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{0.1t}$$
$$\delta(t) = 0.2 c_2 e^{0.1t}.$$

*Iskoristimo početne uslove* $x(0) = 0$ *i* $x(10) = 1000$ *i dobijamo sistem jednačina*

$$0 = c_1 + c_2$$
$$1000 = c_1 + c_2 e^{0.1t}$$

*koji rešavamo po* $c_1$ *i* $c_2$ *i dobijamo* $c_1 = -581.9767$ *i* $c_2 = 581.9767$. *Dakle, optimalna trajektorija* $x^*(t)$ *ima sledeći oblik*

$$x^*(t) = -581.9767 + 581.9767 e^{0.1t} = 581.9767(e^{0.1t} - 1).$$

□

# 3

# Ekonomski modeli rasta

U svakoj ekonomiji mora se napraviti izbor između zaliha za sadašnjost (zaliha koje su namenjene za potrošnju) i zaliha za budućnost (namenjenih za akumulaciju kapitala). Iako je veća potrošnja poželjnija od manje, ona vodi do manje akumulacije kapitala, a što je manja akumulacija kapitala manja je i buduća proizvodnja, samim tim manja je i buduća potencijalna potrošnja. S jedne strane nalazi se politika potrošnje: "Živimo za danas, jer sutra ćemo umreti", prema kojoj treba potrošiti koliko god je moguće danas iako je potencijal za buduću potrošnju ugrožen. S druge strane nalazi se politika najmanje moguće potrošnje danas kako bi se uvećao kapital i potencijal za buduću potrošnju.

Dakle, neophodno je napraviti odgovarajući izbor između potrošnje i akumulacije kapitala kako bi došlo do ekonomskog rasta. Postoje mnogi modeli rasta, a jedan od prvih modela su razvili Ser Roj Harod, 1939. godine, i Evsi Domar, 1946. godine, nezavisno jedan od drugog. Ovaj model se naziva Domar-Harodov model. Međutim, model je imao mnogo mana. Među mnogima koji su nastojali da ga unaprede bili su Robert Solou i Trevor Svon. Tako je 1956. godine nastao Solouov model ili Solou-Svon model, ili kako se još naziva, neoklasičan model rasta.

U širem smislu neoklasičan model rasta je klasa ekonomskih modela u okviru dugoročnog ekonomskog rasta u neoklasičnoj ekonomiji. Neoklasični modeli rasta pokušavaju da objasne dugoročan ekonomski rast posmatrajući produktivnost, akumulaciju kapitala, rast populacije i tehnološki napredak.

Solou je 1956. godine ustanovio agregatni model rasta koji se bazira na tri diferencijalne jednačine koje opisuju funkciju proizvodnje, akumulaciju kapitala i rad. Solou je prvo analizirao stabilnost ravnoteže koristeći fazni dijagram, koji će kasnije po njemu dobiti naziv "Solouov dijagram". Model je pokazao na koji način ekonomija konvergira ka putanji stalnog rasta. Uneo je tehničke promene u Domar-Harodov model sa ciljem da ga poboljša. Solou je osvojio Nobelovu nagradu za ekonomiju 1987. godine.

Tokom 60-ih godina XX veka, neoklasičan model rasta se razvijao u nekoliko pravaca. Hirofumi Uzava je razvio dvo-faktorski model, Kenet Erou model "učenja radeći"[1], Džejms Tobin model u kome funkcija proizvodnje pored kapitala zavisi i od novca i model Pitera Dajmonda (fiskalna politika i smena generacija)[2]. Tokom ovog perioda, Edmund Felps i drugi autori su koristili neoklasičan model rasta kako bi odredili tzv. zlatno pravilo rasta.

Frenk Remzi je 1928. godine izložio model rasta u kojem je pokušao da odgovori na pitanje koliko jedno domaćinstvo treba da štedi godišnje i stoga uvodi maksimizaciju funkcije korisnosti. Međutim, u tom periodu on ne nailazi na razumevanje i podršku. Tek 1965. godine su Tjaling Kupmans i Dejvid Kes modifikovali Remzijev model rasta i u literaturi se može naći i pod imenom Remzi-Kes-Kupmans model.

## 3.1 Domar-Harodov model

Neka je štednja $S$ jednaka proizvodu stope štednje $s$ i autputa $Y$

$$S = sY$$

i neka su investicije $I$ jednake promeni kapitalnog stoka[3], a proporcionalne promeni autputa tokom vremena

$$I = K' = \nu Y'.$$

Da bi nacionalna privreda bila u ravnoteži investicije moraju biti jednake štednji

$$I = S,$$

odakle sledi

$$\nu Y' = sY$$
$$Y' - \frac{s}{\nu} Y = 0,$$

[1]engleski: learning by doing

[2]engleski: fiscal policy and overlapping generations

[3]U ekonomiji postoje dve vrste kvantitativnih promenljivih, a to su stokovi i tokovi. Stok je količina merena u datom trenutku, a tok je količina merena u jedinici vremena. Tako se stok, na primer, odnosi na lično bogatstvo, broj nezaposlenih radnika, količinu kapitala. Dok se tok, na primer, odnosi na prihode, troškove, investicije i drugo.

uz početni uslov $I_0 = S_0 = sY_0$. Rešenje je putanja koja zadovoljava početne uslove i dato je sa

$$Y = Y_0 e^{(s/\nu)t},$$

gde se $\frac{s}{\nu}$ naziva "zagarantovana stopa rasta".

Model ukazuje na to da rast zavisi od uloženog rada i kapitala, kao i da usled povećanja investicija dolazi do akumulacije kapitala, što dovodi do ekonomskog rasta. Može se primenjivati u slabo razvijenim zemljama u kojima postoji velika količina radne snage na tržištu, a mala količina raspoloživog kapitala. Pošto ove zemlje imaju mali prinos po glavi stanovnika, ne mogu da povećaju ni svoju stopu štednje. Kao rezultat toga, u slabo razvijenim zemljama je akumulacija kapitala manja, kao i investicije.

Kao što je već pomenuto, ovaj model ima puno nedostataka. Jedna od mana je što se u njemu pretpostavlja da ekonomski rast održava punu zaposlenost, a što je zasnovano na tome da je odnos uloženog rada i kapitala fiksiran. Takođe on ne posmatra ni uticaj mnogih faktora na nivo ekonomskog rasta kao što su rast stanovništva, tehnološki napredak i slično. Tako je nastao Solouov model, ili kako se još naziva, neoklasičan model rasta sa ciljem da se poboljša Domar-Harodov model.

## 3.2 Neoklasični model rasta

Neoklasični model rasta opisuje ekonomski rast u agregativnoj zatvorenoj ekonomiji. Pod agregativnom ekonomijom se podrazumeva proizvodnja jednog homogenog dobra, za šta su potrebna ulaganja u vidu radne snage $L(t)$ i kapitala $K(t)$, dok se za $t$ podrazumeva da neprekidno varira. U zatvorenoj ekonomiji nema uvoza ni izvoza, tj. kompletna proizvodnja se ili potroši ili uloži u ekonomiju. Jednačina prihoda ima sledeći oblik

$$Y(t) = C(t) + I(t)$$

gde je $C(t)$ potrošnja za vreme $t$, a $I(t)$ ulaganje za vreme $t$.

Investicija se koristi i za uvećanje stoka kapitala i za nadoknadu amortizovanog kapitala. Akumulacija kapitala se može predstaviti na sledeći način

$$K'(t) = \frac{dK(t)}{dt}.$$

Amortizovani kapital koji se nadoknađuje za vreme $t$ je $\mu K(t)$, pa je jednačina *bruto investicije*

$$I(t) = K'(t) + \mu K(t),$$

gde je $\mu$ stopa amortizacije. Stoga, akumulirani kapital je deo investicije koji se ne koristi za nadoknadu amortizovanog kapitala.

Uvodimo funkciju proizvodnje koja zavisi od kapitala i radne snage:

$$Y = F(K, L).$$

Ekonomisti često pretpostavljaju da je funkcija proizvodnje nekog preduzeća monotono rastuća i konkavna. Konkavnost funkcije znači da je povećanje proizvodnje (autputa), generisano povećanjem inputa, manje kada je proizvodnja veća nego kada je proizvodnja manja. Drugim rečima, postoje "opadajući" prinosi. Stoga u nastavku uvodimo standardne pretpostavke za funkciju proizvodnje.

Pretpostavimo da je funkcija $Y$ dva puta diferencijabilna, i da za sve pozitivne ulazne vrednosti važi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \\ \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Pretpostavimo da su granične vrednosti

$$\begin{aligned} \lim_{K \to 0} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = \infty, \quad \lim_{K \to \infty} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = 0, \\ \lim_{L \to 0} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = \infty, \quad \lim_{L \to \infty} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

tako da obe granice proizvodnje krenu od beskonačnosti i opadnu do nule. Takodje se pretpostavlja da funkcija proizvodnje ima konstantne prinose pri rastu, tako da za svako pozitivno $\alpha$ važi

$$F(\alpha K, \alpha L) = \alpha F(K, L) = \alpha Y.$$

Za $\alpha = \frac{1}{L}$ dobijamo

$$\frac{Y}{L} = F(\frac{K}{L}, 1) = f(\frac{K}{L}),$$

gde funkcija $f(\frac{K}{L})$ predstavlja proizvodnju po radniku kao funkciju kapitala po radniku.

Ako proizvodnju po radniku označimo sa $y(t)$ i kapital po radniku sa $k(t)$, tada je

$$y = f(k) \tag{3.3}$$

i važi

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}, \quad k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}.$$

Ako pretpostavimo da važi (3.1) i (3.2), dobijamo

$$f'(k) = \frac{df(k)}{dk} > 0, \quad f''(k) = \frac{d^2 f(k)}{dk^2} < 0 \quad \forall k > 0$$

pa je funkcija proizvodnje strogo konkavna monotono rastuća funkcija, čiji se nagib smanjuje od beskonačnosti za $k = 0$ do nule kad $k = +\infty$.

Neka je sada $c(t)$ potrošnja po radniku, a $i(t)$ ulaganje po radniku u vremenu $t$, pa važi

$$c(t) = \frac{C(t)}{L(t)}, \quad i(t) = \frac{I(t)}{L(t)}.$$

Jednačina prihoda ima sledeći oblik

$$y(t) = c(t) + i(t), \tag{3.4}$$

a jednačina bruto investicije

$$i(t) = \frac{K'(t)}{L(t)} + \mu k(t).$$

Promena kapitala po radniku je data sa

$$k' = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{K'}{L} - \frac{K}{L}\frac{L'}{L} = \frac{K'}{L} - k\frac{L'}{L},$$

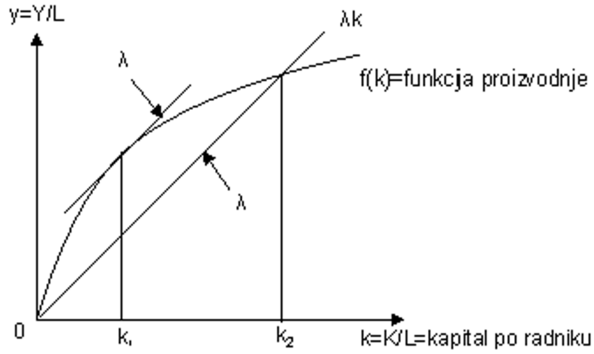
pa sledi da je jednačina bruto investicije

$$\begin{aligned} i(t) &= k' + (\mu + \frac{L'}{L})k \\ &= k' + (\mu + n)k, \end{aligned} \tag{3.5}$$

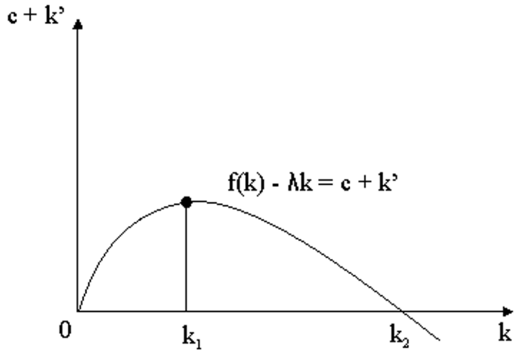
gde je $n = \frac{L'}{L}$ stopa rasta radne snage. Uvođenjem oznake $\lambda = \mu + n$ (pretpostavlja se da je $\lambda$ pozitivna konstanta), iz jednačina (3.3), (3.4) i (3.5) dobijamo

$$f(k(t)) = c(t) + \lambda k(t) + k'(t).$$

Gornji izraz predstavlja *osnovnu diferencijalnu jednačinu neoklasičnog ekonomskog rasta*, prema kojoj je autput po radniku $f(k)$ sačinjen iz potrošnje po radniku $c$, održavanja nivoa kapitala po radniku $\lambda k$ i neto porasta nivoa kapitala po radniku $k'$.




**Slika 5.** *Osnovna diferencijalna jednačina neoklasičnog ekonomskog rasta*




**Slika 6**.

Pretpostavimo da tačke $k_1$ i $k_2$, koje predstavljaju nivoe kapitala po radniku, postoje i da su jedinstvene. Tada funkcija $c + k'$ ima maksimum u $k_1$ i nulu u $k_2$, odnosno važi

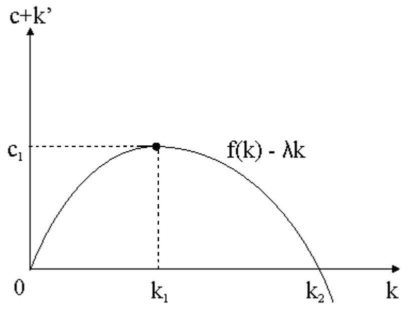
$$f(k_1) - \lambda k_1 \geq f(k) - \lambda k, \quad \forall k > 0$$
$$f(k_2) - \lambda k_2 = 0$$

što je i prikazano na slici 6.

Ako je potrošnja po radniku na svom maksimalnom nivou $c_1$, tada važi

$$f'(k) = \lambda = \mu + n \text{ gde je } k = k_1. \tag{3.6}$$

Nivo kapitala po radniku $k_1$ zove se *zlatno pravilo nivoa kapitala po radniku.*

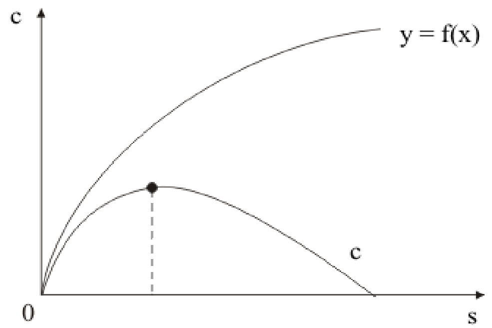



Dakle, maksimalan održiv nivo potrošnje po radniku u $k_1$ je

$$c_1 = f(k_1) - \lambda k_1,$$

pri čemu se $c_1$ zove *zlatno pravilo nivoa potrošnje po radniku*, a uslov (3.6) je *zlatno pravilo akumulacije*. Tačka $k_1$ je tačka ravnoteže.

Što je stopa štednje $s$ veća, veći je nivo investicija kao i nivo kapitala, a ujedno je i autput $y$ veći. Međutim, za visok nivo štednje imamo nizak nivo potrošnje, dok će za minimalnu štednju nivo kapitala kao i nivo potrošnje biti minimalni jer je i autput u tom slučaju minimalan što se i vidi sa slike 7.




**Slika 7**.

Na taj način ekonomija teži ka sve višim nivoima kapitala po radniku, a time i većoj proizvodnji po radniku. Međutim, sa tačke gledišta potrošača u prvom planu nije autput $y$, već potrošnja koja je najbolji pokazatelj blagostanja. Stoga u nastavku uvodimo korisnost $U$, kao funkciju potrošnje po radniku, i blagostanje u oznaci $W$.

### 3.2.1 Neoklasični optimalni ekonomski rast

Problem optimalnog ekonomskog rasta je problem upravljanja, koji se može analizirati kroz promenljive stanja, promenljive upravljanja, jednačine kretanja, početno stanje i funkcionele cilja. Kod neoklasičnog problema optimalnog ekonomskog rasta postoji jedna promenljiva stanja, kapital po radniku $k(t)$, a jednačina kretanja je osnovna diferencijalna jednačina neoklasičnog ekonomskog rasta

$$k'(t) = f(k(t)) - \lambda k(t) - c(t),$$

a umesto početnog stanja dat je početni nivo kapitala po radniku

$$k(t_0) = k_0.$$

Promenljiva upravljanja će biti potrošnja po radniku

$$c(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Dakle, treba izabrati dopustivu trajektoriju $c(t)$ koja zadovoljava jednačinu kretanja i granični uslov tako da važi

$$0 \leq c(t) \leq f(k(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

odnosno treba pronaći optimalnu potrošnju po radniku radi postizanja određenog ekonomskog cilja.

Pretpostavlja se da je ekonomski cilj zasnovan na životnim standardima koji su izmereni potrošnjom po radniku. Takođe, pretpostavlja se i da postoji funkcija korisnosti $U$ kao funkcija potrošnje po radniku

$$U = U(c(t)).$$

Ova funkcija je dva puta diferencijabilna, pa važi

$$\frac{dU(c)}{dc} = U'(c) > 0, \quad \frac{d^2U(c)}{dc^2} = U''(c) < 0, \quad \forall c, 0 < c < \infty$$

tako da je funkcija korisnosti $U$ strogo konkavna monotono rastuća funkcija. Takođe se pretpostavlja da funkcija korisnosti zadovoljava granične uslove

$$\lim_{c \to 0} U'(c) = \infty,$$

$$\lim_{c \to \infty} U'(c) = 0.$$

Elastičnost marginalne korisnosti je data sa

$$\sigma(c) = -c\frac{U''(c)}{U'(c)} \tag{3.7}$$

i pozitivna je za svako $c \in (0, \infty)$.

Neka su korisnosti u različitim trenucima nezavisne, tako da korisnost u određenom trenutku ne zavisi direktno od potrošnje ili korisnosti u nekom drugom trenutku. Korisnosti iz drugih vremena se mogu dodati, ako su prethodno diskontovane pomoću eksponencijalnog faktora diskontovanja, tako da je vrednost u vremenu $t_0$ korisnosti u vremenu $t$ data sa $e^{-\rho(t-t_0)}U(c(t))$. Koeficijent $\rho$ je diskontna stopa za koju se pretpostavlja da je konstantna i nenegativna. Veća diskontna stopa označava veće favorizovanje bližih umesto daljih korisnosti.

Uvodimo oznaku $W$ za blagostanje[4] tokom intervala $[t_0, t_1]$:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho(t-t_0)}U(c(t))dt. \tag{3.8}$$

U slučaju kada je terminalno vreme $t_1$ konačno, treba odrediti minimalni terminalni (krajnji) stok kapitala po radniku $k_{min}$

$$k(t_1) \geq k_{min}.$$

Problem određivanja minimalnog nivoa bi se izbegao ako je $t_1$ beskonačno. Međutim, u tom slučaju, integral (3.8) ne mora da konvergira.

Konvergencija je zagarantovana ako je početni stok kapitala po radniku manji od maksimalnog održivog nivoa $k_2$, pa je $c(t) \leq f(k_2)$ i važi

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)}U(c(t))dt \leq \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)}U(f(k_2))dt = \frac{U(f(k_2))}{\rho},$$

odakle se vidi da je integral (3.8) ograničen.

Problem neoklasičnog optimalnog ekonomskog rasta u agregativnoj zatvorenoj ekonomiji za $t \in [0, \infty]$ i pozitivnom diskontnom stopom je takav da se mora izabrati model potrošnje po radniku tako da važi

$$\begin{aligned}
\max_{\{c(t)\}} W &= \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)}U(c(t))dt,\\
k' &= f(k) - \lambda k - c,\\
k(t_0) &= k_0,\\
0 &\leq c \leq f(k),\\
c(t) &\text{ po delovima neprekidna.}
\end{aligned}$$

To je problem upravljanja u kome je promenljiva stanja kapital po radniku $k$, promenljiva upravljanja je potrošnja po radniku $c$, $W$ je funkcionela cilja data sa (3.8), osnovna diferencijalna jednačina neoklasičnog ekonomskog rasta je jednačina kretanja i početni stok kapitala po radniku je granični uslov.

[4]engleski: welfare - dobrobit, blagostanje

Ovaj problem može se rešiti korišćenjem principa maksimuma pri čemu je Hamiltonijan dat sa

$$H = e^{-\rho(t-t_0)}[U(c) + y(f(k) - \lambda k - c)],$$

gde je $y$ dualna promenljiva.

Napomenimo da se može uočiti analogija sa poglavljem 2.3, s tim da je ovde promenljiva stanja kapital po radniku $k$, a promenljiva upravljanja je potrošnja po radniku $c$ i $y = e^{\rho(t-t_0)}\mathbf{y}$ (pa dualna promenljiva $y$ odgovara oznaci $\delta$ iz 2.4).

Prema principu maksimuma optimalno upravljanje (optimalna potrošnja po radniku) maksimizira Hamiltonovu funkciju u svakom trenutku. Iz uslova $\frac{\partial H}{\partial c} = 0$ sledi

$$y = U'(c). \tag{3.9}$$

Iz kanonske jednačine za dualnu promenljivu

$$\frac{d}{dt}(e^{-\rho(t-t_0)}y(t)) = -\frac{\partial H}{\partial k}$$

dobijamo

$$e^{-\rho(t-t_0)}(y' - \rho y) = -e^{-\rho(t-t_0)}(yf'(k) - \lambda y),$$

odnosno

$$y' = -(f'(k) - (\lambda + \rho))y.$$

Da bismo dobili diferencijalnu jednačinu za promenljivu upravljanja (tj. potrošnju po radniku), iskoristićemo jednačine (3.9) i (3.7) i dobijamo

$$\frac{y'}{y} = \frac{U''(c)}{U'(c)}c' = -\sigma(c)\frac{c'}{c},$$

odakle je

$$c' = \frac{1}{\sigma(c)}(f'(k) - (\lambda + \rho))c.$$

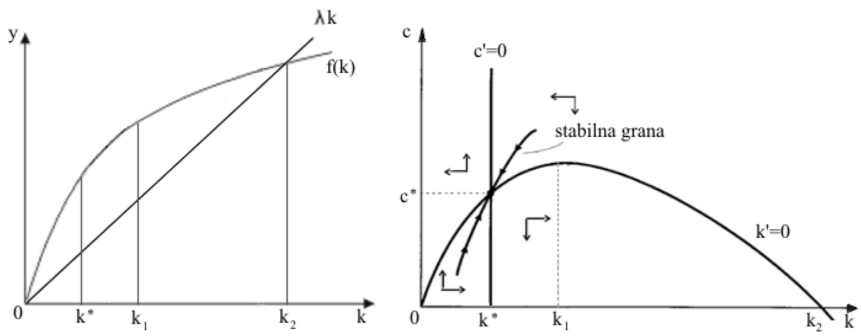
Prema principu maksimuma, ako su putanje $c^*(t)$ i $k^*(t)$ optimalne, one moraju zadovoljavati diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} c' &= \frac{1}{\sigma(c)}(f'(k) - (\lambda + \rho))c, \\ k' &= f(k) - \lambda k - c. \end{aligned}$$

U slučaju da nije dat početni stok kapitala po radniku, jedino moguće rešenje bi tada bilo ono u kome se ni potrošnja po radniku ni kapital po radniku ne menja tokom vremena, tj.

$$c' = 0, \quad k' = 0.$$

Tada važi
$$f'(k^*) = \lambda + \rho \tag{3.10}$$
za $k = k^*$ i pri tom je
$$c^* = f(k^*) - \lambda k^*.$$
Na osnovu pretpostavki za funkciju proizvodnje sledi da $k^*$ i $c^*$ postoje, da su jedinstvene i važi
$$0 < c^* < f(k^*)$$
tako da je ograničenje za skup upravljanja zadovoljeno.
Dakle, za $\{k^*\}$ i $\{c^*\}$ postoji *izbalansirana putanja rasta.* Ukupna potrošnja $(C = cL)$, ukupni kapital $(K = kL)$ i ukupan autput $(Y = yL)$ rastu po istoj stopi, tj. stopi rasta radne snage. Ako je dato $\lambda$, iz jednačine (3.10) sledi
$$\lim_{\rho \to 0} k^* = k_1,$$
gde je $k_1$ nivo kapitala zlatnog pravila, definisan u (3.6).




***Slika 8***. *Fazni plan koji ilustruje putanju optimalnog ekonomskog rasta*

Sada posmatramo optimalnu putanju rasta kada je dat početni stok kapitala po radniku. Iz diferencijalne jednačine za potrošnju po radniku dobijamo
$$c' \left\{ \begin{array}{c} = \\ > \\ < \end{array} \right\} 0 \text{ ako je } f'(k) \left\{ \begin{array}{c} = \\ > \\ < \end{array} \right\} \lambda + \rho,$$
tako da važi
$$c' \left\{ \begin{array}{c} = \\ > \\ < \end{array} \right\} 0 \text{ ako je } k \left\{ \begin{array}{c} = \\ < \\ > \end{array} \right\} k^*,$$
što je ilustrovano na slici 8. Sa leve strane vertikalne linije obeležene sa $c' = 0$, strelice pokazuju na gore $(k < k^*, c' > 0)$, dok sa desne strane strelice pokazuju na dole $(k > k^*, c' < 0)$.

Iz diferencijalne jednačine za kapital po radniku dobijamo

$$k' \left\{ \begin{array}{c} = \\ > \\ < \end{array} \right\} 0 \text{ ako je } c \left\{ \begin{array}{c} = \\ < \\ > \end{array} \right\} f(k) - \lambda k.$$

Kriva $f(k) - \lambda k$ predstavlja one tačke za koje je $k' = 0$. Ispod krive je $k' > 0$ pa strelice pokazuju na desno, a iznad krive je $k' < 0$ pa strelice pokazuju na levo. Dakle, strelicama je prikazano ponašanje potrošnje po radniku $c$ i kapitala po radniku $k$. Krive $c' = 0$ i $k' = 0$ seku se u $(k^*, c^*)$ i tu postoji izbalansirana putanja rasta. U toj tački nagib krive $f(k) - \lambda k$ je diskontna stopa $\rho$.

Razvojem u Tejlorov red u okolini ravnotežne tačke $(k^*, c^*)$ dobija se:

$$\begin{aligned} c' &\cong \frac{c^* f''(k^*)}{\sigma(c^*)}(k - k^*), \\ k' &\cong -(c - c^*) + \rho(k - k^*), \end{aligned}$$

tako da su relevantni karakteristični koreni dobijeni pomoću matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{c^* f''(k^*)}{\sigma(c^*)} \\ -1 & \rho \end{pmatrix}$$

odnosno

$$\frac{1}{2}\left(\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \frac{4c^* f''(k^*)}{\sigma(c^*)}}\right).$$

Tačka ravnoteže balansiranog rasta $(k^*, c^*)$ je *sedlasta tačka*. Stabilna grana sastoji se od svih tačaka koje na kraju dosežu ravnotežnu tačku balansiranog rasta.

Putanja optimalnog ekonomskog rasta mora ići uz stabilnu granu. Optimalna putanja rasta je prema tome jedinstvena duž stabilne grane, te nijedna druga grana ne bi uspela da zadovolji potrebne uslove za optimalno rešenje. Stabilna grana je monotono rastuća, pa ako je $k_0 < k^*$, onda i $c^*(t)$ i $k^*(t)$ optimalno rastu vremenom pomerajući se prema gore uz stabilnu granu do ravnotežne tačke. Ako je $k_0 > k^*$, onda i $c^*(t)$ i $k^*(t)$ optimalno opadaju vremenom, pomerajući se na dole niz stabilnu granu do ravnotežne tačke. U bilo kom slučaju važi

$$\lim_{t\to\infty} c^*(t) = c^*, \quad \lim_{t\to\infty} k^*(t) = k^*,$$

tako da je optimalna putanja ekonomskog rasta ona koja se asimptotski približava ravnotežnoj tački.

## 3.3 Remzijev model rasta

Posmatraćemo model u neprekidnom vremenu i polazimo od već uvedenih pojmova za prihod $Y(t) = C(t) + I(t)$ i investiciju $I(t) = K'(t) + \mu K(t)$.

Već smo videli da ako je L(t) radna snaga i ako važi

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{C(t)}{L(t)} + \frac{K'(t)}{L(t)} + \frac{\mu K(t)}{L(t)},$$

to jest

$$y(t) = c(t) + \frac{K'(t)}{L(t)} + \mu k(t), \tag{3.11}$$

tada je $k(t)$ kapital po radniku, $c(t)$ potrošnja po radniku, a $y(t)$ je sada prihod po radniku. Za $k'(t)$ dobijamo

$$k'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{LK' - KL}{L^2} = \frac{K'}{L} - \frac{K}{L}\frac{L'}{L} = \frac{K'}{L} - k\frac{L'}{L}.$$

Ako je $L'/L = n$ stopa rasta radne snage, tada sledi

$$\frac{K'}{L} = k' + kn.$$

Uvrštavanjem u (3.11) dobijamo

$$y(t) = c(t) + k'(t) + (n + \mu)k(t).$$

Ako sada $y$ izrazimo kao funkciju po $k$, $y = f(k)$, dobijamo

$$k' = f(k) - (n + \mu)k - c.$$

Neka postoji funkcija korisnosti $U$ kao funkcija potrošnje po radniku. Dakle, sada posmatramo problem maksimizacije diskontovane vrednosti funkcije korisnosti

$$\begin{aligned} \max_{\{c\}} J &= \int_0^\infty e^{-\rho t} U(c) dt \\ k' &= f(k) - (n + \mu)k - c \\ k(0) &= k_0 \\ 0 &\leq c \leq f(k). \end{aligned}$$

Analogno rešavanju problema maksimizacije sa diskontovanjem iz poglavlja 2.4, i ovde uvodimo trenutni Hamiltonijan $H_c$ koji u ovom slučaju ima sledeći oblik

$$H_c = U(c) + \delta(f(k) - (n + \mu)k - c)$$

uz uslove prvog reda:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_c}{\partial c} &= U'(c) - \delta = 0\\ \delta' &= -\delta f'(k) + \delta(n+\mu) + \rho\delta\\ k' &= f(k) - (n+\mu)k - c\end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned}U'(c) &= \delta\\ \delta' &= -\delta f'(k) + (n+\mu+\rho)\delta\\ k' &= f(k) - (n+\mu)k - c.\end{aligned}$$

Koristeći ove uslove treba dobiti dve diferencijalne jednačine koje izražavaju $k'$ i $c'$, pri čemu će $k$ biti promenljiva stanja, a $c$ promenljiva upravljanja. Diferenciranjem jednačine $U'(c) = \delta$ dobijamo

$$\begin{aligned}U''(c)c' = \delta' &= -\delta f'(k) + (n+\mu+\rho)\delta\\ &= -\delta(f'(k) - (n+\mu+\rho)),\end{aligned}$$

odnosno, pošto je $\delta = U'(c)$ sledi

$$-\frac{U''(c)}{U'(c)}c' = f'(k) - (n+\mu+\rho).$$

Kada uvedemo elastičnost marginalne korisnosti $\sigma(c)$

$$\sigma(c) = -\frac{cU''(c)}{U'(c)},$$

dobijamo

$$\frac{\sigma(c)}{c}c' = f'(k) - (n+\mu+\rho),$$

odnosno

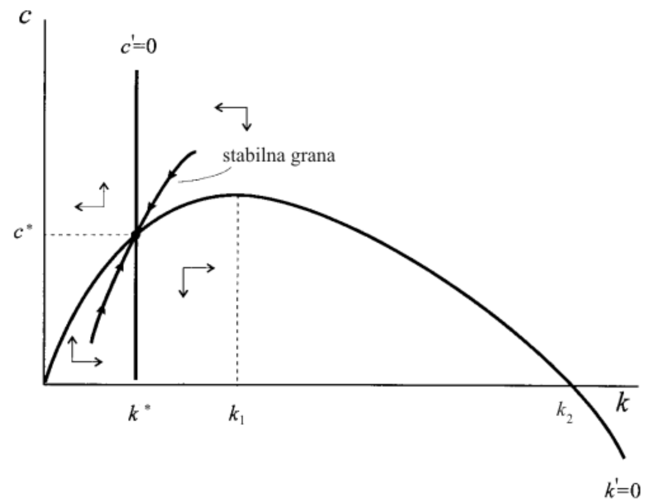
$$c' = \frac{1}{\sigma(c)}(f'(k) - (n+\mu+\rho))c.$$

Dakle, imamo dve diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned}c' &= \frac{1}{\sigma(c)}(f'(k) - (n+\mu+\rho))c\\ k' &= f(k) - (n+\mu)k - c.\end{aligned}$$

Ako je $c' = 0$ onda je $f'(k^*) = n + \mu + \rho$, a ako je $k' = 0$ onda je $c^* = f(k^*) - (n+\mu)k^*$. Sledi da za $c' > 0$ važi $f'(k^*) > (n+\mu+\rho)$, odnosno

$k < k^*$, a za $k' > 0$ imamo da važi $f(k^*) - (n+\mu)k^* > c$. Sa leve strane izokline $c' = 0$ $c$ raste, a sa njene desne strane $c$ opada. Ispod izokline $k' = 0$, $k$ raste, a ispod ove izokline $k$ opada. Strelice upucuju na to da je tačka $(k^*, c^*)$ sedlasta tačka, što je i prikazano na slici ispod. Jedina optimalna trajektorija je ona duž stabilne grane. Primetimo da u ravnoteži kapital $k$ raste uporedo sa rastom radne snage. Kako je $y$ funkcija po $k$ sledi da i $Y$ takođe raste uporedo sa rastom radne snage što potvrđuje postojanje izbalansiranog rasta u ravnoteži.




***Slika 9***. *Fazni plan koji ilustruje putanju optimalnog ekonomskog rasta*

U nastavku dajemo primer iz literature [4].

Primer 5. *Posmatrajmo sledeći problem optimalnog rasta*

$$\max_{\{c\}} J = \int_0^\infty e^{-\rho t} U(c) dt$$
$$k' = f(k) - (\mu + n)k - c$$
$$k(0) = k_0$$
$$0 \leq c \leq f(k),$$

*gde je* $\rho = 0.02, f(k) = k^{0.25}, n = 0.01, \mu = 0.05, k(0) = 2$ *i* $U(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}$. *Ako je* $\theta = \frac{1}{2}$ *tada je* $U(c) = 2\sqrt{c}$. *Dakle, dobijamo problem*

$$\max_{\{c\}} J = \int_0^\infty e^{-0.02t} 2\sqrt{c} dt$$
$$k' = k^{0.25} - 0.06k - c$$
$$k(0) = 2.$$

*Trenutni Hamiltonijan je*

$$H_c = 2\sqrt{c} + \delta(k^{0.25} - 0.06k - c),$$

*a uslovi prvog reda*

$$\frac{\partial H_c}{\partial c} = 2\left(\frac{1}{2}\right) c^{-\frac{1}{2}} - \delta = 0$$
$$\delta' = -\delta 0.25k^{-0.75} + 0.08\delta$$
$$k' = k^{0.25} - 0.06k - c.$$

*Iz prvog uslova sledi*

$$c^{-\frac{1}{2}} = \delta$$

*i diferenciranjem po t dobijamo*

$$-\frac{1}{2}c^{-\frac{3}{2}}c' = -\delta 0.25k^{-0.75} + 0.08\delta.$$

*Kada* $\delta = c^{-\frac{1}{2}}$ *uvrstimo u gornju jednačinu dobijamo*

$$-\frac{1}{2}c^{-\frac{3}{2}}c' = -c^{-\frac{1}{2}}0.25k^{-0.75} + 0.08c^{-\frac{1}{2}},$$

*a deljenjem sa* $c^{-\frac{1}{2}}$

$$-\frac{1}{2}c^{-1}c' = -0.25k^{-0.75} + 0.08,$$

*tj.*

$$c' = 2c \cdot 0.25k^{-0.75} - 2 \cdot 0.08c = (0.5k^{-0.75} - 0.16)c.$$

*Rešavanjem sistema dve diferencijalne jednačine*

$$c' = (0.5k^{-0.75} - 0.16)c$$
$$k' = k^{0.25} - 0.06k - c$$

*dobijamo vrednosti* $k^* = 4.5688$ *i* $c^* = 1.1879$.

*Za* $k' = 0$ *dobijamo jednačinu* $c = k^{0.25} - 0.06k$ *koju diferenciramo po* $k$ *i izjednačimo sa nulom kako bismo dobili* $k_{max}$

$$c = k^{0.25} - 0.06k$$

$$\frac{dc}{dk} = 0.25k^{-0.75} - 0.06 = 0$$

$$k_{max} = 6.7048.$$

*Ovoj vrednosti kapitala odgovara potrošnja* $c_{max} = 1.2069$. *Sada ćemo linearizovati sistem oko tačke* $(k^*, c^*) = (4.5688, 1.1879)$. *Sistem*

$$\begin{aligned} c' &= f(c,k) = (0.5k^{-0.75} - 0.16)c \\ k' &= g(c,k) = k^{0.25} - 0.06k - c \end{aligned}$$

*može da se zapiše u linearizovanoj formi*

$$\begin{aligned} c' &= f_c(c^*, k^*)(c - c^*) + f_k(c^*, k^*)(k - k^*) \\ k' &= g_c(c^*, k^*)(c - c^*) + g_k(c^*, k^*)(k - k^*), \end{aligned}$$

*gde je*

$$\begin{aligned} f_c(c^*, k^*) &= 0 \quad f_k(c^*, k^*) = -0.0312 \\ g_c(c^*, k^*) &= -1 \quad g_k(c^*, k^*) = 0.02, \end{aligned}$$

*pa je matrica sistema*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.0312 \\ -1 & 0.02 \end{bmatrix},$$

*čiji su karakteristični koreni* $r = 0.1869$ *i* $s = -0.1669$. *Pošto su suprotnog znaka rešenje u ravnoteži je sedlasta tačka.*

*Sada ćemo koristeći linearnu aproksimaciju sistema prvo posmatrati slučaj kada je* $r = 0.1869$

$$(A - rI)v_r = 0$$

*odnosno*

$$\begin{bmatrix} -0.1869 & -0.0312 \\ -1 & -0.1669 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{r1} \\ v_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

*Tada važi*

$$-v_{r1} - 0.1669v_{r2} = 0$$

$$v_{r1} = -0.1669v_{r2}.$$

*Neka je* $v_{r2} = 1$, *tada je* $v_{r1} = -0.1669$. *Sledi da ova sedlasta putanja ima negativan nagib i označava nestabilnu granu. Posmatrajmo sada slučaj kada je* $s = -0.1669$ *i tada je*

$$\begin{bmatrix} 0.1669 & -0.0312 \\ -1 & 0.1869 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

*i važi*

$$-v_{s1} + 0.1869 v_{s2} = 0,$$

*to jest*

$$v_{s1} = 0.1869 v_{s2}.$$

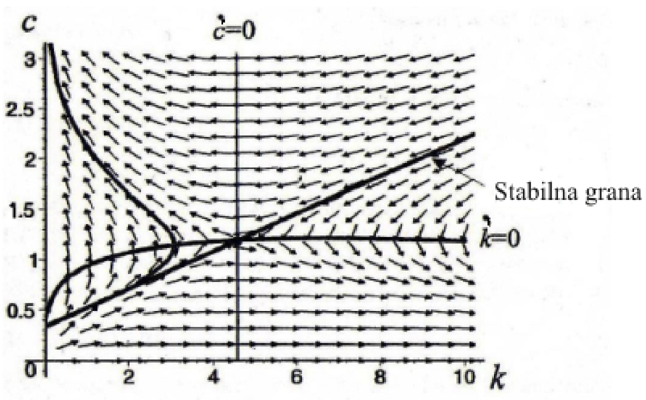
*Neka je* $v_{s2} = 1$, *tada je* $v_{s1} = 0.1869$. *Sada sedlasta putanja ima pozitivan nagib i predstavlja stabilnu granu. Jednačinu za stabilnu granu određujemo iz sledeće jednačine*

$$c - c^* = 0.1869(k - k^*)$$

$$c - 1.1879 = 0.1869(k - 4.5688)$$

$$c = -0.33399 + 0.1869k.$$

*Na slici je prikazan fazni dijagram na kome se vidi da iako trajektorija počinje na sedlastoj putanji, ona se u početnoj tački* $(k(0), c(0)) = (2, 0.70779)$ *udaljava od sedlaste putanje. Međutim, strelice koje predstavljaju pravac delovanja sila, ukazuju na postojanje stabilne grane i trajektorija koje teže ka putanji balansiranog rasta u ekvilibrijumu.*




*Slika 10. Fazni dijagram*

# 4

# Problem optimalnog upravljanja u beskonačnom vremenskom intervalu

U ovom poglavlju se razmatra problem optimalnog upravljanja u beskonačnom vremenskom intervalu kao i neoklasičan model optimalnog ekonomskog rasta sa logaritamskom funkcijom korisnosti. Takođe se daje ekonomska interpretacija principa maksimuma. Korišćena je monografija [9] u kojoj su izloženi i analizirani savremeni rezultati problema optimalnog ekonomskog rasta, a iz koje su preuzete samo osnovne ideje i izložene u nastavku ovog rada.

Posmatrajmo sledeći problem upravljanja:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x},\mathbf{u}) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} F(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))dt \to \max \\ \mathbf{x}'(t) &= f(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{u}(t) \in U \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

pri čemu je $t \geq 0$, vektor $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ je vektor stanja sistema, $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ je vektor upravljanja,$U$ je neprazan kompaktan skup u $\mathbb{R}^m$, a $\rho$ je *diskontni parametar*. Neka je $\mathbf{x}_0 \in X$ dato početno stanje sistema i $X \subset \mathbb{R}^n$. Rešenje problema (4.1) predstavljeno je parom $(\mathbf{x},\mathbf{u})$, gde je $\mathbf{u}$ dopustivo upravljanje, a $\mathbf{x}$ dopustiva trajektorija koja je ujedno i jedinstvena. Funkcija cilja $J$ dostiže svoj maksimum u tački $(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)$, pa stoga $(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)$ predstavlja optimalno rešenje problema (4.1).

Pretpostavimo da važe sledeći uslovi:

1. Postoji $C_0$ tako da važi

$$\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x},\mathbf{u})\rangle \leq C_0(1+\|\mathbf{x}\|^2) \;\text{ za svako }\; \mathbf{x}\in X, \mathbf{u}\in U.$$

2. Za svako $\mathbf{x}\in X$, skup

$$Q(\mathbf{x}) = \{(\mathbf{z}_0,\mathbf{z})\in\mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{z}_0 \leq F(\mathbf{x},\mathbf{u}), \mathbf{z} = f(\mathbf{x},\mathbf{u}), \mathbf{u}\in U\}$$

   je konveksan.

3. Postoje funkcije $\mu,\omega \geq 0$ takve da $\mu(t)\to +0$ i $\omega(t)\to +0$ kad $t\to\infty$, tako da za svaki dopustiv par $(\mathbf{x},\mathbf{u})$ važe sledeće nejednakosti:

$$e^{-\rho t}\max_{\mathbf{u}\in U}|F(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))| \leq \mu(t) \;\text{ za svako }\; t\geq 0,$$
$$\int_T^\infty e^{-\rho t}|F(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))|dt \leq \omega(T) \;\text{ za svako }\; T\geq 0.$$

U mikroekonomskim modelima, diskontni faktor $e^{-\rho t}$ se nekad povezuje sa inflacijom (to jest, stanjem u kome usled povećanja novčanog opticaja dolazi do smanjenja vrednosti novca, a što se manifestuje opštim porastom cena). Veza između diskontnog faktora i inflacije se može uvideti iz sledećeg primera.

Primer 6. *Pretpostavimo da je (4.1) problem optimalnog upravljanja jednog preduzeća. Neka je $z(t)$ "stvarna" vrednost novca u trenutku $t\geq 0$ i neka je $z(0)=1$ stvarna vrednost novca u početnom trenutku. Neka na svakom intervalu $[t,t+\triangle t]$ novac devalvira, tako da je njegova vrednost $z(t+\triangle t)$ u trenutku $t+\triangle t$ manja u odnosu na njegovu vrednost $z(t)$ u trenutku $t$. Stoga je iznos devalvacije novca tokom intervala $[t,t+\triangle t]$ dat sa*

$$z(t)-z(t+\triangle t) = \rho z(t)\triangle t + o(\triangle t),$$

*pri čemu je $\rho>0$ stopa inflacije. Tada se iz diferencijalne jednačine*

$$z'(t) = -\rho z(t)$$

*uz početni uslov*

$$z(0)=1$$

*dobija stvarna vrednost novca $z(t)$*

$$z(t) = e^{-\rho t}.$$

*Neka funkcija $F(x(t), u(t))$ predstavlja trenutni profit preduzeća u trenutku $t$. Nakon uvođenja inflacije po stopi $\rho$ trenutni profit smanjuje se do vrednosti $e^{-\rho t}F(x(t), u(t))$, pa funkcija cilja ima sledeći oblik*

$$J(x(t), u(t)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} F(x(t), u(t)) dt$$

*i predstavlja ukupan profit preduzeća tokom intervala $[0, \infty)$ uz odgovarajuću stopu inflacije.*

U nastavku ćemo posmatrati funkciju cilja

$$J(x(t), u(t)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} U(x(t), u(t)) dt,$$

gde će $U(x(t), u(t))$ biti funkcija korisnosti. U makroekonomskim modelima ekonomskog rasta funkcija korisnosti $U$ je često logaritamska funkcija:

$$U(x(t), u(t)) = \ln c(x(t), u(t)) \quad \text{za svako} \quad t \geq 0,$$

gde $c(x(t), u(t)) > 0$ predstavlja, na primer, potrošnju. Stoga ćemo sada razmotriti neoklasičan model optimalnog ekonomskog rasta sa logaritamskom funkcijom korisnosti.

Primer 7. *Kao što je već pomenuto neoklasičan model opisuje optimalan ekonomski rast u zatvorenoj agregativnoj ekonomiji, pri čemu se proizvodnja (autput) $Y(t)$ može predstaviti kao funkcija koja zavisi od kapitala $K(t)$ i radne snage $L(t)$*

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) \quad \textit{za svako} \quad t \geq 0. \tag{4.2}$$

*Funkcija $F$ se naziva funkcija proizvodnje i pretpostavlja se da je ona definisana i neprekidna na skupu*

$$X = \{(K, L) \in \mathbb{R}^2 : K > 0, L > 0\},$$

*kao i da je dva puta neprekidno diferencijabilna, i da zadovoljava uslove* (3.1) *i* (3.2) *za svako $K > 0$ i $L > 0$. Neka još važi*

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \quad \textit{za svako} \quad \lambda > 0, K > 0, L > 0. \tag{4.3}$$

*Za funkciju proizvodnje možemo uzeti, na primer, Kob-Daglasovu funkciju*[1]

$$F(K, L) = AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2},$$

*pri čemu je* $A > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ *i* $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

*Znamo da je* $Y(t) = I(t) + C(t)$. *Neka je minimalan deo autputa predviđen za potrošnju* $\varepsilon Y(t) > 0, t \geq 0, 0 < \varepsilon < 1$, *a preostali deo autputa* $(1-\varepsilon)Y(t)$ *koristiće se za investicije. Tada jedan deo autputa predstavljaju investicije*

$$I(t) = u(t)Y(t), \quad 0 \leq u(t) \leq 1-\varepsilon, \quad t \geq 0,$$

*a preostali deo je namenjen za potrošnju*

$$C(t) = (1-u(t))Y(t), \quad 0 \leq u(t) \leq 1-\varepsilon, \quad t \geq 0, \tag{4.4}$$

*pri čemu je* $u(t)$ *upravljanje u trenutku* $t$. *Ako pretpostavimo da u modelu nema amortizovanog kapitala, onda se akumulirani kapital definiše kao*

$$K'(t) = I(t) = u(t)Y(t)$$

*i važi* $K(0) = K_0 > 0$ *u početnom trenutku. Za radnu snagu se pretpostavlja da raste po eksponencijalnoj stopi* $L'/L = n, n > 0$ *i važi* $L(0) = L_0 > 0$.

*Neka je funkcija korisnosti* $U(K(t), L(t), u(t))$ *logaritamska funkcija potrošnje*

$$U(K(t), L(t), u(t)) = \ln C(t).$$

*Tada iz (4.2) i (4.4) sledi*

$$U(K(t), L(t), u(t)) = \ln(1-u(t)) + \ln F(K(t), L(t)).$$

*Dakle, neoklasičan model optimalnog ekonomskog rasta u ovom slučaju ima sledeći oblik*

---

[1] Pol Daglas je kao profesor ekonomije uočio jednu činjenicu: pri ekonomskom rastu, ukupan dohodak radnika i ukupan dohodak vlasnika kapitala povećavao se po skoro istoj stopi. Matematičar Čarls Kob je udvrdio da funkcija proizvodnje, koja daje konstantne udele faktora, ima sledeći oblik

$$Y = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

gde je $A$ pozitivan parametar koji meri produktivnost raspoložive tehnologije, a $\alpha \in (0, 1)$ meri udeo kapitala u dohotku, tj. određuje koji udeo dohotka se odnosi na kapital, a koji na rad. Funkcija $F$ se naziva Kob-Daglasova funkcija proizvodnje i ima osobinu da je homogena stepena jedan, odnosno ima konstantne povraćaje u srazmeri $F(zK, zL) = zF(K, L)$, gde je $z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
J(K(t), L(t), u(t)) &= \int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1-u(t)) + \ln F(K(t), L(t))]dt \to \max \\
K'(t) &= u(t)F(K(t), L(t)), \quad 0 \le u(t) \le 1-\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1 \\
L'(t) &= nL(t) \\
K(0) &= K_0 \\
L(0) &= L_0.
\end{aligned}$$

*Ovako postavljen problem zadovoljava uslove 1. - 3. i predstavlja specijalan slučaj problema (4.1). Ako kapital po radniku $K/L$ predstavlja promenljivu stanja $x$ i važi $x = K/L$, tada se korišćenjem uslova (4.2) i (4.3) dobija prizvodnja po radniku*

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{1}{L(t)}F(K(t), L(t)) = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = f(x(t))$$

*za svako $t \ge 0$. Funkcija $f$ je definisana i neprekidna na $\tilde{X} = (0, \infty)$ i zadovoljava sledeće uslove za sve $x > 0$*

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dx}f(x) > 0, \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x) < 0, \\
\lim_{x \to +0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \\
\lim_{x \to +0} \frac{d}{dx}f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{d}{dx}f(x) = 0.
\end{gathered}$$

*Diferencijalna jednačina za promenljivu $x(t) = K(t)/L(t)$ ima sledeći oblik*

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\frac{K(t)}{L(t)} = K'(t)\frac{1}{L(t)} - \frac{K(t)}{L^2(t)}L'(t) = u(t)\frac{Y(t)}{L(t)} - n\frac{K(t)}{L(t)},$$

*odnosno*

$$x'(t) = u(t)f(x(t)) - nx(t).$$

*Kako je potrošnja po radniku data sa $c(t) = C(t)/L(t)$ iz (4.4) sledi*

$$c(t) = (1-u(t))\frac{Y(t)}{L(t)} = (1-u(t))f(x(t)).$$

*Dakle, optimalan problem upravljanja uspeli smo da svedemo na sledeći problem*

$$\begin{aligned}
J(x, u) &= \int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1-u(t)) + \ln f(x(t))]dt \to \max \\
x'(t) &= u(t)f(x(t)) - nx(t), \quad u(t) \in [0, 1-\varepsilon], \\
x(0) &= x_0 \in \tilde{X} = (0, 1-\varepsilon).
\end{aligned}$$

## 4.1 Princip maksimuma na beskonačnom vremenskom intervalu

U nastavku uvodimo funkcije neophodne za razumevanje odeljka 4.2. Najpre uvodimo Hamilton-Pontrjaginovu funkciju $\mathcal{H}$ i Hamiltonovu funkciju $H$, a zatim na osnovu njih uvodimo trenutnu Hamilton-Pontrjaginovu funkciju $\mathcal{M}$ i trenutnu Hamiltonovu funkciju $M$ koje su potrebne za razumevanje ekonomske interpretacije principa maksimuma.

Stoga ćemo najpre uvesti *Hamilton-Pontrjaginovu funkciju*

$$\mathcal{H} : X \times [0, \infty) \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

i *Hamiltonovu funkciju*

$$H : X \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

za problem (4.1) na sledeći način:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \psi, \psi_0) = \langle f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \psi \rangle + \psi_0 e^{-\rho t} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

$$H(\mathbf{x}, t, \psi, \psi_0) = \sup_{\mathbf{u} \in U} \mathcal{H}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \psi, \psi_0),$$

pri čemu su $(\psi, \psi_0)$ dualne promenljive koje odgovaraju dopustivom paru $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ i $\psi_0$ je nenegativan realan broj i važi:

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), t, \mathbf{u}^*(t), \psi(t), \psi_0)}{\partial \mathbf{x}} \\ &= -\left[\frac{\partial f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))}{\partial \mathbf{x}}\right]^* \psi(t) - \psi_0 e^{-\rho t} \frac{\partial F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Ako je pritom par dualnih promenljivih $(\psi, \psi_0)$ netrivijalan, tj.

$$\|\psi(0)\| + \psi_0 > 0 \tag{4.6}$$

i ako važi sledeći uslov maksimuma na $[0, \infty)$:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), t, \mathbf{u}^*(t), \psi(t), \psi_0) \overset{\text{a.e.}}{=} H(\mathbf{x}^*(t), t, \psi(t), \psi_0) \tag{4.7}$$

tada kažemo da su zadovoljeni *uslovi Pontrjaginovog principa maksimuma* za problem (4.1).

Ako pretpostavimo da je $\psi_0 = 1$ tada funkcije $\mathcal{H} : X \times [0,\infty) \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ i $H : X \times [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ možemo zapisati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \psi) &= \mathcal{H}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \psi, 1) = \langle f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \psi \rangle + e^{-\rho t} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ H(\mathbf{x}, t, \psi) &= H(\mathbf{x}, t, \psi, 1) = \sup_{\mathbf{u} \in U} \mathcal{H}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \psi)\end{aligned}$$

i važi:

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), t, \mathbf{u}^*(t), \psi(t)}{\partial \mathbf{x}} \\ &= -\left[\frac{\partial f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))}{\partial \mathbf{x}}\right]^* \psi(t) - e^{-\rho t} \frac{\partial F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))}{\partial \mathbf{x}}.\end{aligned}$$

Ovaj sistem diferencijalnih jednačina, gde je $\psi_0 = 1$, zovemo *sistem sa normalnom formom.* Kažemo da dopustiv par $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$, zajedno sa dualnom promenljivom $\psi$ koja odgovara ovom paru, zadovoljava princip maksimuma ako je ispunjen sledeći uslov

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), t, \mathbf{u}^*(t), \psi(t)) \stackrel{\text{a.e.}}{=} H(\mathbf{x}^*(t), t, \psi(t)).$$

U nastavku dajemo teoremu bez dokaza koja je navedena u monografiji [9], a koja se odnosi na Pontrjaginov princip maksimuma za problem (4.1).

**Teorema 4.1.1.** *Neka su uslovi* 1. − 3. *zadovoljeni i neka je dopustiv par* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ *optimalan za problem (4.1). Tada par* $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$*, zajedno sa parom dualnih promenljivih* $(\psi, \psi_0)$ *koji odgovara paru* $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$*, zadovoljava uslove Pontrjaginovog principa maksimuma (4.5)-(4.7).*

Dakle, za svaki optimalan par $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ postoji par dualnih promenljivih $(\psi, \psi_0)$ koji zadovoljava uslove Pontrjaginovog principa maksimuma (4.5)-(4.7).

Već smo posmatrali problem optimalnog upravljanja na konačnom intervalu

$$\begin{aligned}J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \int_0^T e^{-\rho t} F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \to \max \\ \mathbf{x}'(t) &= f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{u}(t) \in U \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0,\end{aligned} \tag{4.8}$$

pri čemu je $T > 0$. Ako je $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ optimalno rešenje gornjeg problema, tada ono zajedno sa dualnim promenljivim $(\psi, \psi_0)$ koje mu odgovaraju zadovoljava uslove Pontrjaginovog principa maksimuma na $[0, T)$

$$\psi'(t) = -\left[\frac{\partial f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))}{\partial \mathbf{x}}\right]^* \psi(t) - \psi_0 e^{-\rho t} \frac{\partial F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))}{\partial \mathbf{x}}, \tag{4.9}$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), t, \mathbf{u}^*(t), \psi(t), \psi_0) \stackrel{\text{a.e.}}{=} H(\mathbf{x}^*(t), t, \psi(t), \psi_0). \tag{4.10}$$

i dualne promenljive $\psi$ i $\psi_0$ zadovoljavaju sledeći uslov transverzalnosti

$$\psi_0 = 1, \quad \psi(T) = 0,$$

bez kojih uslovi (4.9) i (4.10) ne bi bili kompletni.

Dakle, uslovi transverzalnosti garantuju normalnost problema (4.8) i garantuju postojanje dualne promenljive $\psi$ kao rešenje sistema diferencijalnih jednačina (4.9) na intervalu $[0, T)$ sa graničnim uslovom $\psi(T) = 0$.

Analogno tome, za problem optimalnog upravljanja (4.1) uvodimo uslove transverzalnosti na intervalu $[0, \infty)$:

$$\psi_0 = 1, \quad \lim_{t \to \infty} \psi(T) = 0$$

$$\psi_0 = 1, \quad \lim_{t \to \infty} \langle \mathbf{x}^*(t), \psi(T) \rangle = 0.$$

Takođe, osim uslova (4.5)-(4.7) postoji i *uslov stacionarnosti* na intervalu $[0, \infty)$:

$$\lim_{t \to \infty} H(\mathbf{x}^*(t), t, \psi(t), \psi_0) = 0.$$

U nastavku uvodimo funkcije koje predstavljaju sadašnju (tj. trenutnu) vrednost dualne promenljive, Hamilton-Pontrjaginove funkcije i Hamiltonove funkcije, a koje se od njihovih standardnih vrednosti razlikuju u eksponencijalnom faktoru $e^{\rho t}$.

Trenutnu vrednost dualne promenljive označićemo sa $\mathbf{p}(t), t \geq 0$

$$\mathbf{p}(t) = e^{\rho t} \psi(t),$$

dok ćemo za svako $\mathbf{x} \in X, \mathbf{u} \in U, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ i $\psi_0 \geq 0$ definisati trenutnu Hamilton-Pontrjaginovu funkciju $\mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \psi_0)$ i trenutni Hamiltonijan $M(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \psi_0)$ na sledeći način

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \psi_0) = e^{\rho t} \mathcal{H}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \psi, \psi_0) = \langle f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{p} \rangle + \psi_0 F(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \psi_0) = e^{\rho t} H(\mathbf{x}, t, \psi, \psi_0) = \sup_{\mathbf{u} \in U} (\langle f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{p} \rangle + \psi_0 F(\mathbf{x}, \mathbf{u})),$$

pa se uslovi Pontrjaginovog principa maksimuma za problem (4.1) mogu napisati u sledećem obliku

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}'(t) &\overset{\text{a.e.}}{=} \rho\mathbf{p}(t) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathcal{M}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}(t), \psi_0) \\
&= \rho\mathbf{p}(t) - \left[\frac{\partial f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))}{\partial \mathbf{x}}\right]^* \mathbf{p}(t) - \psi_0 \frac{\partial F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))}{\partial \mathbf{x}},
\end{aligned}$$

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}(t), \psi_0) \overset{\text{a.e.}}{=} M(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \psi_0),$$
$$\|\mathbf{p}(0)\| + \psi_0 > 0.$$

Naravno, za $\psi_0 = 1$ i svako $\mathbf{x} \in X, \mathbf{u} \in U, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ važi

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = e^{\rho t}\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, \psi) = \langle f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{p}\rangle + F(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = e^{\rho t}H(\mathbf{x}, t, \psi) = \sup_{\mathbf{u}\in U}(\langle f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{p}\rangle + F(\mathbf{x}, \mathbf{u})).$$

Hamiltonov sistem diferencijalnih jednačina kakav smo dosad pominjali je oblika

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= \frac{\partial}{\partial \psi}H(\mathbf{x}(t), \psi(t)), \\
\psi'(t) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}H(\mathbf{x}(t), \psi(t)),
\end{aligned}$$

dok se Hamiltonov sistem za problem (4.1) može zapisati u sledećem obliku

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &\overset{\text{a.e.}}{=} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}M(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \\
\mathbf{p}'(t) &\overset{\text{a.e.}}{=} \rho\mathbf{p}(t) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}M(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)).
\end{aligned}$$

## 4.2 Ekonomska interpretacija principa maksimuma

U nastavku ćemo dati ekonomsku interpretaciju principa maksimuma. Posmatraćemo problem optimalnog investiranja u proizvodnju preduzeća pri idealnim uslovima u kojima ekonomija dostiže dinamički ekvilibrijum. Drugim rečima, radi se o ekonomiji gde su svim učesnicima na tržištu dostupne kompletne informacije o trenutnom i budućem stanju u svakom trenutku $t \geq 0$, a da pritom nema neizvesnih i neplaniranih situacija. Koristićemo Belmanovu metodu dinamičkog programiranja.

Neka vektor stanja

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n, t \geq 0,$$

predstavlja osnovna sredstva proizvodnje (kapital) i neka vektor upravljanja

$$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t)) \in U \subset \mathbb{R}^m, t \geq 0,$$

označava količinu kapitala koji je kupljen ili prodat u trenutku $t \geq 0$.

Neka

$$\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{u}(t) \in U$$

predstavlja promenu stanja sistema, odnosno dinamiku kapitala $\mathbf{x}$ posmatranog preduzeća u zavisnosti od politike investiranja $\mathbf{u}$, tj. da li se sredstva proizvodnje kupuju ili prodaju.

Neka je početno stanje sistema u trenutku $t_0 = 0$ poznato

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in X,$$

i pri tom je $X$ dat neprazan otvoren podskup u $\mathbb{R}^n$.

Pretpostavimo da se tehnologija u preduzeću ne menja i da su raspoloživa sredstva proizvodnje u potpunosti iskorišćena u svakom trenutku $t \geq 0$, dok su prihodi i troškovi proizvodnje obuhvaćeni i definisani vektorom $\mathbf{x}(t)$. Neka funkcija $F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ predstavlja profit preduzeća u trenutku $t \geq 0$.

Posmatrajmo sada poslovanje preduzeća na beskonačnom intervalu. Neka je $\rho > 0$ stopa inflacije. Odgovarajući optimalni problem upravljanja je dat sa:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \to \max \\ \mathbf{x}'(t) &= f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{u}(t) \in U \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Pretpostavimo da za svako početno stanje $\mathbf{x}_0 \in X$, problem (4.11) zadovoljava uslove 1. – 3. Uvodimo funkciju $V$ koja se obično naziva *funkcija optimalne vrednosti* za problem (4.11). $V(\mathbf{x})$ je definisano za svako $\mathbf{x} \in X$. U našem slučaju, $V(\mathbf{x}_0)$ je u suštini maksimalan mogući profit preduzeća (uz pojavu inflacije) koje ima osnovna sredstva proizvodnje $\mathbf{x}_0$ u početnom trenutku $t_0 = 0$. Kako smo pretpostavili da preduzeće posluje u idealnim uslovima, maksimalan mogući profit ovog preduzeća je poznat.

Ako funkciju $V(\mathbf{x})$ definišemo kao neto vrednost kapitala, tj. vektora $\mathbf{x} \in X$ u početnom trenutku $t_0 = 0$, ona je uvek jednaka neto sadašnjoj vrednosti kapitala za svako $t \geq 0$, odnosno predstavlja stvarnu vrednost kapitala preduzeća koju treba uzeti u obzir prilikom formiranja investicione politike tog preduzeća.

Pretpostavimo da je funkcija $V(\mathbf{x})$ dva puta neprekidno diferencijabilna na skupu $X$ i da je $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ optimalno rešenje problema (4.11). Za svako $\tau \geq 0$, posmatrajmo dopustiv par $(\mathbf{x}_\tau, \mathbf{u}_\tau)$, gde je $\mathbf{x}_\tau(s) = \mathbf{x}^*(s+\tau)$ i $\mathbf{u}_\tau(s) = \mathbf{u}^*(s+\tau)$, $s \geq 0$ pa možemo formulisati sledeći problem

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \int_0^\infty e^{-\rho s} F(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)) ds \to \max \\ \mathbf{x}'(s) &= f(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)), \quad \mathbf{u}(s) \in U \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}^*(\tau). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Kao što je par $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ optimalan za problem (4.11), tako je $(\mathbf{x}_\tau, \mathbf{u}_\tau)$ optimalan za problem (4.12) za svako $\tau \geq 0$. Uvođenjem promenljive $t = s + \tau$ u integral $J$, dobijamo da je vrednost funkcije cilja u $(\mathbf{x}_\tau, \mathbf{u}_\tau)$

$$J(\mathbf{x}_\tau, \mathbf{u}_\tau) = e^{\rho\tau} \int_\tau^\infty e^{-\rho t} F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) dt$$

i dalje važi

$$V(\mathbf{x}^*(\tau)) = e^{\rho\tau} \int_\tau^\infty e^{-\rho t} F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) dt \;\text{ za svako }\; \tau \geq 0. \tag{4.13}$$

Posmatrajmo sada kretanje sistema duž optimalne trajektorije $\mathbf{x}^*$. U trenutku $t \geq 0$ sistem je u stanju $\mathbf{x}^*(t)$ i tokom malog intervala $[t, t+\Delta t], \Delta t > 0$, sistem prelazi u stanje $\mathbf{x}^*(t+\Delta t)$, pa važi

$$e^{-\rho(t+\Delta t)} V(\mathbf{x}^*(t+\Delta t)) - e^{-\rho t} V(\mathbf{x}^*(t)) = -\int_t^{t+\Delta t} e^{-\rho s} F(\mathbf{x}^*(s), \mathbf{u}^*(s)) ds.$$

Za $\Delta t > 0, \Delta t \to 0$ i neprekidno diferencijabilnu funkciju $V$, optimalan par $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ zadovoljava sledeću jednakost za skoro svako $t \geq 0$

$$\left\langle f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)), \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}^*(t)) \right\rangle - \rho V(\mathbf{x}^*(t)) + F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) = 0. \tag{4.14}$$

Neka je $\mathbf{x}_0 \in X$ početno stanje uz pretpostavku da postoji arbitraža[2]. Neka je $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ dopustiv par sa početnim uslovom $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Posmatraćemo na malom intervalu $\Delta = [0, \Delta t], \Delta t > 0$ trajektoriju $\tilde{\mathbf{x}}$ koja počinje u $\mathbf{x}_0$ i konstantno upravljanje $\tilde{\mathbf{u}}(t) = \bar{\mathbf{u}}, t \in \Delta$, pri čemu će $\bar{\mathbf{u}} \in U$ predstavljati arbitražu. Pritom važi $\tilde{\mathbf{x}}(\Delta t) = \mathbf{x}_0 + \Delta t f(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{u}}) + o(\Delta t)$. Pretpostavićemo da je dalje kretanje sistema od tačke $\tilde{\mathbf{x}}(\Delta t)$ na beskonačnom intervalu $[\Delta t, \infty)$ optimalno. Vrednost funkcije cilja u tački $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ je

$$J(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \int_0^{\Delta t} e^{-\rho t} F(\tilde{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}) dt + e^{-\rho \Delta t} V(\tilde{\mathbf{x}}(\Delta t)).$$

Kako dopustiv par $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ ne mora biti optimalan u problemu (4.11), sledi $J(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \leq V(\mathbf{x}_0)$ i važi

$$e^{-\rho \Delta t} V(\tilde{\mathbf{x}}(\Delta t)) - V(\mathbf{x}_0) + \int_0^{\Delta t} e^{-\rho t} F(\tilde{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}) dt \leq 0.$$

Za $\Delta t > 0, \Delta t \to 0$ i neprekidno diferencijabilnu funkciju $V$ dalje dobijamo

$$\left\langle f(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{u}}), \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}_0) \right\rangle - \rho V(\mathbf{x}_0) + F(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{u}}) \leq 0.$$

Pod pretpostavkom da važi nejednakost

$$\left\langle f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \right\rangle - \rho V(\mathbf{x}) + F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq 0 \tag{4.15}$$

za svako $\mathbf{x} \in X$ i $\mathbf{u} \in U$, i da za $t \geq 0$ važi jednakost (4.14), tada za svako $\mathbf{x} \in X$ važi

$$\left\langle f(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*(t)), \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \right\rangle - \rho V(\mathbf{x}) + F(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*(t)) \leq 0,$$

dok za $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$ važi jednakost

$$\left\langle f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)), \frac{\partial V(\mathbf{x}^*(t))}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle - \rho V(\mathbf{x}^*(t)) + F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) = 0.$$

Tada funkcija $\phi : X \to \mathbb{R}^1$ definisana na sledeći način

$$\phi(\mathbf{x}) = \left\langle f(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*(t)), \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \right\rangle - \rho V(\mathbf{x}) + F(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*(t)) \ \text{ za svako } \ \mathbf{x} \in X$$

[2]Arbitraža je istovremena kupovina i prodaja iste investicijske imovine, koja se na različitim tržištima vrednuje po različitim cenama, sa namerom sticanja profita.

dostiže maksimum u tački $\mathbf{x}^*(t) \in X$. Pošto je $V$ neprekidno diferencijabilna funkcija na $X$, sledi

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}^*(t)) = 0 \text{ za skoro svako } \quad t \geq 0,$$

to jest

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} V(\mathbf{x}^*(t)) f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) + \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))\right]^* \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}^*(t)) -$$

$$-\rho \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}^*(t)) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \overset{\text{a.e.}}{=} 0. \tag{4.16}$$

Slično, na osnovu (4.15) važi nejednakost

$$\left\langle f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}), \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}^*(t)) \right\rangle + F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}) \leq \rho V(\mathbf{x}^*(t))$$

za svako $\mathbf{u} \in U$ i $t \geq 0$, dok na osnovu (4.14) za $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$ dobijamo jednakost

$$\begin{aligned} \rho V(\mathbf{x}^*(t)) &\overset{\text{a.e.}}{=} \max_{\mathbf{u} \in U} \left\{ \left\langle f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}), \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}^*(t)) \right\rangle + F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}) \right\} \\ &\overset{\text{a.e.}}{=} \left\langle f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)), \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}^*(t)) \right\rangle + F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \end{aligned} \tag{4.17}$$

koja važi na čitavom intervalu $[0, \infty)$.

Sada ćemo uvesti i definisati funkciju $\mathbf{p} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}^*(t)), \quad t \in [0, \infty),$$

pri čemu je $V$ dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija na $X$. Na osnovu (4.16) dobijamo

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'(t) &= \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} V(\mathbf{x}^*(t)) f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \\ &= -\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))\right]^* \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}^*(t)) + \rho \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}^*(t)) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)), \end{aligned}$$

odnosno

$$\mathbf{p}'(t) = \rho \mathbf{p}(t) - \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))\right]^* \mathbf{p}(t) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)). \tag{4.18}$$

Uslov (4.17) se može napisati na sledeći način

$$\langle f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)), \mathbf{p}(t)\rangle + F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \overset{\text{a.e.}}{=} \max_{\mathbf{u}\in U} \{\langle f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}), \mathbf{p}(t)\rangle + F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u})\} \tag{4.19}$$

i takođe važi

$$\langle f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)), \mathbf{p}(t)\rangle + F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) = \rho e^{\rho t} \int_t^\infty e^{-\rho s} F(\mathbf{x}^*(s), \mathbf{u}^*(s)) ds \tag{4.20}$$

za skoro svako $t \geq 0$.

Preostaje nam još da definišemo trenutnu Hamilton-Pontrjaginovu funkciju $\mathcal{M}$ i trenutni Hamiltonijan $M$ u normalnoj formi (tj. za $\psi_0 = 1$)

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = \langle f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{p}\rangle + F(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sup_{\mathbf{u}\in U} (\langle f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{p}\rangle + F(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$$

za svako $\mathbf{x} \in X, \mathbf{u} \in U$ i $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Stoga uslove (4.18) i (4.19) možemo napisati i u sledećem obliku

$$\mathbf{p}'(t) \overset{\text{a.e.}}{=} \rho \mathbf{p}(t) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{M}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}(t)), \tag{4.21}$$

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}(t)) \overset{\text{a.e.}}{=} M(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t)), \tag{4.22}$$

dok uslov stacionarnosti sledi iz uslova (4.20)

$$M(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t)) = \rho e^{\rho t} \int_t^\infty e^{-\rho s} F(\mathbf{x}^*(s), \mathbf{u}^*(s)) ds \quad \text{za svako} \quad t \geq 0. \tag{4.23}$$

Na ovaj način smo formulisali Pontrjaginov princip maksimuma za problem (4.1).

**Teorema 4.2.1.** *Neka problem (4.1) zadovoljava uslove* 1. – 3. *za svako početno stanje* $\boldsymbol{x}_0 \in X$ *i neka je funkcija* $V$ *dva puta neprekidno diferencijabilna na skupu* $X$. *Neka je dopustiv par* $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$ *optimalan za problem (4.1). Tada, par* $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$ *zajedno sa trenutnom dualnom promenljivom*

$$\boldsymbol{p}(t) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}^*(t)) \quad \textit{za svako} \quad t \geq 0,$$

*zadovoljava uslove Pontrjaginovog principa maksimuma (4.21) i (4.22) kao i uslov stacionarnosti (4.23).*

U nastavku prelazimo na ekonomsku interpretaciju Pontrjaginovog principa maksimuma. Funkciju $V(x)$ smo već definisali kao neto vrednost kapitala, tj. vektora $\mathbf{x} \in X$ u početnom trenutku $t_0 = 0$ i uvek je jednaka neto sadašnjoj vrednosti kapitala za svako $t \geq 0$. Ako preduzeće poseduje kapital $\mathbf{x} \in X$ u trenutku $\tau \geq 0$, tada na beskonačnom intervalu $[\tau, \infty)$ kretanjem duž optimalne putanje polazeći iz stanja $\mathbf{x}^*(\tau) = \mathbf{x}$, preduzeće ostvaruje profit

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-\rho(t-\tau)} F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) dt = e^{\rho\tau} \int_{\tau}^{\infty} e^{-\rho t} F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) dt$$

uz mogućnost pojave inflacije. Desni deo jednačine možemo izjednačiti sa $V(\mathbf{x}^*(\tau))$ na osnovu izraza (4.13).

Priraštaj neto vrednosti kapitala pri prelasku sistema iz stanja $\mathbf{x} \in X$ u stanje $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} \in X$ je dat sa

$$V(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}) = \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}), \Delta\mathbf{x} \right\rangle + o(\|\Delta\mathbf{x}\|).$$

Dakle, koordinate vektora $\partial V(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$ karakterišu priraštaj $V(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) - V(\mathbf{x})$ i pri tom se $i-$ta $(i = 1, 2, \ldots, n)$ koordinata vektora $\partial V(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$ interpretira kao *"marginalna"* cena po jedinici $i-$te koordinate kapital vektora $\mathbf{x}$. Kako je trenutna dualna promenljiva $\mathbf{p}$ definisana kao

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}^*(t)) \text{ za svako } \quad t \geq 0,$$

njene koordinate se nazivaju *trenutne marginalne cene*. Ove marginalne cene se još nazivaju *"shadow prices"* i one se generalno razlikuju od tržišnih cena. Dualnu promenljivu $\psi$ izražavamo na sledeći način

$$\psi(t) = e^{-\rho t} \mathbf{p}(t) \text{ za svako } \quad t \geq 0.$$

S obzirom da je $e^{-\rho t}$ faktor inflacije, koordinate dualne promenljive $\psi(t)$ se mogu interpretirati kao *"redukovane" marginalne cene.*

Posmatrajmo trenutnu Hamilton-Pontrjaginovu funkciju

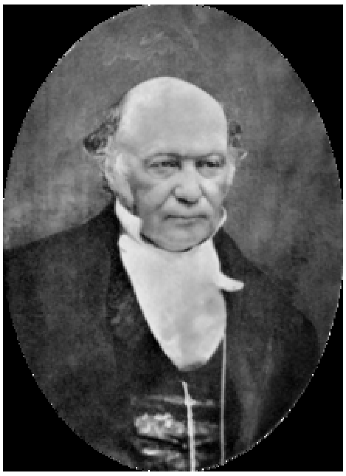
$$\mathcal{M}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}(t)) = \langle f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)), \mathbf{p}(t) \rangle + F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)). \qquad (4.24)$$

Za skoro svako $t \geq 0$ jednačina

$$V(\mathbf{x}^*(t + \Delta t)) - V(\mathbf{x}^*(t)) = \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}^*(t)), f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t) \right\rangle \Delta t + o(\Delta t)$$

implicira da izraz $\langle f(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)), \mathbf{p}(t)\rangle$ na desnoj strani jednačine (4.24) predstavlja priraštaj neto vrednosti kapitala $\mathbf{x}^*(t)$ po jedinici vremena u trenutku $t$ pod pretpostavkom da je sprovedena optimalna investiciona politika $\mathbf{u}^*(t)$. Drugi izraz $F(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ predstavlja stvarni trenutni profit preduzeća po jedinici vremena u trenutku $t$. Stoga se funkcija $\mathcal{M}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}(t))$ može interpretirati kao ukupni trenutni profit preduzeća u trenutku $t$ i oslikava uspešnost izabrane investicione politike preduzeća. Prema uslovu maksimuma (4.22), optimalna investiciona politika $\mathbf{u}^*(t)$ treba da maksimizira ukupni trenutni profit za skoro svako $t \geq 0$. Dakle, na ovaj način smo prikazali interpretaciju Hamilton-Pontrjaginove funkcije i uslova maksimuma (4.22).

# Dodatak



Vilijam R. Hamilton (1805 – 1865) je bio irski fizičar, astronom i matematičar. Živio je i radio u Dablinu. Dao je značajan doprinos mehanici, optici i algebri. Uporedo sa varijacionim računom i analitičkom mehanikom koja se zasniva na Ojler-Lagranžovim jednačinama, Hamilton razvija novi drugačiji pristup koji nalazi široku primenu u fizici i tehnici. Takođe nalazi primenu i u teoriji optimalnog upravljanja, numeričkoj analizi, teoriji kanoničkih transformacija, kao i u ekonomiji.

# Zaključak

Ekonomski rast zavisi od više različitih faktora, na primer produktivnosti, akumulacije kapitala, rasta populacije, tehnološkog napretka, potrošnje i td. Neki modeli rasta se zasnivaju na primeni principa maksimuma i dinamičkog programiranja. Cilj ovog rada je bio da prikaže ulogu prvenstveno principa maksimuma i Hamiltonove funkcije u pojedinim modelima ekonomskog rasta, odnosno problemima optimalnog upravljanja. U radu su analizirani modeli rasta i prikazano je kako pojedini faktori utiču na ekonomski rast i kako primenom principa maksimuma i Hamiltonove funkcije odrediti optimalno rešenje problema u cilju postizanja optimalnog rasta. U radu su više puta posmatrani problemi optimalnog ekonomskog rasta, odnosno problemi optimalnog upravljanja kod kojih je funkcija cilja sadržala diskontni faktor. U mikroekonomskim modelima, diskontni faktor se nekad povezuje sa inflacijom, što se moglo videti iz primera datog u poslednjem poglavlju. U istom poglavlju izložen je problem optimalnog upravljanja u beskonačnom vremenskom intervalu i data je ekonomska interpretacija principa maksimuma. Pritom je analiziran problem optimalnog investiranja u proizvodnju preduzeća pri idealnim uslovima i primenom dinamičkog programiranja je formulisan Pontrjaginov princip maksimuma za dati problem.

# Literatura


[1] Michael D. Intriligator - Mathematical Optimization and Economic Theory, University of California, Los Angeles, 2002.

[2] N. Teofanov, Lj. Gajić - Predavanja iz optimizacije, Univerzitet u Novom Sadu, 2006.

[3] B. Vujanović, D. Spasić - Metodi optimizacije, Univerzitet u Novom Sadu, 1997.

[4] R. Shone - Economic Dynamics, Cambrige University press 2002.

[5] B. Jovanović - Nastava Matematike, LV1-2 (2010.), 46-54.

[6] A. Cherkaev, E. Cherkaev -Calculus of Variations and Applications, Lecture Notes, Draft, 2003.

[7] G. Mankiw - Makroekonomija, Cekom books, Novi Sad 2005.

[8] Robert M. Solow - A Contribution to the Theory of Economic Growth, The Quarterly Journal of Economics, Vol. 70, No. 1 (Feb. 1956), pp 65-94, Published by: The MIT Press

[9] S. M. Aseev, A. V. Kryazhimskii - The Pontryagin Maksimum Principle and Optimal Economic Growth Problems 2007.

[10] J. Mitrović - Varijacioni račun i modeli rasta, master rad, Univerzitet u Novom Sadu, 2011.

# Biografija

Rođena sam 22. januara 1987. godine u Novom Sadu. Završila sam osnovnu školu "Duško Radović" i gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj", prirodno matematički smer. 2006. godine sam upisala osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija i završila studije u junu 2010. godine sa prosečnom ocenom 8,39. Potom sam upisala master studije primenjene matematike, modul matematika finansija, na istom fakultetu.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

**Redni broj:**
**RBR**

**Identifikacioni broj:**
**IBR**

**Tip dokumentacije:** Monografska dokumentacija
**TD**

**Tip zapisa:** Tekstualni štampani materijal
**TZ**

**Vrsta rada:** Master rad
**VR**

**Autor:** Ana Kovačevič
**AU**

**Mentor:** dr Nenad Teofanov
**ME**

**Naslov rada:** Hamiltonova funkcija u modelima ekonomskog rasta
**NR**

**Jezik publikacije:** Srpski (latinica)
**JP**

**Jezik izvoda:** s / en
**JI**

**Zemlja publikovanja:** Republika Srbija
**ZP**

**Uže geografsko područje:** Vojvodina

**UGP**

**Godina:** 2013
**GO**

**Izdavač:** Autorski reprint
**IZ**

**Mesto i adresa:** Novi Sad, Sentandrejski put 100 f
**MA**

**Fizički opis rada:** (4/79/0/0/1/11/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
**FO:**

**Naučna oblast:** Matematika
**NO**

**Naučna disciplina:** Optimizacija
**ND**

**Ključne reči:** optimalno upravljanje, Hamiltonova funkcija, princip maksimuma, modeli ekonomskog rasta, funkcija proizvodnje
**PO, UDK**

**Čuva se:** U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
**ČU**

**Važna napomena:**
**VN**

**Izvod:** Ovaj rad se bavi ekonomskim modelima rasta i problemima optimalnog upravljanja koji odgovaraju ovim modelima, a koji se rešavaju pomoću Hamiltonove funkcije i principa maksimuma. Razmatran je problem optimalnog upravljanja kako na konačnom intervalu, tako i na beskonačnom vremenskom intervalu.
**IZ**

**Datum prihvatanja teme od strane NN veća:** 10.05.2012.
**DP**

**Datum odbrane:**
**DO**

**Članovi komisije:**
**ČK**

**Predsednik:** dr Ljiljana Gajić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
**Član:** dr Sanja Konjik, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
**Mentor:** dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

**Accession number:**
**ANO**

**Identification number:**
**INO**

**Document type:** Monograph type
**DT**

**Type of record:** Printed text
**TR**

**Contents Code:** Master's thesis
**CC**

**Author:** Ana Kovačevič
**AU**

**Mentor:** dr Nenad Teofanov
**MN**

**Title:** Hamilton function in models of economic growth
**TI**

**Language of text:** Serbian (Latin)
**LT**

**Language of abstract:** s / en
**LA**

**Country of publication:** Republic of Serbia
**CP**

**Locality of publication:** Vojvodina

**LP**

**Publication year:** 2013
**PY**

**Publisher:** Author's reprint
**PU**

**Publication place:** Novi Sad, Sentandrejski put 100 f
**PP**

**Physical description:** (4/79/0/0/1/11/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
**PD**

**Scientific field:** Mathematics
**SF**

**Scientific discipline:** Optimization
**SD**

**Subject/Key words:** optimal control, Hamilton function, meximum principle, models of economic growth, production function
**SKW**

**Holding data:** The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
**HD**

**Note:**
**N**

**Abstract:** This master thesis is about models of economic growth and optimal control problems corresponding to these models, which are solved using the Hamilton function and meximum principle. We have considered an optimal control problem on the finite time interval and also on the infinite time interval.
**AB**

**Accepted by the Scientific Board on:** 10.05.2012.
**ASB**

**Defended:**
**DE**

**Thesis defend board:**
**DB**

**President:** dr Ljiljana Gajić, full professor at Faculty of Science in Novi Sad
**Member:** dr Sanja Konjik, docent at Faculty of Science in Novi Sad
**Mentor:** dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad