UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Aleksandra Petrović

NEJEDNAKOSTI U SLICI

-MASTER RAD-

Mentor,dr Siniša Crvenković
Novi Sad, 2011.

SADRŽAJ

1. **Uvod** 3
2. **Pozitivni brojevi u nejednakostima** 4
2.1 Nejednakost Minkovskog 7
2.2 Primena AG nejednakosti 11
Problem kraljice Dido 12
Ravi zamena 16
2.3 Padoa nejednakost 17
3. **Površine i zapremine u nejednakostima** 19
3.1 Čebiševa nejednakost 23
3.2 Guba nejednakost 26
3.3 Avionske nejednakosti 28
Simpsonov paradoks 31
4. **Trougao u nejednakostima** 33
5. **Upisane i opisane kružnice u nejednakostima** 42
6. **Rotacije u nejednakostima** 50
7. **Neizomorfne transformacije u nejednakostima** 57
7.1 Koši Švarc Bunjakovski nejednakost 61
8. **Funkcije u nejednakostima** 66
9. **Kombinovane nejednakosti** 74
ZAKLJUČAK 76
LITERATURA 77
BIOGRAFIJA 78

1. UVOD

Nejednakosti su nastale onog momenta kada su počeli da se koriste brojevi. Mnogi matematičari su se bavili nejednakostima tako da danas ima veliki broj nejednakosti koje su dobile imena po njima: Bernulijeva, Koši-Švarc- Bunjakovskog, Minkovskog, Kantorova, Hajgensova, Aristarhova ($\frac{1}{18} > \sin 3^0 > \frac{1}{20}$) , Ptolomejeva i svakako najpoznatije aritmetičko-geometrijska nejednakost i nejednakost trougla.

Nejednakosti se javljaju u svim oblastima matematike. Naš poznati profesor Dragoslav Mitrinović je bio opsednut svim vrstama nejednakosti te je govorio: “Nema jednakosti čak ni u ljudskom životu, postoje samo nejednakosti!“ Mitrinovićevo ime postalo je sinonim za nejednakosti.

Stalno posmatramo svet i donosimo odluke na osnovu onoga što vidimo. Kako deca bolje shvataju crteže, sa kojima žive od malih nogu, tako je vizuelni dokaz lakši za prihvatanje od analitičkog dokaza na višem uzrastu. Lepota je u očima onog ko je vidi, u slučaju nejednakosti elegancija načina na koji dolazimo do njih je ono što ih čini privlačnim. Profesor Th. M. Rassias je rekao: “Nejednakosti su pravilo u matematici dok su jednakosti izuzetak!“

Master rad ima primenu u osnovnoj, a naročito u srednjoj školi jer korišćenje slike u dokazu ili slika kao dokaz je lakše za prihvatanje većini učenika.

De Morgan je rekao: “Lakše je načiniti kvadrat od kružnice nego zaokružiti matematičara!“

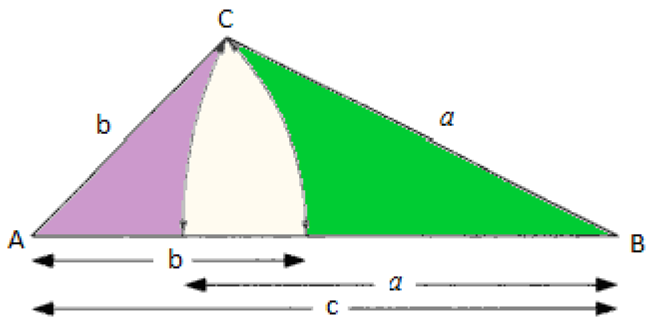
Veliku zahvalnost dugujem predsedniku komisije prof. dr. Ljiljani Gajić i članu komisije prof. dr. Zagorki Lozanov Crvenković, a izuzetnu zahvalnost dugujem mentoru prof. dr. Siniši Crvenkoviću na bezrezervnoj podršci, sugestijama i savetima.

Novi Sad   decembar 2011.   Aleksandra Petrović

2. POZITIVNI BROJEVI U NEJEDNAKOSTIMA

Blaise Pascal :“Bolje je znati o svakoj stvari ponešto , nego o jednoj sve!“

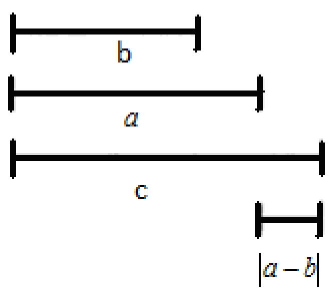
Definicija: Nejednakost trougla: Dat je trougao ABC sa stranicama a, b i c. Tada važi da je svaka stranica manja ili jednaka zbiru ostale dve (pri čemu jednakost važi za degenerisani trougao, trougao kod koga su sva tri temena na istoj duži) □



Slika 1.1

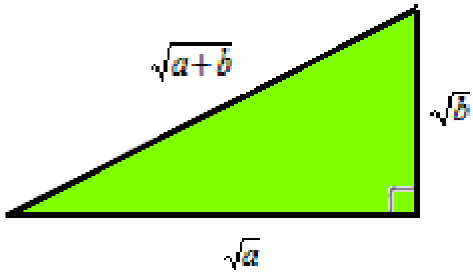
Sa Slike 1.1 je očigledno da je $c < a + b$. Analogno, $a < b + c$, $b < a + c$.

Važi još i $|a - b| < c$ i $|b - c| < a$ i $|a - c| < b$



Slika 1.2.

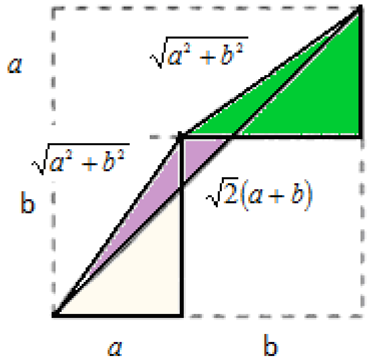
U pravouglom trouglu za $a, b > 0$ važi :



Slika 1.3.

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \square$$

Za dva pozitivna broja a i b važi:



Slika 1.4.

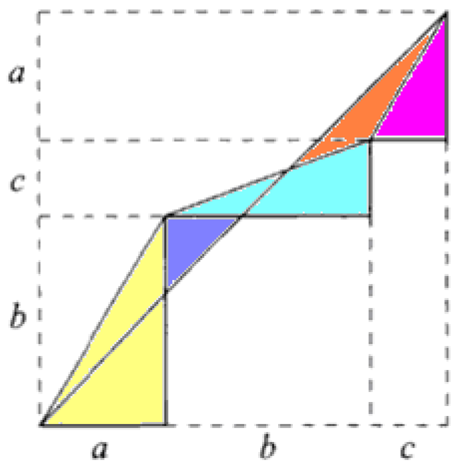
$$\sqrt{2}(a+b) < 2\sqrt{a^2+b^2} < 2(a+b) \quad \square$$

Kada ovu nejednakost podelimo sa $2\sqrt{2}$ dobijamo

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

Gde je $\frac{a+b}{2}$ aritmetička sredina za dva broja a i b kraće AS , a $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ je kvadratna sredina za dva broja a i b kraće KS □

Za tri pozitivna broja a , b , c važi:



Slika 1.5.

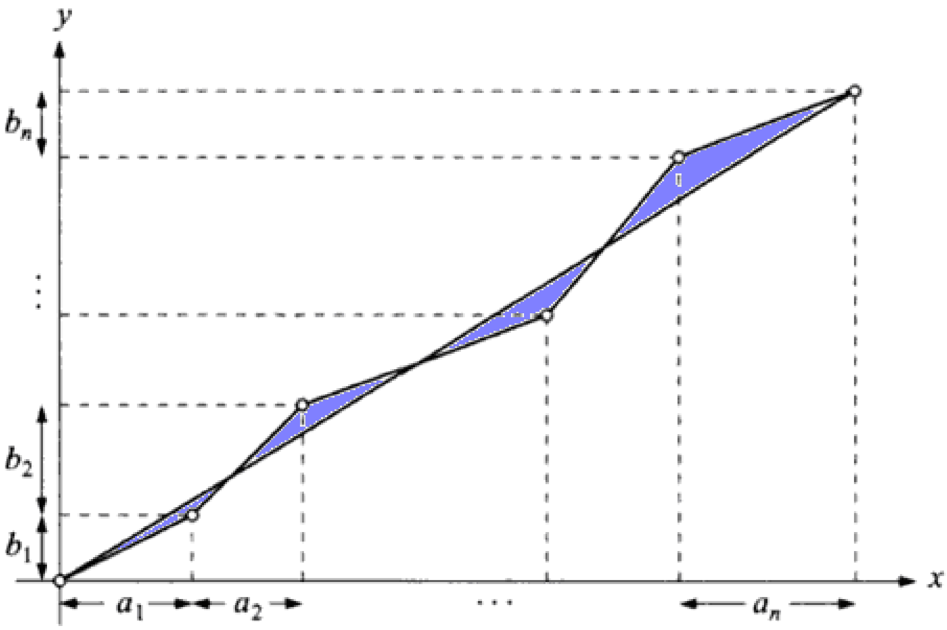
$$\sqrt{2}(a+b+c) \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{a^2+c^2} \leq 2(a+b+c)$$

Izlomljena linija je *duža* od prave linije □

2.1. Nejednakost Minkovskog:

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2} \le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^{\,2} + b_i^{\,2}}\,.$$

Za n pozitivnih brojeva važi:



Slika 1.6.

Geometrijska sredina dva pozitivna broja je $\sqrt{ab}$.

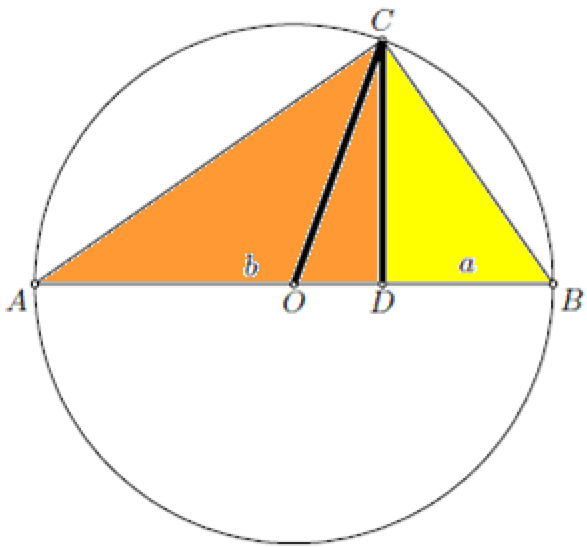
Jedna od najpoznatijih nejednakosti je *aritmetičko-geometrijska sredina* tj.

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2},$$

pri čemu jednakost važi kada je $a = b$ □

Sledi tri dokaza ove najpoznatije nejednakosti.

1. Način



Slika 2.1.

$|AD| = b$ $|DB| = a$ i u D je normala na $|AB|$.U preseku normale i polukružnice je tačka c.

O je središte kružnice prečnika $|AB|$ pri čemu je $a + b = |AB|$.

$$|OA| = |OB| = \frac{a+b}{2}$$

Kako je ugao nad prečnikom prav (Talesova teorema), to je trougao ABC pravougli.

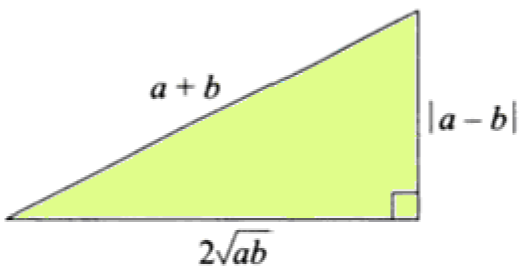
$$|CO| = \frac{a+b}{2}.$$

$|CD|$ je visina iz C na $|AB|$ te je $|CD| = \sqrt{ab}$ (Euklidova teorema. Visina na hipotenuzu je geometrijska sredina dužine odsečaka na hipotenuzi.).

Kako je $|DC|$ kateta, a $|OC|$ hipotenuza trougla OCD to je:

$|DC| \leq |OC|$ tj. $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$ jednakost važi za D=O tj. $a = b$ □

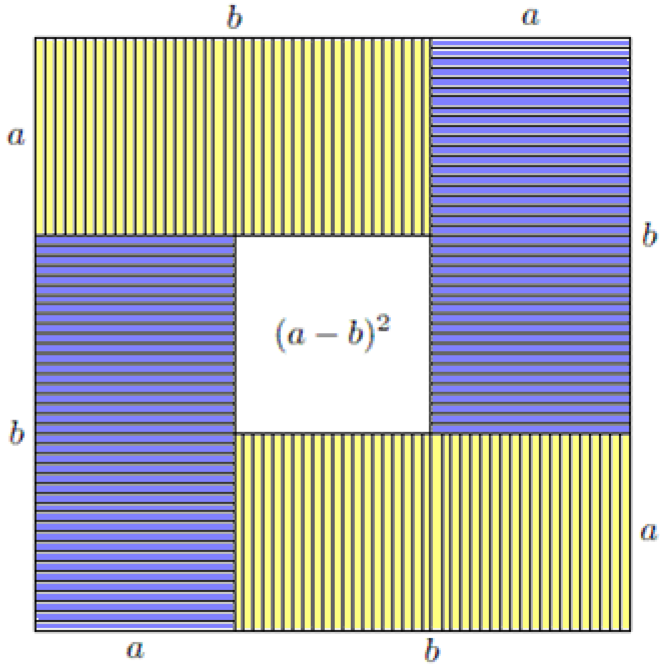
2. Način



Slika 2.2.

Očigledno je $2\sqrt{ab} \leq a+b$ te je $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$ □

3. Način



Slika 2.3.

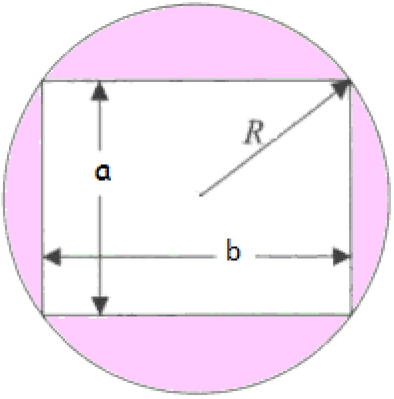
Kvadrat stranice $a+b$. Površina kvadrata je

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2$$
$$(a+b)^2 \geq 4ab$$
$$(a+b) \geq 2\sqrt{ab}$$
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Jednakost važi za $a=b$ tj. kada je $(a-b)^2 = 0$ □

2.2 Primena A-G nejednakosti:

Neka je u krug poluprečnika R upisan pravougaonik, pokazati da je pravougaonik maksimalne površine kvadrat.



Slika 2.4.

a,b su stranice pravougaonika te važi da je

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=R^2$$

Kako je površina pravougaonika $P=ab$ koristeći A-G nejednakost važi da je

$$P=ab=\sqrt{a^2b^2}\leq\frac{a^2+b^2}{2}=2R^2.$$

Jednakost važi za $a=b$ tj. $P=a^2$ što je površina kvadrata □

Problem kraljice Dido

Koliko zemljišta može da se označi sa kožom bika???

Kralj Libije je postavio ovaj problem pred kraljicu Dido ne očekujući da žena može da ga reši . Dido je kožu bika isekla na tanke trake koje je zašila u dugi niz. Na obali mora ivice traka postavila je u polukrug. Dobila je površinu zemlje veću nego što se moglo predpostaviti. Tako je nastao grad Kartagina.

Slika 2.5.

Neka je dužina izlomljene prave $L = 2x + y$.

Površina pravougaonika stranica x i y je $P = xy$

$$P = xy = \frac{1}{2}(2xy) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2xy}\right)^2 .$$

Ovde iskoristimo A-G nejednakost

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2xy}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}L^2 \text{ to je}$$

$$P \leq \frac{1}{8}L^2$$

Jednakost se postiže za $y = 2x$ tj. $P=2x^2$.

Dido problem je zapravo izoperimetrijski problem. Ona je dobila da površina mora biti dva puta šira nego duža □

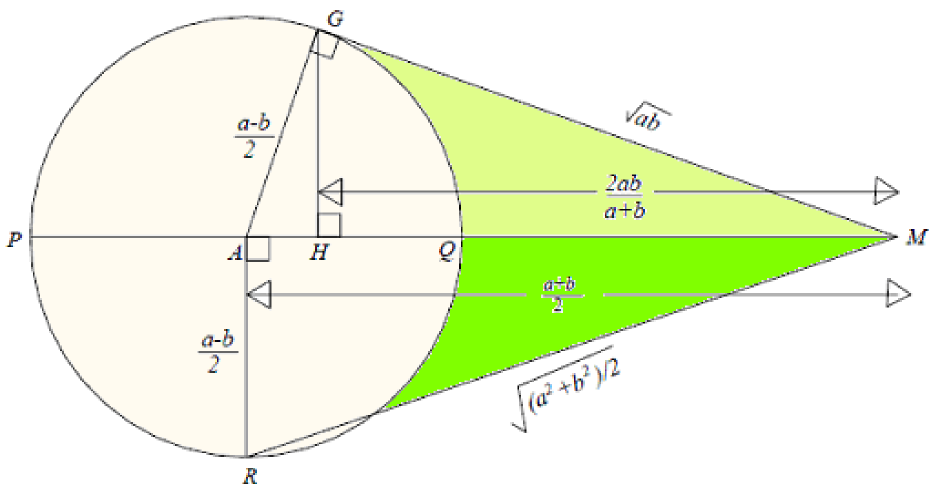
Ako poredimo sredine za dva broja a , b imamo

$$\min(a,b) \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a,b)$$

jednakost važi za $a = b$.

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$ je harmonijska sredina (HS)

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$ je kvadratna sredina (KS)



Slika 2.6.

Neka je $|PM| = a$, izaberemo Q na $|PM|$ tako da je $|QM| = b$. A je polovina duži $|PQ|$.

$$|PQ| = a - b$$
$$|AP| = |AQ| = \frac{a-b}{2}$$
$$|AM| = |AQ| + |QM| \ .$$

Konstruišemo kružnicu sa centrom u A poluprečnika $\frac{a-b}{2}$ .Iz tačke M nacrtamo tangentu na kružnicu i to je tačka G. $\prec AGM = 90^0$ te je trougao AGM pravougli sa hipotenuzom $|AM|$, $|AG| = \frac{a-b}{2}$ koristeći Pitagorinu teoremu.

$$|GM| = \sqrt{|AM|^2 + |AG|^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}$$

to je $\quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Jednakost važi za $a = b$ tj. $\frac{a-b}{2} = 0$.

H je podnožje visine iz G na AM trougla AMG.Trouglovi AMG i GMH su slični te je

$$\frac{|HM|}{|GM|} = \frac{|GM|}{|AM|} \ \text{tj.}$$

$$|HM| = \frac{|GM|^2}{|AM|} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} \quad \text{kako je } |HM| \le |GM|$$

to je

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab}$$

jednakost važi za $a = b$. Iz tačke A povučemo normalu i označimo tačku R, trougao ARM je pravougli, $|AR| = \frac{a-b}{2}$.

Koristeći Pitagorinu teoremu imamo

$$|RM| = \sqrt{|AM|^2 + |AR|^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

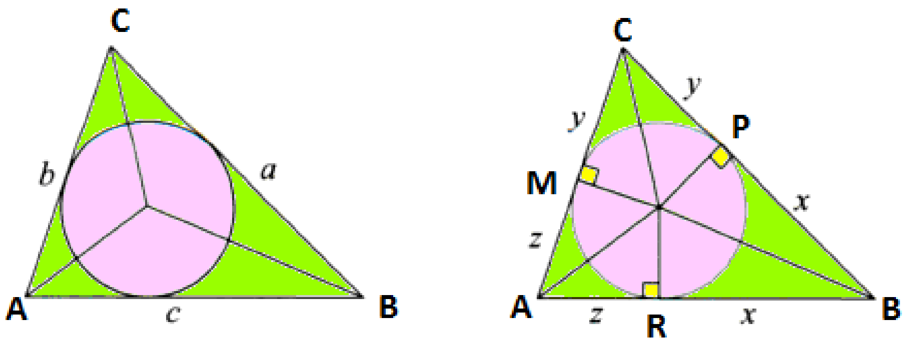
$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \qquad |AM| = |RM| \quad \text{akko A=R tj.}$$

$$\frac{a-b}{2} = 0\ ,$$

a to važi za $a = b$ □

Ravi zamena

Dat je trougao stranica a , b, c u koji je upisana kružnica



$$a = x + y, b = y + z, c = z + x.$$

Slika 2.7.

Ako tačke dodira kružnice i stranica $|AC|, |CB|, |AB|$ označimo redom sa M, P, R tada je y $|CM| = |CP| = y$ (tangente na kružnicu ,SSU)

$$|AM| = |AR| = z$$

$$|BR| = |BP| = x$$ te važi $a = x + y$

$$b = y + z$$

$$c = x + z$$

$$a + b - c = 2y$$

$$a - b + c = 2x$$

$$-a + b + c = 2z$$

Poluobim je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ tj. $s = \dfrac{2x+2y+2z}{2} = x+y+z$

Kako je $s-a=z$ $\quad s-b=x \quad s-c=y$

Sada je očigledno da je $x+y<x+y+2z$ što je ekvivalentno sa

$$a<b+c \ \square$$

2. 3. Padoa nejednakost

Neka su a, b, c tri stranice trougla. Tada važi da je

$$abc \geq (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Koristeći Ravi zamenu imamo ekvivalent

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq (2x)(2y)(2z) = 8xyz \ .$$

Takođe, koristeći A-G nejednakost

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

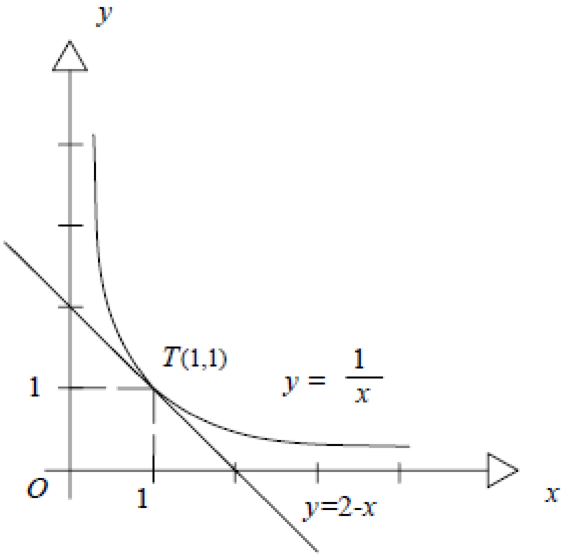
$$y+z \geq 2\sqrt{yz}$$

$$z+x \geq 2\sqrt{zx}$$

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 2\sqrt{xy}\,2\sqrt{yz}\,2\sqrt{zx} = 8xyz,$$

pa sledi gornje tvrđenje □

Posmatrajmo funkciju $f:(0,+\infty)\to R$ tako da je $f(x)=\dfrac{1}{x}$



Slika 2.8.

Jednačina tangente na hiperbolu $y=\dfrac{1}{x}$ je $y=2-x$ u tački T(1,1).Funkcija je

konveksna i nalazi se iznad tangente za $x>0$ pa je

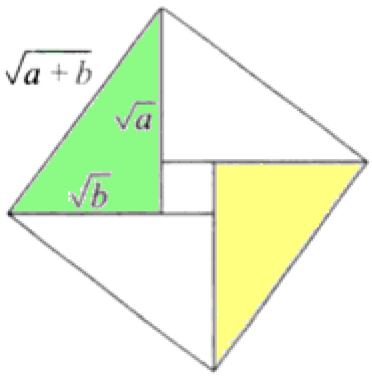
$\dfrac{1}{x}\geq 2-x \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ jednakost važi samo za $x=1$.

To takođe proizilazi iz A-G nejednakosti primenjene za x, $\dfrac{1}{x}$ □

3. Površine i zapremine u nejednakostima

Albert Einstajn:"Mašta je puno važnija od znanja. Može se sve znati ,ali ništa ne napraviti ,dok se sa malo mašte može napraviti sve „

Primer 1. Površina kvadrata stranica $\sqrt{a+b}$ je $P = a + b$.



Slika 3.1.

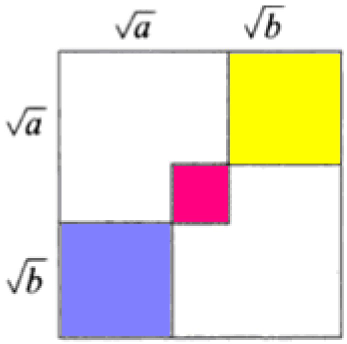
Površina pravouglog trougla čije su katete $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ je $P = \frac{\sqrt{ab}}{2}$.

Sa slike se vidi da je površina kvadrata veća od površine četiri trougla tj. $a + b \geq 4\frac{\sqrt{ab}}{2}$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \square$$

Primer 2.



Slika 3.2.

Površina kvadrata dužine stranice $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ je

$$P=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 .$$

Vidi se sa slike da je

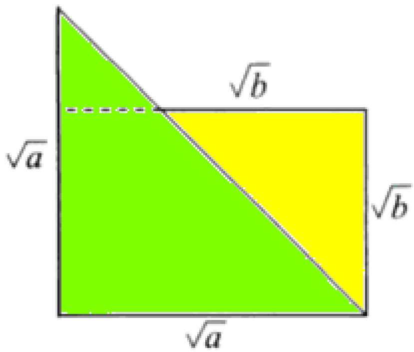
$$2\left(\sqrt{a}\right)^2+2\left(\sqrt{b}\right)^2 \geq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$$

$$2a+2b \geq a+2\sqrt{ab}+b$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$.\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \square$$

Primer 3. Površina pravougaonika stranica $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ je $P=\sqrt{ab}$.



Slika 3.3.

Površina jednakokrako pravouglog trougla katete $\sqrt{a}$ je

$$P_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}\right)^2.$$

Analogno za katetu $\sqrt{b}$ je

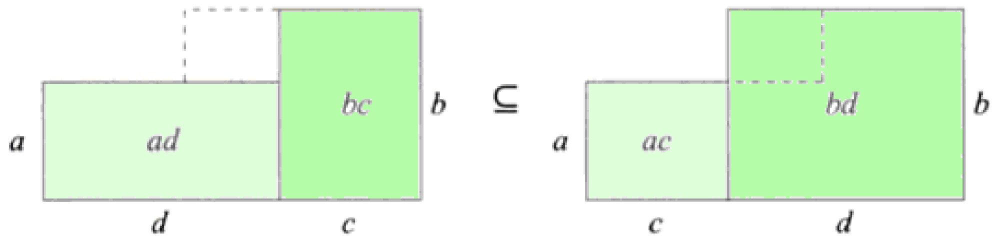
$$P_2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{b}\right)^2$$

te važi da je $P_1+P_2\geq P$ pa kada zamenimo

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{b}\right)^2\geq\sqrt{ab}\quad,$$

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\ \square$$

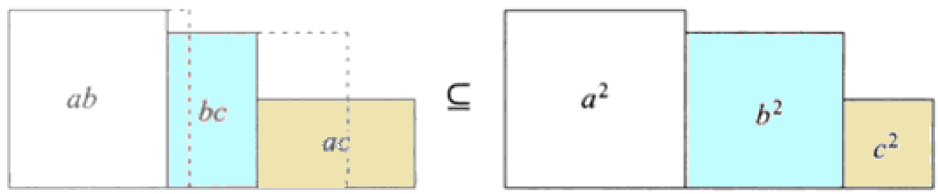
Primer 4.a) Za bilo koja četiri pozitivna broja a, b, c, d takva da je $a \leq b$,
$c \leq d$ tada važi $ad + bc \leq ac + bd$.



Slika 3.4.

Jednakost važi za $a = b$ ili $c = d$ za $a, b, c \geq 0$, $a \geq b \geq c$ □

b) Važi



Slika 3.5.

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \; \square$$

3.1.Čebiševa nejednakost

Teorema. Za $n \geq 2$ i $0 < x_1 \leq .... \leq x_n$ važi:

(i) Ako je $0 < y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_n$ onda

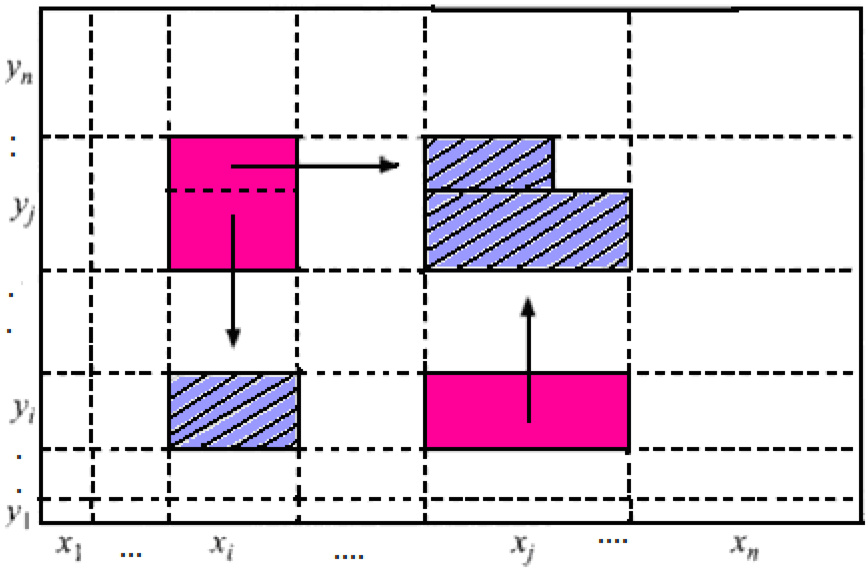
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

(ii) Ako je $y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_n$ onda

$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i \geq n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, jednakost važi akko su svi x_i jednaki i svi y_i

jednaki.

Dokaz:(i)



Slika 3.6.

$x_i \le x_j$, $y_i \le y_j$

$x_i y_j + x_j y_i \le x_i y_i + x_j y_j$.

Sledi $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_j + x_j y_i) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_i + x_j y_j)$

tj. $(x_1 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n) \le n(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)$ □

(ii) $x_i \le x_j$ $y_i \ge y_j$

$x_i y_j + x_j y_i \ge x_i y_i + x_j y_j$.

Sledi $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_j + x_j y_i) \ge \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_i + x_j y_j)$

tj. $(x_1 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n) \ge n(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)$.

Kada stavimo da je $y_i = \frac{1}{x_i}$

$$(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \ge n^2$$

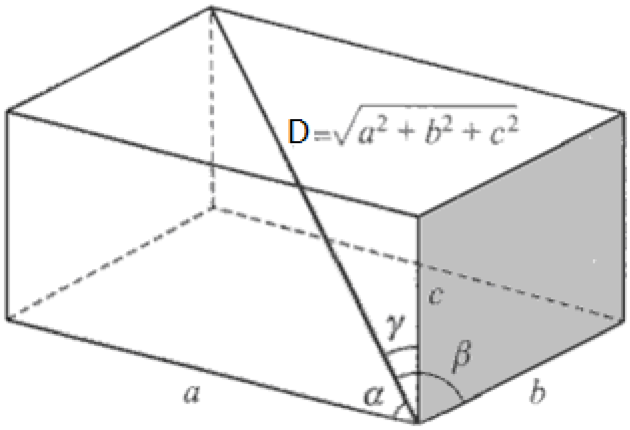
$\Leftrightarrow \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \ge \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$ jednakost važi za $x_1 = \ldots = x_n$ □

Primena: *Voicu's nejednakost*: Neka su α, β, γ uglovi koje prostorna dijagonala prizme formira sa ivicama. Tada važi

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \geq 2\sqrt{2} \ .$$

Jednakost važi za kocku.

Dokaz:



Slika 3.7.

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

Kada stavimo da je $x = \cos\alpha$ $y = \cos\beta$ $z = \cos\gamma$ dobijamo

$$1 + tg^2\alpha \ tg^2\beta \ tg^2\gamma = 1 + \frac{1 - x^2}{x^2} \cdot \frac{1 - y^2}{y^2} \cdot \frac{1 - z^2}{z^2} =$$

$$= \frac{x^2 y^2 z^2 + \left(1 - y^2 - x^2 + x^2 y^2\right)\left(1 - z^2\right)}{x^2 y^2 z^2} =$$

$$=\frac{x^2y^2z^2+1-z^2-y^2+y^2z^2-x^2+x^2z^2+x^2y^2-x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2}=$$

$$=\frac{x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2}{x^2y^2z^2}=$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=$$

$$=\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)\geq 9$$, na osnovu prethodnog,

$tg\,\alpha\ tg\,\beta\ tg\,\gamma \geq \sqrt{8}=2\sqrt{2}$ jednakost važi samo ako je u pitanju kocka (tangens ugla je $\sqrt{2}$) □

3.2 Guba nejednakost

U pravoj prizmi dimenzija a,b,c zapremine $V=abc$ i površine strana $P_1=ab$, $P_2=bc$, $P_3=ac$
sa prostornom dijagonalom $D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ važi da je

$$P_1^2+P_2^2+P_3^2\geq\sqrt{3}VD.$$

Dokaz: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)\geq$

(Koristeći prethodno da je $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$ dobijamo)

$$\geq ab+ac+bc+2(ab+bc+ac)$$

$$=3(ab+ac+bc)$$

$$\left(P_1^2+P_2^2+P_3^2\right)^2 \geq 3\left(P_1^2P_2^2+P_1^2P_3^2+P_2^2P_3^2\right)$$

$$=3\left(a^2b^2b^2c^2+a^2b^2a^2c^2+b^2c^2a^2c^2\right)$$

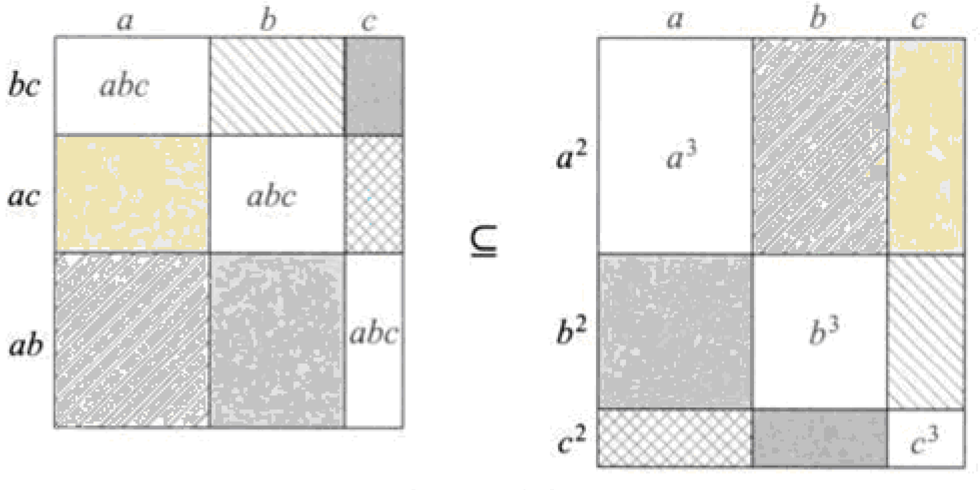
$$=3\left(a^2b^4c^2+a^4b^2c^2+b^2a^2c^4\right)$$

$$=3a^2b^2c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$=3V^2D^2$$ te je

$$P_1^2+P_2^2+P_3^2 \geq \sqrt{3}VD \quad \square$$

Teorema. Za sve $a,b,c \geq 0$ $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$.



Slika 3.8.

Dokaz: Kako je $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$ kada prvo pomnožimo sa a, zatim sa b, a zatim sa c i saberemo, dobijamo

$$a^3+b^2a+c^2a \geq a^2b+abc+a^2c$$
$$a^2b+b^3+c^2b \geq ab^2+b^2c+abc$$
$$a^2c+b^2c+c^3 \geq abc+bc^2+ac^2$$

Kada se ispotire dobijamo da je

$$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc \ \square$$

3.3 Avionske nejednakosti

Dimenzije prtljaga koje propisuju avio kompanije je $a+b+c \leq 45$ inča.A-G nejednakost pokazuje da oblik takvog prtljaga mora biti kocka. .Nažalost takav prtljag retko ulazi u boks iznad putnika, jer boks ima oblik prizme.

(15 inča$\approx$38,1 cm)

$(\frac{115}{3} \approx 38{,}1\,\mathrm{cm})$

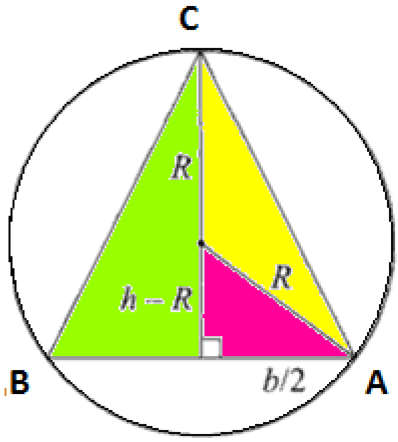
$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \frac{45}{3} = 15.$$

$$abc \leq 15 \cdot 15 \cdot 15$$

te jednakost važi kada je $a=b=c=15$ tj. ivice su 15 inča, a to važi za kocku □

Teorema. Od svih trouglova koji su upisani u datu kružnicu najveću površinu ima jednakostraničan trougao .

Dokaz:



Slika 3.9.

Posmatrajmo jednakokraki trougao i oko njega opisanu kružnicu. R je poluprečnik opisane kružnice oko jednakokrakog trougla. Pretpostavimo da je $h \geq R$ u trouglu AOC važi da je

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (h - R)^2 = R^2 \ ,$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = R^2 - h^2 + 2hR - R^2 \ ,$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = h(2R - h) \ .$$

Kako je površina trougla ABC

$$P = \frac{bh}{2} \quad ,$$

$$P^2 = \left(\frac{bh}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 h^2$$

$$= h^3 (2R - h)$$

$$= 27\left(\frac{h}{3}\right)^3 (2R - h)$$

$$\leq 27\left[\frac{1}{4}\left(\frac{h}{3} + \frac{h}{3} + \frac{h}{3} + (2R - h)\right)\right]^4$$

$$= 27\left(\frac{R}{2}\right)^4$$

$$= \frac{27}{16} R^4 \quad .$$

$$P \leq \sqrt{\frac{27}{16} R^4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \ .$$

Jednakost važi za $h = \frac{3R}{2}$, a to je tačno za jednakostraničan trougao □

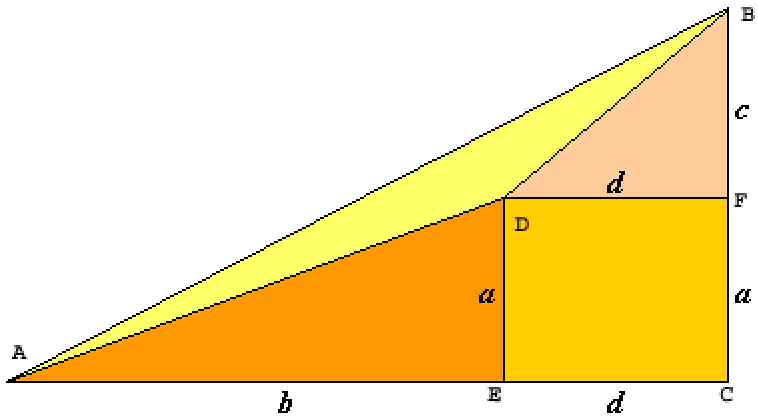
Teorema. Za n pozitivnih brojeva $x_1, \dots, x_n$ imamo

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \quad \square$$

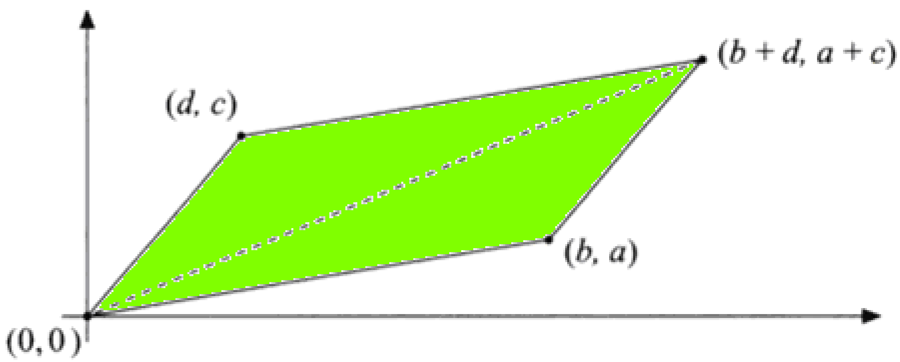
Simpsonov paradoks

Ako imamo razlomke $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$, b > 0 , d > 0 ako je

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ tada je $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

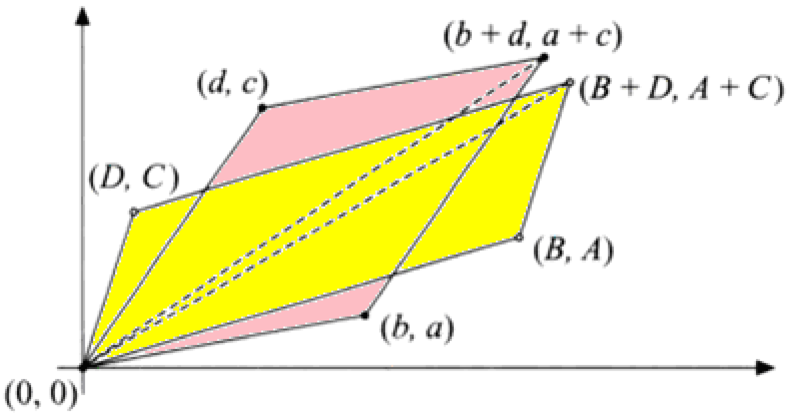


Slika 3.10



Slika 3.11.

Simpsonov paradoks: $\frac{a}{b} < \frac{A}{B} \quad \frac{c}{d} < \frac{C}{D}$ ali $\frac{a+c}{b+d} > \frac{A+C}{B+D}$.



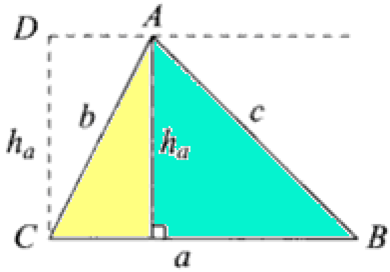
Slika 3.12.

4. Trougao u nejednakostima

Galileo Galilei:“Ko razume geometriju poseduje moć razumevanja sveta!“

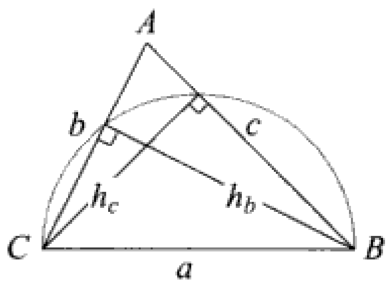
Konstrukcije trougla:

1.) ako je dato: a, b, h_a . Trougao postoji ako je $b \geq h_a$ >0.



Slika 4.1.

2.) ako je dato: h_c , a , h_b ,.Trougao postoji ako je $h_b \leq a$ i $h_c \leq a$.



Slika 4.2.

Lema. Neka je dat trougao ABC sa stranicama a,b,c važi da je

$$h_a \le \sqrt{s(s-a)}$$

$$h_b \le \sqrt{s(s-b)}$$

$$h_c \le \sqrt{s(s-c)}$$ pri čemu je $s = \frac{a+b+c}{2}$ (poluobim).

Dokaz: Koristimo Heronov obrazac $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$P = \frac{ah_a}{2}$$

$$h_a = \frac{2P}{a} = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{s(s-a)}\frac{\sqrt{(s-b)(s-c)}}{\frac{a}{2}}$$

Koristeći A-G nejednakost $\sqrt{(s-b)(s-c)} \le \frac{s-b+s-c}{2} = \frac{a}{2}$ te je $h_a \le \sqrt{s(s-a)}$.

Analogno je $h_b \le \sqrt{s(s-b)}$ i $h_c \le \sqrt{s(s-c)}$ □

Teorema. Ako su h_a, h_b, h_c visine trougla tada je:
$h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{3}s$ i

$h_a h_b h_c \leq sP$.

Dokaz: Iz prethodne Leme i aritmetičko kvadratne nejednakosti sledi

$$h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{s(s-a)} + \sqrt{s(s-b)} + \sqrt{s(s-c)}$$

$$\leq 3\sqrt{\frac{s(s-a)+s(s-b)+s(s-c)}{3}}$$

$$=3\sqrt{\frac{s^2 - as + s^2 - sb + s^2 - sc}{3}}$$

$$=3\sqrt{\frac{3s^2 - s(a+b+c)}{3}}$$ kako je $a+b+c=2s$ to je

$$=3\sqrt{\frac{3s^2 - 2s^2}{3}}$$

$$=3\sqrt{\frac{s^2}{3}}$$

$$=\sqrt{3}s$$

$$h_a h_b h_c \leq \sqrt{s(s-a)}\sqrt{s(s-b)}\sqrt{s(s-c)} = \sqrt{s^2 s(s-a)(s-b)(s-c)} = sP$$

Ako je u oštrouglom trouglu $a \geq b \geq c$, može se dokazati da je

$$\cos\alpha \leq \cos\beta \leq \cos\gamma .$$

Dokaz: Neka je $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$ (Slika 4.2) ,

$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$,

$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$. Od prve jednakosti oduzmemo drugu dobijamo

$$0 \leq a - b = (b - a)\cos\gamma + c\,(\cos\beta - \cos\alpha) ,$$

$(a-b)\cos\gamma \leq c\,(\cos\beta - \cos\alpha)$ kako je γ oštar ugao

$0 \leq \cos\beta - \cos\alpha$ te je $\cos\alpha \leq \cos\beta$

analogno je $\cos\beta \leq \cos\gamma$.

Težišne linije trougla spajaju temena trougla, sa središtima naspramnih stranica. Težišne linije se seku u jednoj tački, težištu trougla. Rastojanje od težišta do temena je $\frac{2}{3}$ težišne linije.

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

$$t_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$$

$$t_c^2 = \frac{2b^2 + 2a^2 - c^2}{4}$$

ako za stranice trougla važi $a \leq b \leq c$ onda je $t_a \geq t_b \geq t_c$

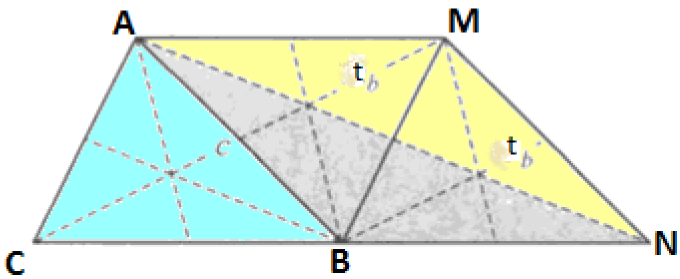
$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4} \quad \square$$

Teorema. Neka su t_a, t_b, t_c težišne linije trougla ABC tada je

$$\frac{3s}{2} \leq t_a + t_b + t_c \leq 2s.$$

Dokaz: Prvo dokazujemo da je $t_a + t_b + t_c \leq 2s$.

Trougao ABC prvo centralno simetrično preslikamo u odnosu na sredinu stranice AB, a zatim dobijeni trougao takođe centralno simetrično preslikamo u odnosu na sredinu stranice BM tako da dobijemo trapez CAMN.



Slika 4.3.

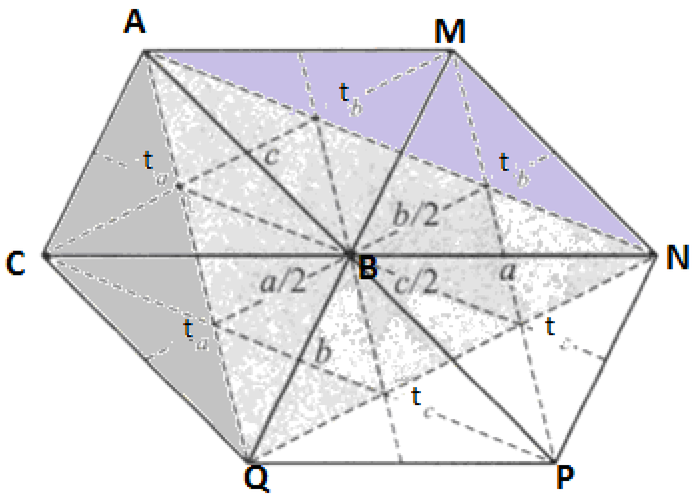
$2t_b \leq a + c$ analogno $2t_a \leq b + c$ i $2t_c \leq a + b$.

$$2t_a + 2t_b + 2t_c \leq 2a + 2b + 2c$$

$$t_a + t_b + t_c \leq a + b + c$$

Sada dokažimo $\frac{3s}{2} \le t_a + t_b + t_c$.

Trougao ABC sada pet puta centralno simetrično preslikamo (u odnosu na sredinu stranice AB , zatim BM , BN ,BP i BQ redom) dok ne dobijemo heksagon AMNPQC .



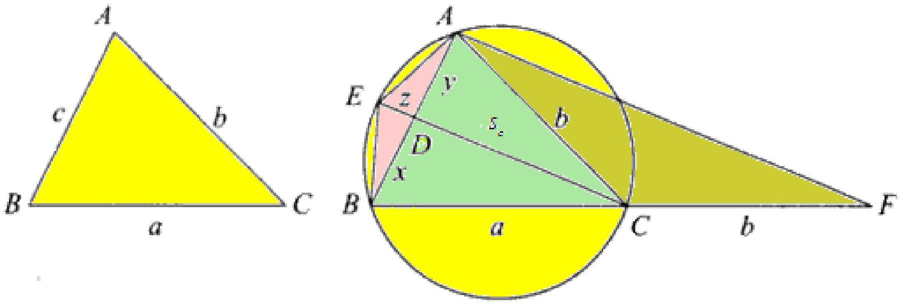
Slika 4.4.

U trouglu ANQ čije su stranice $2t_a, 2t_b, 2t_c$ težišne linije su $\frac{3a}{2}, \frac{3b}{2}, \frac{3c}{2}$ te je

$$\frac{3(a+b+c)}{2} \le t_a + t_b + t_c \quad \square$$

Teorema. U trouglu ABC s_a, s_b, s_c su simetrale uglova i važi $s_a + s_b + s_c \leq \sqrt{3}s$ i $s_a s_b s_c \leq sP$.

Dokaz:



Slika 4.5.

Trougao ACF je jednakokrak. Kako je spoljašnji ugao jednak zbiru dva unutrašnja nesusedna dobijamo da je $AF \| CE$ te je trougao DBC sličan trouglu ABF te važi da je

$$\frac{x}{c} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow x = \frac{ac}{a+b}$$

$$y = c - x = \frac{cb}{a+b}.$$

Kako je trougao DAC sličan trouglu BEC jer je

$$\prec DAC \cong \prec BEC$$

$\prec ACD \cong \prec ECB$ to imamo

$$\frac{z + s_c}{b} = \frac{a}{s_c} \Rightarrow s_c^2 + zs_c = ab \ .$$

Kako pri preseku tetiva imamo

$$zs_c = xy \qquad \text{(na osnovu teoreme o preseku tetiva)} ,$$

$$zs_c = xy = \frac{abc^2}{(a+b)^2} \quad \text{ubacimo u } s_c^2 + zs_c = ab$$

pa dobijamo da je

$$\begin{aligned}
s_c^2 &= ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} \\
&= \frac{ab(a^2 + 2ab + b^2) - abc^2}{(a+b)^2} \\
&= \frac{a^3b + 2a^2b^2 + ab^3 - abc^2}{(a+b)^2} \\
&= \frac{ab(a^2 + b^2 + 2ab - c^2)}{(a+b)^2} \\
&= \frac{\sqrt{ab}}{(a+b)}\sqrt{(a+b)^2 - c^2} \\
&= \frac{\sqrt{ab}}{(a+b)}\sqrt{\frac{4((a+b)^2 - c^2)}{4}} \\
&= \frac{2\sqrt{ab}}{(a+b)}\sqrt{\frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2}} \\
&= \frac{2\sqrt{ab}}{(a+b)}\sqrt{s(s-c)} \quad .
\end{aligned}$$

Kako je $s_c = \dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{s(s-c)}$ i $2\sqrt{ab} \le a+b$ iz A-G nejednakosti je

$s_c \le \sqrt{s(s-c)}$, analogno $s_a \le \sqrt{s(s-a)}$ i $s_b \le \sqrt{s(s-b)}$.

Koristeći aritmetičko kvadratnu nejednakost važi da je

$$s_a + s_b + s_c \leq \sqrt{s(s-a)} + \sqrt{s(s-b)} + \sqrt{s(s-c)}$$

$$\leq 3\sqrt{\frac{s(s-a)+s(s-b)+s(s-c)}{3}}$$

$$\leq \sqrt{3}s$$

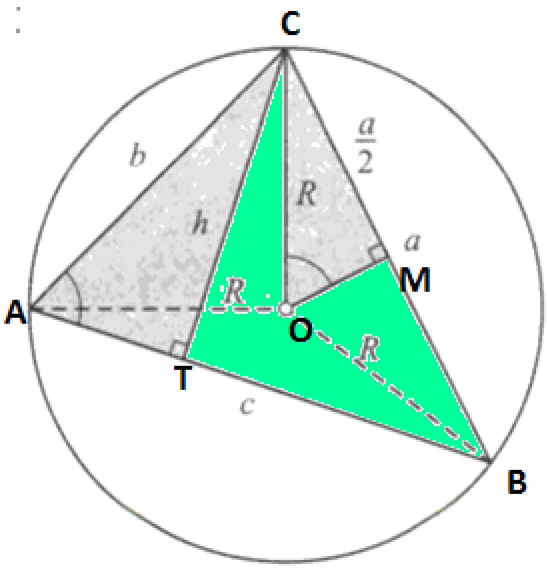
$$s_a s_b s_c \leq \sqrt{s(s-a)}\sqrt{s(s-b)}\sqrt{s(s-c)} = sP \qquad \square$$

5. Upisane i opisane kružnice u nejednakostima

Platon :“Znanje kojem teži geometrija je znanje o večnome!“

Lema 1. $P = \frac{abc}{4R}$.

Dokaz:



Slika 5.1.

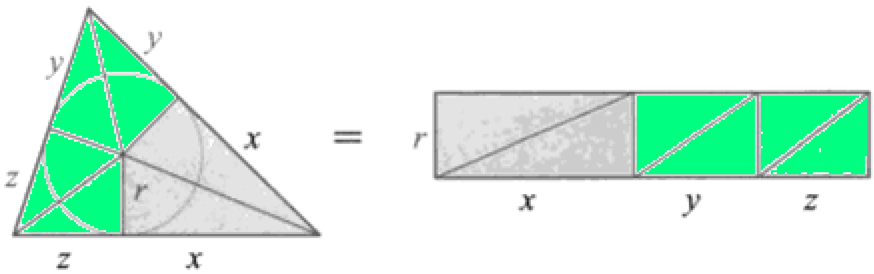
Trougao CTA je sličan sa trouglom COM. $\prec ATC \cong \prec OMC$

$\prec CAT \cong \prec COM$ (periferijski i centralni ugao) te je $\frac{h}{b} = \frac{\frac{a}{2}}{R}$ pa je

$h = \frac{1}{2}\frac{ab}{R}$, a odatle je $P = \frac{1}{2}hc = \frac{1}{4}\frac{abc}{R}$ □

Lema 2. $P = r(x+y+z) = rs$.

Dokaz:



Slika 5.2. □

Lema 3. $xyz = r^2(x+y+z) = r^2 s$.

Dokaz:

$$s-a=x$$
$$s-b=y$$
$$s-c=z$$
$$xyz=(s-a)(s-b)(s-c)$$
$$sxyz=s(s-a)(s-b)(s-c)=P^2=r^2s^2$$
$$xyz=r^2s \quad \square$$

Teorema. (Ojlerova teorema) Za trougao važi

$R \geq 2r$ $\qquad$ R poluprečnik opisane kružnice, r poluprečnik upisane kružnice.

Dokaz: Pošto je Padoa nejednakost

$abc \geq 8xyz$ $\qquad$ na osnovu *Leme 1* imamo

$4PR \geq 8xyz$ $\qquad$ na osnovu *Leme 3* imamo

$4PR \geq 8r^2 s$,a iz *Leme 2* imamo

$4PR \geq 8\Pr$ pa je

$R \geq 2r$

Jednakost važi za jednakostranične trouglove □

Primena. Heronov obrazac

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

gde je $s = \dfrac{a+b+c}{2} = x + y + z$ poluobim .

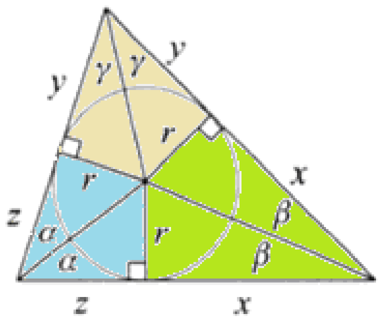
Dokaz: $s - a = x$ $s - b = y$ $s - c = z$ Iz *Leme2* imamo $r^2 s = xyz = (s-a)(s-b)(s-c)$ pomnožimo sa s sa obe strane i dobijamo

$$(rs)^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ kako je $P = rs$ to je

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ □

Teorema. Među svim trouglovima opisanim oko datog kruga najmanju površinu ima jednakostraničan trougao.
Dokaz:



Slika 5.3.

Znamo da je

$$r^2(x+y+z)=xyz$$

$$\frac{1}{r^2}=\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}$$

Iz *Leme 3* i *Heronovog obrazca* imamo da je

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$P^2=s(xyz) \qquad (\text{ jer je } P^2=r^2s^2=r^2ss=(xyz)s\ )$$

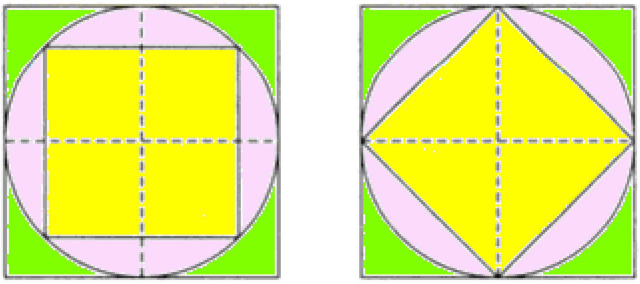
$$P^2r^2=\frac{P^4}{s^2}=(xyz)^2$$

Koristeći A-G nejednakost važi da je

$$\frac{1}{P^2r^2}=\frac{1}{yz}\frac{1}{xy}\frac{1}{xz}\leq\left(\frac{\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}}{3}\right)^3=\frac{1}{27r^6}$$

Kada je P minimalno $\frac{1}{P^2r^2}$ je maksimalno pa je očigledno da jednakost važi za jednakostraničan trougao □

Janoš Aczel je ispričao priču da je moguće naći površinu kruga poluprečnika 1 tako što se upiše i opiše kvadrat površine 2 i površine 4 te je zaključak da je površina kruga aritmetička sredina ove dve površine što bi bilo 3.



Slika 5.4.

Tetivan četvorougao je četvorougao oko koga je opisana kružnica.

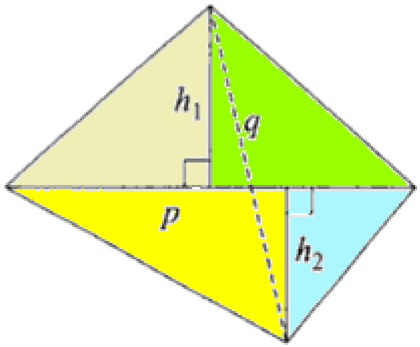
Tangentni četvorougao je četvorougao koji je opisan oko kruga.

Četvorougao je bicentričan ako se oko i u njega može opisati i upisati kružnica.

Lema 4. Ako je četvorougao tetivan važi $2R^2 \geq P$.

Dokaz: Za konveksni četvorougao važi da je $P = \dfrac{p(h_1 + h_2)}{2}$

$h_1 + h_2 \leq q$ pa je $P \leq \dfrac{pq}{2}$



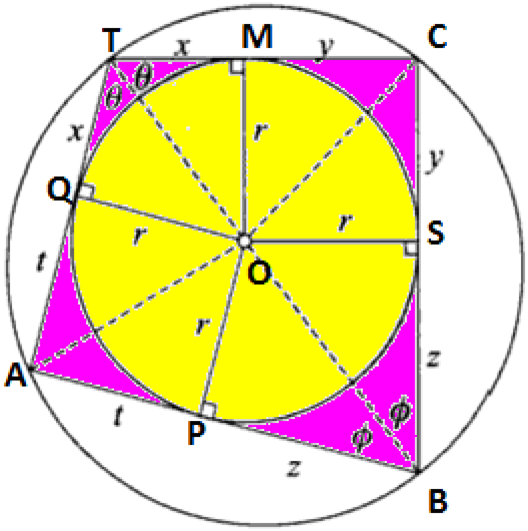
Slika 5.5.

Jednakost važi ako su dijagonale uzajamno normalne.Kako je četvorougao tetivan tada važi da je $p \leq 2R$ $q \leq 2R$

$$pq \leq 4R^2$$
$$P \leq 2R^2 \quad \square$$

Lema 5. Ako je četvorougao bicentričan tada važi $P \geq 4r^2$.

Dokaz: Neka je četvorougao bicentričan. Kako je četvorougao tetivan to je $2\theta+2\varphi=\pi$ $\theta+\varphi=90^0$.



Slika 5.6.

Iz sličnosti trouglova TMO i BOS važi

$$\frac{x}{r} = \frac{r}{z} \Rightarrow r^2 = xz \quad \text{analogno} \quad r^2 = ty$$

Iz činjenice da je četvorougao tangentan imamo da je

$$P = r(x + y + z + t)$$

$$P = 2r\left(\frac{x+z}{2} + \frac{y+t}{2}\right)$$

$$\geq 2r\left(\sqrt{xz} + \sqrt{yt}\right) \qquad (\text{ kako je } r = \sqrt{xz} \text{ i } r = \sqrt{ty}\ )$$

$$= 4r^2.$$

$$P \geq 4r^2 .$$

Jednakost važi samo za $x = y = z = t$ tj. kada je četvorougao kvadrat □

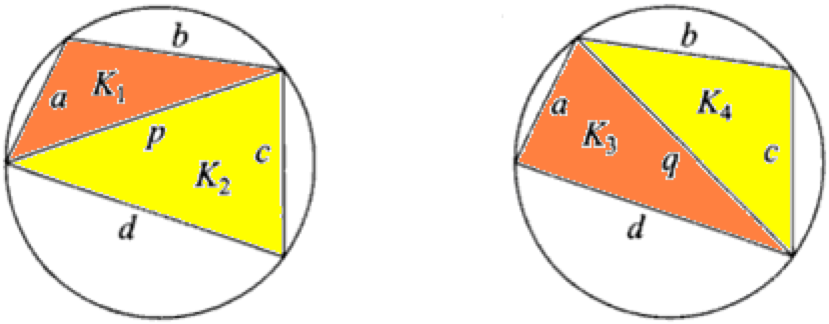
Teorema. Ako je četvorougao bicentričan tada važi da je

$$R^2 \geq \frac{P}{2} \geq 2r^2 \ .$$

Dokaz. Direktno iz *Leme 4* i *Leme 5* ▫

Lema 6. Ako je četvorougao tetivan , važi da je $\dfrac{p}{q} = \dfrac{ad+bc}{ab+cd}$.

Dokaz:



Slika 5.7.

Iz *Leme 1* imamo da je $P = \dfrac{abc}{4R}$

$$P = P_1 + P_2 = \frac{abp}{4R} + \frac{dcp}{4R} = \frac{p(ab+cd)}{4R}$$

$$P = P_3 + P_4 = \frac{adq}{4R} + \frac{bcq}{4R} = \frac{q(ad+bc)}{4R}$$ pa sledi

$$p(ab+cd) = q(ad+bc)$$

$$\frac{p}{q} = \frac{ad+bc}{ab+cd} \ \square$$

6. Rotacije u nejednakostima

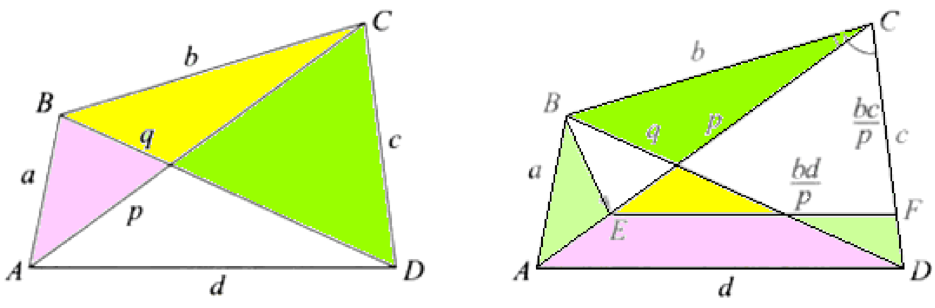
Descartes: „Nije dovoljno imati zdrav razum, treba ga znati i primeniti!“

Ptolomejeva teorema. Za tetivni četvorougao sa dijagonalama p, q i stranicama a, b, c, d važi

$$pq = ac + bd \,.$$

Ptolomejeva nejednakost: Za konveksan četvorougao koji ima stranice a, b, c, d i dijagonale p, q važi $pq \leq ac + bd$.

Dokaz: Četvorougao ABCD je konveksan, p, q su dijagonale. Oko temena C rotiramo stranicu BC na dijagonalu p i označimo tačku E tako da $|BC| = |EC| = b$.



Slika 6.1.

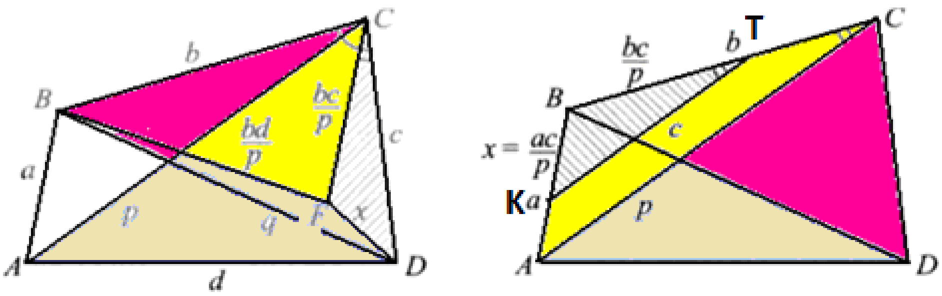
Kroz tačku E povučemo paralelu sa AD i na CD i označimo tačku F tako da iz sličnosti trouglova CEF i CAD imamo

$$\frac{p}{d} = \frac{b}{|EF|} \Rightarrow |EF| = \frac{bd}{p}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{|CF|}{|EF|} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{|CF|}{\frac{bd}{p}}$$

$$\Rightarrow |CF| = \frac{cbd}{pd}$$

$$\Rightarrow |CF| = \frac{cb}{p} \quad .$$



Slika 6.2.

Trougao CFE rotiramo oko C za negativan ugao,sada važi

$\frac{bd}{p} + x \geq q$ i neka je $x = |F_1D|$ sada rotiramo i transliramo trougao CF_1D takođe za negativan ugao oko C i dobijamo trougao BTK. Iz sličnosti trouglova BTK i ABC sledi

$$\frac{a}{p} = \frac{x}{c} \Rightarrow x = \frac{ac}{p}$$ to je iz prethodnog

$$\frac{bd}{p} + \frac{ac}{p} \geq q \qquad ac + bd \geq pq \quad .$$

Kada je četvorougao tetivan važi da je

$$\prec CBD \cong \prec CAD \cong \prec CEF$$

$\prec CBD \cong \prec CBF$ jer BF_1 i F_1D leže na BD te imamo jednakost □

Teorema. Ako je četvorougao tetivan , tada je

$$p = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \ , \quad q = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}} \quad \text{i}$$

$$4PR = \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)} \ .$$

Dokaz: Iz Ptolomejeve teoreme imamo da je

$pq = ac + bd$, a iz Leme 6 da je

$$\frac{p}{q} = \frac{ad+bc}{ab+cd} \ , \qquad \frac{q}{p} = \frac{ab+cd}{ad+bc}$$

$$p^2 = pq\frac{p}{q} = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} \ ,$$

$$p = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \ ,$$

$$q^2 = pq\frac{q}{p} = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc} \ ,$$

$$q = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}} \ .$$

Iz $P=\dfrac{p(ab+cd)}{4R}$ i $P=\dfrac{q(ad+bc)}{4R}$ kada

pomnožimo dobijamo

$$P^2=\frac{pq(ab+cd)(ad+bc)}{(4R)^2},$$

$$P^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}{16R^2},$$

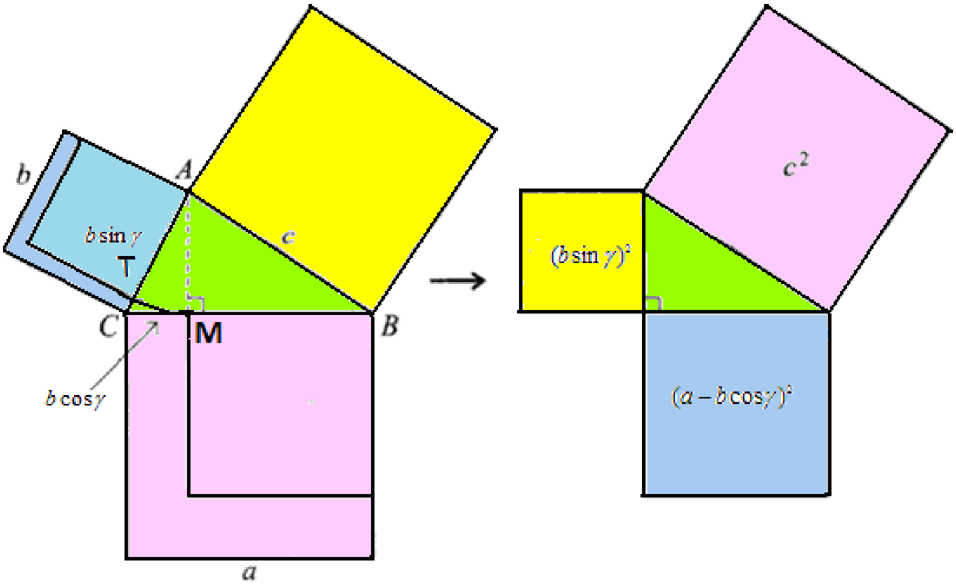
$$P=\frac{\sqrt{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}}{4R},$$

$$4PR=\sqrt{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)} \quad \square$$

Pitagorina teorema. U pravouglom trouglu čije su katete a,b i hipotenuza c važi $a^2+b^2=c^2$.

Pitagorina nejednakost se odnosi na bilo koji trougao i kvadrate nad stranama tog trougla tj. Ako su a,b,c stranice posmatranog trougla tada važi $c^2\le a^2+b^2$, $a^2\le b^2+c^2$ i $b^2\le a^2+c^2$.

Dokaz: $|CM|=b\cos\gamma$ $|AM|=b\sin\gamma$ rotiramo oko A , tako da $|AM|=|AT|$.



Slika 6.3.

Koristeći Pitagorinu teoremu

$$c^2 = (a - b\cos\gamma)^2 + (b\sin\gamma)^2$$

$$b\sin\gamma \le b \quad \text{i } a - b\cos\gamma \le a$$

imamo da je $c^2 \le a^2 + b^2$ jednakost imamo samo za $\sin\gamma = 1$ i $\cos\gamma = 0$, a to znači da je

ugao kod temena C prav. Analogno važi i za slučajeve

$$b^2 \le a^2 + c^2 \quad \text{i } a^2 \le b^2 + c^2.$$

Kao dodatak imamo ako je

$$c^2 = (b\sin\gamma)^2 + (a - b\cos\gamma)^2$$

$$c^2 = b^2\sin^2\gamma + a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2\cos^2\gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$ što je kosinusna teorema □

Teorema. U trouglu ABC važi $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma > 1$.

Dokaz: Iz kosinusne teoreme važi da je

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \ .$$

Kada saberemo ove tri jednakosti i oduzmemo 1 dobijamo da je

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - 1$$

$$= \frac{1}{2abc}\left(a\left(b^2 + c^2 - a^2\right) + b\left(c^2 + a^2 - b^2\right) + c\left(a^2 + b^2 - c^2\right) - 2abc\right)$$

$$= \frac{1}{2abc}\left((-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)\right)$$

$$= \frac{8xyz}{2abc} = \frac{4xyz}{abc} = \frac{4r^2 s}{4PR} = \frac{\Pr}{PR} = \frac{r}{R} > 0$$ jer je $R \geq 2r$ (vidi stranu 13.)

Koristili smo

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad , \qquad xyz = r^2 s = rrs \ ,$$

$$P = rs = \frac{abc}{4R} \quad , \quad \square$$

7. Neizometrijske transformacije u nejednakostima

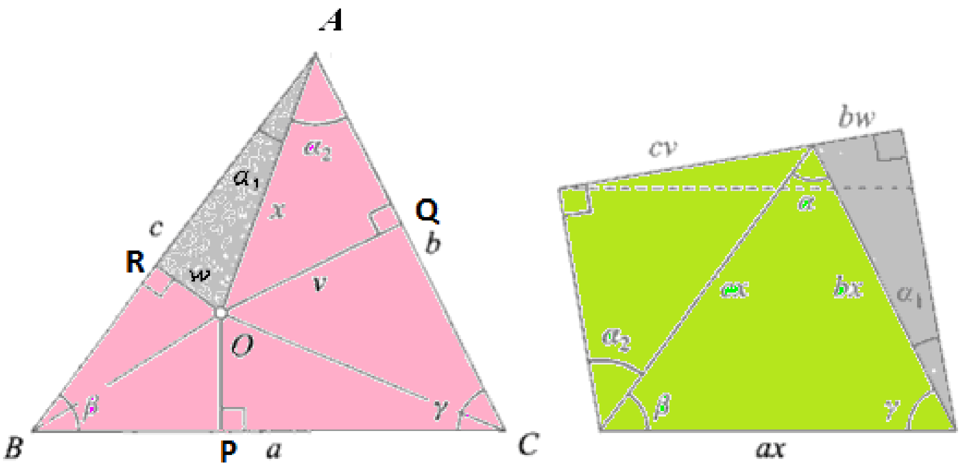
Pierre Simmon de Laplace :"Što znamo-nije mnogo, što ne znamo-neizmerno je!"

Lema . Za dati trougao ABC važi $ax \geq bw + cv$, (videti sliku)

$$by \geq aw + cu\,,$$

$$cz \geq av + bu\,.$$

Dokaz:



Slika 7.1.

Iz slike se vidi $ax \geq bw + cv$, ostale dve nejednakosti slede analogno. Figura je trapez pa imamo $\alpha_1 + \beta + \gamma + \alpha_2 = 180^0$ □

Erdös – Mordell teorema. Ako u trouglu ABC postoji tačka takva da su njena rastojanja od stranica u, v, w, a rastojanja tačke O do temena x, y, z redom tada je

$$x+y+z \geq 2(u+v+w) \ .$$

Dokaz: Iz *Leme* imamo

$$ax \geq bw + cv \Rightarrow x \geq \frac{bw + cv}{a} \ ,$$

$$by \geq aw + cu \Rightarrow y \geq \frac{aw + cu}{b} \ ,$$

$$cz \geq av + bu \Rightarrow z \geq \frac{av + bu}{c} \ .$$

Kada saberemo ove tri nejednakosti dobijamo

$$x + y + z \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)u + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)v + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)w$$

A-G nejednakosti daje da je

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c}\frac{c}{b}} = 2 \ .$$

Analogno je $\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2$ i $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$, to je

$$x + y + z \geq 2(u + v + w) \quad \square$$

Zapažanje 1. Tri nejednakosti iz prethodne *Leme* su jednakosti ako i samo ako je O centar opisane kružnice trougla ABC. Trapez je pravougaonik ako je $\beta + \alpha_2 = 90^0$ i $\gamma + \alpha_1 = 90^0$, ostala dva ugla su svakako 90^0.

$\prec AOQ \cong \prec COQ$ te su trouglovi AOQ i COQ podudarni pa sledi x=z. Slično važi i x=y=z te O mora biti centar opisane kružnice ABC. Koeficijenti od u, v, w su jednaki 2, a to važi ako je $a = b = c$.

Za teoremu $Erdös - Mordell$ važi jednakost ako i samo ako je trougao ABC jednakostraničan i O je centar opisane kružnice oko trougla ABC □

Zapažanje 2. Koristeći A-G nejednakost

$$ax \geq 2\sqrt{bcvw} \quad (\text{iz } ax \geq bw + cv \geq 2\sqrt{bvcw})$$

$$by \geq 2\sqrt{awcu}$$

$$cz \geq 2\sqrt{avbu}.$$

Kada pomnožimo ove tri nejednakosti dobijamo

$$axbycz \geq 8\sqrt{a^2c^2b^2u^2v^2w^2}$$

$$abcxyz \geq 8acbuvw$$
$$xyz \geq 8uvw \;\square$$

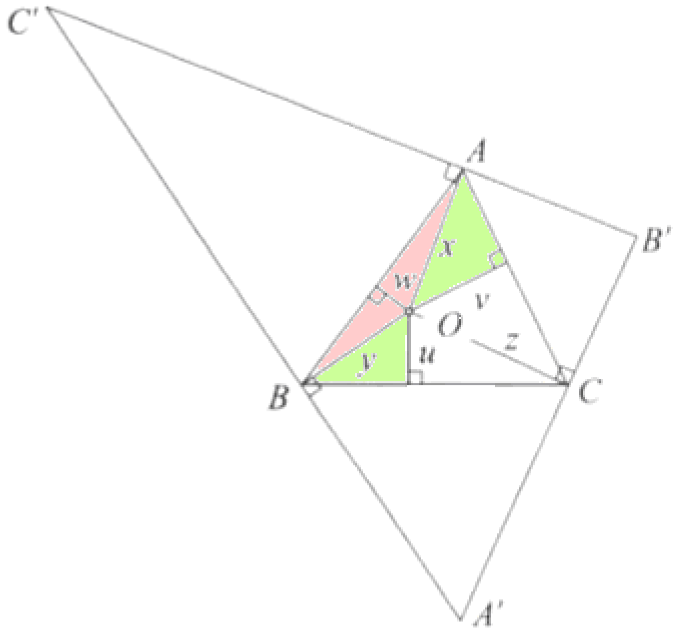
Teorema. U trouglu ABC imamo
$$\frac{xy}{w} + \frac{yz}{u} + \frac{xz}{v} \geq 2(x + y + z) \geq 4(u + v + w).$$

Dokaz: Konstruišemo trougao $A'B'C'$ tako da je

$$A'B' \perp OC$$

$$B'C' \perp AO$$

$$A'C' \perp BO$$



Slika 7.2.

Četvorougao $OCA'B$ je tetivan jer su uglovi kod temena B i C pravi te kružnica koja je opisana oko tog četvorougla je ujedno i kružnica opisana i oko trougla BOC sa prečnikom OA' te je $yz = u|OA'|$ koristeći da je proizvod dve stranice u trouglu jednako proizvodu visine i prečnika opisane kružnice što je dokazano ranije u *Lemi1(iz glave 5.)*

$$ab = h2R$$

$$|OA'| = \frac{yz}{u} \text{ slično } |OB'| = \frac{xz}{v} \quad \text{i} \quad |OC'| = \frac{xy}{w}.$$

Primenom *Erdös – Mordell* nejednakosti na trougao $A'B'C'$ dobijamo da je

$$|OA'| + |OB'| + |OC'| \geq 2(x + y + z) \quad (Lema).$$

Kako je

$$|OA'| + |OB'| + |OC'| = \frac{yz}{u} + \frac{xz}{v} + \frac{xy}{w} \quad \text{to je}$$

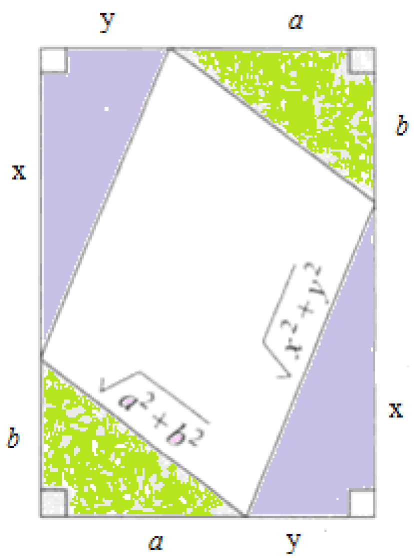
$$\frac{yz}{u} + \frac{xz}{v} + \frac{xy}{w} \geq 2(x + y + z) \geq 4(u + v + w) \quad \square$$

7.1. Koši Švarc Bunjakovski nejednakost

Za svako a, b, x, y $\in R$ važi

$$|ax + by| \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{x^2 + y^2} \quad .$$

Dokaz 1: (geometrijski dokaz) Neumanjujući opštost pretpostavimo da je $a, b,\ x, y > 0$. Nacrtajmo pravougaonik sa susednim stranicama $a + y$ i $x + b$. Stranicu $a + y$ podelimo na delove a i y, a one $x + b$ na x i b.



Slika 7.3

Taj pravougaonik se sastoji od dva pravougla trougla površine $\frac{ab}{2}$, i dva pravougla trougla površine $\frac{xy}{2}$ i paralelograma susednih stranica $\sqrt{a^2+b^2}$ i $\sqrt{x^2+y^2}$ (iz Pitagorine teoreme). Površinu paralelograma dobijamo kad se od površine pravougaonika oduzmu površine trouglova to je

$$P=(a+y)(b+x)-2\frac{ab}{2}-2\frac{xy}{2}$$

$$=ab+ax+by+xy-ab-xy$$
$$=ax+by.$$

Sa druge srane od svih paralelograma sa susednim stranicama dužina $\sqrt{a^2+b^2}$ i $\sqrt{x^2+y^2}$ najveću površinu će imati pravougaonik.

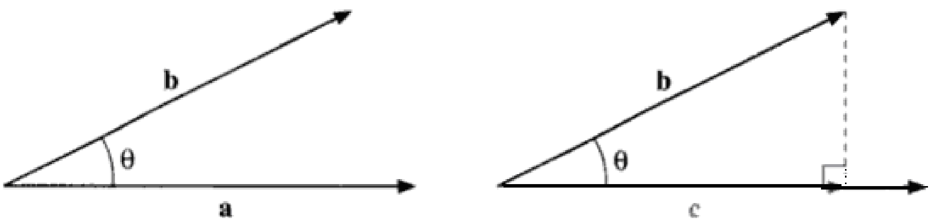
Površina paralelograma je $\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$ te je

$ax+by \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$ u slučaju da je neki od brojeva a,b,x ili y negativan ,zamenjujemo ga apsolutnom vrednošću te je

$$|ax+by| \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2} \quad \square$$

Dokaz 2: (koristi vektore i projekciju vektora)

Neka je $\vec{c}$ projekcija vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$ tada je



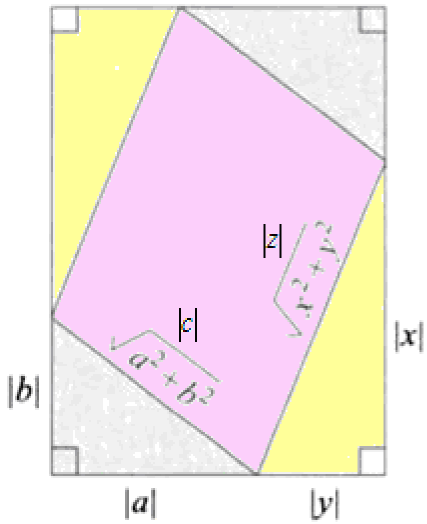
Slika 7.4.

$\|c\| = \|b\|\cos\theta = \dfrac{|ab|}{\|a\|}$ kako je $\|c\| \leq \|b\|$. to je $|ab| \leq \|a\|\|b\|$ $\square$

Aczel nejednakost: Ako su a, x, z, c realni brojevi važi

$$\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{z^2 - y^2} \leq |cz - by| \ .$$

Dokaz:



Slika 7.5.

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|a| = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$|x| = \sqrt{z^2 - y^2}$$

$$|a||x| + |b||y| \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{z^2-y^2}+|b||y|\leq|c||z|$$

$$\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{z^2-y^2}\leq|c||z|-|b||y|$$

$$\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{z^2-y^2}\leq|cz-by| \quad \square$$

8. Funkcije u nejednakostima

Leonhard Euler:“Matematika je ključ za celokupno ljudsko znanje!“

Teorema. Koši Švarc Bunjakovski. Neka su $(a_1,...,a_n)$ i $(b_1,...,b_n)$ dve n-torke realnih brojeva. Tada važi

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$ pri tome jednakost važi ako su n-torke

proporcionalne tj.

$$\frac{a_1}{b_1} = ... = \frac{a_n}{b_n} \ .$$

Dokaz: Posmatramo kvadratnu funkciju $f : R \to R$ definisanu formulom:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2$$

$$= (a_1 x + b_1)^2 + ... + (a_n x + b_n)^2$$

$$= (a_1^2 + ... + a_n^2)x^2 + 2(a_1 b_1 + ... + a_n b_n)x + (b^2{}_1 + ... + b_n{}^2)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$ kako je ova funkcija nenegativna

($f(x) \ge 0$ za svako x iz R) to D ne može biti pozitivna

$$D = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0 \quad \text{te je}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \ .$$

Jednakost važi akko postoji realan broj m takav da je $b_i = ma_i$ i=1,...,n tj. n-torke $(a_1,...,a_n)$ i $(b_1,...,b_n)$ su proporcionalne □

Ojlerova formula za konveksne poliedre. Ako sa F označimo broj strana, sa V broj

temena, a sa E broj ivica konveksnog poliedra tada važi da je

F+V-E=2 .

Teorema. Za konveksne poliedre važi

$$2 + \frac{F}{2} \leq V \leq 2F - 4 \quad \text{i} \quad E \leq 3F - 6 \ .$$

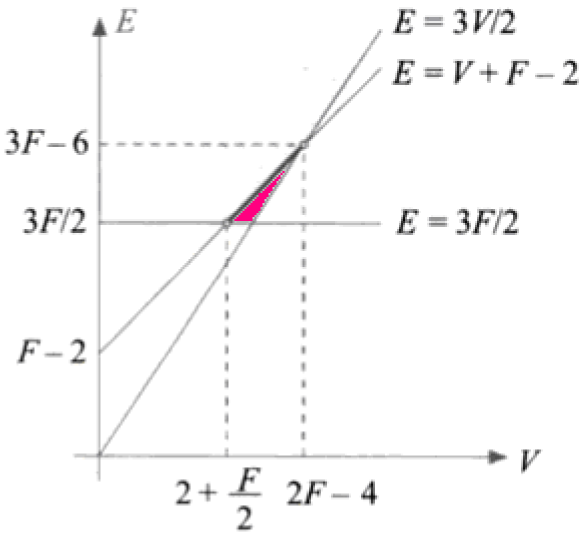
Dokaz: Neka je a broj ivica po broju temena tj. $a = \frac{2E}{V}$ jer je svaka ivica povezana sa dva temena i $a \geq 3$, jer najmanje tri ivice ishode iz temena te $2E \geq 3V$. Neka je b broj ivica po strani te je $b = \frac{2E}{F}$, jer je svaka ivica zajednička sa dve strane i $b \geq 3$, jer je svaka strana ograničena sa najmanje tri ivice te $2E \geq 3F$.

Kako je po Ojlerovoj formuli E=V+F-2 , gde je F broj fiksnih strana , $E \geq \frac{3V}{2}$ i $E \geq \frac{3F}{2}$.

Tačka (V,E) je na pravoj E=V+F-2. Iznad pravih $E = \frac{3V}{2}$ i $E = \frac{3F}{2}$ krajnje tačke su $(2+\frac{F}{2}, \frac{3F}{2})$ i (2F-4,3F-6) te sledi

$$2 + \frac{F}{2} \leq V \leq 2F - 4$$

$$E \leq 3F - 6 \ .$$



□

Slika 8.1.

Najnovija medicinska opsesija Bodi indeks mase u oznaci BMI koji se definiše kao BMI=$\frac{w}{h^2}$ gde je w težina tela u kilogramima, a h je visina u metrima. Za odrasle osobe h je fiksno tako da je BMI proporcionalno sa težinom , koja nije fiksna za mnoge od nas. Normalna težina odgovara u nejednakostima

$20 \le BMI \le 25$ ili $20h^2 \le w \le 25h^2$. Pre nego što je uveden BMI popularna Evropska preporuka za težinu u odnosu na h je aproksimativno $w \approx 100h - 100$ (za muškarca visokog 175cm optimalna težina je 75kg,a za ženu iste visine 65kg)

$$20 \le \frac{100h - 100}{h^2} \le 25$$

$$20h^2 - 100h + 100 \le 0 \le 25h^2 - 100h + 100$$

$25h^2 - 100h + 100 = 25(h-2)^2$ te je jedna nejednakost zadovoljena

$$20h^2 - 100h + 100 = h^2 - 5h + 5$$

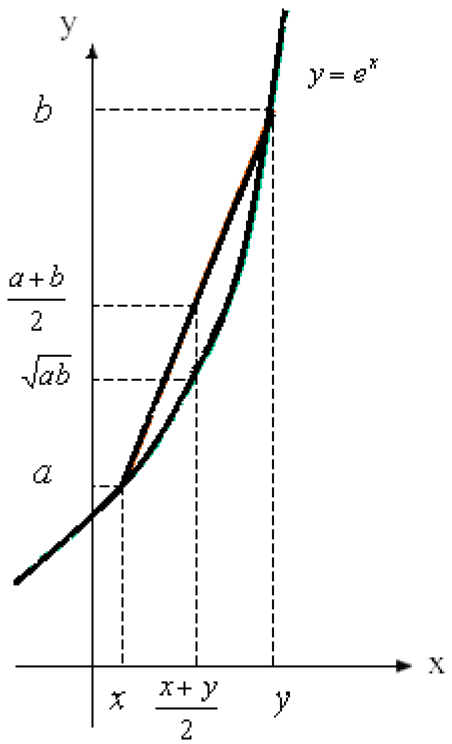
Pošto mora da je $h^2 - 5h + 5 \le 0$ ispitujemo grafik funkcije $y = h^2 - 5h + 5$ (parabola) $h^2 - 5h + 5 = 0$

$$h_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \qquad h_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$$

$$1.38m \approx \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \le h \le \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \approx 3{,}61m \;\square$$

Konveksna funkcija na grafiku implicira da kada se povežu bilo koje dve tačke na grafiku, ta tetiva se nalazi iznad grafika funkcije.Analogno za konkavne funkcije tetiva je ispod grafika funkcije.

Primer 1. Funkcija $f(x)=e^x$ je konveksna.



Slika 8.2.

Na grafiku eksponencijalne funkcije odaberemo dve tačke sa koordinatama (x,e^x) i (y,e^y) i $a=e^x$ i $b=e^y$.

Jednačina prave kroz dve tačke je

$$Y-b=\frac{b-a}{y-x}(X-y)$$ tačka te prave sa apscisom $\frac{x+y}{2}$

ima ordinatu $\frac{a+b}{2}$, sa druge strane tačka sa istom apscisom, ali na grafiku eksponencijalne funkcije ima ordinatu $e^{\frac{(x+y)}{2}}$ što je u stvari $\sqrt{ab}$. Kako je tačka na grafiku ispod tačke na tetivi (koja spaja tačke sa koordinatama (x,e^{x}) i (y,e^{y})). Sledi A-G nejednakost

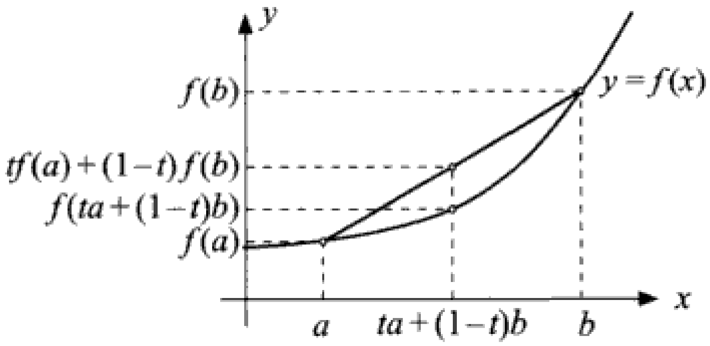
$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\ .$$

Uopšteno , konveksna funkcija zadovoljava nejednakost

$f(ta+(1-t)b)\leq tf(a)+(1-t)f(b)$ za sve a,b iz intervala I, za sve $0<t<1$.

Skup $C=\{(x,y)|x\in I \quad y\geq f(x)\}$ je konveksan . Tetiva čije su krajnje tačke

$(a,f(a))$ i $(b,f(b))$ je iznad grafika funkcije $y=f(x)$.



Slika 8.3.

Za konkavne funkcije važi nejednakost

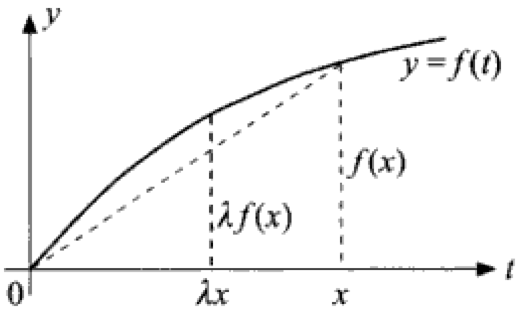
$$f\left(ta+(1-t)b\right) \geq tf\left(a\right)+(1-t)f\left(b\right)$$

Za sve a,b iz intervala I, za sve $0<t<1$ skup $C=\{(x,y) | x \in I \quad y \leq f(x)\}$ je konkavan. Tetiva čije su krajnje tačke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ se nalazi ispod grafika funkcije $y = f(x)$ □

Konkavnost ili konveksnost proveravamo utvrđivanjem znaka drugog izvoda ako je funkcija dva puta diferencijabilna.

Primer 2. Za konkavnu funkciju definisanu na $[0,b)$ gde b može biti ograničeno ili beskonačno sa $f(0)=0$, λ je u intervalu $(0,1)$, $x \geq 0$

$$\lambda f(x) \leq f(\lambda x) .$$

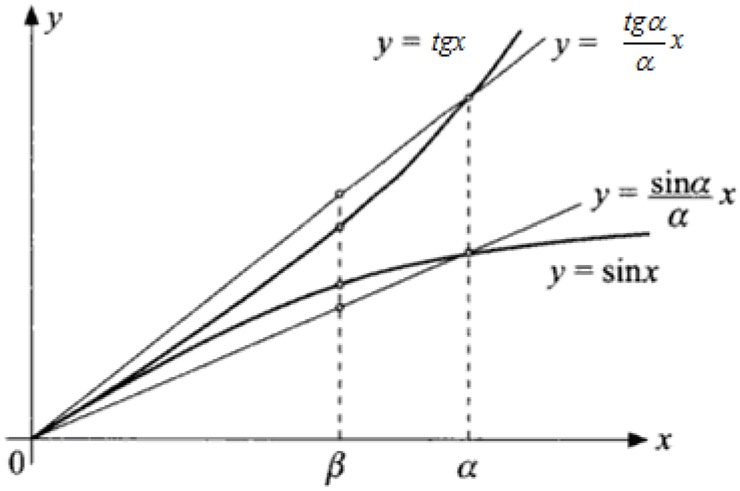


Slika 8.4.

Kako je $f(x)=\ln(1+x)$, konkavna na $(0.\infty)$ sa $f(0)=0$ za λ iz $(0,1)$ to je $\lambda \ln(1+x) \leq \ln(1+\lambda x)$ ili $(1+x)^{\lambda} \leq 1+\lambda x$ što je ekvivalent Bernulijeve nejednakosti □

Primer 3. (Aristarh sa Samosa) Ako je $0 < \beta < \alpha < 90^0$ tada važi

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{tg\alpha}{tg\beta}$$



Slika 8.5.

Sinus je konkavna funkcija na intervalu $(0,90^0)$, tetiva $\frac{\sin\alpha}{\alpha}x$ na $(0,0)$, $(\alpha.\sin\alpha)$ je ispod grafika funkcije y=sinx za x iz $(0,\alpha)$. .Kada je $x=\beta$ $\quad \sin\beta > \frac{\sin\alpha}{\alpha}\beta$

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} < \frac{\sin\beta}{\beta}\ .$$

Analogno , za konveksnu funkciju tangens važi $tg\beta < \frac{tg\alpha}{\alpha}\beta$

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{tg\alpha}{tg\beta}\ \square$$

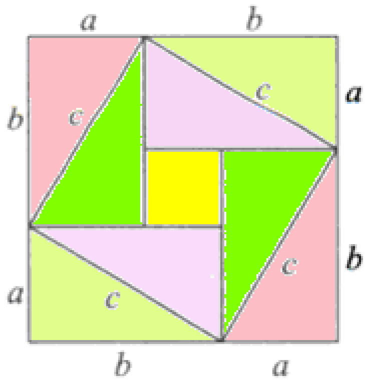
9. Kombinovane nejednakosti

Aristotel:“Duhovitost je drskost koja je stekla obrazovanje!“

Primer. Dat je pravougli trougao ABC sa katetama i a, b i hipotenuzom c važi da je

$$c(a+b) \geq 2\sqrt{2}ab \quad .$$

Dokaz:



Slika 9.1.

U kvadratu stranice $a+b$ imamo 4 pravougaonika i važi da je površina kvadrata veća ili jednaka od površine 4 pravougaonika.

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

Kada gledamo unutrašnji kvadrat stranice c , površina kvadrata je veća ili jednaka od površine četiri pravougla trougla.

$$c^2 \geq 4\frac{ab}{2} \Rightarrow c^2 \geq 2ab$$

$$\Rightarrow c \geq \sqrt{2ab}$$

Kada pomnožimo ove dve nejednakosti dobijamo

$$(a+b)c \geq 2\sqrt{2}ab \ \square$$

Zaključak

Rad je podeljen na devet poglavlja u kojima su dati dokazi, raznih nejednakosti koristeći ukupno 52 slike i. Kako su slike u boji to je rad atraktivniji za eventualnu pomoć u shvatanju dokaza nejednakosti, za uzrast srednješkolskih đaka.
Kroz većinu poglavlja provlači se aritmetičko-geometrijska nejednakost. Treba pomenuti nejednakost Minkovskog, Guba nejednakost, Čebiševu nejednakost, Padoa nejednakost, Ptolomejevu nejednakost, Koši-Švarc-Bunjakovski nejednakost i naravno $Erdös - Mordell$ teoremu.

LITERATURA

Literatura

[1] Claudi Alsina & R. B. Nelsen, When Less Is More , The Mathematical Association of America, Washington ,2009.

[2] R. B. Nelsen , Proof without Words II , The Mathematical Association of America, Washington , 2000.

[3] Dr Mitrinović, D. S. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[4] Dr Dragoslav S. Mitrinović, Nejednakosti ,Građevinska knjiga, Beograd, 1965.

[5] Arslagić, Š. Kako dokazivati algebarske nejednakosti Naša škola, Sarajevo , 2000.

[6] Arslagić Š. Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike,Naša škola, Sarajevo, 2006.

[7] Prof. Dr. Boris Pavković, prof. Dr. Darko Veljan, Elementarna matematika I, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[8] en. wikipedia .org

BIOGRAFIJA

Rođena sam 01.09.1972. u Novom Sadu. Završila sam Osnovnu školu “Ivo Lola Ribar“, zatim gimnaziju „Jovan Jovanović Zmaj“ i stekla zvanje matematičko programerski saradnik. Na Pripodno-matematičkom fakultetu sam stekla zvanje profesor matematike.
Rad u prosveti sam započela u Srednjoj mašinskoj školi 1999. godine, gde i danas radim.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TD
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Aleksandra Petrović
AU
Mentor: Prof. dr Crvenković Siniša
MN
Naslov rada: Nejednakosti u slici

Jezik publikacije: Srpski(latinica)
JP
Jezik izvoda: Srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Užegeografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2011.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Prirodno-matematički fakultet
MA Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Fizički opis rada:
(poglavlja, strana, fotografija, slika, literatura, tabela)
8/82/1/52/8/0
FO
Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: ND	Metodika nastave matematike
Predmetna odrednica/ključne reči: PO	Matematika, nejednakosti, teorema, dokaz,
Čuva se: ČU	Biblioteka Departman za matematiku, PMF Novi Sad
Važna napomena: VN	Nema
Izvod: IZ	Nejednakosti u slici sa dokazima
Datum prihvatanja teme od strane veća: DP	11.07.2011.
Datum odbrane: DO	Januar 2012.

Članovi komisije:
KO
Predsednik: prof.dr Ljiljana Gajić, redovni profesor, PMF, Novi sad
Mentor: prof.dr Siniša Crvenković, redovni profesor, PMF, Novi Sad
Član: prof.dr Zagorka Crvenković Lozanov, redovni profesor, PMF, Novi Sad

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: ANO	
Identification number: INO	
Document type: DT	Monograph type
Type of record: TR	Printed text
Contents Code: CC	Master examination
Author: AU	Aleksandra Petrović
Mentor: MN	Professor Siniša Crvenković, Ph.D.,Full Professor of Faculty of Natural Sciences and Math., Novi Sad
Tule:	Inequalities in Picture
Language of text: LT	Serbian(Latin)
Language of abstract: LA	English
Country of publication: CP	Serbia
Locality of publication: LP	Vojvodina
Publication year: PY	2011.
Publisher: PU	Authors reprint
Publication place: PP	Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

Physical description(chapters, pages, photographs, pictures,references,table): PD	8/82/1/52/8/0
Scientific fields: SF	Mathematics
Scientific discipline: SD	Methodic of Mathematics
Subject/Key words: SKW	Mathematics, inequality, theorem, proof,
UC	
Holding data: PP	Library of Department of Mathematics,FacultyOf Natural Sciences and Mathematics,Novi Sad
Note: N	None
Abstract: AB	Inequalities in pictures with proofs
Accepted by Scientific Board of: ASB	July 11 2011.
Defended on: DE	January 2012.
Thesis defends board: DB	

President: Ljiljana Gajić Ph.D. Full Professor, Faculty of Natural Scieces and Mathematic, Novi Sad
Mentor: Siniša Crvenković Ph.D. Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematic, Novi Sad
Member: Zagorka Crvenković Lozanov PH.D. Full Professor, Faculty of Natural Science and Mathematic, Novi Sad