UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Aleksandra Radanović

NEKI ASPEKTI TEORIJE IGARA I NJIHOVA PRIMENA U EKONOMIJI

-MASTER RAD-

Novi Sad, 2014.

SADRŽAJ

1.UVOD

Teorija igara je oblast primenjene matematike koja je zvanično počela da se razvija 40-ih godina XX veka, premda je u tragovima uočena još u delima grčkih filozofa, spisima raznih vojskovođa tokom srednjeg veka , a naročito u 18. veku kada su njeni koncepti korišćeni za analizu salonskih igara kartama. Najšire rečeno, ova grana matematike se bavi neizvesnošću u odlučivanju nastalom kroz interakciju različitih subjekata, i ona nastoji dati odgovor na pitanje koja je najbolja strategija za svakog pojedinca, u uslovima koje diktira situacija u kojoj se oni nalaze. Zbog širine i primenljivosti problema na koje pokušava naći odgovor teorija igara je brzo uspela da pronađe put do mnogih naučnih disciplina, te je danas njena primena u ekonomiji, politici, evolutivnoj biologiji, botanici kao i mnogim društvenim naukama više nego osetna.

Rad koji je pred vama svojim najvećim delom pokušava razjasniti osnovne koncepte teorije igara, prvenstveno u cilju naglašavanja bogate primene koju ova teorija ima u ekonomiji, a kojoj će se takođe naći mesta na ovim stranicama. Ipak, ideja ovog rada nije samo u tome da u potpunosti isprati svoj naslov, već da se pozabavi i samim odnosom dve nauke – matematike i ekonomije, za koje je upravo teorija igara jedna od najznačajnijih tačaka preklapanja. Stoga je ideja njegovog pisanja bila stvaranje jedne zaokružene celine koja će i postaviti pitanja o pomenutom odnosu i pokušati na njih dati odgovor, kako kroz interpretaciju tuđih i priznatih radova, tako i kroz samostalan rad autorke.

Prvi deo rada predstavlja diskusiju o tome koliko uspešno jedna egzaktna nauka kao što je matematika može opisati ekonomske pojave i zakonitosti, te da li i u kolikoj meri ekonomisti osećaju značaj povezivanja ove dve nauke. Kao temelj ove početne diskusije, korišćena su naučna istraživanja obavljana u vidu anketa 80-ih godina prošlog veka, ali upravo će ova ideja, kasnije ćete se uveriti, biti temelj za samostalan rad autorke rada kojim će u njegovom poslednjem delu pokušati izložiti trenutnu situaciju u odnosu dveju nauka.

Potom, kroz poglavlja 3 i 4 rad će se baviti ne samo gorepomenutom teorijom igara, već i teorijom racionalnog izbora, ali ne samo zato što je ona svojevrsan temelj teorije igara, već i zato što teorija racionalnog izbora predstavlja reprezentativan primer “matematizacije” ljudske psihologije, i samim tim manifest da se mnogi na prvi pogled izrazito nematematički problemi vrlo uspešno mogu matematički modelirati.

Poglavlje 5 rezervisano je za ekonomske modele i ono predstavlja dokaz da se način funkcionisanja tržišta može veoma uspešno modelirati pomoću teorije igara, bilo da su na tržištu dva ili više aktera. Ovde će biti prikazana tri različita modela kojima se nastoji objasniti trka između subjekata na tržištu, a biće predstavljena i detaljnija ekonomska analiza pojave inflacije, koja će paralelno biti objašnjena i sa stanovišta teorije igara.

Na samom kraju, ponovo će se pokrenuti tema odnosa matematike i ekonomije, ali će ovog puta ona biti utemeljena na sopstvenim istraživanjima autorke i njenom pogledu na trenutnu perspektivu koju matematika ima među ekonomistima. Ovaj finalni deo rada biće ujedno i poslednji korak u pokušaju da se čitaocu obezbedi potpuna slika o odnosu između dve nauke, te da se on indirektno ubedi da matematika, i pored skepticizma koji vezano za njenu primenu u društvenim naukama postoji,raspolaže sa dovoljno alata da opiše najrazličitije ekonomske pojave. Koliko je rad u ispunjenju svog cilja bio uspešan, prosudiće upravo njegov čitalac.

2. MODELIRANJE EKONOMSKIH POJAVA

2.1 Uloga matematike u ekonomiji

Ekonomija je društvena nauka koja se, u najširem smislu, bavi ponašanjem grupa i pojedinaca koje za cilj ima postizanje željenih ciljeva (profita) uz što manju potrošnju postojećih resursa. Na ekonomisanje kao skup aktivnosti preduzetih zarad ostvarenja gore navedenih ciljeva ljudi su bili primorani još u doba Mesopotamije, antičke Grčke i antičkog Rima. Već 4 veka pre Hrista pojavila su se prva dela Ksenofana, Aristotela i drugih filozofa koja nam svedoče o zaista dugoj istoriji ekonomske nauke. Kroz discipline poput političke ekonomije, marksizma, neoklasicizma itd. ekonomija se razvijala do dan danas, međutim i pored duge i burne prošlosti, i dalje se smatra da ova nauka ne samo da nije dostigla svoj vrhunac, već da je od njega još uvek miljama daleko.

Mnoge oblasti ekonomske nauke su bar u nekoj fazi svog razvoja posegle za matematičkom interpretacijom. Od pre 50-ak godina pa do danas, upotreba matematike u ekonomiji značajno je porasla, kako kada je u pitanju edukacija ekonomista tako i kada su u pitanju naučna istraživanja. Statistički podaci[1] kažu da je samo u periodu od 1951. do 1978. godine broj stranica koje sadrže matematičke jednačine u časopisu AER (American Economic Review) izdatog od strane Američkog Udruženja Ekonomista (American Economic Association) porastao sa 2.2% na čak 44%, što svedoči o veoma primetnoj ekspanziji korišćenja matematičkih alata. Danas je taj procenat još veći, i to prvenstveno zahvaljujući najvećoj sponi između matematičkih i ekonomskih disciplina i prema mnogima najznačajnijoj veštini modernog doba – statistici, čija je suštinska uloga u analizi ekonomskih pojava i njihovoj povezanosti neosporna čak i od strane ekonomista. Posle statistike (čiji doprinos ekonomiji u ovom radu neće biti razmatran), najznačajniji i neosporan doprinos razvoju ekonomije donela je teorija igara koja je dala fundamentalna objašnjenja za mnoštvo ekonomskih pojava. Ipak, koliko su druge matematičke discipline zaista doprinele razvoju i prosperitetu ekonomije predmet je diskusije i dan danas. Naravno, skeptici su uvek ekonomisti, među kojima ima kako onih koji su u velikoj meri prihvatili matematiku kao glavni alat za prezentovanje i rešavanje ekonomskih problema, tako i onih koji čvrsto stoje iza tvrdnje da je ekonomija kompozicija nekoliko fundamentalnih principa i velikog broja zaključaka koji su nastali iz opservacija, odnosno empirijski, i koji se zadovoljavaju da na ovaj način istražuju i bilo kakve buduće pojave. [5]

Za skepticizam kada je u pitanju primena matematike u ekonomiji svakako ima mesta, i to je činjenica koju ni sami matematičari ne mogu osporiti. Argumenti koji se najčešće prvi čuju jesu vezani za fundamentalnu razliku između ove dve nauke, a to je činjenica da u ekonomiji kao društvenoj nauci ljudski faktor ima težinsku ulogu, te da „plastične“ matematičke formule nemaju moć prepoznavanja navodno nemerljivog psihološkog faktora. Ovo su ipak argumenti bez pravog pokrića, jer su činjenice da je matematika vekovima unazad rešavala slične probleme u biologiji, ali i da je problema naizgled „nemogućih za matematički predstaviti“ oduvek bilo i u hemiji i fizici, naukama čiji temelj matematika predstavlja od davnina. Naravno, i pored svega pomenutog, skeptici bi i dalje našli prostora za negodovanje tvrdnjom da se ekonomija ipak ne može porediti sa biologijom, hemijom ili fizikom, međutim već teorija racionalnog izbora, kojom se na jedan vrlo efikasan i prilično jednostavan način matematički objašnjava ponašanje pojedinca u ekonomskom odlučivanju, vrlo elegantno pobija svaku sumnju u netačnost gore navedenih argumenata protiv upotrebe matematike za predstavljanje tzv.

[1] Podaci su uzeti iz istraživanja preduzetog od strane Herbert Grubel i Lawrence A.Boland, zaposlenih na Departmanu za ekonomiju, Univerzitet Simon Fraser, Britanska Kolumbija, Kanada. Istraživanje je sprovedeno u vidu upitnika koji je prosleđen profesorima ekonomije širom Sjedinjenih Američkih Država i Kanade, a koje je za cilj imalo da proceni korisnost i cenjenost matematičkih istraživanja u ekonomiji. Rezultati ovog upitnika korišćeni su kao potpora članku pod nazivom „On the Efficient Use of Mathematics in Economics: Some Theory, Facts and Results of an Opinion Survey“, u kome se diskutuje na temu „optimuma“ upotrebe matematike u ekonomiji.

ljudskog faktora ekonomske nauke. Povrh svega, čak i da matematika već nije pronašla rešenja za probleme pomenutog tipa, bilo bi u najmanju ruku nezrelo tvrditi da se ona prema ekonomiji ne može ophoditi kao prema ranije „savladanim“ naukama, jer zar nije racionalno u bilo kom istraživanju prvo krenuti od tehnika koje su se ranije pokazale uspešnima, pa tek ako one zakažu, pokušati sa novim idejama?

Vrlo čest argument protiv upotrebe matematike je i činjenica da ekonomija sama po sebi i dalje nije dostigla vrhunac svog razvitka, pa kao takva predstavlja vrlo nestabilnu podlogu za primenu egzaktne nauke poput matematike. Doduše, neke oblasti ekonomske nauke već su dostigle nivo dovoljan da mogu biti u potpunosti protumačene, i tu primena matematičkih alata uopšte nije sporna. O tim će aspektima ekonomske teorije još biti reči u poslednjem poglavlju ovog rada. Ipak, neke druge pojave u ekonomiji i dalje nisu u potpunosti objašnjene i kao takve one daju premalo prostora za formiranje matematičkih modela. Upravo zbog ljudskog faktora koji je sadržan u skoro svakom predmetu ekonomskog istraživanja, predvidivost u ekonomiji, kao uostalom i u svakoj društvenoj nauci nikada nije potpuno osigurana, i samim tim razvoj ove nauke ne može se dešavati brzo kao što se to dešavalo npr. u fizici. U mnogo ekonomskih branši zapravo najveći problem predstavlja definisati problem, upravo zbog nepredvidivosti ogromnog broja faktora koji na njega utiču. Kako matematika uvek kreće od jasne definicije, logično je onda da upravo u ovim oblastima nema naročite nade za korišćenje matematičkih alata, barem za sada kada je nedostatak konkretnih početnih uslova na osnovu kojih se matematička zaključivanja mogu izvesti i dalje nenadoknadiv. Kao posledica navedenog, nameće se mišljenje da je imperativ deskriptivne ekonomije upravo raditi na razjašnjavanju početnih problema koji to i dalje nisu, tek posle koga može doći do primene matematike na nivou ozbiljnijem od pukog nabrajanja nepoznatih veličina i jednačina bez pravog redosleda, smisla i bilo kakve detaljnije analize.

I pored svega do sada iznetog, može se reći da su mnogi ekonomisti ipak vrlo često paradoksalni u nameri da ne prihvate konstruisanje matematičkih modela u svom radu. S jedne strane, oni to neprihvatanje argumentuju činjenicom da im „matematika samo otežava način zapisa svega onoga što su i bez nje već ustanovili“, a da pritom ne daje odgovore na pitanja koja su bila poznata i pre nje, a kojima se takođe nije znao odgovor. Takođe, često se može čuti da je potrebno isuviše vremena posvetiti razmatranju koliko dobro model zapravo opisuje realnu situaciju, što je krajnje neoptimalno u slučaju da se na kraju ispostavi da model nije dobar, i da u nedostatku metoda savremene statistike (koju ekonomisti uglavnom prisvajaju kao deo svoje naučne oblasti, a ne kao deo matematike) skoro pa nije moguće ispitatu valjanost modela. Ipak, baš zbog toga što matematički modeli u velikoj meri uprošćavaju realan svet, njihovo detaljnije razmatranje bi možda upravo moglo biti odskočna daska u rangiranju faktora koji utiču na ekonomske pojave i odlučivanju koji su od njih presudni a koji od marginalnog značaja, što bi svakako pospešilo napredak ekonomije kao nauke. [3, 11]

Argument koji sa sobom nosi najveću dozu sujete je taj da eksperti drugih naučnih disciplina, a samim tim ni ekonomisti ne vole da koriste matematiku jer se dešava da problem formulisan od strane jednog naučnika može imati potpuno istu matematičku formulaciju kao potpuno drugačiji problem definisan od strane nekog drugog. Ovo će biti ilustrovano primerom:

Primer 2.1.1: [12] Posmatrajmo populaciju sačinjenu od identičnih organizama čija reprodukcija se dešava istovremeno kod svih jedinki. Matematički model za ovakav proces reprodukcije čini obična diferencijalna jednačina oblika

$$\boldsymbol{\frac{dP}{dt} = b \cdot P}$$

gde je $P = P(t)$ populacija u momentu t, dok je b stopa rađanja.

Sada ćemo u populaciji P umesto rađanja posmatrati umiranje. Preciznije, posmatraćemo situaciju u kojoj nema rađanja, a svaka jedinka u svakom momentu ima pozitivnu verovatnoću umiranja. Neka je konstanta d stopa smrtnosti. Matematički model zapisujemo kao

$$\frac{\boldsymbol{dP}}{\boldsymbol{dt}} = -\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{P}$$

Ako bismo sada u populaciji istovremeno posmatrali i proces rađanja i proces umiranja, i označili sa b i d stopu rađanja i stopu umiranja gde su obe ponovo konstantne, a pritom i nezavisne od veličine populacije, starosnog doba i vremena, dobijamo

$$\frac{\boldsymbol{dP}}{\boldsymbol{dt}} = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}) \cdot \boldsymbol{P}$$

Ukoliko uvedemo oznaku $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}$, gornja jednačina dobija oblik

$$\frac{\boldsymbol{dP}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{P}$$

Vidimo iz navedenog da tri potpuno različita teorijska modela imaju isti matematički zapis, što je u stanju da dovede do velikih komplikacija i nesuglasica, a naročito je primetna (i ekonomistima definitivno neomiljena) činjenica da nigde nema identifikacije rada pojedinca, baš iz razloga što se više pojedinačnih načina razmišljanja stapa u jednu te istu formulu.

I pored svih navedenih argumenata protiv, činjenica je da se ekonomija u poslednjih nekoliko decenija više nego ikad oslanja na matematičke temelje, ali i da se ovo priznanje može čuti od velikog broja ekonomista. Još ankete preduzete 80-ih godina 20. veka koje su imale za cilj da dublje istraže opštu prihvaćenost matematike u ekonomiji svedoče o tome da je ona ipak prisutna u zadovoljavajućem procentu u mnoštvu oblasti savremene ekonomije. Za primer navodimo jednu anketu[2] sprovedenu 1987. godine, a koja je obuhvatala profesore ekonomije sa 51 Univerziteta u Ujedinjenom Kraljevstvu. Naime, na pitanje da li je matematika doprinela povećanju reputacije ekonomske nauke u periodu od 1950. do 1987. godine, čak 44.8% profesora odgovorilo je potvrdno. Od tog perioda pa do danas zabeležen je porast obima izučavanja matematičkih disciplina na ekonomskim fakultetima širom sveta, premda ekonomisti ni tada a ni sada nisu smatrali da je znanje teorijske matematike jedan od presudnih faktora koji utiču na adekvatnu pripremu budućeg ekonomiste za rad u struci. Ono što vrlo dobro upotpunjuje poslednje navedenu činjenicu je upravo ranije u tekstu pomenuti skepticizam ekonomista vezan upravo za pitanje da li matematika uopšte obezbeđuje nove zaključke, ili isključivo stare zapisuje na malo komplikovaniji način. Naravno, čitava ova priča odnosila se na rad u kompanijama, gde mladi ekonomisti danas probleme rešavaju uz pomoć različitih softvera koji ih lišavaju bavljenja matematičkom osnovom problema koje rešavaju. U smislu akademskog izučavanja matematičkog aspekta ekonomije, kao i u smislu istraživačkog rada koji se sprovodi u cilju donošenja novih zaključaka i produbljivanja već postojećih ekonomskih znanja, izučavanje matematike je imperativ. Skoro 45% profesora ekonomije sa Britanskih Univerziteta koji su bili obuhvaćeni anketom izrazilo je slaganje sa tvrdnjom da su matematički modeli koji su u prošlosti prihvaćeni kao validni doneli veliki napredak u razumevanju ekonomskih problema kao i formiranju ideja za njihovo dalje izučavanje. Upravo ovo svedoči u korist

[2] Anketa je preduzeta od strane David Greenaway, profesora ekonomije na Univerzitetu u Notingemu, i polazna osnova za ovu anketu bila je upravo prvo pomenuta anketa koja je u SAD preduzeta od strane Herbert Grubel i Lawrence A.Boland. Anketa je sprovedena na 51 Univerzitetu u Ujedinjenom Kraljevstvu, i u odnosu na anketu iz SAD sadržala je minorne razlike. Cilj ankete je bio utvrđivanje kakav odnos profesori iz Ujedinjenog Kraljevstva imaju prema primeni matematike u ekonomiji, kao i poređenje rezultata sa rezultatima ankete sprovedene u SAD.

primene matematike, kao i da u budućnosti treba ozbiljno raditi na dodefinisanju nerazvijenih oblasti ekonomije, koje bi, uz malo truda i zalaganja, verovatno dovelo do stadijuma kada će matematika konačno moći da uđe u srž i ovih za sada neistraženih problema, i ne samo da ih adekvatno opiše već i omogući formiranje novih zaključaka i produbljivanje ekonomskih znanja.

Sa istraživačkog aspekta povezanost ekonomije sa matematikom je, jasno, i više nego značajna, i još u pomenutoj anketi je većina profesora iskazalo slaganje sa tvrdnjom da ekonomisti sa znanjem matematičkog modeliranja sigurno imaju veću mogućnost zapošljavanja na Univerzitetima, upravo zato što se od njih očekuje brži i efikasniji dolazak do novih i bitnih zaključaka. Jasno je da matematički modeli nose sa sobom izvesnu dozu elegancije, i najčešće mogućnost preciznijeg i kraćeg zapisa problema, a dosta ekonomista bi se složilo i sa time da matematički pojmovi unose izvesnu originalnost u tumačenje ponekad suvoparnih ekonomskih problema. [5]

Iz svega pomenutog je više nego očigledno da se matematici ne sme tako olako prepustiti rešavanje ekonomskih problema, već svako formiranje matematičkih modela u ekonomiji mora da bude sprovedeno tek posle obazrivog i detaljnog ispitivanja ekonomske podloge na koju će se matematika primeniti. Sve što bi bilo rađeno bez prethodne obimne pripreme verovatno bi dovelo do pogrešnih zaključaka, a bilo bi takođe potpuno nezrelo pokušavati oformiti univerzalni matematički model za čitavu ekonomiju. S druge strane, svako unapred osmišljeno modeliranje sigurno bi moglo obezbediti validne zaključke, a u slučaju savesnog baratanja matematičkim i ekonomskim znanjem skoro sigurno je da bi se došlo do zaključaka vrednih pomena i u za sada neistraženim ekonomskim disciplinama.

3. TEORIJA RACIONALNOG IZBORA

3.1. Uvod u teoriju racionalnog izbora

Teorija racionalnog izbora se bavi donošenjem odluka od strane pojedinca. Kako malo u kojoj životnoj situaciji čovek nije prinuđen da donosi odluke, ova teorija predstavlja osnovu za modeliranje ljudskog ponašanja, te kao takva ima ogromnu primenu u društvenim naukama, a prvenstveno u sociologiji, ekonomiji i politici. Polazna pretpostavka ove teorije jeste ta da će se u momentu kada pojedinac treba da donese odluku o nekoj svojoj budućoj akciji, između svih akcija koje su mu u datom momentu dostupne on uvek opredeljivati upravo za onu koja mu nosi najveću dobrobit, odnosno onu koja će u najvećoj meri zadovoljiti njegove interese. Racionalnost pojedinca ovde se upravo ogleda u konzistentnosti njegovih odluka da bira najbolje za sebe, ili bolje rečeno, da se uvek odlučuje za delovanje koje u cilju ima maksimizaciju potencijalnih beneficija, odnosno minimizaciju nepovoljnosti koje donesena odluka može sa sobom nositi. Naravno, koncept racionalnosti je svakako aproksimacija realnog ponašanja ljudskog bića, jer u zavisnosti od mentalnog sklopa neke osobe ono ponekad može biti i iracionalno. No, ipak, pokazalo se da je ovakva aproksimacija dovoljno dobra da objasni reakciju pojedinca suočenog sa konkretnim izborom.

Teorija racionalnog izbora zasniva se na modelu koji sadrži dve komponente: jednu komponentu čine sve akcije koje su, pod različitim okolnostima, dostupne donosiocu odluke, dok drugu komponentu predstavljaju upravo preferencije pojedinca. Bilo kakva novonastala situacija uzrokuje „sužavanje" skupa svih mogućih akcija samo na one koje se pod datim okolnostima mogu realizovati. Tada iz ovog podskupa svih mogućih akcija, pojedinac bira onu koja će maksimizirati njegovo zadovoljstvo. Iz navedene priče je sasvim jasno da ovako prezentovana teorija racionalnog izbora predstavlja osnovu mnogih političkih pojava – nauku o interesnim grupama, glasanju na izborima, kao i formiranju koalicija između političkih partija.

Posmatrano sa ekonomskog stanovišta, moglo bi se reći da teorija racionalnog izbora i neki njeni varijeteti predstavljaju osnovnu pretpostavku čitave neoklasične ekonomije. Još od davnina su neoklasični ekonomisti pretpostavljali ponašanje pojedinca u skladu sa maksimizacijom njegove sreće, ali se uglavnom nailazilo na prepreke kada je to na neki način trebalo zapisati. Jasno je da je u ekonomskom svetu pomenuti skup svih mogućih akcija upravo skup ekonomskih dobara (npr. više proizvođača na tržište plasira isti proizvod po različitim cenama, a pojedinac treba da se opredeli za jedan), dok podskup predstavljaju upravo ona dobra koje u datoj finansijskoj situaciji pojedinac sebi može priuštiti. Preferencije pojedinca direktno su vezane za budžet kojim raspolaže, a koji želi oštetiti najmanje moguće, a da pritom kupi proizvod onog proizvođača koji zadovoljava sve njegove potrebe. Posmatrajući sa stanovišta alokacije resursa, osim što sužava skup mogućih rešenja (odluka), pretpostavka o racionalnosti pruža kriterijum za ocenu efikasnosti ekonomskih sistema. Ukoliko neki ekonomski sistem donosi mogućnost da jedan više gubi nego što drugi dobija, onda taj sistem ne funkcioniše dobro. [7, 11]

Logično pitanje koje se postavlja je kako definisati preferencije pojedinca. Posmatrajmo primer osobe koja svakodnevno odlazi na ručak u restoran. Neka ta osoba svaki put kada su ne meniju jela $\{a, b\}$ bira isključivo jelo a, dok svaki put kada meni osim pomenuta dva obroka sadrži i obrok c, odnosno u slučaju da je meni oblika $\{a, b, c\}$, osoba bira neko od jela a ili c. Ovu konstantnost izbora jela a u odnosu na jelo b u situaciji kada su ta dva jela jedina ponuđena tumačimo kao preferiranje jela a u odnosu na jelo b od strane osobe koja bira svoj obrok. U situaciji kada je skup dostupnih jela $\{a, b, c\}$, i pojedinac stalno bira neko od jela $\{a, c\}$ možemo zaključiti da je pojedinac najverovatnije indiferentan kada su u pitanju ova dva jela, odnosno da jednako voli oba. Ipak, jasno je da kada uporedimo njegovu želju za jelom c sa njegovom željom za jelom b, donosimo zaključak da on preferira jelo c u odnosu na b. [13]

Jasno je da ekonomija kao nauka koja se bavi ponašanjem pojedinca u cilju maksimizacije njegovog profita obiluje situacijama sličnim ovoj koja je objašnjena u prethodnom primeru. Upravo tu se vidi uloga ljudskog faktora u ovoj nauci, koja, kao što je ranije pomenuto, predstavlja polaznu tačku skepticizma da matematika ne može dobro opisati ekonomske pojave. Ipak, u sledećih nekoliko strana biće prikazan način na koji je čitava teorija racionalnog izbora matematički prikazana, čime je u velikoj meri olakšan njen zapis, posle čega je ova teorija doživela još veću primenu ne samo u ekonomiji već i u drugim ranije pomenutim naukama. U nastavku rada bavićemo se preferencijama i korisnošću pod pretpostavkom racionalnosti potrošača.

3.2. Relacije preferencije

U ekonomiji i političkim naukama se preferencije pojedinaca posmatraju kroz binarne relacije. To znači da iza rečenice tipa “Preferiram vožnju bicikla.”, uvek sledi potpitanje “U odnosu na šta?”. Preferencije uvek moraju imati prizvuk poređenja između dve ili više opcija, pa ih je samim tim nezamislivo diskutovati ukoliko ne postoji mogućnost izbora između dobara. Ipak, izbor bez preferencija može da postoji, i najbanalniji primer je izbor koji se izvrši na osnovu npr. bacanja novčića, kada odluka pojedinca isključivo zavisi od strane koja će se pokazati kada novčić padne. [1]

Pozabavimo se sada matematičkom interpretacijom ralacija preferencije:

Skup je aksiomatski pojam za koji se ne daje eksplicitna definicija. Intuitivno, može se reći da je skup kolekcija objekata koji se još nazivaju i elementi skupa.
Osnovni odnos između skupa i elemenata je pripadanje. Da je x elemenat skupa X zapisujemo oznakom
$$x \in X$$
i kažemo da x pripada skupu X.

Definicija 3.2.1: [16] Direktan proizvod skupova $X_1, X_2 \dots, X_n$ u oznaci $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ je skup uređenih n – torki sa koordinatama iz odgovarajućih skupova:
$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \mid x_i \in X_i,\ i = 1,2, \dots n\}.$$
Ako je $X_1 = X_2 = \cdots = X_n$, onda se odgovarajući direktan proizvod označava sa X^n.

Odnosi između elemenata nekog skupa se opisuju relacijama. Relacije mogu biti unarne, binarne,... , n - arne, $n \in \mathbb{N}$, u zavisnosti od toga koliki je broj elemenata čiji odnos relacija prikazuje.

Definicija 3.2.2: [16] Ako je X neprazan skup i $n \in \mathbb{N}$, onda je podskup ρ iz X^n n - arna relacija na X. Broj n naziva se arnost relacije ρ.
Jasno, binarna relacija ρ na skupu X je podskup iz X^2, odnosno ρ ∈ X^2. Ako je $(x, y) \in \rho$ kažemo da je x u relaciji ρ sa y. To se označava i sa $x\rho y$.

Definicija 3.2.3: [16] Relacija ρ na skupu X je:
1) refleksivna, ako ispunjava uslov $\forall\, x \in X,\ x\rho x$,
2) simetrična, ako ispunjava uslov $\forall\, x, y \in X,\ x\rho y \Rightarrow y\rho x$,
3) antisimetrična, ako ispunjava uslov $\forall\, x, y \in X,\ x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$,
4) tranzitivna, ako ispunjava uslov $\forall\, x, y, z \in X,\ x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$

Za relaciju na skupu X za koju važe osobine $1), 2), 4)$kažemo da je ona relacija ekvivalencije. Za relaciju na skupu X za koju važe osobine $1), 3), 4)$ kažemo da je ona relacija poretka.

Definicija 3.2.4: [9] Relacija preferencije $\succcurlyeq$ je binarna relacija na skupu X koja ima osobine:

1) $\forall\, x \in X,\ x \succcurlyeq x$ (refleksivnost)
2) $\forall\, x, y \in X,\ x \succcurlyeq y$ ili $x \preccurlyeq y$ (kompletnost)
3) $\forall\, x, y, z \in X,\ x \succcurlyeq y, y \succcurlyeq z\ \Rightarrow x \succcurlyeq z$ (tranzitivnost).

Primer 3.2.1: [9] Neka je X skup realnih brojeva, odnosno $X = \mathbb{R}$. Pokazujemo da je relacija $\geq$ relacija preferencije na tom skupu.
Osobina refleksivnosti je očigledno zadovoljena jer za svaki realan broj x važi da je $x \geq x$. Kako za svaka dva realna broja x i y važi $x \geq y$ ili $y \geq x$ važi i osobina kompletnosti. Tranzitivnost takođe očigledno važi: $x \geq y, y \geq z\ \Rightarrow x \geq z$.

Primer 3.2.2: [9] Neka je $X = \mathbb{R}^2$. Definišemo relaciju $\geq$ na sledeći način:

$$x \geq y \quad \Leftrightarrow \quad x_i \geq y_i,\ i = 1,2.$$

Ispitajmo da li je $\geq$ relacija preferencije na X:
Osobina refleksivnosti važi jer za svaki vektor $x \in \mathbb{R}^2$ važi da je $x \geq x$. Isto važi i za osobinu tranzitivnosti. Međutim, kompletnost u ovom slučaju nije zadovoljena što se lako vidi ukoliko izaberemo na primer vektore $x = (1,2), y = (7,1)$. Ova dva vektora su očigledno neuporediva ako je relacija $\geq$ definisana na gore opisan način.

Primer 3.2.3: [1] Posmatrajmo situaciju u kojoj kupac treba da se odluči za kupovinu automobila. Pretpostavimo da on preferira BMW nad Fordom jer je brži, zatim Mercedes nad BMW-om jer je veći, i na kraju Ford nad Mercedesom jer manje zagađuje životnu sredinu. Osobina tranzitivnosti ne može da se iskoristi u ovom slučaju jer kupac stvara preferencije na osnovu potpuno različitih kriterijuma, pa se ne može zaključiti koji automobil on zaista preferira. U ovakvoj situaciji kupac mora odlučiti šta je za njega najznačajnija karakteristika koju želi da njegov automobil poseduje, a tek onda može da uporedi 3 automobila. Na primer, ako se odluči da je za njega najbitnije da ne zagađuje životnu sredinu onda mora da razmotri kako u ovoj sferi funkcionišu automobil marke BMW kako bi ga uporedio sa Fordom, za koji je ranije doneo zaključak da je po ovom pitanju bolji od Mercedesa.

Osobine kompletnosti i tranzitivnosti sa sobom nose pretpostavku da pojedinac uvek zna koju od dve korpe dobara preferira, kao i da su njegove preferencije konzistentne i van okvira u kom se razmatraju samo dva dobra. Relacije sa ovim osobinama nazivaju se **racionalne preferencije.**

Intuitivno, izraz oblika $x \succcurlyeq y$, gde su x i y npr. dve vrste robe, možemo interpretirati tako što kažemo da pojedinac više voli robu x od robe y, ili obe vrste robe preferira jednako. Ukoliko želimo da kažemo da pojedinac striktno više voli robu x od robe y, matematički to zapisujemo pomoću relacije striktne preferencije $\succ$. S druge strane, situacija u kojoj pojedinac voli obe vrste robe jednako, iskazuje se pomoću relacije indiferentnosti $\sim$.

Definicija 3.2.5: [9] Relaciju striktne preferencije $\succ$ definišemo na sledeći način:

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succcurlyeq y\ \wedge\ \neg(\,y \succcurlyeq x).$$

Definicija 3.2.6: [9] Relaciju indiferetnosti $\sim$ definišemo na sledeći način:

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succcurlyeq y\ \wedge\ \ y \succcurlyeq x.$$

Pretpostavimo sada da $x, y, z \in X$ predstavljaju korpe dobara, odnosno moguće izbore koje pojedinac ima na raspolaganju. Neke osobine koje relacija preferencije $\succcurlyeq$ na skupu X može imati su:

- **Monotonost** $(\forall x, y \in X,\ x \geq y \ \Rightarrow \ x \succcurlyeq y)$
- **Striktna monotonost** $(\forall x, y \in X,\ x > y \ \Rightarrow \ x \succ y)$ - ekonomska interpretacija monotonosti i striktne monotonosti mogla bi biti "što više to bolje" i monotonost preferencije je zadovoljena kad god se radi o poželjnim dobrima, kao što je npr. novac ili potrošna dobra.
- **Lokalna nestacionarnost** ($\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0,$ postoji izbor $y \in X$ takav da važi $\|x - y\| < \varepsilon$ i $y \succ x$) - ova osobina znači da uvek postoji korpa dobara koju pojedinac preferira „malo više" od postojeće.
- **Konveksnost** $(\forall\, x, y, z \in X,\ x \succcurlyeq z \ \wedge y \succcurlyeq z \ \Rightarrow tx + (1-t)y \succcurlyeq z,\ t \in (0,1))$
- **Striktna konveksnost** $(\forall\, x, y, z \in X,\ x \succcurlyeq z \ \wedge y \succcurlyeq z \ \Rightarrow tx + (1-t)y \succ z,\ t \in (0,1))$ – ako preferiramo korpe x i y u odnosu na korpu dobara z, onda i sve linearne kombinacije x i y preferiramo u odnosu na z. [9]

Da bismo definisali još jednu veoma bitnu osobinu relacija preferencije – neprekidnost, potrebno je prvo definisati pojam otvorenog i zatvorenog skupa.

Definicija 3.2.7: [4] Otvoren skup je skup koji je okolina svake svoje tačke.
Primeri otvorenih skupova su: $(a, b), (-\infty, a), (b, +\infty)$ itd.

Definicija 3.2.8: [4] Zatvoren skup je skup čiji je komplement otvoren skup.

Primer 3.2.4: [4] $[a, b]$ je zatvoren skup jer je $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \ \cup (b, +\infty)$, a to je unija 2 otvorena skupa, što je takođe otvoren skup.
$[x, +\infty)$ je zatvoren skup jer $\mathbb{R} \setminus [x, +\infty) = (-\infty, x)$, a to je otvoren skup.
$(-\infty, x]$ je zatvoren skup jer $\mathbb{R} \setminus (-\infty, x].\ = (x, +\infty)$, što je ponovo otvoren skup.

Sada ćemo za $\forall x \in X$ definisati skupove:
$U_x = \{y \in X, y \succcurlyeq x\}$ - skup izbora dobrih bar koliko i x
$L_x = \{y \in X, x \succcurlyeq y\}$ - skup izbora ne boljih od x

Definicija 3.2.9: [9] Relacija preferencije $\succcurlyeq$ na skupu X je neprekidna ako važi $\forall x \in X$, U_x i L_x su zatvoreni skupovi.

Primer 3.2.5: [9] Posmatrajmo relaciju $\geq$ na skupu $\mathbb{R}$. Za $x \in \mathbb{R}$ biće da je $U_x = [x, +\infty)$, a $L_x = (-\infty, x]$. Kako su oba ova skupa zatvorena, relacija $\geq$ jeste neprekidna na skupu realnih brojeva.

Pomenuta priča o relacijama koje prikazuju preferencije donosioca odluke samo su jedan način na koji se može matematički modelirati fenomen razmatranja više različitih dobara koja su u ponudi u datom momentu. Alternativni način prikaza pomenute dileme jeste pomoću takozvane korisnosti. U ovom slučaju se o preferencijama i dalje razmišlja na potpuno isti način, no, sada je ideja povezati različita dobra sa nekim brojevima (koji predstavljaju korisnost tih dobara), tako da veći broj označava veću preferenciju donosioca odluke prema dobru koje ga nosi. Ovaj način prikaza je elegantniji jer ne donosi previše komplikacija sa zapisivanjem uređenih parova koje relacije iziskuju, a kako se može predstaviti i grafički, stvara jasniju sliku o onome što se zapravo dešava.

3.3. Funkcije korisnosti

Pridruživanje brojeva, odnosno korisnosti, korpama dobara vrši se pomoću funkcija koje se jednim imenom nazivaju funkcije korisnosti.

Definicija 3.3.1: [9] Neka je $\succcurlyeq$ relacija preferencije na skupu X. Funkcija $u: X \to \mathbb{R}$ za koju važi

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

naziva se funkcija korisnosti (utilitarna funkcija) relacije preferencije.

Jasno,
$$x \succ y \Leftrightarrow u(x) > u(y)$$
$$x \sim y \Leftrightarrow u(x) = u(y).$$

Pretpostavka o racionalnosti relacije $\succcurlyeq$ nam dozvoljava da dobra rangiramo od onoga koje potrošač voli najmanje prema onom koje voli najviše. Ovo je tzv. ordinalna komponenta funkcije korisnosti. Na primer, ako imamo 10 dobara, možemo ih rangirati tako što ćemo onom dobru koje najviše volimo dodeliti korisnost $u(x) = 10$, drugom omiljenom $u(x) = 9$, zatim trećem $u(x) = 8$ itd. do poslednjeg tj. najmanje željenog. Treba imati u vidu da to što je korisnost jednog dobra 10, a drugog npr. 5 to ne znači automatski da prvo dobro volimo duplo više od drugog. Jedino što nas kod korisnosti zanima jeste koji je broj veći (manji) od kog, jer nam to govori da li investitor preferira više jedno dobro ili drugo, ali nam ti brojevi ne daju informaciju koliko puta više (manje) osoba voli jedno dobro od drugog. [8]

Da li sve relacije preferencije imaju funkcije korisnosti? Odgovor na ovo pitanje je ne. Da bi relacija preferencije imala funkciju korisnosti, određeni uslovi moraju biti zadovoljeni.

Definicija 3.3.2: [9] Elemenat $a \in A \subseteq X$ je minimalan element za relaciju preferencije na skupu A ako $\forall x \in A$ važi $x \succcurlyeq a$.

Lema 3.3.1: [9] Neka je $\succcurlyeq$ relacija preferencije na skupu X. Svaki konačan[3] podskup $A \subseteq X$ ima minimalan element relacije $\succcurlyeq$.

Dokaz: Dokaz ove leme se radi pomoću matematičke indukcije.

Baza indukcije: Prvo posmatramo slučaj kada je kardinalni broj[4] skupa A jednak 1, odnosno $|A| = 1$. Jasno, $a \in A$ je tada minimalan element skupa A, obzirom da važi $a \succcurlyeq a$.

Indukcijska hipoteza: Sada uvedimo hipotezu za skup čiji je kardinalni broj n, odnosno pretpostavićemo da za $|A| = n$ važi da postoji minimalan element $a \in A$, tj. $\forall x \in A$ važi $x \succcurlyeq a$.

Indukcijski korak: Posmatrajmo sada situaciju $|A| = n + 1$. Skup A tada možemo zapisati u obliku

$$A = \{b\} \cup (A \setminus \{b\}).$$

Jasno, $|A \setminus \{b\}| = n$, te ovaj skup na osnovu indukcijske pretpostavke ima minimalan element koji ćemo ponovo označiti sa a. Šta je sada sa odnosom elemenata a i b? Ukoliko važi $b \succcurlyeq a$, jasno da je onda a minimalan element čitavog skupa A, no ako je $a \succcurlyeq b$, onda je baš b minimalan element skupa A. U oba slučaja, skup A ima minimalni element, a upravo to smo želeli pokazati. Δ

Teorema 3.3.1: [9] Ako je $\succcurlyeq$ relacija preferencije na konačnom skupu X, tada relacija $\succcurlyeq$ ima funkciju korisnosti čije su vrednosti u skupu prirodnih brojeva.

[3] [4] Skup je konačan ukoliko postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da su skupovi A i $\{1,2,\dots,n\}$ ekvivalentni, odnosno ukoliko postoji bijekcija koja jedan preslikava u drugi.

[4] [4] Kardinalni broj konačnog skupa jednak je broju elemenata skupa $\{1,2,\dots,n\}$ na koji se taj skup može bijektivno preslikati.

Dokaz: Obzirom da je skup X konačan, na osnovu prethodne leme znamo da on ima minimalan element. Neka je X_1 skup minimalnih elemenata skupa X. Dodelimo svim ovim elementima korisnost 1, tj. $\forall x \in X_1, u(x) = 1$.
Neka je dalje X_2 skup minimalnih elemenata skupa $X \setminus X_1$. Sada, neka je $\forall x \in X_2$, $u(x) = 2$.
Potom, sa X_3 označićemo skup minimalnih elemenata skupa $X \setminus (X_1 \cup X_2)$, i neka $\forall x \in X_3$, $u(x) = 3$.
Nastavljamo dalje dok ne istrošimo sve elemente skupa X. Neka je poslednji skup u nizu $X_{k,}$ $|X_k| \leq |X|$ i neka je on skup minimalnih elemenata skupa $X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_{k-1})$. Svakom elementu $x \in X_k$ dodelićemo korisnost $u(x) = k$.
Jasno, skupovi $X_1, \ldots, X_k$ su disjunktni, a kako je $X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$, jasno je da smo formirali funkciju koja svim elementima skupa X dodeljuje prirodne brojeve kao njihove korisnosti. Δ

Teorema 3.3.2: [9] Ako je $\succcurlyeq$ relacija preferencije na prebrojivom[5] skupu X, tada relacija $\succcurlyeq$ ima funkciju korisnosti čije su vrednosti u intervalu $(-1,1)$.
Dokaz: Obzirom da je skup X prebrojiv, njegove elemente možemo poređati u niz $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.
Neka je npr. $u(x_1) = 0$.
Zatim, neka elementi $x_2, \ldots, x_n$ imaju korisnost u skupu $(-1,1)$, odnosno neka važi $u(x_i) \in (-1,1)$.
Šta se dešava sa elementom x_{n+1}? Postoje dve mogućnosti:

1) $\exists j \in \{1,2, \ldots, n\}$ tako da je $x_j \sim x_{n+1}$; tada je $u(x_{n+1}) = u(x_j)$.
2) $\nexists j \in \{1,2, \ldots, n\}$ tako da je $x_j \sim x_{n+1}$;

U slučaju 1) je jasno da će se i korisnost elementa x_{n+1} naći u intervalu $(-1,1)$. Za slučaj 2) definisaćemo sledeća dva skupa:

$$D = \left\{u(x_j), j \in \left\{1,2, \ldots, n | x_{n+1} \succ x_j\right\}\right\} \cup \{-1\}$$

$$G = \left\{u(x_j), j \in \left\{1,2, \ldots, n | x_j \succ x_{n+1}\right\}\right\} \cup \{1\}$$

(elemente -1 i 1 ubacujemo u skupove kako bismo bili sigurni da su neprazni).

Neka je $d = maxD, g = minG$. Jasno, $u(x_{n+1}) \in (d, g) \in (-1,1)$. Kako ovo važi $\forall n \in \mathbb{N}$, tvrđenje je dokazano. Δ

Teorema 3.3.3: [9] Svaka neprekidna relacija preferencije na topološkom prostoru sa prebrojivom bazom otvorenih skupova[6] može se prikazati neprekidnom funkcijom korisnosti.

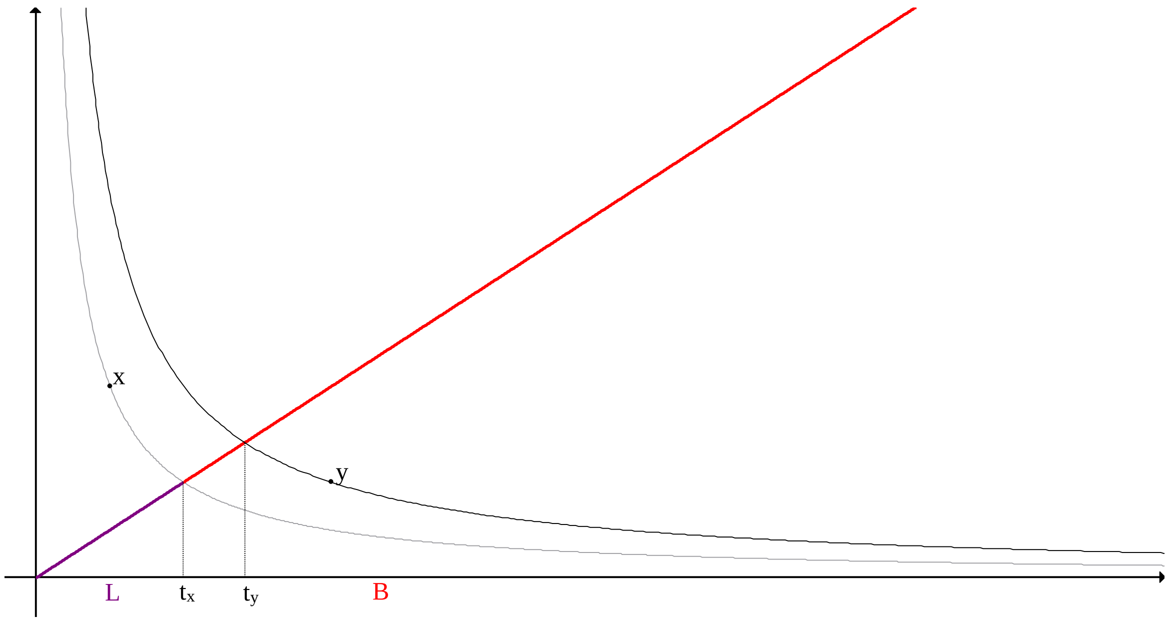
Teorema 3.3.4: [9] Striktno monotona i neprekidna relacija preferencije na $\mathbb{R}_+^n$ ima funkciju korisnosti.
Dokaz: Neka je vektor $e \in \mathbb{R}_+^n$ dat sa $e = (1,1, \ldots, 1)$, i neka svakom izboru x pridružujemo vrednost $u(x) \in \mathbb{R}$ tako da važi $x \sim u(x) \cdot e$. Definišimo skupove

$$B: = \{t \in \mathbb{R}_+ : t \cdot e \succcurlyeq x\}$$

$$L: = \{t \in \mathbb{R}_+ : x \succcurlyeq t \cdot e\}.$$

Za $t > max\{x_1, \ldots x_n\}$, gde su $x_1, \ldots x_n$ komponente vektora x, skup B nije prazan. Skup L je neprazan jer 0 sigurno pripada ovom skupu. Kako je relacija preferencije neprekidna, skupovi B i L su zatvoreni (navodimo bez dokaza) te odatle sledi $B \cap L = \{t_x\}$. Onda imamo situaciju da je $t_x \cdot e \succcurlyeq x$ i $x \succcurlyeq t_x \cdot e$, a odatle jasno sledi $x \sim t_x \cdot e$. Prema tome, $u(x) = t_x$ (slika 3.3.1 ilustruje situaciju za $n = 2$).

[5] [4] Skup je prebrojiv ako je ekvivalentan skupu $\mathbb{N}$.
[6] [18] Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. $\mathcal{B} \subset P(X)$ gde je sa $P(X)$ označen partitivni skup skupa X naziva se baza topologije $\mathcal{O}$ akko 1) $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ tj. elementi baze su otvoreni skupovi, 2) svaki otvoren skup $O \subset \mathcal{O}$ može se prikazati kao unija neke potfamilije familije $\mathcal{B}$ tj. postoji potfamilija $\{B_i : i \in I\} \subset \mathcal{B}$ tako da je $O = \bigcup_{i \in I} B_i$.



Slika 3.3.1: Slučaj kada je $n = 2$; ljubičasto-crvena linija nastala je kada se vektor $e = (1,1)$ množi sa različitim vrednostima t_x

Da li je ovako definisana funkcija zaista funkcija korisnosti? Očigledno jeste, jer je sa slike jasno da $y \succcurlyeq x \Leftrightarrow u(y) \geq u(x)$ jer je $t_y \geq t_x$.   Δ

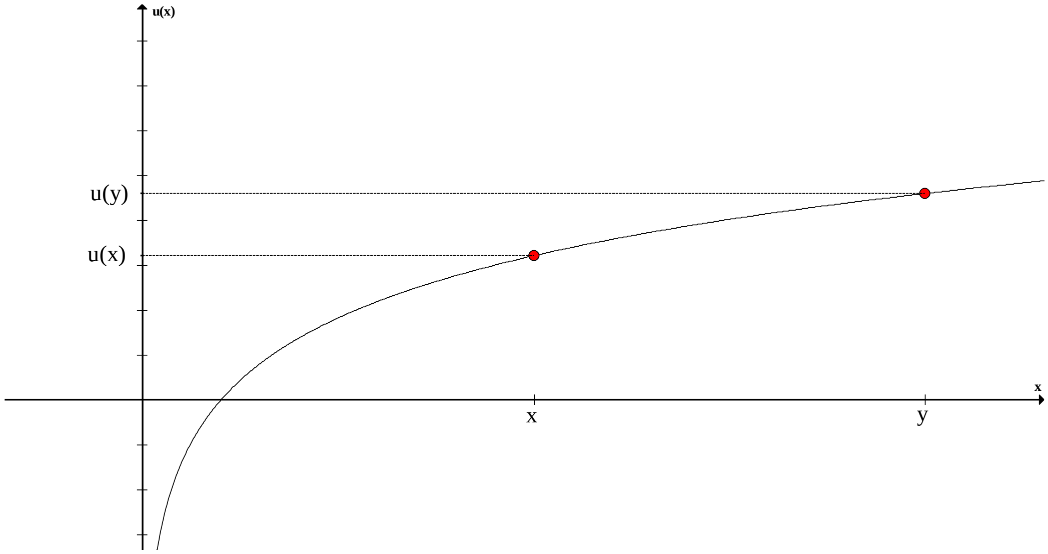
Funkcija korisnosti, ukoliko postoji, može se smatrati karakteristikom pojedinca zato što opisuje njegov lični način vrednovanja kapitala. Međutim, može se govoriti i o funkciji korisnosti kompanije. U tom slučaju, ona opisuje preference kompanije. Sve funkcije korisnosti su:

- dva puta diferencijabilne funkcije
- monotone[7]
- konkavne (drugi izvod negativan)

Rast funkcije korisnosti nam omogućava da dobrima koja preferiramo više dodeljujemo veće brojeve. Na primer, neka je data funkcija korisnosti $u(x)$. Ukoliko su x i y dve količine novca koje možemo dobiti na lutriji, i važi $y \geq x$ tada će, jasno, veća korisnost odgovarati količini novca y.

Svaka funkcija koja zadovoljava gore pomenute osobine može biti funkcija korisnosti. Različiti subjekti naravno mogu imati različite funkcije korisnosti jer su one direktno vezane za njihovu toleranciju prema riziku i uopšte, za njihovo poimanje šta je više a šta manje vredno za njih. [8]

[7] Većina najpoznatijih funkcija korisnosti su monotono rastuće funkcije. Ipak, neke od njih sadrže tačke prevoja, kao što će biti prikazano u odeljku 3.4., a takve funkcije korisnosti se razmatraju samo po nekim svojim segmentima, najčešće baš tamo gde su rastuće.



Slika 3.3.2: Ilustracija osobine funkcija korisnosti da većim iznosima dodeljuje veće vrednosti, isto kao što će se pojedinac pre odlučiti za veći iznos novca nego za manji

Osobina konkavnosti vezana je za priču o riziku. Njena posledica detaljnije će biti objašnjena u primeru 3.3.1.

Definicija 3.3.3: [9] Funkcija $u: D \to \mathbb{R}$ je konkavna ako važi:

$\forall x, y \in D, x \neq y,\ \forall \alpha \in [0,1],\ u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y).$

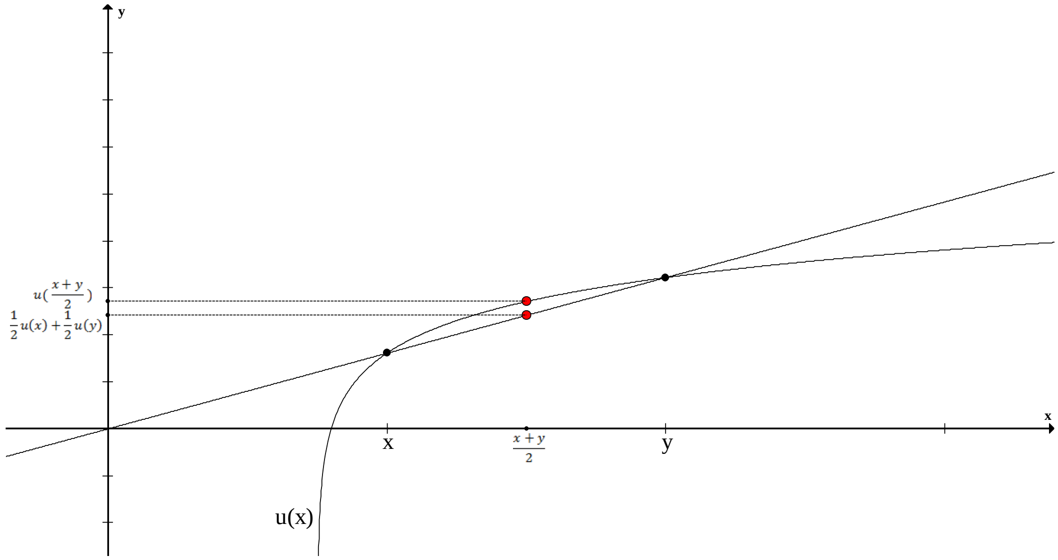
Primer 3.3.1: [8] Pretpostavimo da investitor ima mogućnost ulaganja u jedan od dva projekta, i neka je njegova funkcija korisnosti u konkavna. Neka važi sledeće:

1) projekat 1 mu sa sigurnošću donosi količinu novca $Z = \frac{x+y}{2}$
2) projekat 2 mu donosi količinu novca x sa verovatnoćom 0.5, ili količinu novca y takođe sa verovatnoćom 0.5. Ovo možemo prikazati slučajnom promenljivom $Y\!:\begin{pmatrix} x & y \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$**.** Jasno, $E(Y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = Z$.

Korisnost prvog projekta je $u(Z) = u(\frac{x+y}{2})$, dok je očekivana korisnost drugog projekta $E\big(u(Y)\big) = \frac{1}{2}u(x) + \frac{1}{2}u(y)$. Zbog konkavnosti funkcije u biće

$$u(\frac{x+y}{2}) \geq \frac{1}{2}u(x) + \frac{1}{2}u(y).$$

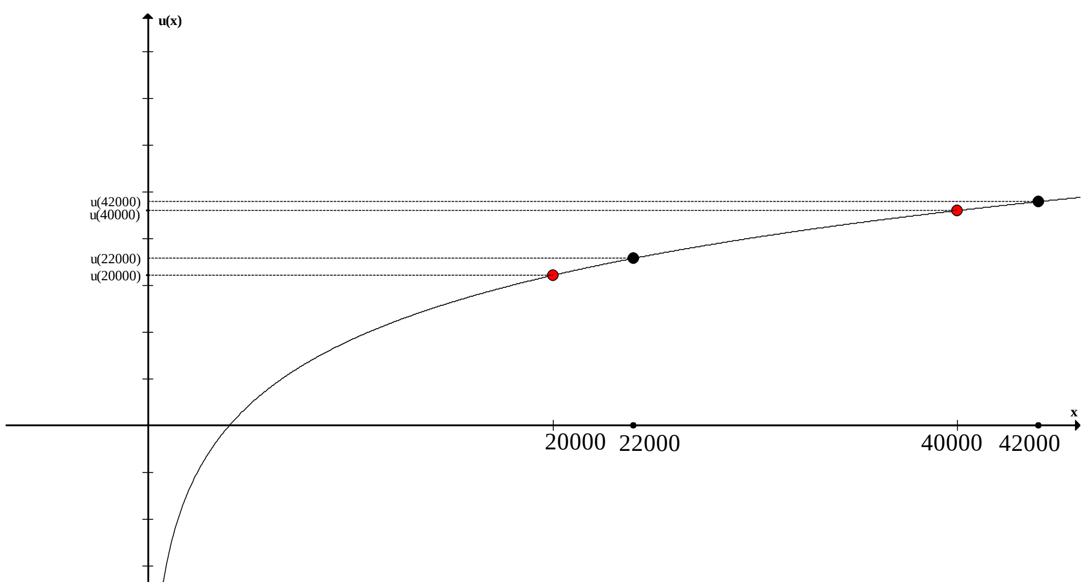
Očigledno, osobina konkavnosti pretpostavlja veću korisnost sigurnog događaja od očekivane korisnosti događaja čija je očekivana vrednost jednaka upravo sigurnom događaju, što znači da investitor ima veću preferenciju prema sigurnom bogatstvu, odnosno da je on rizik odbojan. Ova osobina prikazana je na slici 3.3.3.



Slika 3.3.3: Konkavnost funkcije korisnosti označava odbojnost prema riziku

Investitor koji je indiferentan između ponuda 1) i 2) je rizik neutralan, dok je investitor čija je funkcija korisnosti konveksna sklon riziku.

Još jedna posledica pomenutih osobina funkcije korisnosti vezana je za takozvanu marginalnu korisnost. Marginalna korisnost predstavlja prvi izvod funkcije korisnosti i ona meri promenu korisnosti sa povećanjem bogatstva, odnosno potrošnog dobra. Kako je konkavnost posledica negativnosti drugog izvoda funkcije korisnosti, jasno je da to znači opadanje funkcije prvog izvoda, odnosno opadajuću marginalnu korisnost. Drugim rečima, kada je bogatstvo malo, onda dodavanje još jedne jedinice bogatstva znači mnogo više nego kada je bogatstvo veliko. Na primer, dvojici radnika fabrike povećamo platu za 2000 dinara, to će mnogo više značiti radniku čija je dotadašnja plata bila 20000 dinara nego onom čija plata je bila 40000. [8]



Sl.3.3.4: Opadajuća granična korisnost – situacija kada siromašnijem pojedincu povećanje prihoda znači mnogo više nego to isto povećanje bogatijem

Funkcije korisnosti za različite potrošače ili kompanije u opštem slučaju ne moraju biti iste, a čak ni za preferencije jednog te istog potrošača ne mora važiti da se one mogu prikazati samo jednom funkcijom korisnosti. To ilustruje sledeća teorema.

Teorema 3.3.5: [9] Ako je u funkcija korisnosti za relaciju preferencije $\succcurlyeq$ na skupu X, tada je za svaku strogo rastuću realnu funkciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija v određena sa $v(x) = f(u(x))$ takođe funkcija korisnosti za tu relaciju preferencije.

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
x \succcurlyeq y &\Leftrightarrow u(x) \geq u(y) && \text{(definicija funkcije korisnosti)} \\
&\Leftrightarrow f\big(u(x)\big) \geq f\big(u(y)\big) && (f \text{ je rastuća funkcija)} \\
&\Leftrightarrow v(x) \geq v(y)
\end{aligned}
$$

Jasno, $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow v(x) \geq v(y)$, što je i trebalo pokazati. Δ

Definicija 3.3.4: [9] Neka je $u: X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija korisnosti. Tada se svaka nivo kriva funkcije (skup svih tačaka iz domena koje se preslikavaju u istu vrednost) naziva indiferentna kriva relacije preferencije određene datom funkcijom korisnosti. Indiferentna kriva određena vrednošću c data je sa

$$I_c = \{x \in X |\, u(x) = c\}.$$

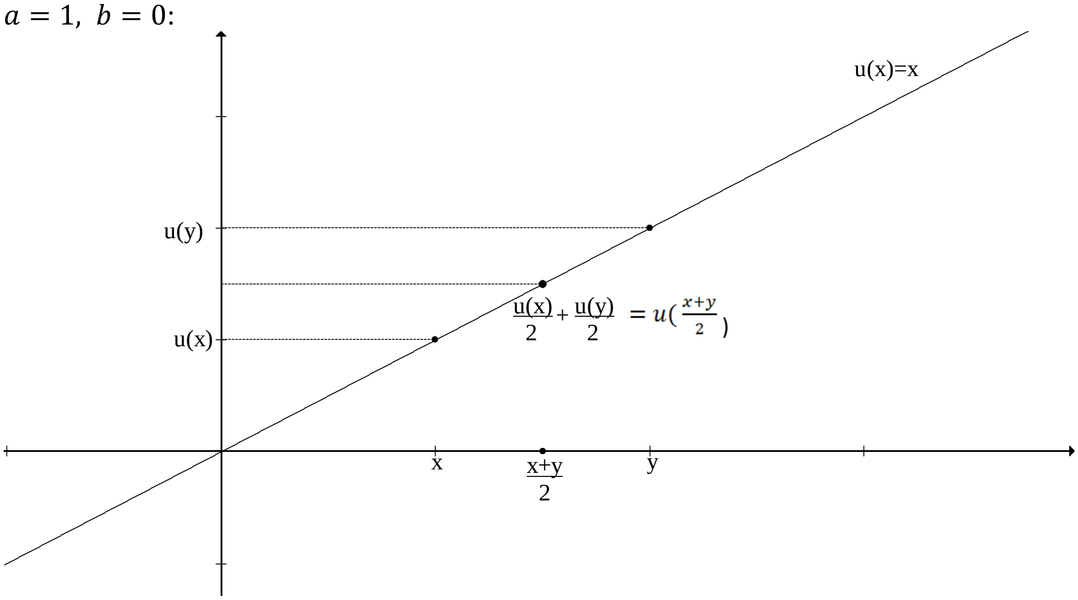
3.4. Neki klasični primeri funkcija korisnosti

3.4.1 Linearna funkcija korisnosti [8]

Linearna funkcija korisnosti ima oblik $u(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$ i njena osnovna karakteristika je neutralnost prema riziku. Naime, za ovako definisanu funkciju korisnosti važi

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y), \forall \alpha \in [0,1]$$

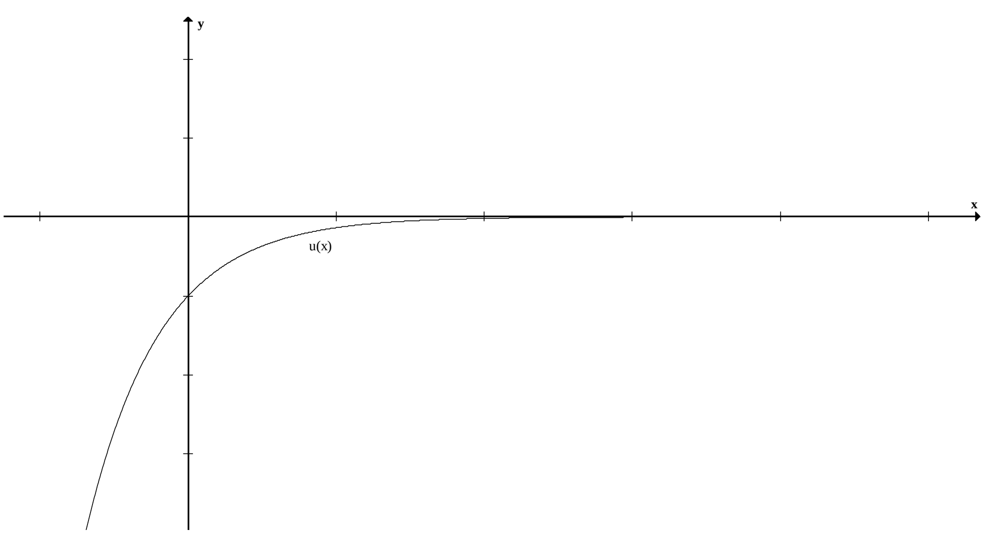
Stoga, investitor koji je rizik neutralan ima linearnu funkciju korisnosti.
Prikazaćemo kako izgleda situacija iz primera 3.3.1 u slučaju da je funkcija korisnosti linearna sa $a = 1,\ b = 0$:



Slika 3.4.1: Linearnu funkciju korisnosti oblika $u(x) = x$ koriste investitori koji su indiferentni prema riziku

3.4.2 Eksponencijalna funkcija korisnosti [8]

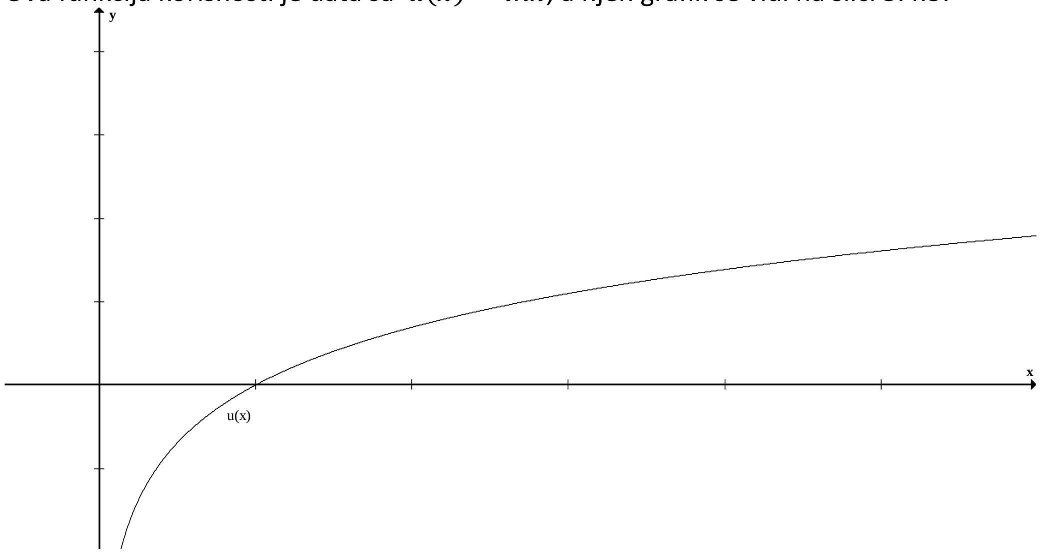
Opšti oblik ove funkcije korisnosti je $u(x) = -e^{-\alpha x}$, gde $\alpha > 0$. Na grafiku vidimo da su vrednosti ovako zadate funkcije korisnosti negativne. Ipak, jedino što nas zanima su upravo relativne vrednosti korisnosti, odnosno njihov poredak na osnovu koga utvrđujemo preferencije pojedinca.



Slika 3.4.2: Eksponencijalna funkcija korisnosti

3.4.3 Logaritamska funkcija korisnosti [8]

Ova funkcija korisnosti je data sa $u(x) = lnx$, a njen grafik se vidi na slici 3.4.3:

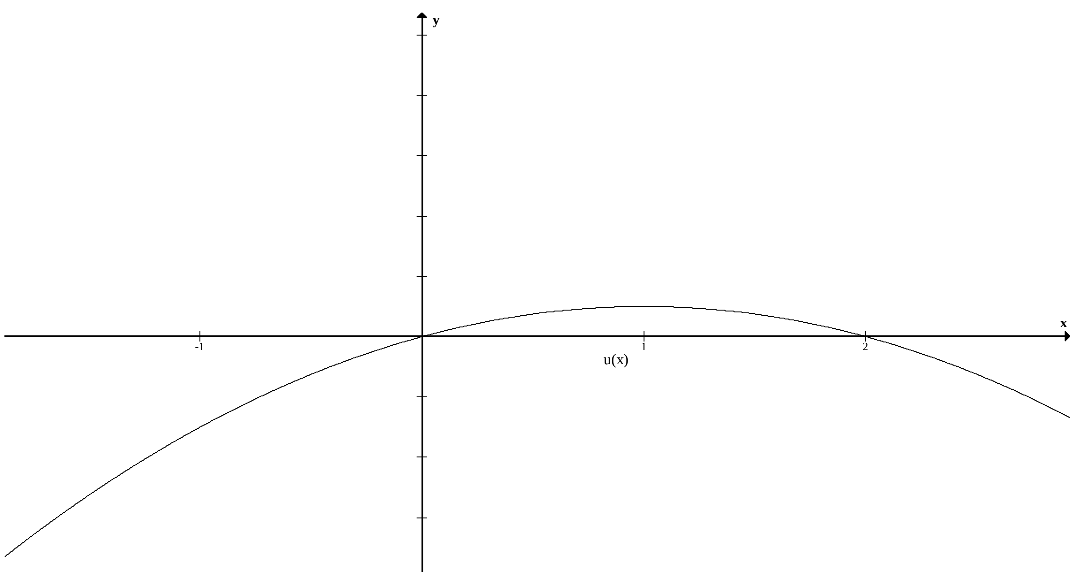


Slika 3.4.3: Logaritamska funkcija korisnosti

Treba obratiti pažnju da je ova funkcija definisana samo za $x > 0$. Na slici se vidi da je ovakva funkcija korisnosti vrlo rigorozna kada su u pitanju vrednosti nezavisne promenljive (dobra, bogatstva, očekivanog dobitka) bliske 0, a ovo se može tumačiti kao "uplašenost " investitora od ishoda i kojima ne profitira mnogo, ili čak gubi.

3.4.4. Kvadratna funkcija korisnosti [8]

Ova funkcija je oblika $u(x) = x - bx^2$, gde je $b > 0$, i definisana je samo za vrednosti $x < \frac{1}{2b}$. Na slici se vidi grafik ove funkcije za $b = \frac{1}{2}$.



Slika 3.4.4: Kvadratna funkcija korisnosti

3.5. Averzija prema riziku

Stepen rizik-averzije se za različite funkcije korisnosti može meriti tzv. magnitudama njihovih lukova, jer što je "oštriji" luk, to je averzija prema riziku veća. Jasno, najznačajniji kriterijum za merenje averzije svakako je drugi izvod funkcije.

Stepen averzije prema riziku meri se Arrow-Pratt koeficijentom apsolutne rizik-averzije koji se izračunava po formuli

$$A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Prvi izvod u ovoj formuli služi za tzv. normalizaciju, odnosno da bi ekvivalentne funkcije korisnosti imale isti koeficijent. U osnovi, Arrow-Pratt koeficijent pokazuje kako se stepen averzije prema riziku menja sa porastom bogatstva. Jasno, u velikom broju slučajeva sklonost riziku raste sa porastom bogatstva, odnosno i pojedinci i kompanije su više spremne za rizik ukoliko su finansijski sigurni. [8]

Pokušajmo izračunati Arrow – Pratt koeficijente za neke specifične funkcije korisnosti. Za eksponencijalnu funkciju $u(x) = -e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$ važi da je

$$u'(x) = \alpha e^{-\alpha x},$$

$$u''(x) = -\alpha^2 e^{-\alpha x}$$

pa koeficijent apsolutne averzije prema riziku iznosi $A(x) = \alpha$. Ovo znači da je kod eksponencijalne funkcije korisnosti averzija konstantna, bez obzira na bogatstvo pojedinca.

Za logaritamsku funkciju korisnosti $u(x) = lnx$, imamo sledeće rezultate

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$u''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

pa je odatle $A(x) = \frac{1}{x}$, i baš tu se oslikava ranije pomenuta osobina smanjenja averzije sa porastom sigurnosti.

Za linearnu funkciju korisnosti datu sa $u(x) = ax + b$ važi da je $A(x) = 0$, što se poklapa sa ranijim zaključkom da su subjekti koji imaju ovakvu funkciju korisnosti indiferentni na rizik.

Osim koeficijenta apsolutne rizik averzije postoji i tzv. koeficijent relativne averzije prema riziku koji se računa po formuli

$$R(x) = x \cdot A(x)$$

Upravo za logaritamsku funkciju korisnosti važi $R(x) = 1$.

4. TEORIJA IGARA

4.1. Uvod u teoriju igara

Svakodnevica bilo koje individue obiluje situacijama u kojima je ona primorana da donosi odluke – nekada su to odluke od nevelike važnosti, kao npr. da li kupiti proizvod jedne ili druge firme, dok se nekada donose odluke koje su od suštinskog značaja za dalji razvoj nekih događaja (npr. izlazak glasača na izbore, osmišljavanje vojnih strategija, itd.). U procesu odlučivanja može se desiti da odluka zavisi od nas samih, kao na primer kada student bira da li će za ispit učiti iz jedne ili druge knjige, i tada se pri donošenju odluke možemo voditi isključivo sopstvenim prosperitetom. Ipak, vrlo su česte situacije u kojima posledice odluka ne zavise samo od jedne strane. Tada u prvi plan dolazi međusobni odnos donosilaca odluka, odnosno da li su oni u konfliktu ili ne. Konflikt različitih strana najčešće se javlja kada je posledica odluke takva da će jedna strana prosperirati više od ostalih, i tome smo svedoci kako u najbanalnijim primerima (šahu, igrama kartama,...), tako i u političkim odlučivanjima, na ekonomskim tržištima, itd.

Mnoge naučne discipline dale su i još uvek daju značajan prilog boljem razumevanju mehanizma borbe interesa, npr. ekonomisti su proučavali konkurentske odnose na tržištu, u politici se proučavaju faktori koji utiču na sukobe političkih partija, u psihologiji se proučavalo rivalstvo kao sukob interesa, dok se sociologija bavi sukobima zaraćenih strana. Konfliktne situacije se javljaju u raznovrsnim formama i toliko često da je na prvi pogled izgledaju kao da su van mogućnosti formalizovanja. Ipak, često je empirijski jasno da je neki postupak racionalniji od drugog ili da je neko ulaganje isplativije od drugog. Čak samo takvo upoređivanje i vrednovanje nosi neke matematičke karakteristike, te je najdublja i najsveobuhvatnija analiza suprotstavljenih interesa i neizvesnosti u odlučivanju upravo i data matematički kroz oblast operacionih istraživanja pod nazivom **teorija igara**. Pod terminom "igra" ovde se podrazumeva interakcija dve ili više osoba (strana) koje imaju konfliktne interese, a čiji ishod zavisi od njihovih međusobnih strategija. Osnovna pitanja kojima se teorija igara bavi su:

- Šta znači izabrati racionalnu strategiju ako ishod strategije zavisi i od strategije protivnika?
- Ukoliko igra dozvoljava uzajamni dobitak (gubitak), da li je racionalno sarađivati u cilju obezbeđivanja najpovoljnijeg međusobnog rezultata ili treba postupati agresivno bez obzira na mogućnost uzajamnog dobitka ili gubitka?
- Kakvo je realno ponašanje ljudi u odnosu na recepte racionalnosti koje nudi teorija igara?
- Ako je ono različito, da li to onda znači da su ljudi više ili manje koopertaivni nego što to predlaže teorija igara?

U igri svaki igrač ima jednu potpunu informaciju koju stiče poznavanjem sopstvene situacije, dok na bazi informacije o protivniku pravi određene pretpostavke. Kako se igra odvija dobijaju se nove informacije na osnovu kojih se donose racionalne odluke. U konfliktnoj situaciji u kojoj učestvuju dva ili više lica racionalno ponašanje značilo bi, uz neki unapred definisan cilj, ulagati što manje a da se taj cilj ostvari. Pri tome, svako lice igra po nekim pravilima kojima je igra određena i postupa na određen način imajući u vidu cilj koji želi ostvariti i tako svesno utiče na ishod igre, odnosno bira svoju strategiju u njoj. Neizvesnost rezultata igre može nastati iz više razloga: dešava se da su pravila igre takva da je dozvoljen jako veliki broj varijanti njenog odvijanja, te je nemoguće predvideti rezultat igre (tzv. kombinatorne igre poput šaha), ili postoje slučajni faktori koji utiču na ishod (tzv. hazardne igre poput ruleta), dok se treći vid neizvesnosti ogleda u nedostatku informacije o strategiji protvnika (tzv. strateške igre). [7, 13]

Prema broju igrača razlikujemo igre dva igrača (dve strane) ili igre više igrača (više strana). U odnosu na broj raspoloživih strategija, igre mogu biti konačne ili beskonačne. Zadatak teorije igara je pronalaženje optimalne strategije za izabranog igrača koja obezbeđuje maksimalan prosečni dobitak (minimalan prosečni gubitak) pri višekratnom ponavljanju igre. Navodimo definiciju na kojoj počiva koncept ostatka teksta:

Definicija 4.1.1: [13] Strateška igra sa ordinalnim preferencijama sastoji se iz:

- skupa igrača
- skupa mogućih akcija za svakog igrača
- preferencija svakog pojedinačnog igrača nad skupom mogućih akcija.

Veoma je izražena primena teorije igara u mnogim naukama, a naročito u ekonomiji. Ključna veza teorije igara i ekonomske teorije jeste upravo u ranije objašnjenom konceptu racionalnosti pojedinca, a koji će kroz ostatak rada prvenstveno biti prikazan pomoću funkcija korisnosti (u daljim poglavljima će se umesto termina funkcija korisnosti koristiti ekonomistima familijarniji izraz, tzv. funkcija isplate (payoff function)). Pretpostavka racionalnosti ima dvostruku ulogu u ekonomskim analizama i istraživanjima. Prvo, ona sužava skup mogućih rešenja jer je potpuno racionalno ponašanje mnogo lakše analizirati nego iracionalno ponašanje, a sa druge strane ona daje kriterijum za efikasnost ekonomskih sistema. Ukoliko jedan ekonomski sistem omogućava da jedni gube više nego što drugi dobijaju (troškovi veći od koristi), onda taj sistem nije optimalan.

4.2. Istorija teorije igara

Iako se počeci teorije igara vezuju za imena Džona fon Nojmana (John fon Neumann[8]) i Oskara Morgenšterna (Oskar Morgenstern[9]) i njihovu zajednički napisanu knjigu pod nazivom "Teorija igara i ekonomskog ponašanja" (Theory of Games and Economic Behavior[10]) koja je bila prvi do tada zabeleženi vid sistematizacije znanja iz teorije igara, činjenica je da su koreni ove discipline nastali mnogo ranije. Postoje svedočenja da su još Platon i Sokrat u nekim svojim delima raspravljali o strategijama ratnika tokom bitaka i psihologiji vojnika koji čekaju napad. Takođe, osvajanje Meksika od strane španskih trupa u 16. veku danas se interpretira kao svojevrsna strategija vođe Hernana Korteza (Hernán Cortés[11]) koji je shvatajući koliko je njegova vojska brojčano slabija od Asteka koje su živeli na Jukatanu naterao svoje vojnike da spale brodove kojima su došli do ovog poluostrva, kako im ne bi preostalo ništa osim da se junački bore. Naravno, ovo nisu jedinstvene situacije u istoriji, a baš kao i u osmišljavanju strategija bitaka, prostora za teoriju igara (doduše, potpuno nesistematizovanu) bilo je i u radovima velikih filozofa poput Tomasa Hobsa (Thommas Hobbes[12]). On je u svom delu "Levijatan" (Leviathan[13]) raspravljao o slobodi čoveka i pojavi udruživanja pojedinaca u cilju ostvarivanja zajedničkih ciljeva. [6, 17]

Sve do početka XX veka koncepti teorije igara su, kako je već navedeno, bili samo okvirno razmatrani u mnogim delima, ali tek sa radovima Emila Borela (Emile Borel[14]) započele su važne prekretnice u ovoj matematičkoj disciplini. Upravo on je 20-ih godina XX veka raspravljao o mešovitim strategijama i igrama nulte sume dva igrača, i time dao značajan doprinos razvitku buduće teorije. Prvo relevantno izdanje na temu teorije igara bila je upravo "Teorija igara i ekonomskog ponašanja", koje je bilo rezultat plodne saradnje fon Nojmana i Morgenšterna. U ovoj knjizi oni su uspeli da rastumače mnoge ekonomske probleme u svetlu teorije igara, te da daju objašnjenja za iste, a takođe su postavili aksiome teorije korisnosti. Iako je teorija igara tada utemeljena kao matematička disciplina, mnoge stvari rasvetljene su tek kroz radove Džona Neša (John Nesh[15]). Njegovo kapitalno delo zapravo je bila

[8] [17] John fon Neumann, 1903-1957, mađarsko-američki matematičar i naučnik
[9] [17] Oskar Morgenstern, 1902-1977, ekonomista nemačkog porekla
[10] [17] Theory of Games and Economic Behavior, 1944.
[11] [17] Hernán Cortés, 1485-1547, pustolov i konkvistador
[12] [17] Thommas Hobbes, 1588-1679, engleski filozof
[13] [17] Leviathan, 1651. , filozofsko delo na temu društvenog ugovora
[14] [17] Emile Borel, 1871-1956, francuski matematičar i političar
[15] [17] John Nesh, 1928., američki matematičar

njegova doktorska disertacija iz 1949. godine koja je nosila naziv “Nekooperativne igre”, a u kojoj je uveo pojam tačke ravnoteže, tzv. ekvilibrijuma, i uopšte klase igara koje imaju ravnotežu. Zanimljivo je pomenuti da je Neš doktorirao u 22. godini, i da je već kao student smatran genijem, a mnogi su ga ocenili kao jedan od najoriginalnijih matematičkih umova XX veka.

Od 1950. godine pa nadalje radovi na temu teorije igara su se samo nizali, i oni su vrlo brzo počeli sadržati brojne primene ove teorije na različite naučne discipline. Godine 1954. Lojd Šepli (Lloyd Shapley[16]) i Martin Šubik (Martin Shubik[17]) izdali su prvu publikaciju vezanu za primenu teorije igara na političke nauke, a u svojim rezultatima koristili su tzv. Šeplijevu vrednost koja predstavlja svojevrsan koncept rešenja kooperativnih igara. Danas se teorija igara koristi za objašnjavanje mnogih pojava u politici – izbora, formiranja političkih partija i interesnih grupa, lobiranja, političkih pregovora itd. Ono što teoriju igara čini toliko primenljivom najverovatnije je priroda pojedinca da svaki svoj uspeh najčešće razmatra kroz prizmu tuđeg neuspeha.

Teorija igara je doživela procvat i kroz evolutivnu biologiju gde se njome danas modeliraju borbe za opstanak između vrsta, bitke polova, kooperacija između životinja itd. U botanici, putem ove discipline najčešće se razmatra difuzija semenja, širenje korenja u zemlji, alokacija polova, veličina cvetova itd. Još od najranije istorije pa do danas, primena na vojne strategije je bila više nego izražena, a čak postoje svedočenja da su Nojman i Neš prve praktične primene svojih teorija uradili baš za američku vojsku.

Naročito tesna veza stvorila se između teorije igara i ekonomskih disciplina, i to prvenstveno jer je teorija igara ponudila neke optimalne strategije u situacijama kada ishod ne zavisi isključivo od ponašanja pojedinca i tržišnih uslova, već i od strategija koje su birali drugi učesnici. Tokom godina su razvijeni razni modeli tržišta, no za dalja istraživanja još i te kako ima mesta. Za primenu teorije igara u ekonomiji dodeljene su čak dve Nobelove nagrade, i to Džonu Nešu, Džonu Harsaniju (John Harsanyi[18]) i Rejnardu Seltenu (Reinhard Selten[19]) 1994. godine za njihov doprinos razvitku kooperativnih i nekooperativnih igara, a takođe Robertu Ojmanu (Robert Aumann[20]) i Tomasu Šelingu (Thomas Schelling[21]) 2005. godine za doprinos razumevanju konflikata i kooperacije.

[16] [17] Lloyd Shapley, 1923., američki matematičar
[17] [17] Martin Shubik, 1926., američki ekonomista
[18] [17] John Harsanyi, 1920-2000, mađarski ekonimista
[19] [17] Reinhard Selten, 1930., nemački ekonomista
[20] [17] Robert Aumann, 1930., matematičar izraelsko-američkog porekla
[21] [17] Thomas Schelling, 1921., američki ekonomista

4.3. Matrične igre nulte sume

Posmatrajmo konačnu stratešku igru u kojoj učestvuju dva igrača. Neka igrač $\boldsymbol{I}$ može da bira jednu od svojih strategija $a_i, (i = 1,2, \dots, m)$, dok igrač $\boldsymbol{II}$ bira neku od svojih strategija b_i, $(i = 1,2, \dots, n)$. Neka je ishod igre, odnosno dobitak za prvog igrača označen sa $c_I(a_i, b_j)$, dok je gubitak za drugog igrača označen sa $c_{II}(a_i, b_j)$. Uslov nulte sume kaže da je dobitak prvog igrača jednak gubitku drugog:

$$c_I(a_i, b_j) + c_{II}(a_i, b_j) = 0,$$

a ako uvedemo oznaku

$$c_I(a_i, b_j) = C(a_i, b_j),$$

sledi

$$c_{II}(a_i, b_j) = -\,C(a_i, b_j).$$

Očigledno, cilj igrača $\boldsymbol{I}$ je maksimizacija funkcije C, dok je cilj igrača $\boldsymbol{II}$ minimizacija te iste funkcije.

U određivanju funkcije $C(a_i, b_j)$ indirektno je prisutan problem vrednovanja ishoda igre, međutim on je rešen upravo uvođenjem koncepta korisnosti (tj. takozvanim funkcijama isplate) kroz koji se svim mogućim ishodima igre dodeljuju numeričke vrednosti kako bi ishodi mogli biti rangirani od najlošijih ka najboljim. Ranije je pomenuto, ali valja se podsetiti da relacije preferencije samo rangiraju ishode, ali ne daju informaciju o meri koliko je tačno jedan ishod bolji od drugog, samim tim, ako jedan ishod igre ima numeričku vrednost 5, a drugi npr. 15, to ne znači automatski da je drugi ishod 3 puta bolji od prvog, već samo da je bolji. Konkretni primeri biće navedeni u nastavku teksta. [7]

Igre nulte sume dva igrača sa konačnim brojem strategija lako se mogu predstaviti tzv. matricom plaćanja C (slika 4.3.1) u kojoj je $c_{ij} = C(a_i, b_j)$, odnosno gde elemenat c_{ij} predstavlja dobitak igrača $\boldsymbol{I}$**,** odnosno gubitak igrača $\boldsymbol{II}$ kada igrač $\boldsymbol{I}$ izabere strategiju a_i**,** a igrač $\boldsymbol{II}$ strategiju b_j. Jasno, pozitivna vrednost c_{ij} predstavlja dobitak igrača $\boldsymbol{I}$, a gubitak igrača $\boldsymbol{II}$, dok negativna vrednost c_{ij} predstavlja gubitak igrača $\boldsymbol{I}$, a dobitak igrača $\boldsymbol{II}$.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Slika 4.3.1: matrica plaćanja

Vrste matrice plaćanja predstavljaju moguće izbore igrača $\boldsymbol{I}$, dok kolone predstavljaju moguće izbore igrača $\boldsymbol{II}$**.** Na primer, vrsta i matrice plaćanja označava da je igrač $\boldsymbol{I}$ izabrao strategiju a_i, dok se strategija igrača $\boldsymbol{II}$ menja u zavisnosti od elementa koji je uzet iz kolone j. Kada igrač $\boldsymbol{I}$ bira strategiju a_i, odnosno i-tu vrstu matrice plaćanja, najgori mogući rezultat koji on može ostvari je

$$\alpha_{\mathrm{i}} = \min_j c_{ij}$$

odnosno, to je njegov minimalan dobitak za sve moguće strategije drugog igrača. Obzirom da je prvom igraču u cilju da maksimizira svoj minimalan dobitak, odnosno da maksimizira vrednost α_{i} , jasno je da će on izabrati upravo onu strategiju a_i koja će mu takav ishod doneti. Najveći minimalan gubitak za igrača $\boldsymbol{I}$ označava se sa

$$\alpha = \max_i \min_j c_{ij}$$

odnosno to je tzv. garantovani dobitak igrača $\boldsymbol{I}$ koji se još naziva donja granica vrednosti igre za prvog igrača ili njegov nivo bezbednosti. Strategija koja ovo obezbeđije naziva se maxmin strategija. Sličnom logikom vodimo se kod igrača $\boldsymbol{II}$. Ukoliko on izabere strategiju b_j, najnepovoljniji rezultat koji može ostvariti je upravo

$$\beta_j = \max_i c_{ij}$$

(jer što je veće c_{ij} njegov gubitak je veći) bez obzira na strategiju prvog igrača. Logično, cilj igrača $\boldsymbol{II}$ jeste da minimizira maksimalan moguć gubitak, odnosno da bira onu strategiju b_j sa kojom će postići

$$\beta = \min_j \max_i c_{ij}$$

odnosno da najveći gubitak koji može ostvariti bude najmanji moguć. Ova vrednost naziva se i nivo bezbednosti za igrača $\boldsymbol{II}$**,** odnosno gornja granica vrednosti igre. Strategija kojom se ovo obezbeđuje je minmax strategija.

Treba primetiti da važi

$$\alpha \leq \beta$$

jer $\forall k, l$ važi

$$\min_j c_{kj} \leq c_{kl} \leq \max_i c_{il}.$$

4.3.1 Proste matrične igre

Matrične igre nulte sume koje poseduju sedlastu tačku nazivaju se proste matrične igre. Sedlasta tačka je elemenat c_{ij} za koji važi da je:

1) minimalan element u redu i matrice C, i
2) maksimalan element u koloni j matrice C.

Formalnije, ukoliko u matrici plaćanja $C = \{c_{ij}\}$, $i = 1,2,\dots,m$; $j = 1,2,\dots,n$, postoji par (i^*, j^*) takav da za sve vrednosti i, j važi

$$c_{ij^*} \leq c_{i^*j^*} \leq c_{i^*j}$$

tada je par (i^*, j^*) sedlasta tačka za matricu C i određuje par optimalnih čistih strategija u matrici C. Termin čista strategija označava da igrač iz skupa svih mogućih strategija bira jedinstvenu strategiju koja predstavlja rešenje igre, odnosno dovodi do optimalnog rezultata tj. maksimizacije minimalnog dobitka prvog igrača i minimizacije maksimalnog gubitka drugog igrača. U sedlastoj tački, stoga, važi

$$\max_i \min_j c_{ij} = \min_j \max_i c_{ij} = c_{i^*j^*}$$

Kod prostih matričnih igara, optimalna vrednost igre nalazi se u sedlastoj tački, tj. za oba igrača je optimalno da biraju one strategije koje diktira ta tačka. To znači da ukoliko npr. igrač $\boldsymbol{I}$ odustane od strategije i i odabere neku drugu dok igrač $\boldsymbol{II}$ ne odustane od strategije j određene sedlastom tačkom, tada će doći do manjeg dobitka za igrača $\boldsymbol{I}$. Obrnuto, ukoliko igrač $\boldsymbol{II}$ bude taj koji odustane, to će označiti njegov veći gubitak. Ova tačka naziva se tačka ravnoteže strategija, ili tačka ekvilibrijuma, i u opštem slučaju ona ne mora da bude jedinstvena, što se npr. vidi u matrici plaćanja:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

gde su elementi na mestima $(1,1)$ i $(1,3)$ sedlaste tačke. [7]

4.4. Bimatrične igre

Do sada smo se bavili matričnim igrama nulte sume u kojima je dobitak jednog igrača bio jednak gubitku drugog. Treba napomenuti da je ovo specijalan slučaj tzv. igre konstantne sume u kojoj je zbir rezultata igrača konstantan, odnosno važi

$$c_I(a_i, b_j) + c_{II}(a_i, b_j) = const$$

Vrlo jednostavnim transformacijama oblika

$$v_I(a_i, b_j) = c_I(a_i, b_j) - c_{II}(a_i, b_j)$$

$$v_{II}(a_i, b_j) = c_{II}(a_i, b_j) - c_I(a_i, b_j)$$

igru konstantne sume svodimo na igru nulte sume

$$v_I(a_i, b_j) + v_{II}(a_i, b_j) = 0$$

U slučaju da nemamo konstantnu ili sumu jednaku nuli igra se uopštava, te u tom smislu govorimo o tzv. bimatričnim igrama. Bimatrične igre su, dakle, strateške igre sa nenultom ili opštom sumom i njih definišu dva konačna skupa strategija $x \in X$ za igrača $\boldsymbol{I}$**,** i $y \in Y$ za igrača $\boldsymbol{II}$, kao i dve funkcije sa realnim vrednostima $u_1(x, y)$ i $u_2(x, y)$ koje predstavljaju rezultate igre za igrača $\boldsymbol{I}$ odnosno igrača $\boldsymbol{II}$. Ovakve se igre modeliraju pomoću bimatrice plaćanja, a elementi ove bimatrice su uređeni parovi $(u_1(x, y)\ , u_2(x, y))$.

$$C = \begin{bmatrix} (u_1(x_1, y_1), u_2(x_1, y_1)) & (u_1(x_1, y_2), u_2(x_1, y_2)) & \cdots & (u_1(x_1, y_n), u_2(x_1, y_n)) \\ (u_1(x_2, y_1), u_2(x_2, y_1)) & (u_1(x_2, y_2), u_2(x_2, y_2)) & \cdots & (u_1(x_2, y_n), u_2(x_2, y_n)) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (u_1(x_m, y_1), u_2(x_m, y_1)) & (u_1(x_m, y_2), u_2(x_m, y_2)) & \cdots & (u_1(x_m, y_n), u_2(x_m, y_n)) \end{bmatrix}$$

Ukoliko ovedemo oznake

$$a_{ij} = u_1(x_i, y_j)$$

$$b_{ij} = u_2(x_i, y_j)$$

bimatricu C možemo da dekomponujemo na dve obične matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Obzirom na to da kod bimatričnih igara dobitak jednog igrača više nije jednak gubitku drugog, u rešavanju se ne može primeniti princip minimaksa jer maksimizacija dobitka jednog igrača više nije ekvivalentna minimizaciji gubitka drugog igrača. U rešavanju bimatričnih igara mogu da se posmatraju dva slučaja, to su slučaj kada ne postoji i kada postoji kooperacija. U prvom slučaju igrači ne mogu da se sporazumevaju prilikom izbora najbolje strategije, ili ako mogu njihov sporazum nije obavezujući. U drugom slučaju, oni se mogu dogovarati ali je njihov sporazum obavezujući. Tada, ako jedna strana ne ispoštuje sporazum, ona biva kažnjena. [7]

Primer 4.4.1: [13] **Dilema zatvorenika**

Dilema zatvorenika je najpoznatiji primer strateških igara. Njen značaj je u tome što se u velikom broju drugih situacija učesnici suočavaju sa sličnim dilemama. Radi se, naime, o dva zatvorenika osumnjičena za veliki zločin koji se nalaze u dve razdvojene ćelije. Pretpostavka je da postoji dovoljno dokaza da svaki od njih bude optužen za neke manje prestupe, međutim ne i za glavno nedelo koje je učinjeno, osim ako neko ne prizna zločin i oda drugog. Postoje tri opcije. Prva je da obojica ne priznaju da su počinili veliki zločin, i svaki od njih ode u zatvor na godinu dana zbog manjih prestupa koje su počinili. Druga opcija je ona u kojoj samo jedan priznaje zločin, i tada će taj jedan biti oslobođen i na sudu svedočiti protiv drugog, koji će potom ići u zatvor 4 godine. Treća opcija je da obojica priznaju zločin, i tada će oba provesti po 3 godine u zatvoru. Ova situacija može da se modelira kao strateška igra na sledeći način:

Igrači: 2 osumnjičena zatvorenika.

Akcije: za svakog igrača to su $\{P, NP\}$ gde je sa P označeno priznanje, a sa NP nepriznavanje zločina.

Preferencije: Osumnjičeni 1 ređa moguće akcije počevši od one koja je za njega najbolja: (P, NP) jer je u ovoj situaciji on oslobođen, zatim (NP, NP) jer tada provodi u zatvoru godinu dana, (P, P) jer u ovom slučaju u zatvor ide na 3 godine, i na kraju (NP, P) kada odlazi u zatvor na 4 godine. Za igrača 2 poredak je sledeći $(NP, P), (NP, NP), (P, P), (P, NP)$.

Predstavićemo ovu igru bimatrično gde ćemo za početak da uvedemo funkcije u_1 i u_2 uz pomoću kojih ćemo poređati preferencije zatvorenika 1 i 2. Za zatvorenika 1 važi

$$u_1(P, NP) > u_1(NP, NP) > u_1(P, P) > u_1(NP, P)$$

Uvešćemo sada numeričke vrednosti na sledeći način: $u_1(P, NP) = 3$, $u_1(NP, NP) = 2, u_1(P, P) = 1$, $u_1(NP, P) = 0$. Slično, za igrača 2 važi

$$u_2(NP, P) > u_2(NP, NP) > u_2(P, P) > u_2(P, NP)$$

a numeričke vrednosti su $u_2(NP, P) = 3, u_2(NP, NP) = 2, u_2(P, P) = 1, u_2(P, NP) = 0$. Uz pomoć ovih vrednosti možemo formirati bimatricu

$$\begin{array}{cc} & \text{Zatvorenik 2} \\ & \begin{array}{cc} NP & P \end{array} \\ \text{Zatvorenik 1} \quad \begin{array}{c} NP \\ P \end{array} & \begin{bmatrix} (2,2) & (0,3) \\ (3,0) & (1,1) \end{bmatrix} \end{array}$$

Slika 4.4.1: Bimatrica Dileme zatvorenika

Vrste ove matrice predstavljaju moguće akcije zatvorenika 1, dok kolone predstavljaju akcije koje može preduzeti zatvorenik 2. Elementi matrice su uređeni parovi koji govore kolika je “isplativost” obojici zatvorenika pri svakoj kombinaciji akcija.

Dilema zatvorenika je model situacije u kojoj se obostrani bolji rezultat postiže kooperacijom, međutim interes za varanje protivnika postoji jer ukoliko samo jedan igrač prevari on biva oslobođen od kazne. Ovakva situacija je veoma česta u realnom svetu te ima zaista puno primera ovog tipa – to su bilateralni sporazumi država o carinskim tarifama, sporazumi dve firme o podeli tržišta, o radu na zajedničkom projektu ili podeli jednog resursa, itd.

Primer 4.4.2: [13] **Bah ili Stravinski**

U Dilemi zatvorenika osnovno pitanje je bilo da li će igrači zaista sarađivati, obzirom da su obojica imala interesa da prevare jedan drugog jer bi to značilo oslobađanje strane koja je priznala zločin (ukoliko samo ta jedna strana prevari). Ipak, u sledećoj igri je, pokazaće se, obojici igrača u interesu da sarađuju. Objasnimo sada situaciju u kojoj se oni nalaze:
Pretpostavimo da dva prijatelja žele da idu zajedno na koncert. Dva koncerta klasične muzike su na repertoaru tog dana, održavaju se u isto vreme, jedan je koncert Bahove, a drugi je koncert muzike Stravinskog. Jedna osoba preferira Bahov koncert, dok druga želi da ide na Stravinskog. Ukoliko odu na različite koncerte, svaka će osoba biti jednako nesrećna jer će na koncert ići sama, obzirom da oni primarno žele da na koncert idu zajedno. Ovo je situacija koja može biti modelirana na sličan način kao što je to bilo kod Dileme zatvorenika, a prikazaćemo je bimatricom u kojoj vrste predstavljaju izbore osobe koja preferira Baha, dok su kolone moguće akcije osobe koja preferira Stravinskog.

Igrači: 2 prijatelja

Akcije: $\{B, S\}$ gde je sa B odlazak na Bahov koncert, a sa S je označen odlazak na Stravinskog.

Preferencije: Za igrača 1 izbori su rangirani od najboljeg ka najlošijem na sledeći način: $(B,B),(S,S),(S,B),(B,S)$. Za igrača 2 rang je $(S,S),(B,B),(S,B),(B,S)$. (obojica su indiferentna između izbora $(S,B),(B,S)$).

Ove preferencije ćemo prikazati pomoću funkcija isplate na sledeći način:

$u_1(B,B) = 2, u_1(S,S) = 1, u_1(S,B) = 0, u_1(B,S) = 0;$

$u_2(S,S) = 2, u_2(B,B) = 1, u_2(S,B) = 0, u_2(B,S) = 0.$

Bimatrica izgleda ovako:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Stravinski} \\ & & \begin{array}{cc} B & S \end{array} \\ \text{Bah} & \begin{array}{c} B \\ S \end{array} & \begin{bmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{bmatrix} \end{array}$$

Slika 4.4.2: Bimatrica Dileme Bah ili Stravinski

Ova igra se u literaturi često naziva i Bitka polova premda je jednako karakteristična i za osobe istog pola. Poput Dileme zatvorenika, postoji ogroman broj primera u kojima možemo prepoznati problematiku sličnu navedenoj u primeru Bah ili Stravinski. Jedan od takvih primera je upravo primer dva lidera jedne političke partije koji razmišljaju o razdvajanju zbog sukoba interesa tik uoči izbora. Iako preferiraju različite strane, za obojicu je bolje da tokom izbora ostanu u istoj partiji, jer će bilo kakvo njihovo razdvajanje zbuniti glasače i podeliti njihove glasove između dva lidera, što će biti loše po obojicu, a glasači čak mogu ostati toliko zatečeni da će na kraju glasati za neku treću partiju, što pogotovo ne ide na ruku niti jednom od političkih lidera.

4.5. Nešov ekvilibrijum

Da li postoji univerzalan odgovor na pitanje koju akciju izabrati u situacijama poput one u Dilemi zatvorenika ili Bah ili Stravinki? Naravno, polazimo od pretpostavke o racionalnosti tj. da će svaki donosilac odluke uvek nastojati da maksimalno zadovolji svoje potrebe u skladu sa situacijom u kojoj se nalazi. Svakako, njegova odluka (akcija) će u velikoj meri zavisiti od načina na koji postupaju drugi igrači, odnosno činjenica je da svaki igrač mora imati formirano mišljenje o tome kako razmišljaju drugi učesnici u igri. Pretpostavićemo da svaki igrač gradi svoje razmišljanje o protivnicima na osnovu svojih prošlih iskustava igrajući istu tu igru i da je takav njegov način razmišljanja korektan, u smislu da je dovoljan za stvaranje slike o ponašanju drugog igrača. Ipak, pretpostavićemo da on ima samo generalnu sliku o tome kako protivnik razmišlja i postupa, ali da nema informaciju sa kojim će se specifičnim igračem suočiti, i kakav je baš njegov mentalni sklop i redosled akcija koje će preduzeti. Ovo možemo tumačiti kao igranje igre u izolaciji. [13]

Zarad malo jasnije slike o navedenim pretpostavkama, zamislimo situaciju u kojoj su umesto pojedinačnih igrača u igri suprotstavljene čitave populacije, ali da pri svakom sledećem potezu iz populacije istupa jedna slučajno izabrana osoba koja će taj potez izvesti. Tada će svaka populacija kreirati svoje mišljenje o tipičnim protivnicima iz drugih populacija, a to će biti više slike samih populacija nego konkretnih osoba unutar njih. U svakom slučaju, kreirano mišljenje će, kao što je u prethodnom pasusu navedeno, biti tačno, što automatski povlači da će o bilo kojoj populaciji sve ostale imati potpuno jednako mišljenje. Navedene pretpostavke su osnova za Nešov ekvilibrijum koji predstavlja jedan od najznačajnijih pojmova Teorije igara.

Nešov ekvilibrijum je portfolio akcija (odluka) $a^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$, gde svakom učesniku igre i, $i = 1,2,\dots,n$ odgovara konkretna akcija a_i^*, koji ima osobinu da birajući bilo koju akciju drukčiju od a_i^* pri čemu ostalih $n-1$ učesnika ne menjaju svoje odluke, učesnik i ne može postići po sebe bolji rezultat od onog koji je predstavljen upravo akcijom a_i^*.

Najjednostavnije objašnjenje Nešovog ekvilibrijuma daćemo posmatrajući igru dva igrača. Oni će postići Nešov ekvilibrijum ukoliko igrač $\boldsymbol{I}$ donese najbolju odluku koju može, uzimajući u obzir odluku igrača $\boldsymbol{II}$**,** dok igrač $\boldsymbol{II}$ postupa potpuno isto, odnosno pokušava da donese najbolju moguću odluku posmatrajući odluku igrača $\boldsymbol{I}$. U idealnim uslovima, odnosno kada se igrači nasumično biraju iz populacija, Nešov ekvilibrijum predstavlja ravnotežno stanje jer pojedinačnim igračima nikako nije u interesu da odstupaju od portfolia a^*. Ovo se može razumeti i u obliku društvene norme – jer ako je svi poštuju i postupaju u skladu sa njom, nijedna individua nema želju da od iste odstupi, jer po nju to može imati samo negativne posledice.

Razmotrimo malo preciznije stanje Nešovog ekvilibrijuma. Naime, neka je sa $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ označen portfolio akcija u kom svakom igraču i, $i = 1,2,\dots,n$ odgovara konkretna akcija a_i. Neka je a_i' bilo koja akcija igrača i različita od akcije a_i. Tada će (a_i', a_{-i}) označiti portfolio akcija u kome se svi igrači osim igrača i priklanjaju svojim izborima koje definiše portfolio a (odnosno svaki igrač $j, j \neq i$, ostaje pri svojoj odluci a_j koja je deo portfolia a), dok igrač i bira odluku a_i'. Na primer, ako u igri učestvuje 4 igrača, onda (a_4', a_{-4}) označava da je igrač broj 4 promenio svoju odluku, dok su se ostali zadržali na svojim starim odlukama. Neki portfolio a^* će biti Nešov ekvilibrijum ukoliko ni za jednog igrača i ne postoji akcija a_i takva da on više preferira portfolio akcija (a_i', a_{-i}^*) od a^*.

Definicija 4.5.1: [13] Portfolio akcija a^* u strateškoj igri sa ordinalnim preferencijama ima Nešov ekvilibrijum ako je za svakog igrača i i za svaku njegovu akciju a_i, a^* barem jednako dobar koliko i portfolio (a_i, a^*_{-i}) u kome igrač i bira akciju a_i a svi drugi igrači se priklanjaju svojim izborima definisanim preko a^*. Ekvivalentno, za svakog igrača i važi

$$u_i(a^*) \geq u_i(a_i, a^*_{-i})$$

za bilo koju njegovu akciju a_i gde je u_i funkcija isplate koja opisuje preferencije igrača i.

Definicija koja je upravo navedena nam, nažalost, ne govori ništa o tome da li Nešov ekvilibrijum uopšte postoji, ili ukoliko postoji, da li je on jedinstven. Stoga, postoje igre koje nemaju Nešov ekvilibrijum, kao i one kod kojih ih ima više. Takođe, jasno je da početne pretpostavke ne opisuju realnost baš idealno. Na primer, šta se događa ukoliko igrači nemaju iskustvo u igranju igre? Ili, šta ako oni ne igraju baš svaku partiju u izolaciji, odnosno znaju ko je njihov konkretan protivnik? Da li je ili nije Nešov ekvilibrijum adekvatan i u ovakvim situacijama uglavnom se mora zaključiti posmatrajući sve aspekte ovih igara. Na primer, novi igrači iako možda nemaju iskustvo, mogu da saznaju kako su se njihovi protivnici ranije ponašali igrajući igru, pa samim tim da zaključe koji su njihovi najverovatniji potezi. Ovakva situacija, iako nije potpuno jednaka pretpostavci o iskustvu igrača, ipak dovodi u stanje slično onom u kom se Nešov ekvilibrijum može primeniti. Još jedan alternativni prilaz ovoj problematici jeste situacija u kojoj pretpostavljamo da igrači nemaju iskustvo u igranju igre ali znaju da ostali igrači igraju racionalno, i „znaju u čemu se ogleda“ ta racionalnost drugih igrača.

Kako god na kraju razrešili ovu prvu “problematiku” ostaje nam pitanje posle koliko ponavljanja će igra uopšte iskonvergirati ka Nešovom ekvilibrijumu, jer Nešova definicija zapravo isključivo daje informaciju o ravnotežnoj tački, ali ne kaže nam kakve će putanje izbori igrača imati dok se njihova očekivanja o međusobnoj igri na kraju ne konsoliduju i ne postanu u potpunosti koordinisana. Na osnovu svih poteškoća u pretpostavkama koje koncept Nešovog ekvilibrijuma iziskuje, najbolje je u njega verovati kao u aproksimaciju realnosti, jer na kraju krajeva nije poenta da naučnik bude oruđe teorije, već teorija oruđe naučnika.

Primer 4.5.1: [13] **Nešov ekvilibrijum u Dilemi zatvorenika**

Podsetimo se prvo kako je izgledala bimatrica mogućih akcija dva zatvorenika - svakoj mogućoj akciji oba igrača dodeljivali smo numeričke vrednosti, a veći broj je označavao veću isplativost od preduzete akcije:

Zatvorenik 2

$$\text{Zatvorenik 1} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} NP & P \end{array} \\ \begin{array}{c} NP \\ P \end{array} & \begin{bmatrix} (2,2) & (0,3) \\ (3,0) & (1,1) \end{bmatrix} \end{array}$$

Nešov ekvilibrijum ove igre je par akcija (P, P). U drugoj koloni bimatrice se vidi da ukoliko zatvorenik 2 izabere da prizna zločin, onda se igraču jedan više isplati da i on prizna nego da prećuti, jer je isplativost priznanja jednaka 1 i veća je od isplativosti nepriznanja čija je numerička vrednost 0. Isto tako, u drugoj vrsti vidimo da ukoliko zatvorenik 1 bira da prizna zločin, zatvoreniku 2 je istom logikom povoljnije da ga i on prizna.

Objasnićemo sada zašto ostali parovi akcija nisu ravnotežne tačke. Ukoliko posmatramo par akcija (NP, NP), vidimo da ukoliko zatvorenik 2 izabere da ne prizna zločin, zatvoreniku 1 je ipak isplativije da ga prizna, jer je numerička vrednost priznanja jednaka 3. U realnoj situaciji, priznavanje prvog a nepriznavanje drugog zatvorenika dovodi do rezultata u kome je prvi zatvorenik oslobođen, dok drugi biva osuđen i ide u zatvor na 4 godine. Jasno, ovakva situacija je više u interesu prvog igrača jer, ukoliko i on ne bi priznao zločin, proveo bi godinu dana u zatvoru. Slična priča važi i za zatvorenika 2 ukoliko prvi zatvorenik izabere da ne prizna zločin – njemu se više isplati da ga prizna nego da ne prizna. Ipak, sama činjenica da već jedan igrač ima interesa da „izađe“ iz ovog stanja dovoljna je da ta tačka ne bude ravnotežna, pa se ponašanje drugog ne mora ni razmatrati. Stanje (NP, P) takođe nije tačka ekvilibrijuma jer opet, ako igrač (zatvorenik 2) bira da prizna zločin, igraču 1 se više isplati da ga i on prizna. Slična logika odnosi se na slučaj (P, NP).

Ono što je karakteristično za Nešov ekvilibrijum u Dilemi zatvorenika jeste da akcija P jeste najbolja opcija za svakog pojedinačnog igrača bez obzira šta odigrao drugi. U nekim drugim igrama koje takođe imaju svoj Nešov ekvilibrijum ovakva situacija neće uvek biti zadovoljena.

Primer 4.5.2: [13] **Nešov ekvilibrijum u Dilemi zatvorenika ako zatvorenici nisu „sebični“**

Posmatrajmo sada Dilemu zatvorenika u kojoj oba igrača imaju mogućnost biranja jedne od dve akcije $\{P, NP\}$, ali neka ovoga puta bilo koji preduzet par akcija rezultira time da igrači dobiju količine novca koji odgovaraju vrednostima bimatrice u odgovarajućim poljima (npr. ako igrač 1 bira akciju NP, a igrač 2 P onda prvi dobija 0 novčanih jedinica, a drugi igrač količinu novca od 3 novčane jedinice). Neka je „nesebičnost“ igrača sadržana u njihovim funkcijama isplate, odnosno neka važi

$$u_1(a) = m_1(a) + m_2(a),$$

$$u_2(a) = m_2(a) + m_1(a),$$

gde je $m_i(a)$ količina novca koju primi igrač i kada je izabran portfolio akcija a. Jasno, isplata svakog pojedinačnog igrača, pod pretpostavkom da je njegova suma novca konstantna, raste sa sumom novca koja odlazi drugom igraču, a ona je direkno proporcionalna dobru koje drugi igrač ima od konkretne preduzete akcije. Posmatrajmo novu bimatricu:

Zatvorenik 2

$$\text{Zatvorenik 1} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} NP & P \end{array} \\ \begin{array}{c} NP \\ P \end{array} & \begin{bmatrix} (4{,}4) & (3{,}3) \\ (3{,}3) & (2{,}2) \end{bmatrix} \end{array}$$

Slika 4.5.1: Bimatrica Dileme zatvorenika ako su igrači sebični

Npr. ukoliko je izabran portfolio akcija (NP, NP) onda je

$$u_1((NP, NP)) = m_1((NP, NP)) + m_2((NP, NP)) = 2 + 2 = 4$$

$$u_2((NP, NP)) = m_2((NP, NP)) + m_1((NP, NP)) = 2 + 2 = 4$$

a na isti način se dobijaju i ostale vrednosti iz bimatrice.

Vidimo da u ovoj situaciji nijednom pojedinačnom igraču priznavanje zločina više nije najbolja moguća solucija, odnosno svakom se sada isplati da ga ne prizna. Tačka ekvilibrijuma ovog puta je upravo (NP, NP) jer ukoliko prvi igrač odluči da ne prizna zločin, drugom je takođe bolja opcija nepriznavanje (korisnost 4 u odnosu na korisnost 3), a isto tako ako drugi bira akciju NP, i prvom se više isplati da bira tu istu akciju. Uzmimo sada za primer akciju (P, P) - ona nije ravnotežna tačka jer ukoliko, na primer, zatvorenik 2 bira P, zatvoreniku 1 je bolje da izabere NP, i obrnuto ako zatvorenik 1 izabere P, drugom se više isplati NP. Slična logika važi za parove (NP, P) i (P, NP).

Primer 4.5.3: [13] **Nešov ekvilibrijum u Dilemi Bah ili Stravinski**

Podsetimo se kako je izgledala bimatrica za ovu igru:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Stravinski} \\ & & \begin{array}{cc} B & S \end{array} \\ \text{Bah} & \begin{array}{c} B \\ S \end{array} & \begin{bmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{bmatrix} \end{array}$$

Razmotrimo sada pojedinačno sve moguće portfolije akcija:

- (B, B) - ako igrač 1 (onaj koji preferira Baha) izabere Stravinskog, njegova sreća pada sa vrednosti 2 na vrednost 0, dok ukoliko se igrač koji preferira Stravinskog ipak odluči za Stravinskog, njegova sreća se smanjuje sa vrednosti 1 na vrednost 0.
- (B, S) - ako npr. igrač 2 izabere Stravinskog, onda je i prvi igrač srećniji birajući Stravinskog, pa nema interesa da izabere Baha. Isto tako, ako igrač 1 izabere Baha, igraču 2 je bolje da i on izabere Baha.
- (S, B) - ako prvi igrač odluči da bira Stravinskog, onda se i igraču 2 više isplati Stravinski, što je dovoljno da ni ova tačka ne bude Nešov ekvilibrijum.
- (S, S) - ako igrač 1 odstupi od ovog portfolija akcija, njegova sreća pada sa 1 na 0, a ako dođe do odstupanja drugog igrača, onda njegova sreća padne sa 2 na 0. Jasno, nijednom onda nije u interesu da izađu iz ove tačke, stoga je i (S, S) Nešov ekvilibrijum.

Kako ova igra ima dva Nešova ekvilibrijuma (B, B) i (S, S), zaključak je da su ravnotežna stanja postignuta upravo kada oba prijatelja (igrača) idu zajedno na jedan koncert, ma kog kompozitora on bio, odnosno da nijedan od njih ne može biti srećniji ukoliko izabere da na koncert ode sam.

Primer 4.5.4: [13] **Igra koordinacije**

Posmatrajmo situaciju od malopre u kojoj dva prijatelja ponovo žele da izađu zajedno, međutim, neka ovog puta obe osobe preferiraju Bahov koncert. Kao i ranije, obojica preferiraju da na koncert odu zajedno nego da svaki ode sam za sebe, pa sada bimatrica ima novi izgled:

$$\begin{array}{ccc} & & II \\ & & \begin{array}{cc} B & S \end{array} \\ I & \begin{array}{c} B \\ S \end{array} & \begin{bmatrix} (2,2) & (0,0) \\ (0,0) & (1,1) \end{bmatrix} \end{array}$$

Slika 4.5.2: Bimatrica Igre koordinacije

U ovom slučaju Nešovi ekvilibrijumi su tačke (B, B) i (S, S). Zanimljiva situacija je ta da je Nešov ekvilibrijum ovog puta između ostalog i portfolio akcija (S, S) iako nijedan prijatelj ne preferira Stravinskog. Ovo se može objasniti time da grupa ljudi uvek ima običaj da se priklanja istom standardu, a kada se to desi, nikoja individua nema interesa da izađe iz tog stanja. Ipak, ukoliko bi se navedena igra sprovela eksperimentalno, jasno je da bi se rešenje (B, B) pokazalo kao superiorno u odnosu na rešenje (S, S).

Kao što smo već ranije napomenuli, a takođe smo videli u prethodnim primerima, može se desiti da igre imaju više od jednog Nešovog ekvilibrijuma. U nekim igrama, kao što se to desilo u primeru 4.5.4 jasno je da neke ravnotežne tačke očigledno donose bolje uslove igračima, odnosno da su neke tačke po njih isplativije, i samim tim da postoji veća šansa da budu birane. Ovakvi ekvilibrijumi nazivaju se **fokalnim ekvilibrijumima**. S druge strane, postoje igre u kojima ima više ekvilibrijuma, međutim svi su jednako isplativi za igrače. U ovakvim igrama, teorijski se ne može tvrditi da će jedan ekvilibrijum biti verovatnije biran nego neki drugi, ili da će među više ekvilibrijuma baš jedan biti dominantan. Ono što u ovakvim igrama može igrače dovesti u stanje forsiranja jednog ekvilibrijuma jesu priroda akcija koje karakterišu taj ekvilibrijum, ili neke dodatne informacije koje igrač o njima poseduje.

U svim dosadašnjim primerima, imali smo situacije u kojima su Nešovi ekvilibrijumi takvi da nijednom igraču nije bilo u interesu da izađe iz njih jer bi njegov rezultat u bilo kom takvom slučaju bio gori nego u tački ekvilibrijuma. Ipak, definicija Nešovog ekvilibrijuma kaže da bilo kakva devijacija jednog igrača od ekvilibrijuma samo treba da bude ne bolja od stanja koje taj igrač postiže u ekvilibrijumu. Stoga, može se desiti da je određeni igrač potpuno indiferentan između akcije koju za njega definiše Nešov ekvilibrijum i neke „spoljašnje“ akcije. Ovo nas dovodi do zaključka da se u grupi svih Nešovih ekvilibrijuma nalaze tzv. strogi ekvilibrijumi. Preciznije, portfolio akcija a^* je strog Nešov ekvilibrijum ako za svakog igrača i važi

$$u_i(a^*) > u_i(a_i, a^*_{-i})$$

za svaku akciju $a_i \neq a^*_i$ igrača i.

4.6. Funkcije najboljeg odgovora

(Best response functions)

Do sada smo razmatrali isključivo igre u kojima su učestvovala dva igrača i u kojima je svaki igrač na raspolaganju imao samo mali broj akcija, pa je traženje Nešovog ekvilibrijuma moglo da se radi i „peške“. Ipak, čim se broj mogućih akcija poveća i igra zakomplikuje, moramo pribegavati nekim efikasnijim metodama traženja ekvilibrijuma. Jedan takav metod je upravo pomoću funkcija najboljeg odgovora.

Posmatrajmo igru u kojoj učestvuje više igrača i neka svaki igrač može preduzeti veliki broj akcija od kojih mu svaka nosi određenu isplatu. Nas interesuju one akcije koje su najbolje po njega. U primeru 4.4.2 imali smo situaciju gde je B bila najbolja opcija za igrača 1 ukoliko i igrač 2 izabere opciju B, dok ukoliko bi igrač 2 birao S, tada bi i za igrača 1 odjednom bilo bolje da i on izabere S. Naravno, već u slučaju kada u igru uđe treći igrač, razvoj situacije je malo teže kontrolisati. Stoga, obeležićemo skup najboljih akcija igrača i u slučaju da ostali biraju komplet akcija a_{-i} sa $B_i(a_{-i})$, ili preciznije

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i\colon\ u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a'_i, a_{-i}),\ \ \forall a'_i \in A_i\}.$$

Znači, akcije unutar skupa $B_i(a_{-i})$ su najmanje jednako dobre koliko i sve druge akcije igrača i u momentu kada ostali igrači izaberu strategije definisane sa a_{-i}. B_i se zove funkcija najboljeg odgovora za igrača i i ona svakom mogućem kompletu akcija drugih igrača, dodeljuje po jedan skup najboljih akcija igrača i. Funkcije najboljeg odgovora možemo iskoristiti i da definišemo Nešov ekvilibrijum. [13]

Definicija 4.6.1: [13] Portfolio akcija a^* je Nešov ekvilibrijum strateške igre sa ordinalnim preferencijama ako i samo ako je akcija preduzeta od strane svakog pojedinačnog igrača najbolji odgovor na komplet akcija preduzet od strane svih ostalih igrača, odnosno važi

$$a^*_{\boldsymbol{i}} \in B_i(a^*_{-i}) \qquad (\cdot)$$

za svakog igrača i.

U slučaju da svaki igrač ima jedinstven najbolji odgovor na svaki komplet akcija drugih igrača, onda uslov (·) možemo da prikažemo u obliku jednačina. Ovde je za svaki komplet akcija a_{-i} skup $B_i(a_{-i})$ jednočlan, odnosno $B_i(a_{-i}) = \{b_i(a_{-i})\}$. Dalje ćemo usvojiti zapis $B_i(a_{-i}) = b_i(a_{-i})$. Tada je uslov (·) ekvivalentan uslovu

$$a^*_i = b_i(a^*_{-i})$$

za svakog igrača i. Na primer, ako imamo samo dva igrača, označićemo ih sa 1 i 2 i pisati

$$a_1^* = b_1(a_2^*)$$
$$a_2^* = b_2(a_1^*).$$

Očigledno, u igri dva igrača u kojoj svaki igrač ima jedinstven najbolji odgovor na svaku akciju drugog igrača, (a_1^*, a_2^*) je Nešov ekvilibrijum ako i samo ako je akcija igrača 1 a_1^* najbolji odgovor na akciju igrača 2 a_2^*, dok je akcija a_2^* igrača 2 najbolji odgovor na akciju a_1^* prvog igrača.

Primer 4.6.1: [13] Posmatrajmo igru u kojoj učestvuju dva igrača, gde igrač 1 ima na raspolaganju akcije T, M, B a igrač 2 akcije L, C, R. Neka je njihova isplata u zavisnosti koje akcije bivaju preduzete data sledećom bimatricom:

Igrač 2

Igrač 1
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} L & C & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ M \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} (1,2) & (2,1) & (1,0) \\ (2,1) & (0,1) & (0,0) \\ (0,1) & (0,0) & (1,2) \end{bmatrix} \end{array}$$

Slika 4.6.1: Traženje Nešovog ekvilibrijuma pomoću funkcija najboljeg odgovora za igru 2 igrača

Razmotrimo sada šta su čije najbolje akcije u različitim slučajevima. Ukoliko igrač 2 igra opciju L, onda je M najbolji odgovor igrača 1 (korisnost je 2). Za akciju C igrača 2 najbolja akcija prvog igrača je T, dok ukoliko drugi igrač odigra akciju R, onda je prvom igraču najbolje da igra T ili B jer je njegova isplata u oba slučaja jednaka i iznosi 1. Naznačimo to u bimatrici:

Igrač 2

Igrač 1
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} L & C & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ M \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} (1\,,2) & (2^*,1) & (1^*,0) \\ (2^*,1) & (0\,,1) & (0\,,0) \\ (0\,,1) & (0\,,0) & (1^*,2) \end{bmatrix} \end{array}$$

Slika 4.6.2: Sa * su označeni najbolji odgovori igrača 1 na akcije igrača 2

Dalje, posmatrajmo odgovore igrača 2 na akcije igrača 1. Ukoliko igrač 1 odigra T najbolja akcija igrača 2 je L, ako igrač 1 odigra M najbolji odgovor igrača 2 je L ili C, obzirom da obe akcije donose isplatu 1. U slučaju da igrač 1 izabere B, najbolji odgovor igrača 2 je R. Upotpunimo sada bimatricu:

Igrač 2

Igrač 1
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} L & C & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ M \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} (1\,,2^*) & (2^*,1) & (1^*,0) \\ (2^*,1^*) & (0\,,1^*) & (0\,,0) \\ (0\,,1) & (0\,,0) & (1^*,2^*) \end{bmatrix} \end{array}$$

Slika 4.6.3: Sada su sa * su označeni i najbolji odgovori igrača 2 na akcije igrača 1

Na kraju, potrebno je da pronađemo sva polja u kojima su obe vrednosti označene sa zvezdicom i na taj način ćemo doći do Nešovih ekvilibrijuma za ovu igru. Očigledno, to su polja (M, L) i (B, R).

Primer 4.6.2: [13] **Doprinos zajedničkoj imovini (contribution to a public good)**

Posmatrajmo model u kome dve osobe treba da odluče da li će i koliko učestvovati u kreiranju zajedničke imovine (možemo ovo zamisliti kao formiranje svote novca koja će oboma biti dostupna). Oba lica treba da odluče da li i koliko žele da učestvuju u ovoj akciji. Neka je sa w_i označena količina bogatstva osobe i, i pretpostavimo da će svaka osoba uložiti neki deo svog bogatstva koji ćemo označiti sa c_i, $(0 \leq c_i \leq w_i)$. Ostatak bogatstva svake osobe odlazi na zadovoljavanje njihovih sopstvenih potreba. Neka je količina zajedničke imovine jednaka sumi novčanih doprinosa obe osobe. Jasno, svakoj osobi je u interesu koliko da učestvuje u formiranju zajedničke svote novca, toliko i da deo svog novca ostavi za sebe kako bi mogla zadovoljiti svoje prohteve bez da mora da ih opravdava drugoj osobi. Neka su preferencije obe osobe date funkcijama korisnosti

$$u_i(c_1, c_2) = v_i(c_1 + c_2) + w_i - c_i, \; i = 1{,}2$$

gde su v_i, $i = 1{,}2$ funkcije promenljive $c_1 + c_2$, ili alternativno, obzirom da su w_1 i w_2 konstante, možemo ih zapisati kao

$$u_i(c_1, c_2) = v_i(c_1 + c_2) - c_i, \; i = 1{,}2.$$

Zapišimo ovo formalno:

Igrači: 2 osobe.

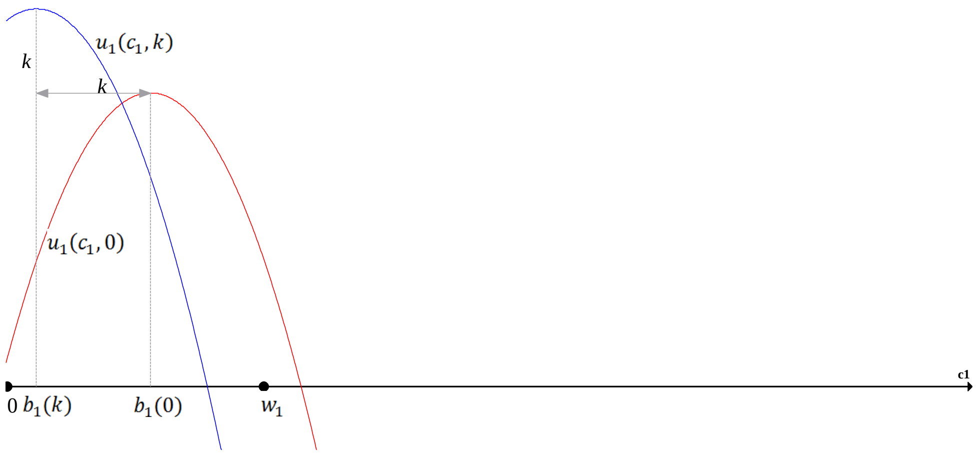
Akcije: za svakog igrača to su svi mogući doprinosi c_i, $0 \leq c_i \leq w_i$, $i = 1{,}2$.

Preferencije: Date su funkcijama korisnosti $u_i(c_1, c_2) = v_i(c_1 + c_2) - c_i, \; i = 1{,}2$.

Razmotrimo funkcije najboljeg odgovora za oba igrača. Jasno, kada igrač 2 uloži sumu c_2, onda je najbolji odgovor igrača 1 da uloži sumu novca c_1 koja će maksimizirati $v_1(c_1 + c_2) - c_1$. Obzirom da ne znamo kako izgleda funkcija v_1 ovo neće moći biti eksplicitno izračunato. Ipak, hajde da vidimo šta će se desiti za $c_2 = 0$. Pretpostavimo da je funkcija v_1 takva da $u_1(c_1, 0)$ prvo raste do svog maksimuma, a potom dalje opada, kao što je prikazano na slici 4.6.4. Tada je najbolji odgovor igrača 1 na $c_2 = 0$, označen sa $b_1(0)$ jedinstven. Ovaj najbolji odgovor je suma c_1 koja će maksimizirati $v_1(c_1) - c_1$, $0 \leq c_1 \leq w_1$. Pretpostavimo da će biti $0 < b_1(0) < w_1$, odnosno optimalan doprinos igrača 1 u slučaju da igrač 2 ne uloži ništa jeste pozitivna vrednost koja je manja od njegovog ukupnog bogatstva. Šta će se desiti ukoliko igrač 2 uloži sumu novca $c_2 = k > 0$? Tada igrač 1 treba da uloži sumu novca c_1 koja će maksimizirati $u_1(c_1, k) = v_1(c_1 + k) - c_1$. Sada imamo

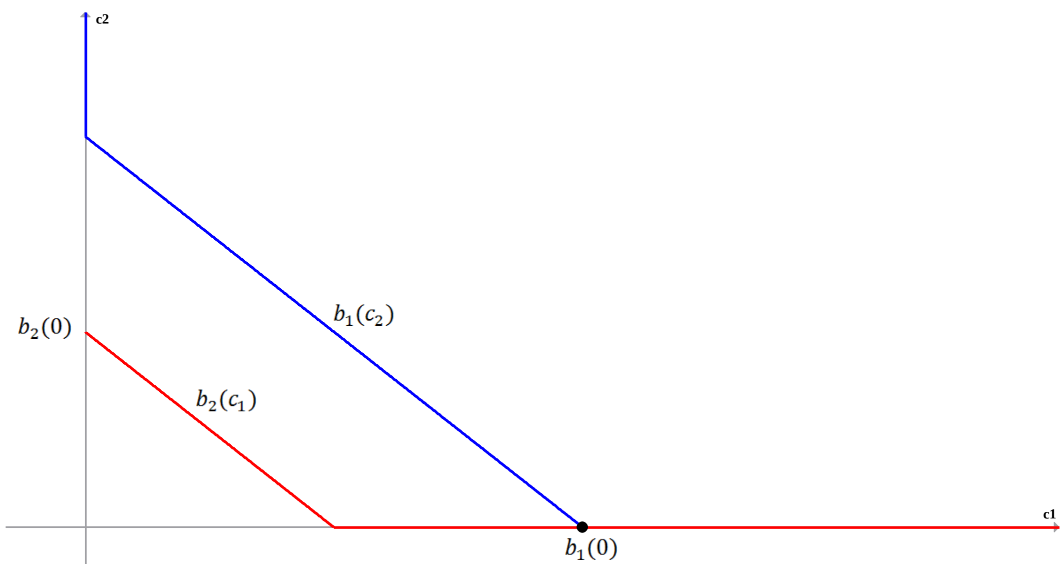
$$u_1(c_1, k) = u_1(c_1 + k, 0) + k.$$

Tada je grafik $u_1(c_1, k)$ kao funkcije od c_1, translacija za k jedinica ulevo a potom za k jedinica nagore grafika $u_1(c_1, 0)$ kao funkcije od c_1 (Slika 4.6.4). Zaključujemo da će u slučaju $k \leq b_1(0)$ biti $b_1(k) = b_1(0) - k$. Jasno, kako doprinos osobe 2 poraste sa 0 na k, tada najbolji odgovor osobe 1 padne za k. Ukoliko je $k > b_1(0)$, obzirom na izgled funkcije $u_1(c_1, 0)$, biće $b_1(k) = 0$. Iz navedene analize sledi zaključak da ukoliko igrač 2 poveća svoje učešće u formiranju zajedničke imovine za iznos k, onda je najbolji odgovor igrača 1 da svoj doprinos smanji upravo za k, ili da svoj doprinos redukuje na 0 ukoliko je $k > b_1(0)$. Slična analiza primenjuje se za igrača 2 kada se menja doprinos igrača 1. Za svaku dodatnu jedinicu kojim osoba 1 doprinosi zajedničkoj imovini, osoba 2 najbolje odgovara tako što će svoj doprinos umanjiti upravo za jedinicu, dok god je njen doprinos nenegativan.



Slika 4.6.4: Odnos između odgovora $b_1(0)$ i $b_1(k)$ igrača 1 u Igri doprinosa zajedničkoj imovini

Obzirom da se funkcije v_1 i v_2 mogu razlikovati, jasno je da najbolji odgovor igrača 1 $b_1(0)$ za $c_2 = 0$ može biti različit od vrednosti $b_2(0)$ što je najbolji odgovor igrača 2 za $c_1 = 0$. Ipak, zajedničko za obe funkcije $b_1(0)$ i $b_2(0)$ jeste to da im je nagib -1 kada primaju pozitivne vrednosti. Na slici 4.6.5 vidimo slučaj $b_1(0) > b_2(0)$. Plavom bojom obeleženi su najbolji odgovori osobe 1 na različite vrednosti ulaganja igrača 2, dok su crvenom bojom naznačeni najbolji odgovori igrača 2 na ulaganja igrača 1.



Slika 4.6.5: Funkcije najboljeg odgovora u Igri doprinosa zajedničkoj imovini kad je $b_1(0) > b_2(0)$; Plavom bojom obeleženi su najbolji odgovori osobe 1 na različite vrednosti ulaganja igrača 2, dok su crvenom bojom naznačeni najbolji odgovori igrača 2 na ulaganja igrača 1.

Vidimo da u slučaju $b_1(0) > b_2(0)$ igra ima jedinstven Nešov ekvilibrijum, i to je tačka $(b_1(0), 0)$ u kojoj igrač 2 ne daje nikakav doprinos zajedničkoj imovini. S druge strane, ukoliko važi $b_1(0) < b_2(0)$ jedinstven Nešov ekvilibrijum je par akcija $(0, b_2(0))$ tj. tačka u kojoj je doprinos igrača 1 jednak nuli. Očigledno, osoba koja daje veći doprinos u situaciji kada druga osoba ne ulaže ništa je jedina osoba koja doprinosu Nešovom ekvilibrijumu. Samo u slučaju $b_1(0) = b_2(0)$, koji je vrlo malo verovatan ukoliko se funkcije v_1 i v_2 razlikuju, obe osobe imaju pozitivan doprinos u tački Nešovog ekvilibrijuma. Tada se dve funkcije poklapaju, te je svaki par doprinosa (c_1, c_2) takav da je $c_1{+}c_2 = b_1(0)$ i pritom $c_i \geq 0$, $i = 1{,}2$ Nešov ekvilibrijum.

4.7. Dominacija strategija

Dominacija strategija je čest pojam u teoriji igara koji ukoliko postoji, može u velikoj meri pomoći u redukovanju bimatrica velikih dimenzija kako bi se odredio karakter igre i njen Nešov ekvilibrijum. Da je strategija A dominirajuća u odnosu na strategiju B znači da će igrač uvek kada na raspolaganju ima samo te dve akcije, birati akciju A jer mu je ona isplativija. Formalno objašnjenje ove osobine dato je sledećom definicijom:

Definicija 4.7.1: [13] (stroga dominacija) U strateškoj igri sa ordinalnim preferencijama strategija a_i'' igrača i striktno dominira nad strategijom a_i' ukoliko važi

$$u_i(a_i'', a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i})$$

za svaki portfolio akcija drugih igrača a_{-i}, gde je sa u_i data funkcija isplate igrača i. Strategiju a_i'' nazivamo dominanirajućom strategijom, dok se a_i' naziva dominiranom strategijom.

Primer 4.7.1: [13] Podsetimo se bimatrice date u Dilemi zatvorenika. U vrstama se jasno vidi da za igrača 1 strategija P strogo dominira nad strategijom NP jer šta god da izabere igrač 2, priznanje zločina će mu doneti veću korisnost (3 u odnosu na 2 i 1 u odnosu na 0). Za igrača 2 je takođe strategija P strogo dominantna u odnosu na NP.

Zatvorenik 2

$$\text{Zatvorenik 1} \quad \begin{array}{c} \\ NP \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} NP & P \end{array} \\ \begin{bmatrix} (2{,}2) & (0{,}3) \\ (3{,}0) & (1{,}1) \end{bmatrix} \end{array}$$

Primer 4.7.2: [13] U primeru Bah ili Stravinski dominacija određene strategije u odnosu na drugu ne postoji. Posmatrajući strategije igrača 1 date vrstama bimatrice vidimo da je $2 > 0, 0 < 1$, dok u slučaju strategija igrača 2 imamo situaciju $1 > 0, 0 < 2$.

Stravinski

$$\text{Bah} \quad \begin{array}{c} \\ B \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B & S \end{array} \\ \begin{bmatrix} (2{,}1) & (0{,}0) \\ (0{,}0) & (1{,}2) \end{bmatrix} \end{array}$$

Treba, naime, imati u vidu da to što je jedna strategija dominirajuća nad drugom ne znači automatski i njenu dominaciju nad svim postojećim strategijama, mada nije isključeno da se ovo može dogoditi. Strogo dominirana akcija nikada ne može biti najbolji odgovor na akcije drugih igrača, jer šta god oni odigrali, bolje je preduzeti neku drugu akciju kao odgovor. Obzirom da je Nešov ekvilibrijum za pojedinačnog igrača strategija koja predstavlja najbolji odgovor na skup akcija drugih igrača, jasno je da strogo dominirana akcija ne može biti deo Nešovog ekvilibrijuma. [7]

Osim stroge postoji i takozvana slaba dominacija (mada se u literaturi često koristi samo reč dominacija). Nju navodimo u definiciji 4.7.2:

Definicija 4.7.2: [13] (slaba dominacija) U strateškoj igri sa ordinalnim preferencijama strategija a_i'' igrača i (slabo) dominira nad strategijom a_i' ukoliko važi

$$u_i(a_i'', a_{-i}) \geq u_i(a_i', a_{-i})$$

za svaki portfolio akcija drugih igrača a_{-i}, kao i

$$u_i(a_i'', a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i})$$

za neki portfolio akcija drugih igrača, gde je sa u_i data funkcija isplate igrača i.

Kod strogog Nešovog ekvilibrijuma, jasno, nijedna akcija ne može biti slabo dominirana, jer je svaka akcija igrača koja ne pripada ravnotežnom portfoliju za njega strogo manje isplativa. Ipak, za "nestrogi" Nešov ekvilibrijum važi da unutar njega može postojati slabo dominirana akcija.

Primer 4.7.3: [13] U bimatrici

igrač 2

Igrač 1
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} (1,1) & (2,0) \\ (0,2) & (2,2) \end{bmatrix} \end{array}$$

Slika 4.7.1: Primer strateške igre sa Nešovim ekvilibrijumom (C, C) u kom su akcije oba igrača slabo dominirane

vidimo da postoje dva Nešova ekvilibrijuma, i to (B, B) i (C, C). U slučaju prvog ekvilibrijuma, za oba igrača je strategija B slabo dominirajuća u odnosu na strategiju C. Ipak, u slučaju ekvilibrijuma (C, C) strategije oba igrača su slabo dominirane.

4.8 Mešovite igre i mešovite strategije

U momentu kada smo u poglavlju 4.5. uveli pojam Nešovog ekvilibrijuma, zamišljali smo situaciju u kojoj su umesto pojedinačnih igrača u igri suprotstavljene čitave populacije, ali da pri svakom sledećem potezu iz populacije istupa jedna slučajno izabrana osoba koja će taj potez izvesti. Tada je svaka populacija kreirala svoje mišljenje o tipičnim protivnicima iz drugih populacija, a to su bile više slike samih populacija nego konkretnih osoba unutar njih. Tom pretpostavkom smo uveli takozvanu izolaciju igrača, tj. situaciju u kojoj oni imaju predstavu o opštem ponašanju protivnika, ali ne i o konkretnoj ličnosti koja igra protiv njih. Takođe, do sada je razmatran isključivo slučaj u kome svi igrači iz jedne populacije preduzimaj isti potez (biraju istu strategiju), iako je sasvim jasno da je ovo jedna veoma specifična situacija. Slučajem kada igrači iste populacije mogu vući različite poteze bave se mešovite igre i unutar njih se uglavnom razmatra jedna od dve ponuđene opcije:

- **Opcija 1**: Različiti igrači iz iste populacije biraju različite akcije, ali jedan igrač svaki put bira istu akciju;
- **Opcija 2**: Svaki igrač u momentu kada igra igru bira svoju akciju probabilistički, odnosno prema određenoj raspodeli koja se u toku igre ne menja.

Mi ćemo prvenstveno razmatrati drugi slučaj, a ravnotežne tačke koje se u ovom slučaju dostižu nazivaćemo **stohastičim ravnotežnim tačkama**. [13]

Primer 4.8.1: [13] Pretpostavimo da dva igrača poseduju po novčić i da istovremeno svaki od njih treba da izabere jednu stranu novčića. Ukoliko obojica izaberu istu stranu, igrač 2 plaća 1 dinar igraču 1, dok u slučaju da izabrane strane ne budu iste igrač 1 daje 1 dolar igraču 2. Bimatrica ove igre izgleda ovako:

igrač 2

Igrač 1
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} G & P \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ P \end{array} & \begin{bmatrix} (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) \end{bmatrix} \end{array}$$

Slika 4.8.1: Bimatrica Igre bacanja novčića

Iz strukture ove bimatrice je jasno da nema "čistog" Nešovog ekvilibrijuma, odnosno nijedno od 4 ponuđena stanja nema osobinu da nekom od igrača nije povoljnije da iz njega izađe, te se stoga ravnoteža neće postići ukoliko pojedinačan igrač u svakoj partiji bira istu stranu novčića. Pokazaćemo sada da se ravnoteža ove igre postiže ukoliko svaki igrač bira jednu od ponuđene dve strane novčića sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$. Pretpostavimo da igrač 2 bira stranu G s verovatnoćom $\frac{1}{2}$ (što znači da se i strana P bira s istom tom verovatnoćom), dok igrač 1 bira stranu G s verovatnoćom p, a P s verovatnoćom 1- p. U ovakvoj situaciji šansa da se dese slučajevi (G,G) i (G,P) je $\frac{1}{2}p$, dok je $\frac{1}{2}(1-p)$ verovatnoća da se dese slučajevi (P,G) i (P,P). Verovatnoća da prvi igrač dobije 1 dinar je $\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}(1-p)=\frac{1}{2}$, a isto toliko iznosi verovatnoća da izgubi 1 dinar. Očigledno, raspodela njegovog dobitka ne zavisi od p, te je svaka vrednost $p \in [0,1]$ optimalna. U suštini, igrač 1 ne može postići ništa bolje od onoga što postiže u slučaju kada je $p=\frac{1}{2}$, tj. kada s jednakom verovatnoćom bira stranu G ili P. U obrnutom slučaju (kada igrač 1 bira neku od strana s verovatnoćom $\frac{1}{2}$, a igrač 2 bira stranu G s verovatnoćom q, a stranu P sa verovatnoćom $1-q$) sličnom analizom dolazimo do zaključka da je $q=\frac{1}{2}$.
Pokazaćemo takođe da pod pretpostavkom o racionalnosti preferencija oba igrača, tj. pretpostavkom da obojica žele da njihova verovatnoća dobijanja 1 dinara bude maksimalna moguća, ne postoji nijedno drugo ravnotežno stanje osim stanja kada oba biraju G s verovatnoćom $\frac{1}{2}$. Naime, neka igrač 1 bira stranu G s verovatnoćom p, dok igrač 2 bira G s verovatnoćom q. Tada je igrač 1 u sledećoj situaciji:

- Dobija 1 dinar s verovatnoćom $pq+(1-p)(1-q)=1-q+p(2q-1)$
- Gubi 1 dinar s verovatnoćom $p(1-q)+(1-p)q=q+p(1-2q)$

ili, prikazano raspodelom : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-q+p(2q-1) & q+p(1-2q) \end{pmatrix}$.

Ukoliko je $q<\frac{1}{2}$, verovatnoća dobijanja 1 dinara opada sa rastom p, dok verovatnoća gubitka 1 dinara raste sa rastom p. Jasno, za igrača 1 je stoga najbolja opcija da je $p=0$. Znači, ukoliko igrač 2 bira stranu G s verovatnoćom manjom od $\frac{1}{2}$ za igrača 1 je najbolje da svaki put bira stranu P. U slučaju $q>\frac{1}{2}$ analognom analizom zaključujemo da igrač 1 svaki put treba da bira stranu G.
Posmatrajmo sada situaciju u kojoj igrač 1 bira stranu G sa sigurnošću. Tada je igraču 2 najsrećnija opcija da bira P sa sigurnošću. S druge strane ukoliko bi se prvi igrač odlučio da stalno bira P, onda je optimalna strategija za igrača 2 da svaki put bira G. Jasno je da ne postoji ravnotežno stanje za situaciju u kojoj igrač 2 bira G s verovatnoćom različitom od $\frac{1}{2}$. Simetričnom analizom dolazimo do zaključka da takođe nema ravnotežnog stanja ukoliko igrač 1 ne bira stranu G s verovatnoćom drugačijom od $\frac{1}{2}$.

Navedeni primer predstavlja igru u čijoj jednoj partiji igrač ima dva moguća ishoda, to su 1 dinar ili -1 dinar. Poštujući pretpostavku o racionalnosti, nije bilo teško zaključivati kakve su u ovom slučaju preferencije igrača, no takođe je bilo relativno jednostavno zaključiti kakve su bile preferencije igrača prema takozvanim lutrijama, odnosno situacijama gde je moguć dobitak prikazan raspodelom. Jasno, ako igrač preferira dobitak a u odnosu na dobitak b i ako za $p,q \in [0,1]$ važi $p>q$, onda on i preferira lutriju u kojoj mu je mogućnost dobitka a jednaka p (a mogućnost dobitka b je $1-p$) u odnosu na onu u kojoj mu je mogućnost dobitka a jednaka q (a mogućnost dobitka b je $1-q$). Već u slučaju kada npr. igrač ima 3 ili više mogućnosti dobitka, nije tako jednostavno zaključivati kakve su njegove preferencije prema lutrijama.

Posmatrajmo situaciju u kojoj igraču $i, i = 1,2, \dots, n$ može da se desi jedan od tri ishoda - a, b ili c, i neka su dve lutrije P, Q prikazane raspodelama:

$$P: \begin{pmatrix} a & b & c \\ p_a & p_b & p_c \end{pmatrix}, \quad Q: \begin{pmatrix} a & b & c \\ q_a & q_b & q_c \end{pmatrix}, \text{ odnosno}$$

u slučaju P ishod a dešava se s verovatnoćom p_a, ishod b s verovatnoćom p_b, a verovatnoća ishoda c je p_c, dok se u slučaju Q ishodi a, b, c dešavaju s verovatnoćama q_a, q_b, q_c respektivno. U situacijama kao što je ova posmatraju se i porede tzv. **očekivane vrednosti funkcije isplate nad determinističkim ishodima** ovih lutrija, tj. za svakog igrača i postoji funkcija u_i sa osobinom da igrač (strogo) preferira jednu lutriju u odnosu na drugu ako i samo ako je očekivana vrednost funkcije isplate prve lutrije (strogo) veća od očekivane vrednosti funkcije isplate druge. U slučaju sa P i Q, kada je isplata igrača i data funkcijom u_i, igrač strogo preferira P u odnosu na Q ako i samo ako

$$p_a u_i(a) + p_b u_i(b) + p_c u_i(c) > q_a u_i(a) + q_b u_i(b) + q_c u_i(c).$$

Prvi naučnici koji su se sistematičnije bavili preferencijama u odnosu na lutrije koje se prikazuju pomoću očekivanih vrednosti funkcije isplate nad determinističkim ishodima bili su fon Nojman i Morgenštern, te se stoga ove preferencije u literaturi često nazivaju vNM preferencijama. Funkcija isplate u_i nad determinističkim ishodima čijom očekivanom vrednošću se opisuju preferencije igrača naziva se Bernulijeva[22] funkcija.

Podsetimo se da smo u odeljku 4.1. kao osnovne komponente strateških igara naveli skup igrača, zatim moguće akcije za svakog igrača, i na kraju njhove preferencije u odnosu na moguće akcije. Slično, kod mešovitih igara, osnovne komponente su:

- skup igrača,
- skup mogućih akcija za svakog igrača,
- preferencije svakog igrača u odnosu na lutrije (koje donose različite ishode sa različitim verovatnoćama), a koje su date očekivanom vrednošću funkcije isplate u_i nad mogućim ishodima.

4.8.1 Nešov ekvilibrijum

Za određivanje Nešovog ekvilibrijuma, kao što smo ranije pomenuli, dozvoljavamo da svaki učesnik igre izabere svoju raspodelu verovatnoća nad skupom mogućih akcija. Upravo ova raspodela naziva se **mešovita strategija**. Znači, kako bi mešovita strategija igrača i bila potpuno određena, potrebno je da se svakoj akciji koju igrač i može preduzeti dodeli odgovarajuća verovatnoća koja svedoči o šansi preduzimanja baš te akcije. Neka je α portfolio mešovitih strategija, a neka je sa α_i označena mešovita strategija igrača i. Jasno, mešovita strategija nekog igrača može biti takva da dodeljuje verovatnoću 1 nekoj akciji, i to će značiti da taj igrač uvek bira jednu te istu akciju, a to se još naziva i **čista strategija**. [13]

Suština Nešovog ekvilibrijuma mešovitih strategija je ista kao i ranije - Nešov ekvilibrijum je onaj portfolio mešovitih strategija α^* koji ima osobinu da nijedan igrač i ne može biti srećniji ukoliko iz njega istupi.

Definicija 4.8.1.1: [13] Portfolio mešovitih strategija α^* u slučaju mešovitih igara sa vNM preferencijama je Nešov ekvilibrijum ako za svakog igrača i i svaku mešovitu strategiju α_i igrača i važi da je njegova očekivana isplata od portfolia α^* barem onolika kolika je njegova isplata od portfolia $(\alpha_i, \alpha^*_{-i})$, u odnosu na funkciju isplate čija očekivana vrednost prikazuje preferencije tog igrača.

[22] Daniel Bernoulli, 1700-1782, švajcarski matematičar i fizičar

4.9. Ekstenzivna forma igre

Do sada je naša pretpostavka bila da igrači vuku poteze jednovremeno, odnosno da nemaju informaciju o potezu koji vuče njihov protivnik. Na taj način je eliminisana vremenska dimenzija igre koja je prisutna u slučaju da igrači vuku poteze naizmenično. Takođe, podrazumevalo se da igrač izabere svoj plan strategija jednom i zauvek, odnosno da se sve do kraja igre pridržava tog plana. Ekstenzivna forma igre se bavi naizmeničnim potezima igrača, a ona takođe može da razmatra slučajeve kada igrači menjaju svoje mišljenje u toku igre. U zavisnosti od toga da li igrači poznaju ili ne poznaju prethodni potez protivnika razlikujemo dve vrste ekstenzivnih igara – igre sa potpunom i igre sa nepotpunom informacijom.

Ekstenzivna forma igre je graf strukture stabla. Stablo je aciklični graf u kome su svi čvorovi povezani. U stablu postoji jedinstveni čvor kome ne prethodi ni jedan drugi čvor i on se naziva koren stabla, dok postoji i jedan ili više čvorova koje ne sledi nijedan drugi čvor i njih nazivamo terminalni čvorovi (listovi). Od korena pa do bilo kog lista postoji jedinstveni put kroz stablo. Formalnije, stablo predstavlja uređeni par (T, F) gde je T skup čvorova, dok je F skup grana, gde kažemo da je F funkcija koja svakom čvoru $x \in T$ pridružuje podskup $F(x) \subset T$ čvorova koji direktno slede čvor x. Od korena stabla x_0 do bilo kog čvora $x = x_s$ postoji jedinstveni put $(x_0, x_1, \dots, x_s)$.

Stablo igre nam prikazuje mogući niz poteza koji utiču na krajnji ishod igre. Skup pozicija igre se opisuje čvorovima stabla. U svakom čvoru stabla jedan igrač ima pravo da vuče jedan potez, i to da izabere jednu akciju iz raspoloživog skupa prikazanog granama koje izlaze iz tog čvora. Igra se završava dolaskom do terminalnog čvora (lista). [7]

4.9.1 Ekstenzivna forma igre sa potpunom informacijom

Kako bismo objasnili igre sa potpunom informacijom potrebno je, kao i ranije, odrediti skup igrača i njihove preferencije. U slučaju ekstenzivnih igara takođe je potrebno odrediti redosled po kome igrači vuku poteze, kao i akcije koje igrači mogu preduzeti kada dođe red na njihov potez (ova stavka je postojala i ranije,ali kod ekstenzivnih igara će to biti predstavljeno na drugačiji način). Svaki mogući niz (redosled) akcija tokom igre naziva se **terminalna istorija**, dok ćemo u cilju određivanja redosleda po kom igrači vuku poteze koristiti tzv. **funkciju igrača** (player function). Znači, ekstenzivna forma igre sastoji se iz četiri komponente:

- igrači
- terminalne istorije
- funkcija igrača
- preferencije za svakog igrača

Treba obratiti pažnju da na ovaj način nisu eksplicitno navedene akcije koje igrač u toku igre može preduzimati, no o njima zaključujemo upravo na osnovu terminalnih istorija i funkcija igrača. [13]

Primer 4.9.1.1: [13] Posmatrajmo situaciju u kojoj imalac teritorije (incumber) – igrač 2 dolazi u situaciju u kojoj se suočava sa napadačem na njegovu teritoriju (challenger) - igračem 1, (npr. imalac teritorije može biti firma koja ima monopol na tržištu, a napadač može biti druga firma koja želi da uđe na to tržište). Igrač 1 ulazi ili ne ulazi na teritoriju, a ukoliko uđe onda igrač 2 ima dve opcije – da se bori ili da se pokori. Jasno, tri terminalne istorije ove ekstenzivne igre su $(ne\, napada)$, $(napada, borba)$, $(napada, pokoravanje)$, dok funkcija igrača dodeljuje napadaču startnu poziciju (on započinje igru), a imalac teritorije dolazi na red posle poteza $napada$ napadača.

Na osnovu specifikacije terminalnih istorija i funkcije igrača, jasno je da su dve akcije dostupne igraču 1 na startu igre $-$ $ne\ napada$ i $napada$, dok su akcije igrača 2 $borba$ i $pokoravanje$, jer one predstavljaju odgovor na napad igrača 1. Generalno, pod pretpostavkom da su (C, D) i (C, E) terminalne istorije, a funkcija igrača dodeljuje igrača 1 startu igre, a igrača 2 istoriji C (on igra nakon poteza C prvog igrača), zaključujemo da su akcije dostupne drugom igraču upravo D i E.

Iako terminalne istorije predstavljaju skup različitih redosleda akcija, treba strogo voditi računa o tome da nije svaki redosled akcija ujedno i terminalna istorija. Npr. ukoliko je (C, D) terminalna istorija, onda to nije i samo C, jer zbog toga što je (C, D) terminalna istorija C se može birati na startu, a potom može uslediti odgovor D i tek se tu igra završava. Prava podistorija terminalne istorije ne može biti terminalna istorija za sebe. Uopšteno, podistorija konačnog niza (redosleda) akcija $\left(a^1, a^2, \ldots, a^k\right)$ može biti prazan niz u oznaci ∅ (početak igre), zatim svi nizovi oblika $(a^1, a^2, \ldots, a^m)$, $1 \leq m < k$, kao i sam niz $\left(a^1, a^2, \ldots, a^k\right)$. Podistorije beskonačnog niza akcija $(a^1, a^2, \ldots)$ su prazan niz u oznaci ∅ (početak igre), svi nizovi oblika $(a^1, a^2, \ldots, a^m)$, $m \in \mathbb{N}$, kao i čitav taj beskonačan niz. Podistorija niza akcija različita od tog niza naziva se prava podistorija. Niz akcija koji je podistorija neke terminalne istorije u literaturi se često naziva i jednostavno – istorija. U primeru 4.9.1.1 podistorije npr. terminalne istorije $(napada, borba)$ su ∅, $napada$, $(napada, borba)$.

Definicija 4.9.1.1: [13] Ekstenzivna igra sa potpunom informacijom sastoji se iz:

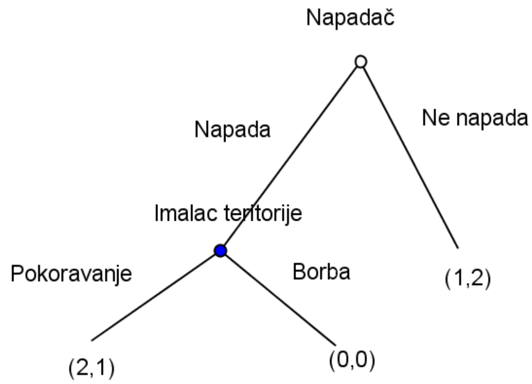
- skupa igrača
- skupa svih mogućih nizova (redosleda) akcija (terminalnih istorija), sa osobinom da nijedan od njih nije prava podistorija nekog drugog niza akcija
- funkcije igrača koja dodeljuje igrača svakom nizu koji predstavlja pravu podistoriju neke terminalne istorije
- preferencija svakog igrača u odnosu na skup terminalnih istorija.

Kako pravu podistoriju terminalne istorije nazivamo i istorijom, to što funkcija igrača npr. dodeli igrača i nekoj istoriji h znači da igrač i vuče potez odmah posle h. Što se tiče preferencija, ovde kao i do sada koristimo funkcije isplate za njihov prikaz.

Primer 4.9.1.2: [13] (nastavak primera 4.9.1.1.) Pretpostavimo da je za napadača u prethodnom primeru najbolji ishod da on napadne, a da mu se drugi igrač pokori, dok je najlošiji da napadne, a imalac teritorije počne da se bori. S druge strane, za imaoca bi bilo najbolje da se napadač povuče $(ne\ napada)$, a najnepovoljnija situacija mu je da napadač uđe na njegovu teritoriju i dođe do borbe. Odredimo ključne aspekte ove ekstenzivne igre:

- igrači: imalac teritorije, napadač
- terminalne istorije: $ne\ napada, (napada, borba), (napada, pokoravanje)$
- funkcija igrača $P(\emptyset) = napadač$, $P(napada) = imalac\ teritorije$
- preferencije: $u_1(napada, pokoravanje) = 2$, $u_1(ne\ napada) = 1, u_1(napada, borba) = 0$; $u_2(ne\ napada) = 2, u_2(napada, pokoravanje) = 1, u_2(napada, borba) = 0$, gde su u_1 i u_2 funkcije korisnosti oba igrača.

Igra je predstavljena dijagramom na slici 4.9.1.1. Prazan kružić na početku simbolizuje praznu istoriju, odnosno početak igre, a iznad nje je navedeno da igru započinje napadač, $P(\emptyset) = napadač$. Zatim dve grane predstavljaju moguće izbore prvog igrača, a to su da napadne ili ne napadne. Grana $napada$ vodi do obojenog kružića koji simbolizuje da je red na potez igrača 2, a on ima mogućnost da bira pokoravanje ili borbu. Na kraju svake terminalne istorije nalazi se informacija o korisnosti koju oba igrača imaju od redosleda akcija koji predstavljaju svaku pojedinačnu terminalnu istoriju.



Slika 4.9.1.1: Skica za primer 4.9.1.2

Ponovo, akcije dostupne igračima navedene su samo indirektno u specifikacijama igre, tj. o njima zaključujemo iz terminalnih istorija i funkcije igrača. Ako je za neku neterminalnu istoriju h, niz (h, a) istorija onda je a jedna od akcija koje su dostupne igraču koji je na potezu posle h, te je stoga skup svih akcija dostupnih igraču koji vuče potez nakon h dat sa

$$A(h) = \{a: (h, a)\ je\ istorija\}.$$

Na slici 4.9.1.1 istorije su: $\emptyset$, $ne\ napada, napada, (napada, pokoravanje), (napada, borba)$. Stoga je skup akcija dostupnih napadaču dat sa $A(\emptyset) = \{napada, ne\ napada\}$, a skup akcija dostupan igraču 2 je $A(napada) = \{pokoravanje, borba\}$.

Terminalna istorija može biti konačne ili beskonačne dužine. Ukoliko je dužina najduže terminalne istorije konačna, kaže se da ekstezivna igra ima konačan horizont. Jasno, i igra sa konačnim horizontom može imati beskonačno mnogo terminalnih istorija, a to se desi ukoliko neki igrač posle određene istorije ima beskonačno mnogo akcija na raspolaganju. Ukoliko igra sa konačnim horizontom ima i konačno mnogo terminalnih istorija, kažemo da je ekstenzivna igra **konačna**.

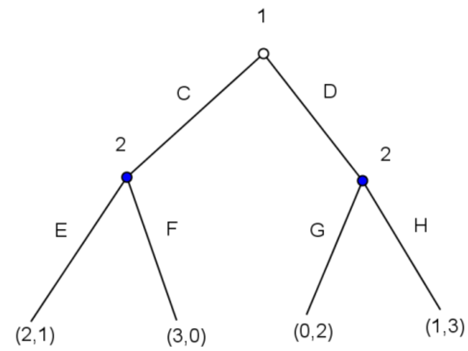
4.9.2 Rešavanje ekstenzivne forme igre sa potpunom informacijom

Jedan od načina za rešavanje ekstenzivnih igara sa potpunom informacijom je tzv. indukcija unazad. Ideja ovog metoda počiva na tome da kada god jedan igrač dođe na red da odigra potez, on za svaku svoju moguću akciju razmatra moguće akcije drugog igrača koje će uslediti, naravno vodeći se principom racionalnosti. Na osnovu tih razmatranja, igrač bira akciju u smeru one terminalne istorije koju najviše preferira. U primeru 4.9.1.2, jasno je da će rešenje igre biti $(napada, pokoravanje)$. Napadaču je jasno da u slučaju napada imalac teritorije preferira da se pokori a ne da se bori, pa je na osnovu toga i njemu (napadaču) isplativije da napadne.

Mana indukcije unazad je ta što ona nije uvek primenljiva. Naime, ukoliko bi imalac teritorije u slučaju napada bio indiferentan između borbe i pokoravanja, odnosno ukoliko bi važilo $u_2(napada, pokoravanje) = 1$, $u_2(napada, borba) = 1$, tada indukcija unazad ne bi mogla reći napadaču kako će se imalac teritorije postupiti, te bi on ostao nesiguran da li da napada ili ne. S druge strane, ukoliko imamo ekstenzivnu igru sa beskonačno dugim terminalnim istorijama, tada bi indukcija unazad opet bila onemogućena jer ne postoji kraj od koga bismo započeli analizu. Naravno, ekstenzivne igre se takođe mogu rešavati pomoću koncepta Nešovog ekvilibrijuma, koji u igrama gde je indukcija unazad dobro definisana daje iste rezultate kao i prethodno pomenuti metod. [13]

Definicija 4.9.2.1: [13] Strategija igrača i u ekstenzivnoj igri sa potpunom informacijom je funkcija koja svakoj istoriji h nakon koje je red na igrača i da odigra potez $(P(h) = i$, gde je P funkcija igrača$)$ dodeljuje akciju iz skupa $A(h)$.

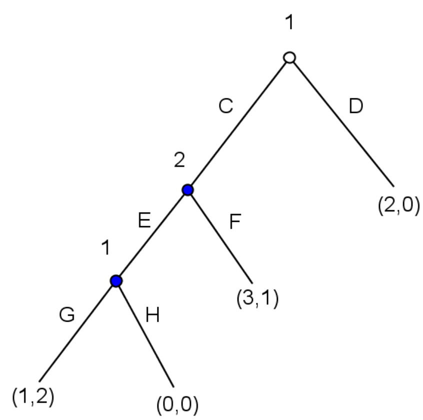
Primer 4.9.2.1: [13] U igri na slici 4.9.2.1.



Slika 4.9.2.1: Skica za primer 4.9.2.1

igrač 1 bira prvi potez i njegove moguće akcije su C i D, te on ima dve strategije – jednu koja praznoj istoriji dodeljuje akciju C i drugu koja praznoj istoriji dodeljuje akciju D. Igrač 2 je na potezu nakon obeju istorija C i D. Dostupne akcije nakon C su E i F, a nakon D dostupne su G i H, stoga je strategija igrača 2 funkcija koja dodeljuje vrednost E ili F istoriji C, kao i vrednost G ili H istoriji D. Jasno, igrač 2 onda ima 4 strategije, i to su EG, EH, FG, FH.

Primer 4.9.2.2: [13] Posmatrajmo igru na slici 4.9.2.2:



Slika 4.9.2.2: Skica za primer 4.9.2.2

Igrač 1 startuje igru i dolazi na red ponovo kada se desi istorija (C, E). U svakom od ova dva slučaja on ima dve akcije na raspolaganju, što znači da prema definiciji 4.9.2.1 ima 4 moguće strategije CG (bira C na početku, a potom G nakon istorije (C, E)), CH, DG, DH. Očigledno je da svaka od ovih strategija u sebi sadrži akciju posle istorije (C, E), iako se u slučaju da igrač 1 izabere akciju D ova istorija ne može dogoditi. Ipak, ovako definisane 4 strategije u potpunosti poštuju definiciju 4.9.2.1 koja zahteva da strategija svakog igrača i sadrži akcije za svaku istoriju h posle koje je red na potez tog igrača, čak i ako se neka istorija ne može ni desiti ukoliko se pomenuta strategija isprati.

4.9.3 Nešov ekvilibrijum za ekstenzivnu formu igre sa potpunom informacijom

Kombinacije strategija igrača koji su učesnici igre predstavljaju **portfolije strategija**. Svaki portfolio strategija određuje jednu terminalnu istoriju. Označimo jedan mogući portfolio strategija sa s, a neka je funkcija igrača označena sa P. Na početku igre na potezu je igrač $P(\emptyset)$. Njegova strategija je $s_{P(\emptyset)}$ i on bira akciju $s_{P(\emptyset)}(\emptyset)$. Označimo tu akciju sa a^1. Ukoliko a^1 nije terminalna istorija, onda igrač $P(a^1)$ igra sledeći, i njegova strategija je $s_{P(a^1)}$ unutar koje bira akciju $s_{P(a^1)}(a^1)$. Sada ćemo ovu akciju označiti sa a^2. Ukoliko (a^1, a^2) nije terminalna istorija, ponovo se dešava isto, funkcija igrača određuje ko je na potezu, a potom strategija tog igrača specificira potez koji će on da vuče. Ovo se nastavlja sve dok se ne konstruiše terminalna istorija, a nju ćemo označiti sa $O(s)$. [13]

Primera radi, terminalna istorija koja nastaje kao ishod portfolija strategija (DG, E) u primeru 4.9.2.2 je D, dok je u slučaju portfolija (CH, E) ishod terminalna istorija (C, E, H). Odavde proizilazi da da bismo odredili terminalnu istoriju koja je ishod portfolija strategija ne moramo da se bavimo onim komponentama strategija pojedinačnih igrača koje nastaju posle istorija koje se neće desiti ukoliko se prati taj portfolio strategija. Konačno, definišimo Nešov ekvilibrijum za ekstenzivnu formu igre sa potpunom informacijom:

Definicija 4.9.3.1: [13] Portfolio strategija s^* je Nešov ekvilibrijum ekstenzivne forme igre sa potpunom informacijom ukoliko je za svakog igrača i i svaku strategiju r_i igrača i terminalna istorija $O(s^*)$ generisana portfolijom s^* barem jednako dobra koliko i terminalna istorija $O(r_i, s^*_{-i})$ generisana portfolijom strategija (r_i, s^*_{-i}) u kome igrač i bira strategiju r_i, dok svaki drugi igrač j ostaje pri strategiji s^*_j. Ekvivalentno, za svakog igrača i važi

$$u_i\big(O(s^*)\big) \geq u_i\big(O(r_i, s^*_{-i})\big), \text{ za svaku strategiju } r_i \text{ igrača } i$$

gde je sa u_i označena funkcija isplate kojom su objašnjene preferencije igrača i.

Primer 4.9.3.1: [13] Pokušajmo pronaći Nešove ekvilibrijume u primeru 4.9.1.2. Bimatrica je data na slici 4.9.3.1

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Imalac teritorije} \\ & & \begin{array}{cc} pokoravanje & borba \end{array} \\ \text{Napadač} & \begin{array}{r} napada \\ ne\ napada \end{array} & \begin{bmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (1,2) & (1,2) \end{bmatrix} \end{array}$$

Slika 4.9.3.1: Slika za primer 4.9.3.1

Kao što smo ranije zaključili, $(napada, pokoravanje)$ jeste Nešov ekvilibrijum. Međutim, analizom bimatrice dolazimo do zaključka da je $(ne\ napada, borba)$ takođe Nešov ekvilibrijum! Očigledno, kada napadač ostane izvan teritorije $(ne\ napada)$, tada imalac teritorije nema boljeg odgovora osim da se bori (isplata je 2 i ako se bori i ako se pokori). Takođe, ukoliko se imalac teritorije odluči na borbu, onda se napadaču više isplati nenapadanje nego napadanje.

Pokušajmo da malo ozbiljnije analiziramo ekvilibrijum $(ne\ napada, borba)$. Do sada smo kod Nešovog ekvilibrijuma pretpostavljali da na osnovu prošlih iskustava u igranju igre svaki igrač u ravnotežnoj tački ima tačan sud o ponašanju drugih igrača, na osnovu koga bira optimalnu strategiju. Ipak, ako napadač u ovom konkretnom primeru uvek preduzima akciju $ne\ napada$, jasno je da on ne zna šta se može desiti ukoliko napadne, stoga se ova pretpostavka na Nešov ekvilibrijum $(ne\ napada, borba)$ ne može primeniti. Eventualno bismo mogli pobeći od ovog problema ukoliko bismo uveli tzv. perturbovano ravnotežno stanje, tj. ono u kojem se ponekad ipak dese neke neekvilibrijumske akcije (npr. igrači pogreše), te se na osnovu toga saznaju sve akcije drugih igrača nakon svake moguće istorije. Ipak, i u ovim (retkim) situacijama, ukoliko bi napadač npr. birao $napada$, imalac teritorije bi preferirao $pokoravanje$, pa napadač opet ne bi mogao doneti zaključak o ponašanju imaoca teritorije koji je korektan u smislu ekvilibrijuma $(ne\ napada, borba)$. Stoga zaključujemo da Nešov ekvilibrijum $(ne\ napada, borba)$ nije **jak** (robust) **Nešov ekvilibrijum**, odnosno on za razliku od prvog ekvilibrijuma $(napada, pokoravanje)$ nije optimalan u odnosu na svaku istoriju.

4.9.4 Idealni ekvilibrijum podigre (Subgame perfect equilibrium)

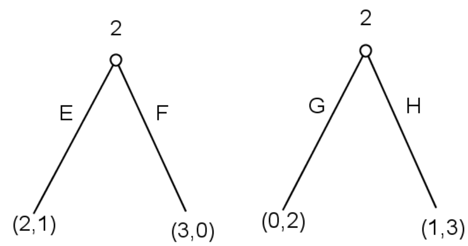
U cilju traženja jakog Nešovog ekvilibrijuma uvodimo pojam podigre. Naime, za neku neterminalnu istoriju h, podigra koja odgovara toj istoriji je onaj deo cele igre koji se dešava nakon h. Formalnije, zapišimo to u obliku definicije:

Definicija 4.9.4.1: [13] Neka je Γ ekstenzivna forma igre sa potpunom informacijom čija je funkcija igrača P. Za svaku neterminalnu istoriju h igre Γ, podigra $\Gamma(\mathrm{h})$ koja prati istoriju h je ekstenzivna igra sa sledećim komponentama:

- igrači: igrači igre Γ,
- terminalne istorije: skup svih nizova akcija h' takav da je (h, h') terminalna istorija igre Γ,
- funkcija igrača: Igrač $P(h, h')$ biva dodeljen svakoj pravoj podistoriji h' terminalne istorije,
- preferencije: Svaki igrač preferira h' u odnosu na h'' ako i samo ako preferira (h, h') u odnosu na (h, h'') u igri Γ.

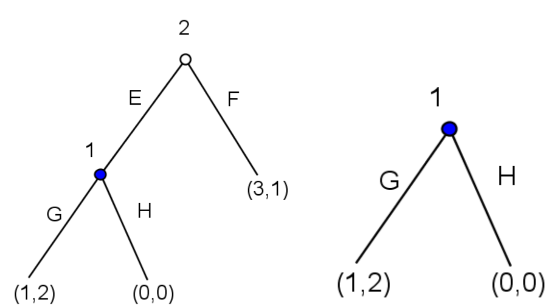
Treba obratiti pažnju da je podigra koja prati istoriju $\emptyset$ čitava igra. Svaka podigra različita od čitave igre naziva se prava podigra. Kako za svaku neterminalnu istoriju postoji podigra, jasno je da podigara ima onoliko koliko ima netermalnih istorija. [13]

U primeru 4.9.2.1 imali smo 3 neterminalne istorije - $\emptyset, C, D$ a samim tim i 3 odgovarajuće podigre – čitavu igru (koja prati $\emptyset$), zatim dve prave podigre date na slici 4.9.4.1.



Slika 4.9.4.1: Prave podigre za primer 4.9.2.1

U primeru 4.9.2.2 takođe postoje 3 neterminalne istorije, te stoga i 3 podigre od kojih je jedna čitava igra a ostale dve su prikazane na slici 4.9.4.2.



Slika 4.9.4.2: Prave podigre za primer 4.9.2.2

Pokušaćemo prvo neformalno da objasnimo pojam idealnog ekvilibrijuma podigre, a zatim na osnovu toga da razmotrimo zašto u primeru 4.9.3.1 $(ne\ napada, borba)$ to nije.

Idealni ekvilibrijum podigre je portfolio strategija s^* takav da ni u jednoj podigri nijedan igrač i ne može učiniti ništa bolje po sebe birajući strategiju različitu od s_i^* ukoliko svaki drugi igrač j ostane pri svojoj strategiji s_j^*.

Na primer, Nešov ekvilibrijum $(ne\ napada, borba)$ nije idealni ekvilibrijum podigre, jer u podigri koja prati istoriju $napada$ optimalno da igrač 2 odigra $pokoravanje$, a ne $borba$. S druge strane, $(napada, pokoravanje)$ jeste idealni ekvilibrijum podigre iz razloga što su strategije igrača optimalne kako na početku podigre, tako i unutar podigre koja prati istoriju $napada$.

Kako bismo dali formalnu definiciju idealnog ekvilibrijuma podigre koristićemo oznaku h za istoriju i oznaku s za portfolio strategija. Pretpostavimo da je došlo do istorije h (čak iako ona nije konzistentna sa portfolijom s) i da se posle nje igrači priklanjaju strategijama portfolija s, čega je krajnji ishod terminalna istorija koju obeležavamo sa $O_h(s)$. Znači $O_h(s)$ je terminalna istorija koja nastaje tako što se od istorije h krene putem koji diktira portfolio s. Jasno, $O_\emptyset(s) = O\,(s)$.

Ako u primeru 4.9.3.1 sa h označimo istoriju $napada$, a sa $s = (ne\ napada, borba)$, onda je $O_h(s) = (napada, borba)$.

Definicija 4.9.4.2: [13] Portfolio strategija s^* u ekstenzivnoj formi igre sa potpunom informacijom je idealni ekvilibrijum podigre ako je za svakog igrača i, za svaku istoriju h posle koje je red na potez igrača i $(P(h) = i)$, i za svaku strategiju r_i igrača i terminalna istorija $O_h(s^*)$ generisana portfolijom strategija s^* nakon istorije h barem jednako dobra, u odnosu na preferencije igrača i, koliko i terminalna istorija $O_h(r_i, s_{-i}^*)$ koja je generisana pomoću portfolija strategija (r_i, s_{-i}^*) u kome igrač i bira strategiju r_i, dok svaki drugi igrač j ostaje pri strategiji s_j^*. Ekvivalentno, za svakog igrača i i za svaku istoriju h posle koje je red na potez igrača i, važi

$$u_i\big(O_h(s^*)\big) \geq u_i(O_h(r_i, s_{-i}^*))$$

za svaku strategiju r_i igrača i gde je sa u_i označena funkcija isplate kojom su objašnjene preferencije igrača i, a $O_h(s)$ je terminalna istorija nastaje po preduzimanju niza akcija generisanih portfolijom strategija s nakon istorije h.

Uočimo da sada strategija svakog igrača mora da bude optimalna za svaku istoriju nakon koje je na tog igrača red da vuče potez, a ne više samo na početku igre kako je to bilo kod Nešovog ekvilibrijuma datog u definiciji 4.9.3.1.

Idealni ekvilibrijum podigre iziskuje optimalnost portfolija strategija nakon svake istorije, te samim tim i nakon početne istorije $h = \emptyset$. Stoga, možemo zaključiti da je **svaki idealni ekvilibrijum podigre ujedno i Nešov ekvilibrijum**.

Primer 4.9.4.1: [13] Razmotrimo sada Nešove ekvilibrijume $(napada, pokoravanje)$ i $(ne\ napada, borba)$ na osnovu definicije za idealni ekvilibrijum podigre. Nešov ekvilibrijum $(ne\ napada, borba)$ nije idealni ekvilibrijum podigre jer ako biramo $s^* = (ne\ napada, borba)$, $i =$ imalac teritorije, $r_i = pokoravanje$, $h = napada$, tada je $O_h(s^*) = (napada, borba)$ a $O_h(r_i, s_{-i}^*) = (napada, pokoravanje)$. Na osnovu ovoga je $u_i\big(O_h(s^*)\big) = 0, a\ u_i\big(O_h(r_i, s_{-i}^*)\big) = 1$, te nejednakost iz definicije 4.9.4.2 očigledno ne važi. Šta se dešava sa Nešovim ekvilibrijumom $(napada, pokoravanje)$? Neka je $s^* = (\,napada, pokoravanje)$. Nakon istorije $h = \emptyset$ na potezu je napadač. U njegovom slučaju je $u_i\big(O_h(s^*)\big) = 2$, dok ukoliko bi bilo $r_i = ne\ napada$, imali bismo situaciju $u_i(O_h(r_i, s_{-i}^*)) = 1$. Nakon istorije $h = napada$ red je na potez imaoca teritorije. Kako je $s^* = (napada, pokoravanje)$, za njega važi $u_i\big(O_h(s^*)\big) = 1$, dok ukoliko bi za njega bilo $r_i = napada$, onda bismo imali situaciju $u_i(O_h(r_i, s^*_{-i})) = 0$. Očigledno, $(napada, pokoravanje)$ je jedini idealan ekvilibrijum podigre u ovoj igri.

Primer 4.9.4.2: [13] **Igra ultimatuma**

Posmatrajmo situaciju u kojoj dve osobe žele da podele sumu novca c. One će to raditi na sledeći način: osoba 1 nudi osobi 2 neku sumu novca koja je manja ili jednaka c, označimo tu sumu novca sa x. Ukoliko osoba 2 prihvati ovu sumu novca, onda osoba 1 zadržava ostatak od $c - x$. Ako osoba 2 ne prihvati ponudu, onda niko ne dobija ništa. Pretpostavimo da svaku osobu interesuje isključivo količina novca koju će ona dobiti i da obe osobe, naravno, preferiraju što veću sumu novca. Osnovne komponente ove igre su:

- igrači: 2 osobe
- terminalne istorije: uređeni parovi oblika (x, Z) gde je $0 \leq x \leq c,\ Z \in \{da, ne\}$
- funkcija igrača: $P(\emptyset) = 1, P(x) = 2$
- preferencije: za obe osobe preferencije su date funkcijama isplate čije su vrednosti jednake količinama novca koju osobe dobijaju; za terminalnu istoriju (x, da) osoba 1 dobija količinu novca $c - x$, a osoba 2 dobija količinu novca x, dok za terminalnu istoriju (x, ne) obostrani dobitak je jednak 0.

Kako je u pitanju igra sa konačnim horizontom, možemo je rešavati pomoću indukcije unazad da bismo pronašli idealni ekvilibrijum podigre. Posmatrajmo prvo podigre dužine 1 u kojima osoba 2 prihvata ili ne prihvata ponudu osobe 1. Za svaku moguću ponudu osobe 1 (nije obavezno da je x ceo broj) postoji podigra. U podigrama koje prate situaciju kada prvi igrač nudi količinu novca $x, x > 0$, drugom igraču je tada optimalna opcija da prihvati tu ponudu, jer ukoliko je ne prihvati tada neće dobiti ništa. S druge strane, za podigru kada je $x = 0$, osobi 2 je potpuno svejedno da li će ponudu prihvatiti ili odbiti obzirom da joj je dobitak 0 u svakom slučaju. Znači, u idealnom ekvilibrijumu podigre za osobu 2 je optimalno da ili prihvati sve ponude, uključujući i onu kada je $x = 0$, ili da prihvati sve ponude osim ponude $x = 0$ koju će odbiti.

Posmatrajmo sada celu igru i pokušajmo ustanoviti šta je optimalna strategija osobe 1 za strategije osobe 2 koje odgovaraju idealnom ekvilibrijumu podigre. Ako osoba 2 prihvata sve ponude, uključujući i onu kada je $x = 0$, onda je za osobu 1 optimalno da ponudi baš sumu novca jednaku 0. S druge strane, ukoliko osoba 2 odbija ponudu $x = 0$, a sve ostale prihvata, onda nema optimalne varijante za osobu 1, jer od svake "male" ponude postoji manja koja joj se više isplati, dok je ponuda od 0 novčanih jedinica neprihvatljiva jer njome ne dobija ništa.

Zaključak je da je jedini idealni ekvilibrijum podigre zapravo situacija u kojoj osoba 1 nudi $x = 0$, a osoba 2 prihvata sve ponude, jer tada osoba 1 dobija sumu c, a osoba 2 dobija 0. "Poreklo" ovog "jednostranog" ekvilibrijuma dolazi iz same konstrukcije igre u kojoj je osoba 2 pasivna u odnosu na osobu 1, koja je ta koja izlaže svoje ponude. Ovakva jednostranost mogla bi se izbeći kada bi se osobi 2 dalo više slobode, odnosno kada bi se i njoj dala mogućnost da uzvrati kontraponudom.

5. TEORIJA IGARA I EKONOMSKI MODELI

Kao što je ranije već navedeno, teorija igara ima primenu u širokom spektru nauka, a zaključci ove teorije naročito su potpomogli ekonomska istraživanja i formiranje ekonomskih modela. Najčešće, oni se primenjuju radi regulisanja odnosa na tržištu. Nešov ekvilibrijum u određivanju rešenja nekooperativnih matričnih igara najčešće ima slabu prediktivnu moć, obzirom da može postojati više rešenja. Ipak, primer igara sa jedinstvenom tačkom ravnoteže može se pronaći i upravo o takvim primerima biće reči u nastavku teksta.

5.1. Opšta slika finansijskog tržišta

Finansijsko tržište se u najširem smislu može definisati kao bilo koje mesto na kome dolazi do finansijskih transakcija, odnosno gde se kroz aktivnosti aktera na tržištu (firmi) susreću ponuda i tražnja. Kao takvo, finansijsko tržište igra ključnu ulogu u stimulaciji ekonomskog rasta, definisanju ekonomskih performansi svojih aktera i uopšte u uspostavljanju ekonomskog blagostanja. Osnovne funkcije finansijskog tržišta su:

- formiranje cene
- likvidnost
- redukcija transakcionih troškova.

Formiranje cene na tržištu se postiže putem specifičnih odnosa i transakcija između kupaca i prodavaca, preko kojih se definiše koliko robe je na tržištu dostupno, a koliko se iste zapravo traži, što su faktori koji direktno utiču na kretanje cena. Likvidnost je odnos sredstava koje neko preduzeće u datom momentu poseduje prema obavezama koje u najskorijem roku treba platiti. Likvidna sredstva preduzeća čini aktiva koja se može upotrebiti kao sredstvo plaćanja ili koja se u najskorije vreme može razmeniti za novac. Funkcija likvidnosti tržišta podrazumeva upravo pružanje mogućnosti zamene aktive za novac. Finansijska tržišta omogućavaju alokaciju slobodnih finansijskih sredstava, usmeravanjem njihovih tokova od onih subjekata koji raspolažu viškovima sredstava ka onim subjektima kojima ta sredstva nedostaju. Redukcija transakcionih troškova na tržištu se postiže tako što da bi bili uspešni u tržišnim poslovima subjekti moraju da minimiziraju svoje transakcione troškove, jer bi u suprotnom najznačajniji deo njihovih sredstava odlazio upravo na isplatu upravo ovih troškova, što nikome nije u cilju. [2]

Prema broju aktera na tržištu razlikujemo monopol, duopol i oligopol. Monopol podrazumeva ekonomsku pojavu kada je celokupno tržište diktirano od strane samo jednog subjekta. Npr. ovo se dešava kada samo jedna firma proizvodi neki proizvod. Duopol predstavlja pojavu kada na tržištu učestvuju dve firme, i o ovome će posebno biti reči u modelima koji će biti opisani u narednih nekoliko strana. Oligopol je pojava kada na tržištu postoji više aktera.

5.2. Kurnoov model

Godine 1838. Ogist Kurno (Auguste Cournot[23]) predložio je sledeći model oligopola, koji se može modelirati kao strateška igra: Neka se određeni proizvod proizvodi od strane n firmi. Za proizvodnju q_i jedinica proizvoda firma i utroši $C_i(q_i)$ novčanih jedinica, gde je C_i, tzv. funkcija troškova (cost function), rastuća funkcija, što znači da proizvodnja veće količine proizvoda firmi nosi veće troškove. Neka na tržištu postoji jedinstvena cena tog proizvoda koju diktira njegova ukupna proizvodnja, npr. ako je ukupna proizvodnja označena sa Q onda je tržišna cena $P(Q)$. P se u ekonomiji često naziva inverzna funkcija tražnje. Pretpostavićemo da je P opadajuća funkcija kada je pozitivna, jer što je veća količina proizvoda na tržištu, to će mu cena više padati. Na primer, ukoliko firma i proizvede količinu proizvoda q_i, tada je tržišna cena proizvoda data sa $P(q_1 + q_2 + \cdots + q_n)$, pa je prema tome prihod koji firma i ostvari $q_i P(q_1 + q_2 + \cdots + q_n)$. Na osnovu prihoda i rashoda, dolazimo do funkcije profita za svaku firmu:

$$\pi_i(q_1, \dots, q_n) = q_i P(q_1 + q_2 + \cdots + q_n) - C_i(q_i).$$

Komponente strateške igre koja reprezentuje ovu situaciju su:

Igrači: Firme

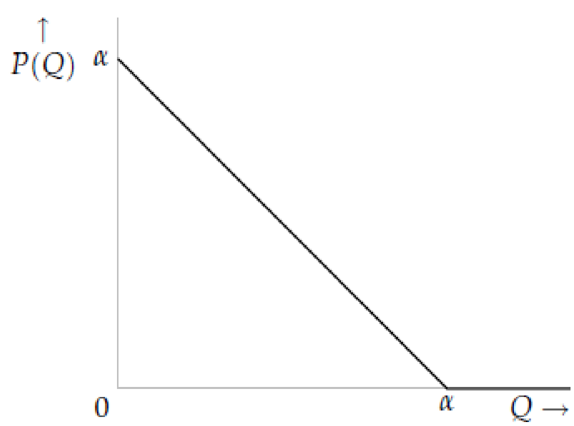
Akcije: Za svaku firmu, to su moguće količine proizvoda (output) koje firma može da proizvede (nenegativni brojevi).

Preferencije: Za svaku firmu, njene preferencije ogledaju se u funkciji profita.

Posmatrajmo situaciju za $n = 2$, tzv. model duopola. Neka su funkcije troškova ove dve firme date sa $C_i(q_i) = cq_i$, $i = 1,2$. Ovo znači da je cena proizvodnje datog proizvoda konstantna i iznosi c za obe firme. S druge strane, neka je inverzna funkcija tražnje linearna tamo gde je pozitivna, odnosno neka je data sa

$$P(Q) = \begin{cases} \alpha - Q, & Q \leq \alpha \\ 0, & Q > \alpha \end{cases}$$

gde za konstante α i c važi $\alpha > 0, c \geq 0$. Inverzna funkcija tražnje prikazana je na slici 5.2.1.



Slika 5.2.1: [13] Inverzna funkcija tražnje za Kurnoov model

[23][17] Auguste Cournot, 1801-1877, francuski filozof i matematičar

Treba primetiti da $P(Q)$ ne može biti jednako sa $\alpha - Q$ za sve vrednosti Q jer bi to dovelo do situacije kada je cena proizvoda negativna što je nemoguće. Takođe, pretpostavićemo da je $c < \alpha$, što znači da postoje vrednosti Q takve da je $P(Q) > c$. Situacija u kojoj je $c \geq \alpha$ značila bi da tržišna cena proizvoda ne može biti viša od cene proizvodnje tog proizvoda, što je sa stanovišta firmi besmisleno jer one tada ne mogu da stvore nikakav profit. [7, 13]

Da bismo našli Nešov ekvilibrijum, bavićemo se konceptom funkcija najboljeg odgovora prikazanih u odeljku 4.6. Naime, prvo ćemo pogledati kako izgleda funkcija profita. Za igrača 1 ona je prikazana na sledeći način:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1(P(q_1 + q_2) - c) = \begin{cases} q_1(\alpha - c - q_1 - q_2), & \text{za } q_1 + q_2 \leq \alpha \\ -cq_1, & \text{za } q_1 + q_2 > \alpha \end{cases}$$

a za igrača 2,

$$\pi_2(q_1, q_2) = q_2(P(q_1 + q_2) - c) = \begin{cases} q_2(\alpha - c - q_1 - q_2), & \text{za } q_1 + q_2 \leq \alpha \\ -cq_2, & \text{za } q_1 + q_2 > \alpha \end{cases}$$

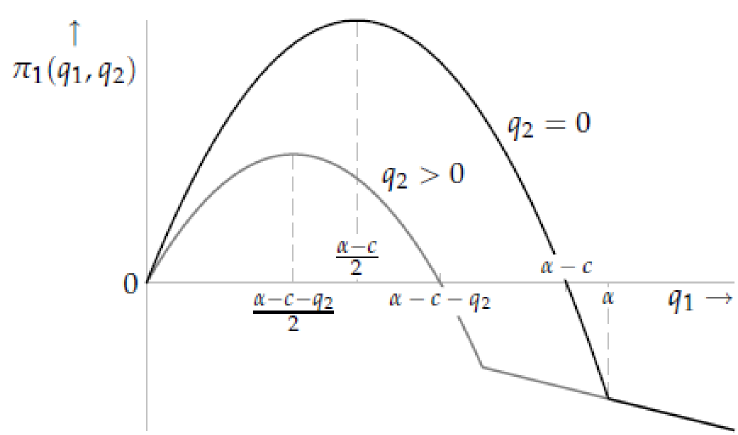
Kako bismo pronašli najbolji odgovor firme 1 na bilo koju količinu proizvodnje proizvoda od strane firme 2, potrebno je da analiziramo profit firme 1 kao funkciju od q_1 za različite vrednosti proizvodnje firme 2. Posmatrajmo slučaj kada je $q_2 = 0$. Tada funkcija profita za prvu firmu izgleda ovako:

$$\pi_1(q_1, 0) = q_1(P(q_1) - c) = \begin{cases} q_1(\alpha - c - q_1), & \text{za } q_1 \leq \alpha \\ -cq_1, & \text{za } q_1 > \alpha \end{cases} = \begin{cases} -q_1^2 + q_1(\alpha - c), & \text{za } q_1 \leq \alpha \\ -cq_1, & \text{za } q_1 > \alpha \end{cases}$$

Kako nas zanima odgovor firme 1 koji će joj obezbediti maksimalan profit, sa slike 5.2.2 se vidi da ćemo to postići kada izjednačimo prvi izvod funkcije $\pi_1(q_1, 0)$ sa nulom, u delu u kom je $q_1 \leq \alpha$. Stoga najbolji odgovor firme 1 kada firma 2 ne proizvodi ništa je $b_1(0) = \frac{1}{2}(\alpha - c)$.
Šta se dešava kada q_2 raste? Jasno, za konstantnu vrednost q_1, to bi značilo da se količina proizvoda na tržištu povećava što bi značilo da će mu cena padati. Vratimo se na funkciju profita firme 1, koja je takođe prikazana na slici 5.2.2:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1(P(q_1 + q_2) - c) = \begin{cases} -q_1^2 + q_1(\alpha - c - q_2), & \text{za } q_1 + q_2 \leq \alpha \\ -cq_1, & \text{za } q_1 + q_2 > \alpha \end{cases}$$

Pod pretpostavkom $q_2 < \alpha - c$, maksimum funkcije $\pi_1(q_1, q_2)$ postiže se u tački $q_1 = \frac{1}{2}(\alpha - c - q_2)$.



Slika 5.2.2: [13] Profit i proizvodnja firme 1 u zavisnosti od prizvodnje firme 2

Ukoliko bi pak važilo $q_2 > \alpha - c$, tada bi $\alpha - c - q_2$ bilo negativno, te bi profit firme 1 bio negativan ma koju količinu proizvoda ona proizvodila. Stoga je u tom slučaju za firmu 1 najbolje rešenje da ne proizvodi ništa, odnosno $q_1 = 0$. Prikažimo konačno funkciju najboljeg odgovora za firmu 1.

$$b_1(q_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_2), & \text{za } q_2 \leq \alpha - c \\ 0, & \text{za } q_2 > \alpha - c \end{cases} .$$

Kako firma 2 za proizvodnju jedinice proizvoda troši koliko i firma 1, funkcija najboljeg odgovora se dobija na potpuno isti način, osim što, naravno, u ovom slučaju posmatramo profit firme 2 kao funkciju od q_2 dok se vrednosti q_1 menjaju i dobijamo:

$$b_2(q_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\alpha - c - q_1), & \text{za } q_1 \leq \alpha - c \\ 0, & \text{za } q_1 > \alpha - c \end{cases} .$$

Nešov ekvilibrijum je par (q_1^*, q_2^*) takav da je količina proizvodnje q_1^* prve firme najbolji odgovor na količinu proizvodnje q_2^* druge firme i obrnuto, odnosno:

$$q_1^* = b_1(q_2^*)$$

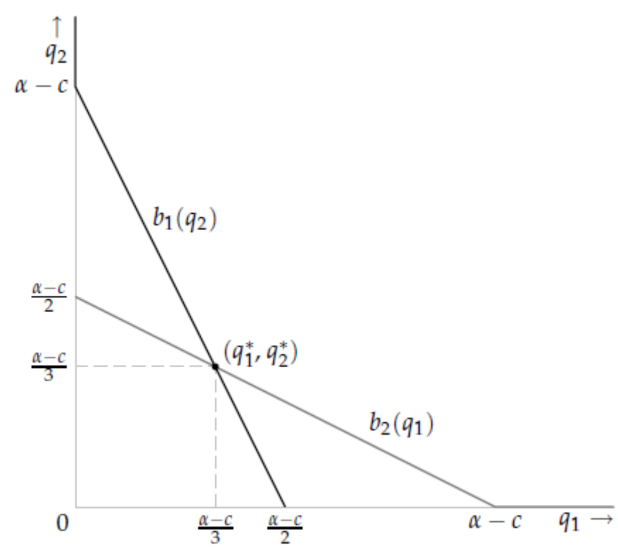
$$q_2^* = b_2(q_1^*)$$

Skup ovih tačaka nalazi se u preseku funkcija najboljeg odgovora, a sa slike 5.2.3 može se videti da je presek samo jedna tačka, i to ona koja je data rešenjem sledećih jednačina:

$$q_1 = \frac{1}{2}(\alpha - c - q_2)$$

$$q_2 = \frac{1}{2}(\alpha - c - q_1)$$

Jasno, koordinate tačke preseka su $q_1^* = q_2^* = \frac{1}{3}(\alpha - c)$.



Slika 5.2.3: [13] Funkcije najboljeg odgovora za igrače u Kurnoovom modelu

Da rezimiramo, u sistemu duopola kada je inverzna funkcija tražnje data sa $P(Q) = \alpha - Q$ za $Q \leq \alpha$, a funkcija troškova sa $C_i(q_i) = cq_i$, $i = 1,2.$, Kurnoov model ima jedinstven Nešov ekvilibrijum $(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{1}{3}(\alpha - c), \frac{1}{3}(\alpha - c)\right)$. Ukupna proizvedena količina dotičnog proizvoda na tržištu je $\frac{2}{3}(\alpha - c)$, odnosno cena jedinice tog proizvoda na tržištu je $P(\frac{2}{3}(\alpha - c)) = \frac{1}{3}(\alpha + 2c)$. Profiti obe firme su $\pi_1(q_1^*, q_2^*) = \pi_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{1}{9}(\alpha - c)^2$. Ukoliko komponenta α poraste, što bi značilo da su kupci spremni više da plate za proizvod, tada će porasti i ekvilibrijumska proizvodnja obe firme, kao i cena. Dalje, ukoliko troškovi proizvodnje jedinice proizvoda rastu, proizvodnja firmi logično opada, dok cena robe na tržištu raste.

Uporedimo slučaj $n = 2$ sa slučajem monopola, odnosno kada je $n = 1$. Tada je profit jedine firme na tržištu

$$\pi_1(q_1) = q_1(P(q_1) - c) = \begin{cases} q_1(\alpha - c - q_1), & \text{za } q_1 \leq \alpha \\ -cq_1, & \text{za } q_1 > \alpha \end{cases} = \begin{cases} -q_1^2 + q_1(\alpha - c), & \text{za } q_1 \leq \alpha \\ -cq_1, & \text{za } q_1 > \alpha \end{cases}$$

a njegov maksimum se dostiže za $q_1 = \frac{1}{2}(\alpha - c)$. Profit firme je tada $\pi_1\left(\frac{1}{2}(\alpha - c)\right) = \frac{1}{4}(\alpha - c)^2$, dok je cena proizvoda na tržištu $\frac{\alpha+c}{2}$. Očigledno, kada na tržištu ima više firmi, profit koji pojedinačna firma ostvaruje se smanjuje, ali cena proizvoda na tržištu pada jer je $\frac{\alpha+c}{2} - \frac{\alpha+2c}{3} = \frac{\alpha-c}{6} > 0$ zato što je $\alpha > c$.

Primer 5.2.1: [13] Šta bi se desilo ukoliko bi se funkcije troška firmi razlikovale, odnosno ukoliko bi cena proizvodnje jedinice proizvoda bila različita za dve firme? Neka sada važe sve ranije navedene pretpostavke, ali neka je $C_i(q_i) = c_i q_i$, $i = 1,2$. Koristeći formulu

$$\pi_i(q_1, \ldots, q_n) = q_i P(q_1 + q_2 + \cdots + q_n) - C_i(q_i)$$

slično kao u prethodnom tekstu tražićemo funkcije najboljeg odgovora za obe firme. Kada je proizvodnja druge firme q_2, funkcija profita prve firme data je sa

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1(P(q_1 + q_2) - c_1) = \begin{cases} q_1(\alpha - c_1 - q_1 - q_2), & \text{za } q_1 + q_2 \leq \alpha \\ -c_1 q_1, & \text{za } q_1 + q_2 > \alpha \end{cases}$$

a kada je proizvodnja prve firme q_1, funkcija profita druge firme data je sa

$$\pi_2(q_1, q_2) = q_2(P(q_1 + q_2) - c_2) = \begin{cases} q_2(\alpha - c_2 - q_1 - q_2), & \text{za } q_1 + q_2 \leq \alpha \\ -c_2 q_2, & \text{za } q_1 + q_2 > \alpha \end{cases}$$

odakle analizom analognom malopređašnjoj dolazimo do funkcija najboljeg odgovora:

$$b_1(q_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c_1 - q_2), & \text{za } q_2 \leq \alpha - c_1 \\ 0, & \text{za } q_2 > \alpha - c_1 \end{cases},$$

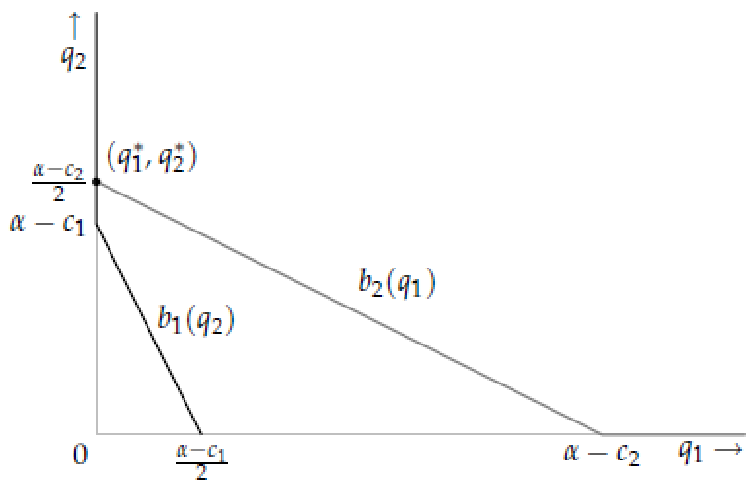
$$b_2(q_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c_2 - q_1), & \text{za } q_1 \leq \alpha - c_2 \\ 0, & \text{za } q_1 > \alpha - c_2 \end{cases}.$$

Tumačenje rezultata sada u mnogome zavisi od odnosa veličina c_1 i c_2. Ukoliko bi bilo $c_1 \leq \frac{1}{2}(\alpha + c_2)$, tada bi sistem

$$q_1 = \frac{1}{2}(\alpha - c_1 - q_2),$$

$$q_2 = \frac{1}{2}(\alpha - c_2 - q_1).$$

imao jedinstveno rešenje $(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{1}{3}(\alpha - 2c_1 + c_2), \frac{1}{3}(\alpha - 2c_2 + c_1)\right)$ koje bi predstavljalo Nešov ekvilibrijum. S druge strane, ukoliko bi važilo $c_1 > \frac{1}{2}(\alpha + c_2)$, Nešov ekvilibrijum bi predstavljao uređeni par $(q_1^*, q_2^*) = \left(0, \frac{1}{2}(\alpha - c_2)\right)$, slika 5.2.4.



Slika 5.2.4: [13] Funkcije najboljeg odgovora i Nešov ekvilibrijum u primeru 5.2.1 za $c_1 > \frac{1}{2}(\alpha + c_2)$

Dakle, ponovo imamo jedinstven Nešov ekvilibrijum

$$(q_1^*, q_2^*) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}(\alpha - 2c_1 + c_2), \frac{1}{3}(\alpha - 2c_2 + c_1)\right), \text{za } c_1 \leq \frac{1}{2}(\alpha + c_2) \\ \left(0, \frac{1}{2}(\alpha - c_2)\right), \qquad \text{za } c_1 > \frac{1}{2}(\alpha + c_2) \end{cases}$$

Treba primetiti da u slučaju pada cene c_2 raste proizvodnja firme 2 u oba slučaja, dok proizvodnja firme 1 u prvom slučaju pada, a u drugom slučaju je 0. U svakom slučaju, ukupna proizvodnja $Q = q_1 + q_2$ se povećava, a samim tim cena proizvoda na tržištu opada.

5.3. Bertranov model

Godine 1883. Jozef Bertran (Joseph Bertrand[24]) je predložio alternativni model oligopola. Naime, kod Kurnoovog modela je svaka firma birala koliko će proizvoditi dok kod Bertranovog modela firme biraju cene, uz iste ostale pretpostavke. U ovom modelu svaka firma proizvodi onoliko kolika je tražnja sa kojom se suočava, s tim što je tražnja povezana sa cenama svih firmi koje postoje na tržištu. Priča je slična Kurnoovom modelu, no ipak sa nekoliko suštinskih razlika. Neka se određeni proizvod na tržištu proizvodi od strane n firmi. Za proizvodnju q_i jedinica proizvoda firma i utroši $C_i(q_i)$ novčanih jedinica, kao što je to bilo ranije. Tražnja se u ovom slučaju prikazuje tzv. funkcijom tražnje D(setimo se da smo u Kurnoovom modelu imali inverznu funkciju tražnje), i ukoliko je cena nekog proizvoda p, tada se ukupna tražnja za njim označava sa $D(p)$. [13]

Pretpostavimo da firme same određuju svoje cene, ali da će kupci uvek kupovati proizvod one firme koja ga daje po najnižoj ceni, a koja pritom proizvodi dovoljno robe da pokrije celokupnu tražnju. Ukoliko se desi da više firmi daje istu cenu, onda se celokupna tražnja podeli na onoliko jednakih delova koliko ima firmi koje nude najnižu cenu proizvoda. Firma koja nema najnižu cenu suočava se sa nultom tražnjom, pa samim tim ni ne proizvodi ništa (jer je pretpostavka da firme proizvode onu količinu robe koja će zadovoljiti tražnju za baš njihovom robom). Ponovo, čitav Bertranov model možemo interpretirati kao stratešku igru:

Igrači: Firme

Akcije: Za svaku firmu, to su moguće cene proizvoda (nenegativni brojevi).

Preferencije: Za svaku firmu, njene preferencije ogledaju se u njenom profitu, koji iznosi

$$\frac{p_i D(p_i)}{m} - C_i\left(\frac{D(p_i)}{m}\right)$$

ukoliko je firma i jedna od m firmi koje nude najnižu cenu na tržištu ($m = 1$ ukoliko je firma jedina sa najnižom cenom). Ukoliko cena firme nije najniža, tada je profit te firme jednak 0.

Posmatrajmo ponovo model duopola, i neka je $C_i(q_i) = cq_i$, $i = 1,2$, dok je funkcija tražnje data sa

$$D(p) = \begin{cases} \alpha - p, & p \leq \alpha \\ 0, & p > \alpha \end{cases}$$

i ponovo važi pretpostavka $c < \alpha$. Kako je trošak proizvodnje jedinice proizvoda za sve firme jednak c, onda ukoliko bi firma i prodala jedinicu proizvoda po ceni p_i, njen profit po jedinici bio bi $p_i - c$. Ukupan profit firme i zavisi od toga koliko druga firma ceni svoj proizvod, odnosno on je dat sa

$$\pi_i(q_1, q_2) = \begin{cases} (p_i - c)(\alpha - p_i), \text{za } p_i < p_j \\ \frac{1}{2}(p_i - c)(\alpha - p_i), \text{za } p_i = p_j \\ 0, \qquad\qquad\qquad \text{za } p_i > p_j \end{cases}$$

gde je sa j označena druga firma.

Ponovo, Nešov ekvilibrijum tražimo tako što posmatramo funkcije najboljeg odgovora za firme. Posmatrajmo situaciju ovako: Ukoliko je $p_j$cena firme j, koja je onda najbolja cena za firmu i? Ukoliko bi firma i držala istu cenu kao i firma j onda bi one delile tržište, a ukoliko je njena cena bar malo niža od

[24] [17] Joseph Bertrand, 1822-1900, francuski matematičar

cene p_j tržište bi pripalo firmi i. Ako je cena p_j viša od proizvodne cene c, onda bi firma i smanjenjem cene malo ispod p_j(a da je i dalje $p_i > c$) imala pozitivan profit, iako on po jedinici možda ne bi bio tako visok. Ukoliko bi pak, cena p_j bila znatno viša od proizvodne cene c, onda bi firma i velikim smanjenjem cene p_i u odnosu na p_j (a da je i dalje $p_i > c$), mogla ostvariti dosta visok profit, obzirom da bi zbog niske cene tražnja za robom skočila, te bi ta tražnja "nadomestila" ne tako velik profit koji firma i ima po jedinici proizvoda. U situaciji kada je $p_j < c$, onda bi firma i imala negativan profit (gubitak) ukoliko bi njena cena bila niža ili jednaka ceni p_j. Zato se u ovom slučaju firmi i isplati da postavi cenu višu od cene p_j jer tada ne bi bilo tražnje za njenom robom, ona ne bi proizvodila i bila bi na nuli, što je bolje nego da posluje sa gubitkom.

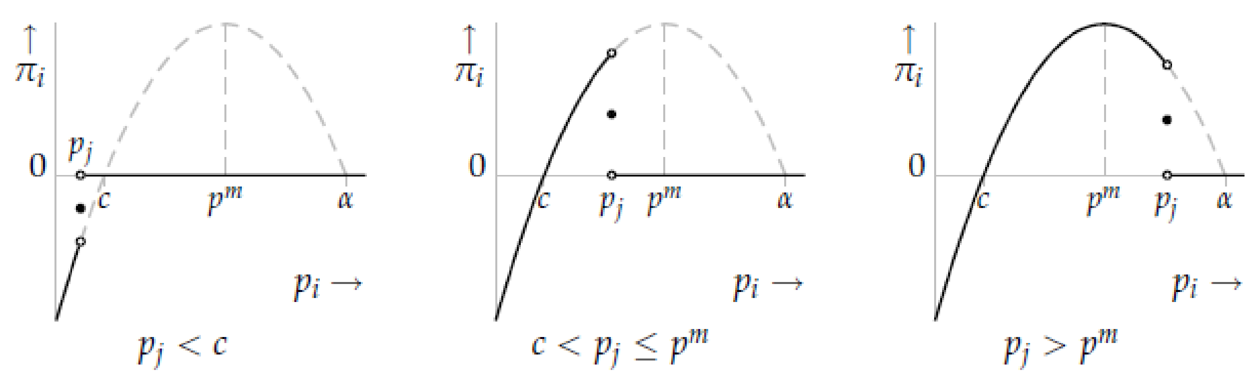
Malo formalnije, posmatrajmo dobitak firme i kao funkciju cene p_i za različite vrednosti cene p_j proizvoda firme j. Označićemo sa p^m vrednost cene p koja maksimizira funkciju $(p-c)(\alpha-p)$, što je funkcija profita za firmu koja na tržištu ima monopol. Postoji više slučajeva:

- $p_j < c$: Kao što smo rekli ranije, ovo je slučaj kada je firmi i najisplativije da na tržište izađe sa cenom višom od p_j jer je tada njen profit jednak nuli, dok je u slučaju $p_i \le p_j$ njen profit negativan. U prvom delu slike 5.3.1 vidi se da je skup najboljih odogovora firme i na cenu p_j dat sa $B_i(p_j) = \{p_i : p_i > p_j\}$.

- $p_j = c$: Ova situacija je skoro ista kao i prethodna, s tim što se nulti profit može postići i ukoliko je cena p_i jednaka ceni p_j. Dakle, $B_i(p_j) = \{p_i : p_i \ge p_j\}$.

- $c < p_j \le p^m$: Na osnovu drugog dela slike 5.3.1 vidimo da ukoliko firma i bira cenu višu od $p_j$ona će imati profit jednak nuli obzirom da će svi kupci želeti da kupe jeftiniji proizvod. Ukoliko se bira cena $p_i < p_j$, $p_i \ge c$ onda je jasno da je profit veći time što je cena p_i bliža ceni p_j. Pod pretpostavkom da je cena proizvoda promenljiva neprekidnog tipa, odnosno da ona može biti bilo koji realan broj, ovde ne možemo odrediti najbolji odgovor firme i jer za svaku cenu p_i koja je niža od p_j, postoji neka cena p_i^* takva da važi $p_i < p_i^* < p_j$. Dakle, u ovom slučaju je $B_i(p_j) = \emptyset$.

- $p_j > p^m$: jasno, u ovom slučaju je cena p^m najbolji odgovor firme i jer će time preuzeti celo tržište i maksimizirati sopstveni profit (treći deo slike 5.3.1).

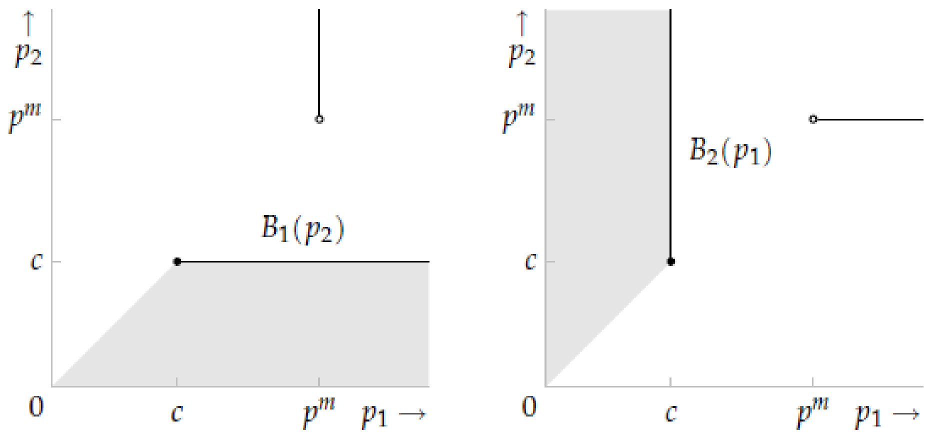


Slika 5.3.1: [13] Ilustracija kretanja profita firme i u Bertranovom modelu duopola

Na osnovu cele prethodne analize, pišemo

$$B_i(p_j) = \begin{cases} \{p_i : p_i > p_j\}, & \text{za } p_j < c \\ \{p_i : p_i \geq p_j\}, & \text{za } p_j = c \\ \emptyset, & \text{za } c < p_j \leq p^m \\ \{p^m\}, & \text{za } p_j > p^m \end{cases}$$

Na slici 5.3.2 prikazane su funkcije najboljeg odgovora za firmu 1 (levo) i za firmu 2 (desno):



Slika 5.3.2: [13] Funkcije najboljeg odgovora za firme u Bertranovom modelu duopla

Osenčen deo prve slike svedoči o tome da je za bilo koju cenu $p_2 < c$ najbolji odgovor firme 1 upravo cena $p_1 > p_2$ (obratiti pažnju da je deo prave $p_1 = p_2$ izostavljen). Pune linije i obojeni kružići označavaju da tačke pripadaju skupu najboljih odgovora, dok su praznim kružićima označene granične tačke koje ne pripadaju najboljim odgovorima. Drugi deo slike interpretira se analogno.

Nešov ekvilibrijum je par (p_1^*, p_2^*) takav da je cena p_1^* prve firme najbolji odgovor na cenu p_2^* druge firme i obrnuto, tj. treba da važi $p_1^* \in B_1(p_2^*)$ i $p_2^* \in B_2(p_1^*)$. Ukoliko bismo delove slike 5.3.1 "spojili" u jedan grafik, videli bismo da je jedina tačka koja zadovoljava pomenute uslove tačka $(p_1^*, p_2^*) = (c, c)$, što znači da je jedinstveni Nešov ekvilibrijum ove igre zapravo situacija u kojoj obe firme za tržišnu cenu svog proizvoda uzimaju upravo proizvodnu cenu c.

Metod traženja Nešovog ekvilibrijuma putem analize funkcija najboljeg odgovora je vrlo precizan i sistematičan, no u jednostavnijim situacijama, poput ove malopređašnje u kojoj su na tržištu postojale samo 2 firme do Nešovog ekvilibrijuma moglo se doći i intuitivnom analizom koja je matematički mnogo manje zahtevna. Razlog tome je taj što da bismo pokazali da nešto nije ekvilibrijum prosto možemo pronaći bilo koju varijantu koja više usrećuje nekog od igrača,a to ne mora striktno biti najbolji mogući odgovor. Baš u primeru Nešovog ekvilibrijuma od malopre vrlo lako je izvršiti ovakvu tzv. intuitivnu analizu: (c, c) je Nešov ekvilibrijum jer ako jedna firma postavi cenu c, druga firma nema bolju opciju obzirom da ako je njena cena viša od c ostvaruje profit nula, a ako postavi cenu nižu od c njen profit je negativan. Sada ćemo na sličan način izanalizirati zašto nijedan drugi uređeni par (p_1, p_2) ne može biti ekvilibrijum:

- ako je $p_i < c$, bilo da je $i = 1$ ili $i = 2$, tada je profit firme koja ima nižu cenu negativan, ili ukoliko su im cene jednake, obe firme ostvaruju negativan profit. Jasno, srećnija varijanta za svaku firmu čiji je profit negativan jeste da cenu svog proizvoda podigne na c jer će tada ostvarivati nulti profit što joj je svakako isplativije.
- ako je $p_i = c$, $p_j > c$, tada firma i ima prostora da "malo" podigne svoju cenu, a da ona ipak ostane nižaod cene p_j i na taj način učini svoj profit poziitivnim.

- ako je $p_i > c$, $p_j > c$ i npr. $p_i \geq p_j$, tada ukoliko je $D(p_j) > 0$ $(p_j < \alpha)$, firma i može da spusti svoju cenu malo ispod p_ji tako povisi svoj profit, a ukoliko je $D(p_j) = 0$ $(p_j \geq \alpha)$, onda firma i može postaviti svoju cenu na p^m.

Primer 5.3.1: [13] Razmotrimo šta bi se dogodilo u uslovima oligopola, odnosno u situaciji kada je broj firmi na tržištu $n \geq 3$, dok svi uslovi pomenuti ranije i dalje važe. U ovom slučaju Nešov ekvilibrijum je skup cena $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ za koje važi $p_i \geq c$, $i = 1,2, \dots, n$, gde bar za dve cene važi da su jednake sa c. Objasnićemo zašto je to tako analizirajući druge opcije:

- Ukoliko bi neka cena bila niža od c, tada bi profit firme sa najnižom cenom bio negativan iako bi tražnja za robom bila pozitivna, te bi stoga ova firma mogla cenu podići na c u cilju ostvarenja barem nultog profita.
- Ukoliko samo jedna firma nudi cenu jednaku c, onda bi ta ista firma imala prostora da „malo“ podigne cenu i time ostvari pozitivan profit, a da njena cena i dalje bude najniža na tržištu.
- Ako bi sve cene bile više od cene c, uvek bi ostajalo prostora da neka firma spusti cenu na neku veličinu između c i najniže ponuđene cene, te da na taj način „osvoji“ tržište.

Primer 5.3.2: [13] Šta ukoliko se u modelu duopola proizvodne cene firmi razlikuju? Pretpostavimo da su proizvodne cene označene sa c_1 i c_2 i neka važi $c_1 < c_2$. Neka cena p_1^m maksimizira funkciju profita firme 1 datu sa $(p - c_1)(\alpha - p)$, ali neka važi $c_2 < p_1^m$. Takođe, uvedimo pretpostavku da je funkcija $(p - c_1)(\alpha - p)$ rastuća dok se cena p_1^m ne dostigne.
Ukoliko bismo uveli pretpostavku da će u slučaju da obe firme imaju jednaku cenu svi kupci želeti proizvod firme 1, Nešov ekvilibrijum bi bio uređeni par cena $(p_1, p_2) = (c_2, c_2)$. Razlozi tome su sledeći:

- ukoliko bi firma 1 povisila svoju cenu, njen profit bi bio nula
- ako bi firma 1 redukovala svoju cenu na npr. neku cenu p, tada bi njen profit pao sa $(c_2 - c_1)(\alpha - c_2)$, na $(p - c_1)(\alpha - p)$, jer je ova funkcija na delu domena ispod p_1^m rastuća
- ako bi firma 2 povisila svoju cenu, njen profit bi ostao nula
- ako bi firma 2 spustila svoju cenu ispod proizvodne cene c_2, tada bi njen profit postao negativan

Pokažimo da je ovo jedini ekvilibrijum:

- u slučaju $p_i < c_1$, $i = 1,2$, tada firma koja ima nižu cenu može da je podigne iznad cene druge firme i time postigne profit jednak nuli
- ako bi bilo $p_1 > p_2 \geq c_2$, firma 2 bi mogla „malo“ podići svoju cenu i osigurati veći profit
- u slučaju $p_2 > p_1 \geq c_1$, firma 1 bi imala prostora da malo podigne svoju cenu i poveća profit
- ako bismo imali slučaj $p_2 \leq p_1$ i $p_2 < c_2$, onda bi firma 2 mogla da podigne svoju cenu i umanji negativnost svog profita
- za $p_1 = p_2 > c_2$, bilo koja firma bi mogla da „malo“ spusti svoju cenu i na taj način povisi svoj profit, što je posledica povećanja tražnje za njenim proizvodom.

5.4. Štakelbergov model

U prethodno navedenim modelima duopola (oligopola) pretpostavka je bila da igrači (firme) jednovremeno vuku svoje poteze, odnosno da svaka firma bira svoju akciju bez da zna išta o akcijama druge firme. Štakelbergov model (Heinrich Freiherr von Stackelberg[25]) se, s druge strane, bavi tzv. ekstenzivnom formom igre, odnosno situacijom kada firme naizmenično biraju svoje poteze. Najčešće, radi se o tržištu u kome je jedna firma lider, te je ona ta koja "diktira" situaciju, odnosno prva vuče potez, a tek posle nje svoje poteze biraju ostali učesnici na tržištu. [13]

Pretpostavimo tržište na kome su prisutne 2 firme koje obe proizvode isti proizvod. Proizvodnja q_i jedinica robe firmu i košta $C_i(q_i)$, a ukoliko je ukupna tržišna proizvodnja tog proizvoda Q, onda je njegova cena $P_d(Q)$. Strategiju firme predstavlja količina proizvoda koju će ta firma proizvesti, kao što je to ranije bilo kod Kurnoovog modela. Novina je ta što firme sada biraju svoje strategije naizmenično, odnosno prva firma bira svoju strategiju, a zatim druga, znajući šta je prva odabrala, bira svoju. Definišimo osnovne komponente Štakelbergovog modela duopola:

- igrači: 2 firme
- terminalne istorije: skup svih nizova (q_1, q_2) koji predstavljaju količine proizvoda koje svaka firma proizvodi; jasno $q_1, q_2 \geq 0$
- funkcija igrača $P(\emptyset) = 1,\ P(q_1) = 2$
- preferencije su definisane profitom koji firme ostvaruju, odnosno profit koji firma i ostvaruje u slučaju terminalne istorije (q_1, q_2) dat je sa $q_i P_d(q_1 + q_2) - C_i(q_i)$, $i = 1{,}2$.

Firma 1 započinje igru birajući koliku će proizvodnju ostvariti. Potom firma 2 vuče svoj potez, i svaki sledeći put firma 2 svoj potez izvodi posle firme 1. Strategija prvog igrača je ta količina proizvodnje koju izabere tokom svog poteza, dok je strategija igrača 2 funkcija koja svakom potezu igrača 1 dodeljuje "reakcije" (poteze) igrača 2. Kako ova igra ima tzv. konačan horizont, jedan od načina na koji možemo doći do idealnog ekvilibrijuma podigre je indukcija unazad. Naime, za svaku količinu proizvodnje q_1 izabranu od strane firme 1, možemo da pronađemo proizvodnju firme 2 koja će maksimizirati njen profit. Pretpostavimo da svakom q_1 odgovara tačno jedna vrednost proizvodnje firme 2, i neka je oznaka za nju $b_2(q_1)$. Potom nas zanima koja je to strategija proizvodnje firme 1 koja će maksimizirati njen profit, uz pretpostavku o strategiji firme 2. Znamo da pri proizvodnji q_1 prve firme druga proizvodi $b_2(q_1)$, te je ukupna količina proizvoda na tržištu tada $q_1 + b_2(q_1)$, a njegova cena je $P_d(q_1 + b_2(q_1))$. Profit firme 1 je dat sa

$$q_1 P_d\big(q_1 + b_2(q_1)\big) - C_1(q_1)$$

pa je, logično, njena najbolja strategija u ovom slučaju ona vrednost q_1^* u kojoj ova funkcija dostiže svoj maksimum. Pretpostavimo da je ova vrednost jedinstvena.

Vidimo da u ovoj situaciji firma 2 na svaku odabranu akciju q_1 firme 1 ima najbolji odgovor dat sa $b_2(q_1)$, dok firma 1 ima samo jednu najbolju akciju q_1^*, u odnosu na sve odgovore firme 2. Ekvilibrijumska strategija prve firme je jedinstvena, dok je ekvilibrijumska strategija druge firme data funkcijom b_2. Ishod koji odavde proizlilazi je uređeni par (q_1^*, q_2^*), gde je $q_2^* = b_2(q_1^*)$.

Posmatrajmo sada uslove slične onima koje smo definisali u Kurnoovom modelu. Neka su funkcije troškova firmi date sa $C_i(q_i) = cq_i$, $i = 1{,}2$, tj. neka je cena proizvodnje datog proizvoda konstantna i iznosi c za obe firme, a neka je inverzna funkcija tražnje linearna tamo gde je pozitivna, odnosno neka je data sa

[25] [17] Heinrich Freiherr von Stackelberg, 1905-1946, nemački ekonomista

$$P_d(Q) = \begin{cases} \alpha - Q, & Q \leq \alpha \\ 0, & Q > \alpha \end{cases}$$

gde za konstante α i c važi $\alpha > 0, c > 0$. Kao i ranije, važi uslov da je $c < \alpha$, jer bi se u suprotnom desilo da je tržišna cena veća (ili jednaka) od prozvodne, što za proizvođače nema smisla. Detaljnom analizom Kurnoovog modela konstatovali smo da firma 2 ima jedinstven najbolji odgovor na akciju firme 1 koji je dat sa

$$b_2(q_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_1), & \text{za } q_1 \leq \alpha - c \\ 0, & \text{za } q_1 > \alpha - c \end{cases}.$$

U idealnom ekvilibrijumu podigre Štakelbergovog modela strategija firme 2 je upravo funkcija b_2, dok je strategija firme 1 ona vrednost q_1 kojom će ona maksimizirati svoj profit dat sa

$$q_1\left(\alpha - c - \left(q_1 + \tfrac{1}{2}(\alpha - c - q_1)\right)\right) = \tfrac{1}{2}q_1(\alpha - c - q_1).$$

Ova funkcija je kvadratna, a njene nule su u tačkama $q_1 = 0$ i $q_1 = \alpha - c$, te je maksimum funkcije u tački $q_1 = \frac{1}{2}(\alpha - c)$.

Dakle, ova igra ima jedinstven idealni ekvilibrijum podigre koji je dat strategijama $\frac{1}{2}(\alpha - c)$ prve firme, i b_2 druge firme. Ishod, odnosno konkretna proizvodnja koja se na tržištu ostvaruje, dat je sa

$$q_1^* = \frac{1}{2}(\alpha - c)$$

$$q_2^* = b_2(q_1^*) = b_2\left(\frac{1}{2}(\alpha - c)\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha - c - \frac{1}{2}(\alpha - c)\right) = \frac{1}{4}(\alpha - c)$$

dok profiti firmi iznose

$$q_1^*(P(q_1^* + q_2^*) - c) = \tfrac{1}{8}(\alpha - c)^2 \text{ za firmu 1,}$$

$$q_2^*(P(q_1^* + q_2^*) - c) = \tfrac{1}{16}(\alpha - c)^2 \text{ za firmu 2.}$$

Naročito je interesantno uporediti ove rezultate sa rezultatima Kurnoovog modela. Podsetimo se, u Kurnoovom modelu smo došli do zaključka da svaka firma proizvodi tačno $\frac{1}{3}(\alpha - c)$ jedinica proizvoda, dok su profiti obe firme iznosili $\frac{1}{9}(\alpha - c)^2$. Vidimo da ukoliko uvedemo pretpostavku o naizmeničnim potezima, firma 1 u ravnotežnoj tački proizvodi više i profitira više, dok druga firma proizvodi manju količinu proizvoda i ostvaruje manji profit. Ukupna proizvodnja u Štakelbergovom modelu veća je od ukupne proizvodnje kod Kurnoovog modela, što je za kupce svakako bolja varijanta. Što se tiče lošijeg ishoda za firmu 2 kod Štakelbergovog modela, moglo bi se čak reći da je to neka vrsta paradoksa, obzirom da za razliku od Kurnoovog modela firma 2 sada ima informaciju o postupcima svoje konkurencije na tržištu.

5.5. Inflacija

Kada smo u odeljku 4.4. definisali bimatrične igre, nakratko smo pomenuli da postoje dve vrste bimatričnih igara, i to kooperativne i nekooperativne igre. Kod kooperativnih igara, rekli smo, postoji sporazum između igrača i on je obavezujući za sve njih (igrač biva kažnjen u slučaju nepoštovanja sporazuma) dok kod nekooperativnih igara sporazuma ili nema ili on nema obavezujuću moć. U nekooperativnim igrama svaki igrač isključivo želi da maksimizira svoj gubitak, bez obzira na to kakve će rezultate ostvariti ostali. Kod kooperativnih igara osnovna poteškoća je izabrati rešenje kojim bi svi bili zadovoljni, jer kooperativne igre zahtevaju konsenzus svih igrača. Ukoliko bi se do ovog zajedničkog dogovora moglo doći, onda bi svaka igra nekonstantne sume mogla postati igra u kojoj svi dobijaju. Ipak, u realnom svetu, svedoci smo mnogih situacija u kojima i pored "teoretskog" postojanja zajedničkog rešenja koje bi bilo najbolje za sve ishod biva potpuno iracionalan. Kako se uopšte može dogoditi da racionalni subjekti donose iracionalne odluke? Nažalost, kada su sistemi jako složeni, kada je "ulog" veliki i kada je potrebno reagovati brzo dešava se da zbog velikog broja interakcija među akterima rešenje koje je povoljno za sve skoro pa nije moguće doneti, te se upravo zbog toga dešavaju iracionalni potezi. Jedan takav primer je primer inflacije. [10]

Inflacija je jedan od najznačajnijih pojmova u ekonomiji i predstavlja pojavu narušene monetarne ravnoteže kada se u opticaju nađe veća količina novca od potrebne količine, što je automatski praćeno i rastom cena. Ona takodje može da nastane kada se smanji ponuda robe na tržištu, a količina novca u opticaju ostane nepromenjena. Još neki uzroci inflacije mogu biti i rast novčane mase iznad rasta društvenog proizvoda, kao i rast ličnih dohodaka iznad rasta produktivnosti rada. Kada je u pitanju uticaj inflacije na proizvodnju, osnovni problem je to što cene postaju haotične i nekontrolisano rastu a proizvodnja postaje potpuno dezorganizovana. Jedna od posledica svega ovoga je dinamičan povratak naturalnoj razmeni. Pa ipak, prisutne su i druge negativne pojave poput smanjenja motivacije za rad i štednju, lošeg uticaja na celokupno funkcionisanje ekonomskog sistema i preraspodelu bogatstva tj. redistribuciju dohotka i imovine. U toku inflacije subjekti na tržištu se orijentišu na kratkoročne ciljeve, interese i odluke, nastojeći isključivo da se zaštite od trenutnog gubitka, tj. firme postaju primarno skoncentrisane na proces raspodele i kretanja cena, a ne na proizvodnju, dok stalno obezvređivanje domaće valute ugrožava valutni identitet, što se pretvara u ponor bez dna za ekonomiju jedne zemlje jer produktivnost i efikasnost privređivanja potpuno opadaju.

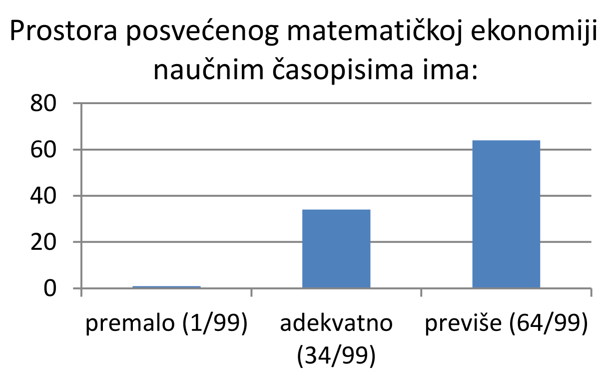
Vratimo se na teoriju igara i pokušajmo objasniti zašto inflacija najčešće ne biva lako i brzo zaustavljena iako bi udruženim snagama privrednika i centralne banke to bilo moguće. Prema neoklasičnoj ekonomskoj teoriji inflacija nastaje kada centralna banka emituje isuviše brzo novčanu masu (uzroci tome su već navedeni). Logično rešenje ovog problema je značajno smanjenje brzine emitovanja novca ili njeno potpuno prekidanje na određeno vreme. Ukoliko bi centralna banka htela da zaustavi inflaciju na ovaj način i ukoliko bi svi privrednici znali za ovo nastojanje, inflacija bi se prema neoklasičnoj teoriji mogla brzo i bez većih problema zaustaviti. Ipak, centralna banka je pod velikim političkim uticajem vlade i stoga se ona ne može tako lako odlučiti na ovaj potez, obzirom da bi on na duži period doveo do povećanja nezaposlenosti, velikog rasta kamatnih stopa i propadanja nekih preduzeća. Čak, inflacija državi može ići u prilog budući da smanjuje vrednost realnog duga te su svi dužnici, a pogotovo država, u povlašćenom položaju. Država se zadužuje u domaćoj valuti i vraća dug u toj valuti i to najčešće sa fiksnom kamatnom stopom, a inflacija smanjuje realnu vrednost javnog duga. Inflacija odgovara državi iz još jednog razloga. Svaku odštampanu novčanicu država može da koristi za razna plaćanja – npr. za kupovinu dobara i usluga ili za finansiranje subvencija. Država na taj način izmiruje svoje obaveze odštampanim novcem. Sve ovo su razlozi zašto vlada može kočiti centralnu banku u smanjenju emitovanja novca. Jasno, privrednici znaju koliki politički uticaj postoji na centralnu banku i oni ne mogu biti sigurni u njeno ponašanje, što dovodi do situacije u kojoj nema kooperacije, i gde svako počinje da deluje po sopstvenom nahođenju. Teoretičari vole reći da je rešenje nekooperativnih igara upravo nekooperativno rešenje, a u slučaju inflacije to je najčešće recesija i opšta nekonzistentnost između poteza banke i poteza aktera na tržištu, jer konsenzus nije mogao biti ostvaren. Situacije slične opisanoj se vrlo često dešavaju i u igrama manjeg obima gde je faktor ljudske nepredvidivosti najjači razlog za sumnju u kooperaciju.

Ma koliko bila pomno analizirana sa različitih stanovišta pojava inflacije verovatno nikad neće uspeti biti iskorenjena. Neke od najvećih inflacija iz XX i XXI veka desile su se u periodu od 80-ih godina pa do danas (Jugoslavija, Brazil, Meksiko, Argentina), a poslednja velika inflacija zadesila je državu Zimbabve 2008.godine. [17]

Kooperativne igre, s druge strane, mogu dovesti do nekih drugih poteškoća u privredi. Naravno, rešenje kooperativne igre je upravo kooperativno rešenje, ali se postavlja pitanje da li je ono uvek u skladu sa moralnim principima i da li zaista dovodi do opšteg privrednog boljitka? Osnovno pitanje koje racionalan igrač postavlja kod kooperativnih igara je “Koju strategiju izabrati kako bi svi učesnici igre bili na dobitku?” Na nesreću, iako ovo pitanje deluje potpuno idealistično, ono upravo može podstaći na korupciju koja predstavlja jedan od najznačajnijih problema današnjice.

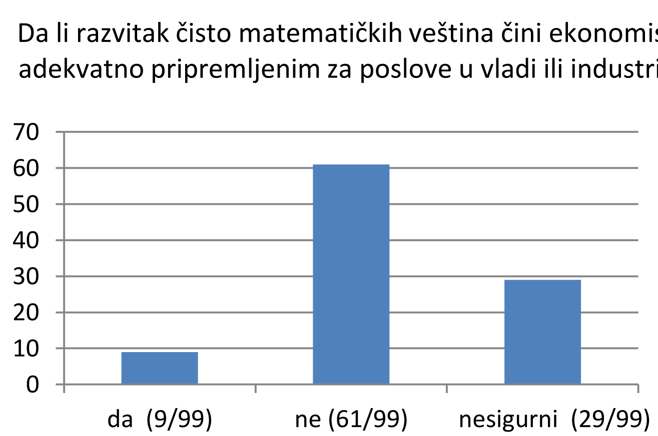
6. ODNOS MATEMATIKE I EKONOMIJE DANAS

Poglavlje 2 ovog rada bavilo se diskusijom na temu uspešnosti primene matematike unutar ekonomskih disciplina, kao i prihvaćenosti koju matematika uživa od strane ekonomista. Već tada iznet je zaključak da je od 50-ih godina XX veka pa do danas upotreba matematike u ekonomiji doživela ekspanziju, od koje je, jasno, i sama ekonomija profitirala obzirom da su neki njeni koncepti vrlo jasno i precizno matematički objašnjeni, te su samim tim učinjeni razumljivijim i pogodnijim za interpretaciju. Anketa iz 1987. godine sprovedena od strane Dejvida Grinaveja (David Greenaway), profesora ekonomije na Univerzitetu u Notingemu, imala je za cilj da prikupi informacije o profesionalnim stavovima profesora sa britanskih Univerziteta, ali ne i da se istovremeno prikloni bilo kakvoj hipotezi o jakoj ili slaboj povezanosti matematike i ekonomije, već da u ovom smislu zadrži neutralnost i ostavi čitaocu ankete da rezultate interpretira na svoj način. Ipak, anketa je pokazala da i pored neospornog napretka koji je matematika ekonomiji donela, uvek postoji prostor za nepoverenje (razlozi su pomenuti u poglavlju 2), te da ekonomisti ipak nikada najveće zasluge neće pripisati matematici. Davne 1987.godine kada je anketa sprovedena, britanski profesori su smatrali da na diplomskim i postdiplomskim studijama ekonomije već ima sasvim dovoljno izučavanja matematike, ali što je veoma zanimljivo, većina njih je ocenila da u naučnim časopisima matematičke ekonomije ima i previše. Konkretan rezultat za 99 ispitanika izgledao je ovako:



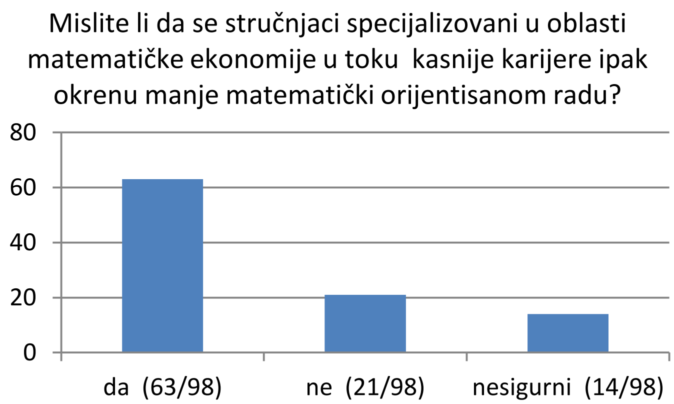
Slika 6.1: Rezultati ankete Dejvida Grinaveja iz 1987.godine

Odgovor sa velikom dozom nepoverenja prema razvoju matematičkih veština kod ekonomista zabeležen je i u sledećim rezultatima:



Slika 6.2: Rezultati ankete Dejvida Grinaveja iz 1987.godine

Zanimljiv odgovor je zabeležen i kod sledećeg pitanja, i on se indirektno može tumačiti kao „nedozvoljavanje“ od strane ekonomista da matematika pokori koncepte njihove nauke, odnosno da ma koliko matematički orijentisan jedan ekonomista bio, na kraju će ipak završiti u onome što ekonomija zaista jeste, a to je prvenstveno „studija uzroka i posledica, čija je svrha da razlikuje posledice različitih načina alokacije resursa koji imaju alternativnu upotrebu; kao takva, ekonomija nema ništa da kaže o filozofiji, ili **o vrednostima,** isto kao što ništa ne bi mogla reći o muzici ili literaturi.“[26] Rezultati su prikazani na slici 6.3.



Slika 6.3: Rezultati ankete Dejvida Grinaveja iz 1987.godine

Prema ispitanicima obuhvaćenim ovom anketom, kao osnovni kriterijumi za uspešan matematički model navedeni su:

1) elegancija
2) korisnost u praktičnom smislu
3) profesionalni napredak
4) unošenje originalnosti

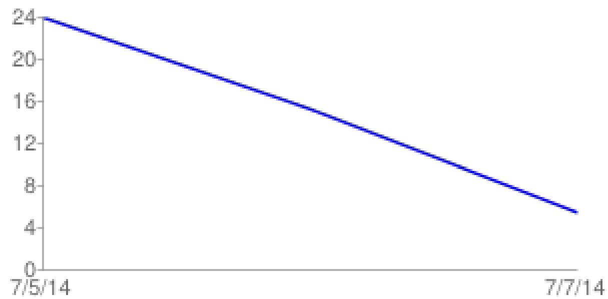
a, složićemo se, bar 3 od 4 navedene osobine su i danas od suštinske važnosti kod matematičkih modela. [5]

Okrenimo se sada novijem istraživanju preduzetom upravo za cilj objavljivanja njegovih rezultata i tumačenja istih u ovom master radu. Istraživanje je sprovedeno u periodu od 5. do 7. jula 2014. godine, a ispitanici su bili studenti i svršeni studenti ekonomije na Univerzitetu u Novom Sadu. Istraživanje je sprovedeno u obliku anonimne ankete koja je online putem prosleđena ciljnoj grupi. Anketa nije zahtevala podatke o godini studija i prosečnoj oceni tokom studija, kao ni podatke o usmerenju za koje su se opredelili ispitanici, jer je njen cilj bio prvenstveno stvaranje generalne slike o tome kako studenti ekonomije vide opštu povezanost ekonomije i matematike. Neosporno je da bi se detaljnijom analizom sigurno dobili validniji rezultati, i da bi se u zavisnosti od gore navedenih parametara (godina studija, prosek ocena, usmerenje) rezultati sigurno razlikovali od grupe do grupe, no, za takvu analizu bi skoro sigurno bila potrebna mnogo detaljnija priprema, a samo istraživanje bi bilo vremenski mnogo zahtevnije. Međutim, kako se ovi rezultati isključivo koriste za zatvaranje diskusije započete u prvom delu ovog rada, i kako je njegova poenta ipak prikaz matematičke pozadine modela koji se koriste za opisivanje ekonomskih pojava, u samoj anketi se nije insistiralo na pomenutim finesama.

Pitanja postavljena u anketi direktno su vezana za razmišljanja studenata ekonomije o tome koliko je matematika značajna za njihovu branšu. Postavljeno je 6 pitanja na koje je odgovor bio obavezan, a

[26] Citat: Thomas Sowell, Basic Economics: A Citizen's Guide to the Economy

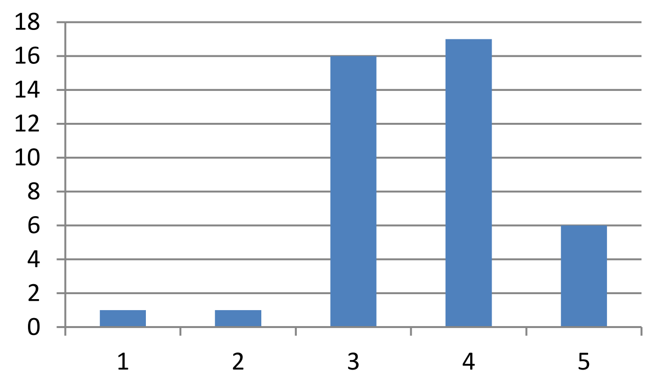
ostavljen je prostor da ispitanici sami prokomentarišu odnos dve nauke ukoliko to žele. Podešeno je da odgovori budu koncipirani tako da studenti odgovaraju sa da ili ne, ili ocenjuju stepen svog slaganja sa nekom tvrdnjom. Anketa je popunjena od strane 41 ispitanika, a trend popunjavanja bio je sledeći:



Slika 6.4: Trend popunjavanja ankete u periodu od 5.do 7.jula 2014.godine

U nastavku su prikazani neki od najznačajnijih rezultata istraživanja:

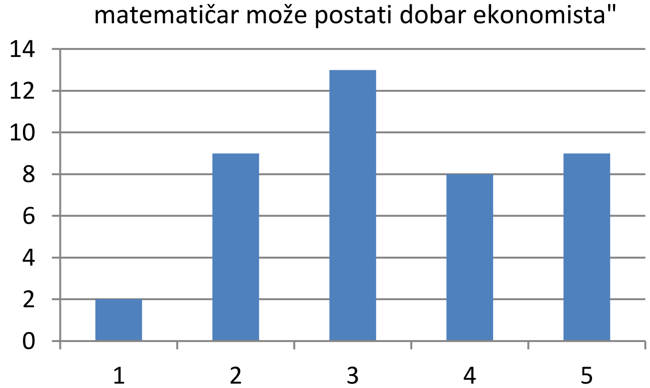
U kojoj meri su, po vama, matematika i ekonomija povezane nauke?



	Broj odgovora	Procenat
1-potpuno su nepovezane	1	2.44%
2-nisu naročito povezane	1	2.44%
3-nisam siguran	16	39.02%
4-delimično su povezane	17	41.46%
5-potpuno su povezane	6	14.63%

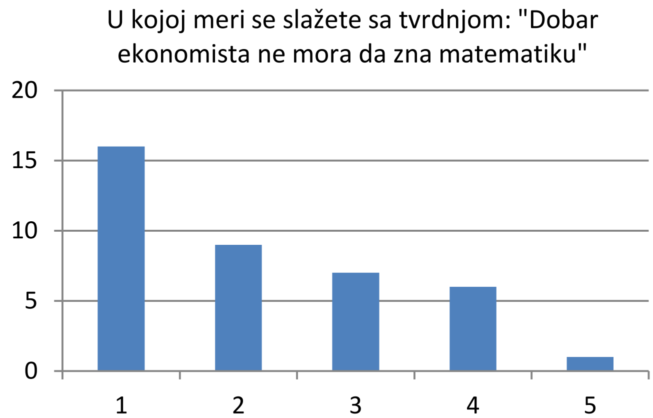
Slika 6.5: Rezultati ankete za studente ekonomije sprovedene između 5. i 7. jula 2014. godine

U kojoj meri se slažete sa tvrdnjom: "Dobar matematičar može postati dobar ekonomista"



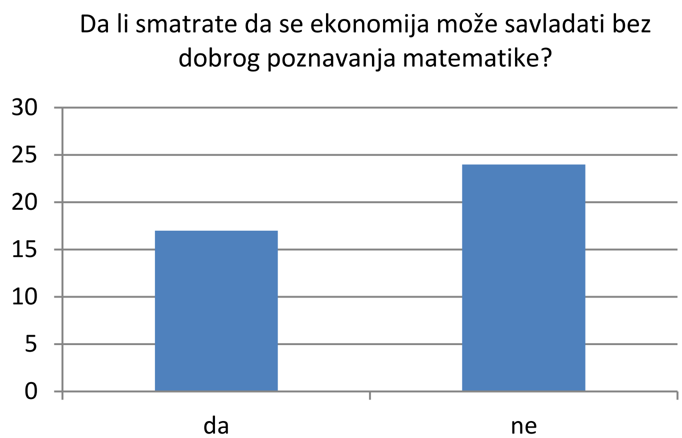
	Broj odgovora	Procenat
1-potpuno neslaganje	2	4.88%
2-delimično neslaganje	9	21.95%
3-nisam siguran	13	31.71%
4-delimično slaganje	8	19.51%
5-potpuno slaganje	9	21.95%

Slika 6.6: Rezultati ankete za studente ekonomije sprovedene između 5. i 7. jula 2014. godine



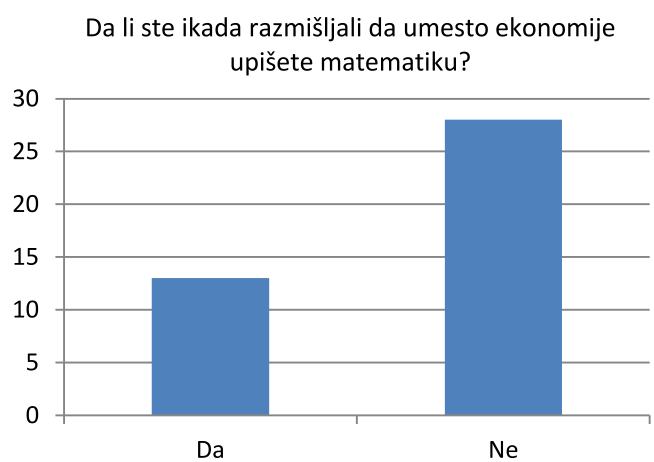
	Broj odgovora	Procenat
1-potpuno neslaganje	16	39.02%
2-delimično neslaganje	9	21.95%
3-nisam siguran	7	17.07%
4-delimično slaganje	8	19.51%
5-potpuno slaganje	1	2.44%

Slika 6.7: Rezultati ankete za studente ekonomije sprovedene između 5. i 7. jula 2014. godine



	Broj odgovora	Procenat
da	17	41.46%
ne	24	58.54%

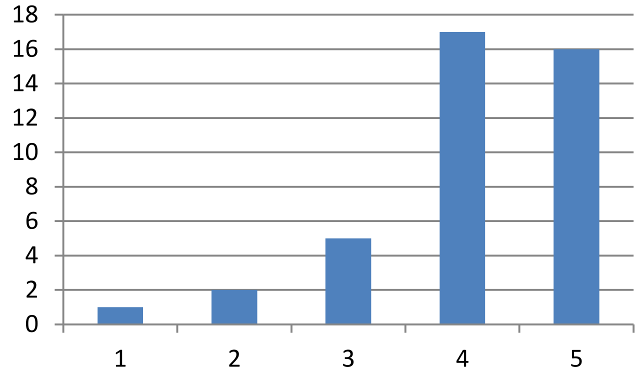
Slika 6.8: Rezultati ankete za studente ekonomije sprovedene između 5. i 7. jula 2014. godine



	Broj odgovora	Procenat
da	13	31.71%
ne	28	68.29%

Slika 6.9: Rezultati ankete za studente ekonomije sprovedene između 5. i 7. jula 2014. godine

Ocenite svoje znanje matematike:



	Broj odgovora	Procenat
1-nedovoljno	1	2.44%
2-zadovoljavajuće	2	4.88%
3-dovoljno	5	12.20%
4-vrlo dobro	17	41.46%
5-odlično	16	39.02%

Slika 6.10: Rezultati ankete za studente ekonomije sprovedene između 5. i 7. jula 2014. godine

Rezultati ove ankete veoma su interesantni za tumačenje. Prema prvom grafikonu, mogli bismo zaključiti da budući ekonomisti u dovoljnoj meri prepoznaju značaj matematike obzirom da je preko 55% ispitanika povezanost ove dve nauke ocenilo sa 4 ili 5. Samo minimalnih 5% na ovo pitanje je odgovorilo ocenama 1 ili 2, te bi ovo moglo biti interpretirano i kao spremnost ekonomista da i ubuduće prihvataju matematičke modele kao pomagala za lakše interpretiranje svojih istraživanja i izučavanja, što bi automatski označilo svetlu budućnost za obe nauke, a pogotovo za one naučne discipline koje predstavljaju njihove osnovne tačke preklapanja – statistiku i statističko modeliranje, teoriju racionalnog izbora i teoriju igara. Odgovori na tvrdnju da dobar matematičar može postati dobar ekonomista ponovo idu u korist primene matematike, što bi moglo značiti da ciljna grupa izvršene ankete pozitivno gleda na matematičku interpretaciju uzročno posledičnih veza koje njihova nauka proučava, te da uviđaju koliko logika i analitičnost koja je kod matematičara veoma razvijena mogu da budu odskočna daska ukoliko bi se oni počeli baviti ekonomijom. Isto tako, preko 60% ispitanika se ne slaže sa tvrdnjom da dobar ekonomista ne mora raspolagati zavidnim matematičkim znanjem, premda je jasno da za jako puno branši ekonomije, a pogotovo radnih mesta na kojima se ekonomisti zapošljavaju matematika nije od presudnog značaja. Zanimljivo je da je preko 80% studenata ekonomije svoje znanje matematike procenilo kao vrlo dobro ili odlično. Stiče se utisak da za matematičare onda u ekonomskoj branši i nema mesta, ako budući ekonomisti zaista poznaju matematičke zakone tako dobro. No ipak, ovde se može postaviti pitanje da li ekonomisti uopšte imaju tačnu sliku o tome koliko „duboko“ matematika može zaći u tumačenje ekonomskih pojava, i da li je njihovo znanje zaista toliko, ili je ono ipak samo površinsko i pruža im lažan osećaj sigurnosti? Danas, u eri razvijene tehnologije, najlakše je koristiti softvere za rešavanje matematičkih problema i baš statistika predstavlja primer gde je vrlo jednostavno naučiti rukovati kompjuterskim programima, a znamo da se ekonomisti od sveg izučavanja matematike najviše i suočavaju upravo sa statistikom. Možda baš ovakva situacija u kojoj su rešenja lako dostupna i stvara iluziju znanja matematike, iako, iznad svega, poenta nije samo izbaciti rezultat, već ga znati interpretirati, uočiti da li je on zaista tačan i šta je uticalo da on bude baš takav, te uočiti eventualne sličnosti i pravilnosti u rešavanju različitih problema ukoliko one postoje.

Na osnovu svega navedenog kako u poglavlju 2 tako i kroz rezultate anketa sprovedenih pre skoro 30 godina i danas, vidi se da jaka veza između ekonomije i matematike definitivno postoji, no da će ona najverovatnije zauvek biti interpretirana u zavisnosti od toga da li je posmatrana od strane matematičara ili od strane ekonomiste. Matematičaru finansija je svakako nezamislivo da se mnoštvo tema iz oblasti finansija,bankarstva, upravljanja rizicima, itd. uopšte i razmatra bez zavidnog poznavanja verovatnoće, stohastičkih procesa, diferencijalnih jednačina itd. a jasno je da ekonomisti u ovakvim poljima nikada ne mogu biti toliko jaki da bi njihova istraživanja uopšte i opstala bez matematičara. S druge strane, veliki broj ekonomskih disciplina skoro da ni ne zahteva poznavanje matematičkih koncepata, pa će se uvek naći oni koji će ulogu matematike osporavati. Na kraju krajeva, bilo koji pobornik jedne naučne discipline teško da može sa naročitim zadovoljstvom posmatrati kako se ono što je godinama samostalno izučavao stapa u drugu disciplinu i potpuno gubi identitet, te se odbrambeni mehanizam koji se među ekonomistima stvara na pomen matematike baš iz ovog razloga može razumeti.

7. ZAKLJUČAK

Obzirom da ovaj rad predstavlja završnu tačku petogodišnjih studija usmerenja Matematika finansija, njegova ideja je, čini se, sasvim jasna – njime se želela prikazati jedna veoma važna i široko primenjena disciplina primenjene matematike, a naročito se nastojalo predočiti čitaocu kakvu ulogu ona ima u ekonomiji i kolika je njena efikasnost u interpretaciji ekonomskih problema. Van toga ipak, a uz nadu da je čitalac to i sam uvideo čitajući ga, rad je pokušao objasniti odnos matematike i ekonomije sa jednog možda pomalo i filozofskog stanovišta, uz želju da se održi prividan balans i nepristrasnost u tumačenju postojećih razloga za i protiv prisnosti ovog odnosa, kako bi čitalac što uspešnije uspeo oformiti svoje mišljenje na ovu temu.

Treba primetiti da je poglavlje broj 2 u kome se diskutovalo o prihvaćenosti matematičkih modela u ekonomiji uglavnom navodilo razloge zašto postoji skeptičnost prema matematičkim modelima, dok su rezultati iz poglavlja 6 pokazali da budući ekonomisti ipak pozitivno gledaju na ovaj odnos. Kroz centralni deo rada prožimale su se teme koje su itekako pronašle primenu u ekonomskoj nauci i učinile je boljom, a baš na osnovu ovog centralnog dela, kao i na osnovu samog naziva rada, prikazano je, možda i metaforički, kakvi su stavovi autorke po pitanju konekcije koja postoji između matematike i ekonomije.

Matematičar finansija je po svojoj definiciji ipak matematičar, i iako se od njega traži balans između navedenih disciplina, većina ljudi iz ove branše će se verovatno radije prikloniti matematici nego ekonomiji, prvenstveno jer je matematika ta koja čoveka nauči da razmišlja i da analizira, na osnovu čega će posle rešiti postavljeni problem, bilo da je on matematički, ekonomski ili bilo kog drugog karaktera. Najveća lepota matematike je upravo u tome što ona ima sposobnost da pusti korene u bilo koju drugu naučnu disciplinu i utemelji svoje mesto u njoj zauvek, dok sa druge strane može da postoji i sama za sebe i da onome ko vlada njenim zakonitostima obezbedi sigurnu životnu, naučnu i duhovnu egzistenciju.

8. LITERATURA

[1] Board S., *Preferences and Utility*, Department of Economics, UCLA, 2009.

[2] Valdonė Darškuvienė, *Financial Markets*, Vytautas Magnus University, 2010.

[3] Faiez H., *Role of Mathematics in Economics*, www.faiez.co

[4] Gajić Lj., *Predavanja iz uvoda u analizu*, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 2006.

[5] Greenaway D., *On the Efficient Use of Mathematics in Economics: Results of an Attitude and Survey of British Economists*, University of Nottingham, 1989.

[6] Hykšovà M., *Several Milestones in the History of Game Theory, VII.* Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik, 2004.

[7] Krčevinac S., Čangalović M., Kovačević-Vujčić V., Martić M., Vujošević M., Operaciona istraživanja 2, Fakultet organizacionih nauka Beograd, 2006.

[8] Luenberger G.D. , *Investment Science*, Oxford University Press, 1998.

[9] Lužanin Z., *Matematički modeli u ekonomiji*, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, pisani materijal, 2007.

[10] McCain R., *Game Theory and Public Policy*, Elgar, Part I, 2010.

[11] Morgenstern O., von Neumann J., *Theory of Games and Econimic Behavior*, Princeton University Press, 1953.

[12] Olinick M., *An Introduction to Mathematical Models in the Social and Life Sciences*, Massachussets, Addision Wesley Publishing Company, 1978.

[13] Osborne J.M., *An Introduction to Game Theory*, selected parts from draft, University of Toronto, 2000.

[14] Petrić J., *Operaciona istraživanja*, knjiga druga, Savremena administracija, Beograd, 1978.

[15] Stanford Encyclopedia of Philosophy, plato.stanford.edu

[16] Šešelja B., Tepavčević A., *Algebra 1*, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 2004.

[17] www.wikipedia.org[27]

[18] YEidelman, Milman V., Tsolomites A., *Functional Analysis An Introduction*,Graduate Studies in Mathematics V66 (2004)

[27] korišćena za utvrđivanje podataka o pominjanim ličnostima i za stvaranje sopstvenih ideja za diskusiju

9. BIOGRAFIJA

Aleksandra Radanović je rođena 29.09.1990. u Novom Sadu. Završila je Osnovnu školu „Slavko Rodić“ u Bačkom Jarku kao đak generacije i upisala Gimnaziju „Jovan Jovanović Zmaj“, smer Obdareni učenici u Matematičkoj gimnaziji. Gimnaziju je završila 2009. godine kao nosilac Vukove diplome, a potom je upisala osnovne akademske studije Primenjene matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, modul Matematika finansija. U oktobru 2012. godine Aleksandra upisuje master studije na istom usmerenju. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom i stekla uslov za odbranu master rada. Tečno govori engleski i italijanski jezik, i svoje studije nastavlja u Italiji na smeru Bankarstvo i Finansije.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*
TD
Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*
TZ
Vrsta rada: *Master rad*
VR
Autor: *Aleksandra Radanović*
AU
Mentor: *dr Ivana Štajner-Papuga*
MN
Naslov rada: *Neki aspekti teorije igara i njihova primena u ekonomiji*
NR
Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP
Jezik izvoda: *s/en*
JI
Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*
ZP
Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP
Godina: *2014.*
GO
Izdavač: *Autorski reprint*
IZ
Mesto i adresa: *Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4*
MA
Fizički opis rada: (6/72/18/0/24/17/0)
(broj poglavlja/strana/literalnih citata/tabela/grafika/priloga)
FO
Naučna oblast: *Matematika*
NO
Naučna disciplina: *Primenjena matematika*
ND

Predmetna odrednica/ključne reči: *teorija igara, preferencije, korisnost, Nešov ekvilibrijum, strategija, tržište, duopol*
PO

UDK:
Čuva se: *Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: *Osnovni cilj ovog rada je prikazivanje konekcije između matematičkih i ekonomskih disciplina, uglavnom se fokusirajući na teorije koje predstavljaju njihovu glavnu sponu – teoriju racionalnog izbora i teoriju igara. Centralni deo rada daje detaljno matematičko objašnjenje najvažnijih pojmova teorije igara , kao što su Nešov ekvilibrijum, dominacija strategija, ekstenzivna forma igre, itd, koje će potom biti iskorišćene u konstrukciji matematičkih modela ekonomskog tržišta kao i za objašnjenje pojave inflacije. Osim toga, rad diskutuje pitanje primene matematike u ekonomiji, objašnjavajući kako pozitivne tako i negativne efekte koje matematika ima na ekonomsku teoriju.*
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: Avgust 2014.
DP
Datum odbrane: Septembar 2014.
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: *dr Arpad Takači, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*

Član: *dr Mirjana Štrboja, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*

Član: *dr Miloš Stojaković, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*

Mentor: *dr Ivana Štajner-Papuga, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: *Monograph type*
DT
Type of record: *Printed text*
TR
Contents code: *Master's thesis*
CC
Author: *Aleksandra Radanović*
AU
Mentor: *Ivana Štajner-Papuga, PhD*
MN
Title: *Some aspects of Game Theory and their Application in Economics*
TI
Language of text: *Serbian (Latin)*
LT
Language of abstract: *s/en*
LA
Country of publication: *Serbia*
CP
Locality of publication: *Vojvodina*
LP
Publication year: *2014*
PY
Publisher: *Author's reprint*
PU
Publ.Place: *Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
PP
Physical description: (6/72/18/0/24/17/0)
PD
Scientific field: *Mathematics*
SF
Scientific discipline: *Applied Mathematics*
SD
Subject/Key words: *game theory, preferences, utility, Nash equilibrium, strategy, market, duopoly*

SKW

UC:

Holding data: *The library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad*

HD

Note:

N

Abstract: The principal aim of this paper is to show connection between mathematical and economic disciplines by focusing on two theories which represents their crucial bond – theory of rational choice and game theory. Central part of the thesis gives detailed mathematical explanation of the most important aspects of game theory, such as Nash equilibrium, dominated actions, extensive games, etc, which are subsequently used in construction of mathematical models of economic markets and explanation of the inflation. Besides, the paper discusses the question of application of mathematics in economics by describing its positive and negative effects in the economic theory.

AB

Accepted by the Scientific Board on: August 2014

ASB

Defended: September 2014

DE

Thesis defend board:

DB

President: *Arpad Takači, PhD, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*

Member: *Mirjana Štrboja, PhD, assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*

Member: *Miloš Stojaković, PhD, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*

Mentor: *Ivana Štajner-Papuga, PhD, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*