UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Aleksandra Mračević

Prednosti dijagonalne dominacije u optimizaciji bežičnih senzor mreža

-MASTER RAD-

Novi Sad, 2013.

Sadržaj

Uvod

Komunikacione mreže, a posebno bežične komunikacione mreže su jedan od fokusa savremenog tehnološkog razvoja. Od mnogih problema koji se javljaju u njihovom modeliranju i implementaciji, problem optimizacije potrošnje energije i protoka informacija na fizičkom sloju mreže je jedan od osnovnih. Kako je matrica prirodan matematički aparat za modelovanje interakcija u sistemu od konačno mnogo objekata, modeli ovog tipa prirodno opisuju dati problem optimizacije. Od mnogih matričnih osobina, posebno se izdvajaju osobine povezane sa dijagonalnom dominacijom zahvaljujući tome što opisuju neke fizičke karakteristike posmatranog problema.

Jedan od najsavremenijih pristupa analize i rešavanja pomenutog problema sastoji se od kombinacije teorije nekooperativnih igara, osobina dijagonalno dominantnih matrica i iterativnih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina. Glavna motivacija za nastanak ovog rada je potreba da se istraži i sistematizuje najnovija primena dijagonalne dominacije u razvoju optimizacionih algoritama u problemu bežičnih senzor mreža.

U prvoj glavi rada se navode osnovni pojmovi i definicije iz teorije bežičnih senzor mreža, koje obuhvataju osnovne karakteristike senzora i baznih stanica, zatim organizovanje, topologiju i strukturu bežičnih senzor mreža, kao i pregled primena. U drugom delu rada su dati osnovni pojmovi, definicije i teoreme iz teorije igara, kao i tvrđenja o postojanju Nešove ravnoteže. U odeljku 2.2 prikazane su neke primene teorije igara na probleme optimizacije bežičnih senzor mreža, dok je u odeljku 2.3 formulisan problem kontrole napajanja. Treća glava obuhvata teoriju matrica, osnovne pojmove i tvrđenja koja su neophodna za razumevanje ovog rada. U odeljku 3.2 je definisana klasa striktno dijagonalno dominantnih matrica, dok su u narednim pododeljcima opisana proširenja ove klase, kao što su nerazloživo dijagonalno dominantne, duplo (striktno) dijagonalno dominantne, matrice Ostrovskog, Brualdijeve, CKV matrice i konačno generalizovane dijagonalno dominantne, tj. H-matrice. U odeljku 3.3 su prikazane oblasti lokalizacije karakterističnih korena koje odgovaraju određenim klasama dijagonalno dominantnih matrica,tj. prikazani su Geršgorinov skup, minimalni Geršgorinov skup, kao i tvrđenja Vargin princip ekvivalencije i princip izolacije na kojima se zasniva dobijanje različitih lokalizacionih oblasti koje su prikazane u radu. Iterativni postupci za rešavanje sistema linearnih jednačina su opisani u odeljku 3.4, među kojima su navedeni Jakobijev iterativni postupak, Gaus-Zajdelov, SOR i iterativni postupak haotične relaksacije. Četvrta glava obuhvata problem optimizacije formulisan u odeljku 2.3 upotrebom teorije igara, kao i upotrebom dijagonalne dominacije i iterativnih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina. Prikazan je algoritam kontrole napajanja i data je diskusija o različitim modifikacijama datog algoritma u cilju poboljšanja brzine konvergencije. Prikazana je teorema iz rada [13] koja je generalizacija teoreme o stabilnosti i konvergenciji igre kontrole napajanja formulisane od strane autora rada [11]. Peta glava sadrži primere modela bežičnih senzor mreža koji dovode do različitih struktura dijagonalno dominantnih matrica.

1

Teorija bežičnih senzor mreža

Tehnologija bežičnih senzor mreža pruža nove i izuzetno interesantne mogućnosti prikupljanja podataka o fizičkim parametrima okruženja, što je od presudnog značaja u mnogobrojnim oblastima primene savremenog života. Senzorske mreže funkcionišu korišćenjem malih, jeftinih i potrošnih platformi koje osim senzorskih funkcija poseduju mogućnost samostalnog formiranja *ad–hoc* bežičnih mreža u cilju međusobne komunikacije i dostavljanja prikupljenih podataka korisniku mreže [1]. Rad senzorskih platformi odlikuje niz hardverskih i softverskih ograničenja, što uz specifične saobraćajne zahteve i načine primene bežične komunikacije u okviru bežičnih senzor mreža, postavlja niz ograničenja pri realizaciji komunikacionih protokola, tehnika bežičnog prenosa i algoritama obrade. U ovom delu rada, opisani su osnovni principi i koncepti komunikacije, kao i osnovne karakteristike i mogućnosti primene bežičnih senzor mreža.

U mnogobrojnim industrijskim, vojnim, medicinskim, naučnim, ekološkim i drugim primenama, zahteva se veoma intenzivno i opsežno prikupljanje podataka i informacija iz fizičkog okruženja, za potrebe nadzora i kontrole.

1.1 Pojam bežične senzor mreže (WSN)[1]

Definicija 1.1.1 *Bežična senzor mreža (WSN) je mreža koja se sastoji od autonomnih senzora postavljenih sa ciljem osmatranja nekog fizičkog fenomena i dostave opserviranih podataka korisnicima [3].*

Osnovna namena bežičnih senzor mreža je prikupljanje i dostavljanje podataka i informacija o okruženju mreže, u skladu sa potrebama korisnika mreže. Prikupljanje podataka o fizičkim fenomenima (vlažnost, pritisak, temperatura,...) ili događajima (detekcija objekata, pokreta,...) u WSN, obavlja se korišćenjem odgovarajućih tipova aktivnih ili pasivnih senzora. Za potrebe prikupljanja i prenosa podataka u WSN koriste se multifunkcionalne platforme, senzorski čvorovi (*Sensor Nodes*, SN). SN osim skupa senzora, zahtevaju i mogućnost komunikacije, kao i skladištenja i obrade prikupljenih podataka.

Postavljanjem velikog broja senzorskih čvorova, raspoređenih na malim rastojanjima (tipično do 10 m), u samoj blizini ili unutar oblasti koja se posmatra, formira se senzorsko polje. U zavisnosti od gustine i rasporeda SN u prostoru, kao i karakteristika korišćenih senzora, ostvaruje se potpuno ili nepotpuno pokrivanje posmatrane oblasti u smislu mogućnosti prikupljanja informacija o posmatranim fenomenima. Shodno tome, bežična senzor mreža se može definisati na sledeći način.

Definicija 1.1.2 *Bežična senzor mreža je distribuiran sistem koga čini polje senzora različitog tipa međusobno povezanih komunikacionom mrežom.*

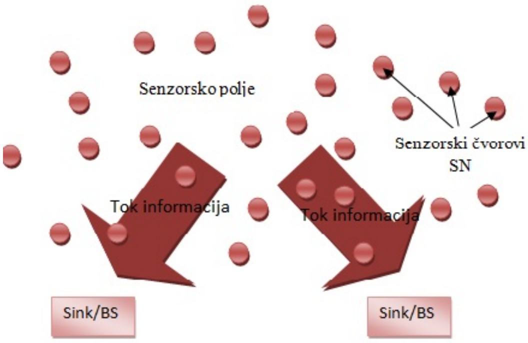
Podaci sa izlaza senzora su deljivi, a dovode se na ulaz distribuiranog sistema radi njihove procene (estimacije). Dati sistem ima zadatak da na osnovu dostupnih podataka sa senzora izdvoji najverovatniju informaciju o fenomenu koji se nadgleda. Osnovne operativno–ekonomske karakteristike WSN su:

[1] od engleske reči Wireless Sensor Networks

- visoka pouzdanost u radu
- relativno visoka tačnost
- fleksibilnost
- niska cena
- lako raspoređivanje senzora u prostoru

WSN se sastoji od baterijsko napajanih modula koji su u suštini senzorski čvorovi. Gradivni blokovi ovih modula su:

- senzor: generator podataka, vrši tri osnovne funkcije: praćenje parametara okoline (*sensing*), komunikacija sa drugim čvorovima mreže (*communication*) i izvršava implementirane komunikacione algoritme i algoritme za obradu prikupljenih podataka (*computation*).
- radio primopredajnik: predaje svoje ili prosleđuje kroz mrežu podatke koje je primio od svojih suseda (rutira podatke).
- jedan ili više procesora: kontrolišu rad senzora i primopredajnika, procesiraju podatke i implementiraju mrežne i protokole za rutiranje.



Slika 1.1: Princip rada bežične senzor mreže

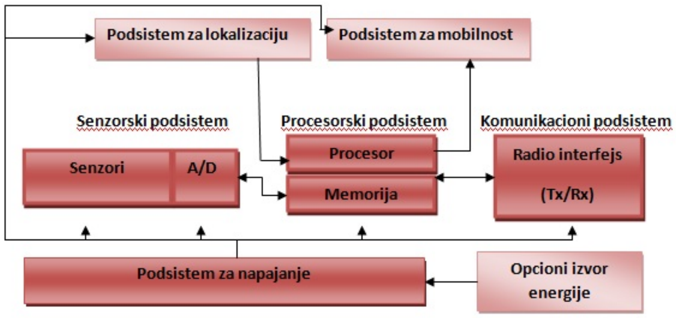
Na slici 1.1, prikazan je osnovni princip rada WSN. Prikupljene informacije o okruženju prenose se putem međusobne komunikacije između SN, ka jednom ili većem broju pristupnih uređaja (Sink/BS). Sink/BS elementi mreže predstavljaju odredište svih paketa kojima se prenose podaci sa senzora i omogućavaju dvosmernu komunikaciju krajnjeg korisnika mreže sa svim senzorskim čvorovima WSN. Dvosmernu komunikaciju čini prijem podataka prikupljenih od SN, i zadavanje upita ili prenos upravljačkih i drugih podataka ka njima. Komunikacija Sink/BS sa korisnikom mreže ostvaruje se korišćenjem raspoložive telekomunikacione infrastrukture u oblasti od interesa, primenom odgovarajućih mrežnih interfejsa.

Interakcija Sink/BS i SN se odvija iz različitih razloga. U prvom slučaju, u skladu sa potrebama korisnika mreže, svim SN ili grupi SN se šalje zahtev za prikupljanje podataka o okruženju. Zahtev se međusobnom komunikacijom prenosi do svih SN u mreži, nakon čega SN koji poseduju tražene podatke prosleđuju odgovarajući odgovor ka Sink/BS. U drugom tipu interakcije, senzorski čvorovi, pojedinačno ili grupno, detektuju pojavu predefinisanog događaja i informaciju o tome prosleđuju ka Sink/BS. Konačno za potrebe upravljanja mrežom, realizacije mrežnih protokola, promene cilja rada ili reorganizacije mreže, ostvaruje se dvosmerna komunikacija između Sink/BS i SN u mreži.

U nekim primenama WSN, osim prikupljanja informacija o okruženju, zahteva se i odgovarajuće dejstvo senzorske mreže na spoljašnje okruženje u skladu sa informacijama dobijenim radom mreže. U tom slučaju, pojedini elementi mreže, najčešće Sink/BS, imaju mogućnost aktivne interakcije sa okruženjem. Takva senzorska mreža naziva se bežičnom senzorsko-aktuatorskom mrežom (*Wireless Sensor-Actuator Network*, WSAN).

1.2 Osnovne karakteristike SN i Sink/BS

Osnovni gradivni element WSN su senzorski čvorovi, čija je opšta struktura prikazana na slici 1.2.



Slika 1.2: Struktura senzorskog čvora

Multifunkcionalna platforma senzorskog čvora sastoji se od četiri osnovne komponente:

i) senzorska jedinica

ii) procesorska jedinica

iii) komunikaciona jedinica

iv) jedinica za napajanje energijom

U okviru senzorskog podsistema, obavljaju se senzorske funkcije korišćenjem jednog ili više senzora, kao i A/D konverzija signala dobijenih radom senzora. Procesorski podsistem upravlja kontrolom rada senzora, korišćenjem i skladištenjem dobijenih podataka. Procesorski podsistem tipične SN platforme odlikuju veoma ograničena procesorska snaga i količina memorije. Zadatak ovog podsistema je upravljanje radom svih elemenata SN, izvršavanje zahteva za prikupljanjem podataka korišćenjem skupa senzora, kao i realizacija komunikacionih protokola u cilju ostvarivanja komunikacije sa drugim elementima mreže. Podsistem za napajanje najčešće je baterijskog tipa, ograničenog kapaciteta. U nekim slučajevima moguće je korišćenje opcionog izvora energije, najčešće solarnih ćelija. Komunikacioni podsistem obezbeđuje radio interfejs, za potrebe komunikacije SN sa ostalim elementima mreže. Senzor prihvata na ulazu merenu veličinu i konvertuje je u električni signal. Nakon kondicioniranja signal se dovodi na ulaz A/D konvertora, pa se po obavljenoj konverziji prihvata od strane procesora. Procesor, nad podacima, obavlja neki tip signal procesiranja i u zavisnosti od toga kako je programiran, predaće rezultantnu informaciju prema mreži uz pomoć primopredajnika.

U nekim primenama WSN, neophodno je poznavanje lokacije SN u prostoru ili u odnosu na druge SN. U tom slučaju za određivanje lokacije SN koristi se podsistem za lokalizaciju. U primenama WSN u kojima postoji mobilnost SN, koristi se podsistem za mobilnost koji pokreće SN u skladu sa ciljevima rada mreže.

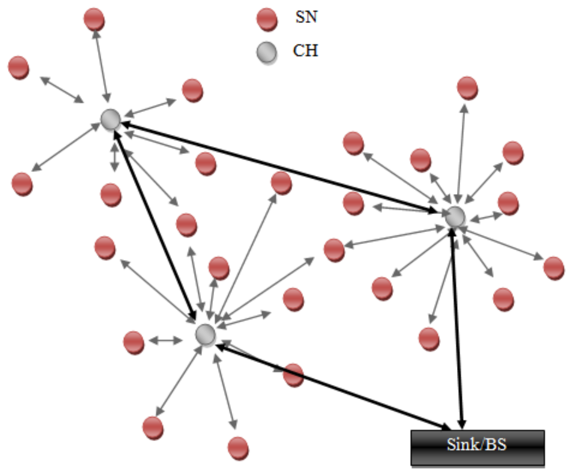
Tipične dimenzije SN kreću se od veličine kutije šibica, pa do dimenzija reda $1cm^3$ i manjih [4]. Osnovne karakteristike SN su ograničene rezerve energije, male cene izrade, visoka integracija elektronskih komponenti i mogućnost autonomnog rada bez održavanja. Tipični SN uređaji imaju mogućnost prilagođavanja okruženju, relativno malu procesorsku moć i memorijski kapacitet. SN najčešće predstavljaju potrošne uređaje [5]. Sink/BS predstavljaju znatno složenije uređaje od SN, većih su dimenzija i imaju veće mogućnosti obrade podataka i komunikacije. Osim bežičnog interfejsa za potrebe komunikacije sa senzorskim čvorovima, Sink/BS poseduju i interfejse za potrebe umrežavanja sa spoljnom telekomunikacionom infrastrukturom. Može se smatrati da pri razvoju protokola i algoritama komunikacije i obrade podataka za WSN nema značajnih hardverskih i softverskih ograničenja postavljenih zbog karakteristika Sink/BS.

1.3 Organizovanje i komunikaciona arhitektura WSN

U zavisnosti od planirane primene mreže vrši se raspoređivanje senzora u prostoru. Senzori se raspoređuju u senzorskom polju slučajnim ili planskim razmeštajem. U slučaju slučajnog raspoređivanja (rasipanje velikog broja malih, potrošnih senzorskih elemenata na teritorijama velikih površina radi nadgledanja i osmatranja vlažnosti, temperature, pritiska ... ili detekcije određenih pojava) pretpostavlja se uniformna raspodela SN u prostoru. Drugi način postavljanja se obavlja na unapred planirane statične lokacije kako bi se omogućilo održavanje i praćenje rada SN. Primeri planskog postavljanja senzorskih elemenata su praćenje saobraćaja u gradovima, industrijske primene, sigurnosne primene i slično. U teorijskim analizama planskog postavljanja mreže, koristi se geometrijski raspored SN, mada to najčešće nije slučaj u praksi [4], [5]. Nakon postavljanja SN u okviru senzorskog polja, neophodno je da se uspostavi i organizuje rad bežične telekomunikacione mreže. Organizacija se obavlja na način tipičan za *ad–hoc* bežične komunikacione mreže (WCN). U *ad–hoc* WCN, čvorovi mreže uspostavljaju međusobne veze, organizuju topologiju mreže za potrebe rutiranja i uspostavljaju mehanizme za dodelu i kontrolu pristupa resursima mreže korišćenjem odgovarajućih protokola, bez upotrebe dodatne infrastrukture (npr. baznih stanica). Ovaj postupak je potpuno samostalan, koristi proces međusobnog dogovaranja i na taj način se organizuju celokupna struktura i rad mreže. Nakon uspostavljanja WSN kao *ad–hoc* mreže, korisnik mreže ostvaruje kontrolu rada, reorganizaciju i upravljanje mrežom, kao i ostvarivanje funkcije prikupljanja podataka iz okruženja preko Sink/BS. Nakon postavljanja, senzorski čvorovi funkcionišu autonomno, bez održavanja i mogućnosti dopune energije [4], [5].U slučaju kada se koriste skuplji i složeniji senzorski elementi i kada se vrši plansko postavljanje mreže, moguće je održavanje SN uz obnavljanje izvora napajanja. Imajući u vidu da su senzorski moduli baterijsko napajani uređaji i da je dostupna energija od baterije ograničena, energetska efikasnost modula ima direktan uticaj na vreme života senzora. Kada modul prestane sa radom, ne prestaje samo njegovo prikupljanje podataka, nego mreža gubi raspoloživost modula da dalje prosleđuje (rutira) podatke. Zbog prethodno pomenutog, energetska efikasnost ima neposredan uticaj na to koliko dugo će, ne samo individualni senzori nego i cela mreža uspešno funkcionisati. Stoga je od izuzetne važnosti sagledati problem energetske efikasnosti sa tačke gledišta svih detalja koji se tiču kako projektovanja modula tako i rada cele mreže.

Senzorski čvorovi imaju za osnovni cilj obavljanje diskretnih, lokalnih merenja i opservacija posmatranog fenomena u svojoj blizini. Bežični interfejs omogućava komunikaciju između SN i formiranje bežične paketske mreže. SN u okviru mreže ima dvostruku funkciju. On predstavlja izvor podataka merenja, kao i informacija neophodnih za funkcionisanje mreže, koji se korišćenjem kratkih paketa šalju ka susednim SN u cilju njihovog dostavljanja ka Sink/BS ili drugim SN u mreži. Osim toga, SN obavlja rutiranje paketa koji potiču od ostalih SN ili paketa koje Sink/BS šalje ka svim ili grupi SN u mreži. Korisnik pristupa resursima WSN korišćenjem Sink/BS elemenata, najčešće lociranih u blizini ili unutar senzorskog polja. Podaci prikupljeni od strane SN prosleđuju se ka Sink/BS preko većeg broja SN, odnosno rutiraju se korišćenjem *ad–hoc multi–hop* arhitekture WCN.

U mnogim primenama WSN nije neophodno da svi SN u mreži, ili nekom regionu mreže dostave zahtevane podatke ka Sink/BS. U tom slučaju dovoljno je, a i poželjno u cilju smanjivanja količine saobraćaja i potrošnje energije, dostavljanje združene informacije na osnovu kombinovanja podataka više SN [6]. Jedan od načina na koji se može obaviti uspešno združivanje (agregacija) podataka, predstavlja formiranje međusobno razdvojenih grupa SN, odnosno klastera [6],[7]. Na slici 1.3, prikazana je arhitektura WSN sa podelom na klastere.



Slika 1.3: Klasterizacija WSN

Klaster čine jedan SN sa ulogom koordinatora klastera (*Cluster Head*, CH) i ostali SN koji komuniciraju samo sa CH koordinatorom. CH koordiniše komunikaciju, prikuplja i vrši agregaciju podataka. CH međusobno komuniciraju i obavljaju rutiranje podataka/paketa od i ka Sink/BS. Oni su izabrani na osnovu kriterijuma što manje potrošnje, posmatrane primene WSN, kao i potreba rutiranja podataka i saobraćajnih zahteva mreže [6], [7]. Radi ravnomernog raspoređivanja potrošnje energije SN u klasteru, obavlja se periodična promena SN koji ima ulogu CH koordinatora [6]. Formiranjem klastera unutar WSN, osim olakšavanja postupka agregacije podataka, povećava se energetska efikasnost i vreme života mreže, smanjuju se zauzetost kanala veze i verovatnoća kolizije paketa, a i povećava se kapacitet mreže pri velikom saobraćajnom opterećenju [6]. Osnovna arhitektura WSN može biti modifikovana uvođenjem releja (*Relay Node*) o čemu se govori u radu [1].

1.4 Neke od karakteristika WSN

1.4.1 Tolerancija na otkaze i pouzdanost

Tolerancija na otkaze predstavlja sposobnost WSN da nastavi nesmetano da obavlja svoje funkcije bez obzira na prekid rada pojedinih SN. Nestanak energije ili oštećenje SN, uticaj interferencije i efekata pri prenosu signala i prelaz SN u neaktivno stanje predstavljaju osnovne uzroke otkaza. Verovatnoća da u zahtevanom vremenskom periodu ne dođe do otkaza može se modelovati Poasonovom raspodelom [5]. Pouzdanost u WSN se definiše u smislu pouzdanosti dostavljanja paketa i/ili informacije o događaju, kao i pouzdanosti u smislu dostavljanja paketa odgovarajućem skupu SN, zavisno od primene.

1.4.2 Skalabilnost

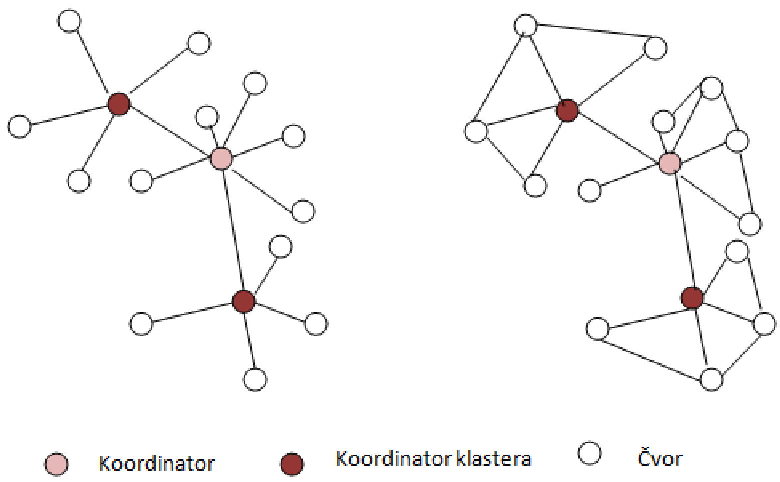
Postavljanjem SN na malom međusobnom rastojanju ostvaruje se bolje pokrivanje teritorije senzorskim servisom, kao i smanjivanje potrošnje energije prilikom komunikacije. Pri radio prenosu, neophodna snaga signala na predaji raste sa povećanjem rastojanja između predajnika i prijemnika. Povećanje dimenzija mreže nepovoljno utiče na pouzdanost, preciznost rada senzora i efikasnost algoritama za obradu podataka i samoorganizovanje WSN [8]. Tokom rada WSN dolazi do smanjivanja gustine SN u pojedinim regionima, usled otkaza SN zbog nestanka energije i drugih uticaja. Pri razvoju komunikacionih protokola, mehanizama upravljanja i algoritama obrade podataka u okviru WSN, mora se voditi računa o skalabilnosti razvijenih rešenja.

1.4.3 Topologija mreže

Pri realizaciji WSN primenjuje se veliki broj SN u okviru senzorskog polja, sa velikim gustinama SN po jedinici površine, npr. 20 SN/m^2, a dimenzije WSN su veoma male, reda desetak metara [5]. Primena brojnih, gusto postavljenih SN zahteva pažljivo održavanje topologije mreže. Na osnovu IEEE 802.15.4 standarda predviđena su dva tipa mrežne topologije:

- topologija zvezde,
- *peer-to-peer* topologija.

Mreža se formira oko koordinatora koji može biti klasičan (koji uvek postoji) i/ili oko koordinatora klastera u slučaju da je definisana podela na klastere. U topologiji zvezde koordinator može da komunicira sa koordinatorom klastera i sa običnim čvorovima, dok običan čvor može samo sa koordinatorom. U *peer-to-peer* topologiji koordinator mora da postoji, a običan čvor komunicira i sa drugim čvorovima koji su mu u dometu. Na slici 1.4 su predstavljeni tipovi topologije mreže.



Slika 1.4: Topologija zvezde i *peer-to-peer* topologija

1.4.4 Energetska efikasnost i vreme života mreže

SN raspolažu ograničenom rezervom električne energije, baterijskim napajanjem koje u opštem slučaju nije moguće zameniti, već usled nestanka energije dolazi do prestanka rada SN. Otkaz pojedinih SN u okviru *multi-hop ad-hoc* WSN izaziva značajne promene topologije i zahteva ponovno rutiranje paketa i reorganizaciju mreže. Iz ovog razloga, očuvanje i upravljanje potrošnjom energije predstavlja jedan od osnovnih zahteva pri razvoju protokola, algoritama i uređaja za WSN. Energija se troši za rad senzora, komunikaciju i obradu podataka. U svim navedenim oblastima zahteva se razvoj energetski efikasnih protokola i algoritama. U većini primena, izuzev pri korišćenju aktivnih senzora, najveći procenat energije troši se za potrebe komunikacije, pa se razvoju energetski efikasnih protokola i algoritama za potrebe komunikacije mora posvetiti najveća pažnja. Vreme života mreže može da bude od nekoliko sati do nekoliko godina.

1.4.5 Pokrivanje i konektivnost

Senzorske funkcije su ograničene po dometu i tačnosti merenja. Za svaki SN postoji oblast pokrivanja u kojoj se sa zadatom tačnošću obavlja senzorska funkcija određenog tipa. Pokrivanje (*coverage*) WSN predstavlja presek oblasti pokrivanja za sve SN u mreži, koja može biti promenljiva u vremenu zbog promene topologije WSN. Povećanjem gustine rasporeda SN poboljšava se pokrivanje.

Konektivnost mreže definisana je mogućnošću ostvarivanja komunikacije između svaka dva elementa mreže. Velika gustina SN u senzorskom polju obezbeđuje visoku konektivnost svih SN. Ipak, promenljivost topologije, prelasci između aktivnog i neaktivnog stanja SN i otkaz SN izazivaju promenu osobina konektivnosti u WSN. Konektivnost mreže u velikoj meri utiče na zahteve pri realizaciji komunikacionih protokola i procesa agregacije podataka u mreži [5].

1.4.6 Ostale karakteristike

Postoji nekoliko karakteristika koje su tipične za bežične mreže. Ukazaćemo na neke od njih.

- *Slabljenje* elektromagnetnog signala duž prenosnog puta je veliko. Kroz vakuum i slobodan prostor srazmerno je sa d^2 (d je rastojanje između predajnika i prijemnika), a u sredinama gde postoje prepreke (industrijski ambijent ili naseljene sredine) srazmerno je, u najgorem slučaju, sa $d^{3.5}$.
- *Interferencija.* Prijemnik može da prima signale ne samo sa namenskog predajnika, nego i sa drugih predajnika koji koriste isti frekventni opseg.
- *Višestruka propagacija signala.* Prijemnik može da primi više od jednog signala od istog predajnika jer se elektromagnetni talasi reflektuju od objekata kakvi su zidovi, zemlja, i dr. Kao rezultat, do prijemnika pristižu signali sa različitim fazama (signali prolaze različite puteve) što u suštini otežava proces dekodiranja.
- *Greške.* U odnosu na žičane, kod bežičnih mreža pojava grešaka u prenosu je češća, a takođe i sam postupak detekcije je nešto složeniji. Nivo grešaka se često indirektno procenjuje merenjem odnosa signal-šum (*signal to noise ratio* - SNR). Ako je SNR veliki, to znači da je signal jači u odnosu na šum (neželjeni signal) pa je lako konvertovati signale u aktuelne podatke. Sa druge strane, kada je SNR mali, signal je slab a šum veliki pa je tada teže izdvojiti podatke.

1.5 Primena WSN

Ove mreže imaju izrazito širok spektar primene, što i jeste glavni uzrok velikog broja istraživanja. Pregled primena dat je u narednoj tabeli [4]. Mnogobrojne korisne osobine bežičnih senzor mreža su glavni uzrok veoma široke primene istih, a samim tim su podložne velikom broju istraživanja.

Industrijske primene	**Vojne primene**	**Precizna lokacija primenom LR-WAN**
Nadgledanje i kontrola industrijske opreme. Nadgledanje proizvodnje. Kontrola fabričkih procesa. Industrijska automatizacija	Detekcija hemijskih i bioloških pretnji. Nadgledanje bojišta. Sistemi za komandu, komunikaciju i kontrolu. Sistemi osmatranja, nadgledanja i navođenja. Detekcija jedinica i pokreta na kopnu i moru.	Praćenje ljudi, dobara i drugih pokretnih objekata u raznim okruženjima (industrijsko, skladišta, prodajni objekti, bolnice, poslovni i stambeni prostor), uz održavanje komunikacije za potrebe nadgledanja, javljanja i kontrole.
Javna bezbednost	**Poljoprivreda**	**Seizmičke primene**
Praćenje, detekcija i lokalizacija mesta nesreća.	Nadgledanje zemljišta (vlaga, pesticidi, herbicidi, pH, ...) i stočarskih objekata.	Sistemi upozoravanja i javljanja za seizmičku aktivnost i opasnost od potresa.
Medicinske primene	**Nadgledanje okruženja i detekcija akcidenata**	**Naučne, biološke i ekološke primene**
Nadgledanje lokacije i zdravstvenog stanja osoba. Nadgledanje stanja pacijenata (pritisak, ECG, puls, procenat kiseonika i sl.) i pomoć nepokretnim i hendikepiranim osobama. Biomedicinske primene i umrežavanje medicinskih instrumenata. Brza reakcija i praćenje nastradalih u nesrećama (izbor kritičnih slučajeva).	Nadgledanje oblasti nesreće. Detekcija požara, hemijskih i bioloških akcidenata. Praćenje nivoa opasnih supstanci i gasova. Praćenje akcidenata i pomoć pri dejstvima u hitnim situacijama.	Nadgledanje i kontrola fizičkog okruženja. Biološke i ekološke primene u praćenju okruženja (tlo, stanište, more, reke). Nadgledanje bioloških i ekoloških sistema. Praćenje životinja, objekata i ljudi u biološkim, zdravstvenim i sociološkim istraživanjima.
Nadgledanje objekata	**Saobraćaj i logistika**	**Komercijalne primene**
Lokacija u objektima. Praćenje strukturne stabilnosti objekata. Automatizacija životnog prostora. Sigurnost objekata.	Koordinisano praćenje vozila. Kontrola i detekcija zagušenja u saobraćaju. Nadgledanje distribucije dobara i usluga.	Praćenje i nadgledanje kvaliteta proizvoda. Praćenje stanja u skladištima.

1.6 OSI referentni model prilagođen WSN

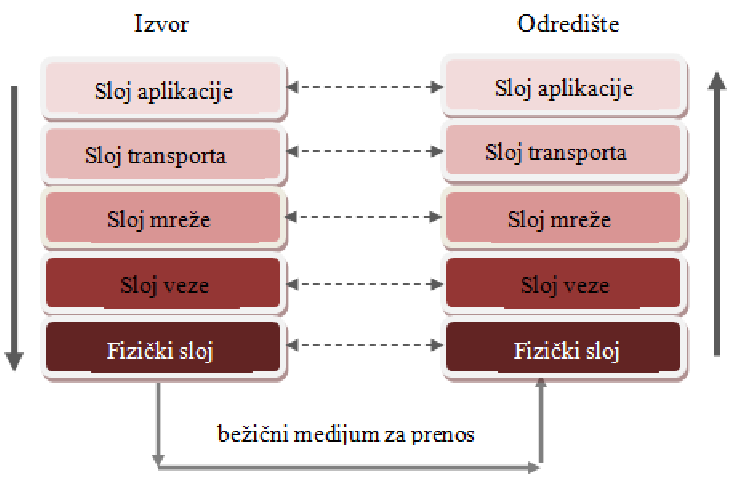
Osi referentni model opisuje kako jedna aplikacija na jednom računaru, kroz mrežni medijum, saopštava podatke i mrežne informacije aplikaciji na drugom računaru. Referentni model predstavlja sve procese potrebne za uspešnu komunikaciju i deli sve procese u logičke grupe - slojeve. Ovako dizajniran model se naziva slojevita arhitektura. OSI model je hijerarhijski model i treba da omogući mrežama različitih proizvođača da rade zajedno. Prednosti korišćenja OSI slojevitog modela su:

- deli komunikacione procese u mreži na manje i jednostavne komponente,
- omogućava višeproizvođački razvoj kroz standardizaciju mrežnih komponenti,

- omogućava različitim vrstama mrežnog hardvera i softvera da rade zajedno,
- sprečava da izmene na jednom sloju utiču na druge slojeve, tako da se ne ometa razvoj.

OSI model prilagođen WSN se sastoji od pet odvojenih, ali međusobno povezanih slojeva kroz koje moraju da prođu podaci na svom putu od izvorišta preko mreže do odredišta. Čine ga sledeći slojevi:

- 5. sloj – sloj aplikacije (*aplication layer*)
- 4. sloj – sloj transporta (*transport layer*)
- 3. sloj – sloj mreže (*network layer*)
- 2. sloj – sloj veze (*data link layer*)
- 1. sloj – fizički sloj (*physical layer*)



Slika 1.5: OSI referentni model

Unutar jednog računara svaki sloj zahteva usluge od sloja ispod sebe. Procesi (entiteti) koji se nalaze u istom sloju, ali na različitim računarima nazivaju se entiteski parovi ili ravnopravni entiteti. Entiteski parovi prividno direktno komuniciraju – svaki sloj u izvorišnoj stanici prividno komunicira sa odgovarajućim slojem u odredišnoj stanici. Komunikacija između entiteskih parova obavlja se pomoću jednog ili više protokola datog sloja. Protokol je skup pravila koji upravlja načinom na koji dva entiteta razmenjuju podatke. U stvarnosti podaci se ne prenose direktno iz npr. sloja mreže jednog računara u sloj mreže drugog već svaki sloj šalje podatke i upravljačke informacije u sloj neposredno ispod sebe sve dok se ne dostigne najniži sloj. Ispod fizičkog sloja je medijum kroz koji se odvija stvarna komunikacija. Na prijemu, pristigli podaci ulaze u fizički sloj i sukcesivno prolaze kroz slojeve dok ne stignu u sloj aplikacije. Jedinica podataka sloja transporta naziva se segment, sloja mreže paket, sloja veze ram ili okvir, a jedinica fizičkog sloja je bit.

Sloj aplikacije omogućava korisniku (čoveku ili programu) da pristupi mreži. Sloj aplikacije se ponaša kao interfejs između stvarnog aplikacionog programa (koji nije deo slojevite strukture) i sledećeg sloja ispod, pružajući načine da aplikacija pošalje informacije naniže kroz stek protokola.

Sloj transporta je odgovoran za isporuku cele poruke s kraja na kraj veze tj. od izvorišta do odredišta. U sloju transporta se obavlja sledeće:

- SAP adresiranje – adresiranje tačaka pristupa uslugama ili adresiranje portova; dok sloj mreže dovodi svaki paket u odredišni računar, sloj transporta dovodi celu poruku u odredišni računar.
- Rastavljanje (segmentacija) i ponovo sastavljanje: poruka se deli na segmente koji se mogu preneti i svakom segmentu se dodeljuje redni broj kako bi sloj transporta u odredištu mogao da prispele pakete identifikuje i složi po ispravnom rasporedu, zamenjujući pakete koji su se tokom prenosa zagubili njihovim ponovo poslatim kopijama.
- Upravljanje konekcijom: sloj transporta može da bude konekciono orijentisan (*connection-oriented*) ili beskonekcioni (*connectionless*).
- Upravljanje protokolom.
- Kontrola grešaka.

Sloj mreže nadzire isporuku paketa, a sloj transporta nadzire isporuku cele poruke. Sloj mreže je neophodan ako su dve stanice koje se nalaze u različitim mrežama koje su povezane uređajima koji se nazivaju ruteri. On je odgovoran za:

- Logičko adresiranje: fizičko adresiranje (koji se obavlja u sloju veze) dovoljno je kada se računari nalaze u istoj mreži, u protivnom sloj mreže unosi u zaglavlje paketa logičke adrese izvorišta i odredišta.
- Određivanje putanje odnosno rutiranje.
- Kontrola zagušenja.

Sloj veze je zadužen za:

- formiranje ramova: na otpremi dodaje paketu pristiglom iz sloja mreže zaglavlje i rep,
- fizičko adresiranje: u zaglavlje rama unosi fizičku adresu predajnika i fizičku adresu prijemnika,
- upravljanje protokolom: ako je brzina kojom predajnik prihvata podatke manja od brzine kojom predajnik šalje podatke, sloj veze aktivira mehanizam za upravljanje protokolom kako bi se sprečilo da brzi predajnik zaguši spori prijemnik,
- kontrolu grešaka: pomoću informacija u repu rama, omogućava otkrivanje grešaka,
- upravljanje pristupa medijumu.

U fizičkom sloju se ram podataka koji stiže iz sloja veze konvertuje u nestruktuiran niz bitova. Zbog toga se fizički sloj bavi mehaničkim i električnim specifikacijama interfejsa i medijuma za prenos i definiše postupke i funkcije koje fizički uređaji i interfejsi moraju da obavljaju tokom prenosa. Zadaci fizičkog sloja su:

- mehanička pitanja vezana za pristup medijumu,
- električna pitanja vezana za pristup medijumu,
- proceduralna pitanja vezana za pristup medijumu.

Fizički sloj je zadužen za:

- definisanje karakteristika interfejsa između uređaja (računara) i medijuma za prenos,
- definisanje vrste medijuma za prenos,
- predstavljanje bitova pomoću električnih ili optičkih signala,

- određivanje trajanja bita tj. brzina emitovanja,
- vremensku sinhronizaciju tj. sinhronizaciju predajnika i prijemnika na nivou bita,
- definisanje smera prenosa,
- način umrežavanja računara: da li se radi o topologiji u obliku magistrale, zvezde, prstena ili *peer to peer* (svako sa svakim).

1.7 Združen dizajn slojeva mreže – *Cross layer dizajn*

Standardni pristup prilikom projektovanja protokol-steka je stroga podela na nivoe, sa standardizovanom komunikacijom između nivoa. Takav pristup može biti neodgovarajući kod WSN iz razloga što je neophodno previše komunikacije da bi se ostvario prenos kontrolnih informacija između protokola koji nisu na susednim nivoima, kao što i nezavisno ponašanje protokola na različitim nivoima može uzrokovati neoptimalno ponašanje mrežnih čvorova. Posledice takvog pristupa bi bile: prevelika potrošnja energije čvorova mreže i neoptimalno ponašanje čitave mreže. Alternativni pristup projektovanja je takozvani *cross layer design*.
Cross layer dizajn je dizajn protokol steka u kome postoje interakcije i interfejsi između protokola u steku koje nisu predviđene korišćenim referentnim modelom (npr. OSI). *Cross layer* dizajn se svodi na dva aspekta:

- razmena informacija između dva ili više nivoa u protokol steku, na način koji nije predviđen referentnim modelom (interfejsi između nesusednih nivoa, zajedničke promenljive stanja koje se dele između više nivoa),
- integracija (spajanje) funkcionalnosti susednih nivoa.

Mana ovog pristupa je gubitak na modularnosti protokol steka.

1.8 Teorija stope izobličenja (distorzije)

Teorija stope izobličenja (distorzije) je glavna grana teorije informacija koja pruža teorijske osnove za kompresiju podataka. Ona govori o problemu utvrđivanja minimalnog broja bita po simbolu, koji treba da se prenesu preko kanala, tako da se izvor (ulazni signal) može približno rekonstruisati na prijemniku (izlazni signal), bez prekoračenja datog nivoa distorzije. Ovu teoriju je stvorio Klaud Šenon u svom radu na fundamentalnoj teoriji informacija.

U teoriji stope izobličenja, izraz stopa se obično shvata kao broj bitova po uzorku podatka koji se čuvaju ili prenose. U najjednostavnijem slučaju (koji se zapravo koristi u većini slučajeva), distorzija je definisana kao očekivana vrednost kvadrata razlike ulaznog i izlaznog signala (tj. srednja kvadratna greška).
Nadalje je ukratko prikazana veza između stope izobličenja i kapaciteta kanala [2]. Pretpostavimo da želimo da prenesemo informaciju o izvoru do korisnika, tako da distorzija ne prelazi nivo D. Teorija stope distorzije nam kazuje da najmanje $R(D)$ bita po simbolu informacije od izvora mora dosegnuti do korisnika. Poznato je, na osnovu Šenonove teoreme o kodiranju kanala da ako je entropija izvora H bita po simbolu i kapacitet regiona C, (pri čemu je $C < H$), tada će $H - C$ bita po simbolu biti izgubljeno prenosom date informacije preko ovog kanala. Kako bi se signal rekonstruisao pri maksimalnoj distorziji D, nameće se zahtev da informacija izgubljena u prenosu ne prelazi maksimalno tolerisani gubitak $H - R(D)$ bita po simbolu. To u stvari znači da kapacitet kanala mora biti bar koliko i $R(D)$.

[2] Više o teoriji informacija i stopi distorzije u *Toby Berger (1971). Rate Distortion Theory: A Mathematical Basis for Data Compression. Prentice Hall*

Od posebnog značaja za razumevanje narednih delova rada je upravo vladanje osnovnim pojmovima navedenim u ovoj glavi. Neizostavne karakteristike bežičnih senzor mreža koje su predmet analize ovog rada su energetska efikasnost mreže koja ujedno obuhvata upravljanje interferencijama, kao i distribuirana, dinamička i samoorganizovana priroda datih mreža. U problemu optimizacije na kome je fokus u ovom radu se koristi *cross layer* optimizacija.

2

Primena teorije igara u problemima optimizacije bežičnih senzor mreža

Bežične senzor mreže su karakterizovane distribuiranom, dinamičnom, samoorganizovanom arhitekturom. Svaki čvor u mreži je u stanju da nezavisno prilagodi svoje operacije bazirane na trenutnom okruženju prema unapred definisanim protokolima i algoritmima [17]. Analitički modeli koji ocenjuju performanse *ad-hoc* mreža su nedovoljni usled distribuirane i dinamičke prirode ovih mreža. Teorija igara nudi niz alata koji bi mogli biti efektivno iskorišćeni u modelovanju interakcije između nezavisnih čvorova u *ad-hoc* mreži. U ovom delu rada su navedene oblasti primene teorije igara u bežičnim senzor mrežama, dok će detaljna analiza biti na problemu optimizacije kontrole napajanja navedenom u glavi 4. Ograničena snaga čvorova ograničava računarske i komunikacijske sposobnosti, kao i mogućnost očitavanja senzora, pa se iz tog razloga nalazi potreba za istraživanje, odnosno nalaženje kompromisa između pouzdanosti i dužeg rada mreže [14]. Bežične senzor mreže podležu izazovima za efikasno rukovođenje energijom, u cilju produživanja životnog veka mreže, uz uspeh u očitavanju objekata. Energetska efikasnost je jedno od ključnih pitanja u teoriji i praksi senzor mreža. Energetska efikasnost je široko istraživana i različiti su načini kako bi se postigla energetski efikasna mreža, uključujući upravljanje senzorima da budu u režimu očuvanja energije, efikasnih algoritama rutiranja i grupisanja. Ovi pristupi se oslanjaju, kako na teoriju igara, tako i na druge oblasti iz matematike, fizike, pa čak i na saznanja o fenomenima koji se prate bežičnim senzor mrežama.

2.1 Osnove teorije igara

Teorija igara, koja je ustvari teorija odlučivanja u uslovima neizvesnosti i međuzavisnosti, nudi paket alata koji se mogu efikasno koristiti u modeliranju interakcije među nezavisnim čvorovima u *ad-hoc* mrežama [14]. To je oblast primenjene matematike koja opisuje i analizira interaktivne odluke u situaciji. Ona pruža analitičke alate za predikciju ishoda složenih interakcija između racionalnih entiteta. Subjekti su racionalni u smislu da imaju striktnu strategiju zasnovanu na uočenim ili izmerenim rezultatima. Posledice odluka ne zavise samo od jednog subjekta, već i od interakcije sa odlukama koje donose drugi subjekti, tako da ishod odluke jednog subjekta zavisi i od odluke drugog ili drugih subjekata. Ovakav slučaj neizvesnosti u odlučivanju nazivamo igrom, a oblast operacionih istraživanja koja se bavi analizom ovakvih problema i nalaženjem optimalnih rešenja se naziva teorijom igara. Glavne oblasti primene teorije igre su ekonomija, političke nauke, biologija i sociologija. U novije vreme inženjering i kompjuterske nauke su dodate na ovu listu.

Igru definišu:

- igrači – subjekti koji donose odluke,
- dobitak – rezultat igre,

- skup strategija – ponašanje svakog od igrača.

Strategija igrača je kompletan plan akcija koje će se preduzeti kada se igra bude odvijala. Igrači biraju pojedinačnu akciju iz skupa izvodljivih akcija. Racionalno ponašanje igrača podrazumeva njihovu sposobnost da odluče koju akciju više preferiraju. U nastavku slede neophodne definicije i tvrđenja preuzeta iz radova [21] i [22].

Definicija 2.1.1 *Skup $X \subseteq \mathbb{R}$ je konveksan ako za svako $x, y \in X$ i $\alpha \in [0, 1]$ važi da $\alpha x+(1-\alpha)y \in X$.*

Lema 2.1.2 *Neka su $X_1, X_2, \dots, X_n$ konveksni skupovi. Neka je skup X Dekartov proizvod navedenih skupova, tj. $X = \times_{k=1}^{n} X_k$. Tada je X konveksan skup.*

Dokaz: Neka su $x, y \in X$. Hoćemo da pokazemo da će i njihova konveksna kombinacija $\alpha x+(1-\alpha)y \in X$, za $\alpha \in [0, 1]$. Kako su $x, y \in X$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, pri čemu $x_i, y_i \in X_i$, za svako $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\alpha x + (1-\alpha)y = (\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1, \dots, \alpha x_n + (1-\alpha)y_n) \tag{2.1}$$

odakle kako su X_i konveksni skupovi za $i = 1, 2, \dots n$ sledi da

$$\alpha x_i + (1-\alpha)y_i \in X_i, \text{ za svako } i = 1, 2, \dots, n$$

što implicira da izraz (2.1) pripada skupu X.

□

Definicija 2.1.3 *Relacija preferencije, $\succsim$, je binarna relacija na skupu X koja ispunjava uslove:*

i) refleksivnosti, $\forall x \in X \quad x \succsim x$,

ii) kompletnosti, $\forall x, y \in X \quad x \succsim y \quad \vee \quad y \succsim x$,

iii) tranzitivnosti, $\forall x, y, z \in X$ ako $x \succsim y$ i $y \succsim z$ sledi $x \succsim z$

Ako važi $x \succsim y$, ali ne važi i $y \succsim x$, tada pišemo $x \succ y$ i kažemo x striktno preferira y; ako $x \succsim y$ i $y \succsim x$ pišemo $x \sim y$ i kažemo x i y su indiferentni.

Definicija 2.1.4 *Relacija preferencije $\succsim$ na skupu X je neprekidna ako za svaki niz $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in X$ koji konvergira ka $x \in X$, takav da $x_k \succsim y$, za svako k, tada važi i $x \succsim y$.*

Definicija 2.1.5 *Relacija preferencije, $\succsim$, na skupu X je konveksna ako važi da $x \succsim y$ implicira*

$$\alpha x + (1-\alpha)y \succsim y \quad \text{za svako } \alpha \in [0, 1].$$

Teorema 2.1.6 *Relacija preferencije, $\succsim$, na skupu X je konveksna ako i samo ako je za svako $x \in X$ skup $\{y \in X | y \succsim x\}$ konveksan.*

Definicija 2.1.7 *Ako je $\succsim$ relacija preferencije na skupu X i ako postoji funkcija $u : X \to \mathbb{R}$, tako da važi*

$$\forall x, y \in X \quad x \succsim y \text{ ako i samo ako } u(x) \geq u(y),$$

tada se funkcija u naziva funkcija korisnosti, koja odgovara datoj relaciji preferencije.

Teorema 2.1.8 *Neka je $\succsim$ neprekidna relacija preferencije na skupu $X \subset \mathbb{R}^n$. Tada postoji neprekidna funkcija korisnosti $u(x) : X \to \mathbb{R}$ koja reprezentuje relaciju $\succsim$.*

Konveksnost relacije preferencije možemo prikazati u terminima funkcije korisnosti. Relacija preferencije je konveksna ako $u(x) \geq u(y)$ implicira

$$u(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq u(y) \text{ za svako } t \in [0, 1]. \tag{2.2}$$

Funkcija korisnosti koja zadovoljava uslov (2.2) se naziva kvazi-konkavna funkcija korisnosti. Dakle, važi sledeće tvrđenje.

Teorema 2.1.9 *Za konveksan skup $X \subset \mathbb{R}^n$ i funkciju korisnosti $u : X \to \mathbb{R}$ važi tvrđenje: funkcija u je kvazi-konkavna ako i samo ako je relacija preferencije, $\succsim$, određena funkcijom u konveksna.*

Svaki igrač evaluira rezultujući ishod kroz funkciju plaćanja ili korisnosti, kojom se reprezentuju njegovi ciljevi. U igri korisnost predstavlja motivaciju igrača. Funkcija korisnosti, odnosno odgovarajuća relacija preferencije, opisuje preference igrača za datu akciju. Ona dodeljuje broj svakom mogućem ishodu igre i ima svojstvo da veći broj podrazumeva ishod koji igrač više preferira. Funkcija plaćanja je funkcija korisnosti umanjena za kaznenu cenu koju zovemo još i taksa, koju igrač plaća za svaku akciju. Interakcija između igrača je predstavljena po uticaju koji svaki igrač ostvari na ishod, nakon što svi igrači izaberu svoje akcije. Kada se igrači sebično ponašaju kako bi maksimizirali svoje dobitke, distribuirana strategija za igrače može da obezbedi optimalno rešenje za igru. Teorija igara razmatra dva osnovna načina predstavljanja igara: normalna (strateška) forma i ekstenzivna forma. Normalna forma se najčešće koristi za igre dve strane u kojoj igrači jednovremeno povlače svoje poteze i mogući ishodi igre se prirodno predstavljaju u obliku matrice. Ekstenzivna forma je graf tipa stablo i koristi se u igrama u kojima igrači naizmenično vuku svoje poteze. U ovom radu se bavimo normalnom formom igre. Normalna forma igre G je data sa $G = \langle N, A, \{\succsim_i\}\rangle$, odnosno $G = \langle N, A, \{u_i\}\rangle$, gde je $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ skup igrača, A_i je skup akcija i-tog igrača, $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ je Dekartov proizvod skupova akcija za svakog igrača i i $\{u_i\} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ je skup funkcija korisnosti koje odgovaraju relacijama $\{\succsim_i\}$ na skupu A, koji svaki igrač i želi da maksimizira, gde $u_i : A \to \mathbb{R}$. Za svakog igrača i, funkcija korisnosti je funkcija od akcije koja je izabrana od strane igrača i, a_i, i akcija izabranih od strane svih igrača u igri osim igrača i označena sa $\mathbf{a}_{-i}$. Zajedno a_i i $\mathbf{a}_{-i}$ čine torku akcija $\mathbf{a}$. Torka akcija je jedinstven izbor akcija od strane svih igrača. Iz ovog modela uslovi stanja ravnoteže poznati kao Nešov ekvilibrijum mogu biti identifikovani.

Definicija 2.1.10 *Nešova ravnoteža strateške forme igre $\langle N, A, \{\succsim_i\}\rangle$ je torka akcija $\mathbf{a}^* \in A$ sa osobinom da za svakog igrača $i \in N$ važi*

$$(a_i^*, \mathbf{a}_{-i}^*) \succsim_i (a_i, \mathbf{a}_{-i}^*) \quad \text{za svako } a_i \in A_i.$$

Ekvivalentno, ako umesto date relacije preferencije u definiciju ubacimo funkciju korisnosti koja joj odgovara, dobijamo sledeće.

Definicija 2.1.11 *Nešova ravnoteža strateške forme igre $\langle N, A, \{u_i\}\rangle$ je torka akcija $\mathbf{a}^* \in A$ sa osobinom da za svakog igrača $i \in N$ važi*

$$u_i(a_i^*, \mathbf{a}_{-i}^*) \geq u_i(a_i, \mathbf{a}_{-i}^*) \quad \text{za svako } a_i \in A_i.$$

Ekvivalentno, Nešova ravnoteža je torka akcija, gde nijedan pojedinačan igrač ne može imati koristi od jednostranog odstupanja, odnosno ako je svaki igrač izabrao strategiju, i nijedan igrač ne može da profitira promenom svoje strategije pod pretpostavkom da ostali igrači ne promene svoje strategije, onda trenutni skup izabranih strategija, i odgovarajućih dobitaka predstavlja Nešov ekvilibrijum. Torka akcija koja odgovara Nešovoj ravnoteži je konzistentan prediktor ishoda igre, u smislu da ako svi igrači predvide Nešovu ravnotežu, tada nijedan igrač nema podstrek da izabere drugu strategiju. Naredno formulisanje definicije je često korisno. Za neko $\mathbf{a}_{-i}$ definišemo $B_i(\mathbf{a}_{-i})$ kao skup akcija i-tog igrača koje najbolje odgovaraju na $\mathbf{a}_{-i}$ akcije drugih igrača:

$$B_i(\mathbf{a}_{-i}) = \{a_i \in A_i : u_i(a_i, \mathbf{a}_{-i}) \geq u_i(a_i', \mathbf{a}_{-i}) \quad \forall a_i' \in A_i\}. \tag{2.3}$$

Tabela 2.1: Matrica plaćanja za igru tri igrača u "peer to peer" deljenju podataka

Korisnik 3: deli			Korisnik 3: ne deli		
Korisnik 2 / Korisnik 1	deli	ne deli	Korisnik 2 / Korisnik 1	deli	ne deli
deli	0.5, 0.5, 0.5	-0.5, 2, -0.5	deli	-0.5, -0.5, 2	-1.5, 1, 1
ne deli	2, -0.5, -0.5	1, 1, -1.5	ne deli	1, -1.5, 1	0,0,0

Preslikavanje $B_i : A_{-i} \rightarrow A_i$, $B_i(\mathbf{a}_{-i}) \subset A_i$ nazivamo funkcija najboljeg odgovora igrača i. Nešova ravnoteža u ovoj formulaciji je tada torka akcija $\mathbf{a}^*$ takva da

$$a_i^* \in B_i(\mathbf{a}_{-i}^*) \quad \forall i \in N. \tag{2.4}$$

Nešov ekvilibrijum je torka akcija koja odgovara zajedničkom najboljem odgovoru: za svakog igrača i, odabrana akcija je najbolji odgovor na akcije svih drugih. Ova alternativna formulacija nam ukazuje na metod za nalaženje Nešove ravnoteže: najpre odredimo funkcije najboljih odgovora svakog igrača, zatim nađemo torku akcija $\mathbf{a}^*$ za koju $a_i^* \in B_i(\mathbf{a}_{-i}^*)$ za svako $i \in N$. Ako funkcije B_i imaju za vrednosti singltone, tada drugi korak podrazumeva rešavanje $|N|$ jednačina sa $|N|$ nepoznatih $(a_i^*)_{i \in N}$.

Ne postoji garancija da će Nešova ravnoteža, ako postoji odgovarati efikasnom ili poželjnom ishodu igre (zaista, ponekad je suprotno tačno). Pareto optimalnost je često uzimana kao mera efikasnosti ishoda. Ishod je Pareto optimalan ako ne postoje drugi ishod, takvi da je za svakog igrača korisnost tih ishoda bar ista, dok korisnost makar jednog postaje veća. Matematički, možemo reći da je torka akcija **a**$= (a_1, \dots, a_n)$ Pareto optimalna ako i samo ako ne postoje druge torke akcija **b**$= (b_1, \dots, b_n)$ takve da $u_i(\mathbf{b}) \geq u_i(\mathbf{a})$, za svako $i \in N$ i za neko $k \in N$ $u_k(\mathbf{b}) > u_k(\mathbf{a})$.

Formulacija igre koju ćemo koristiti u ovom radu je nekooperativna igra, odnosno igra u kojoj se igrači ponašaju sebično, kako bi maksimizirali njihova pojedinačna plaćanja u distribuiranom okruženju odlučivanja. Ovo je u suprotnosti sa kooperativnim igrama u kojima se igrači dogovore o strategijama kako bi maksimizirali svoja plaćanja.

Za ilustraciju ovog osnovnog koncepta, uzimamo *peer to peer* mrežno deljenje podataka između tri korisnika, modelovano kao normalnu formu igre [17]. Igrači su individualni korisnici koji doživljavaju kompromis u deljenju datoteka sa ostalima. Svaki korisnik ima opciju da li da deli fajlove ili ne. Stoga je skup akcija svakog igrača {deli, ne deli}. Plaćanje svakog korisnika je dato kao suma pogodnosti koje on doživljava kada ostali korisnici dele svoje fajlove i troškova koje snosi kada deli svoje lične fajlove. Pretpostavljamo da su korisnici ograničenih resursa. Odredili smo plaćanje tako da svaki korisnik ima koristi od 1 jedinice za svakog drugog korisnika koji deli fajlove i snosi troškove od 1,5 jedinice prilikom deljenja svojih fajlova. Matrica plaćanja može biti predstavljena kao u tabeli 2.1. U matrici plaćanja, plaćanje za prvog korisnika je prvo na listi, plaćanje drugog je drugo na listi i plaćanje trećeg je treće na listi. Umesto predstavljanja u trodimenzionalnom prostoru akcija kao pojedinačnih objekata, predstavljen je prostor akcija u dvodimenzionalnoj varijanti.

Iz plaćanja zapažamo da je najbolji odgovor za svakog korisnika, bez obzira na aktivnosti drugih korisnika da ne deli fajlove. Jedinstvena Nešova ravnoteža je torka akcija (ne deli, ne deli, ne deli). Takođe, evidentno je da nijedan korisnik ne zahteva nikakav benefit za jednostrano odstupanje i deljenje svojih fajlova. Treba naglasiti da Nešova ravnoteža nije Pareto optimalna u ovom slučaju. Ishod (deli, deli, deli) bi učinio da sva tri igrača prođu bolje nego što je slučaj sa torkom akcija koja je Nešova ravnoteža. Ova formulacija je u literaturi teorije igara poznata kao verzija tri igrača za dilemu zatvorenika.
U igri kontrole napajanja, na kojoj je akcenat u ovom radu, koja će biti formulisana u odeljku 2.3, iako to nije uvek slučaj, Nešov ekvilibrijum predstavlja adekvatno stanje ravnoteže, kako navode autori [11].

2.1.1 Postojanje Nešovog ekvilibrijuma

Kako nema svaka strateška igra Nešov ekvilibrijum, uslovi pod kojima je skup svih Nešovih ravnoteža neprazan su obimno istraživani. Literatura korišćena u ovom pododeljku je [21]. Postojanje ekvilibrijuma je važno iz razloga što pokazuje da je igra konzistentna sa stabilnim rešenjem. Da bi se pokazalo da igra ima Nešov ekvilibrijum dovoljno je pokazati da postoji torka akcija $\mathbf{a}^*$ takva da $a_i^* \in B_i(\mathbf{a}_{-i}^*)$ za svako $i \in N$ (videti (2.4)). Definišimo funkciju $B(\mathbf{a}) = \times_{i \in N} B_i(\mathbf{a}_{-i})$. Kako znamo da je za svako $i \in N$ $B_i(\mathbf{a}_{-i}) \subset A_i$, imamo da za $\mathbf{a} \in A$

$$B(\mathbf{a}) = \times_{i \in N} B_i(\mathbf{a}_{-i}) \subset \times_{i \in N} A_i = A$$

dakle, $B : A \to A$. Uzmimo dalje, neko $\mathbf{a}^* \in A$ koje je Nešova ravnoteža, a_i^* je tada najbolji odgovor na akcije drugih igrača $\mathbf{a}_{-i}^*$, za svako $i \in N$, a_i^* zadovoljava kriterijum za pripadnost skupu definisanom sa (2.3), pa imamo

$$\mathbf{a}^* = (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*) \in \times_{i \in N} B_i(\mathbf{a}_{-i}^*) = B(\mathbf{a}^*),$$

tj. $\mathbf{a}^* \in B(\mathbf{a}^*)$. Uočimo da je Nešova ravnoteža fiksna (nepokretna) tačka (skupovne) funkcije najboljih odgovora. Važi i obratno, tj. bilo koja fiksna tačka funkcije najboljeg odgovora je Nešova ravnoteža. Dakle, vektor akcija je Nešova ravnoteža ako i samo ako je fiksna tačka funkcije najboljeg odgovora B.

Teoreme fiksne (nepokretne) tačke daju uslove na B pod kojima zaista postoji $\mathbf{a}^*$ za koje važi da $\mathbf{a}^* \in B(\mathbf{a}^*)$. U nastavku slede teoreme o fiksnoj tački koje koristimo u ovom radu.

Lema 2.1.12 (Kakutani teorema fiksne tačke) *Neka je X kompaktan, konveksan podskup $\mathbb{R}^n$ i neka je $f : X \to \mathcal{P}(X)$[1], funkcija za koju važi*

- *za svako $x \in X$ skup $f(x)$ je neprazan i konveksan,*
- *da je semi neprekidna od gore, tj. za svaki niz $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$, takav da $y_n \in f(x_n)$ za svako n, $x_n \to x$ i $y_n \to y$, važi da $y \in f(x)$.*

Tada postoji $x^* \in X$, takva da $x^* \in f(x^*)$.

Teorema 2.1.13 *Strateška igra $\langle N, A, \{\succsim_i\}\rangle$ ima Nešov ekvilibrijum ako je za svako $i \in N$*

- *skup akcija igrača i, A_i, neprazan, kompaktan, konveksan podskup Euklidskog prostora*

i ako je relacija preferencije $\succsim_i$

- *neprekidna,*
- *konveksna na A_i.*

Ova teorema u terminu funkcije korisnosti, primenjujući definicije i teoreme sa početka odeljka 2.1 glasi:

Teorema 2.1.14 *Strateška igra $\langle N, A, \{u_i\}\rangle$ ima Nešov ekvilibrijum ako je za svako $i \in N$*

- *skup akcija igrača i, A_i, neprazan, kompaktan, konveksan podskup Euklidskog prostora*

i ako je funkcija korisnosti u_i

- *neprekidna,*
- *kvazi-konkavna na A_i.*

[1] $\mathcal{P}(X)$ je partitivni skup skupa X

Dokaz: Kako bismo dokazali ovu teoremu, koristićemo lemu Kakutani, tj. pokazaćemo da pod uslovima iz ove teoreme preslikavanje B ima osobine da je $B(\mathbf{a})$ neprazan i konveksan skup i da je preslikavanje B semi neprekidno od gore. $B_i(\mathbf{a}_{-i})$ je neprazan skup jer je A_i neprazan i kompaktan skup i funkcija korisnosti definisana na njemu, u_i, neprekidna. Ovo važi za svako $i \in N$, pa je samim tim i $B(\mathbf{a})$ neprazno. Dalje pokazujemo da je skup $B(\mathbf{a})$ konveksan, tj. pokazaćemo da su skupovi $B_i(\mathbf{a}_{-i})$ konveksni, pa će na osnovu leme 2.1.2 slediti konveksnost skupa $B(\mathbf{a})$. Neka su a_i' i a_i'' najbolji odgovori za akcije svih drugih igrača $\mathbf{a}_{-i}$, tj. neka $a_i', a_i'' \in B_i(\mathbf{a}_{-i})$. Treba da pokažemo da će i

$$\alpha a_i' + (1-\alpha)a_i'' \in B_i(\mathbf{a}_{-i}).$$

Kako $a_i', a_i'' \in B_i(\mathbf{a}_{-i})$ imamo da je

$$\begin{aligned} u_i(a_i', \mathbf{a}_{-i}) &\geq u_i(a_i, \mathbf{a}_{-i}), \quad \forall a_i \in A_i \text{ i} \\ u_i(a_i'', \mathbf{a}_{-i}) &\geq u_i(a_i, \mathbf{a}_{-i}), \quad \forall a_i \in A_i. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dakle imamo da je $u_i(a_i', \mathbf{a}_{-i}) \geq u_i(a_i'', \mathbf{a}_{-i})$, odakle kako je funkcija u_i kvazi-konkavna imamo da važi

$$u_i(\alpha a_i' + (1-\alpha)a_i'', \mathbf{a}_{-i}) \geq u_i(a_i'', \mathbf{a}_{-i}),$$

pa iz (2.5) dobijamo

$$u_i(\alpha a_i' + (1-\alpha)a_i'', \mathbf{a}_{-i}) \geq u_i(a_i, \mathbf{a}_{-i}), \quad \forall a_i \in A_i.$$

Dakle, $\alpha a_i' + (1-\alpha)a_i'' \in B_i(\mathbf{a}_{-i})$.

Preostalo je još da se pokaže da je preslikavanje B semi neprekidno od gore. Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoje konvergentni nizovi

$$\mathbf{a}^k \to \mathbf{a}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.6}$$

$$\hat{\mathbf{a}}^k \to \hat{\mathbf{a}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.7}$$

takvi da $\hat{\mathbf{a}}^k \in B(\mathbf{a}^k)$, ali $\hat{\mathbf{a}} \notin B(\mathbf{a})$. Kako važi $\hat{\mathbf{a}}^k \in B(\mathbf{a}^k)$ imamo da za svako $i \in N$,

$$\hat{a}_i^k \in B_i(\mathbf{a}_{-i}^k). \tag{2.8}$$

Na granici, kako $\hat{\mathbf{a}}$ nije najbolji odgovor za $\mathbf{a}$, sledi da postoji bolja akcija za nekog igrača i, tj. postoji $i \in N$, postoji $a_i' \in A_i$, tako da je

$$u_i(a_i', \mathbf{a}_{-i}) > u_i(\hat{a}_i, \mathbf{a}_{-i}).$$

Kako važi (2.6), važi i $\mathbf{a}_{-i}^k \to \mathbf{a}_{-i}$, pa možemo uzeti dovoljno veliko k, tako da $u_i(a_i', \mathbf{a}_{-i}^k)$ bude dovoljno blizu $u_i(a_i', \mathbf{a}_{-i})$. Kako važe (2.6) i (2.7) možemo uzeti k dovoljno veliko da učinimo $u_i(\hat{a}_i^k, \mathbf{a}_{-i}^k)$ proizvoljno blizu $u_i(\hat{a}_i, \mathbf{a}_{-i})$. Tada za svako k dovoljno veliko imamo

$$u_i(a_i', \mathbf{a}_{-i}) > u_i(\hat{a}_i^k, \mathbf{a}_{-i}^k),$$

ali ovo znači da $\hat{a}_i^k$ nije najbolji odgovor za $\mathbf{a}_{-i}^k$, a to je kontradikcija sa (2.8).
Dakle, zadovoljeni su uslovi leme Kakutani, pa preslikavanje B ima fiksnu tačku, što znači da postoji Nešova ravnoteža normalne forme igre.

□

2.2 Teorija igara i bežične senzor mreže

U modelovanju senzor mreže kao igre, elemente u mreži možemo predstaviti kao komponente u igri, pri čemu su igrači čvorovi u mreži, zatim strategije su aktivnosti u vezi sa funkcionalnošću koje se ispituju (npr. odluka da li da se prosledi paket ili ne, podešavanje energetskih nivoa....) i funkcija korisnosti odgovara različitim metrikama performansi (npr. propusna moć, ciljani odnos signala i interferencije . . .). Teorija igara se može primenjivati za modelovanje u različitim slojevima mreža, od kojih je od značaja za ovaj rad, primena teorije igara na fizičkom sloju, odnosno na kontrolu napajanja. Na fizičkom sloju se, osim na kontrolu napajanja, teorija igara može primenjivati za prilagođavanje talasnog oblika. Postoje primene na sloju veze i mrežnom sloju, kao i na transportnom i višim slojevima koje manje preovladavaju u literaturi. U nastavku će biti izložene neke od perspektiva teorije igara u različitim slojevima.
Najznačajniji doprinos primene teorije igara u bežičnim senzor mrežama je u proteklom periodu bio u maksimiziranju protoka, tehnikom slučajnog pristupa za bežični medijum, zatim na razvijanje tehnike koja se bavi sebičnim ponašanjem čvorova u prosleđivanju paketa, kao i primena na distribuiranu kontrolu napajanja i izbegavanje interferencije. Upošljavanje teorije igara u modelovanju dinamičkih situacija za *ad-hoc* mreže, gde čvorovi imaju nepotpune informacije je dovelo do primene u velikoj meri neistraženih igara, kao sto su igre nesavršenog monitoringa. Osim prethodno navedenih primena, autori u [17] i [14] neke od problema u bezbednosti *ad-hoc* mreža smatraju za kandidate za upotrebu teorije igara. Rad u [14] se bavi raznim bezbednosno orijentisanim formulacijama, koje uključuju napade zlonamernih čvorova i spoljnih napadača, gde su ciljevi napada različiti, od neizvršavanja usluga, sebičnog rutiranja i uvođenja zlonamernih paketa za određene čvorove kao mete. Fokus u ovom radu je na problemu optimizacije kontrole napajanja na fizičkom sloju. Kao alat za analizu distribuiranih algoritama i protokola *ad-hoc* mreža, teorija igara nudi određene benefite, od kojih su najznačajniji [17]:

a) analiza distribuiranih sistema: teorija igara dozvoljava istraživanje postojanja, jedinstvenosti i konvergencije ka ravnotežnom stanju operativne tačke, kada mrežni čvorovi obavljaju nezavisne adaptacije. Otuda ona služi kao snažan alat za analizu distribuiranih protokola,

b)) *cross layer* optimizacija : često u igrama *ad-hoc* mreža, odluke čvorova na određenim slojevima su napravljene sa ciljem optimizacije učinka nekog drugog sloja. Sa odgovarajućim formulisanjem prostora akcija, analiza teorije igara može da pruži uvid u pristupe za *cross layer* optimizaciju.

c) dizajn podsticajnih šema: dizajn mehanizma je oblast teorije igara koja se tiče toga kako da inženjeri podstaknu mehanizme, koje će voditi nezavisni, sebični učesnici prema rezultatima koji su poželjni iz tačke gledišta sistema. Ovo se može pokazati posebno korisno u projektovanju podsticajnih šema za *ad-hoc* mreže.

Teorija igara na sloju mreže. Kao što smo naveli u odeljku 1.6 osnovne funkcionalnosti sloja mreže su uspostavljanje i ažuriranje ruta i prosleđivanje paketa tim rutama. Pristup teorije igara se koristi za analizu prisustva sebičnih čvorova u mreži, konvergenciju različitih tehnika rutiranja i efekata različitog ponašanja čvorova na rutiranje. Primenom teorije igara na *ad-hoc* rutiranje bave se autori u [19] i fokus je na analizi efikasnosti tri tehnike *ad-hoc* rutiranja, stanje veze rutiranja (engl. *link state routing*), vektor distance rutiranja (engl. *distance vector routing*) i višestruko rutiranje (engl. *multicast routing*) - prosleđivanje reverznom putanjom, u slučaju česte promene rute. Cilj analize je da se uporede i razlikuju tehnike u *ad-hoc* podešavanjima. Ove tehnike se evaluiraju u odnosu na

- saglasnost - da li ruteri imaju ispravan pogled na mrežu, kako bi mogli da donesu ispravnu odluku u rutiranju pod čestim promenama u mreži;
- konvergencija - dužina vremena neophodna ruterima da dobiju ispravan pogled na topologiju mreže dok se čvorovi kreću;

- *network overhead*[2] - količina podataka koji se razmenjuju među ruterima kako bi se postigla konvergencija.

Rutiranje je modelovano kao igra nulte sume između dva igrača - skupa rutera i same mreže. U igri nulte sume funkcija korisnosti jednog igrača (minimiziran igrač) je negativna vrednost funkcije korisnosti drugog (maksimiziran igrač). Igra ima ravnotežu kada je minmax vrednost plaćanja jednog igrača jednaka maxmin vrednosti drugog igrača. U igri nulte sume, maxmin vrednost je definisana kao maksimalna vrednost koju maksimizirajući igrač može da dobije, pod pretpostavkom da je cilj minimizirajućeg igrača da minimizira plaćanje maksimizirajućeg igrača. Drugim rečima, maxmin vrednost predstavlja maksimum među najnižim mogućim plaćanjima koje maksimizirajući igrač može da dobije; ona se takođe naziva i sigurno ili bezbedonosno plaćanje .
U igri rutiranja plaćanje za svakog igrača se sastoji od dve komponente troškova, prve - količina *network overhead* i druge varirajuće u odnosu na performanse metrike. Na primer, za procenu saglasnosti trošak za rutere je 0 ako svi ruteri imaju ispravan pogled na topologiju kada se igra završi i 1 ako neki od rutera nema. Cilj rutera je minimizacija funkcije troškova. Akcija za rutere uključuje slanje kontrolnih poruka rutiranja, kako diktira tehnika rutiranja i ažuriranje informacija o rutiranju, promenu stanja postojećih linkova mreže odozgo na dole i obratno. Igra se rešava određivanjem minmax vrednosti funkcije troškova. Ona služi da se uporede različite tehnike rutiranja u pogledu količine saobraćaja kontrole rutiranja, potrebne da se postigne konvergencija i saglasnost protokola rutiranja sa promenama u mreži. Jedan od glavnih zaključaka komparativne analize je taj da obratni put prosleđivanja zahteva manje kontrole saobraćaja za postizanje konvergencije, nasuprot tradicionalnog rutiranja. U vezi sa rutiranjem se podrazumeva proučavanje uticaja sebičnih čvorova na operaciju prosleđivanja, što ćemo ukratko opisati.

Kako su bežične senzor mreže najčešće postavljene kao *ad-hoc* mreže, uspostavljanje *multi hop* ruta je zasnovano na prosleđivanju paketa čvorova međusobno. Sebični čvor, kako bi sačuvao svoje ograničene energetske resurse, može da odluči da ne učestvuje u procesu prosleđivanja, isključivanjem svog interfejsa. Ako svi čvorovi odluče da se ponašaju na ovakav način, doći će do kolapsa mreže. Veliki broj radova razvija teorijske modele igara za analizu sebičnosti u prosleđivanju paketa i neki od njih su navedeni u [17]. Koristeći notaciju datu u [17], kako je i tamo pokazano, prikazaćemo da pod opštim pretpostavkama ograničenja energije, ravnotežno rešenje tako postavljene igre rezultuje da nijedan čvor ne sarađuje u prosleđivanju paketa. Model teorije igara koji dovodi do takve ravnoteže je postavljen na osnovu:

M	–	skup čvorova koji donose odluke u mreži; $\{1, 2, \ldots, m\}$	$\mathbf{s}$	–	$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$; $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$.
S_k	–	skup akcija čvora k; $S_k = \{0, 1\}$.	$\alpha_k(\mathbf{s})$	–	benefit nastala kada drugi čvorovi učestvuju; npr. $\alpha_k(\mathbf{s}) = \sum_{i=1, i \neq k}^{m} s_i$
s_k	–	akcija čvora k; $s_k = 0$ (kada k-ti čvor ne učestvuje) i $s_k = 1$ (kada učestvuje)	$\beta_k(\mathbf{s})$	–	benefit (ili trošak) čvora k kada učestvuje; za energetski ograničene čvorove je negativan, npr. $\beta_k(\mathbf{s}) = -s_k$.
$\mathbf{S}$	–	zajednički skup akcija; $\mathbf{S} = \times_{k \in M} S_k$	$u_k(\mathbf{s})$	–	korisnost koju ostvari čvor k; $u_k(\mathbf{s}) = \alpha_k(\mathbf{s}) + \beta_k(\mathbf{s})$

Sada, posmatrajmo strategiju $\bar{\mathbf{s}} = \{\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_m\}$ i definišimo skup $\sigma = \{k \in M | \bar{s}_k = 1\}$. Korisnost čvora $k \in \sigma$ je tada data sa

$$u_k(\bar{\mathbf{s}}) = (|\sigma| - 1) - s_k = |\sigma| - 2.$$

Pretpostavimo dalje da čvor k jednostrano odstupa od strategije, da ne učestvuje. Njegova korisnost je tada data sa $u_k(s'_k, \bar{\mathbf{s}}_{-\mathbf{k}}) = |\sigma| - 1$. Ali, pošto je $u_k(s'_k, \bar{\mathbf{s}}_{-\mathbf{k}}) > u_k(\bar{\mathbf{s}})$, strategija $\bar{\mathbf{s}}$ jedino može biti Nešova ravnoteža kada je $\sigma = \emptyset$. Kako je u praktičnim situacijama *ad-hoc* mreža obuhvaćeno više

[2]network overhead - zaglavlje podataka koje je potrebno za rutiranje i transport podataka preko mreže

interakcije među čvorovima, kako bi objasnili takve interakcije, osnovna igra je proširena na model ponovljene igre. Koriste se različiti mehanizmi ponovljene igre, koji neće biti predmet analize u ovom radu.

Perspektiva teorije igara na fizičkom sloju. Ovom temom se bave autori u [17], gde izlažu neke od modela u kojima se primenjuje ili se može primeniti teorija igara. Distribuirana kontrola napajanja i selekcija prikladnog signaliziranja forme talasa su fizičko slojne adaptacije koje mogu biti usvojene od strane čvora. Iz perspektive fizičkog sloja, performansa je funkcija efektivnog odnosa signala sa interferencijom i šumom (SINR) na čvoru/ovima od značaja. Kada čvorovi u mreži reaguju na promene u opažanom SINR prilagođavajući svoj signal, fizički sloj stvara interaktivni proces donošenja odluka. Do ove adaptacije signala može da dođe u nivou prenosa snage i signalizacije talasnog oblika (modulacije, frekvencije i propusnog opsega). Tačna struktura ove adaptacije je takođe pod uticajem različitih faktora nekontrolisanih direktno na fizičkom sloju, uključujući okruženje gubitka putanje i procesorske mogućnosti čvora/ova od značaja. Model teorije igara za adaptaciju na fizičkom sloju se formira na osnovu parametara:

M	–	skup čvorova koji donose odluke u mreži; $\{1, 2, \ldots, m\}$	h_{ij}	–	priraštaj veze od i-tog ka j-om čvoru, koji može biti funkcija izabrane forme talasa
$\mathbf{P}_j$	–	skup nivoa napajanja dostupnih čvoru j. Može se pretpostaviti da je to interval $[0, p^{max}]$, $p^{max} > 0$	$\mathbf{\Omega}_j$	–	skup talasnih oblika poznat od strane čvora j
p_j	–	nivo napajanja izabran od strane čvora j iz $\mathbf{P}_j$	ω_j	–	oblik talasa izabran od j iz $\mathbf{\Omega}_j$
$\mathbf{P}$	–	prostor napajanja formiran kao Dekartov proizvod svih $\mathbf{P}_j$; $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 \times \cdots \times \mathbf{P}_m$	$\mathbf{\Omega}$	–	prostor talasnih oblika formiran kao Dekartov proizvod svih $\mathbf{\Omega}_j$. $\mathbf{\Omega} = \times_{j \in M} \mathbf{\Omega}_j$
$\mathbf{p}$	–	vektor napajanja iz $\mathbf{P}$; $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$	ω	–	vektor talasnih oblika iz $\mathbf{\Omega}$; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$
H	–	matrica priraštaja veze	$u_j(\mathbf{p}, \mathbf{w}, H)$	–	korisnost koju ostvari j.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & h_{12} & \ldots & h_{1m} \\ h_{21} & 1 & \ldots & h_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Na osnovu prethodno navedenih parametara, igra interaktivne adaptacije na fizičkom sloju se može modelovati kao

$$G = \langle M, \{\mathbf{P}_j \times \mathbf{\Omega}_j\}, \{u_j(\mathbf{p}, \omega, H)\}\rangle.$$

U igri adaptacije na fizičkom sloju, svaki čvor j, bira nivo napajanja p_j i talasni oblik ω_j na osnovu trenutnog opažanja i procesa donošenja odluka. U literaturi se najčešce pojavljuju restriktivne verzije ove igre. Distribuiran sistem kontrole napajanja dozvoljava svakom radiju da odabrere p_j, dok ograničava $\mathbf{\Omega}_j$ na jednočlan skup; distribuiran sistem adaptacije talasnog oblika (adaptivno izbegavanje interferencija) ograničava izbor p_j, ali dozvoljava da ω_j bude izabrano od strane fizičkog nivoa.

U radu [18] je opisan algoritam za sprovođenje distribuirane kontrole napajanja u 802.11 mrežama. Autori dozvoljavaju korišćenje deset različitih nivoa napajanja i pripajaju neophodne signalizacije u razmeni RTS-CTS-DATA-ACK[3] okvira. Svaki čvor komunicira sa svojim susednim čvorom i bira nivo prenosa za svakog suseda na takav način da je minimalna snaga signala potrebna za ostvarivanje prihvatljivih performansi. U ovom scenariju, svaki čvor može biti modelovan kao pokušaj da se postigne ciljana SINR. Algoritam kontrole napajanja dat u [18] je modelovan kao strateški oblik igre. Sličan pristup se može koristiti za modelovanje drugih distribuiranih algoritama kao igara, pri čemu svaka igra obuhvata različite funkcije korisnosti. Pretpostavimo da svaki čvor i, u skupu čvorova, M, održava jednu vezu sa čvorom od interesa, v_i. Kako svaki čvor pokušava da održi ciljani SINR, prikladna funkcija korisnosti je za njega data sa:

$$u_i(\mathbf{p}) = -\left[\hat{\gamma}_i - \frac{h_{iv_i}p_i}{\sigma_{v_i} + \sum_{j\in N, j\neq i} h_{jv_i}p_j}\right]^2$$

gde je σ_{v_i} šum na v_i i $\hat{\gamma}_i$ je ciljani SINR igrača i. Model igre za ovaj algoritam je $G = \langle M, \mathbf{P}, \{u_i\}\rangle$. Na osnovu Kakutani teoreme o fiksnoj tački se može zaključiti da igra G ima bar jednu Nešovu ravnotežu. Pod pretpostavkom da su ciljani SINR ostvarljivi, vektor napajanja koji odgovara jedinstvenoj Nešovoj ravnoteži može biti nađen rešavanjem problema linearnog programiranja datog sa:

$$\mathbf{Z}\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{y}},$$

gde su

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} h_{1v_1} & -\hat{\gamma}_1 h_{1v_2} & \dots & -\hat{\gamma}_1 h_{1v_m} \\ -\hat{\gamma}_2 h_{2v_1} & h_{2v_2} & \dots & -\hat{\gamma}_2 h_{2v_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\hat{\gamma}_m h_{mv_1} & -\hat{\gamma}_m h_{nv_2} & \dots & h_{mv_m} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{y}} = [\hat{\gamma}_1\sigma_{v_1}, \hat{\gamma}_2\sigma_{v_2}, \dots, \hat{\gamma}_n\sigma_{v_m}]^T \text{ i } \bar{\mathbf{p}} = [p_1, \dots, p_m]^T.$$

U [17] se navode još neki radovi na temu kontrole napajanja i teorije igara. Pri izboru distribuiranog algoritma za mrežu, nekolicina faktora trebaju biti razmatrana uključujući stanje ravnoteže performansi, konvergencija, kompleksnost, stabilnost, i interakcija ponašanja sa drugim slojevima. Ovo formira neke oblasti istraživanja u polju distribuirane kontrole napajanja i teorije igara.

Adaptacija forme talasa u *ad-hoc* mrežama uključuje odabir forme talasa od strane čvora tako da je interferencija na njegovom prijemniku smanjena. Interferencija na prijemniku je funkcija korelacije talasa korisnika sa talasima drugih korisnika u mreži. Individualni čvorovi ne uključuju u prenos ili uključuju veoma malo informacija o interferenciji na prijemniku. Iz tog razloga je potrebno da se za ove mreže razvijaju distribuirani algoritmi adaptacije talasnog oblika koji zahtevaju minimalni iznos povratne informacije između prijemnika i predajnika. Teorija igara može da obezbedi korisne uvide za ovakav scenario. U radu [17] je navedena literatura koja se bavi adaptacijom talasnog oblika, kako u slučaju kada se posmatra jedan prijemnik, kao i u slučaju mreže sa više distribuiranih prijemnika. Teorija igara se koristi u slučaju jednog prijemnika kako bi se pokazalo da pri bilo kakvoj kombinaciji metrike (srednje kvadratna greška ili SINR) i tipa prijemnika igra ima konvergentnu Nešovu ravnotežu. Međutim u mrežama sa više distribuiranih prijemnika, primena tehnika izbegavanja interferencija ne dovodi do stabilne Nešove ravnoteže, zbog asimetrije uzajamnih interferencija između korisnika na različitim prijemnicima (npr. korisnik izaziva više interferencije na obližnjim prijemnicima nego na onima koji su daleko). Dakle, za konstrukciju konvergentne igre u mreži sa više prijemnika ne može se koristiti pristup teorije igara koji je korišćen u igri sa jednim prijemnikom, već se koristi okvir teorije potencijalnih igara, koje neće biti predmet analize u ovom radu.

[3]Predajnik prvo šalje kratak RTS (Request To Send) paket kojim obaveštava sve čvorove u njegovom dometu da želi da pošalje paket, pri čemu navodi adresu odredišnog čvora. Odredišni čvor odgovara sa CTS (Clear To Send) paketom. Na taj način su svi čvorovi u dometu odredišnog čvora obavešteni o nastupajućem prenosu

2.3 Formulacija modela kontrole napajanja na fizičkom sloju mreže

Problem bežičnih senzor mreža je problem optimizacije u kome je cilj da se smanji ukupna distorzija-izobličenje[4], odnosno greška između tačnih osnovnih polja (koji su rezultat konkretnog merenja) i njene procene na baznu stanicu. Pojam distorzije je objašnjen na strani 15. Kako svaki senzor u mreži obavlja parcijalnu opservaciju fizičkog fenomena, ukupna procena greške u baznoj stanici zavisi od pojedinačnih stopa podataka sa svih senzora na složen način i stoga je ukupna procena greške u baznoj stanici neseparabilna funkcija stopa podataka svih senzora. Pored toga, zbog zajedničke prirode bežičnih medija, geografski bliski prenosi se često mešaju jedni sa drugima. U skladu sa upravljanjem navedenim problemima, potrebno je razmotriti osnovne granice performansi senzor mreža.

U [11] autori su prilagodili model posebnog načina kodiranja izvornog kanala (*source-channel coding model*) koristeći koncepte teorije informacija, kao što su stepen izobličenja regiona i kapacitet regiona, radi istraživanja osnovnih kompromisa u dizajnu bežičnih senzor mreža. Oni su koristili skup dualnih varijabli za koordinaciju interakcije između slojeva i dekomponovali su celokupan problem optimizacije mreža na dva domena, u dva disjunktna potproblema: potproblem kontrole napajanja (energije) na fizičkom sloju i potproblem kodiranja izvora na sloju aplikacije.

Kao što je već pomenuto, kod bežičnih senzor mreža je cilj da se smanji ukupna distorzija, udruženom optimizacijom kodiranja izvora i alokacije energije, što zapisujemo:

$$\begin{aligned} &\min \alpha^T d, \\ \text{gde} \quad & s \in \mathcal{R}(d), \qquad c \in \mathcal{C}(p), \qquad Ac \geq s, \end{aligned} \tag{2.9}$$

pri čemu je α vektor čije su komponente težinski koeficijenti koji odgovaraju odgovarajućim komponentama vektora distorzije d, s je skup brzina slanja podataka, c je skup kapaciteta veze, odnosno maksimalan broj bita koji može da se prenese u jedinici vremena i sa p je označen vektor potrošnje energije. $\mathcal{R}(d)$ je fundamentalni koncept u kodiranju izvora, o kome je bilo reči na strani 15, koji kako smo naveli nazivamo stopa distorzije (izobličenja) regiona. Ograničenje $s \in \mathcal{R}(d)$ modeluje međusobnu zavisnost distorzije od brzine slanja podataka. Pri većoj brzini slanja podataka, stepen distorzije je uglavnom manji. $\mathcal{C}(p)$ je fundamentalni koncept u kodiranju kanala, koji nazivamo region kapaciteta. Ograničenje $c \in \mathcal{C}(p)$ modeluje međusobnu zavisnost kapaciteta veze od potrošnje energije. Lako je uočiti da je brzina slanja podataka koncept zasnovan na senzorskim čvorovima, dok je kapacitet veze koncept zasnovan na vezama (linkovima). Poslednja nejednakost odražava činjenicu da brzina slanja podataka mora biti manja od podržanog kapaciteta veze. Matricu A dimenzije $m \times n$ nazivamo matrica incidencije i njeni elementi su definisani sa:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i \text{ početni čvor za vezu } j \\ -1, & \text{ako je } i \text{ krajnji čvor za vezu } j \\ 0, & \text{za ostalo.} \end{cases} \tag{2.10}$$

Problem (2.9) se dekomponuje na dva potproblema od kojih jedan predstavlja problem kodiranja izvora na sloju aplikacije i dat je sa

$$\begin{aligned} &\min \alpha^T d + \lambda^T s, \\ \text{gde} \quad & s \in \mathcal{R}(d), \end{aligned} \tag{2.11}$$

i drugi, potproblem kontrole napajanja na fizičkom sloju dat sa

$$\begin{aligned} &\max \mu^T c, \\ \text{gde} \quad & c \in \mathcal{C}(p). \end{aligned} \tag{2.12}$$

[4] distorzija- nepravilna promena originalnog signala

Dalje se koristi teorija igara za rešavanje prethodno pomenutih problema. Kako bi ilustrovali upotrebu dijagonalno dominantnih matrica, u daljem radu od značaja za nas je potproblem optimizacije na fizičkom sloju.

Potproblem fizičkog sloja se tiče pojave interferencija[5] među okolnim senzorima. Upravljanje interferencijama predstavljaju jedan od primarnih izazova u fizičkom sloju mreža. Ključni koncept na fizičkom sloju je region dostižnih kapaciteta, koji se karakteriše kompromisom između dostižnih kapaciteta na različitim vezama. Za datu mrežu, za svaku vezu $i \in N$ usvajamo oznake g_{ii}, p_i i ξ_i, koje označavaju priraštaj veze, upotrebu energije i šum veze, respektivno. Sa g_{ij} je označen priraštaj interferencije linka j na link i, odnosno slabljenje veze i izazvano interferencijom od strane linka j. Vrednosti matrice priraštaja $G = [g_{ij}]$ i vektora šuma ξ se uglavnom dobijaju putem neke tehnike procene, a oni su okarakterisani statistikama kanala[6] veze. Dalje pretpostavimo da svaki čvor ima određeni budžet energije, tako da je proces napajanja veze i ograničen sa p_i^{max} tj. $p \le p^{max} := [p_1^{max}, p_2^{max}, \ldots, p_n^{max}]^T$. Dakle, potproblem kontrole napajanja (2.12) na fizičkom sloju se može formulisati na sledeći način:

$$\begin{array}{lccc} \text{naći} & 0 \le p \le p^{max} & \text{koje maksimizira} & \sum_{i\in N} \mu_i c_i \\ \text{gde} & & c_i := \log(1 + SINR_i), & \\ & & SINR_i = \frac{g_{ii}p_i}{\sum_{j\in N\setminus\{i\}} g_{ij}p_j + \xi_i}, & \end{array} \tag{2.13}$$

gde je c_i kapacitet veze $i \in N$, i $SINR_i$ odnos signala sa interferencijom i šumom.

Da bismo, u glavi 4 mogli u potpunosti analizirati optimizaciju kontrole napajanja u okvirima ovog modela, u narednoj glavi uvodimo osnovne pojmove i tvrđenja teorije matrica i iterativnih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina, koji predstavljaju matematički aparat za rešavanje kako formulisanog problema bežičnih senzor mreža, tako i velikog broja problema koji nisu tema ovog rada.

[5]interferencija - uzajamno pojačavanje ili slabljenje talasa pri njihovom sudaranju

[6]zbog jednostavnosti, podrazumevamo slučaj u kome svaka veza ima jedan kanal. Realno stanje može biti modelovano na isti način.

3

Teorija matrica

3.1 Osnovni pojmovi i tvrđenja teorije matrica

Matrica A formata $m \times n$ nad poljem $\mathbb{R}$, $(\mathbb{C})$ je pravougaona tablica elemenata iz $\mathbb{R}$, $(\mathbb{C})$ koja ima m vrsta i n kolona, što kraće zapisujemo $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $(A \in \mathbb{C}^{m,n})$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrice nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ i kompleksnih $\mathbb{C}$ zovemo realne, odnosno kompleksne matrice. U ovom radu, za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, sa $\mathbb{C}^n$ označavamo kompleksni n-dimenzionalni vektorski prostor vektora kolona $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, gde $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, n$, dok za proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}$, sa $\mathbb{C}^{m,n}$, označavamo kolekciju svih matrica dimenzija $m \times n$ sa kompleksnim elementima. U slučaju kada je broj vrsta jednak broju kolona, tj. $m = n$ matrica se naziva kvadratna matrica. Skup indeksa označavamo sa $N = \{1, 2, \dots n\}$. Kvadratnu matricu I sa jedinicama na dijagonali i ostalim elementima jednakim nuli nazivamo jedinična matrica. Zbir matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m,n}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{m,n}$ je matrica $C = [c_{ij}] \in \mathbb{C}^{m,n}$, takva da je $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Ako je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m,n}$ i $\alpha \in \mathbb{C}$, tada je $\alpha A = B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{m,n}$, gde je $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Ako je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m,n}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,p}$, onda je $AB = C = [c_{ij}] \in \mathbb{C}^{m,p}$, tako da je $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, $i = 1, 2, \dots m$, $j = 1, 2, \dots, p$. Svako linearno preslikavanje se može predstaviti kao proizvod matrice i vektora, tj.

$$A(x + y) = Ax + Ay, \quad A(\alpha x) = \alpha Ax,$$

gde $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, $x, y \in \mathbb{C}^n$ i $\alpha \in \mathbb{C}$. Ako su $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ takvi da je $Ax = \lambda x$ onda se x naziva karakteristični vektor, a λ karakteristični koren matrice A. Skup svih karakterističnih korena matrice A naziva se spektar matrice A, u oznaci

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : det(\lambda I_n - A) = 0\}.$$

Karakteristični koren matrice A, $\rho(A) = \{\max_{i \in N} |\lambda_i| : \lambda_i \in \sigma(A)\}$ se naziva spektralni radijus matrice A. Ako u matrici

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

zamenimo vrste kolonama i obrnuto, dobijamo matricu

$$A^T = [a_{ij}]_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

koja se zove transponovana matrica matrice A. Za matricu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ kažemo da je simetrična ako je $A = A^T$.

Matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regularna (nesingularna) ako postoji matrica $B \in \mathbb{C}^{n,n}$, takva da je $AB = BA = I$, u suprotnom za matricu A kažemo da je singularna. Matrica A je regularna ako i samo ako je $det(A) \neq 0$.

Svako preslikavanje $\|.\|$ skupa $\mathbb{R}^{n,n}, (\mathbb{C}^{n,n})$ u skup nenegativnih realnih brojeva koje zadovoljava sledeće četiri osobine:

1. $\|A\| \geq 0$ i $\|A\| = 0$ ako i samo ako je $A = 0$,
2. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$,
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
4. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$,

za svako $\alpha \in \mathbb{R}, (\mathbb{C})$ i sve matrice $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}, (\mathbb{C}^{n,n})$ nazivamo matrična norma na $\mathbb{R}^{n,n}, (\mathbb{C}^{n,n})$. Svaka matrična norma je neprekidna funkcija po elementima matrice A. Svake dve matrične norme su ekvivalentne, tj. za svake dve matrične norme, postoje konstante $m, M \geq 0$, takve da za svaku matricu A važi

$$m\|A\| \leq \|A\|^* \leq M\|A\|.$$

Kažemo da je matrična norma $\|.\|_m$ saglasna sa vektorskom normom $\|.\|_v$, ako za svaki vektor x i svaku matricu A važi $\|Ax\|_v \leq \|A\|_m\|x\|_v$. Za svaku matričnu normu, postoji vektorska norma sa njom saglasna. Neka je data vektorska norma $\|.\|_v$, tada preslikavanje definisano sa

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

zovemo prirodna matrična norma ili indukovana datom vektorskom normom.
Ekvivalentan zapis prirodne matrične norme je

$$\|A\| = \max_{\|u\|=1} \|Au\|.$$

Prirodna norma je najmanja među svim normama koje su saglasne sa datom vektorskom normom. Za svaku matričnu normu važi $\|I\| \geq 1$, a ako je norma prirodna, onda je $\|I\| = 1$.

Primer 3.1.1 (Primeri prirodnih normi)

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)},$$

gde je $\rho(A^H A)$ spektralni radijus matrice $A^H A$.

Za svaku matricu A i svaku matričnu normu važi da je $\rho(A) \leq \|A\|$. Za svako $\varepsilon \geq 0$ postoji matrična norma koja ima osobinu da je

$$\rho(A) \leq \|A\| < \rho(A) + \varepsilon.$$

Ako je $N(x)$ definisano kao $N(x) = \|Sx\|$, onda je matrična norma indukovana datom vektorskom normom data sa $N(A) = \|SAS^{-1}\|$, pri čemu je $\|SAS^{-1}\|$ matrična norma indukovana vektorskom normom $\|Sx\|$.

Niz vektora $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ iste dimenzije teži (konvergira) ka vektoru x te iste dimenzije ako i samo ako svi nizovi komponenata teže ka odgovarajućoj komponenti vektora x. To zapisujemo kao

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$$

i vektor x nazivamo granična vrednost niza $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$. Niz vektora $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira ka vektoru x ako i samo ako $\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0$, za svaku vektorsku normu. Red vektora $\sum_{i=1}^{\infty} x^{(k)}$ konvergira ako i samo ako niz parcijalnih suma

$$\{S^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} x^{(j)}\}_{k\in\mathbb{N}}$$

konvergira.

Niz matrica $\{A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}]\}_{k\in\mathbb{N}}$ istog reda konvergira ka matrici $A = [a_{ij}]$ tog istog reda ako i samo ako za svako $i, j \in N$ svi nizovi elemeneta konvergiraju ka odgovarajućem elementu matrice A, tj. za svako $i, j \in N$ $a_{ij}^{(k)} \to a_{ij}$, kad $k \to \infty$. Što zapisujemo

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A$$

i matricu A nazivamo granična vrednost niza $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$.

Niz matrica $\{A^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira ka matrici A, kad $k \to \infty$ ako i samo ako

$$\lim_{k\to\infty} \|A^{(k)} - A\| = 0,$$

za svaku matričnu normu $\|.\|$.

Niz normi $\|A^{(k)}\|$ teži nuli ako i samo ako niz matrica $A^{(k)}$ teži nula matrici, to jest

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|A^{(k)}\| = 0.$$

Ako je $\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A$, tada je $\lim_{k\to\infty} \|A^{(k)}\| = \|A\|$.

Red matrica $\sum_{i=1}^{\infty} A^{(k)}$ konvergira ako i samo ako niz parcijalnih suma

$$\{S^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} A^{(j)}\}_{k\in\mathbb{N}}$$

konvergira.

Red matrica $\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$ konvergira ka $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ako i samo ako za svako $i, j \in N$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$.

Neka je data proizvoljna kvadratna matrica A. Niz $\{A^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira ka nula matrici, tj. $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$ ako i samo ako je $\rho(A) < 1$.

Teorema 3.1.2 *Neka je data proizvoljna kvadratna matrica A. Red matrica $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ je konvergentan ako i samo ako je $\rho(A) < 1$ i pri tome je $I - A$ regularna matrica i njena inverzna je $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.*

Dokaz: $(\Rightarrow)$ Ako je dati red konvergentan, onda njegov opšti član teži nuli, pa je $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$. Na osnovu prethodne teoreme sledi da je $\rho(A) < 1$.
$(\Leftarrow)$ Ako je $\rho(A) < 1$, tada su svi karakteristični koreni matrice A različiti od 1, pa su svi koreni $1-\lambda$ matrice $I-A$ različiti od nule, iz čega sledi da je $I-A$ regularna matrica.

$$(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^k) = I-A^{k+1}$$

$$I+A+A^2+\cdots+A^k-A-A^2-\cdots-A^k-A^{k+1} = I-A^{k+1}$$

$$I+A+A^2+\cdots+A^k = (I-A)^{-1}(I-A^{k+1}).$$

Kada $k\to\infty$

$$I+A+A^2+\cdots+A^k+\cdots = (I-A)^{-1}.$$

□

3.2 Dijagonalna dominacija

Osobine matrica opisane u ovom delu rada predstavljaju prikladan matematički aparat za analizu i rešavanje problema u bežičnim senzor mrežama zahvaljujući tome što na prirodan način opisuju neke fizičke karakteristike posmatranog problema.

Na osnovu usvojenih oznaka iz ovog poglavlja, navodimo rezultate velikih imena matematike, koja su se u svojim radovima bavila problemom regularnosti matrice.

Definišimo sumu $i-$te vrste

$$r_i(A) := \sum_{j\in N\setminus\{i\}} |a_{ij}| \quad (i\in N), \tag{3.1}$$

pri čemu je $r_i(A)$ suma modula vandijagonalnih elemenata i-te vrste matrice A. U slučaju da je matrica A dimenzije $n=1$, $r_1(A) := 0$.

Najpre izlažemo prvi poznati rezultat regularnosti realnih matrica, koji je nastao u radu Levija[1] [23], 1881 godine, i kasnije se nezavisno pojavio u radu Minkovskog[2] [24], 1900 godine. Slučaj kompleksne matrice je obuhvaćen u radu Deplanka[3] [25], 1887 godine i u knjizi Adamara[4] [26], 1903 godine. U savremenom pristupu, svi gore navedeni radovi kazuju sledeće.

Teorema 3.2.1 (Levi-Deplank ili Adamar) *Neka je $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n,n}$ proizvoljna matrica. Ako je*

$$|a_{ii}| > r_i(A) \quad \forall i\in N, \tag{3.2}$$

tada je A regularna matrica.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. neka je matrica A singularna. Tada postoji nenula vektor $x=[x_1,x_2,\ldots,x_n]\in\mathbb{C}^n$, takav da je $Ax=0$, ili ekvivalentno, $\sum_{j\in N} a_{ij}x_j = 0$, za svako $i\in N$. Kako je $x\neq 0$, postoji indeks $k\in N$, takav da je $0<|x_k| = \max\{|x_j| : j\in N\}$. Za ovako odabran indeks k imamo

$$\sum_{j\in N\setminus\{k\}} a_{kj}x_j = -a_{kk}x_k,$$

[1] Lévy
[2] Minkowski
[3] Desplanques
[4] Hadamard

odakle, ako primenimo apsolutnu vrednost i nejednakost trougla dobijamo

$$|a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j\in N\setminus\{k\}} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{j\in N\setminus\{k\}} |a_{kj}|.$$

Deljenjem poslednje nejednakosti sa $|x_k| > 0$ dobijamo

$$|a_{kk}| \leq r_k(A),$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom (3.2). Dakle, A je regularna matrica.

□

Matrice koje zadovoljavaju uslov (3.2) iz prethodne teoreme se nazivaju striktno dijagonalno dominantne matrice, ili kraće, SDD matrice. Kako je za proveravanje regularnosti matrice potrebno izračunati determinantu, koja iziskuje vreme i prilično mnogo računa (pogotovo za matrice većih dimenzija), uslov (3.2) iz prethodne teoreme u velikoj meri olakšava rad. Regularnost SDD matrica je osim toga, početna tačka mnogih drugih interesantnih rezultata. Uslov (3.2) jeste dovoljan uslov za regularnost, ali nije i potreban, što se vidi iz primera 3.2.2, pa zaključujemo da je klasa SDD matrica potklasa klase svih regularnih matrica. Za kvadratnu matricu dimenzije n, dovoljno je dakle proveriti n nejednakosti, odnosno da li je u svakoj od n vrsta date matrice zbir modula vandijagonalnih elemenata strogo manji od modula dijagonalnog elementa. Vrste matrice koje zadovoljavaju dati uslov nazivamo SDD vrste, pa je matrica SDD ako su joj sve vrste SDD.

Primer 3.2.2

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{i} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix}, \quad det(A_1) = 10 + i \neq 0$$

Primetimo da su masnim slovima ispisane vrste matrice koje zadovoljavaju uslov (3.2). *Matrica A_1 je SDD matrica, pa je samim tim i regularna, kako bismo pokazali da osobina* (3.2) *nije potreban uslov za regularnost, posmatrajmo sledeću matricu*

$$A_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0.5} & \mathbf{0} \\ 0.5 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix}, \quad det(A_2) = 2$$

Dakle, matrica A_2 je regularna, a nije SDD. Posmatrajmo dalje matricu

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix}, \quad det(A_3) = 0$$

Matrica A_3 je singularna i u ovom slučaju je jedna ne-SDD vrsta dovoljna da izazove singularnost matrice.

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad det(A_4) = 0$$

U ovom radu će biti predstavljena neka proširenja pojma striktne dijagonalne dominacije koja su razvijena. Posmatrajmo dalje šta se dešava u slučaju kada je stroga nejednakost iz (3.2) zamenjena nestrogom nejednakošću, tj. kada za marticu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ važi

$$|a_{ij}| \geq r_i(A) \quad \forall i \in N, \tag{3.3}$$

odnosno zanima nas da li je u ovom slučaju matrica regularna.
U radu se bavimo problemom dijagonalne dominacije, pa se matrice koje zadovoljavaju uslov (3.3), pri čemu je bar jedna nejednakost stroga nazivaju dijagonalno dominantne matrice. U slučaju da su sve nejednakosti iz (3.3) ustvari jednakosti, ne postoji razlog da matrice tog tipa nazivamo dijagonalno dominantnim.

Definicija 3.2.3 *Proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je dijagonalno dominantna (DD matrica) ako je*

$$|a_{ij}| \geq r_i(A) \quad \forall i \in N, \tag{3.4}$$

i ako za bar jedan indeks $k \in N$ važi

$$|a_{kk}| > r_k(A). \tag{3.5}$$

Pitanje regularnosti DD matrica je proisteklo iz rada Geršgorina, [27], 1931 godine i Olge Tauski-Tod [5], 1948 godine, u radovima koji su se bavili lokalizacijom karakterističnih korena matrice, što je direktno povezano sa regularnošću. U smislu lokalizacije karakterističnih korena, Geršgorin prerano zaključuje da su DD matrice regularne. Matrica A_4 iz primera 3.2.2 je dijagonalno dominantna matrica koja je singularna. Zainteresovana za Geršgorinov rad i posebno za ovaj slučaj, Olga Tauski-Tod u svom poznatom radu [28] uviđa Geršgorinovu grešku. U cilju ispravke dobijenog rezultata, kako navodi autor [20], Olga Tauski-Tod otvara lepo poglavlje u teoriji matrica, uvođenjem teorije grafova i pojma nerazloživosti.

3.2.1 Nerazloživost

Za određivanje regularnosti matrica DD tipa nije dovoljno samo uočiti broj striktnih nejednakosti u (3.3) već je neophodno i uzeti u obzir strukturu matrice.

Definicija 3.2.4 *Matrica $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ je permutaciona matrica ako postoji permutacija π, tj. injektivno preslikavanje $\pi : N \to N$, tako da $P = [p_{ij}] := [\delta_{i\pi(j)}] \in \mathbb{R}^{n,n}$, gde je δ_{kl} Kronekerova delta funkcija, tj.*

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

Definicija 3.2.5 *Neka je data matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$. Matrica A je razloživa ako postoji permutaciona matrica $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ i ceo broj r, $1 \leq r < n$, tako da*

$$P^T A P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

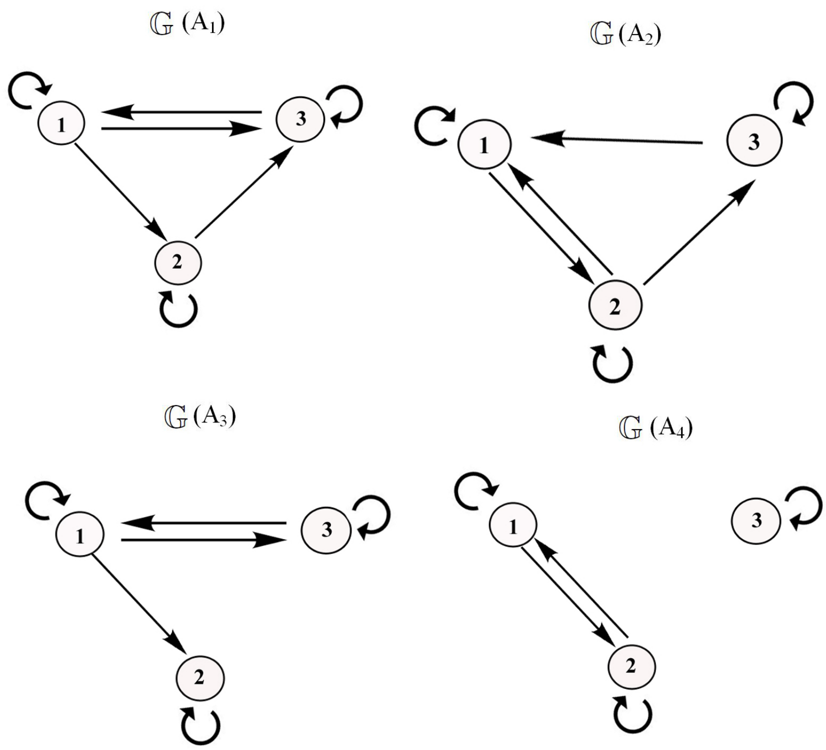
gde $A_{11} \in \mathbb{C}^{r,r}$ i $A_{22} \in \mathbb{C}^{n-r,n-r}$. U slučaju da takva matrica ne postoji, kažemo da je matrica A nerazloživa. Za $A \in \mathbb{C}^{1,1}$, kažemo da je A nerazloživa ako je $a_{11} \neq 0$, a razloživa u slučaju kada je $a_{11} = 0$.

Osobina nerazloživosti matrice, kao alat linearne algebre, prvi put se javlja u radu Olge Tauski-Tod. Ona prikazuje vezu teorije grafova sa teorijom matrica, tako što matrice možemo predstavljati kao usmerene grafove sa težinama, gde indeksi vrsta ili kolona predstavljaju čvorove, dok nenula elementi matrice određuju usmerene grane sa odgovarajućim težinama. U cilju određivanja nerazloživosti od značaja za nas je nula/nenula struktura matrice, što nam omogućava da pažnju usmerimo na usmereni graf matrice A. Preciznije, za datu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, sa $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ označavamo n tačaka koje nazivamo čvorovima. Za svaki nenula element a_{ij} matrice A, formiramo usmerenu granu $\overrightarrow{v_i v_j}$ koja spaja čvor v_i sa čvorom v_j. U slučaju kada je $i = j$, tj. $a_{ii} \neq 0$, granu $\overrightarrow{v_i v_i}$ nazivamo petlja. Skup svih usmerenih grana $\mathbb{E}(A) := \{\overrightarrow{v_i v_j} : a_{ij} \neq 0, i, j \in N\}$ zajedno sa skupom čvorova $\mathbb{V}(A) := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ čini digraf $\mathbb{G}(A)$ pridružen matrici A, za koji u daljem tekstu koristimo termin graf matrice A. Na slici 3.1 su dati grafovi matrica A_1, A_2, A_3 i A_4 iz primera 3.2.2.

Razmotrimo dalje neke osobine grafova koje su od važnosti za ovaj rad. Kažemo da u grafu matrice A postoji put $\overrightarrow{v_{i_0} v_{i_1}}, \overrightarrow{v_{i_1} v_{i_2}}, \ldots, \overrightarrow{v_{i_{l-1}} v_{i_l}}$ ako i samo ako je niz indeksa matrice $\{i_j\}_{j=0}^{l} \subseteq N$ takav da $a_{i_{j-1} i_j} \neq 0$, za svako $1 \leq j \leq l$, što takođe može biti zapisano kao

$$\prod_{j=1}^{l} a_{i_{j-1} i_j} \neq 0.$$

[5] Olga Taussky-Todd



Slika 3.1: Grafovi matrica A_1, A_2, A_3 i A_4 iz primera 3.2.2 respektivno

Kako struktura grafa matrice može biti takva da se on sastoji od "bloka" u kome su svaka dva čvora povezana kao što je slučaj sa grafom $\mathbb{G}(A_1)$ ili od više takvih "blokova", koji nisu međusobno povezani, kao u grafu $\mathbb{G}(A_4)$, (iz bloka $\{3\}$ ne postoji usmerena grana ka bloku $\{1, 2\}$) uzimamo u obzir sledeću definiciju.

Definicija 3.2.6 *Usmereni graf $\mathbb{G}(A)$ matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je jako povezan ako, za svaki uređen par različitih čvorova (v_i, v_j), postoji usmeren put u $\mathbb{G}(A)$ iz čvora v_i u čvor v_j.*

Primetimo dalje da permutacija elemenata matrice ne utiče na strukturu grafa, tj. graf $\mathbb{G}(P^T AP)$, za proizvoljnu permutacionu matricu P, je graf $\mathbb{G}(A)$ sa prenumerisanim čvorovima. Ovo opažanje vodi do sledeće teoreme.

Teorema 3.2.7 *Proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je nerazloživa ako i samo ako je $\mathbb{G}(A)$ jako povezan.*

Uzimajući u obzir matrice iz primera 3.2.2 i njihove grafove sa slike 3.1 uočavamo da su singularne matrice A_3 i A_4 razložive, dok su regularne matrice A_1 i A_2 nerazložive. Olga Tauski zaključuje da je nerazloživost potrebna pored dijagonalne dominacije radi obezbeđivanja regularnosti matrice.

Teorema 3.2.8 (Olga Tauski) [6] *Svaka nerazloživa matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ koja je dijagonalno dominantna je regularna.*

[6] matrice koje zadovoljavaju uslove ove teoreme ćemo zvati nerazložive dijagonalno dominantne matrice u oznaci iDD (engl. irreducibly diagonally dominant)

Dokaz: Za $n = 1$, tvrđenje sledi direktno iz definicije (3.2), pretpostavimo dalje da je $n \geq 2$. Za $n \geq 2$, pretpostavimo suprotno, odnosno pretpostavimo da je matrica A singularna. Kako je matrica A singularna $0 \in \sigma(A)$ i postoji nenula karakteristični vektor $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{C}^{n,n}$, takav da je $Ax = 0$. Kako je poslednja jednačina homogena, možemo je normalizovati, tako da $\max\{|x_i| : i \in N\} = 1$. Neka je $S := \{j \in N : |x_j| = 1\}$, tada je S neprazan podskup N. Kako $Ax = 0$ implicira da je za svako $k \in N$, $\sum_{j \in N} a_{kj} x_j = 0$, imamo da je

$$-a_{kk}x_k = \sum_{j \in N \setminus \{k\}} a_{kj} x_j \quad (\forall k \in N).$$

Uzimajući u obzir $i \in S$ i apsolutnu vrednost primenjenu na prethodnu jednačinu i primenjujući nejednakost trougla za $k = i$ imamo

$$|a_{ii}| \leq \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}||x_j| \leq r_i(A) \quad (i \in S).$$

Kako obratna nejednakost mora važiti, jer je pretpostavka teoreme da je matrica A dijagonalno dominantna dobijamo

$$|a_{ii}| = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}||x_j| = r_i(A) \quad (i \in S). \tag{3.7}$$

Neka je dato proizvoljno $i \in S$. Izrazi u sumi (3.7) se ne mogu anulirati, zbog uslova nerazloživosti matrice. Pa za proizvoljno $a_{ij} \neq 0$, gde $j \in N$, $j \neq i$, iz poslednje jednakosti u (3.7), sledi da $|x_j| = 1$, tj. $j \in S$. Sa druge strane, kako stroga nejednakost 3.5 mora važiti, za bar jedan indeks i, sledi da S mora biti pravi podskup N, tj. $\emptyset \neq S \subsetneq N$. Tako možemo uzeti $i_0 \in S$ i $i_l \in N \setminus S$. Kako je graf $\mathbb{G}(A)$ jako povezan po teoremi 3.2.7 postoji usmereni put grana od čvora v_{i_0} do čvora v_{i_l}, tj. postoji niz nenula elemenata $a_{i_0 i_1}, a_{i_1 i_2}, \ldots, a_{i_{l-1} i_l}$. Ali, primenjujući prethodne zaključke uzastopno na niz, dobijamo da $i_l \in S$, što je očigledno kontradikcija. Dakle, matrica A je regularna.

□

Kako uslov nerazloživosti nije lak za proveravanje, od značaja je dobijanje uslova za regularnost dijagonalno dominantnih matrica. Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$. Pokazaćemo da za datu matricu, takvu da $|a_{ii}| > r_i(A)$, za $1 \leq i \leq n-1$, i $|a_{nn}| = r_n(A)$ važi da je regularna ako je $r_n(A) > 0$, a singularna ako je $r_n(A) = 0$. Kada je $r_n(A) = 0$ cela n-ta vrsta matrice A je jednaka nuli, pa je matrica A singularna. Pretpostavimo dalje da je $|a_{nn}| = r_n(A) > 0$. Kako za svako $i = 1, 2, \ldots, n-1$, važi da $|a_{ii}| > r_i(A)$, tj.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n-1} |a_{ij}| + |a_{in}|,$$

postoji dovoljno malo ε tako da

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n-1} |a_{ij}| + (1+\varepsilon)|a_{in}|, \quad \text{za svako } i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.8}$$

Sa druge strane, za to ε imamo da je

$$(1+\varepsilon)|a_{nn}| = r_n(A) + \varepsilon|a_{nn}| > r_n(A). \tag{3.9}$$

Posmatrajmo dalje regularnu dijagonalnu matricu $W = diag(1, 1, \ldots, 1, 1+\varepsilon) \in \mathbb{R}^{n,n}$. Iz (3.8) i (3.9) sledi da je matrica $AW = [a_{ij}w_j]$ SDD matrica, pa je regularna, iz čega proizilazi da je i matrica A regularna. Tehnika koju smo upravo primenili kako bismo zaključili da je A H-matrica se pokazala kao veoma korisna i kao odličan alat za unapređenje poznatih rezultata i stvaranje novih. Glavna ideja je u konstruisanju regularne dijagonalne matrice, koja će skalirati originalnu matricu u SDD, množenjem sa desne strane, pa stoga tu tehniku nazivamo tehnika skaliranja. O ovoj tehnici će biti reči u nastavku.

3.2.2 Neka proširenja (striktno) dijagonalno dominantnih matrica

Kako u bežičnim senzor mrežama uslov koji važi za SDD matrice, može biti narušen usled jače interferencije inherentne na topologiju veze, prirodno se za strukturu matrice koja se pojavljuje u formulisanom problemu, javljaju neka od proširenja klasa dijagonalno dominantnih matrica i iz tog razloga će u daljem tekstu određene klase biti predmet analize. Kako navodi autor u [20], nasuprot jednostavnosti i lepote klase SDD matrica, uslov kojim su date matrice definisane važi za nedovoljno veliku klasu matrica, pa se iz tog razloga javlja potreba za proširenjem ove klase matrica. U nastavku, radi kompletnosti, dajemo pregled raznih proširenja klase SDD matrica čiji je pregled prvobitno dat u [20]. Najpre ćemo predstaviti jednu od prvih generalizacija striktne dijagonalne dominacije, za koju je zaslužan Ostrovski[7].

Teorema 3.2.9 *Neka je data proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$. Ako važi*

$$|a_{ii}||a_{jj}| > r_i(A)r_j(A), \tag{3.10}$$

za svaka dva različita čvora $i, j \in N$, tada je A regularna.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. neka matrica A koja zadovoljava (3.10) bude singularna. U tom slučaju postoji vektor $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \neq 0$, takav da je $Ax = 0$, odnosno

$$-a_{ii}x_i = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} a_{ij}x_j, \quad (i \in N). \tag{3.11}$$

Kako je $x \neq 0$, postoji $k \in N$, takvo da je $|x_k| = \max_j |x_j| > 0$, pa za dato k primenjujući apsolutnu vrednost i nejednakost trougla na prethodnu jednakost imamo da je

$$|a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}||x_j|. \tag{3.12}$$

Uzmimo dalje $|x_l| = \max_{j \neq k} |x_j|$, uočimo da je $|x_l| \neq 0$, jer bi u suprotnom bilo $|x_j| = 0$, za svako $j \neq k$, odakle bi sledilo da je $|a_{kk}||x_k| \leq 0$, što je kontradikcija sa uslovom (3.10) i $|x_k| > 0$. Dakle, $|x_l| > 0$. Imamo za

$$i = l \quad |a_{ll}||x_l| \leq \sum_{j \in N \setminus \{l\}} |a_{lj}||x_j| \leq |x_k| r_l(A), \tag{3.13}$$

$$i = k \quad |a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}||x_j| \leq |x_l| r_k(A). \tag{3.14}$$

Množenjem nejednakosti (3.13) i (3.14) dobijamo

$$|a_{kk}||a_{ll}||x_k||x_l| \leq r_k(A)r_l(A)|x_k||x_l|,$$

odakle pošto je $|x_k||x_l| > 0$ sledi da je $|a_{kk}||a_{ll}| \leq r_k(A)r_l(A)$, što je kontradikcija sa (3.10).

□

Matrice koje zadovoljavaju uslov (3.10) nazivamo duplo striktno dijagonalno dominantne matrice, (duplo SDD). Primetimo da je svaka SDD matrica i duplo SDD. Da obratno ne mora važiti možemo videti iz matrice A_2 iz primera 3.2.2. Matrica A_2 je regularna matrica, koja nije SDD,a zadovoljava uslov (3.10), pa je duplo SDD. Kao što je već napomenuto, matrica nije SDD ukoliko bar jedna njena vrsta nije SDD. Kako bismo mogli primeniti teoremu 3.2.9, očigledno je da ne sme biti više od jedne vrste koja nije SDD, pri čemu je u tom slučaju potrebno proveriti $n-1$ nejednakosti, koje su kombinacije vrste koja nije SDD sa svim ostalim.

[7] Ostrowski

Definicija 3.2.10 *Proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je duplo dijagonalno dominantna (duplo DD), ako važi*

$$|a_{ii}||a_{jj}| \geq r_i(A)r_j(A) \text{ za svako } i, j \in N, i \neq j, \tag{3.15}$$

i ako za bar jedan par indeksa $k, l \in N$, $k \neq l$,

$$|a_{kk}||a_{ll}| > r_k(A)r_l(A). \tag{3.16}$$

Duplo dijagonalno dominantne matrice u opštem slučaju nisu regularne. Matrica A_4 iz primera 3.2.2 je singularna duplo dijagonalno dominantna. Ostrovski je dokazao sledeću teoremu o regularnosti za nerazložive duplo dijagonalno dominantne matrice, na isti način kao Olga Tauski za iDD.

Teorema 3.2.11 (Ostrovski) *Svaka nerazloživa matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ koja je duplo dijagonalno dominantna je regularna.*

Matrice koje ispunjavaju uslove definisane u teoremi 3.2.11 ćemo zvati duplo nerazloživo dijagonalno dominantne matrice (kraće duplo iDD). Ono što se javlja kao prirodno pitanje je da li se na ovaj način može konstruisati klasa regularnih matrica, uzimajući u obzir po tri, četiri ili više vrsta date matrice. Matrica A_4 iz primera 3.2.2 daje odgovor na prethodno pitanje, ($|(A_4)_{11}(A_4)_{22}(A_4)_{33}| = 1 > 0 = r_1(A_4)r_2(A_4)r_3(A_4)$, $det(A_4) = 0$). Ovaj kontraprimer je prvi dao Moris Njuman[8] [20].

Naredna proširenja su u vezi teorije grafova. Brualdi u svom radu [29] koji se bavi lokalizacijom karakterističnih korena, 1982. godine razvija povezanost teorije grafova i teorije matrica, uvodeći pojam ciklus u grafu matrice. Pojam ciklusa upravo predstavlja vezu koja dovodi do regularnosti matrice na način koji se odnosi na SDD i duplo SDD. U ovom radu će biti predstavljen Brualdijev rezultat, proširen radom Varge, koji je definisao pojam slabog ciklusa i formulisao odgovarajući rezultat regularnosti, kakav je danas opšte poznat [20].

U grafu matrice A, $\mathbb{G}(A)$, jak ciklus γ, dužine $p \geq 2$ je p-torka celih brojeva $\gamma := (i_1, i_2, \ldots, i_p)$, takvih da je $\overrightarrow{v_{i_j} v_{i_{j+1}}}$ usmerena grana, za svako $j = 1, 2, \ldots, p$, pri čemu je $i_{p+1} := i_1$. Drugim rečima, uređen skup $\gamma := (i_1, i_2, \ldots, i_p)$ se naziva jak ciklus grafa $\mathbb{G}(A)$ ako su elementi $a_{i_1 i_2}, a_{i_2 i_3}, \ldots, a_{i_p i_1}$ matrice A različiti od nule.

Za proizvoljan indeks $i \in N$, takav da kroz v_i ne prolazi nijedan jak ciklus, definišemo, bez obzira da li postoji petlja na datom čvoru u grafu $\mathbb{G}(A)$, slab ciklus $\gamma = (i)$. Na ovakav način dobijamo da za svako $i \in N$ najmanje jedan ciklus, slab ili jak prolazi kroz čvor v_i. Sa $C(A)$ označavamo skup svih ciklusa grafa $\mathbb{G}(A)$.

U skladu sa definicijom 3.2.5 matrica A može biti ili nerazloživa ili zapisana kao (3.6), gde su A_{11} i A_{22} kvadratne matrice i P permutaciona matrica dimenzije $n \times n$. Primenjujući isto rezonovanje na blokove A_{11} i A_{22}, kao i dalje na njihove dijagonalne blokove, uzastopnim permutacijama, na kraju dobijamo permutacionu matricu $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$ i pozitivan ceo broj m, $2 \leq m \leq n$, tako da

$$\tilde{P}^T A \tilde{P} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \ldots & R_{1m} \\ O & R_{22} & \ldots & R_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & R_{mm} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

gde je za svako $1 \leq i \leq m$

$$\begin{cases} R_{ii} \in \mathbb{C}^{p_i, p_i}, & \text{nerazloživa matrica sa } p_i \geq 2, \text{ ili} \\ R_{ii} = [a_{kk}] \in \mathbb{C}^{1,1}, & \text{matrica dimenzije } 1 \times 1 \text{ za neko } k \in N. \end{cases}$$

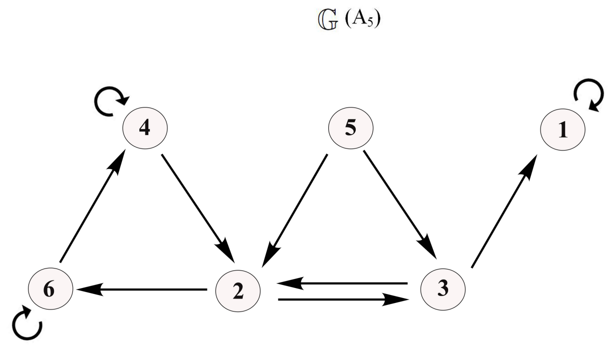
Prethodnu formu matrice nazivamo normalna redukovana forma matrice A. Permutaciona matrica $\tilde{P}$ se dobija kao proizvod pojedinačnih permutacionih matrica na svakom koraku postupka.

[8] Morris Newman

Primer 3.2.12

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad det(A_5) = 0$$

Na slici 3.2 je dat graf matrice A_5, $\mathbb{G}(A_5)$. Primetimo da u datom grafu postoje dva jaka ciklusa



Slika 3.2: Graf matrice A_5

$\gamma_1 = (2, 3)$ *i* $\gamma_2 = (4, 2, 6)$ *i dva slaba* $\gamma_3 = (1)$ *i* $\gamma_4 = (5)$.

Ukazujemo na činjenicu, u skladu sa (3.17) da je proizvoljna matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ regularna ako i samo ako su matrice R_{ii}, $1 \leq i \leq m$ regularne. Radi toga posmatraćemo umesto sume vrste matrice A, samo deo koji se nalazi na odgovarajućem dijagonalnom bloku. Definišemo redukovanu sumu vrste

$$\tilde{r}_i(A) := r_j(R_{kk}), \tag{3.18}$$

gde $i-$ta vrsta matrice A odgovara $j-$oj vrsti R_{kk} u formi (3.17). Ono što se javlja kao posledica takve definicije je da je $\tilde{r}_i(A) = 0$ ako i samo ako slab ciklus grafa $\mathbb{G}(A)$ prolazi kroz čvor v_i.

Teorema 3.2.13 (Brualdi) [9] *Za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ ako važi*

$$\prod_{i \in \gamma} |a_{ii}| > \prod_{i \in \gamma} \tilde{r}_i(A) \tag{3.19}$$

za svaki, bilo jak ili slab ciklus $\gamma \in C(A)$, gde je $\tilde{r}_i(A)$ dato sa (3.18)*, onda je matrica A regularna.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. neka je matrica koja zadovoljava navedene uslove singularna. U tom slučaju postoji dijagonalni blok, R_{kk}, u normalnoj redukovanoj formi (3.17), koji je singularan.

Najpre ćemo dokazati slučaj u kome je $R_{kk} = [a_{jj}] \in \mathbb{C}^{1,1}$. Tada je $\gamma = (j)$ slab ciklus, i prema (3.19), sledi da je $|a_{jj}| > 0$, što je kontradikcija sa činjenicom da je R_{kk} singularna.

Dakle, $R_{kk} = [\tilde{a}_{jj}] \in \mathbb{C}^{p_k,p_k}$ mora biti nerazloživa matrica dimenzije najmanje 2×2. Sa $\tilde{a}_{ij}$ označavamo elemente matrice A, koji su permutovani radi dobijanja normalne redukovane forme. Radi pojednostavnivanja i bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $R_{kk} = A$. Tada je $\tilde{r}_i(A) = r_i(A)$, za svako $i \in N$ i kako je A nerazloživa, kroz svaki indeks iz N prolazi najmanje jedan jak ciklus

[9] Ova teorema je uopštenje Varge na originalnu teoremu Brualdija

iz $C(A)$, što implicira da, prema (3.19), svaki dijagonalni elemenat matrice A je različit od 0. Sada kako je A singularna, postoji vektor $x = [x_1, x_2, \ldots x_n]^T \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, takav da je $Ax = 0$, tj.

$$-a_{ii}x_i = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} a_{ij}x_j, \quad (i \in N). \tag{3.20}$$

Neka je dalje $l_1 \in N$ takvo da je $|x_{l_1}| := \max\{|x_j| : j \in N\}$, dalje imamo kao posledicu $x \neq 0$, da je $|x_{l_1}| > 0$, pa iz (3.20) i nejednakosti trougla da

$$0 < |a_{l_1 l_1}||x_{l_1}| \leq \sum_{j \in N \setminus \{l_1\}} |a_{l_1 j}||x_j|. \tag{3.21}$$

Stoga, postoji $l_2 \in N \setminus \{l_1\}$, tako da je $|a_{l_1 l_2}||x_{l_2}| > 0$. Izaberimo l_2 tako da

$$|x_{l_2}| = \max\{|x_j| : |a_{l_1 j}| > 0 \text{ i } j \in N \setminus \{l_1\}\},$$

iz (3.20) imamo da

$$|a_{l_2 l_2}||x_{l_2}| \leq \sum_{j \in N \setminus \{l_2\}} |a_{l_2 j}||x_j| \leq |x_{l_1}| r_{l_2}(A). \tag{3.22}$$

Ponovo iz (3.22) zaključujemo da postoji $l_3 \in N \setminus \{l_2\}$, tako da je

$$|x_{l_3}| = \max\{|x_j| : |a_{l_2 j}| > 0 \text{ i } j \in N \setminus \{l_2\}\},$$

i time dobijamo

$$|a_{l_3 l_3}||x_{l_3}| \leq \sum_{j \in N \setminus \{l_3\}} |a_{l_3 j}||x_j| \leq |x_{l_2}| r_{l_3}(A). \tag{3.23}$$

Ponavljanjem ovog postupka dobijamo niz indeksa

$$l_1, l_2, \ldots, l_n, l_{n+1} \tag{3.24}$$

takav da, za svako $i = 1, 2, \ldots, n$, $l_i \neq l_{i+1}$, $|a_{l_i l_{i+1}}||x_{l_{i+1}}| > 0$ i

$$|a_{l_{i+1} l_{i+1}}||x_{l_{i+1}}| \leq \sum_{j \in N \setminus \{l_{i+1}\}} |a_{l_{i+1} j}||x_j| \leq |x_{l_i}| r_{l_{i+1}}(A). \tag{3.25}$$

Kako je skup indeksa matrice A kardinalnosti n, u nizu definisanom sa (3.24), bar jedan elemenat se mora ponoviti. Kako su svaka dva uzastopna indeksa različita, mora postojati podniz $l_k, l_{k+1}, \ldots, l_{k+p}$, gde je $p \geq 1$ i $l_{k+p+1} = l_k$. Množenjem nejednačina (3.25) za $i = k, k+1, \ldots, k+p$ i deljenjem sa $|x_{l_k}||x_{l_{k+1}}| \cdots |x_{l_{k+p}}| > 0$, dobijamo

$$|a_{l_k l_k}||a_{l_{k+1} l_{k+1}}| \cdots |a_{l_{k+p} l_{k+p}}| \leq r_{l_k}(A) r_{l_{k+1}}(A) \cdots r_{l_{k+p}}(A). \tag{3.26}$$

Ali, iz konstrukcije niza (3.24), sledi da je $|a_{l_i l_{i+1}}| \neq 0$, za svako $i = k, k+1, \ldots, k+p$. Tako, $\gamma = (k, k+1, \ldots, k+p) \in C(A)$ i (3.26) su u kontradikciji sa (3.19), što dovodi do zaključka da je matrica A regularna.

□

Matrice koje zadovoljavaju uslov (3.19) nazivamo Brualdi striktno dijagonalno dominantne matrice (Brualdi SDD).

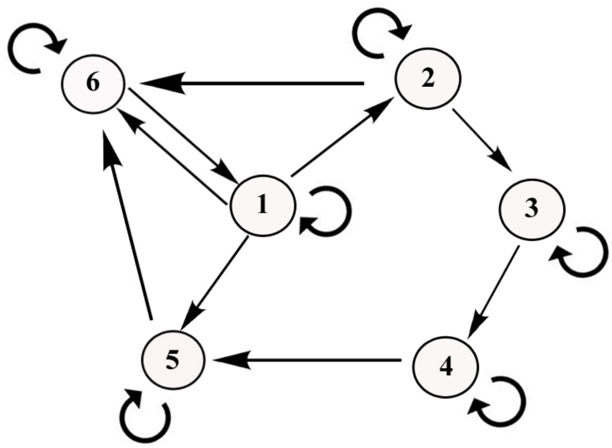
Lako je primetiti da je svaka SDD matrica i Brualdi SDD, dok za duplo SDD nije tako lako uočiti. Varga je u narednoj teoremi dokazao da je svaka duplo SDD, i Brualdi SDD matrica.

Teorema 3.2.14 *Svaka duplo striktno dijagonalno dominantna matrica je Brualdi striktno dijagonalno dominantna.*

Primer 3.2.15 *Posmatrajmo narednu matricu i njen graf sa slike 3.3*

$$A_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1/2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1/10} & \mathbf{1/10} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1/10 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{i} & \mathbf{1/2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & -i & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2+2i} & \mathbf{1/2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-2-2i} \end{bmatrix}, \quad det(A_6) = 0.275 + 8.1i$$

Primetimo da je data matrica nerazloživa jer postoji usmereni put za svaka dva različita čvora. Dati



Slika 3.3: Graf matrice A_6

graf sadrži četiri jaka ciklusa: $\gamma_1 = (1,2,3,4,5,6)$, $\gamma_2 = (1,2,6)$, $\gamma_3 = (1,5,6)$ *i* $\gamma_4 = (1,6)$. *Da bismo proverili da li je data matrica Brualdi striktno dijagonalno dominantna, treba da proverimo četiri nejednakosti:*

$$\gamma_1 : \quad \prod_{i=1}^{6} |a_{ii}| = 8 > \prod_{i=1}^{6} r_i(A) = 0.1925$$

$$\gamma_2 : |a_{11}||a_{22}||a_{66}| = \sqrt{8} > r_1(A)r_2(A)r_6(A) = 0.77$$

$$\gamma_3 : |a_{11}||a_{55}||a_{66}| = 8 > r_1(A)r_5(A)r_6(A) = 0.35$$

$$\gamma_4 : |a_{11}||a_{66}| = \sqrt{8} > r_1(A)r_6(A) = 0.7.$$

Kako je zadovoljen uslov iz teoreme 3.2.13 ova matrica je Brualdi striktno dijagonalno dominantna. Primetimo takođe da data matrica nije duplo striktno dijagonalno dominantna jer za par indeksa $i = 2$, $j = 4$ *uslov kojim su definisane duplo SDD matrice nije zadovoljen.*

Za proveravanje da li je matrica dimenzije $n \times n$ duplo SDD, potrebno je proveriti $\frac{n(n-1)}{2}$ nejednakosti, dok za proveravanje uslova pripadnosti klasi Brualdi striktno dijagonalno dominantnih broj nejednakosti zavisi od strukture grafa. U slučaju kada je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ takva da su joj svi vandijagonalni elementi različiti od nule, imamo da je izbor svaka dva čvora u grafu $\mathbb{G}(A)$ jak ciklus, pa je broj nejednakosti koje treba proveriti $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}(k-1)!$. Lako je uočiti da u tom slučaju, za svaki ciklus dužine 2, $\gamma = (i,j)$, nejednakost (3.19) postaje (3.10), što znači da su takve Brualdi SDD matrice, ustvari duplo SDD.

Definicija 3.2.16 *Proizvoljna matrica* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ *je Brualdi dijagonalno dominantna matrica (Brualdi DD) ako važi*

$$\prod_{i\in\gamma} |a_{ii}| \geq \prod_{i\in\gamma} r_i(A), \quad (\text{ za sve } \gamma \in C(A)), \tag{3.27}$$

gde striktna nejednakost važi za najmanje jedan ciklus $\gamma \in C(A)$.

Teorema 3.2.17 (Brualdi) *Svaka nerazloživa matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ koja je Brualdi dijagonalno dominantna je regularna.*

Matrice definisane u teoremi (3.2.17) nazivamo Brualdi nerazložive dijagonalno dominantne (Brualdi iDD) matrice.

Dalje navodimo proširenja klase regularnih matrica, koja su dobijena korišćenjem neke podele skupa indeksa.

Teorema 3.2.18 (Cvetković-Kostić-Varga) *Neka je data proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, gde je $n \geq 2$ i neka je $S \subseteq N$ neprazan podskup skupa indeksa. Ako, za svaka dva indeksa $i \in S$ i $j \in \bar{S} := N \setminus S$, važi*

$$|a_{ii}| > r_i^S(A),\ i \tag{3.28}$$

$$(|a_{ii}| - r_i^S(A))(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)) > r_i^{\bar{S}}(A) r_j^S(A), \tag{3.29}$$

gde je $r_i^S(A) := \sum_{j \in S \setminus \{i\}} |a_{ij}|$, tada je A regularna.

Napomena 3.2.19 *Pre dokazivanja ove teoreme, primetimo da za neko $i \in S$ kada primenimo* (3.29) *za svako $j \in \bar{S}$ dobijamo*

$$|a_{jj}| > r_j^{\bar{S}}(A) \quad (j \in \bar{S}) \tag{3.30}$$

Dakle, uslov (3.30) *je potreban uslov i on je implicitno izražen u okviru* (3.28) *i* (3.29)*. Iz istog razloga, radi proveravanja da li uslovi iz ove teoreme važe, dovoljno je proveriti da li uslov* (3.28) *važi za bar jedan $i \in S$, umesto za sve.*

Dokaz: Najpre, u slučaju kada je $S = N$, uslov (3.29) nestaje, pri čemu uslov (3.28) postaje (3.2), što znači da je matrica SDD, pa je samim tim i regularna. Dalje, pretpostavimo da je S neprazan podskup N, $S \subsetneq N$, tj. i njegov komplement $\bar{S}$ je neprazan takođe.
Pretpostavimo dalje da su zadovoljeni uslovi iz teoreme, pri čemu je data matrica A singularna. Tada postoji vektor $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \neq 0$, takav da je $Ax = 0$, odnosno važi

$$-a_{ii}x_i = \sum_{j \in S \setminus \{i\}} a_{ij}x_j + \sum_{j \in \bar{S} \setminus \{i\}} a_{ij}x_j, \quad (i \in N). \tag{3.31}$$

Pošto su S i $\bar{S}$ neprazni, možemo uzeti $k \in S$, takvo da je $|x_k| = \max\{|x_i| : i \in S\}$, i $l \in \bar{S}$, takvo da je $|x_l| = \max\{|x_j| : j \in \bar{S}\}$. Za $i = k$ u (3.31), primenjujući apsolutnu vrednost i nejednakost trougla, dobijamo

$$|a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| r_k^S(A) + |x_l| r_k^{\bar{S}}(A), \quad \text{tj.} \tag{3.32}$$

$$(|a_{kk}| - r_k^S(A))|x_k| \leq r_k^{\bar{S}}(A)|x_l|. \tag{3.33}$$

Slično, dobijamo

$$(|a_{ll}| - r_l^{\bar{S}}(A))|x_l| \leq r_l^S(A)|x_k|. \tag{3.34}$$

Pošto je $x \neq 0$, važi bar jedno od $|x_k| > 0$ ili $|x_l| > 0$. Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $|x_k| > 0$. Tada, na osnovu (3.28) i (3.29) imamo da je i $|x_l| > 0$. Stoga, nakon množenja (3.33) i (3.34) i deljenja sa $|x_k||x_l| > 0$, dobijamo kontradikciju sa (3.29). Dakle, matrica A je regularna.

□

U literaturi se najčešće matrice iz prethodne teoreme nazivaju S-striktno dijagonalno dominantne, u oznaci S-SDD, gde je skup S fiksiran skup indeksa za koje važi (3.28) i (3.29). Kako je S proizvoljan neprazan podskup indeksa, možemo definisati veću klasu matrica dopuštajući da S varira [20]. Rezultat je klasa matrica koja je poznata u literaturi kao $\mathcal{S}$-SDD. Ovde ćemo kao i u radu [20] ovakve matrice nazivati Cvetković-Kostić-Varga, u oznaci CKV-SDD matrice. Dakle, matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je CKV-SDD matrica ako i samo ako postoji neprazan skup indeksa S takav da za svako $i \in S$ i svako $j \in \bar{S}$ važe uslovi (3.28) i (3.29).

Naredna definicija i teorema su preuzete iz [30], teorema može biti dokazana kao i teorema 3.2.8, mada je u radu [30] dokazana tehnikom skaliranja, o kojoj će u nastavku biti reči.

Definicija 3.2.20 *Neka je dat proizvoljan neprazan podskup $S \subset N$, proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ nazivamo S-dijagonalno dominantnom, (S-DD), ako važi*

$$|a_{ii}| \geq r_i^S(A), \quad (\text{ za sve } i \in S,) \quad i \tag{3.35}$$

$$(|a_{ii}| - r_i^S(A))(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)) \geq r_i^{\bar{S}}(A) r_j^S(A), \quad (\text{ za sve } i \in S \text{ i za sve } j \in \bar{S}), \tag{3.36}$$

pri čemu stroga nejednakost važi za bar jedan par indeksa $i \in S$, i $j \in \bar{S}$. Ako je matrica S-DD za neki neprazni podskup $S \subset N$, onda je i CKV-dijagonalno dominantna, (CKV-DD).

Teorema 3.2.21 (Cvetković-Kostić) *Svaka nerazloživa matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, koja je S-dijagonalno dominantna je regularna, i stoga, svaka nerazloživa matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ koja je CKV-dijagonalno dominantna je regularna.*

Matrice iz prethodne teoreme nazivamo S-nerazloživo dijagonalno dominantnim, (S-iDD) i CKV-nerazloživo dijagonalno dominantnim.

Proširenja klase regularnih matrica uvođenjem sume kolone.

Kako znamo da je matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ regularna ako i samo ako je njena transponovana $A^T \in \mathbb{C}^{n,n}$ regularna, navešćemo direktnu posledicu Levi-Deplank teoreme.

Teorema 3.2.22 *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ proizvoljna matrica. Ako važi*

$$|a_{ii}| > c_i(A) := r_i(A^T) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ji}| \text{ za svako } i \in N, \tag{3.37}$$

tada je matrica A regularna.

Matrice koje zadovoljavaju uslov (3.37) nazivamo striktno dijagonalno dominantnim po kolonama.

Posledica 3.2.23 *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ proizvoljna matrica. Ako važi*

$$|a_{ii}| > r_i(A) \text{ za svako } i \in N \quad \text{ili} \quad |a_{ii}| > c_i(A), \text{ za svako } i \in N, \tag{3.38}$$

tada je matrica A regularna.

Teorema 3.2.24 (Ostrovski) *Neka je data proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in C^{n,n}$, pri čemu je $n \geq 2$. Ako postoji parametar $\alpha \in [0, 1]$, takav da važi*

$$|a_{ii}| > \alpha r_i(A) + (1 - \alpha) c_i(A), \text{ za svako } i \in N \tag{3.39}$$

tada je A regularna.

Matrice koje zadovoljavaju uslov (3.39) se nazivaju α_1-matrice, s tim da se u literaturi često koristi naziv matrice Ostrovskog.

Teorema 3.2.25 (Ostrovski) *Neka je data proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in C^{n,n}$, pri čemu je $n \geq 2$. Ako postoji parametar $\alpha \in [0, 1]$, takav da važi*

$$|a_{ii}| > (r_i(A))^{\alpha}(c_i(A))^{1-\alpha}, \text{ za svako } i \in N \tag{3.40}$$

tada je matrica A regularna.

Matrice koje zadovoljavaju uslov (3.40) se nazivaju α_2-matrice, s tim da se i za njih u literaturi često koristi naziv matrice Ostrovskog. Mi ćemo koristiti termine α_1- striktno dijagonalno dominantne matrice i α_2- striktno dijagonalno dominantne matrice.

Za različite vrednosti parametra α, dobijamo različite uslove za regularnost u oba slučaja. Primetimo da za $\alpha = 1$ uslovi (3.39) i (3.40) postaju (3.2), dok se za $\alpha = 0$ transformišu u (3.37). Dakle, α_1 i α_2 matrice uključuju SDD i SDD po vrstama matrice.

Primer 3.2.26

$$A_7 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad det(A_7) = 0.5$$

Matrica A_7 je regularna matrica, koja nije SDD, ali jeste SDD po kolonama, pa je i α_1-SDD za $\alpha = 0$ i α_2-SDD za $\alpha = 0$.
Matrica A_2 iz primera 3.2.2 je α_2-SDD matrica za $\alpha = 0.5$.

Ono što se dalje javlja kao problem pri određivanju da li je neka matrica jednog od ova dva tipa je da nije jednostavno naći parametar α za koji će matrice ispunjavati uslove za regularnost ((3.39) ili (3.40)). U nastavku izlažemo dva pristupa za rešavanje problema pronalaženja parametra α razvijena u radovima [31] i [32].

Primetimo da regularnost α_1-SDD matrica sledi iz regularnosti α_2-SDD matrica, zbog nejednakosti koja prikazuje vezu između aritmetičke i geometrijske sredine, tj.

$$\alpha a + (1 - \alpha)b \geq a^{\alpha}b^{1-\alpha}, \tag{3.41}$$

gde su $a, b \geq 0$ i $0 \leq \alpha \leq 1$.

Za datu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, u slučaju kada je $r_i(A) = c_i(A)$, uslovi (3.39) i (3.40) postaju $|a_{ii}| > r_i(A) = c_i(A)$, nezavisno od vrednosti parametra α. Osim ove, postoje još dve mogućnosti, tj. $r_i(A) > c_i(A)$ ili $r_i(A) < c_i(A)$.
Prema tome, podelimo skup indeksa N na tri podskupa:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(A) &:= \{i \in N : \quad r_i(A) > c_i(A)\}, \\ \mathcal{C}(A) &:= \{i \in N : \quad r_i(A) < c_i(A)\}, \\ \mathcal{E}(A) &:= \{i \in N : \quad r_i(A) = c_i(A)\}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

i za svako $i \in N \setminus \mathcal{E}(A)$, definišimo veličinu

$$\phi_i^{(1)}(A) = \frac{|a_{ii}| - c_i(A)}{r_i(A) - c_i(A)} \in \mathbb{R}, \tag{3.43}$$

koju ćemo koristiti za dobijanje skupa izvodljivih vrednosti parametra α.
Na osnovu

$$U^{(1)}(A) = (-\infty, \min_{i \in \mathcal{R}(A)} \phi_i^{(1)}(A)) \quad \bigcap \quad (\max_{i \in \mathcal{C}(A)} \phi_i^{(1)}(A), +\infty), \tag{3.44}$$

gde, po konvenciji, uzimamo da je

$$\min_{i\in\mathcal{R}(A)} \phi_i^{(1)}(A) = +\infty, \text{ ako je } \mathcal{R}(A) = \emptyset, \text{ i } \max_{i\in\mathcal{C}(A)} \phi_i^{(1)}(A) = -\infty, \text{ ako je } \mathcal{C}(A) = \emptyset,$$

možemo dati sledeću karakterizaciju klase α_1-SDD matrica.

Teorema 3.2.27 *Proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je α_1-SDD matrica ako i samo ako važe sledeća dva uslova:*

(i) $U^{(1)}(A) \cap [0, 1] \neq \emptyset,$

(ii) $|a_{ii}| > r_i(A),$ *za svako* $i \in \mathcal{E}(A).$

Dokaz ove teoreme se može naći u radu [20] i sličan pristup se može koristiti za karakterizaciju α_2-SDD matrica.

Za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, za svako $i \in N \setminus \mathcal{E}(A)$, definišimo veličinu

$$\phi_i^{(2)}(A) = \frac{\log |a_{ii}| - \log c_i(A)}{\log r_i(A) - \log c_i(A)} \in \mathbb{R}, \tag{3.45}$$

i skup

$$U^{(2)}(A) = (-\infty, \min_{i\in\mathcal{R}(A)} \phi_i^{(2)}(A)) \quad \bigcap \quad (\max_{i\in\mathcal{C}(A)} \phi_i^{(2)}(A), +\infty), \tag{3.46}$$

gde, po konvenciji, uzimamo

$$\min_{i\in\mathcal{R}(A)} \phi_i^{(2)}(A) = +\infty, \text{ ako je } \mathcal{R}(A) = \emptyset, \text{ i } \max_{i\in\mathcal{C}(A)} \phi_i^{(2)}(A) = -\infty, \text{ ako je } \mathcal{C}(A) = \emptyset,$$

Teorema 3.2.28 *Neka je data proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$. A je α_2-SDD matrica ako i samo ako važe sledeća dva uslova:*

(i) $U^{(2)}(A) \cap [0, 1] \neq \emptyset,$

(ii) $|a_{ii}| > r_i(A),$ *za svako* $i \in \mathcal{E}(A).$

Naredna teorema, koja je preuzeta iz [31] je pogodnija za primenu u teoriji lokalizacije karakterističnih korena.

Teorema 3.2.29 *Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, za $n \geq 2$, je α_1-SDD matrica ako i samo ako važe sledeća dva uslova:*

(i) $|a_{ii}| > \min\{r_i(A), c_i(A)\}$ *za svako* $i \in N,$

(ii) $\dfrac{|a_{ii}| - c_i(A)}{r_i(A) - c_i(A)} > \dfrac{c_j(A) - |a_{jj}|}{c_j(A) - r_j(A)},$ *za svako $i \in \mathcal{R}$, i svako $j \in \mathcal{C}$.*

Definišimo

$$\mathcal{R}^*(A) := \mathcal{R}(A) \setminus \{i : c_i(A) = 0\}, \tag{3.47}$$

i

$$\mathcal{C}^*(A) := \mathcal{C}(A) \setminus \{i : r_i(A) = 0\}, \tag{3.48}$$

koje ćemo iskoristiti u sličnoj karakterizaciji za α_2 matrice.

Teorema 3.2.30 *Neka je data proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$. A je α_2-SDD matrica ako i samo ako važe sledeća dva uslova*

(i) $|a_{ii}| > \min\{r_i(A), c_i(A)\}$ *za svako* $i \in N,$

(ii) $\log_{\frac{r_i(A)}{c_i(A)}} \dfrac{|a_{ii}|}{c_i(A)} > \log_{\frac{c_j(A)}{r_j(A)}} \dfrac{c_j(A)}{|a_{jj}|},$ *za svako $i \in \mathcal{R}^*(A)$, i svako $j \in \mathcal{C}^*(A)$.*

3.2.3 Generalizovane dijagonalno dominantne matrice

Pojam generalizovane dijagonalno dominantne matrice datira iz ranih sedamdesetih, kada je teorija konvergencije iterativnih metoda bila atraktivna u istraživanju. U radu [33] je ovaj pojam korišćen u smislu kako ga i danas upotrebljavamo. Autori u [33] su definisali da je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ generalizovana dijagonalno dominantna ako postoji vektor $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, takav da je

$$|a_{ii}|x_i > \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}|x_j \quad (i \in N). \tag{3.49}$$

Ovaj pojam uopštava pojam SDD matrica, koje su specijalan slučaj (3.49), za $x = [1, 1, \ldots, 1]^T$. Ova ideja se može naći u poznatom radu Geršgorina, [27], objavljenom 1931. godine, koji se bavio lokalizacijom karakterističnih korena. Osnovna ideja je u tome da počevši od SDD matrice za koju znamo da je regularna, množenjem iste sa desne strane regularnom dijagonalnom matricom, dobijamo takođe regularnu matricu, pri čemu se nejednakosti koje opisuju SDD matrice (po vrstama) mogu zapisati kao (3.49).
Generalizovane dijagonalno dominantne matrice su odličan alat u teoriji M-matrica. M-matrice (Minkovski matrice) potiču iz rada Ostrovskog, koji je započet rezultatom regularnosti Minkovskog, koji se odnosi na klasu matrica koje imaju sve glavne minore pozitivne. Veliki broj poznatih matematičara su dali ekvivalentne definicije M-matrica i svoj doprinos u istraživanju. Peron-Frobenijus teorija nenegativnih matrica, pozitivna definitnost, pozitivna stabilnost i dijagonalna dominacija su samo neke od oblasti koje su povezane sa datim istraživanjima. Iz rada [32] izdvajamo sledeću definiciju.

Definicija 3.2.31 *Realna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ je regularna M-matrica ako važe sledeći uslovi:*

1. $a_{ii} > 0$, *za svako* $i \in N$
2. $a_{ij} \leq 0$, *za svako* $i, j \in N, i \neq j$
3. *A je regularna, tj. postoji* A^{-1}
4. A^{-1} *je nenegativna, tj.* $A^{-1} \geq O$.

Ova klasa matrica dolazi iz ekonomskog modela u obliku Havkins-Simon uslova. U matematici razvijena je primena u nalaženju granica karakterističnih korena nenegativnih matrica, uslova konvergencije za iterativne metode za rešavanje sistema linearnih jednačina, dok je i u ekonomiji ova klasa našla široku primenu. Osim u matematici i ekonomiji, različite vrste primene klase M-matrica su u inženjerstvu, ekologiji, farmaceutskom modelovanju, itd.
U nastavku se bavimo dijagonalnom dominacijom, kao aspektom M-matrica, postavljanjem okvira narednim definicijama i teoremama.

Definicija 3.2.32 *Neka je data proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$. Ako postoji pozitivan vektor $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, takav da je AX SDD matrica, gde je $X := diag(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tada je matrica A generalizovano dijagonalno dominantna, u oznaci GDD matrica.*

Veza teorije M-matrica i prethodne definicije je prvi put publikovana u radu [34]. U tom radu je dokazano da matrica koja ispunjava uslove (1.) i (2.) iz definicije 3.2.31 je M-matrica ako i samo ako je generalizovana dijagonalno dominantna. Sledi definicija u slučaju kada je A kompleksna matrica.

Definicija 3.2.33 *Za datu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ definišemo njenu pridruženu matricu $\langle A \rangle := [m_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ sa*

$$m_{ij} := \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j \\ -|a_{ij}|, & \text{za ostalo.} \end{cases} \tag{3.50}$$

Definicija 3.2.34 *Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regularna H-matrica ako je njena pridružena matrica M-matrica, tj. ako je $\langle A \rangle$ regularna i $\langle A \rangle^{-1} \geq O$.*

Teorema 3.2.35 (Fiedler-Pták) *Proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regularna H-matrica ako i samo ako je generalizovana dijagonalno dominantna, tj. ako postoji pozitivna dijagonalna matrica X, takva da je AX striktno dijagonalno dominantna.*

Dakle, klasa regularnih H-matrica i GDD matrice su isto, i označavaćemo je sa $\mathbb{H}$.
Koristićemo i drugu karakterizaciju regularnih H-matrica, koja se može naći u malo drugačijem obliku. Bjuvens i Njuman dokazuju teoremu da je proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ regularna H-matrica ako i samo ako postoji pozitivna dijagonalna matrica X takva da je AX nerazloživa dijagonalno dominantna. Klasa H-matrica (sa kompleksnim elementima) ima u nazivu slovo H po Adamaru (Hadamard). Dakle, lako je primetiti da je klasa SDD matrica potklasa $\mathbb{H}$ matrica, pa se javlja pitanje da li su i ostale klase regularnih matrica koje su navedene u ovom radu potklase klase $\mathbb{H}$.

Definicija 3.2.36 *Neka je $\mathbb{K}$ neprazna klasa kvadratnih matrica proizvoljne veličine. Ako je klasa $\mathbb{K}$ takva da važi*

- *za neko $A \in \mathbb{K}$, dijagonalni elementi matrice A su različiti od nule,*
- *za neko $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $A \in \mathbb{K}$ ako i samo ako $|A| \in \mathbb{K}$, gde je $|A| = [|a_{ij}|]$,*
- *za neko $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $A \in \mathbb{K}$ implicira da, za svako B takvo da je $\langle B\rangle \geq \langle A\rangle$, $B \in \mathbb{K}$,*

onda kažemo da je $\mathbb{K}$ klasa matrica dijagonalno dominantnog tipa, (DD tipa).

Primetimo da sve klase regularnih matrica ispunjavaju uslove prethodne teoreme, pa su one klase DD tipa.

Lema 3.2.37 *Ako je $\mathbb{K}$ klasa matrica dijagonalno dominantnog tipa, tada za bilo koju matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $A \in \mathbb{K}$ imamo da $|A| + D \in \mathbb{K}$, za svaku nenegativnu dijagonalnu matricu D.*

Dokaz: Neka je data $A \in \mathbb{K}$ i proizvoljna nenegativna matrica D, tada $|A| \in \mathbb{K}$, i očigledno važi $\langle |A| + D\rangle = \langle A\rangle + D \geq \langle A\rangle$. Na osnovu trećeg uslova u definiciji 3.2.36 imamo da $|A| + D \in \mathbb{K}$.

□

Teorema 3.2.38 *Ako je $\mathbb{K}$ klasa matrica dijagonalno dominantnog tipa, koja je klasa regularnih matrica, tada je ona potklasa regularnih H matrica, tj. $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{H}$.*

Dokaz: Neka je data proizvoljna matrica $A \in \mathbb{K}$. Kako je $|\langle A\rangle| = |A| \in \mathbb{K}$, imamo da $\langle A\rangle \in \mathbb{K}$, pa je stoga $\langle A\rangle$ regularna. Trebamo pokazati da je $\langle A\rangle^{-1}$ nenegativna. Zapišimo $\langle A\rangle = D_A - B_A$, gde je $D_A := diag(\langle A\rangle) = diag(|a_{11}|, |a_{22}|, \ldots, |a_{nn}|)$. D_A je dijagonalna matrica sa pozitivnim dijagonalnim elementima, pa možemo pisati $\langle A\rangle = D_A(I_n - D_A^{-1}B_A)$, što implicira da je $I_n - D_A^{-1}B_A$ regularna, i $\langle A\rangle^{-1} = (I_n - D_A^{-1}B_A)^{-1}D_A^{-1}$.
Pokazaćemo da je $\rho(D_A^{-1}B_A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(D_A^{-1}B_A)\} < 1$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji $\lambda \in \sigma(D_A^{-1}B_A)$, takvo da je $|\lambda| \geq 1$. Tada je $\lambda I_n - D_A^{-1}B_A = D_A^{-1}(\lambda D_A - B_A)$ singularna. Ali, kako je $|\lambda| \geq 1$, možemo pisati $|\lambda D_A - B_A| = |\lambda|D_A + B_A = D_A + B_A + (|\lambda| - 1)D_A = |A| + D$, gde je $D := (|\lambda| - 1)D_A$ nenegativna dijagonalna matrica. Stoga, $\lambda D_A - B_A \in \mathbb{K}$, pa je regularna, što je kontradikcija.
Kako je $\rho(D_A^{-1}B_A) < 1$, geometrijski red $\sum_{k=0}^{\infty}(D_A^{-1}B_A)^k$ konvergira ka $(I_n - D_A^{-1}B_A)^{-1}$. Kako je $D_A^{-1}B_A$ nenegativna, i granica reda je nenegativna, čime je dokaz završen.

□

Primenom prethodne teoreme na klase matrica prezentovane u prethodnim odeljcima ove glave imamo da su uopštenja SDD klase data teoremama 3.2.8 (nerazloživo dijagonalno dominantne), 3.2.9 (duplo striktno dijagonalno dominantne), 3.2.11 (duplo nerazloživo dijagonalno dominantne), 3.2.13 (Brualdi striktno dijagonalno dominantne), 3.2.17 (Brualdi nerazloživo dijagonalno dominantne), 3.2.24

(α_1-striktno dijagonalno dominantne), 3.2.25 (α_2-striktno dijagonalno dominantne), 3.2.18 (S-striktno dijagonalno dominantne, odnosno Cvetković-Kostić-Varga striktno dijagonalno dominantne) i 3.2.21 (S-nerazloživo dijagonalno dominantne, odnosno Cvetković-Kostić-Varga nerazloživo dijagonalno dominantne) zapravo unutar klase H-matrica.

3.2.4 Tehnika skaliranja

Po definiciji, GDD matrice su dobijene iz SDD matrica, množenjem sa desne strane proizvoljnom pozitivnom dijagonalnom matricom. Kako svaki dijagonalni elemenat matrice X množi odgovarajuću kolonu matrice A u matrici AX, ova operacija se naziva skaliranje. Matricu AX nazivamo skalirana matrica, dok matricu X nazivamo skalirajućom matricom.

Usvojimo dodatnu notaciju, neophodnu za razumevanje daljeg teksta.
Neka je sa $\mathbb{D}$ označen skup svih pozitivnih dijagonalnih matrica, tj.

$$\mathbb{D} := \{X = diag(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n,n} : x_i > 0, i \in N, \text{ i } n \in \mathbb{N}\}. \tag{3.51}$$

Za proizvoljnu potklasu GDD matrica, $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{H}$, sa $\mathbb{X}^{\mathbb{K}}$ označavamo familiju svih dijagonalnih matrica koje skaliraju matrice iz $\mathbb{K}$ u SDD matrice, tj.

$$\mathbb{X}^{\mathbb{K}} := \{X \in \mathbb{D} : AX \text{ je SDD, za neko } A \in \mathbb{K}\}. \tag{3.52}$$

Sa druge strane, možemo početi sa proizvoljnom nepraznom familijom pozitivnih dijagonalnih matrica $X \in \mathbb{D}$, i definisati $\mathbb{K}^{\mathbb{X}}$ kao klasu svih matrica koje su skalirane matricom iz $\mathbb{X}$ u SDD, tj.

$$\mathbb{K}^{\mathbb{X}} := \{A \in \mathbb{H} : AX \text{ je SDD, za neko } X \in \mathbb{X}\}. \tag{3.53}$$

Lako je pokazati da je $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{X}^{\mathbb{K}^{\mathbb{X}}}$ i $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{X}^{\mathbb{K}}}$. Očigledno je da jednakost ne važi, kako je $\mathbb{K}^{\mathbb{X}^{\{I\}}} = \mathbb{H}$, i $\{I\} \subsetneq \mathbb{X}^{\mathbb{K}^{\{I\}}}$.
Imamo da postoje skalirajuće matrice za svaku od pomenutih klasa. U radu [35] je dokazana teorema 3.2.18 primenom tehnike skaliranja. Pošto ova tehnika ima veliki značaj u primenama, u nastavku prikazujemo dokaz.

Dokaz teoreme 3.2.18
Slučaj kada je $S = N$ je očigledan. Pretpostavimo dalje da su S i $\bar{S}$ neprazni podskupovi skupa indeksa N. Konstruišimo dijagonalnu matricu $X = diag(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i > 0$, za svako $i \in N$, koja skalira matricu A u SDD matricu. Za elemente matrice X, izaberimo:

$$x_i = \begin{cases} \gamma > 0, & \text{za } i \in S, \\ 1, & \text{za } i \in \bar{S}, \end{cases} \tag{3.54}$$

gde je $\gamma > 0$ proizvoljno.

Elementi matrice $AX \in \mathbb{C}^{n,n}$ su tada dati sa

$$a_{ij} = \begin{cases} \gamma a_{ij}, & \text{za } j \in S, \\ a_{ij}, & \text{za } j \in \bar{S}, \end{cases} \tag{3.55}$$

pa su iz toga sume vrsta date sa $r_l(AX) = r_l^S(AX) + r_l^{\bar{S}}(AX) = \gamma r_l^S(A) + r_l^{\bar{S}}(A)$, za svako $l \in N$. Dakle, AX je SDD matrica ako i samo ako

$$\begin{cases} \gamma|a_{ii}| > \gamma r_i^S(A) + r_i^{\bar{S}}(A), & \text{za svako } i \in S, \text{ i} \\ |a_{jj}| > \gamma r_j^S(A) + r_j^{\bar{S}}(A), & \text{za svako } j \in \bar{S}, \end{cases}$$

ili, ekvivalentno

$$\begin{cases} \gamma(|a_{ii}| - r_i^S(A)) > r_i^{\bar{S}}(A), & \text{za svako } i \in S, \text{ i} \\ |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) > \gamma r_j^S(A), & \text{za svako } j \in \bar{S}. \end{cases}$$

Ali, na osnovu (3.28) i (3.30), imamo da je AX SDD matrica ako i samo ako je

$$\frac{r_i^{\bar{S}}(A)}{(|a_{ii}| - r_i^S(A))} < \gamma, \text{ za svako } i \in S, \tag{3.56}$$

$$\gamma < \frac{|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)}{r_j^S(A)}, \text{ za svako } j \in \bar{S}, \text{ takvo da je } r_j^S(A) \neq 0, \tag{3.57}$$

i

$$|a_{jj}| > r_j^{\bar{S}}(A), \text{ za svako } j \in \bar{S}, \text{ takvo da je } r_j^S(A) = 0. \tag{3.58}$$

Kako (3.56) i (3.57) daju donju i gornju granicu za parametar γ, možemo uzeti najveću donju i najmanju gornju granicu, koje nas vode do intervala izvodljivih vrednosti za γ, koje obezbeđuje da je matrica AX SDD matrica:

$$0 \leq \alpha_S(A) := \min_{i \in S} \frac{r_i^{\bar{S}}(A)}{(|a_{ii}| - r_i^S(A))} < \gamma < \max_{j \in \bar{S}, r_j^S(A) \neq 0} \frac{|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)}{r_j^S(A)} =: \beta_S(A). \tag{3.59}$$

Definišemo $\beta_S(A) = +\infty$ u slučaju kada je $r_j^S(A) = 0$, za svako $j \in \bar{S}$.
Uz (3.28), uslov (3.29) je ekvivalentan činjenici da je $\alpha_S(A) < \beta_S(A)$. Stoga možemo izabrati takvo $\gamma > 0$, da prema (3.59), AX bude SDD. Kako su AX i X regularne, sledi da je i A regularna.

□

Na osnovu ove ideje, prikazaćemo teoremu karakterizacije S-SDD i CKV-SDD matrica, čiji dokaz uključuje prethodni dokaz teoreme 3.2.18 i dodatni rezultat dobijen u [36].

Teorema 3.2.39 *Za neprazan skup $S \subseteq N$, definišimo*

$$\mathbb{X}_S := \{X = diag(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{D} : x_i = x_k, \text{ za svako } i, k \in S, \text{ i } x_j = 1, \text{ za svako } j \in \bar{S}\}, \tag{3.60}$$

i

$$\mathbb{X}_{CKV} := \bigcup_{S \subseteq N} \mathbb{X}_S. \tag{3.61}$$

Tada, za proizvoljan, neprazan $S \subseteq N$, $\mathbb{K}^{X_S}$ i $\mathbb{K}^{X_{CKV}}$ su klase S-striktno dijagonalno dominantnih matrica i CKV-striktno dijagonalno dominantnih matrica, respektivno. Štaviše, $\mathbb{X}^{\mathbb{K}^{\mathbb{X}_S}} = \mathbb{X}_S$ i $\mathbb{X}^{\mathbb{K}^{\mathbb{X}_{CKV}}} = \mathbb{X}_{CKV}$.

3.3 Lokalizacija karakterističnih korena

Jedna od najpopularnijih primena dijagonalne dominacije je primena u teoriji lokalizacije karakterističnih korena. U ovom odeljku će biti prikazana Geršgorinova teorema, kao i nekoliko njenih uopštenja u vidu lokalizacionih oblasti matrice. Pored toga biće opisana veza potklasa H-matrica sa pomenutim lokalizacionim oblastima. Na osnovu klasa regularnih matrica pominjanih u prethodnim odeljcima stvorene su različite lokalizacione oblasti. Kako je u mnogim slučajima dovoljno poznavati samo oblasti lokalizacije, a ne i tačne vrednosti karakterističnih korena, u cilju nam je da spoznamo što veći skup lokalizacionih oblasti.

3.3.1 Geršgorinove teoreme

Skup karakterističnih korena proizvoljne kvadratne matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ nazivamo spektar i označavamo sa $\sigma(A)$, tj.

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : det(\lambda I_n - A) = 0\}. \tag{3.62}$$

Definišimo dodatno i

$$\begin{cases} \Gamma_i(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i(A)\}, \quad (i \in N) \\ \Gamma(A) := \bigcup_{i \in N} \Gamma_i(A). \end{cases} \tag{3.63}$$

Naredno tvrđenje je Geršgorinova teorema, koja je u nastavku data, kako bi bila u skladu sa usvojenom notacijom, kao u radu [20].

Teorema 3.3.1 (Prva Geršgorinova teorema) *Neka je data proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ i neka je λ karakteristični koren. Tada postoji indeks $k \in N$, takav da važi*

$$|\lambda - a_{kk}| \leq r_k(A), \tag{3.64}$$

odakle imamo da $\lambda \in \Gamma_k(A)$, pa stoga i $\lambda \in \Gamma(A)$. Kako je $\lambda \in \sigma(A)$ proizvoljno, kao posledicu imamo da je

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma(A). \tag{3.65}$$

Dokaz: Neka je dat karakteristični koren $\lambda \in \sigma(A)$ i neka je $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ odgovarajući karakteristični vektor, tj. $Ax = \lambda x$. Dakle, tada je

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j = \lambda x_i \quad (i \in N),$$

ili ekvivalentno

$$(\lambda - a_{ii}) x_i = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} a_{ij} x_j, \quad (i \in N). \tag{3.66}$$

Kako je $x \neq 0$ postoji indeks $k \in N$, tako da je $0 < |x_k| = \max\{|x_i| : i \in N\}$. Stoga, (3.66) uz nejednakost trougla implicira da je

$$|\lambda - a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| r_k(A).$$

Konačno, deljenjem poslednje nejednakosti sa $|x_k| > 0$, dobijamo da važi (3.64). Dakle, $\lambda \in \Gamma_k(A)$, pa samim tim i $\lambda \in \Gamma(A)$. Kako je λ proizvoljan karakteristični koren, (3.65) važi.

$\square$

Skup $\Gamma_i(A)$ nazivamo $i-$ti Geršgorinov krug matrice A, i on je zatvoren krug u kompleksnoj ravni, sa centrom u a_{ii} i poluprečnikom $r_i(A)$. Skup $\Gamma(A)$ je unija svih Geršgorinovih krugova, pa je samim tim zatvoren i ograničen, odnosno kompaktan podskup $\mathbb{C}$ i sadrži spektar date matrice.

Primetimo da u prethodnom dokazu, za $\lambda = 0$ dobijamo dokaz Levi-Deplank teoreme. Ove dve teoreme su veoma bliske, tj. postoji ekvivalencija između Geršgorinove i Levi-Deplank teoreme, koja je istaknuta u knjizi Varge [37].

Pretpostavimo da važi Geršgorinova teorema, u tom slučaju možemo pokazati da je svaka SDD matrica regularna, odnosno da važi teorema Levi-Deplank. Pretpostavljajući da je svaka SDD matrica regularna možemo dokazati da su svi karakteristični koreni proizvoljne matrice unutar Geršgorinovog skupa. Ideja je jednostavna, zasniva se na činjenici da je kvadratna matrica singularna ako i samo ako je bar jedan karakteristični koren jednak nuli.

Pretpostavimo dakle da važi Geršgorinova teorema i uzmimo proizvoljnu SDD matricu, $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, nasuprot teoremi Levi-Deplank, pretpostavimo da je matrica A singularna, tj. da je jedan karakteristični koren jednak nuli. Na osnovu Geršgorinove teoreme tada $0 \in \Gamma(A)$, tj. postoji indeks $k \in N$ takav da je $|0 - a_{kk}| = |a_{kk}| \leq r_k(A)$, što je kontradikcija sa (3.2). Dakle, A je regularna matrica.

Pretpostavimo dalje da važi teorema Levi-Deplank, tj. da je svaka SDD matrica regularna. Uzmimo proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ i jedan njen karakteristični koren, λ. Kako je $\lambda I_n - A$ singularna, pod datim pretpostavkama ne može biti SDD matrica, tj. ne može važiti uslov (3.2), što znači da bar za jedan indeks $k \in N$, $|\lambda - a_{ii}| = |(\lambda I_n - A)_{ii}| \leq r_i(\lambda I_n - A) = r_i(A)$, i stoga iz (3.64) imamo da $\lambda \in \Gamma_k(A) \subseteq \Gamma(A)$.

Kako postoje mnoga različita proširenja i generalizacije Levi-Deplank teoreme, trebalo bi očekivati da će se pomenuta ekvivalencija javljati i u tim slučajima, stvarajući nove oblasti u kompleksnoj ravni koje sadrže karakteristične korene date matrice. Ova ekvivalencija se eksplicitno prvi put javlja u knjizi Varge [37], 2004. godine, iako se ta tema pojavila u teoriji matrica početkom dvadesetog veka. Iz tog razloga, kako navodi autor [20], nazivaćemo je Vargin princip ekvivalencije.
Geršgorin u radu [27] iz 1931. godine daje uslove pod kojima je moguće tvrditi da svaki krug sadrži tačno jedan karakteristični koren. Ovaj rezultat daje mogućnost da izolujemo karakteristični koren ako uspemo da napravimo Geršgorinov krug koji je disjunktan sa svim ostalim. U slučaju da su svi krugovi disjunktni, svaki od krugova sadrži tačno jedan karakteristični koren.
Neka je $n \geq 2$ i $S \subseteq N$, sa $|S|$ označavamo kardinalnost skupa S, tj. broj elemenata skupa S, a sa $\bar{S} := N \setminus S$, kao i ranije, njegov komplement. Za datu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, sa $\Gamma_S(A) := \bigcup_{i \in S} \Gamma_i(A)$ označavamo deo Geršgorinovog skupa koji odgovara indeksima iz skupa S.

Teorema 3.3.2 (Druga Geršgorinova teorema) *Neka je data proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, i skup indeksa $S \subsetneq N$, ako je*

$$\Gamma_S(A) \bigcap \Gamma_{\bar{S}}(A) = \emptyset, \tag{3.67}$$

tada $\Gamma_S(A)$ sadrži tačno $|S|$ karakterističnih korena matrice A, i $\Gamma_{\bar{S}}(A)$ sadrži ostatak spektra matrice A.

Dokaz: Posmatrajmo familiju matrica $A(t) := [a_{ij}(t)] \in \mathbb{C}^{n,n}$, gde je

$$a_{ii}(t) := a_{ii} \text{ i } a_{ij}(t) = ta_{ij} \quad (i \in N), (j \in N \setminus \{i\}),$$

za $0 \leq t \leq 1$. Primetimo da je za svako $i \in N$ i svako $t \in [0,1], r_i(A(t)) = tr_i(A) \leq r_i(A)$, a time i $\Gamma_i(A(t)) \subseteq \Gamma_i(A)$, iz čega geometrijski jasno sledi da za svaku matricu $A(t), t \in [0,1]$ uslov (3.67) važi. Naime,

$$\Gamma_S(A(t)) \bigcap \Gamma_{\bar{S}}(A(t)) = \emptyset, \text{ za svako } t \in [0,1], \tag{3.68}$$

dok na osnovu teoreme 3.3.1 sledi da je

$$\sigma(A(t)) \subseteq \Gamma(A(t)) \text{ za svako } t \in [0,1].$$

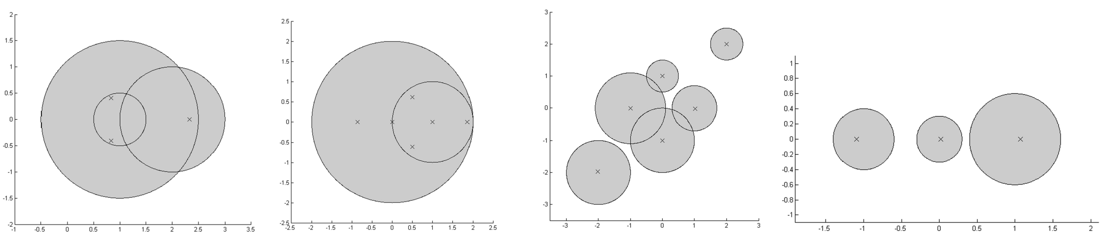
Za $t = 0$, $A(0)$ je dijagonalna matrica, čiji su karakteristični koreni $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$, pa, $\Gamma_S(A(0)) = \{a_{ii} : i \in S\}$ sadrži tačno $|S|$ karakterističnih korena matrice $A(0)$. Kako elementi matrice $A(t)$ zavise neprekidno od parametra t, tada i karakteristični koreni $\lambda(t)$ matrice $A(t)$ neprekidno zavise od t. Međutim, kako (3.68) važi za svako $t \in [0, 1]$, ne može se desiti da neprekidnim povećanjem parametra t od 0 do 1 oblast $\Gamma_S(A(t))$ bilo "dobije" bilo "izgubi" karakteristčne korene matrice $A(t)$. Dakle, za svako $t \in [0, 1]$, $\Gamma_S(A(t))$ sadrži tačno $|S|$ karakterističnih korena matrice $A(t)$. Kako je $A(1) = A$, sledi tvrđenje teoreme.

□

Primer 3.3.3

$$A_8 = \begin{bmatrix} -1 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

Na slici 3.4 su prikazane oblasti lokalizacije karakterističnih korena, koje su dobijene kao Geršgorinovi skupovi. Sa "$\times$" su označeni karakteristični koreni. Primetimo da u slučaju matrice A_8 svaki krug sadrži tačno jedan karakteristični koren - na osnovu druge Geršgorinove teoreme.



Slika 3.4: Geršgorinov skup lokalizacije karakterističnih korena matrica A_2, A_5, A_6 i A_8, redom

Za dato $x \in \mathbb{R}^n, x > 0$ definišemo matricu $X = diag(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{D}$ koja je regularna. Neka je data proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$. Posmatrajmo matricu $X^{-1}AX = [\frac{a_{ij}x_j}{x_i}]$ koja je slična sa matricom A. Znamo da ove dve matrice imaju isti spektar, tj. $\sigma(A) = \sigma(X^{-1}AX)$. Kako bismo lokalizovali karakteristične korene matrice A, možemo primeniti Geršgorinovu teoremu na matricu $X^{-1}AX$, gde imamo n pozitivnih parametara koji mogu biti proizvoljno izabrani, i na taj način uticati na oblik i veličinu skupa lokalizacije.

Definišimo dalje skaliranu sumu $i-$te vrste matrice A sa

$$r_i^X(A) := r_i(X^{-1}AX) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \frac{|a_{ij}|x_j}{x_i}, (i \in N, x > 0), \tag{3.69}$$

zatim $i-$ ti skalirani Geršgorinov krug matrice A, kao i skalirani Geršgorinov skup matrice A sa

$$\begin{cases} \Gamma_i^X(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i(X^{-1}AX) = r_i^X(A)\}, (i \in N), \\ \Gamma^X(A) := \bigcup_{i \in N} \Gamma_i^X(A). \end{cases} \tag{3.70}$$

Posledica 3.3.4 *Za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \neq 2$ i pozitivnu dijagonalnu matricu $X \in \mathbb{D}$ je*

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma^X(A) \tag{3.71}$$

pa je i

$$\sigma(A) \subseteq \bigcap_{X \in \mathbb{D}} \Gamma^X(A). \tag{3.72}$$

Oblast lokalizacije data sa (3.3.8) je najbolja moguća koja se može postići korišćenjem sličnosti matrica. U literaturi se ovaj skup naziva minimalni Geršgorinov skup matrice A, tako ćemo ga zvati i kroz ovaj rad i označavaćemo ga sa $\Gamma^{\mathbb{D}}(A) := \bigcap_{X\in\mathbb{D}} \Gamma^X(A)$.

Posledica 3.3.5 *Neka je data proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$ i regularna matrica $X \in \mathbb{C}^{n,n}$, tada je $\sigma(A) \subseteq \Gamma(X^{-1}AX)$. Štaviše,*

$$\sigma(A) = \bigcap_{det(X)\neq 0} \Gamma(X^{-1}AX). \tag{3.73}$$

Kako znamo da je $\sigma(A) = \sigma(A^T)$, možemo primeniti Geršgorinov skup na matricu A ili na A^T. Podsetimo se da se i koncept SDD matrica može primeniti i preko vrsta i preko kolona date matrice. Iz ovoga proizilazi naredno jednostavno proširenje Geršgorinove teoreme.

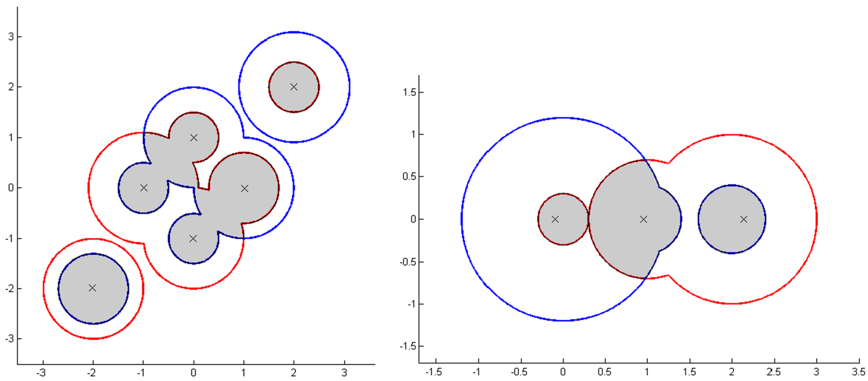
Teorema 3.3.6 *Za datu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 1$, važi*

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma(A) \cap \Gamma(A^T). \tag{3.74}$$

Primer 3.3.7

$$A_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & 1 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 & 2 \end{bmatrix}$$

Na slici 3.5 su crvenim linijama oivičene granice skupa $\Gamma(A)$, plavim granice skupa $\Gamma(A^T)$, dok osenčeni delovi predstavljaju oblast $\Gamma(A)\cap\Gamma(A^T)$. U nekim slučajima na ovaj način možemo prilično suziti oblast lokalizacije, kao što je slučaj sa matricom A_6, dok ponekad, u slučaju kada je suma vrste jednaka sumi kolone oblast lokalizacije ostaje nepromenjena.



Slika 3.5: Oblasti $\Gamma(A_6) \cap \Gamma(A_6^T)$ i $\Gamma(A_9) \cap \Gamma(A_9^T)$

Na osnovu rezultata Olge Tauski koji se odnosio na regularnost nerazloživih dijagonalno dominantnih matrica, dajemo analog u vidu lokalizacije karakterističnih korena, preuzet iz rada [20]. Radi toga, neka je $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ proširena kompleksna ravan, i neka je za skup $T \in \mathbb{C}$, sa $cl(T)$ označeno zatvaranje skupa T u $\mathbb{C}_\infty$, sa $\partial T := cl(T) \cap cl(\mathbb{C}_\infty \setminus T)$ rub i sa $int(T) := T \setminus \partial T$, unutrašnjost skupa T.

Teorema 3.3.8 (Tauski teorema) *Neka je data nerazloživa matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, ako je $\lambda \in \sigma(A)$ takvo da za svako $i \in N$, $\lambda \notin int(\Gamma_i(A))$, tj. $|\lambda - a_{ii}| \geq r_i(A)$, onda je*

$$|\lambda - a_{ii}| = r_i(A), \quad \textit{za svako } i \in N.$$

Drugim rečima, sve Geršgorinove kružnice[10] prolaze kroz λ. Stoga, ako je λ karakteristični koren matrice A koji leži na rubu Geršgorinovog skupa $\Gamma(A)$, onda on leži u preseku svih Geršgorinovih kružnica.

[10] Geršgorinova kružnica predstavlja rub Geršgorinovog kruga, tj. $\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| = r_i(A)\}$.

Primetimo da je uslov da karakteristični koren matrice leži na preseku svih Geršgorinovih kružnica, potreban uslov da bi se on nalazio na rubu Geršgorinovog skupa. To znači da iako se karakteristični koren nalazi u preseku svih Geršgorinovih kružnica, ne mora da znači da se nalazi na rubu Geršgorinovog skupa.

3.3.2 Teoreme Geršgorinovog tipa

Za razliku od prvobitnog Geršgorinovog skupa, koji se sastoji od n krugova u kompleksnoj ravni, naredne teoreme uvode oblasti lokalizacije koje se sastoje od nešto komplikovanijih skupova. Izložićemo neke od mogućnosti njihove implementacije, kao i neophodne troškove za njihovo izračunavanje.
Kao što je bio slučaj sa Geršgorinovom teoremom, postoji ekvivalencija tvrđenja o lokalizaciji karakterističnih korena sa tvrdnjama o regularnosti matrica.

Teorema 3.3.9 (Vargin princip ekvivalencije) *Neka je klasa kvadratnih kompleksnih matrica proizvoljne dimenzije označena sa $\mathbb{K}$, za proizvoljnu kvadratnu matricu A definišimo skup kompleksnih brojeva*

$$\Theta^{\mathbb{K}}(A) := \{z \in \mathbb{C} : zI - A \notin \mathbb{K}\}. \tag{3.75}$$

Tada su sledeća dva tvrđenja ekvivalentna:

- *Sve matrice iz $\mathbb{K}$ su regularne, i*
- *Za proizvoljnu kvadratnu matricu A, skup $\Theta^{\mathbb{K}}(A)$ sadrži sve karakteristične korene matrice A, tj. $\sigma(A) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(A)$.*

Dokaz: Pretpostavimo da su sve matrice iz $\mathbb{K}$ regularne, i neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ proizvoljna matrica, takva da je $\lambda \in \sigma(A)$. Tada je matrica $\lambda I_n - A$ singularna, pa $\lambda I_n - A \notin \mathbb{K}$. Dakle, $\lambda \in \Theta^{\mathbb{K}}(A)$, a kako je λ proizvoljan karakteristični koren imamo da je $\sigma(A) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(A)$.
Za dokazivanje obratnog smera, pretpostavimo da je za svaku matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\sigma(A) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(A)$. Pretpostavimo dalje da je matrica A singularna. Tada $0 \in \sigma(A)$, pa $0 \in \Theta^{\mathbb{K}}(A)$. To znači da $0I_n - A = A \notin \mathbb{K}$, što je očigledno kontradikcija. Dakle, svaka $A \in \mathbb{K}$ je regularna.

□

U slučaju kada klasa $\mathbb{K}$ obuhvata sve regularne matrice imamo da je za svaku matricu A, $\Theta^{\mathbb{K}}(A) = \sigma(A)$. Sužavanjem klase $\mathbb{K}$ dobijamo skup $\Theta^{\mathbb{K}}(A)$ koji postaje širi, i tako dobijamo aproksimaciju spektra. Dakle, ako je $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2$ po definiciji sledi da je $\Theta^{\mathbb{K}_2}(A) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}_1}(A)$.

U slučaju Geršgorinove teoreme, $\Theta^{\mathbb{K}}(A) = \Gamma(A)$, pri čemu je klasa $\mathbb{K}$ klasa svih SDD matrica. Na sličan način ćemo definisati pojam teoreme Geršgorinovog tipa.

Za skup $\Theta^{\mathbb{K}}(A) = \{z \in \mathbb{C} : zI - A \notin \mathbb{K}\}$ kažemo da je skup Geršgorinovog tipa ako je $\mathbb{K}$ klasa regularnih dijagonalno dominantnih matrica, ili na osnovu teoreme 3.2.38, ako je potklasa regularnih H-matrica.
Teoremama Geršgorinovog tipa nazivaćemo teoreme koje kazuju da određeni Geršgorinov skup sadrži spektar date matrice. Takve skupove ćemo nazivati skupovima lokalizacije Geršgorinovog tipa.
Sada ćemo proširiti koncept dijagonalnog skaliranja, prezentovanog u Geršgorinovom radu [27], na druge skupove lokalizacije Geršgorinovog tipa. Za familiju pozitivnih dijagonalnih matrica $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{D}$, definišemo odgovarajući skup u kompleksnoj ravni:

$$\Gamma^{\mathbb{X}}(A) := \bigcap_{X \in \mathbb{X}} \Gamma^{X}(A), \tag{3.76}$$

koji ćemo nazivati minimalni Geršgorinov skup pripisan familiji $\mathbb{X}$. Za $\mathbb{X} = \mathbb{D}$ imamo upravo minimalni Geršgorinov skup. U tom slučaju, na osnovu Fidler-Pták teoreme je $\mathbb{K}^{\mathbb{D}} = \mathbb{H}$, pa je za proizvoljnu matricu A, $\Gamma^{\mathbb{D}}(A) = \Theta^{\mathbb{H}}(A)$. Stoga je minimalni Geršgorinov skup najbolji mogući skup lokalizacije

Geršgorinovog tipa.
Naredna generalizacija se tiče druge Geršgorinove teoreme, koja predstavlja dobar alat za određivanje broja karakterističnih korena koji se nalaze u disjunktnim delovima skupa lokalizacije.

Definicija 3.3.10 *Data klasa matrica $\mathbb{K}$ je pozitivno homogena, ako iz $A \in \mathbb{K}$ sledi da $\alpha A \in \mathbb{K}$, za proizvoljno $\alpha > 0$.*

Teorema 3.3.11 (Princip izolacije) *Za dati skup Geršgorinovog tipa*

$$\Theta^{\mathbb{K}}(A) = \{z \in \mathbb{C} : zI - A \notin \mathbb{K}\}, \tag{3.77}$$

gde je $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$ potklasa H-matrica koja je pozitivno homogena dijagonalno dominantnog tipa, za bilo koju matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, ako postoje skupovi $U, V \subseteq \mathbb{C}$, takvi da je $U \cap V = \emptyset$, i

$$\Theta^{\mathbb{K}}(A) = U \cup V, \tag{3.78}$$

tada se u skupu U nalazi tačno $|\{i \in N : a_{ii} \in U\}|$ karakterističnih korena matrice A.

Dokaz: Neka je $D_A := diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$. Napravimo razlaganje matrice $A = D_A - F_A$, i posmatrajmo familiju matrica $A(t) := D_A - tF_A$, za $0 \leq t \leq 1$. Prvo, neka $t \in (0, 1]$, i uzmimo $z \in \Theta^{\mathbb{K}}(A(t))$, tj. $zI - A(t) \notin \mathbb{K}$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka $z \notin \Theta^{\mathbb{K}}(A)$, tj. neka $zI - A \in \mathbb{K}$. Pošto je

$$t|zI - A| = t(|zI - D_A| + |F_A|) \pm |zI - D_A| = |zI - A(t)| - (1 - t)|zI - D_A|,$$

onda je

$$|zI - A(t)| = t|zI - A| + (1 - t)|zI - D_A|.$$

Prema pretpostavci da je $\mathbb{K}$ klasa matrica pozitivno homogena i DD tipa, iz prethodne jednakosti zaključujemo da $|zI - A(t)| \in \mathbb{K}$. Dakle, $zI - A(t) \in \mathbb{K}$, što je očigledno kontradikcija. Stoga $z \in \Theta^{\mathbb{K}}(A)$, pa je odatle $\Theta^{\mathbb{K}}(A(t)) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(A)$, za svako $t \in (0, 1]$.
Posmatrajmo slučaj kada je $t = 0$. Tada, $A(0) = D_A$, i $z \in \Theta^{\mathbb{K}}(A(0))$ ako i samo ako $zI - D_A \notin \mathbb{K}$. Očigledno, ako je $z = a_{ii}$, za neko $i \in N$, tada $zI - D_A$ ima nulu na dijagonali. Stoga ne može biti u $\mathbb{K}$ koje je klasa matrica DD tipa. Dakle, $a_{ii} \in \Theta^{\mathbb{K}}(A(0))$, za svako $i \in N$. Iz istog razloga $a_{ii} \in \Theta^{\mathbb{K}}(A)$, $i \in N$. Sa druge strane, kada je $z \neq a_{ii}$ za svako $i \in N$, $zI - D_A$ je regularna dijagonalna matrica, pa $zI - D_A \in \mathbb{K}$, tj. $z \notin \Theta^{\mathbb{K}}(A(0))$. Tako, $\Theta^{\mathbb{K}}(A(0)) = \{a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}\} \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(A)$. Drugim rečima, dobili smo da je $\Theta^{\mathbb{K}}(A(0)) = \sigma(A(0)) = \{a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}\}$, i da je $\Theta^{\mathbb{K}}(A(t)) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(A)$, za svako $t \in [0, 1]$.
Sada, kako su skupovi $U, V \subseteq \mathbb{C}$ disjunktni i $\{a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}\} \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(A) = U \cup V$, ako broj dijagonalnih elemenata koji se nalaze u skupu U označimo sa m, onda se $n - m$ dijagonalnih elemenata matrice $A(0)$ nalazi u skupu V.
Sa $\lambda(t)$ označimo karakteristični koren matrice $A(t)$, koji za $t = 0$ postaje dijagonalni elemenat koji se nalazi u skupu $U \subseteq \mathbb{C}$. Kako su karakteristični koreni neprekidne funkcije matričnih elemenata, možemo podrazumevati da je $\{\lambda(t) : t \in [0, 1]\}$ neprekidna kriva u kompleksnoj ravni, takva da $\{\lambda(t) : t \in [0, 1]\} \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(A) = U \cup V$. Kako su U i V disjunktni skupovi, cela kriva se mora nalaziti u tačno jednom od njih. Dakle, kako $\lambda(0) \in U$, $\lambda(1) \in U$. Broj karakterističnih korena $A(1) = A$ koji su u skupu U je m.

□

Brauerovi ovali Kazinija

Oblast lokalizacije iz ovog dela rada je u vezi sa teoremom 3.2.9 koja tvrdi regularnost duplo SDD matrica. U ovom delu rada ćemo klasu duplo SDD matrica označavati sa $\mathbb{K}_{dSDD}$, koja je klasa pozitivno homogenih matrica i DD tipa.

Neka je data $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\alpha > 0$ i matrica B, takva da je $\langle D \rangle \geq \langle B \rangle$, u tom slučaju imamo da je za svako $i \in N$,

$$(\langle B \rangle)_{ii} = |b_{ii}| \geq |a_{ii}|, \quad \text{i} \quad r_i(\langle B \rangle) = r_i(B) \leq r_i(A), \tag{3.79}$$

i

$$|(\alpha A)_{ii}| = \alpha |a_{ii}|, \quad \text{i} \quad r_i(\alpha A) = \alpha r_i(A). \tag{3.80}$$

Ako $A \in \mathbb{K}_{dSDD}$, tada i $\langle B \rangle \in \mathbb{K}_{dSDD}$ i kako je $\alpha > 0$,

$$|(\alpha A)_{ii}||(\alpha A)_{jj}| > r_i(\alpha A) r_j(\alpha A)$$

je ekvivalentno sa 3.2.9 za sve $i, j \in N, i \neq j$. Stoga je $\Theta^{\mathbb{K}_{dSDD}}(A)$ skup Geršgorinovog tipa, na koji se može primeniti princip izolacije.

Teorema 3.3.12 (Brauer) *Neka je data matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, za svaki $\lambda \in \sigma(A)$, postoji par indeksa $i, j \in N$, $i \neq j$, tako da*

$$\lambda \in K_{i,j}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}||z - a_{jj}| \leq r_i(A) r_j(A)\}, \tag{3.81}$$

i samim tim

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{K}(A) := \bigcup_{i \in N} \bigcup_{j=1}^{i-1} K_{i,j}(A). \tag{3.82}$$

Dokaz: Posmatrajmo klasu $\mathbb{K}_{dSDD}$. U skladu sa teoremom 3.2.9 data klasa je klasa regularnih matrica. Vargin princip ekvivalencije implicira da $\sigma(A) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}_{dSDD}}(A)$, za $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$. Dokazaćemo da je $\Theta^{\mathbb{K}_{dSDD}}(A) = \mathcal{K}(A)$. Neka $z \in \Theta^{\mathbb{K}_{dSDD}}(A)$, tada je $zI_n - A \notin \mathbb{K}_{dSDD}$, odnosno, postoje indeksi $i, j \in N$, $i \neq j$, takvi da je

$$|(zI_n - A)_{ii}||(zI_n - A)_{jj}| \leq r_i(zI_n - A) r_j(zI_n - A). \tag{3.83}$$

Ali, kako je za svako $i \in N$, $|(zI_n - A)_{ii}| = |z - a_{ii}|$ i $r_i(zI_n - A) = r_i(A)$, na osnovu (3.81) uslov (3.83) je ekvivalentan činjenici da $z \in K_{i,j}(A) = K_{j,i}(A)$. Dakle, $z \in \Theta^{\mathbb{K}_{dSDD}}(A)$ je ekvivalentno sa $z \in \mathcal{K}(A)$, odakle imamo da je $\Theta^{\mathbb{K}_{dSDD}}(A) = \mathcal{K}(A)$.

□

Teorema 3.3.13 *Neka je data matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, ako postoje skupovi $U, V \subseteq \mathbb{C}$, takvi da je $U \cap V = \emptyset$ i $\mathcal{K}(A) = U \cup V$, onda skup U sadrži tačno $|\{i \in N : a_{ii} \in U\}|$ karakterističnih korena matrice A.*

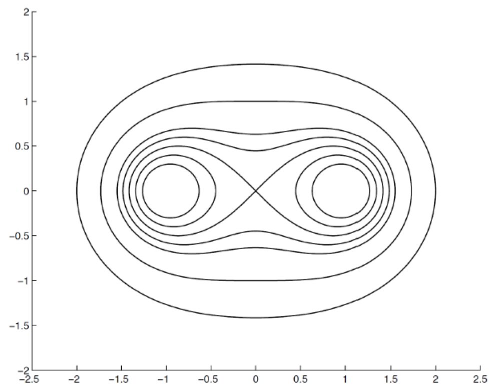
Brauerov skup $\mathcal{K}(A)$, dat sa (3.82) čini $\frac{n(n-1)}{2}$ kompaktnih skupova u kompleksnoj ravni. Skupovi zavise od dijagonalnih elemenata i suma vrsta, i uglavnom nisu krugovi. Rub $K_{i,j}(A)$ može biti opisan sledećom jednačinom:

$$|z - \xi_1||z - \xi_2| = \eta, \tag{3.84}$$

gde su ξ_1 i ξ_2 kompleksni brojevi koje nazivamo žižama krive, i $\eta \geq 0$ koje nazivamo poluprečnikom. Od njihovog međusobnog odnosa zavisi geometrijski oblik krive. Naime, za $0 < \eta < \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2}{4}$ kriva (3.84) se sastoji iz dva disjunktna dela koja se asimptotski približavaju kružnicama sa centrima u ξ_1 i ξ_2 poluprečnika $\frac{\eta}{|\xi_1 - \xi_2|}$, kada $\eta \to 0$. Za $\eta = \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2}{4}$ kriva (3.84) je lemniskata sa žižama u ξ_1 i ξ_2, dok je za $\eta > \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2}{4}$ (3.84) glatka kriva bez samopreseka koja teži ka kružnici sa centrom u $\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}$ poluprečnika $\frac{\eta}{|\xi_1 - \xi_2|}$, kada $\eta \to \infty$.

Generalno, ovakva kriva se u literaturi naziva Kazinijev[11] oval ili Kazinijeva elipsa, iako je njen oblik zaista oval jedino u slučaju kada je $\eta \geq \sqrt{|\xi_1 - \xi_2|}$. Iz tog razloga, skup $K_{i,j}(A)$ ćemo zvati (i, j)-ti Brauerov oval Kazinija matrice A. Slika 3.6 je preuzeta iz rada [20].

[11] Giovanni Domenico Cassini, (1625.-1712.)



Slika 3.6: Kazinijevi ovali sa žižama u -1 i 1 i poluprečnikom $\eta = 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 2, 3$

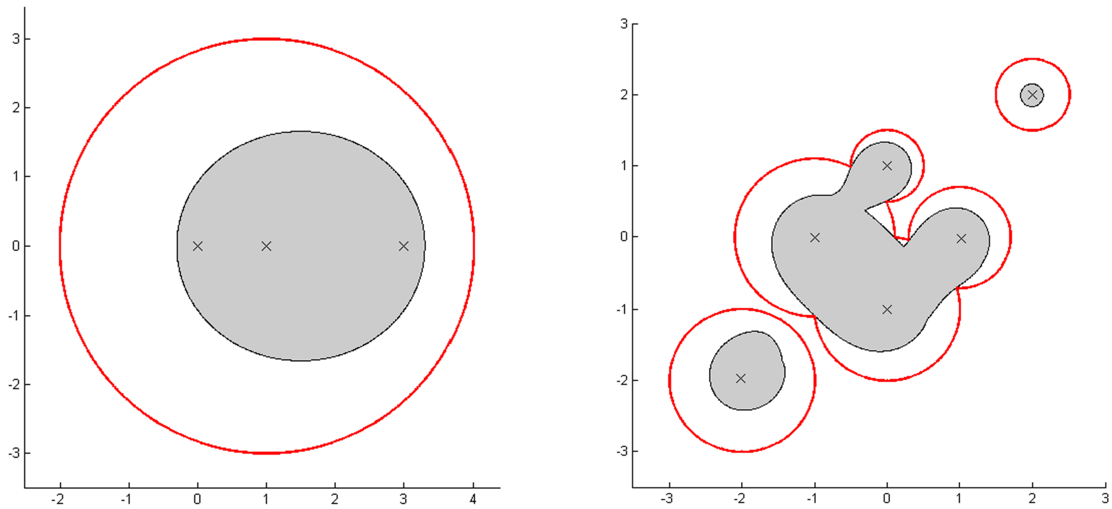
Teorema 3.3.14 *Za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$ i svaka dva različita indeksa $i, j \in N$ važi*

$$K_{i,j}(A) \subseteq \Gamma_i(A) \cup \Gamma_j(A), \tag{3.85}$$

gde jednakost važi ako i samo ako je $r_i(A) = r_j(A) = 0$ ili ako je $r_i(A) = r_j(A) > 0$ u slučaju kad je $a_{ii} = a_{jj}$. Dakle, kao posledica je,

$$\mathcal{K}(A) \subseteq \Gamma(A). \tag{3.86}$$

Primer 3.3.15 *Na slici 3.7 su predstavljene oblasti lokalizacije, pri čemu je Geršgorinov skup oivičen crvenom linijom, dok je Brauerov skup osenčen.*



Slika 3.7: Brauerov skup za matrice A_3 i A_6

Naredno tvrđenje je zasnovano na radu Varge i Krautstengela iz 1999. godine, [38], kazuje da Brauerov skup za datu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ daje najbolju moguću ocenu korena zasnovanu na podacima $\{a_{ii}\}_{i \in N}$ i $\{r_i(A)\}_{i \in N}$.
Da bismo to detaljnije razjasnili, uvedimo sledeće oznake. Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ i neka je $n \geq 2$. Skup

$$\omega(A) := \{B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n} : b_{ii} = a_{ii} \text{ i } r_i(B) = r_i(A), i \in N\}, \tag{3.87}$$

nazivamo ekviradijalna familija matrice A. Proširena ekviradijalna familija matrice A je definisana sa:

$$\hat{\omega}(A) := \{B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n} : b_{ii} = a_{ii} \text{ i } r_i(B) \leq r_i(A), i \in N\}, \tag{3.88}$$

Lako je uočiti da je $\omega(A) \subseteq \hat{\omega}(A)$. Takođe, prema definiciji Brauerovog ovala Kazinija sa (3.81), jasno je da za svaku matricu iz $\omega(A)$ Brauerov skup ostaje isti, dok je za matrice iz $\hat{\omega}(A)$ Brauerov skup unutar $\mathcal{K}(A)$. Spektar svih matrica iz ove dve klase je na osnovu toga, sadržan u $\mathcal{K}(A)$, tj.

$$\sigma(\omega(A)) := \bigcup_{B \in \omega(A)} \sigma(B) \quad \text{i} \quad \sigma(\hat{\omega}(A)) := \bigcup_{B \in \hat{\omega}(A)} \sigma(B), \tag{3.89}$$

važi da je

$$\sigma(\omega(A)) \subseteq \sigma(\hat{\omega}(A)) \subseteq \mathcal{K}(A). \tag{3.90}$$

Teorema 3.3.16 (Varga-Krautstengel) *Za svaku matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, važi*

$$\sigma(\omega(A)) = \begin{cases} \partial\mathcal{K}(A) = \partial K_{1,2}(A) & \text{ako je } n = 2, \text{ i} \\ \mathcal{K}(A) & \text{za } n \geq 3, \end{cases} \tag{3.91}$$

i

$$\sigma(\hat{\omega}(A)) = \mathcal{K}(A). \tag{3.92}$$

Brauerov skup $\mathcal{K}(A)$ savršeno lokalizuje spektar svih matrica koje su ekviradijalne sa A za $n \geq 3$, tj. koje su iz $\omega(A)$, i svih matrica koje su iz proširenog skupa $\hat{\omega}(A)$.

Brualdijeve lemniskate

Kao i do sada, počnimo sa klasom Brualdi SDD matrica, koja je pozitivno homogena klasa DD tipa i konstruišimo odgovarajući skup Geršgorinovog tipa.

Teorema 3.3.17 (Brualdi) [12] *Za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$ i svako $\lambda \in \sigma(A)$ postoji ciklus (slab ili jak) $\gamma \in C(A)$ takav da je*

$$\lambda \in \mathcal{B}_\gamma(A) := \Big\{z \in \mathbb{C} : \prod_{i \in \gamma} |z - a_{ii}| \leq \prod_{i \in \gamma} \tilde{r}_i(A)\Big\}, \tag{3.93}$$

ako je ciklus $\gamma \in C(A)$ jak, odnosno,

$$\lambda \in \mathcal{B}_\gamma(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \tilde{r}_i(A) = 0\} = \{a_{ii}\} \tag{3.94}$$

ako je ciklus $\gamma = \{i\} \in C(A)$ slab. Kako je $\lambda \in \sigma(A)$ proizvoljno sledi da je

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{B}(A) := \bigcup_{\gamma \in C(A)} \mathcal{B}_\gamma(A). \tag{3.95}$$

Teorema 3.3.18 *Za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, ako postoje skupovi $U, V \subseteq \mathbb{C}$, takvi da $U \cap V = \emptyset$, i $\mathcal{B}(A) = U \cup V$, tada skup U sadrži tačno $|\{i \in N : a_{ii} \in U\}|$karakterističnih korena matrice A.*

Skup $\mathcal{B}(A)$ iz (3.95) nazivamo Brualdijev skup, dok $\mathcal{B}_\gamma(A)$ iz (3.93), odnosno iz (3.94), nazivamo Brualdijeva lemniskata.
Na osnovu teoreme 3.2.14 i Varginog principa ekvivalencije važi sledeća teorema.

[12]Ova teorema je uopštenje Varge na originalan Brualdijev rezultat

Teorema 3.3.19 *Za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$ važi*

$$\mathcal{B}(A) \subseteq \mathcal{K}(A), \tag{3.96}$$

gde su $\mathcal{B}(A)$ i $\mathcal{K}(A)$ dati sa (3.95) *i* (3.82)*, respektivno.*

Dakle, za matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, Brauerov skup se sastoji od $\frac{n(n-1)}{2}$ Kazinijevih ovala, dok broj Brualdijevih lemniskata zavisi od strukture grafa pridruženog datoj matrici. Slučaj u kome su svi vandijagonalni elementi date matrice različiti od nule, kada je izbor bilo koja dva ili više elementa jak ciklus, Brualdijevih lemniskata ima $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}(k-1)!$. Intresantno je primetiti da je u tom slučaju za svaki ciklus dužine 2, $\gamma = (i, j)$, $K_{i,j}(A) = \mathcal{B}_\gamma(A)$, pa sledi da je $\mathcal{K}(A) = \mathcal{B}(A)$.
U ovom slučaju najveći broj ciklusa grafa $\mathbb{G}(A)$ ne utiče na izgled Brualdijeve lokalizacije, pa se skup ciklusa u grafu, $C(A)$ može redukovati na neki skup $\tilde{C}(A)$, tako da novodobijena Brualdijeva lokalizacija ostane nepromenjena. Konstrukcija redukovanog skupa se može naći u [37], teorema 2.10.

Cvetković-Kostić-Varga skup

Ovde ćemo na osnovu teorema 3.2.18 i 3.2.39 prikazati odgovarajuće teoreme o lokalizaciji karakterističnih korena, kao posledicu Varginog principa ekvivalencije.

Teorema 3.3.20 (Cvetković-Kostić-Varga) *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ proizvoljna matrica i $\lambda \in \sigma(A)$ njen proizvoljan karakteristični koren. Tada za svaki neprazan skup indeksa $S \subseteq N$ postoje $i \in S$ i $j \in \bar{S}$ takvi da*

$$\lambda \in \Gamma_i^S(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i^S(A)\}, \tag{3.97}$$

ili

$$\lambda \in V_{i,j}^S(A) := \{z \in \mathbb{C} : (|z - a_{ii}| - r_i^S(A))(|z - a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)) > r_i^{\bar{S}}(A) r_j^S(A)\}. \tag{3.98}$$

Dakle, za svaki neprazan podskup indeksa $S \subseteq N$,

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{C}^S(A) := [\bigcup_{i \in S} \bigcup_{j \in \bar{S}} V_{i,j}^S(A)] \cup [\bigcup_{i \in S} \Gamma_i^S(A)], \tag{3.99}$$

a time i

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{C}(A) := \bigcap_{\emptyset \neq S \subseteq N} \mathcal{C}^S(A). \tag{3.100}$$

Kako je klasa S-SDD matrica pozitivno homogena klasa DD tipa, možemo primeniti princip izolacije.

Teorema 3.3.21 *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$ proizvoljna matrica, ako postoje skupovi $U, V \subseteq \mathbb{C}$, takvi da je $U \cap V = \emptyset$, i $\mathcal{C}_S(A) = U \cup V$ za neki neprazan $S \subseteq N$, tada skup U sadrži tačno $|\{i \in N : a_{ii} \in U\}|$ karakterističnih korena matrice A.*

Sledi teorema koja je ekvivalentna teoremi 3.2.39 u smislu lokalizacije, i koja nas dovodi do koncepta minimalnog Geršgorinovog skupa.

Teorema 3.3.22 (Cvetković-Kostić) *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ proizvoljna matrica i $S \subseteq N$ proizvoljan neprazan podskup skupa indeksa, tada je minimalni Gerğorinov skup pridružen familiji $\mathbb{X}_S$, datoj sa* (3.60) *jednak skupu $\mathcal{C}^S(A)$, tj.*

$$\mathcal{C}^S(A) = \bigcap_{X \in \mathbb{X}_S} \Gamma^X(A) = \Gamma^{\mathbb{X}_S}(A), \tag{3.101}$$

i samim tim je minimalni Geršgorinov skup pridružen familiji $\mathbb{X}_{CKV}$, datoj sa (3.61) *jednak skupu $\mathcal{C}(A)$, tj.*

$$\mathcal{C}(A) = \bigcap_{X \in \mathbb{X}_{CKV}} \Gamma^X(A) = \Gamma^{\mathbb{X}_{CKV}}(A). \tag{3.102}$$

Naredna teorema kazuje vezu između do sada pomenutih oblasti lokalizacije.

Teorema 3.3.23 *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$ proizvoljna matrica i neka je skup $\Gamma(A)$ dat sa* (3.63), *skup $\mathcal{K}(A)$ dat sa* (3.82), *skup $\mathcal{C}^S(A)$ dat sa* (3.99) *i skup $\mathcal{C}(A)$ dat sa* (3.100). *Tada je*

- $\mathcal{C}^S(A) \subseteq \Gamma(A), \quad (S \subseteq N),\ i$
- $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{K}(A) \subseteq \Gamma(A).$

Štaviše, postoje matrice $P, Q \in \mathbb{C}^{n,n}$, takve da

- $\mathcal{C}(P) \nsubseteq \mathcal{B}(P)$ *i* $\mathcal{B}(P) \nsubseteq \mathcal{C}(P)$
- $\mathcal{C}^S(Q) \nsubseteq \mathcal{K}(Q),\ i\ \mathcal{K}(Q) \nsubseteq \mathcal{C}^S(Q)$, *za neko $S \subseteq N$.*

Skupovi Ostrovskog

Analogno prethodnom definisanju ranije navedenih skupova lokalizacije, u ovom delu rada polazimo od rezultata regularnosti matrica koja su dobijena proširenjem klase regularnih matrica uvođenjem sume kolone. Kao posledice Varginog principa ekvivalencije izložićemo dve teoreme o lokalizaciji karakterističnih korena. Prikazaćemo skupove lokalizacije karakterističnih korena izvedene na osnovu Varginog principa ekvivalencije iz teorema 3.2.24 i 3.2.25 i njihovih karakterizacija 3.2.29 i 3.2.30, respektivno.

Teorema 3.3.24 *Neka je data proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, i neka je λ jedan od karakterističnih korena. Tada za proizvoljno $\alpha \in [0,1]$ postoji indeks $i \in N$ takav da $|\lambda - a_{ii}| \leq \alpha r_i(A) + (1-\alpha)c_i(A)$. Drugim rečima, za proizvoljno $\alpha \in [0,1]$,*

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{A}^1_\alpha := \bigcup_{i \in N} \mathcal{A}^1_{\alpha,i}(A), \tag{3.103}$$

gde $\mathcal{A}^1_{\alpha,i}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \alpha r_i(A) + (1-\alpha)c_i(A)\}$. I samim tim

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{A}^1(A) := \bigcap_{\alpha \in [0,1]} \mathcal{A}^1_\alpha(A). \tag{3.104}$$

Oblast definisanu sa (3.103) nazivamo α_1 skup, dok oblast definisanu sa (3.104) nazivamo α_1-minimalni skup.

Teorema 3.3.25 *Neka je data proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, i neka je λ jedan od karakterističnih korena. Tada za proizvoljno $\alpha \in [0,1]$ postoji indeks $i \in N$ takav da $|\lambda - a_{ii}| \leq (r_i(A))^\alpha (c_i(A))^{1-\alpha}$. Drugim rečima, za proizvoljno $\alpha \in [0,1]$,*

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{A}^2_\alpha := \bigcup_{i \in N} \mathcal{A}^2_{\alpha,i}(A), \tag{3.105}$$

gde $\mathcal{A}^2_{\alpha,i}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq (r_i(A))^\alpha (c_i(A))^{1-\alpha}\}$. I samim tim

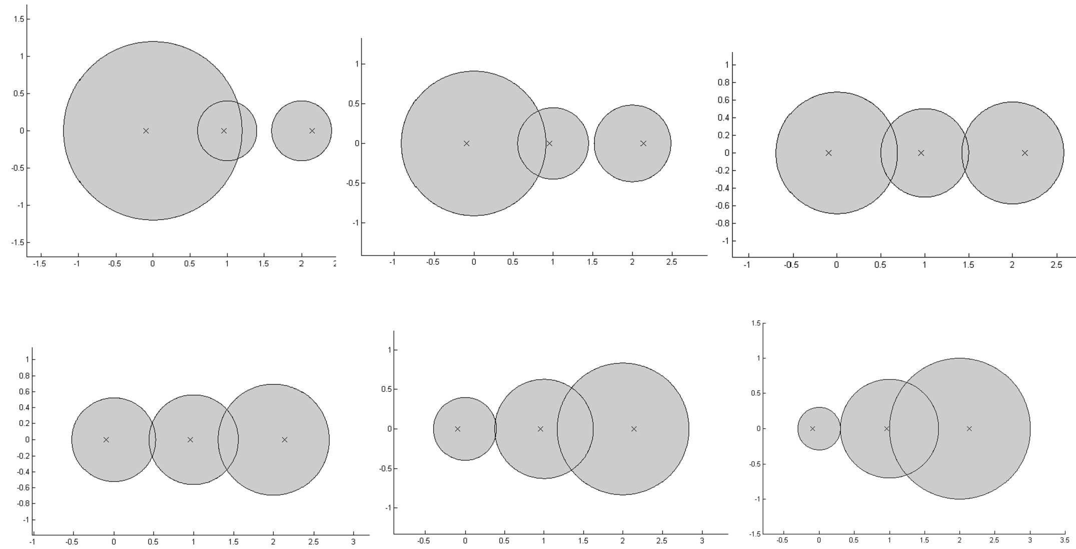
$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{A}^2(A) := \bigcap_{\alpha \in [0,1]} \mathcal{A}^2_\alpha(A). \tag{3.106}$$

Oblast definisanu sa (3.105) nazivamo α_2 skup, dok oblast definisanu sa (3.106) nazivamo α_2-minimalni skup.
Kako su obe klase α_1-SDD i α_2-SDD pozitivno homogene, princip izolacije važi u oba slučaja.

Teorema 3.3.26 *Neka je data proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, i $k \in \{1,2\}$, ako postoje skupovi $U, V \subseteq \mathbb{C}$, takvi da je $U \cap V = \emptyset$ i $\mathcal{A}^k(A) = U \cup V$, onda skup U sadrži tačno $|\{i \in N : a_{ii} \in U\}|$ karakterističnih korena matrice A.*

Kako znamo da je svaka α_1-SDD matrica i α_2-SDD, za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ imamo da je $\mathcal{A}^2(A) \subseteq \mathcal{A}^1(A)$. Odavde vidimo da ukoliko želimo bolji lokalizacioni skup, pravi izbor je uvek $\mathcal{A}^2(A)$.
Za različite vrednosti parametra α se dobijaju različiti skupovi lokalizacije. U tom slučaju nijedan skup nije podskup nekog drugog skupa. Presek po svim mogućim vrednostima parametra je najbolja moguća oblast lokalizacije u ovom pravcu.

Primer 3.3.27 *Na slici 3.8 su prikazane oblasti $\mathcal{A}^2_\alpha(A_9)$ za različite vrednosti parametra α.*



Slika 3.8: α_2-lokalizacioni skup $\mathcal{A}^2_\alpha(A_9)$, za $\alpha = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ i 1, redom

α_2 skup je za fiksiranu vrednost parametra lako nacrtati, kao i Geršgorinov skup, ali to nije slučaj sa α_2-minimalnim skupom. Pitanje koje se postavlja je na koji način izračunati oblast koja se dobija kao presek kontinuum mnogo skupova. Na osnovu teoreme 3.2.30 i koristeći Vargin princip ekvivalencije dobijamo drugačiji oblik skupa koji je mnogo korisniji.

Teorema 3.3.28 *Neka je data proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, i neka je λ jedan od karakterističnih korena. Tada postoji indeks $i \in N$ takav da je $|\lambda - a_{ii}| \leq \min\{r_i(A), c_i(A)\}$ ili postoje $i \in \mathcal{R}^*(A)$ i $j \in \mathcal{C}^*(A)$, (dati sa* (3.47) *i* (3.48)*, respektivno) takvi da*

$$\frac{|\lambda - a_{ii}|}{c_i(A)}\Big(\frac{|\lambda - a_{jj}|}{c_j(A)}\Big)^{\log_{\frac{c_j(A)}{r_j(A)}} \frac{r_i(A)}{c_i(A)}} \leq 1. \tag{3.107}$$

Stoga imamo da je

$$\sigma(A) \subset \mathcal{A}^2(A) := \Gamma^m(A) \bigcup \Lambda^2(A), \tag{3.108}$$

gde je

$$\begin{cases} \Gamma_i^m := \Gamma_i(A) \cap \Gamma_i(A^T) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \min\{r_i(A), c_i(A)\}\}, \quad (i \in N) \\ \Gamma^m := \bigcup_{i \in N} \Gamma_i^m(A), \end{cases} \tag{3.109}$$

$$\Lambda^2(A) := \bigcup_{\substack{i\in\mathcal{R}^*(A)\\ j\in\mathcal{C}^*(A)}} \Lambda^2_{i,j}(A), \quad i \tag{3.110}$$

$$\Lambda^2_{i,j}(A) := \{z \in \mathbb{C} : \frac{|z-a_{ii}|}{c_i(A)}\Big(\frac{|z-a_{jj}|}{c_j(A)}\Big)^{\log_{\frac{c_j(A)}{r_j(A)}}\frac{r_i(A)}{c_i(A)}} \le 1\}, \tag{3.111}$$

za $i \in \mathcal{R}^*$ *i* $j \in \mathcal{C}^*$.

Teorema 3.2.30 omogućava da se predstavi α_2-minimalni skup za proizvoljnu matricu kao konačna unija kompaktnih skupova u kompleksnoj ravni, i stoga je moguće odrediti je.
Posledica teoreme 3.2.29 je sledeća.

Teorema 3.3.29 *Neka je data proizvoljna matrica* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \ge 2$, *i neka je* λ *jedan od karakterističnih korena. Tada postoji indeks* $i \in N$ *takav da je* $|\lambda - a_{ii}| \le \min\{r_i(A), c_i(A)\}$ *ili postoje* $i \in \mathcal{R}(A)$ *i* $j \in \mathcal{C}(A)$, *takvi da je*

$$|\lambda - a_{ii}|(c_j(A) - r_j(A)) + |\lambda - a_{jj}|(r_i(A) - c_i(A)) \le c_j(A)r_i(A) - c_i(A)r_j(A). \tag{3.112}$$

Stoga je

$$\sigma(A) \subset \mathcal{A}^1(A) := \Gamma^m(A) \bigcup \Lambda^1(A), \tag{3.113}$$

gde je $\Gamma^m(A)$ *dato sa* (3.109), *i*

$$\Lambda^1(A) := \bigcup_{\substack{i\in\mathcal{R}(A)\\ j\in\mathcal{C}(A)}} \Lambda^1_{i,j}(A), \quad i \tag{3.114}$$

$$\Lambda^1_{i,j}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a_{ii}|(c_j(A) - r_j(A)) + |z-a_{jj}|(r_i(A) - c_i(A)) \le c_j(A)r_i(A) - c_i(A)r_j(A)\}, \tag{3.115}$$

za $i \in \mathcal{R}$ *i* $j \in \mathcal{C}$.

Teorema 3.3.30 *Neka je data proizvoljna matrica* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \ge 2$, *i neka su dati skupovi:* $\Gamma(A)$ *dat sa* (3.63), *skup* $\mathcal{B}(A)$ *dat sa* (3.95), *skup* $\mathcal{C}^S(A)$ *dat sa* (3.99), *skup* $\mathcal{C}(A)$ *dat sa* (3.100), *skup* $\mathcal{A}^1(A)$ *dat sa* (3.104) *i skup* $\mathcal{A}^2(A)$ *dat sa* (3.106). *Tada je*

$$\mathcal{A}^2(A) \subseteq \mathcal{A}^1(A) \subseteq \Gamma(A) \cap \Gamma(A^T). \tag{3.116}$$

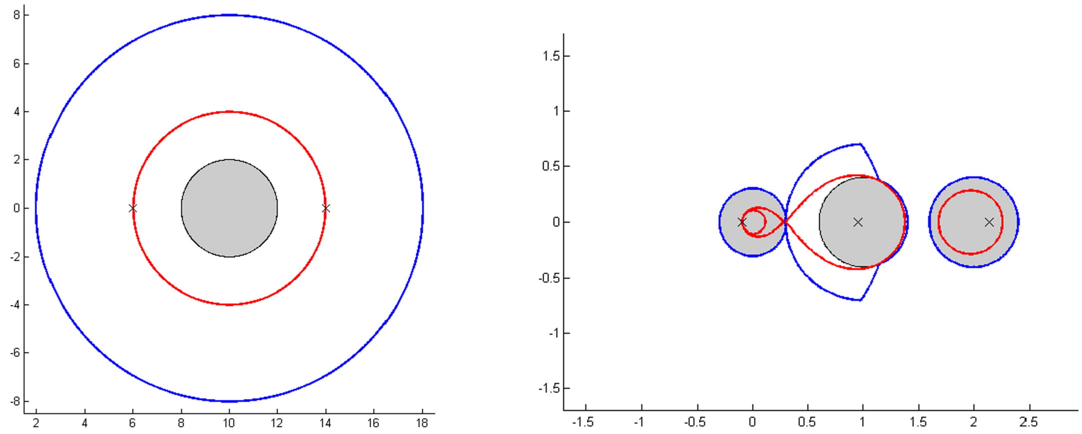
Štaviše, postoje matrice $P, Q \in \mathbb{C}^{n,n}$, *takve da*

- $\mathcal{A}^2(P) \not\subseteq \mathcal{B}(P)$, *i* $\mathcal{B}(P) \not\subseteq \mathcal{A}^1(P)$ *i*
- $\mathcal{A}^2(Q) \not\subseteq \mathcal{C}(Q)$, *i* $\mathcal{C}(Q)) \not\subseteq \mathcal{A}^1(Q)$.

Primer 3.3.31

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Na slici 3.9 su prikazani α_2*-minimalni skupovi za matrice* A_10 *i* A_9, *pri čemu su na grafiku date granice za skup* $\Gamma(A_i) \cap \Gamma(A_i^T)$ *za* $i = 9, 10$ *plavom bojom, granice skupa* $\Lambda^2(A_i)$ *za* $i = 9, 10$ *crvenom bojom, dok je oblast* $\Gamma^m(A_i)$ *za* $i = 9, 10$ *osenčena.*



Slika 3.9: α_2-minimalni skupovi za matrice A_{10} i A_9

3.3.3 Minimalni Geršgorinov skup

Kao što smo već naveli, minimalan Geršgorinov skup matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je kompaktan skup u kompleksnoj ravni dat sa

$$\Gamma^{\mathbb{D}}(A) := \bigcap_{X \in \mathbb{D}} \Gamma^X(A) \tag{3.117}$$

pri čemu je

$$\begin{cases} \Gamma_i^X(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i^X(A)\}, \quad (i \in N), \\ \Gamma^X(A) := \bigcup_{i \in N} \Gamma_i^X(A), \end{cases} \tag{3.118}$$

i

$$r_i^X(A) := r_i(X^{-1}AX) = \sum_{j \in N \backslash \{i\}} \frac{|a_{ij}| x_j}{x_i} \quad (i \in N, x > 0). \tag{3.119}$$

Na osnovu posledice 3.3.4 znamo da minimalni Geršgorinov skup sadrži karakteristične korene proizvoljne matrice A, tj. $\sigma(A) \subseteq \Gamma^{\mathbb{D}}(A)$.
Kao što je ranije pokazano, za proizvoljnu potklasu $\mathbb{K}$ regularnih H-matrica, tj. GDD matrica, koristeći Vargin princip ekvivalencije, za datu matricu A, možemo izvesti oblast lokalizacije karakterističnih korena $\Theta^{\mathbb{K}}(A)$. Štaviše, pokazano je da je ovaj skup minimalni Geršgorinov skup, pridružen familiji $\mathbb{X}^{\mathbb{K}}$ tj. $\Theta^{\mathbb{K}}(A) = \Gamma^{\mathbb{X}^{\mathbb{K}}}(A) = \bigcap_{X \in \mathbb{X}^{\mathbb{K}}} \Gamma^X(A)$.
Sa druge strane, videli smo da familija pozitivnih dijagonalnih matrica $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{D}$ generiše potklasu H-matrica $\mathbb{K}^{\mathbb{X}}$ i da je za datu matricu A, odgovarajuća oblast lokalizacije $\Theta^{\mathbb{K}^{\mathbb{X}}}(A)$ minimalni Geršgorinov skup pridružen familiji $\mathbb{X}$, tj. $\Theta^{\mathbb{K}^{\mathbb{X}}}(A) = \Gamma^{\mathbb{X}}(A)$.
Pošto je $\mathbb{K}^{\mathbb{D}} = \mathbb{H}$ klasa svih regularnih H-matrica, važi da je $\Theta^{\mathbb{K}^{\mathbb{D}}}(A) = \Gamma^{\mathbb{D}}(A)$. Stoga je tvrđenje da su sve GDD matrice regularne ekvivalentno tvrđenju da minimalni Geršgorinov skup sadrži karakteristične korene. Štaviše, ovo svojstvo implicira da je minimalni Geršgorinov skup najbolja moguća oblast lokalizacije Geršgorinovog tipa. Što bi značilo da je za svako $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{H}$, $\Gamma^{\mathbb{D}}(A) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(A)$, gde je A proizvoljna matrica.
Pored ove, postoji i druga opravdanost naziva - minimalni. Naime, ako za dato $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$ definišemo

$$\Omega(A) := \{B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n} : b_{ii} = a_{ii} \text{ i } |b_{ij}| = |a_{ij}| \text{ za } i \neq j (i, j \in N)\}, \tag{3.120}$$

gde $\Omega(A)$ nazivamo ekvimodularna familija matrica pridruženih matrici A i definišimo

$$\hat{\Omega}(A) := \{B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n} : b_{ii} = a_{ii} \text{ i } |b_{ij}| \leq |a_{ij}| \text{ za } i \neq j (i, j \in N)\}, \tag{3.121}$$

koje nazivamo proširena ekvimodularna familija matrica pridruženih matrici A. Očigledno, važi da je

$$\sigma(\Omega(A)) \subseteq \sigma(\hat{\Omega}(A)) \subseteq \Gamma^{\mathbb{D}}(A). \tag{3.122}$$

Zanima nas da li su ove inkluzije prave, tj. da li i kada važe jednakosti. Odgovor na ovo je u narednoj teoremi.

Teorema 3.3.32 (Varga) *Za $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ važi*

$$\partial\Gamma^{\mathbb{D}}(A) \subseteq \sigma(\Omega(A)) \subseteq \sigma(\hat{\Omega}(A)) = \Gamma^{\mathbb{D}}(A). \tag{3.123}$$

Ovo može biti izraženo kao: Za datu matricu A svaka tačka na rubu minimalnog Geršgorinovog skupa $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$ je karakteristični koren matrica iz familije $\Omega(A)$ i svaka tačka minimalnog Geršgorinovog skupa $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$ je karakteristični koren matrica iz familije $\hat{\Omega}(A)$. Drugim rečima, karakteristični koreni matrica iz $\Omega(A)$ ispunjavaju rub minimalnog Geršgorinovog skupa, dok karakteristični koreni matrica iz $\hat{\Omega}(A)$ ispunjavaju ceo minimalni Geršgorinov skup.

Kako bi dokazao prethodnu teoremu, Varga je uveo neke korisne koncepte u istraživanju osobina minimalnog Geršgorinovog skupa. Naime, za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ i kompleksni broj $z \in \mathbb{C}$, definišemo matricu $Q(z) = [q_{ij}(z)] \in \mathbb{R}^{n,n}$ sa

$$q_{ii}(z) := -|z - a_{ii}| \text{ i } q_{ij}(z) := |a_{ij}|, \text{ za } i \neq j (i, j \in N). \tag{3.124}$$

Ako obeležimo

$$\mu(z) := \max_{i \in N} |z - a_{ii}|, \tag{3.125}$$

dobijamo da matrica $B(z) := [b_{ij}(z)] \in \mathbb{R}^{n,n}$, definisana sa

$$b_{ii}(z) := \mu(z) - |z - a_{ii}| \text{ i } b_{ij}(z) := |a_{ij}|, i \neq j (i, j \in N), \tag{3.126}$$

zadovoljava

$$B(z) = Q(z) + \mu(z) I_n. \tag{3.127}$$

$B(z)$ je nenegativna matrica u $\mathbb{R}^{n,n}$, pa prema Peron-Frobenijusovoj[13] teoremi o nenegativnim matricama (teorema C.2 iz [37]) spektralni radius matrice $B(z)$, $\rho(B(z))$, je nenegativan karakteristični koren i postoji nenegativni karakteristični vektor $y \geq 0$, takav da je $By = \rho(B)y$. $\rho(B(z))$ se može karakterisati sa

$$\rho(B(z)) = \inf_{x > 0} \Big\{ \max_{i \in N} \{(B(z)x)_i / x_i\} \Big\}. \tag{3.128}$$

Stoga, ako postavimo

$$\nu_A(z) := \rho(B(z)) - \mu(z) \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{3.129}$$

onda je $\nu_A(z)$ funkcija koja $\mathbb{C}$ preslikava u $\mathbb{R}$. Ona može biti izražena kao

$$\nu_A(z) = \inf_{x > 0} \Big\{ \max_{i \in N} \{(Q(z)x)_i / x_i\} \Big\} = \inf_{x > 0} \Big\{ \max_{i \in N} \{r_i^X(A) - |z - a_{ii}|\} \Big\}. \tag{3.130}$$

Teorema 3.3.33 *Za $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \leq 2$ važi*

$$z \in \Gamma^{\mathbb{D}}(A) \textit{ ako i samo ako } \nu_A(z) \geq 0. \tag{3.131}$$

Štaviše, ako $z \in \partial\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$, tada je $\nu_A(z) = 0$ i obratno, ako $\nu_A(z) = 0$ i ako postoji niz kompleksnih brojeva $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\lim_{k \to \infty} z_k = z$, takav da je $\nu_A(z_k) < 0$, za svako $k \in \mathbb{N}$, onda $z \in \partial\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$.

[13] Perron-Frobenius

Posledica jednakosti (3.130) je da je funkcija ν_A uniformno neprekidna po kompleksnoj promenljivoj z, tj. za svaka dva kompleksna broja $z, z' \in \mathbb{C}$ važi da je

$$|\nu(z) - \nu(z')| \leq |z - z'| \tag{3.132}$$

Minimalni Geršgorinov skup matrice A može biti izražen preko uniformno neprekidne funkcije ν_A, čije su vrednosti realne. Ovo svojstvo se ispostavilo kao veoma korisno, što ćemo videti u nastavku.
Posmatrajmo slučaj u kome je A nerazloživa matrica, nenegativna matrica $B(z)$ je takođe nerazloživa. Na osnovu Peron-Frobenijus teoreme (teorema C.1 u [37]) matrica $B(z)$ ima pozitivan realan karakteristični koren, $\rho(B(z))$, koji nazivamo Peronov koren matrice $B(z)$, koji karakterišemo sa:
Za bilo koje $x > 0$ u $\mathbb{R}^n$ ili

$$\min_{i \in N}\{(B(z)x)_i / x_i\} < \rho(B(z)) < \max_{i \in N}\{(B(z)x)_i / x_i\}, \tag{3.133}$$

ili

$$B(z)x = \rho(B(z))x. \tag{3.134}$$

Štaviše, iz (3.133) i (3.134), za bilo koje $x > 0$ iz $\mathbb{R}^n$ i bilo koje $z \in \mathbb{C}$ ili

$$\min_{i \in N}\{(Q(z)x)_i / x_i\} < \nu_A(z) < \max_{i \in N}\{(Q(z)x)_i / x_i\}, \tag{3.135}$$

ili

$$Q(z)x = \nu_A(z)x, \tag{3.136}$$

odakle iz poslednje jedanakosti imamo da je $\nu_A(z)$ karakteristični koren $Q(z)$.
Naredna teorema, preuzeta iz rada [37], koju navodimo bez dokaza razjašnjava geometrijsku strukturu minimalnog Geršgorinovog skupa.

Teorema 3.3.34 (Varga) *Neka je data nerazloživa matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, tada za svako $k \in N$ i svako θ takvo da je $0 \leq \theta \leq 2\pi$ postoji $\hat{\varrho}_k(\theta) \geq 0$ takvo da je ceo kompleksni interval $[a_{kk} + te^{i\theta}]_{t=0}^{\hat{\varrho}_k(\theta)}$ sadržan u $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$ i tada važi*

$$\bigcup_{\theta=0}^{2\pi}[a_{kk} + te^{i\theta}]_{t=0}^{\hat{\varrho}_k(\theta)} \subseteq \Gamma^{\mathbb{D}}(A). \tag{3.137}$$

Iz pretpostavke da je A nerazloživa se može zaključiti da je

$$\nu_A(a_{ii}) > 0, \text{ za svako } i \in N, \tag{3.138}$$

i da za bilo koji realan broj θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ postoji najveći broj $\hat{\varrho}_i(\theta) > 0$ takav da je

$$\nu_A(a_{ii} + \hat{\varrho}_i(\theta)e^{i\theta}) = 0, \text{ i } \nu_A(a_{ii} + te^{i\theta}) \geq 0, \text{ za svako } 0 \leq t \leq \hat{\varrho}_i(\theta), \tag{3.139}$$

pa ceo kompleksni interval $[a_{ii} + te^{i\theta}]_{t=0}^{\hat{\varrho}_i(\theta)}$ leži u $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$. Iz ovoga imamo da je skup $\bigcup_{\theta=0}^{2\pi}[a_{ii} + te^{i\theta}]_{t=0}^{\hat{\varrho}_i(\theta)}$ podskup oblika zvezde skupa $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$, za svako $i \in N$ pri čemu je

$$\nu_A(a_{ii} + \hat{\varrho}_i(\theta)e^{i\theta}) \in \partial\Gamma^{\mathbb{D}}(A). \tag{3.140}$$

Skup iz (3.137) nazivamo podskup oblika zvezde skupa $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$ u odnosu na tačku a_{kk}. Ovaj koncept se koristi u izračunavanju minimalnog Geršgorinovog skupa koje prikazujemo u nastavku.

Određivanje minimalnog Geršgorinovog skupa nije numerički jednostavno. Primetimo da kada je $\nu_A(z) = 0$, tada je $detQ(z) = 0$ što sledi iz (3.136), jer je $\nu_A(z)$ karakteristični koren matrice $Q(z)$. Na osnovu teoreme 3.3.33, možemo videti da u skladu sa određivanjem rubnih tačaka minimalnog

Geršgorinovog skupa za matricu A, trebamo izračunati kompleksne vrednosti z, za koje je determinanta nula. Kako računanje determinante nije lak posao, na drugi način ćemo doći do vrednosti koje se nalaze na rubu minimalnog Geršgorinovog skupa.
Za nerazloživu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, uzmimo neko $j \in N$ i postavimo $z = a_{jj}$. Zatim pretpostavimo da je nenegativna nerazloživa matrica $B(a_{jj})$, koja ima bar jedan dijagonalni elemenat (definisan sa (3.126)) jednak nuli, primitivna matrica[14].

Ako $B(a_{jj})$ nije primitivna matrica, tj. ako je $B(a_{jj})$ ciklična za neki indeks $p \geq 2$, tada je bilo koja modifikacija $B(a_{jj})$ u $B(a_{jj}) + \varepsilon I_n$ primitivna za svako $\varepsilon > 0$. Za primitivnu matricu $B(a_{jj})$ i početni vektor $x^{(0)} > 0$ iz $\mathbb{R}^{n,n}$, stepeni metod daje konvergentnu gornju i donju ocenu za $\rho(B(a_{jj}))$, tj. ako je $x^{(m)} := B^m(a_{jj})x^{(0)}$ za svako $m \geq 1$, tada za $x^{(m)} := [x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}]^T$ imamo

$$\underline{\lambda_m} := \min_{i \in N}\{\frac{x_i^{(m+1)}}{x_i^{(m)}}\} \leq \rho(B(a_{jj})) \leq \max_{i \in N}\{\frac{x_i^{(m+1)}}{x_i^{(m)}}\} =: \overline{\lambda_m} \tag{3.141}$$

za svako $m \geq 1$, gde je

$$\lim_{m \to \infty} \underline{\lambda_m} = \rho(B(a_{jj})) = \lim_{m \to infty} \overline{\lambda_m}. \tag{3.142}$$

Na ovaj način primenjujući (3.127), (3.129) i (3.135) možemo numerički dobiti konvergentne gornje i donje ocene za $\nu_A(a_{jj})$.
Pretpostavimo dalje da je $\nu_A(a_{jj})$ tačno poznato i uzmimo bilo koje realno θ takvo da je $0 \leq \theta < 2\pi$. U cilju nam je da odredimo najveće $\hat{\varrho}_j(\theta)$ sa dovoljnom tačnošću, za koje je (iz (3.129))

$$\nu_A(a_{jj} + \hat{\varrho}_j(\theta)e^{i\theta}) = 0, \text{ i } \nu_A(a_{jj} + (\hat{\varrho}_j(\theta) + \varepsilon)e^{i\theta}) < 0 \tag{3.143}$$

za dovoljno malo $\varepsilon > 0$. Po definiciji, tada imamo da je

$$a_{jj} + \hat{\varrho}_j(\theta)e^{i\theta} \tag{3.144}$$

rubna tačka skupa $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$.
Na osnovu min-max uslova (3.135)-(3.136) imamo da postoji $x > 0$ u $\mathbb{R}^n$ takvo da je

$$Q(a_{jj} + \hat{\varrho}_j(\theta)e^{i\theta})x = 0. \tag{3.145}$$

Ekvivalentno, neka je $a_{jj} + \hat{\varrho}_j(\theta)e^{i\theta} =: z_j(\theta)$, tada izraz (3.145) možemo izraziti (korišćenjem definicije (3.124)) kao

$$|z_j(\theta) - a_{ii}| = \sum_{k \in N \setminus \{i\}} \frac{|a_{ik}|x_k}{x_i}, \quad (\text{ sve } i \in N), \tag{3.146}$$

što može biti interpretirano, na osnovu teoreme (3.3.8), kao dati rezultat Olge Tauski. Geometrijski je nepotrebno odrediti komponente vektora $x > 0$ iz $\mathbb{R}^n$ za koje (3.146) važi. Ovo je nepotrebno iz razloga što poznavanjem rubne tačke $z_j(\theta)$ skupa $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$ i poznavanjem svih centara $\{a_{ii}\}_{i \in N}$ za n Geršgorinovih krugova, svi krugovi dati sa (3.146) mogu biti direktno iscrtani, bez poznavanja komponenti vektora x.
Vratimo se na numeričko određivanje $\hat{\varrho}_j(\theta)$, koje zadovoljava (3.143)-(3.145). Postavimo da su $z := a_{jj}$ i $z' := a_{jj} + \hat{\varrho}_j(\theta)e^{i\theta}$, znamo na osnovu (3.132) da je

$$\hat{\varrho}_j(\theta) \geq \nu_A(a_{jj}) > 0. \tag{3.147}$$

Uzmimo dalje u obzir broj $\nu_A(a_{jj} + \nu_A(a_{jj})e^{i\theta})$. Ako je ovaj broj pozitivan, onda se broj $\nu_A(a_{jj})$ povećava na $\nu_A(a_{jj}) + \Delta, \Delta > 0$, dok ako je $\nu_A(a_{jj} + \nu_A(a_{jj})e^{i\theta})$ negativno, primenom metode polovljenja na intervalu $[\nu_A(a_{jj}), \nu_A(a_{jj} + \Delta]$ za određivanje $\hat{\varrho}_j(\theta)$ koje zadovoljava (3.143). Napomenimo da slična metoda polovljenja za z, može biti direktno primenjena na

$$detQ(\nu_A(a_{jj} + \hat{\varrho}_j(\theta)e^{i\theta})) = 0, \tag{3.148}$$

[14]Matrica A je primitivna matrica ako je nenegativna i ako je m-ti stepen date matrice pozitivan za neko $m \in \mathbb{N}$.

s tim da ovo zahteva računanje determinante matrice dimenzije $n \times n$.
Drugi način za računanje vrednosti $\hat{\varrho}_j(\theta)$, tj. vrednosti $z_j(\theta)$ je upotreba uniformne neprekidnosti ν_A i konstruisanje niza $\{\xi_k^\theta\}_{k\in\mathbb{N}}$ koji konvergira ka vrednosti $z_j(\theta)$.

Za indeks $j \in N$ definišemo da prvi elemenat niza bude j-ti podskup oblika zvezde, tj. $\xi_1 := a_{jj}$. Zatim, za fiksiran smer $0 \leq \theta < 2\pi$, definišimo rekurzivno

$$\xi_{k+1}^\theta := \xi_k^\theta + \nu_A(\xi_k^\theta)e^{i\theta}, \tag{3.149}$$

za $k \in \mathbb{N}$.

Kako je $\nu_A(\xi_k^\theta) > 0$, za $k = 1$, indukcijom se može dokazati, koristeći neprekidnost od ν_A, da je $\nu_A(\xi_k^\theta) \geq 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$ i stoga dobijamo da je (3.149) monoton niz u smeru θ. Sa druge strane, za $k \in \mathbb{N}\nu_A(\xi_k^\theta) \geq 0$ implicira, na osnovu teoreme (3.118) da $\xi_k^\theta \in \Gamma^{\mathbb{D}}(A)$, koji je ograničen skup u $\mathbb{C}$. Dakle, dobili smo da je niz $\{\xi_k^\theta\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Preostaje da se osigura da će granica biti tačka z_j^θ. Za $\lim_{k\to\infty} \xi_k^\theta =: \xi^\theta$, puštajući da $k \to \infty$ u (3.149) dobijamo da je $\nu_A(\xi^\theta) = 0$. Preostaje nam samo da proverimo da li je $\nu_A(\xi^\theta + \varepsilon e^{i\theta}) < 0$, za razumno malo $\varepsilon > 0$. Ako je ovo tačno, onda je $z_j^\theta = \xi^\theta$. Ako nije tačno, ponovo pokrenimo niz (3.149) za $\xi_1^\theta := \xi^\theta$.

Dakle, za nerazloživu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, dati postupak aproksimacije minimalnog Geršgorinovog skupa, $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$, je prvo utvrđivanje, sa razumnom tačnošću, pozitivnih brojeva $\{\nu_A(a_{jj})\}_{j\in N}$, i zatim sa razumnom tačnošću, određivanje nekoliko rubnih tačaka $\{\omega_k\}_{k=1}^m$ skupa $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$. Za svaku od rubnih tačaka ω_k skupa $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$ postoji odgovarajući Geršgorinov skup, koji se sastoji od unije n Geršgorinovih krugova, naime

$$\Gamma^{\omega_k}(A) := \bigcup_{i\in N}\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq |\omega_k - a_{ii}|\}, \tag{3.150}$$

i njihov presek

$$\bigcap_{k=1}^{m} \Gamma^{\omega_k}(A), \tag{3.151}$$

daje aproksimaciju za $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$, za koju je $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$ podskup, i za koju su m tačaka sa ruba $\cap_{k=1}^m \Gamma^{\omega_k}(A)$ rubne tačke skupa $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$.

Drugi, numerički zahtevniji, način za prikazivanje minimalnog Geršgorinovog skupa je da se generiše fina mreža čvornih tačaka z u kompleksnoj ravni u kojima se izračunava navedena vrednost $\nu_A(z)$ i potom se rezultat prikazuje u vidu konturnih linija nultog reda. Kako se u primerima u ovom radu razmatraju matrice relativno malog reda, ovakav postupak nam je odgovarajući pa ćemo ga koristiti prilikom crtanja lokalizacija pomoću minimalnog Geršgorinovog skupa.

3.4 Iterativni postupci za rešavanje sistema linearnih jednačina

Iterativni postupci za rešavanje sistema linearnih jednačina predstavljaju aktuelnu temu u savremenim istraživanjima, pre svega zbog neprekidnog razvoja računara. Za mnoge velike sisteme linearnih jednačina, koji proističu iz inženjerskih problema, kao što je predmet ovog rada, direktne metode bi zahtevale previše vremena i/ili prostora. Iterativni postupci u većini slučajeva ne rezultiraju tačnim rešenjem nakon konačnog broja koraka, već postepeno smanjuju grešku nakon svakog koraka. Postupak je konvergentan ako se sa povećanjem broja iteracija aproksimacija rešenja približava tačnom rešenju. Iteracija završava kada se greška smanji ispod neke predefinisane granice. Konačna greška zavisi od broja koraka i od svojstava postupka i linearnog sistema. Cilj razvoja iterativnih postupaka je stvaranje postupaka koji će što brže i sa što manje posla po iteraciji dostići predefinisanu granicu greške. Iterativni postupci, osim što ne daju potpuno precizno rešenje sistema linearnih jednačina imaju još jedan nedostatak, a to je da iterativni postupci ne konvergiraju ka rešenju za bilo koji oblik matrice koeficijenata, i o tome će biti diskusija u nastavku. U ovom radu razmatramo iterativne postupke tipa fiksne tačke.

Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \tag{3.152}$$

možemo pisati jednostavnije u matričnoj formi kao $Ax = b$, gde je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrica koeficijenata a $x, b \in \mathbb{R}^n$. Ovakav sistem je moguće zapisati i u obliku fiksne (nepokretne) tačke kao

$$x = Mx + d$$

gde $M \in \mathbb{R}^{n,n}$, $x, d \in \mathbb{R}^n$. Pod pojmom iterativni postupak se smatra postupak koji generiše niz $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ koji konvergira ka rešenju sistema linearnih jednačina, $x = A^{-1}b$, i u skladu sa zapisom definišemo opšti iterativni postupak kao

$$\text{za } x^{(0)} \in \mathbb{R}^n,\ x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + d,\ k = 0, 1, 2 \ldots, \tag{3.153}$$

gde $M \in \mathbb{R}^{n,n}$, $d \in \mathbb{R}^n$. Slede osnovne teoreme o konvergenciji opšteg iterativnog postupka tipa fiksne tačke.

Teorema 3.4.1 *Neka je $M \in \mathbb{R}^{n,n}$, $d \in \mathbb{R}^n$ i $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ proizvoljno. Neka je niz $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ generisan postupkom* (3.153). *Ako postoji $L \in (0, 1)$ tako da je $||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| \leq L||x^{(k)} - x^{(k-1)}||$ za svako $k \in \mathbb{N}_0$ i neku vektorsku normu $||.||$, tada niz $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ konvergira ka nekom $x^{(t)} \in \mathbb{R}^n$, za koji važi da je $x^{(t)} = Mx^{(t)} + d$.*

Teorema 3.4.2 *Ako je $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ takva da za neku normu važi $||M|| < 1$, tada sistem linearnih jednačina $x = Mx+d$, $d \in \mathbb{R}^n$ ima jedinstveno rešenje $x^{(t)}$ i $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(t)}$, $x^{(k+1)} = Mx^{(k)}+d$, za proizvoljno $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.*

Teorema 3.4.3 *Niz vektora $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ definisan sa* (3.153) *konvergira ka jedinstvenom rešenju x sistema $x = Mx + d$ za svaki startni vektor $x^{(0)}$ ako i samo ako je $\rho(M) < 1$.*

Dokaz:($\Leftarrow$)Neka je $\rho(M) < 1$, tada znamo da postoji matrična norma, takva da je $\rho(M) \leq \|M\| < 1$, pa na osnovu teoreme 3.4.2 opšti iterativni postupak konvergira.
($\Rightarrow$) Pretpostavimo da opšti iterativni postupak konvergira, tj. neka postoji $x^{(t)} = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$, tj. $x^{(t)} = Mx^{(t)} + d$ za svaki startni vektor $x^{(0)}$. Izaberemo polaznu tačku $x^{(0)} = x^{(t)} + e^j$, $j = 1, 2, \ldots n$, gde je e^j vektor standardne baze. U odeljku 3.1 smo naveli da je $\rho(M) < 1$ ako i samo ako je $\lim_{k\to\infty} M^k = 0$, pa

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= Mx^{(k)} + d = M(Mx^{(k-1)} + d) + d = M^2x^{(k-1)} + Md + d = \ldots \\ \ldots &= M^{k+1}x^{(0)} + M^k d + \cdots + Md + d = \\ &= M^{k+1}x^{(0)} + (M^k + \cdots + M + I)d = \\ &= M^{k+1}x^{(0)} + (\sum_{j=0}^{k} M^j)d \end{aligned}$$

Kako $x^{(k)} \to x^{(t)}, k \to \infty$ imamo da $x^{(k+1)} - x^{(t)} \to 0$, kad $k \to \infty$, pa je $Mx^{(k)} + d - (Mx^{(t)} + d) \to 0, k \to \infty$, odnosno $M(x^{(k)} - x^{(t)}) \to 0$, kad $k \to \infty$. Odnosno

$$M^{k+1}(x^{(0)} - x^{(t)}) \to 0 \quad k \to \infty.$$

Za $x^{(0)} = x^{(t)} + e^j$, $M^{k+1}e^j \to 0$, kad $k \to \infty$, što bi značilo da j-ta kolona matrice M^{k+1} teži nuli za svako $j = 1, 2, \ldots n$. Dakle dobili smo da je $\lim_{k\to\infty} M^k = 0$, a to znači da je $\rho(M) < 1$.

□

Osim konvergencije iterativnih postupaka, veoma bitnu ulogu igra brzina konvergencije, pa je iz tog razloga definišemo u narednoj definiciji.

Definicija 3.4.4 *Brzina konvergencije iterativnog postupka se definiše kao* $v(M) = -\ln \rho(M)$.

Iz definicije je lako uočiti da je brzina konvergencije veća što je $\rho(M)$ bliže 0, dok postupak sporije konvergira kada je $\rho(M)$ blizu 1.

Teorema 3.4.5 *Neka je* $M \in R^{n,n}$. *Ako je* $\rho(M) = 0$, *tada opšti iterativni postupak dat sa* (3.153) *daje tačno rešenje sistema* $x = Mx + d$ *u* n*-tom koraku.*

Dokaz: Neka je $\rho(M) = 0$. To znači da je $\max_{1 \le i \le n} |\lambda_i| = 0$, odnosno, u tom slučaju su $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Dakle nula je rešenje karakterističnog polinoma $\lambda^n = 0$. Na osnovu Kejli-Hamiltonove teoreme je $M^n = 0$.

$$x^{(n)} = M^{n-1}d + \cdots + Md + d = (M^{n-1} + \cdots + M + I)d$$

Primetimo da je $(I-M)(M^{n-1}+\cdots+M+I) = (I-M^n) = I$ i da je $(M^{n-1}+\cdots+M+I)(I-M) = (I - M^n) = I$, tj. da je

$$(M^{n-1} + \cdots + M + I) = (I - M)^{-1}.$$

Dakle, dobili smo da je $x^{(n)} = (I - M)^{-1}d$, tj.

$$x^{(n)} = Mx^{(n)} + d,$$

što znači da je $x^{(n)}$ rešenje sistema linearnih jednačina $x = Mx + d$.

□

Definicija 3.4.6 *Razlaganje matrice A je matrični par* (M, N) *takav da je* $A = M - N$, *pri čemu je* M *regularna matrica.*

Kako se u zavisnosti od načina razlaganja matrice dobijaju različiti iterativni postupci, postoji detaljno razrađena teorija o razlaganjima u [42], i u ovom radu koristimo tri najpoznatija razlaganja: Jakobijevo, Gaus Zajdelovo i SOR.

3.4.1 Jakobijev iterativni postupak

Dakle rešavamo sistem $Ax = b$, gde $A \in \mathbb{R}^{n,n}, b \in \mathbb{R}^n$, tj.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = bi, \quad i = 1, 2, \ldots n \text{ odnosno,}$$

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j \neq i} \frac{a_{ij}x_j}{a_{ii}}, \text{ za } a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.154}$$

Na osnovu (3.154) definišimo Jakobijev iterativni postupak sa

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j \neq i} \frac{a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}, \text{ za } a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.155}$$

odnosno u matričnom zapisu

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{3.156}$$

tj.

$$x^{(k+1)} = D^{-1}b + D^{-1}Bx^{(k)}, \tag{3.157}$$

gde je $D = diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$ i $B = D - A$. Dakle razlaganje matrice A je matrični par (D, B), tj. $A = D - B$. Matricu $B_J = D^{-1}B$ nazivamo Jakobijeva matrica. Neka je $d_J = D^{-1}b$, sistem (3.157) u tom slučaju zapisujemo kao

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + d_J \tag{3.158}$$

Na osnovu konvergencije opšteg iterativnog postupka imamo da ovaj iterativni postupak konvergira ako i samo ako je $\rho(B_J) < 1$.

Teorema 3.4.7 *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ako je A SDD matrica, tada Jakobijev iterativni postupak za rešavanje sistema $Ax = b$, dat sa* (3.158) *konvergira za svaki startni vektor.*

Dokaz: Na osnovu konvergencije opšteg iterativnog postupka imamo da ovaj iterativni postupak konvergira ako i samo ako je $\rho(B_J) < 1$. Pokazaćemo da je $\|B_J\|_\infty < 1$.

$$B_J = \begin{cases} 0, & i = j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j \end{cases}$$

$$\|B_J\|_\infty = \max_{i \in N} \sum_{j=1}^{n} |(B_J)_{ij}| = \max_{i \in N} \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = \max_{i \in N} \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| = \max_{i \in N} \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|} < 1$$

jer je pretpostavka teoreme da je A SDD matrica, tj. $\forall i \in N$, $|a_{ii}| > r_i(A)$.

□

Teorema 3.4.8 *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ako je A H matrica, tada Jakobijev iterativni postupak za rešavanje sistema $Ax = b$, dat sa* (3.158) *konvergira za svaki startni vektor.*

Dokaz: Neka je A H matrica, tada postoji regularna dijagonalna matrica W, takva da je AW SDD matrica. Neka je $\tilde{A} := W^{-1}AW$, tada je i ova matrica SDD, pa je na osnovu prethodne teoreme $\rho(B_J(\tilde{A})) < 1$. Dokazaćemo da je matrica $B_J(\tilde{A})$ slična sa matricom $B_J(A)$, jer slične matrice imaju jednake karakteristične korene.

$$A = D - B, B_J(A) = D^{-1}B, D = diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$
$$\tilde{A} = \tilde{D} - \tilde{B}, B_J(\tilde{A}) = \tilde{D}^{-1}\tilde{B}, \tilde{D} = diag(\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{22}, \dots, \tilde{a}_{nn})$$
$$\tilde{A} = W^{-1}AW = W^{-1}(D - B)W = W^{-1}DW - W^{-1}BW = D - \tilde{B}$$
$$B_J(\tilde{A}) = (W^{-1}DW)^{-1}(W^{-1}BW) = W^{-1}D^{-1}BW = W^{-1}B_J(A)W$$

Pa imamo da su matrice $B_J(\tilde{A})$ i $B_J(A)$ slične, tj. da im je $\rho(B_J(A)) = \rho(B_J(\tilde{A})) < 1$.

□

3.4.2 Gaus-Zajdelov iterativni postupak

Kao i u Jakobijevom iterativnom postupku, rešavamo sistem $Ax = b$, gde $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, odnosno

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j + a_{ii}x_i + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j = bi, \quad i = 1, 2, \dots n \text{ odakle je,}$$

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \tag{3.159}$$

Na osnovu (3.159) definišimo Gaus-Zajdelov iterativni postupak sa

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}, \text{ za } a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.160}$$

odnosno u matričnom zapisu uz razlaganje $A = D - L - U$, gde je $D = diag(A)$, a $L = [l_{ij}]$ i $U = [u_{ij}]$ su definisane sa

$$l_{ij} = \begin{cases} 0, & i \leq j, \\ -a_{ij}, & i > j, \end{cases} \qquad u_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i < j, \\ 0, & i \geq j \end{cases}$$

sistem izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{3.161}$$

tj.

$$(D - L)x^{(k+1)} = b + Ux^{(k)} \tag{3.162}$$

Za $a_{ii} \neq 0$, $det(D - L) \neq 0$, pa postoji $(D - L)^{-1}$, na osnovu čega sistem (3.162) možemo pisati u obliku

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}b + (D - L)^{-1}Ux^{(k)} \tag{3.163}$$

pri čemu matricu $B_G = (D-L)^{-1}U$ nazivamo Gaus-Zajdelova matrica, i tada sistem (3.163) zapisujemo kao

$$x^{(k+1)} = B_G x^{(k)} + d_G, \tag{3.164}$$

gde je $d_G = (D - L)^{-1}b$.

Teorema 3.4.9 *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ako je A SDD matrica, tada Gaus-Zajdelov iterativni postupak za rešavanje sistema $Ax = b$, dat sa* (3.164) *konvergira za svaki startni vektor.*

Dokaz: Dakle, treba da pokažemo da je pod uslovom da je A SDD matrica, $\rho(B_G) < 1$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(B_G)| \geq 1$, odnosno, postoji neko $i \in N$, tako da je karakteristični koren $\lambda = \lambda_i(B_G)$, takav da je $|\lambda_i(B_G)| \geq 1$. Tada je $det(\lambda I - B_G) = 0$, tj $det(\lambda I - (D-L)^{-1}U) = 0$, pa je

$$det((D - L)^{-1}(\lambda(D - L) - U)) = det((D - L)^{-1})det(\lambda(D - L) - U) = 0,$$

iz čega sledi da je matrica $\lambda(D - L) - U$ singularna. Neka je $\tilde{A} = \lambda(D - L) - U$, tada su

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} \lambda a_{ij}, & i \geq j, \\ a_{ij}, & i < j. \end{cases}$$

Označimo $l_i(A) = \sum_{j<i} |a_{ij}|$ i $u_i(A) = \sum_{j>i} |a_{ij}|$, kako je matrica A SDD matrica, važi

$$|a_{ii}| > r_i(A) = l_i(A) + u_i(A). \tag{3.165}$$

Sa druge strane imamo da je $|\tilde{a}_{ii}| = |\lambda||a_{ii}|$ i da je $r_i(\tilde{A}) = |\lambda|l_i(A) + u_i(A)$, pa je

$$|\tilde{a}_{ii}| - r_i(\tilde{A}) = |\lambda||a_{ii}| - |\lambda|l_i(A) - u_i(A) = |\lambda|(|a_{ii}| - l_i(A)) - u_i \tag{3.166}$$

Na osnovu toga što je pretpostavka da je $|\lambda| > 1$ i (3.165) poslednji izraz je strogo veći od nule, za svako $i \in N$, pa je $\tilde{A}$ SDD matrica, odnosno regularna je, što je kontradikcija. Dakle, $\rho(B_G) < 1$, pa Gaus-Zajdelov iterativni postupak konvergira za svaki startni vektor.

□

Teorema 3.4.10 *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ako je A H matrica, tada Gaus-Zajdelov iterativni postupak za rešavanje sistema $Ax = b$, dat sa* (3.164) *konvergira za svaki startni vektor.*

Dokaz ove teoreme je analogan dokazu teoreme 3.4.8, te ga stoga nećemo ispisivati.

3.4.3 SOR iterativni postupak

Relaksacioni postupci čine posebnu klasu iterativnih postupaka i spadaju usled svojih mogućnosti i prilagodljivosti u grupu atraktivnih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina. Relaksacija iterativnog postupka je, zapravo, tehnika uvođenja jednog ili više relativno slobodnih parametara pomoću kojih se može kontrolisati brzina konvergencije. Iz tih razloga odgovori na pitanje za koje parametre dati relaksacioni postupak konvergira predstavlja važnu temu istraživanja u ovoj naučnoj oblasti. SOR postupak je upravo relaksacioni iterativni postupak sa jednim parametrom.
Ideja SOR postupka se sastoji u množenju korekcije Gaus-Zajdelovog postupka, nekim parametrom ω, pre dodavanja staroj iteraciji. Podrazumevamo razlaganje matrice $A = D - L - U$, gde je $D = diag(A)$, uz pretpostavku da je $det(D) \neq 0$, L je strogo donja trougaona matrica i U je strogo gornja trougaona matrica [40]. SOR postupak definišemo kao

$$x^{(m+1)} = \mathcal{L}_\omega x^{(m)} + c_\omega.$$

Iterativna matrica SOR postupka je $\mathcal{L}_\omega := (D - \omega L)^{-1}\Big((1-\omega)D + \omega U\Big)$ i $c_\omega := \omega(D - \omega L)^{-1}b$. $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se naziva parametar relaksacije. Za $\omega = 1$ SOR postupak postaje Gaus-Zajdelov.

Konvergencija ovakvog iterativnog postupka zavisi i od odabira parametra ω. Iz tog razloga nalazimo oblast konvergencije. Problem određivanja oblasti konvergencije je mnogo lakši od određivanja nekog ω_b, takvog da je $\rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = \min_{\omega \in \mathbb{C}\setminus\{0\}} \rho(\mathcal{L}_\omega)$. Na osnovu konvergencije opšteg iterativnog postupka imamo da je SOR postupak konvergentan za svaki startni vektor ako i samo ako je $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$.

Teorema 3.4.11 (Kahan) *Potreban uslov da SOR postupak konvergira je da je $|1 - \omega| < 1$. Za $\omega \in \mathbb{R}$ ovaj uslov je $\omega \in (0, 2)$.*

Napomena 3.4.12 *Dakle, za $\omega \notin (0, 2)$ SOR postupak sigurno neće konvergirati.*

Dokaz: Kako je

$$\mathcal{L}_\omega = (D - \omega L)^{-1}\Big((1-\omega)D + \omega U\Big)$$

imamo da je

$$det(\mathcal{L}_\omega) = det((D - \omega L)^{-1})det((1-\omega)D + \omega U).$$

Kako je

$$det((D - \omega L)^{-1}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{ii}}, \quad \text{i}$$

$$det((1-\omega)D + \omega U) = (1-\omega)^n \prod_{i=1}^{n} a_{ii},$$

imamo da je

$$|det(\mathcal{L}_\omega)| = |1-\omega|^n = |\prod_{i=1}^{n} \lambda_i| = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq \Big[\rho(\mathcal{L}_\omega)\Big]^n,$$

$$|1-\omega| \leq \rho(\mathcal{L}_\omega) < 1,$$

pa dobijamo da za $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \in (0,2)$.

□

Teorema 3.4.13 *Ako je matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ H matrica i ako je $\omega \in (0, \frac{2}{1+\rho(B_J)})$ tada je $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$.*

3.4.4 Haotični iterativni postupak

Haotična relaksacija je razvijena u radu [39]. Iako je daleko manje poznata od prethodnih iterativnih postupaka, u vrsti primene koju razmatramo pokazala se vrlo korisnom. Nazivamo je i asinhrona relaksacija za rešavanje sistema linearnih jednačina. U haotičnoj relaksaciji red kojim se komponente rešenja ažuriraju je proizvoljan, kao i prethodne vrednosti komponenti koje se koriste u ažuriranju. Ovaj metod je pogodan za izvršenje paralelnog računanja u kome različiti procesori rade nezavisno i imaju pristup vrednostima podataka u lokalnoj memoriji. Od presudnog značaja za ovaj rad je karakteristika ovakvog postupka - smanjenje programiranja i vremena potrebnog za obračun. Autori rada [39] definišu jednostavan potreban i dovoljan uslov za konvergenciju haotičnog postupka koji ćemo u nastavku prikazati.

Rešavamo sistem linearnih jednačina $Ax = b$, uz razlaganje matrice $A = D - B$, gde je $D = diag(A)$ i $B = D - A$. Neka je $M = D^{-1}B$ i $N = D^{-1}$. Haotični iterativni postupak za rešavanje sistema linearnih jednačina $Ax = b$ je definisan rekurzivno kao niz vektora x^j za $j = 1, 2, \dots$ sa

$$x_i^{j+1} = \begin{cases} x_i^j, & i \neq k_{n+1}(j) \\ \sum_{\alpha=1}^{n} m_{i\alpha} x_\alpha^{j-k_\alpha(j)} + \sum_{\alpha=1}^{n} n_{i\alpha} b_\alpha, & i = k_{n+1}(j). \end{cases} \tag{3.167}$$

Početni vektor $x^1 = [x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1]$ i vektor b su proizvoljni. Kao što smo naveli, M, N su matrice dimenzija $n \times n$, pri čemu su vrste matrica M, N označene sa $m^i = (m_{i1}, m_{i2}, \dots m_{in}$ i n^i, redom. Niz $\mathcal{S} = \{k_i(j) : i = 1, 2, \dots, n+1, j = 1, 2, \dots\}$ je sa osobinama da za neki fiksiran ceo broj $s > 0$ važi

i) $0 \leq k_i(j) < s, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, \dots$

ii) $1 \leq k_{n+1}(j) \leq n, \quad j = 1, \dots$

Štaviše, $k_{n+1}(j) = i$ skoro uvek za svako $i, s \leq i \leq n$. Definicija ovog niza se može interpretirati kao: U svakoj iteraciji j, $k_{n+1}(j)$-ta komponenta vektora x^j se ažurira dok ostalih $n-1$ komponenti ostaju nepromenjene. U ažuriranju se za prvu komponentu x^j (vektora x u tekućoj iteraciji) koristi vrednost $x^{j-k_1(j)}$, za drugu $x^{j-k_2(j)}$, itd. Postupak haotične relaksacije poistovećujemo sa trojkom $(M, N, \mathcal{S})$. Dakle, ovakav postupak se može razumeti kao implementacija opšteg iterativnog postupka u kojoj svaku komponentu vektora računa drugi procesor, pa se u svakoj iteraciji koriste najnovije izračunate vrednosti. Kako svaki procesor izračunava zadati posao u svom ritmu, dostupnost rezultata iz koraka u korak varira pa se zato postupak naziva haotičnim.

Definicija 3.4.14 *Haotični iterativni postupak je konzistentan sa linearnim sistemom $Ax = b$, sa rešenjem z, ako je z fiksna tačka preslikavanja* (3.167)*, tj.*

$$z = Mz + Nb. \tag{3.168}$$

Za izbor M, N koji je gore odabran imamo konzistentan haotični postupak. Bez umanjenja opštosti u nastavku podrazumevamo rešavanje homogenog linearnog sistema $Ax = 0$. Šira klasa konzistentnih postupaka odgovara relaksacionim postupcima sa parametrom ω. Označimo ih sa $(M^\omega, N^\omega, \mathcal{S})$. Ovde je $M^\omega = I - \omega D^{-1}A$ i $N^\omega = \omega D$. Primetimo da je $M^1 = M$ i $N^1 = N$.

Primer 3.4.15 *Neka je $\mathcal{S}$ definisano sa $k_1(j) = k_2(j) = \cdots = k_n(j) = 0$ i $k_{n+1}(j) \equiv (j-1)(\bmod n)$. U ovom slučaju je $s = 1$ i $k_{n+1}(j) = i$, za svako $i, i = 1, \ldots, n$ tačno jednom u n ažuriranja. Ovaj postupak je Gaus-Zajdelov postupak.*

Primer 3.4.16 *Neka je $\mathcal{S}$ definisano sa $k_1(j) = k_2(j) = \cdots = k_n(j) = k_{n+1}(j)$ i $k_{n+1}(j) = (j-1)(\bmod n)$. U ovom slučaju je $s = n$ i $k_{n+1}(j) = i$, za svako $i, i = 1, \ldots, n$ tačno jednom u n ažuriranja. Ovaj postupak je Jakobijev postupak.*

Sa $|M|$ i $|v|$ u nastavku označavamo matricu, odnosno vektor čiji su elementi apsolutne vrednosti matrice M, odnosno vektora v.

Teorema 3.4.17 *Neka je $(M, N, \mathcal{S})$ haotični iterativni postupak.*

a) Niz x^j konvergira ako postoji pozitivan vektor v i broj $\alpha, \alpha < 1$ takav da

$$|M|v \leq \alpha v$$

b) Ovo se dešava ako je spektralni radijus matrice $|M|$, $\rho(|M|) < 1$.

c) Ako ne postoji takvo v, tada postoji niz $\mathcal{S}_0$ koji zavisi od $|M|$, za koji iteracije koje odgovaraju $(M, N, \mathcal{S}_0)$ ne konvergiraju.

Dokaz: *a)* Dokaz dovoljnog uslova je podeljen u tri dela:

i) Skup $\{\omega : |\omega| \leq v\}$ je kontrahovan u sebe samog faktorom α pri množenju sa M.

ii) Niz iteracija x^j je ograničen.

iii) Niz iteracija x^j teži nuli.

i) Pretpostavimo da je $|\omega| \leq v$. Tada

$$|M\omega| \leq |M||\omega| \leq |M|v \leq \alpha v.$$

ii) Sada ćemo pokazati da ako je

$$|x^{j_1+1}|, \ldots, |x^{j_1+s}| \leq av$$

za neku konstantu $a > 0$ i dato j_1, onda je $|x^j| \leq av$ za svako $j \geq j_1 + s$. (Parametar s je onaj koji figuriše u definiciji haotičnog iterativnog postupka.) Ovo se može videti indukcijom po j. Pretpostavimo da je $|x^j| \leq av$ za svako $j \leq j_0, j_0 > j_1 + s$. Tada je ili $p \neq k_{n+1}(j_0)$ pa je $|x_p^{j_0+1}| \equiv |x_p^{j_0}| \leq av_p$, ili $p = k_{n+1}(j_0)$ pa je

$$x_p^{j_0+1} = z^T m^p,$$

gde je $z = [z_1, z_2, \ldots, z_n]^T$ i $z_l = x_l^{j_0 - k_l(j_0)}$. Stoga je $|z_l| \leq av_l$, za svako $l, 1 \leq l \leq n$. Na osnovu svojstva kontrakcije M (sa zamenom v sa av) imamo da je

$$z^T m^p \leq \alpha a v_p,$$

pa $x_p^{j_0+1} \leq av_p$ za svako p.

iii) Primetimo da ako je $|x^{j_1+1}|, \ldots, |x^{j_1+s}| \leq av$ tada je na osnovu rečenog gore $|x^j| \leq av$ za svako $j > j_1$. Ako je x_p ažurirano u iteraciji j_2, za $j_2 > j_1$, imamo da je za svako $j \geq j_2$

$$|x_p^j| = z^T m^p$$

za neko z čije su komponente takve da važi $z_p \leq av_p$, za svako $p = 1, 2, \ldots, n$. Otuda,

$$|x_p^j| \leq \alpha a v_p.$$

Neka j_3 bude iteracija, takva da za svako $1 \leq i \leq n$ postoji $j, j_0 + s \leq j \leq j_3$ da je $k_{n+1}(j) = i$. Iz gore navedenog $|x^j| \leq \alpha a v$ za svako $j \geq j_3$. Posebno $|x^j| \leq \alpha a v$ za $j_3 + 1 \leq j \leq j_3 + s$. Ponavljanjem gornje diskusije i koristeći činjenicu da se svaka komponenta ažurira skoro uvek, možemo primetiti da ako je $|x^j| < \alpha^i v$ za svako $j \geq j_i$ za neko j_i, tada postoji j_{i+1} gde je $|x^{j_{i+1}}| < \alpha^{i+1} v$ za svako $j \geq j_{i+1}$. Iz ovoga sledi da $|x^j| \to 0$, čime je dokaz *a)* završen.
(b) Prvo primetimo da ako matrica F ima oblik

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$$

gde je za neke pozitivne v_1 i v_2 $F_{11}v_1 \leq \alpha_1 v_1$, $F_{22}v_2 \leq \alpha_2 v_2$, tada za bilo koje $\varepsilon > 0$ postoji v tako da je $Fv \leq (\alpha + \varepsilon)v$, $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2)$. Zaista, neka je $v = [v_1^T, \gamma v_2^T]^T$. Tada

$$Fv \leq [(\alpha_1 v_1 + \gamma F_{12} v_2)^T, \gamma \alpha_2 v_2^T]^T.$$

Izborom dovoljno malog γ lako je videti da se $\alpha_1 v_1 + \gamma F_{12} v_2$ može učiniti manjim od $(\alpha_1 + \varepsilon)v_1$, dok uvek važi da je $\gamma \alpha_2 v_2 \leq \gamma \alpha v_2$. Dalje pokažimo da ako je $\rho(|M|) < 1$ onda postoji $v > 0$ tako da je $|M|v < \alpha v, \alpha < 1$. Ovo sledi na osnovu indukcije po broju komponenti u normalnoj redukovanoj formi (definisanoj sa 3.17) matrice $|M|$, i prethodnog zapažanja. Zaista, ovo je tačno ako je $|M|$ nerazloživa. Pretpostavimo da je pokazano za bilo koju matricu $|M|$ čija normalna redukovana forma ima n komponenti

$$|M| = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & M_{1n} \end{bmatrix}.$$

Sada pretpostavimo da $|M|$ ima $n + 1$ komponentu. Napišimo $|M|$ u obliku

$$|M| = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$$

gde F_{22} ima n komponenti i F_{11} je nerazloživa. Iz ovoga sledi da je $F_{11}v_1 \leq \alpha_1 v_1$. Štaviše, na osnovu indukcijske hipoteze je $F_{22}v_2 \leq \alpha_2 v_2$ kada je $\alpha_1 = \rho(|M|) < 1$ i $\alpha_2 \leq 1$. Stoga, za neko $\gamma > 0$, $v = [v_1^T, \gamma v_2^T]^T$ je

$$|M|v \leq \alpha v, \quad \alpha < 1.$$

Obratno, ako je $|M|v \leq \alpha v, v > 0, \alpha < 1$, M je kontrakcija u normi definisanoj sa $||x||_v = \max_i(\frac{|x_i|}{v_i})$. Stoga je spektralni radijus matrice $|M|$ manji od 1.
(c) Pretpostavimo da ne postoji v tako da je $|M|v < v$. Tada je na osnovu *(b)* $\rho(|M|) \geq 1$. Neka je v karakteristični vektor matrice $|M|$ koji odgovara spektralnom radijusu (prema Peron-Frobenijus teoremi za nenegativne matrice imamo da je spektralni radijus karakteristični koren). Tada v može biti izabran da je realan i nenegativan (na osnovu [41], str. 76). Koristeći ovu činjenicu, pokazaćemo kako konstruisati niz $\mathcal{S}_0$ tako da niz iteracija koji odgovara $(M, N, \mathcal{S}_0)$ divergira za neko početno z.
Neka je z takvo da je

$$Mz = z + v \quad \text{ili} \quad (M - I)z = v.$$

Ako su M, N konzistentne sa regularnom matricom A, tada z postoji. $\mathcal{S}_0$ konstruišemo kao:
Za $1 \leq j \leq n$ neka je

$$k_i(j) = j - 2, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k_{n+1}(j) = j - 1.$$

Ako iterativni postupak započnemo početnim vektorom z, sledeći iterativni niz je proizveden u n iteracija:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_1 + v_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_1 + v_1 \\ z_2 + v_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} z_1 + v_1 \\ z_2 + v_2 \\ \vdots \\ z_n + v_n \end{bmatrix}$$

gde je činjenica da je $z^T m^i = z_i + v_i$ korišćena redom. Ova n-torka vektora može biti zapisana kao suma dve n-torke σ_1^1 i σ_2^1,

$$\sigma_1^1 = (z + \frac{v}{2}, z + \frac{v}{2}, \dots, z + \frac{v}{2})$$

$$\sigma_2^1 = \left(\begin{bmatrix} -\frac{v_1}{2} \\ -\frac{v_2}{2} \\ \vdots \\ -\frac{v_n}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{v_1}{2} \\ -\frac{v_2}{2} \\ \vdots \\ -\frac{v_n}{2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \frac{v_1}{2} \\ \frac{v_2}{2} \\ \vdots \\ \frac{v_n}{2} \end{bmatrix} \right)$$

Neka je dalje $k_{n+1}(n+1) = 1$ i odaberimo $k_i(n+1)$, $i = 1, \dots, n$, tako da je $sgn(x_i^{n+1-k_i(n+1)}) = sgn(m_{i1})$. Sledi da je

$$x_1^{n+2} = \sum_i |m_{1i}||x_i^{n+1-k_i(n+1)}| = v^T m^1 = \rho v_1,$$

gde je ρ spektralni radijus matrice $|M|$. Možemo nastaviti ovaj postupak sa $k_{n+1}(j+1) \equiv j \mod n$ i ponovo birati $1 \leq k_i(j) = n+1$ tako da je $sgn(x_i^{j-k_i(j)}) = sgn(m_{ij})$ za $n+1 \leq j < 2n+1$ i $sgn(x_i^{j-k_i(j)}) = -sgn(m_{ij})$, za $2n+1 \leq j < 3n+1$. Rezultat ovog iterativnog postupka do $3n+1$ iteracije je uređena $(3n+1)$-torka

$$(\sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3) + (\sigma_2^1, \sigma_2^2, \sigma_2^3).$$

Gde su σ_1^2 i σ_1^3 iterativni nizovi generisani nizom ažuriranja jednakim onima opisanim iznad, ali primenjenim na σ_1^1, a σ_2^2 i σ_2^3 imaju oblik

$$\sigma_2^2 = \left(\begin{bmatrix} \frac{\rho v_1}{2} \\ \frac{v_2}{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{v_n}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\rho v_1}{2} \\ \frac{\rho v_2}{2} \\ \frac{v_3}{2} \\ \vdots \\ \frac{v_n}{2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \frac{\rho v_1}{2} \\ \frac{\rho v_2}{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\rho v_n}{2} \end{bmatrix} \right)$$

i

$$\sigma_2^3 = \left(\begin{bmatrix} -\frac{\rho v_1}{2} \\ \frac{\rho v_2}{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\rho v_n}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\rho v_1}{2} \\ -\frac{\rho v_2}{2} \\ \frac{\rho v_3}{2} \\ \vdots \\ \frac{\rho v_n}{2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} -\frac{\rho v_1}{2} \\ -\frac{\rho v_2}{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ -\frac{\rho v_n}{2} \end{bmatrix} \right)$$

Primetimo da poslednja kolona σ_2^2 zajedno sa σ_2^3 formira niz koji je jednak σ_2^1 ali kada sa $-\rho v_i$ zamenimo v_i. Ukoliko postavimo da je $k_i(j+2n) = k_i(j)$, $i = 1, \dots, n+1, j \geq n+1$ lako je videti da rezultujući niz σ_2^i ne može da konvergira ako je $\rho \geq 1$ i mora divergirati ako je $\rho > 1$. Pretpostavimo dalje da je niz σ_1^i konvergentan. Tada je $\sigma_1^i + \sigma_2^i$ niz haotičnog postupka sa početnim vektorom z koji je divergentan. Ako, sa druge strane niz σ_1^i divergira sličnim postupkom možemo konstruisati niz $\mathcal{S}$ tako da formirani niz vektora bude

$$z + \frac{v}{2}, \sigma_1^2, \sigma_1^3, \dots$$

divergentan.

□

Posledica 3.4.18 *Neka je matrica A zapisana kao $A = D - B$, gde je $D = diag(A)$ i $b_{ij} = a_{ij}, i \neq j$. Ako je $M^\omega = I - \omega D^{-1} A$, $N^\omega = \omega D^{-1}$, postupak $(M^\omega, N^\omega, \mathcal{S})$ konvergira za sve $\mathcal{S}$ koje zadovoljavaju pretpostavke u definiciji haotičnog iterativnog postupka i za $\omega = 1$ ako $\rho(|M|) = \alpha < 1$. Ako $0 < \omega < \frac{2}{1+\alpha}$ postupak mora isto konvergirati.*

Dokaz: Trebamo pokazati da $\rho(|M^{\omega}|) < 1$ ili da postoji $v > 0$ tako da je $|M^{\omega}|v \leq \beta v, \beta < 1$. Na osnovu *(b)* prethodne teoreme, znamo da postoji $v > 0$ tako da je $|M^1|v \leq \alpha v$. Ali tada

$$|M^{\omega}|v \leq (I(1-\omega) + \omega|M^1|)v \leq |(1-\omega)|v + \omega\alpha v = (|1-\omega| + \omega\alpha)v.$$

Neka je $\beta = (|1-\omega|+\omega\alpha)$. Preostaje da se pokaže da je $\beta < 1$. Ako je $1 \leq \omega \leq \frac{2}{1+2}, \beta = \alpha\omega+(\omega-1) = (1+\alpha)\omega - 1 < 1$. Takođe, ako je $0 \leq \omega \leq 1$, $\beta = \alpha\omega + (1-\omega) = (-(1-\alpha)\omega + 1) < 1$, pošto je $\alpha < 1$.

$\square$

Autori rada [39] ističu da ako je matrica A

i) simetrična i stiktno dijagonalno dominantna, ili

ii) nerazloživo dijagonalno dominantna, ili

iii) simetrična pozitivno definitna sa nepozitivnim elementima van dijagonale

tada konvergencija ovog iterativnog postupka važi.

4

Optimizacija napajanja bežičnih senzor mreža kroz okvir teorije igara

Bežične senzor mreže se obično sastoje od velikog broja senzora, koji obavljaju lokalno osmatranje nekih osnovnih fizičkih fenomena, kvantifikuju svoju opservaciju i prenose podatke u baznu stanicu. Zbog ograničene električne energije, senzori koji su daleko od bazne stanice, dostavljaju svoje kvantifikovane podatke kroz *multi hop* mreže. Cilj mrežnog senzora je da izmeri i proceni osnovni fizički fenomen, što je preciznije moguće uz ograničene mrežne resurse. Informacije sa svih senzora se dostavljaju i čuvaju u baznoj stanici u kojoj se stvara globalna slika o fizičkom fenomenu. Kako bežične senzor mreže imaju izuzetno širok spektar primene najveće izazove predstavljaju prevazilaženje izobličenja podataka i upotreba resursa energije na najefikasniji način.

Razvojem optimizacionih algoritama problema bežičnih senzor mreža se bave autori u radu [11], diskusija je proširena u radu [12] dok je pregled dat u [14]. U svom radu, autori se bave problemom *cross-layer* optimizacije (v. str. 15), pri čemu se celokupan problem može dekomponovati na dva potproblema, tako da svaki potproblem odgovara posebnom sloju celokupnog sistema (fizički sloj i sloj aplikacije), gde su za rešavanje oba potproblema usvojili pristup teorije igre. U nastavku ovog rada, biće izložena dekompozicija problema, iako će fokus biti na optimizaciji problema alokacije energije na fizičkom sloju, pri čemu će biti prezentovano uopštenje dovoljnog uslova pod kojim igra iz [11] ima jedinstvenu i stabilnu Nešovu ravnotežu, kao i modifikacija originalne igre kontrole napajanja, što je urađeno u radu [13].

Kako se bežične *ad-hoc* mreže odlikuju distribuiranim, dinamičkim, samoorganizovanim arhitekturama, svaki čvor u mreži je sposoban da samostalno prilagođava svoj rad zasnovan na trenutnom okruženju i prema utvrđenim algoritmima i protokolima. Dakle, zbog distribuirane i dinamičke prirode *ad-hoc* mreža, analitički modeli za procenu njihovih performansi su retki.

Posmatramo problem (4.1) koji je formulisan u glavi 2 ovog rada.

$$\begin{aligned} &\min \alpha^T d, \\ \text{gde} \quad s \in \mathcal{R}(d), \qquad &c \in \mathcal{C}(p), \qquad Ac \geq s, \end{aligned} \tag{4.1}$$

Data mreža je sa m senzora i n veza. Fundamentalni koncept u kodiranju izvora je stepen izobličenja regiona $\mathcal{R}$, koji je zatvaranje skupa parova distorzije (s, d) takvih da $s = [s_1, s_2, \ldots, s_m]^T$ koje je brzina slanja podataka, bude dovoljno da se posmatrani fenomen rekonstruiše uz distorziju $d = [d_1, d_2, \ldots, d_m]^T$. $\mathcal{R}$ je okarakterizovano kompromisom između brzine slanja podataka i distorzije. Osnovni koncept u kodiranju kanala je povezanost snage i kapaciteta u oznaci $\mathcal{C}$. Poslednja nejednakost u (4.1) odražava činjenicu da je brzina slanja podataka na svakom čvoru ograničena sa gornje strane kapacitetom veze $c = [c_1, c_2, \ldots, c_n]^T$. Rešavanje problema (2.9) je prilično pojednostavljeno tehnikom dualne dekompozicije [10]. Ideja je da dekomponujemo originalni problem u dva potproblema relaksacijom ograničenja $Ac \geq s$, koristeći skup dualnih varijabli (ili Lagranžove množitelje). Posmatrajmo Lagranžovu funkciju:

$$L(\lambda, s, d, c) = \alpha^T d + \lambda^T (s - Ac), \tag{4.2}$$

gde je $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m]^T$ Lagranžov množitelj. U Lagranžovoj funkciji (4.2) figurišu promenljive s, c i d, pri čemu su s i d promenljive iz sloja aplikacije, dok je c promenljiva koja opisuje fizički sloj. Uočavanjem ovog, problem optimizacije je dekomponovan u dva disjunktna potproblema – potproblem kontrole napajanja na fizičkom sloju:

$$\begin{aligned} &\max \mu^T c, \\ \text{gde} \quad &c \in \mathcal{C}(p) \end{aligned} \tag{4.3}$$

i potproblem kodiranja izvora na sloju aplikacije:

$$\begin{aligned} &\min \alpha^T d + \lambda^T s, \\ \text{gde} \quad &s \in \mathcal{R}(d), \end{aligned} \tag{4.4}$$

gde se $\mu = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]^T$ odnosi na dualnu promenljivu λ, gde je $\mu^T = \lambda^T A$. Lagranžovi množitelji μ i λ imaju interpretaciju senke cena pri koordinaciji tražnje sloja aplikacije i ponude fizičkog sloja. Senka cena je ustvari vrednost Lagranžovog množitelja u optimalnom rešenju, koja znači da beskonačno mala promena u funkciji cilja proističe iz beskonačno male promene u ograničenju. Veća vrednost λ_i za čvor i signalizira sloju aplikacije da je prenos podataka za taj čvor skup. Ovo utiče na opadanje brzine slanja podataka sa tog čvora. Veća vrednost μ_l za vezu l signalizira fizičkom sloju da da određenoj vezi visok prioritet. Na osnovu ovoga se ostvaruje porast kapaciteta prenosa na datoj vezi. Optimizacioni problem se može shvatiti kao usklađivanje ponude i tražnje, iterativnim pronalaženjem preseka stepena distorzije i nivoa kapacitet-snaga. Dualne promenljive su povezane preko matrice incidencije. Dakle, rešenje problema (4.1) se može dobiti rešavanjem dva navedena potproblema i ažuriranjem odgovarajućih dualnih varijabli.

Oba problema, (4.3) i (4.4) su inherentna, nelinearna i nekonveksna, pa ih je samim tim teško rešavati.

4.1 Optimizacija kontrole napajanja

Kao što smo već napomenuli, cilj ovog rada je da detaljnije izloži upotrebu dijagonalne dominacije u optimizaciji napajanja WSN, pa ćemo se, stoga, u daljem izlaganju fokusirati samo na potproblem fizičkog sloja i problem interferencija među okolnim senzorima. Dakle, usvojili smo oznake:

- g_{ii}- priraštaj veze
- g_{ij}- priraštaj interferencije veze j na vezu i
- p_i- upotreba energije
- ξ_i-šum veze

Vrednosti matrice priraštaja $G = [g_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ i vektora šuma $\xi \in \mathbb{R}^n$ se uglavnom dobijaju putem neke tehnike procene. Dalje smo pretpostavili da svaki čvor ima određeni budžet energije, tako da je proces napajanja veze i ograničen sa p_i^{max} tj. $p \leq p^{max} := [p_1^{max}, p_2^{max}, \ldots, p_n^{max}]^T$. Dakle, potproblem kontrole napajanja (4.3) na fizičkom sloju se može formulisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} \text{naći} \quad 0 \leq p \leq p^{max} \quad &\text{koje maksimizira} \quad \textstyle\sum_{i \in N} \mu_i c_i \\ \text{gde} \quad &c_i := \log(1 + SINR_i), \\ &SINR_i = \frac{g_{ii} p_i}{\sum_{j \in N \setminus \{i\}} g_{ij} p_j + \xi_i}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

gde je c_i kapacitet veze $i \in N$, i $SINR_i$ odnos signala veze i sa interferencijom i šumom.
Zbog interferencije, potproblem kontrole napajanja (4.5) je nekonveksan optimizacioni problem koji nije

jednostavan za rešavanje. Teorija igara je korišćena u iterativnom pristupu ovom problemu i njegovom rešavanju. U igri kontrole napajanja koja je definisana u nastavku, svaka veza se modeluje kao igrač sa ciljem maksimiziranja svoje funkcije plaćanja. U konvencijalnom pristupu teorije igre, svaka veza koristi svoju dostižnu stopu kao funkciju plaćanja. Konkurentska ravnoteža u takvoj igri ne mora predstavljati poželjnu operativnu tačku, pogotovo kad je visok nivo smetnji. Prema tome, funkcija plaćanja predložena u [11] je takva da za svakog igrača (tj. vezu) plaćanje uključuje ne samo dostižnu stopu, nego i efekat interferencije sa drugim vezama. Otuda je u igru uveden mehanizam takse, tako da svi igrači imaju podsticaj da inteligentno izbegnu interferenciju, držeći odnos signala sa interferencijom i šumom što je moguće veći, dok u isto vreme teže da minimiziraju upotrebu ukupne energije.
Matematički, igra kontrole napajanja se sastoji od strategije i-tog igrača da maksimizira svoju funkciju plaćanja Q_i, dok plaća taksu (kaznenu cenu) t_i i obavlja akciju p_i :

$$\begin{array}{ll} \max & Q_i := \mu_i \log(1 + SINR_i) - t_i p_i \\ \text{gde} & \qquad 0 \leq p_i \leq p_i^{max}, \end{array} \tag{4.6}$$

gde je taksa za vezu $i \in N$, koja je predložena u [11] stopa po kojoj dostižni podaci drugih korisnika opadaju uz dodatno napajanje veze i, tj.

$$t_i := \Big| \frac{\partial \sum_{k \in N \setminus \{i\}} \mu_k c_k}{\partial p_i} \Big| = \sum_{k \in N \setminus \{i\}} \frac{\mu_k g_{kk} g_{ki} p_k}{(\sum_{j \in N \setminus \{k\}} g_{kj} p_j + g_{kk} p_k + \xi_k)(\sum_{j \in N \setminus \{k\}} g_{kj} p_j + \xi_k)} \tag{4.7}$$

Što više napajanja veza i koristi, proizvodiće više interferencije drugim vezama i stoga će morati platiti veću taksu (tj. $t_i p_i$). Vektor energije (napajanja) p koji rešava problem optimizacije (4.5) je Nešova ravnoteža u igri kontrole napajanja (4.6). Kako nemaju sve igre Nešovu ravnotežu, niti je ravnoteža nužno stabilna, najpre je cilj da se dokaže postojanje, jedinstvenost i stabilnost Nešove ravnoteže u igri kontrole napajanja. Zatim je osmišljen distribuiran iterativni algoritam koji će da konvergira ka toj ravnoteži. U [11] je predložen sledeći algoritam kontrole napajanja.

1) Neka su dati početni vektori $p^{(0)}$ i $t^{(0)}$, i neka je $k = 0$.

2) Postavimo da je $p^{(\tau_0)} = p^{(k)}$. Neka je $i = 0$, i iterativno definišimo $p^{(\tau_i)}$ na sledeći način:

$$p_l^{(\tau_{i+1})} = \frac{\mu_l}{t_l^{(k)}} - \frac{1}{g_{ll}} (\sum_{j \neq l} g_{lj} p_j^{(\tau_i)} + \xi_l)$$

pri čemu $p_l^{(\tau_{i+1})}$ pripada intervalu $[0, p^{max}]$. Postupak ponovimo do konvergencije. Postavimo da je $p^{(k+1)} = p^{(\tau_i)}$.

3) Ažurirajmo taksu t_l

$$t_l^{(k+1)} = \sum_{f \neq l} g_{lf} b_f$$

$$b_f = \mu_f \frac{SINR_f^{(k+1)}}{g_{ff} p_f^{(k+1)}} \frac{SINR_f^{(k+1)}}{1 + SINR_f^{(k+1)}}.$$

4) Vratimo se na korak 2 do konvergencije.

Dati algoritam se sastoji od dve faze: ažuriranja energije i ažuriranja takse. Ažuriranje energije se zasniva na činjenici da na svakom koraku, svaki igrač $i \in N$ pokušava da maksimizira svoje plaćanje Q_i, pod pretpostavkom da su nivoi energije svih ostalih igrača i takse fiksirani. Izraz za optimalno p_i^* dobijamo izjednačavanjem izvoda $\frac{\partial Q_i}{\partial p_i} = 0$, što predstavlja funkciju najboljeg odgovora igrača i, u oznaci $B_i(p)$. Na taj način smo dobili lokalno optimalan vektor napajanja p^*, sa osobinom da je za svako $i \in N$, p_i^*

ravnoteža između maksimiziranja jačine signala i minimiziranja interferencije sa ostalim vezama (koja je uzeta u obzir preko t_i). Na primer, velika vrednost takse t_i ukazuje na to da veza i proizvodi ozbiljnu interferenciju ostalim vezama. Ovo se odražava u ažuriranju napajanja, gde visoko t_i vodi ka nižem p_i. Iako je svaki igrač sebičan u maksimiziranju svog plaćanja, kako funkcija plaćanja obuhvata socijalnu zaštitu, Nešova ravnoteža u ovoj igri je u stvari kooperativno socijalno optimalna. Dakle računanje lokalno optimalnog rešenja vektora napajanja p^* sastoji se u rešavanju sistema jednačina $\frac{\partial Q_i}{\partial p_i} = 0$, za svako $i \in N$, koje se može izraziti u istovetnoj formi kao $p = B(p) := [B_1(p), \ldots, B_n(p)]^T$. Dakle, p^* se može posmatrati kao fiksna tačka funkcije najboljeg odgovora. Ovaj pristup je korišćen u [11] za dobijanje postojanja, jedinstvenosti i dinamičke stabilnosti u igri kontrole napajanja. Ovde ćemo u nastavku sistem $\frac{\partial Q_i}{\partial p_i} = 0$, za svako $i \in N$, pisati u matričnoj formi:

$$Gp = D_G D_t^{-1} \mu - \xi, \tag{4.8}$$

gde je $G = [g_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrica priraštaja veze u bežičnoj mreži, $D_G := diag(g_{11}, g_{22} \ldots g_{nn})$, njen dijagonalni deo, $D_t := diag(t_1, t_2, \ldots t_n)$ dijagonalna matrica taksi, $\xi \in \mathbb{R}^n$ vektor šuma i $\mu \in \mathbb{R}^n$ vektor dualnih varijabli. Ova formulacija je korišćena u radu [13] i na osnovu nje je dobijena generalizacija rezultata iz [11].

Nakon što je dobijen lokalno optimalan vektor napajanja, algoritam se nastavlja ažuriranjem takse, koristeći formulu (4.7). Kao što je dato u gore navedenom algoritmu, taksa se može izraziti kroz odnos signala i šuma, u obliku koji je pogodan za distribuiranu implementaciju. Distribuirana implementacija znači da je ažuriranje takse direktno računato iz informacija koje su se dobile kroz svaku vezu. Pišemo:

$$t_i = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} g_{ij} b_j \quad (i \in N), \tag{4.9}$$

gde je

$$b_i = \mu_i \frac{SINR_i}{g_{ii} p_i} \frac{SINR_i}{1 + SINR_i} \tag{4.10}$$

emitovanje poruke vezom $i \in N$.

Iako je jasno da se vektor taksi izračunava iz vektora stvarnog napajanja p, na svakom koraku ažuriranja napajanja ovaj vektor je fiksiran i zbog toga je sistem (4.8), sistem linearnih jednačina sa matricom sistema G. Konačno, dajemo opšti okvir za algoritam kontrole napajanja koji je ekvivalentan prethodnom, navedenom iznad.

4.2 Algoritam igre kontrole napajanja

1. Uzmimo $p^{(0)}$ i $t^{(0)}$ i postavimo $l = 0$.

2. Iterativno determinišimo p^*, tako da

   $$Gp = D_G D_{t^{(l)}}^{-1} \mu - \xi,$$

   gde je $D_{t^{(l)}} := diag(t_1^{(l)}, t_2^{(l)}, \ldots, t_n^{(l)})$ i postavimo $p^{(l+1)} := p^*$.

3. Za svaku vezu $i \in N$, izračunavamo odnos signala i šuma

   $$SINR_i^{(l+1)} = \frac{g_{ii} p_i^{(l+1)}}{\sum_{j \in N \setminus \{i\}} g_{ij} p_j^{(l+1)} + \xi_i},$$

i emitovanje poruke

$b_i^{(l+1)} = \mu_i \frac{SINR_i^{(l+1)}}{g_{ii}p_i^{(l+1)}} \frac{SINR_i^{(l+1)}}{1+SINR_i^{(l+1)}}.$

4. Za svaku vezu $i \in N$, ažuriramo takse

   $t_i^{(l+1)} = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} g_{ij} b_j^{(l+1)}.$

5. Postavimo $l := l + 1$, i vratimo se na korak 2. do konvergencije.

4.3 Glavni rezultati o prednostima dijagonalne dominacije i algoritmima za optimizaciju napajanja senzora

U radu [11] jedan od glavnih rezultata dobijen pod uslovom da je matrica priraštaja G SDD matrica, je asimptotska stabilnost algoritma igre kontrole napajanja kao i njegova konvergencija ka jedinstvenoj Nešovoj ravnoteži. Ali, kroz simulacije autori su primetili da, čak i ako taj uslov nije zadovoljen, igra kontrole napajanja može da konvergira. Naime, iako to možda izgleda kao prirodan uslov, osobina SDD, matrice priraštaja G može biti narušena zbog jače interferencije inherentne na topologiji veze ili stanja medijuma kroz koje talas nosač propagira. Dakle, ponekad se usled navedenih razloga dešava da za neku vezu $i \in N$, priraštaj veze g_{ii} biva dominiran od strane ukupne interferencije sa drugim vezama $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} g_{ij}$, dok ukupne interferencije ne prelaze tačku na kojoj algoritam kontrole napajanja ne uspeva. Ovo je nametnulo pitanje da li se mogu poboljšati teorijski rezultati u cilju garantovanja konvergencije i stabilnosti igre kontrole napajanja, kao i prilagođavanja iterativnog postupka širem opsegu realnih situacija. Kao što je prikazano u poglavlju 3, ključne osobine koje imaju SDD matrice mogu se dobiti pomoću generalizovane dijagonalno dominantne matrice, gde problem određivanja da li data matrica ima željene osobine može biti rešen korišćenjem brojnih potklasa H matrica. Iz ovog razloga u radu [13] su poboljšani dobijeni rezultati iz [11] i sledeća teorema predstavlja generalizaciju teoreme o stabilnosti i konvergenciji igre kontrole napajanja formulisanu od strane Yuan i Yu.

Teorema 4.3.1 *Neka je data bežična senzor mreža sa određenom topologijom veza. Neka je $G = [g_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$, $G \geq 0$, matrica priraštaja, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \geq 0$, vektor ukupnog šuma veze. Ako je G generalizovana dijagonalno dominantna matrica, onda algoritam igre kontrole napajanja dat sa* (4.6)*, gde je vektor takse dat sa* (4.7)*, ima jedinstvenu stabilnu Nešovu ravnotežu p^*. Štaviše, igra je asimptotski stabilna i algoritam igre kontrole napajanja konvergira ka p^*, za sve startne nenegativne vektore $p^{(0)}$, $t^{(0)} \in \mathbb{R}^{n,n}$.*

Dokaz: Najpre, za svako $i \in N$, funkcija plaćanja Q_i data sa (4.6), veze (igrača) i je neprekidna po p i striktno konkavna po p_i (što se može potvrditi izračunavanjem Hesijana). Dakle, kako je skup akcija i-te veze $[0, p^{max}]$ kompaktan, konveksan skup, po teoremi 2.1.14 sledi da igra kontrole napajanja ima najmanje jednu Nešovu ravnotežu, koja se može naći kao tačka preseka krivih koje opisuju reakcije svih igrača. Naime, ako sa p^* označimo Nešovu ravnotežu igre (4.6), p^* će zadovoljavati sistem linearnih jednačina (4.8), tj. $Gp^* = D_G D_t^{-1}\mu - \xi$. Ali kako je G GDD matrica, regularna je i prema tome je $p^* = G^{-1}(D_G D_t^{-1}\mu - \xi)$ jedinstvena Nešova ravnoteža igre kontrole napajanja (4.6).

Da bi dokazali da je ova (lokalna) Nešova ravnoteža stabilna, kao u [11], dokazaćemo asimptotsku stabilnost igre (4.6). Koristićemo koncept funkcije najboljeg odgovora $B(p)$ i dinamičku stabilnost matrice $\Delta := [\Delta_{ij}]$, gde je $\Delta_{ij} = \frac{\partial B_i(p)}{\partial p_j}$, za $i, j \in N$. Prema [16] igra je asimptotski stabilna ako svi karakteristični koreni dinamički stabilne matrice leže unutar jedinične kružnice tj. $\rho(\Delta) < 1$.

U ovom slučaju, najbolji odgovor veze $i \in N$ je:

$$B_i(p) = \frac{\mu_i}{t_i} - \frac{1}{g_{ii}}\left(\sum_{j \in N \setminus \{i\}} g_{ij} p_j + \xi_i\right),$$

i tada je

$$\Delta_{ij} = \frac{\partial B_i(p)}{\partial p_j} = -\frac{g_{ij}}{g_{ii}}, \quad \text{za } j \in N,$$

pri čemu je $\Delta_{ii} = 0$.
Kako je G GDD matrica, na osnovu definicije 3.2.32 imamo da postoji pozitivna dijagonalna matrica $X = diag(x_1, x_2, \dots, x_n)$, takva da je GX SDD matrica, tj.

$$g_{ii}x_i > \sum_{j \in N \setminus \{i\}} g_{ij}x_j, \quad (i \in N),$$

ili, ekvivalentno,

$$r_i(X^{-1}\Delta X) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \frac{g_{ij}x_j}{g_{ii}x_i} < 1, \quad (i \in N).$$

Sa druge strane, znamo da je

$$\sigma(\Delta) \subseteq \Gamma(X^{-1}\Delta X) = \bigcup_{i \in N} \Gamma_i(X^{-1}\Delta X).$$

Dakle, za svaki karakteristični koren $\lambda \in \sigma(\Delta) = \sigma(X^{-1}\Delta X)$, postoji $i \in N$, tako da je

$$|\lambda - \Delta_{ii}| \leq r_i(\Delta),$$

pa je $|\lambda| < 1$. Za kompletiranje dokaza, primetimo da je niz stopa taksi konvergentan, pa iz tog razloga algoritam kontrole napajanja konvergira za sve startne vektore $p^{(0)}$, $t^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

$\square$

Jednostavna posledica prethodne teoreme je sledeća.

Posledica 4.3.2 *Neka je data proizvoljna klasa regularnih matrica DD tipa,* $\mathbb{K}$, *i bežična senzor mreža sa propisanom topologijom veza. Neka je* $G = [g_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$, $G \geq O$, *matrica priraštaja i neka je* $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \geq 0$ *vektor šuma. Ako* $G \in \mathbb{K}$, *tada igra kontrole napajanja data sa* (4.6)*, gde je vektor takse dat sa* (4.7) *ima jedinstvenu i stabilnu Nešovu ravnotežu* p^*. *Štaviše, igra je asimptotski stabilna i algoritam igre kontrole napajanja konvergira ka* p^*, *za sve startne, nenegativne vektore* $p^{(0)}$, $t^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Unapređenje koje je napravljeno u teoremi 4.3.1 u odnosu na teoremu iz rada [11] koja se odnosila samo na SDD matrice, otvara nove mogućnosti različitim mrežnim podešavanjima. Pri tome se može garantovati da je rešenje igre kontrole napajanja, a samim tim i optimizacionog problema aproksimirano iterativnim postupkom. Za proveravanje da li su dobijeni dovoljni uslovi u posledici 4.3.2 ispunjeni možemo koristiti teoreme 3.2.9, 3.2.13, 3.2.18, 3.2.24 ili 3.2.25 iz ovog rada, kao i mnoge druge rezultate o potklasama H-matrica koji se mogu naći u literaturi [37], [30], [20], kao i u mnogoj drugoj.

Zanimljivo je napomenuti da topologija bežične senzor mreže može dovesti do specifičnih struktura matrice G, što će biti prikazano u poslednjoj glavi rada. Kako se interferencija među vezama pojavljuje ako su veze blizu jedna drugoj, za određenu mrežnu topologiju možemo imati specifične modele matrica. Iz tog razloga se osobine matrica kao što su blok forme i razloživost mogu iskoristiti u cilju dobijanja različitih poboljšanja u modelovanju bežičnih senzor mreža.

Još jedna zanimljiva primena generalizovane dijagonalne dominacije leži u upotrebi S-SDD matrica, koje su definisane u teoremi 3.2.18 i upotrebi tehnike skaliranja [20]. Naime, ako je matrica ukupnog priraštaja G SDD matrica, ona je i S-SDD matrica takođe, za proizvoljan skup veza $S \subseteq N$. Dakle, možemo koristiti informacije sadržane u odgovarajućim skalirajućim matricama $X \in \mathbb{X}_S$, u cilju da se uvede više slobode u upravljanju resursom energije. Naime, neka je data *multi hop* bežična senzor mreža sa matricom priraštaja G, koja je SDD matrica, pretpostavimo da nekoliko čvorova radi sa ozbiljnim ograničenjima, ali zbog njihove lokacije u topologiji mreže moraju da budu raspoređeni za merenje i/ili prenošenje. U ovom slučaju, mi bismo želeli da produžimo životni vek tih releja i ukupna optimizacija te mreže treba dodatno da smanji napajanje tih veza, dok postiže Nešovu ravnotežu u igri kontrole napajanja, koja maksimizira ukupan kapacitet mreže. Za rešavanje ovog problema, koristićemo tehniku skaliranja razvijenu u odeljku 3.2.4 ovog rada.

Najpre, neka je sa M_0 označen skup čvorova sa restrikcijom potrošnje energije. Na osnovu matrice incidencije, A, definisane sa (2.10), definišimo skup veza sa restrikcijom energije, $L := \{j \in N : a_{ij} \neq 1, i \in M_0\}$. Kako je matrica priraštaja G SDD matrica, ona je i S-SDD, gde je $S = L$, odnosno za svako $i \in L$ i svako $j \in \bar{L}$ važi

$$(g_{ii} - r_i^L(G))(g_{jj} - r_j^{\bar{L}}(G)) > r_i^{\bar{L}} r_j^L(G), \text{ i}$$

$$g_{ii} > r_i^L(G),$$

gde je $r_i^L(A) := \sum_{j \in L \setminus \{i\}} g_{ij}$. Koristeći izraze $\alpha_L(G)$ i $\beta_L(G)$, kao što su definisani u (3.59), vidimo da je

$$0 \leq \alpha_L(G) := \min_{i \in L} \frac{r_i^{\bar{L}}(G)}{(g_{ii} - r_i^L(G))} < 1 < \max_{j \in \bar{L}, r_j^L(G) \neq 0} \frac{g_{jj} - r_j^{\bar{L}}(G)}{r_j^L(G)} =: \beta_L(G),$$

i da je za svako $\gamma \in (\alpha_L(G), \beta_L(G))$, matrica $\tilde{G} := GX$ SDD matrica, gde je $X = diag(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, sa

$$x_j = \begin{cases} \gamma, & \text{ako je } j \in L, \\ 1, & \text{za ostalo.} \end{cases}$$

Postavljanjem $\tilde{p}_i := \frac{p_i}{x_i}$, za $i \in N$, igra kontrole napajanja (4.6) postaje

$$\begin{aligned} &\max \quad Q_i := \mu_i \log(1 + \tfrac{\tilde{g}_{ii}\tilde{p}_i}{\sum_{j \in N \setminus \{i\}} \tilde{g}_{ij}\tilde{p}_j + \xi_i}) - \tilde{t}_i \tilde{p}_i, \\ &\text{gde} \qquad\qquad 0 \leq \tilde{p}_i \leq p_i^{max}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

pri čemu taksa, $\tilde{t}_i := t_i x_i$, za svaku vezu $i \in N$, zadovoljava

$$\tilde{t}_i := \sum_{k \in N \setminus \{i\}} \frac{\mu_k \tilde{g}_{kk} \tilde{g}_{ki} \tilde{p}_k}{(\sum_{j \in N \setminus \{k\}} \tilde{g}_{kj}\tilde{p}_j + \tilde{g}_{kk}\tilde{p}_k + \xi_k)(\sum_{j \in N \setminus \{k\}} \tilde{g}_{kj}\tilde{p}_j + \xi_k).} \tag{4.12}$$

Sada, kako je matrica $\tilde{G}$ SDD matrica, korišćenjem teoreme 4.12 imamo da je igra (4.11) asimptotski stabilna, i dobijamo jedinstvenu Nešovu ravnotežu $\tilde{p}^*$, koja zadovoljava jednakost $\tilde{p}^* = X^{-1}p^*$. Stoga,

$$\tilde{p}_i^* = \begin{cases} \gamma^{-1} p_i^*, & \text{ako je } i \in L, \\ p_i^*, & \text{za ostalo.} \end{cases}$$

Dobijeni odnos ukazuje na povezanost prvobitno dobijenog vektora napajanja veze, koji je Nešova ravnoteža igre kontrole napajanja definisane za originalnu SDD matricu, i nove igre napajanja koja je izvedena uvođenjem adekvatnih težina za priraštaje veze favorizovanih senzora. Pošto su veze $i \in L$ takve da je poželjno da imaju što je moguće manje napajanja, želimo da podesimo da parametar γ bude veći od 1, što je više moguće. Ali, kako imamo da je $1 < \beta_L(G)$, birajući $1 < \gamma < \beta_L(G)$ da bude dovoljno blizu vrednosti $\beta_L(G)$, za svako $i \in L$, imamo da je $\tilde{p}_i^* < p_i^*$, dok, za $i \in \bar{L}, \tilde{p}_i^* = p_i^*$. Dakle dobijena je jedinstvena Nešova ravnoteža koja više odgovara ograničenjima napajanja datih bežičnih senzor mreža.

4.3.1 Različite verzije algoritma kontrole napajanja i njihove konvergencije

U ovom odeljku je fokus na algoritmu kontrole napajanja, kao i na poboljšanju njegove brzine konvergencije. Kako se deo ukupne potrošnje energije u WSN troši u obračunu, namenjenom implementaciji algoritma kontrole napajanja, složenost obračuna i brzina konvergencije su pitanja koja treba da budu razmatrana. Primetimo da se algoritam kontrole napajanja sastoji od unutrašnje i spoljašnje iteracije. Unutrašnja iteracija je ažuriranje vektora alokacije energije (korak 2) učinjeno na svakom koraku l. Spoljašnja iteracija se sastoji od ažuriranja takse kroz vektor emitovanja poruke. Prvobitni algoritam koji je dat u [11] u koraku 2 ostvaruje na svakoj vezi fiksnu tačku iteracije, koristeći funkciju najboljeg odgovora dotične veze. Postupak unutrašnje iteracije je dat sa $p^{(k+1)} := B(p^{(k)}) = [B_1(p^{(k)}), B_2(p^{(k)}), \dots B_n(p^{(k)})]^T$, za bilo koje $p^{(0)}$, i svako $l \in \mathbb{N}$. Ovo se ekvivalentno može zapisati kao:

$$p_i^{(k+1)} := \frac{\mu_i}{t_i^{(l)}} - \frac{1}{g_{ii}}\Big(\sum_{j \in N \setminus \{i\}} g_{ij} p_j^{(k)} + \xi_i\Big), \tag{4.13}$$

za $i \in N$ i $k \in \mathbb{N}$, gde je $p^{(0)}$ proizvoljno. Kada je na nekom koraku, k_0, iterativna aproksimacija zadovoljavajuća, alokacija napajanja veze je na tom koraku upućena ka spoljašnjoj iteraciji tj. ka ažuriranju takse. Konvergencija ovakvog postupka je dobijena jer je funkcija najboljeg odgovora veze i kontrakcija. Opisani postupak se može posmatrati kao distribuiran, što znači da se ažuriranje napajanja veze i dobija iz obračuna, koji može da se realizuje korišćenjem isključivo informacija koje je veza i sposobna da izmeri. Stoga je svaka veza sposobna da ažurira svoje napajanje, koristeći vektor stvarne potrošnje napajanja celokupne mreže. Sličan argument stoji i za ažuriranje takse. Konačno, pod pretpostavkom da je matrica priraštaja G SDD matrica, autori rada [11] su dokazali asimptotsku konvergenciju igre, a time i konvergenciju algoritma kontrole napajanja.

Ovde ćemo se baviti samo unutrašnjom iteracijom. Prikazaćemo nekoliko predloženih iterativnih postupaka, razmotrićemo njihovu implementaciju i konvergenciju. Glavna ideja se zasniva na činjenici da se lokalno optimalni ekvilibrijum p^* može dobiti kao rešenje linearnog sistema (4.8). Pod pretpostavkom da je matrica priraštaja H-matrica, u prethodnim razmatranjima je dokazano da je igra (4.6) asimptotski stabilna, a samim tim smo dobili i konvergenciju algoritma kontrole napajanja. Dakle, ako se dobije pod istim uslovima konvergencija novih postupaka za unutrašnju iteraciju, modifikovani algoritam kontrole napajanja će takođe konvergirati ka Nešovoj ravnoteži igre kontrole napajanja (4.6).

Neka je data bežična senzor mreža sa određenom topologijom, sa n veza i matricom priraštaja $G = [g_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$, označimo sa $D_G = diag(g_{11}, g_{22}, \dots g_{nn})$ dijagonalnu matricu sa elementima dijagonale matrice G, i neka je $B_G := G - D_G$. Za fiksiranu taksu $t = [t_1, t_2, \dots, t_n]^T$ igre kontrole napajanja (4.6), imamo $D_t = diag(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Neka je $\xi \in \mathbb{R}^n$ vektor šuma i $\mu \in \mathbb{R}^n$ vektor dualnih varijabli u potproblemu (2.12) problema *cross layer* optimizacije (2.9). Ako je G H-matrica onda je lokalno optimalan vektor alokacije napajanja veza, p^*, jedinstveno rešenje sistema linearnih jednačina

$$Gp = D_G D_t^{-1}\mu - \xi. \tag{4.14}$$

Ako koristimo razlaganje matrice $G = D_G - B_G$, onda (4.14) možemo pisati u formi fiksne tačke $p = D_G^{-1}(B_G p - \xi) + D_t^{-1}\mu$ i možemo definisati iterativni postupak $p^{(k+1)} = D_G^{-1}(B_G p^{(k)} - \xi) + D_t^{-1}\mu$. Pošto je korišćeno Jakobijevo razlaganje matrice sistema G, iterativni metod je poznati Jakobijev iterativni postupak, opisan u pododeljku 3.4.1. Primetimo da je ovaj postupak upravo onaj koji je predložen od strane autora rada [11], tj. (4.13).

Drugi fundamentalni postupak u teoriji iterativnih postupaka je Gaus-Zajdelov postupak. Data je matrica $G = [g_{ij}]$, razmotrimo standardno razlaganje $G = D_G - L_G - U_G$, gde je D_G dijagonalna matrica, dok su L_G i U_G strogo donja i strogo gornja trougaona matrica, respektivno. Preciznije, neka je $D = diag(g_{11} \dots g_{nn})$, $L = [l_{ij}]$, gde je

$$l_{ij} = \begin{cases} -g_{ij}, & j < i \\ 0, & \text{za ostalo,} \end{cases}$$

i $U = [u_{ij}]$, gde je

$$u_{ij} = \begin{cases} -g_{ij}, & j > i \\ 0, & \text{za ostalo,} \end{cases}$$

Tada Gaus-Zajdelov iterativni postupak za sistem (4.8) može biti zapisan kao

$$D_G p^{(k+1)} = L_G p^{(k+1)} + U_G p^{(k)} - \xi + D_G D_t^{-1}\mu,$$

za $k \in \mathbb{N}$. U obliku postupka ažuriranja napajanja za svaku vezu $i \in N$, imamo

$$p_i^{(k+1)} := \frac{\mu_i}{t_i^{(l)}} - \frac{1}{g_{ii}}(\sum_{j=1}^{i-1} g_{ij}p_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} g_{ij}p_j^{(k)} + \xi_i), \tag{4.15}$$

za $i \in N$ i $k \in \mathbb{N}$.

Pretpostavljamo da veza 1 prva ažurira napajanje, zatim veza 2, veza 3 i na kraju veza $n.$ Zatim koristeći Jakobijev iterativni postupak, u vreme kada smo izračunali napajanje i-te veze, ažurirana napajanja svih prethodnih veza su već dostupna. Dakle, prirodna stvar je iskoristiti ih. Na ovaj način smo dobili Gaus-Zajdelov iterativni postupak (4.15). Pošto je matrica sistema H-matrica, na osnovu teoreme 3.4.10 Gaus-Zajdelov iterativni metod globalno konvergira. Ali, iako postoji mnogo primera u kojima preferiramo Gaus-Zajdelov metod u odnosu na Jakobijev, ne možemo reći da iterativni postupak dat sa (4.15) konvergira brže nego postupak definisan sa (4.13).

Iako se često obavllja brže nego Jakobijev postupak, Gaus-Zajdelov metod ima u ovom slučaju značajan nedostatak. Naime, zbog redosleda, veza koja treba da ažurira svoje napajanje često mora da sačeka svoj red. Ali ovo nije potrebno, jer svaka veza ažurira svoje napajanje na osnovu podataka koje je ionako prikupila. Stoga Gaus-Zajdelov postupak iako je u teoriji dobar, u bežičnim senzor mrežama se ponaša loše, zbog vremena mirovanja veze u iterativnom postupku u koraku 2 algoritma kontrole napajanja.

Odgovor na nedostatak Gaus-Zajdelovog postupka je asinhrona haotična relaksacija prikazana u pododeljku 3.4.4. Kao što je navedeno, napominjemo da ovaj algoritam koristi isto pravilo kao i (4.13), dok nivoi napajanja na desnoj strani nisu potrebni iz istog koraka iteracije. Naime, svaka veza koristi trenutnu snagu drugih veza za ažuriranje svoje. Osnovna vrednost ovog algoritma je da se u bežičnim senzor mrežama ponaša veoma dobro, tako da se izbegava vreme mirovanja veze zbog asinhronih proračuna u iteraciji ažuriranja energije, dok dopušta distribuiranu implementaciju. Jedini problem koji treba rešiti je konvergencija. Dakle, primenimo Jakobijevo razlaganje i izaberimo $\omega = 1$. Tada, na osnovu teoreme 3.4.17 haotične relaksacije imamo da ovaj iterativni postupak $(D_G^{-1}B_G, D_G^{-1}, \mathcal{S})$ konvergira ako se svi moduli karakterističnih korena Jakobijeve matrice nalaze unutar jediničnog kruga, što bi u našem slučaju značilo da $\rho(|D_G^{-1}B_G|) < 1$. U slučaju kada je G H-matrica, ovaj uslov je zadovoljen. Da bismo dokazali, pretpostavimo da $\lambda \in \sigma(|D_G^{-1}B_G|)$. Kako je G H-matrica, postoji pozitivna dijagonalna matrica $X = diag(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{D}$, takva da je GX SDD matrica. Ali iz (3.71) postoji $i \in N$ tako da $\lambda \in \Gamma_i^X(|D_G^{-1}B_G|)$, a otuda i $|\lambda| \leq \sum_{j\in N\setminus\{i\}} \frac{g_{ij}x_j}{g_{ii}x_i} < 1$. Tako, implementacijom haotičnog relaksacionog postupka u koraku 2, algoritam kontrole napajanja će konvergirati ka jedinstvenoj i stabilnoj Nešovoj ravnoteži igre kontrole napajanja.

U narednoj glavi su prikazani primeri modela bežičnih senzor mreža koji vode do različitih struktura matrice priraštaja G i data je diskusija o primenama i konvergenciji navedena tri iterativna postupka.

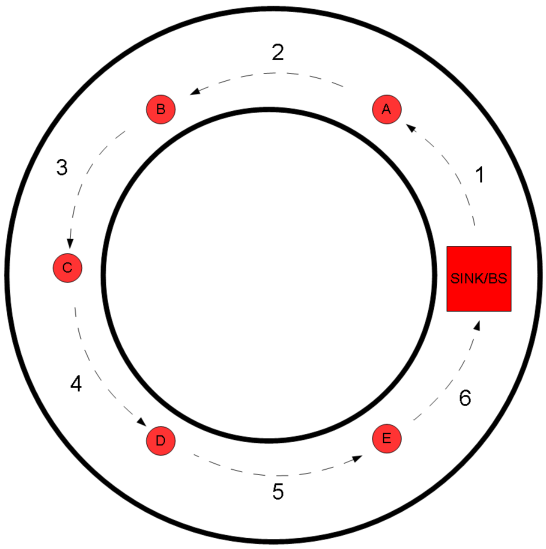
Naravno, pored navedena tri postupka (Jakobijev, Gaus-Zajdelov i haotični iterativni postupak) postoje mogućnosti implementacije i drugih iterativnih postupaka tipa fiksne tačke. Posebno mogu biti interesantni SOR postupak i haotična relaksacija za koje smo već naveli uslove za konvergenciju. Dalja razmatranja za koje topologije mreže i pod kojim ograničenjima na broj senzora ova dva pristupa daju dobre rezultate u optimizaciji bežičnih senzor mreža predstavljaju izazov za dalja istraživanja i prevazilaze obim ovog rada.

5

Primeri modela bežičnih senzor mreža

U ovoj glavi će biti dati primeri modela bežičnih senzor mreža koji vode do specijalnih struktura matrice priraštaja G. Prikazaćemo rezultate dobijene upoređivanjem različitih postupaka za rešavanje unutrašnje iteracije navedene u odeljku 4.3.1.

Primer 5.1 Neka je dat kružni hodnik kao sa slike 5.1. Pretpostavimo da su senzori, koji su označeni slovima A, B, C, D, E raspoređeni kao na slici, pri čemu su veze između čvorova numerisane brojevima od 1 do 6 i prikazane isprekidanim linijama. Sink/BS predstavlja baznu stanicu u koju se prosleđuju podaci koje očitavaju senzori. Pretpostavimo da su susedni senzori postavljeni na međusobnoj udaljenosti od 2 metra. Neka je prostor između susednih senzora slobodan, a zidovi hodnika ne odbijaju i ne propuštaju elektromagnetni signal. Na osnovu toga, moguće je uspostavljanje samo onih veza koje su iscrtane na slici 5.1, a interferencija postoji samo između dve susedne veze. Za vandijagonalne elemente matrice priraštaja G uzimamo slabljenje elektromagnetnog signala koje iznosi d^{-2}, pri čemu je d rastojanje između dva susedna senzora, i pretpostavimo da su priraštaji veze jednaki 1.

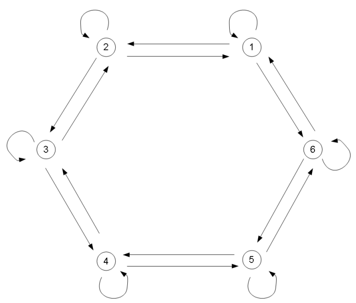


Slika 5.1: Model mreže u kome veze obrazuju ciklus

Matrica priraštaja G je u tom slučaju oblika

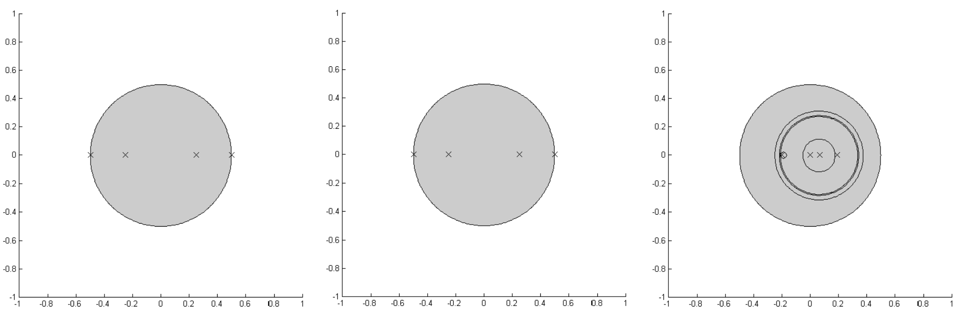
$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0.25 & 1 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 1 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 1 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 1 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}, \quad det(G_1) = 0.6592$$

Iz matrice G_1, odnosno sa grafa matrice G_1, datog na slici 5.2 možemo uočiti da veze obrazuju sedam



Slika 5.2: Graf matrice G_1

jakih ciklusa, $\gamma_1 = (1,2,3,4,5,6)$, $\gamma_2 = (1,2)$, $\gamma_3 = (2,3)$, $\ldots$, $\gamma_7 = (6,1)$, pa se prirodno nameće pitanje da li je matrica G_1 Brualdijeva matrica. Primenjujući uslov iz teoreme 3.2.13 imamo da je data nejednakost zadovoljena za svaki ciklus, pa je G_1 Brualdi striktno dijagonalno dominantna matrica, a znamo da je tada i H-matrica. U ovom primeru, zapravo vidimo da data matrica zadovoljava već i uslov stroge dijagonalne dominacije (SDD), što je daleko lakše utvrditi. Ipak, na ovom mestu smo razmatrali graf strukturu matrice kako bi bolje razumeli modifikacije ovog primera mrežne topologije koje su date u nastavku. Kao što je dokazano u teoremi 4.3.1 algoritam kontrole napajanja će konvergirati jer je matrica G_1 H matrica. Koristeći Jakobijev iterativni postupak za rešavanje unutrašnje iteracije u ovom slučaju imamo da je oblast lokalizacije karakterističnih korena - Geršgorinov skup Jakobijeve matrice koja odgovara matrici sistema linearnih jednačina G_1 data na slici 5.3 i na osnovu dobijene oblasti možemo tvrditi da je ovakav postupak unutrašnje iteracije konvergentan jer je spektralni radijus manji od 1. Isti rezultat dobijamo i za haotični i za Gaus-Zajdelov iterativni postupak i oblasti lokalizacije su date na slici 5.3. Uporedimo brzine konvergencije napomenuta tri postupka. Kako su $\rho(B_J) = \rho(|B_J|) = 0.5$ brzine



Slika 5.3: Geršgorinov skup Jakobijeve matrice B_J, matrice $|B_J|$ i Gaus Zajdelove matrice B_G (primer 5.1)

konvergencije Jakobijevog i haotičnog postupka iznose 0.69, dok matrica Gaus-Zajdelovog postupka ima

$\rho(B_G) = 0.3034$, tj. Gaus-Zajdelov postupak ima brzinu konvergencije 1.19. Dakle, sa matematičkog aspekta do optimalnog rešenja ćemo najpre stići korišćenjem Gaus-Zajdelovog postupka, ali u primeni imamo problem sa vremenom čekanja koje je neophodno da bi prvih $i-1$ senzora ažuriralo svoja napajanja kako bi i-ti senzor mogao da ažurira svoje. Ipak, kako je ova mreža relativno mala, senzori se mogu programirati tako da implementirani Gaus-Zajdelov iterativni postupak ipak daje bolji efekat jer vremena čekanja nisu dovoljno značajna u odnosu na povećanje u brzini konvergencije.

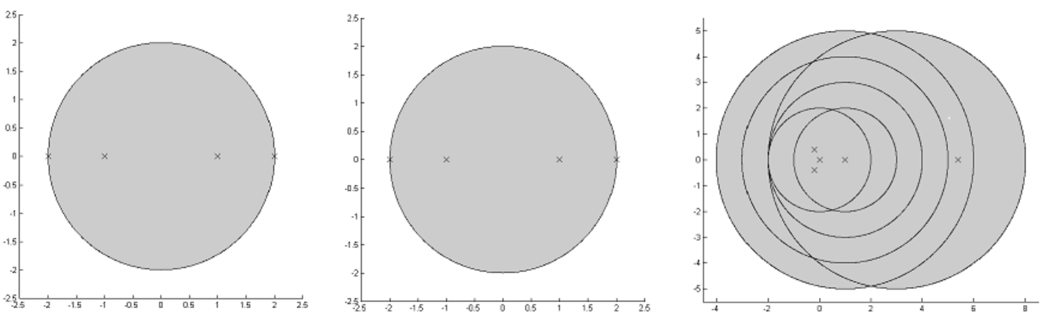
Primer 5.2 Posmatrajmo dalje slučaj u kome važe sve navedene pretpostavke kao i u prethodnom primeru, osim što sada rastojanje između svaka dva susedna senzora iznosi 1 metar. Matrica sistema je u tom slučaju data sa G_2.

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Iako veze prave ciklus, kao u prethodnom slučaju, data matrica nije Brualdi matrica, jer imamo da je

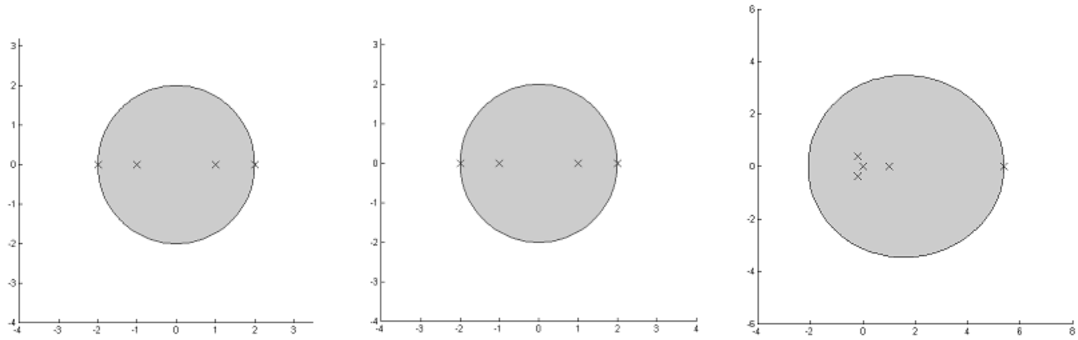
$$1 \leq 2^6.$$

Zapravo, ova matrica nije ni H-matrica, što se može lako utvrditi. Dakle, tvrđenja koja smo prezentovali ne možemo iskoristiti u ovom primeru, pa se postavlja pitanje konvergencije optimizacionih algoritama. Na prvom mestu nas zanima da li će unutrašnja iteracija algoritma kontrole napajanja konvergirati u slučaju kada je matrica sistema G_2. U slučaju Jakobijevog iterativnog postupka, zanima nas da li je $\rho(B_J) < 1$, pri čemu je $B_J = D^{-1}B$ i $D = diag(G_2)$ i $B = D - G_2$. Za slučaj haotičnog iterativnog postupka proveravamo da li je $\rho(|B_J|) < 1$ i za slučaj Gaus-Zajdelovog postupka nas zanima da li je $\rho(B_G) < 1$ za $B_G = (D-L)^{-1}U$, gde su L, U redom strogo donja i strogo gornja trougaona matrica. Lokalizacijom karakterističnih korena nam je cilj da odredimo oblast u kojoj se nalaze karakteristični koreni, i da bismo mogli da tvrdimo konvergenciju datog postupka, dovoljno nam je da svi karakteristični koreni budu unutar jediničnog kruga, pa će u tom slučaju i spektralni radijus date matrice biti manji od 1. Na osnovu struktura datih matrica imamo da je oblast lokalizacije karakterističnih korena (Geršgorinov skup) data na slici 5.4.



Slika 5.4: Geršgorinov skup za matrice B_J, $|B_J|$ i B_G, redom (primer 5.2)

Kako nam lokalizacija Geršgorinovim skupom nije dovoljno dobra, odnosno nemamo izolovani krug van jediničnog kruga, na osnovu čega bismo mogli da tvrdimo divergenciju algoritma, niti nam je celokupna data oblast u jediničnom krugu, što bi nam obezbedilo konvergenciju, drugim načinima lokalizacije trebamo suziti date oblasti, odnosno pokušati neke delove datih skupova izolovati. U ovom slučaju ćemo pokušati lokalizovati karakteristične korene minimalnim Geršgorinovim skupom. Na slici 5.5 je prikazan minimalni Geršgorinov skup za navedene matrice, i primetimo da nam ni ova lokalizacija



Slika 5.5: Minimalni Geršgorinov skup kao oblast lokalizacije karakterističnih korena matrica B_J, $|B_J|$ i B_G, redom (primer 5.2)

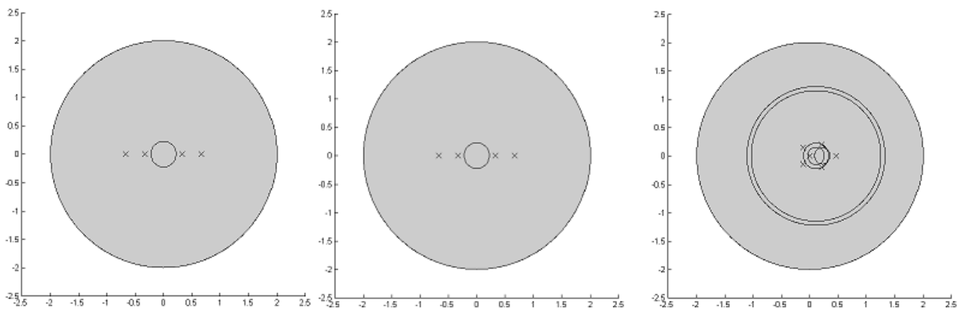
ne daje poželjan rezultat. U ovom slučaju smo prinuđeni da izračunamo vrednosti karakterističnih korena. Kako su $\rho(B_J) = 2$, $\rho(|B_J|) = 2$ i $\rho(B_G) = 5.4$ nemamo konvergenciju unutrašnjih iteracija.

Da bismo dobili konvergenciju datog algoritma potrebno je uticati na dijagonalne elemente matrice sistema G_2 odnosno senzore isprogramirati na taj način da povećamo priraštaje nekih veza ili povećamo rastojanja između senzora kako bismo smanjili smetnje.

Primer 5.3 Posmatrajmo i dalje sliku 5.1 i pretpostavimo da su senzori raspoređeni tako da je d(A, B)=1, d(B,C)=3, d(C,D)=1, d(D, E)=3, d(E, BS)=1 i d(BS,A)=3. Zadržavamo pretpostavke da je unutrašnji zid od nepropusnog materijala i da je prostor slobodan. Tada je matrica sistema G_3.

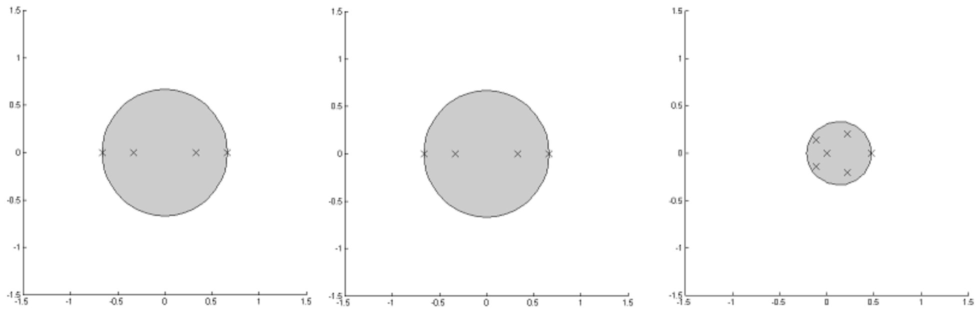
$$G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.111 & 1 & 0.111 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.111 & 1 & 0.111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0.111 & 0 & 0 & 0 & 0.111 & 1 \end{bmatrix}$$

Lako je proveriti da je ova matrica nije SDD, dok jeste Brualdi striktno dijagonalno dominantna, a time i H-matrica pa sledi da algoritam kontrole napajanja konvergira za svaki startni vektor $p^{(0)}$. Kao i u prethodna dva slučaja uporedićemo konvergencije unutrašnjih iteracija u zavisnosti od primenjenog iterativnog postupka. Na slici 5.6 su dati Geršgorinovi skupovi iterativnih matrica. Kako na osnovu slike



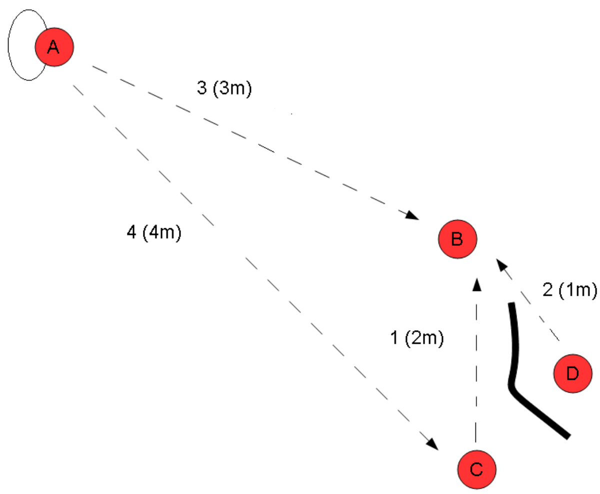
Slika 5.6: Geršgorinov skup za matrice B_J, $|B_J|$ i B_G, redom (primer 5.3)

5.6 nemamo oblast lokalizacije za koju možemo tvrditi da dati postupci konvergiraju, na slici 5.7 je dat minimalni Geršgorinov skup za iterativne matrice i na osnovu njega imamo da sva tri posmatrana iterativna postupka konvergiraju.



Slika 5.7: Minimalni Geršgorinov skup za matrice B_J, $|B_J|$ i B_G, redom (primer 5.3)

Primer 5.4 Pretpostavimo da je mreža postavljena kao na slici 5.8. Iako bazna stanica nije predstavljena, bez umanjenja opštosti, senzor B može imati ulogu bazne stanice. Rastojanja između senzora su data na



Slika 5.8: Primer topologije mreže koja dovodi do matrice sistema G koja je α_2 matrica

slici. Obratimo pažnju na prepreku koja nam se javlja u prostoru na kome je postavljena data mreža. Data prepreka je zid kojim su razdvojeni senzori D i C, koji ima unutar sebe čeličnu ploču pa je nemoguće ostvarivanje komunikacije između navedena dva čvora. Iza čvora A se nalazi ogledalo koje reflektuje talase, pa je time veća snaga signala koju generiše senzor A, da bismo uticaj ogledala istakli, slabljenje elektromagnetnog signala na vezama za koje je A početni senzor ćemo uzeti da je jednako sa d^{-2} gde je d rastojanje između senzora A i njemu susednog senzora sa kojim ostvaruje vezu (veza 3 i veza 4), dok za senzore na koje dato ogledalo ne utiče pretpostavljamo da slabljenje elektromagnetnog signala iznosi $d^{-3.5}$ (veza 1 i veza 2). Matrica priraštaja veza je u ovom slučaju data sa G_4.

$$G_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.1111 & 0.0625 \\ 0.0884 & 1 & 0.1111 & 0 \\ 0.0884 & 1 & 1 & 0 \\ 0.0884 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uočimo da matrica G_4 nije SDD matrica ni po vrstama ni po kolonama. Pošto je osobina SDD narušena u jednoj vrsti i jednoj koloni, proverićemo da li je data matrica α_2 matrica. Neka je $\alpha = 0.1$.

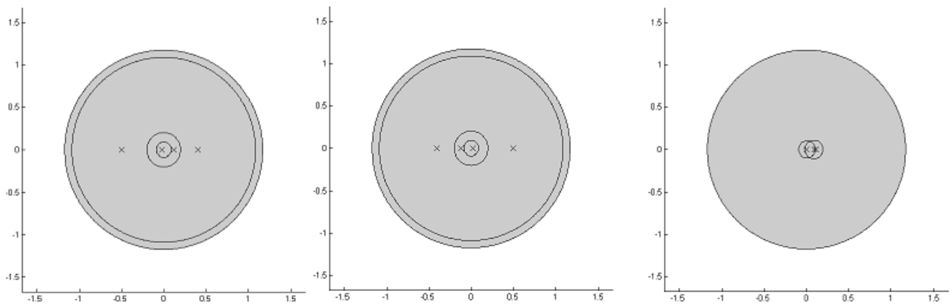
$$|a_{11}| = 1 > 0.481 = r_1(G_4)^{0.4} c_1(G_4)^{0.6}$$

$$|a_{22}| = 1 > 0.795 = r_2(G_4)^{0.4} c_2(G_4)^{0.6}$$

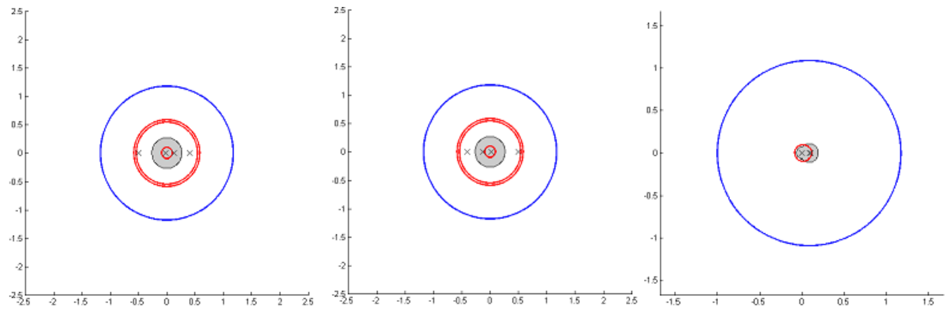
$$|a_{33}| = 1 > 0.419 = r_3(G_4)^{0.4} c_3(G_4)^{0.6}$$

$$|a_{44}| = 1 > 0.072 = r_4(G_4)^{0.4} c_4(G_4)^{0.6}$$

Kako važi uslov iz teoreme 3.2.25 matrica G_4 je α_2 matrica, pa je obezbeđena konvergencija algoritma kontrole napajanja. Uporedićemo postupke unutrašnje iteracije. Na slici 5.9 su date oblasti lokalizacije (Geršgorinov skup) Jakobijeve matrice, B_J, zatim matrice $|B_J|$ i Gaus-Zajdelove matrice B_G. Dobijeni skupovi nam ne garantuju konvergenciju, niti divergenciju, pa ćemo iz tog razloga eksploatisati činjenicu da matrica nije simetrična (pa time ni iterativne matrice za Jakobijev i haotični Jakobijev postupak) kako bismo dobili što manje lokalizacione oblasti. U ovom slučaju je jasno da bismo mogli oblast lokalizacije da suzimo korišćenjem skupova $\Gamma(A) \cap \Gamma(A^T)$ ili α_2-minimalnim skupom. Pomenute oblasti lokalizacije su date na slici 5.10, pri čemu je skup $\Gamma(A) \cap \Gamma(A^T)$ oivičen plavom bojom, dok je α_2-skup unija osenčenih delova i oblasti oivičenih crvenom bojom. α_2 lokalizaciona

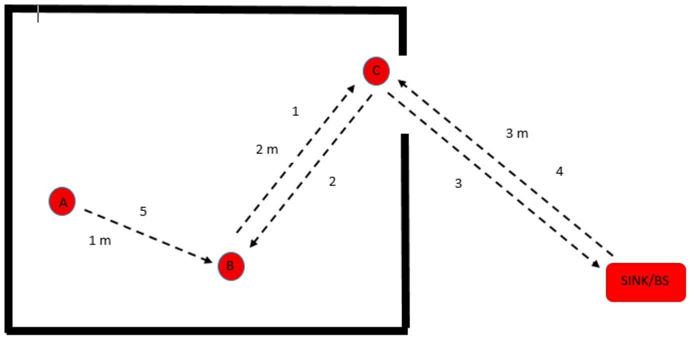


Slika 5.9: Geršgorinov skup za matrice B_J, $|B_J|$ i B_G, redom (primer 5.4)



Slika 5.10: $\Gamma(A) \cap \Gamma(A^T)$ skup, (plava boja), α_2 skup (crvena boja unija osenčeni deo) za matrice B_J, $|B_J|$ i B_G, redom (primer 5.4)

oblast nam daje mogućnost da zaključimo konvergenciju sva tri postupka. I na osnovu dobijenih oblasti, prirodno je za očekivati da Gaus-Zajdelov metod najbrže konvergira, što može biti slučaj u maloj mreži sa par senzora, dok se u realnosti, u slučaju mreža sa velikim brojem senzora nailazi na problem vremena čekanja neophodnog da prethodne veze ažuriraju svoja napajanja, kako bi određeni čvor imao potrebne informacije dostupne za ažuriranje svog napajanja.

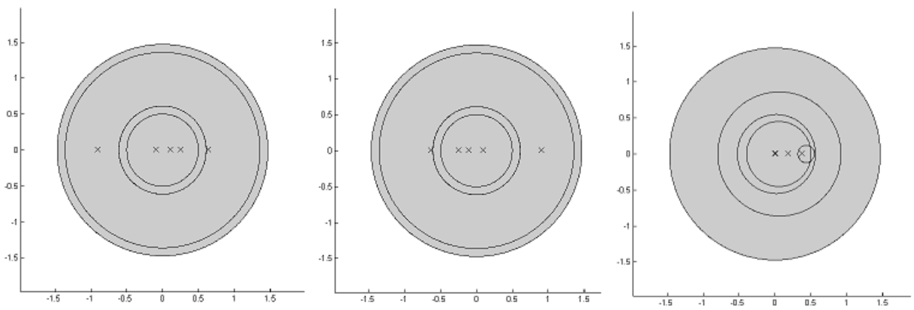


Slika 5.11: Raspored senzora čije veze dovode do S-SDD matrice priraštaja

Primer 5.5 Posmatrajmo dalje situaciju sa slike 5.11. Pretpostavimo da su senzori raspoređeni kao na slici i dai komuniciraju preko veza iscrtanih isprekidanim linijama u smeru strelica. Pretpostavimo da je prostor slobodan, pa slabljenje elektromagnetnih talasa iznosi d^{-2}.
Matrica sistema G_5 je tada sledećeg oblika.

$$G_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.111 & 0.111 & 1 \\ 0.25 & 1 & 0 & 0.111 & 1 \\ 0.25 & 0.25 & 1 & 0.11 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.111 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

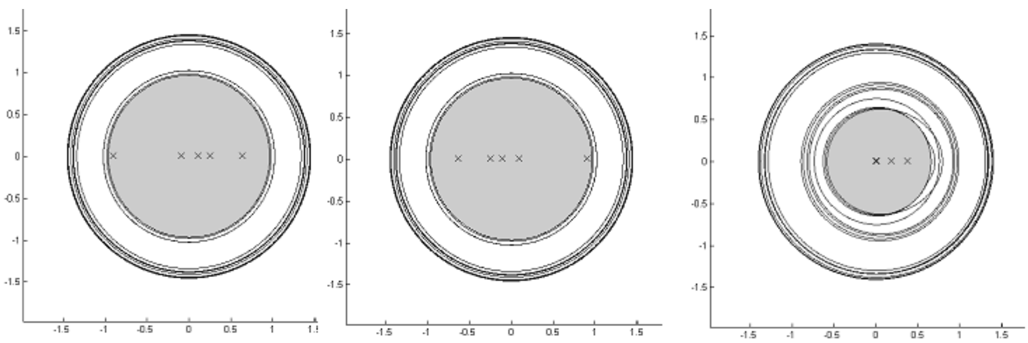
Matrica G_5 nije SDD matrica usled rastojanja od $1m$ između senzora A i B, međutim za skup $S = \{1, 2, 5\}$ ona jeste S-SDD matrica. Za ovu klasu matrica nam je poznato da algoritam kontrole napajanja konvergira. Prirodno je za očekivati da će i u ovom slučaju Gaus-Zajdelov postupak najbrže konvergirati, zbog malog broja senzora koji su raspoređeni u polju. Na slici 5.12 su dati Geršgorinovi skupovi matrica sva tri posmatrana postupka.



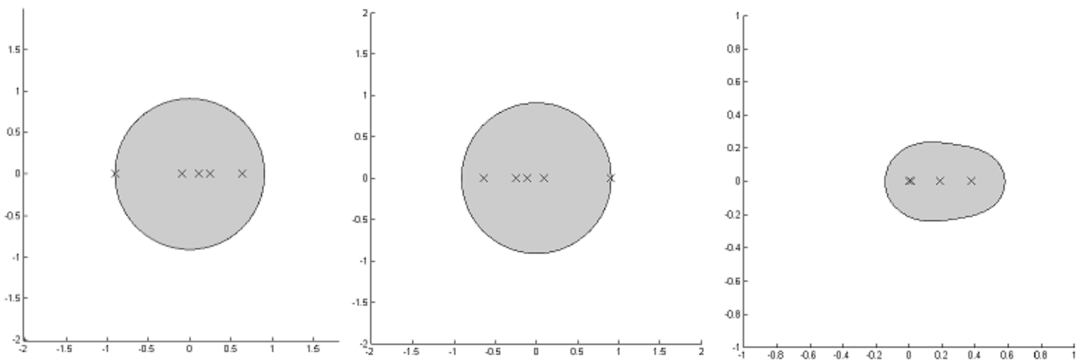
Slika 5.12: Geršgorinov skup za matrice B_J, $|B_J|$ i B_G, redom (primer 5.5)

Kako na osnovu Geršgorinovog skupa, koji je ”najjeftinije” naći, ne možemo utvrditi konvergenciju (moguće je da je spektralni radijus van jediničnog kruga ili na rubu), na slici 5.13 je prikazana lokalizaciona oblast, skup $\mathcal{C}(A)$, kao pokušaj da suzimo oblast lokalizacije i time obezbedimo konvergenciju.

Kako za slučaj Jakobijeve matrice, B_J, i matrice koja odgovara haotičnom iterativnom postupku pri Jakobijevom razlaganju, $|B_J|$ lokalizacija sa slike 5.13 ne otklanja mogućnost da je spektralni radijus jednak 1, na slici 5.14 je predstavljen minimalni Geršgorinov skup, na osnovu koga konačno možemo tvrditi da su sva tri postupka unutrašnje iteracije konvergentna. Zaključujemo da na osnovu oblasti lokalizacije sa slike 5.14 dobijamo da je Gaus-Zajdelov postupak znatno brži (uza oblast lokalizacije)



Slika 5.13: $\mathcal{C}(A)$ oblasti (osenčene) za matrice B_J, $|B_J|$ i B_G (primer 5.5)



Slika 5.14: Minimalni Geršgorinov skup za matrice B_J, $|B_J|$ i B_G (primer 5.5)

od Jakobijevog i haotičnog postupka, iako to nije stvarna situacija iz razloga što su prave vrednosti spekralnih radijusa bliske.

Ono što se moglo uočiti u gore navedenim primerima je da se u slučaju ununtrašnje iteracije često može desiti da Gaus-Zajdelov postupak najbrže konvergira. Kao što je napomenuto u odeljku 4.3.1 ovog rada, iako se u teoriji Gaus-Zajdelovim postupkom najbrže dolazi do rešenja, u slučaju realne mreže koja sadrži par stotina senzora ovaj postupak bi dovodio do povećanog vremena čekanja koga ne bismo imali u slučaju primene Jakobijevog ili haotičnog iterativnog postupka. Iz tog razloga, kada su brzine konvergencije navedena tri postupka bliske, Jakobijev i haotični iterativni postupak imaju prednost u mrežama sa velikim brojem senzora. Za Gaus-Zajdelov postupak ćemo se odlučiti u slučaju kada optimizujemo malu mrežu i ukoliko je brzina konvergencije Gaus-Zajdelovog postupka znatno veća od brzina druga dva postupka.

Zaključak

Ovaj rad sistematizuje najnovija istraživanja u problemima optimizacije bežičnih senzor mreža, pri čemu je razmatrani problem optimizacija napajanja veza primenom teorije igara i teorije matrica. U radu je predstavljen problem optimizacije u bežičnim senzor mrežama - minimizacija distorzije, od koga se kao potproblem izdvojila kontrola napajanja na fizičkom sloju mreže. Cilj je pronaći optimalno napajanje na različitim vezama, tako da se pronalazi kompromis između što jačeg signala koji se šalje i što manjeg ometanja veza koje se nalaze u blizini. Akcenat u ovom radu je upravo na pronalaženju datog kompromisa pristupom teorije igara i teorije matrica.

Za problem formulisan teorijom igara, upravo dijagonalna dominacija kao osobina matrica igra veoma važnu ulogu u postojanju rešenja, odnosno Nešove ravnoteže posmatranog problema. Dakle, kako je moguće da osobina matrica SDD, koja se prirodno javlja u datom problemu optimizacije iz različitih razloga biva uništena, rezultati koji su dobijeni u radu [11], u radu [13] su generalizovani, odnosno prilagođeni za znatno širu klasu matrica - H matrice. Za neke od uobičajenih topologija mreža u ovom radu smo analizirali kojim klasama matrica odgovaraju i na koji način se mogu ostvariti povoljni rezultati pri pokušaju optimizacije potrošnje energije u bežičnim senzor mrežama.

Pored toga, predstavljen je distribuiran algoritam kontrole napajanja i izloženi su predlozi modifikacije algoritma Jakobijevim, Gaus-Zajdelovim i haotičnim iterativnim postupkom, u cilju poboljšanja brzine konvergencije. Iako se sa matematičkog aspekta Gaus-Zajdelovim postupkom često može doći brže do rešenja, u datom problemu optimizacije u mrežama sa velikim brojem senzora ga nije isplativo primenjivati jer svaki senzor treba da sačeka da svi ostali senzori ažuriraju svoja napajanja kako bi imala neophodne informacije za ažuriranje svog napajanja u novom koraku. Stoga, ovaj rad predstavlja prvi korak ka boljem razumevanju uloge dijagonalne dominacije i iterativnih postupaka tipa fiksne tačke u optimizaciji bežičnih senzor mreža, što može biti tema daljih istraživanja u ovoj savremenoj oblasti primenjene matematike.

Literatura

[1] Goran B. Marković, Miroslav L. Dukić, *Bežične senzor mreže, I deo: Osnovna arhitektura, karakteristike i primene*

[2] Goran B. Marković, Miroslav L. Dukić, *Bežične senzor mreže, II deo: Pregled komunikacione arhitekture*

[3] Roberto Verdone, Davide Dardari, Gianluca Mazzini, *Wireless Sensor and Actuator Networks: Tehnologies, Analysis and Design,* Academic Press, 2007.

[4] Carlos F. Garcia-Hernandez, *Wireless Sensor Networks and Applications: a Survey,* Int. Journal of Computer Science and Network Security, Vol.7, No.3, March 2007.

[5] Ian F. Akylidiz, *A Survey on Sensor Networks*, IEEE Comm. Magazine, August 2002.

[6] Ossama Younis, *Node Clustering in Wireless Sensor Networks: Recent Developments and Deployment Challenges*, IEEE Networks, No.3, May/June 2006.

[7] Ameer Ahmed Abbasi, Mohamed Younis, *A Survey on Clustering Algorithms for Wireless Sensor Networks*, Computer Comunications 30 (2007), pp.2826-2841, Ellsevier B.V.,2007.

[8] Katayoun Sohrabi, *Protocols for Self-Organizing of a Wireless Sensor Networks* , IEEE Personal Commun., October 2000.

[9] www.stsmihajlopupin.edu.rs/dokumenta/Modeli_umrezavanja.pdf

[10] Jun Yuan, Wei Yu, *Joint source coding, routing and resource allocation for wireless sensor networks,* in: IEEE International Conference on Communications (ICC), 2005.

[11] Jun Yuan, Wei Yu, *Distributed cross-layer optimization of wireless sensor networks: a game theoretic approach,* in: Proceedings of the GLOBECOM2006, San Francisco, CA, USA, 2006.

[12] Jun Yuan, Zongpend Li, Wei Yu, Baochun Li, *A cross-layer optimization framework for multihop multicast in wireless mesh networks,* IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol.24, No.11, November 2006.

[13] Vladimir Kostić, Ljiljana Cvetković, *Application of generalized diagonal dominance in wireless sensor network optimization problems,* Applied Mathematics and Computation 218, 2012.

[14] Renita Machado, Sirin Tekinay, *A survey of game-theoretic approaches in wireless sensor networks* Computer Networks 52, 2008.

[15] T. Basar, G. J. Olsder, *Dynamic Noncooperative Game Theory,* SIAM, Philadelphia, 1999.

[16] D. Fudenberg, *The Theory of Learning in Games,* MIT Press, Massachusetts, 1998.

[17] Vivek Srivastava, James Neel, Allen B. MacKenzie, Rekha Menon, Luiz A. DaSilva, James E. Hicks, Jeffrey H. Reed, Robert P. Gilles, *Using Game Theory to Analyze Wireless Ad Hoc Networks*, Virginia Polytechnic Institute and State University Blacksburg, Virginia 24061.

[18] S. Agarwal, S. Krishnamurthy, R. Katz, S. Dao, *Distributed power control in ad-hoc wireless networks*, Intl. Symposium Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, 2001

[19] I. Zaikiuddin, T. Hawkins, N. Moffat, *Towards a game-theoretic understanding of ad-hoc routing*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science 119 (2005).

[20] Vladimir Kostić, *Benefits from the generalized diagonal dominance* , University of Novi Sad, March 2010.

[21] Martin J. Osborne, Ariel Rubinstein, *A Course in Game Theory* MIT Press, Cambridge, Massachusetts Institute of Technology, London

[22] Simon Board, *Preferences and Utility* , UCLA. Retrieved 15 February 2013.

[23] Lévy L., *Sur le possibilitè du l'equlibre èlectrique,* C. R. Acad. Paris 93, 1881.

[24] Minkowski H., *Zur Theorie der Einheiten in den algebraischen Zahlkörpern,*Nachr. Königlichen Ges. Wiss. Göttingen Math. - Phys. Kl. 90-93, no. 1.

[25] Desplanques J., *Théorèm d'algébre,* J. de Math. Spec. 9, 1887.

[26] Hadamard J.,*Leçones sur la propagations des ondes,* Hermann et fils, Paris, 1903, reprinted in 1949 by Chelsea, New York

[27] S. Geršgorin, *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1 (1931) 749-754

[28] O. Taussky, *Bounds for the characteristic roots of matrices,* Duke Math. J. 15 (1948) 1043-1044.

[29] R. Brualdi, *Matrices, eigenvalues and directed graphs*, Linear and Multilinear Algebra 11 (1982), 143-165.

[30] Lj. Cvetković, V. Kostić, *New criteria for identifying H-matrices*, J. Comput Appl. Math (2005)

[31] Lj. Cvetković, R. Bru, V. Kostić, F. Pedroche, *A simple generalization of Geršgorin's theorem* , Advances in Computational Mathematics.

[32] R. Bru, Lj. Cvetković, V, Kostić, F. Pedroche, *Sums of σ-strictly diagonally dominant matrices,* Linear and Multilinear Algebra 58 (2009), no. 1, 75-78.

[33] K. James and W. Riha, *Convergence criteria for successive overrelaxation*

[34] M. Fiedler, V. Pták, *On matrices with nonpositive diagonal elements and positive principal minors,* Czech. Math. J. 12 (1962), 382-400

[35] Lj. Cvetković, V. Kostić, R. S. Varga, *A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion set,* ETNA (Electonic Transactions on Numerical Analysis) 18 (2004), 73-80

[36] Lj. Cvetković, V. Kostić, *Between Geršgorin and the minimal Geršgorin set,* Journal of Computational and Applied Mathematics 196 (2006), 452-458.

[37] R. S. Varga, *Geršgorin and his circles*, Springer-Verlag, New York, 2004.

[38] R. S. Varga, A. Kraustengl, *On Gershgorin-type problems and ovals of Cassini,* ETNA (Electonic Transactions on Numerical Analysis) 8 (1999), 15-20

[39] D. Chazan, W. L. Miranker, *Chaotic relaxation,* Linear Algebra Applications 2 (1969) 199-222.

[40] A. Hadjidimos, *Successive overrelaxation (SOR) and related methods,* Journal of Computational and Applied Mathematics 123 (2000), 177-199

[41] R. Varga, *Matrix Iterative Analysis,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

[42] A. Berman, R. J. Plemons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences,* Classics in Applied Mathematics, vol. 9, SIAM, Philadelohia, 1994.

Kratka biografija

Aleksandra Mračević je rođena 11. aprila 1989. godine u Vrbasu. Završila je Osnovnu školu ”Nikola Đurković” u Feketiću 2004. godine kao nosilac Vukove diplome i kao đak generacije.

Potom upisuje Ekonomsku srednju školu ”Bosa Milićević” u Subotici, smer ekonomski tehničar, koju završava 2008. godine, sa odličnim uspehom i posebnim diplomama za matematiku i rukomet.

Zbog izrazite sklonosti ka matematici, iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer matematika finansija. Zaključno sa junskim ispitnim rokom 2011. godine položila je sve predviđene ispite sa prosekom 9.62 i stekla zvanje Matematičar primenjene matematike.

Nakon toga, oktobra 2011. godine upisuje master studije na istom fakultetu, smer primenjena matematika. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom zaključno sa junskim ispitnim rokom 2013. godine sa prosečnom ocenom 9.14 i time stekla uslov za odbranu master rada.

Stipendista je Fonda za mlade talente Republike Srbije kako na osnovnim tako i na master studijama.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Aleksandra Mračević
AU

Mentor: dr Vladimir Kostić
MN

Naslov rada: Prednosti dijagonalne dominacije u optimizaciji bežičnih senzor mreža
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2013.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5, 103, 42, 2, 28, 0, 0)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Numeričke metode linearne algebre
ND

Predmetna odrednica / Ključne reči: bežične senzor mreže, dijagonalna dominacija, lokalizacija karakterističnih korena, iterativni postupci za rešavanje sistema linearnih jednačina, teorija igara u problemima

optimizacije bežičnih senzor mreža
PO

UDK

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U prvom delu ovog master rada, navode se osnovni pojmovi bežičnih senzor mreža, zatim se u drugom delu postavlja okvir kroz teoriju igara u različitim problemima optimizacije bežičnih senzor mreža i formuliše problem koji je tema ovog rada. Dakle, uvode se osnovne definicije i teoreme iz teorije igara i prikazana je primena u nekim problemima optimizacije bežičnih senzor mreža. Treći deo obuhvata teoriju matrica, odnosno, dijagonalnu dominaciju, lokalizaciju karakterističnih korena i iterativne postupke za rešavanje sistema linearnih jednačina. Četvrti deo obuhvata optimizaciju napajanja veza na fizičkom sloju mreže upotrebom teorije igara i teorije matrica, pri čemu je osnovni cilj maksimiziranje ukupnog kapaciteta uz minimalnu potrošnju energije i izbegavanje interferencije. Prikazani su algoritmi kontrole napajanja i data je diskusija o modifikaciji algoritama. Poslednji deo rada obuhvata primere bežičnih senzor mreža koje su postavljene u različitim sredinama pri čemu se javljaju različite strukture matrica, te se primenjuju rezultati dobijeni u prethodnim glavama rada.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 19.3.2013.
DP

Datum odbrane: Novembar 2013.
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Ljiljana Cvetković, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Vladimir Kostić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Jelena Aleksić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Aleksandra Mračević
AU

Mentor: Vladimir Kostić, Ph.D.
MN

Title: Benefits of diagonal dominance in Wireless Sensor Network Optimization Problems
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2013.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (5, 103, 42, 2, 28, 0, 0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Numerical Linear Algebra with Applications
SD

Subject / Key words: Wireless sensor networks, diagonal dominance, eigenvalue lokalization, iterative methods for solving systems of linear equations, game theory in wireless sensor network optimization

problems
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: In the first part of this master's thesis, the main concepts and definitions of wireless sensor networks are listed, then, in the second part of the paper, the framework throught game theory in various problems of optimization of wireless sensor networks is set out the problem which is the subject of this paper is formulated. Therefore, the basic definitions and theorems of the game theory is introduced, and its aplications in some WSN problems are shown. The third part is about theory of matrices - diagonal dominance, eigenvalue lokalization and iterative methods for solving linear sistems equations. The fourth part involves power control optimization problem at the physical layer using game theory and theory of matrices, where is the main goal maximization network capacity with minimal power consumption and avoiding interference. The power control game algorithm is shown and discussion of modifications of the algorithm is given. The last part of the paper involves examples of WSN, that are placed in various environments, where we have different matrix structures, and the results obteined in previous parts of this paper are applied.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 19.3.2013.
ASB

Defended: November 2013.
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr Ljiljana Cvetković, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	Dr Vladimir Kostić, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, supervisor
Member:	Dr Jelena Aleksić, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad