УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ МАСТЕР РАДА

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ

1. **Датум и орган који је именовао Комисију**
   28. 9. 2018, Веће Департмана за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду
2. **Састав Комисије са назнаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:**
   - Др Олга Бодрожа-Пантић, редовни професор на Природно-математичком факултету у Новом Саду, ужа научна област: дискретна математика, изабрана у звање 14. 3. 2006. – председник комисије
   - Др Борис Шобот, ванредни професор на Природно-математичком факултету у Новом Саду , ужа научна област: алгебра и математичка логика, изабран у звање 4. 5. 2017. – члан комисије
   - Др Бојан Башић, ванредни професор на Природно-математичком факултету у Новом Саду, ужа научна област: дискретна математика, изабран у звање 1. 4. 2018. – ментор

II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ

1. **Име, име једног родитеља, презиме:**
   Зорица (Груја) Бера
2. **Датум рођења, општина, република:**
   11. 7. 1969, Футог, Србија
3. **Година уписа на дипломске академске студије, смер/усмерење:**
   2014, мастер академске студије – мастер професор математике

III НАСЛОВ МАСТЕР РАДА

Проблем паковања квадрата

IV ПРЕГЛЕД МАСТЕР РАДА

Мастер рад заузима 52 странице (iii + 49), садржи 11 библиографских јединица, и подељен је на пет глава: 1. Једноставнији примери паковања квадрата; 2. Доња ограничења за неке вредности $s(n)$; 3. Паковање 6 и 10 квадрата; 4. Паковање јединичних квадрата у правоугаоник; 5. Закључак.

Рад је посвећен проблему паковања јединичних квадрата у квадрат што мање странице. Са $s(n)$ означавамо дужину странице најмањег квадрата у који се може спаковати n јединичних квадрата. Јасно је да важи $s(n^2) = n$, и такође су јасна ограничења $\sqrt{n} \leq s(n) \leq \lceil\sqrt{n}\rceil$. Међутим, у општем случају проблем израчунавања вредности $s(n)$ за задато n може бити врло тежак.

Рад је конципиран на следећи начин. У првој глави дају се неки (углавном једноставнији) примери паковања помоћу којих се добијају нека горња ограничења за $s(n)$ за одређене вредности n, и такође се наводе неке идеје како се ова паковања могу даље надограђивати у сврху добијања горњих ограничења и за неке друге (веће) вредности n. Паковања и тврђења из ове главе су резултати више научника који су се бавили овом тематиком.

У другој глави се најпре наводи и доказује неколико лема које ће бити потребне у том поглављу а и надаље у раду. Те леме су суштинске за тзв. *технику неизбежних тачака,* чије основе је поставио Фридман 1998. год., и помоћу ње пронашао нов начин (знатно простији од до тада познатих) за утврђивање вредности $s(n)$ за $n \in \{2,3,5,8,15,24,35\}$, што је изложено у овој глави предметног мастер рада.

У трећој глави приказује се како су Керни и Шију 2002. год. даље модификовали ову технику и тиме знатно поједноставили ранији доказ једнакости $s(7) = 3$ (претходно је ово доказао такође Фридман, уводећи тзв. *скоро неизбежне тачке*), али и доказали једнакост $s(6) = 3$. У наставку ове главе прелази се на још неколико неопходних лема које воде до резултата Стромкиста, који је 2003. год. доказао једнакост $s(10) = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Четврта глава посвећена је раду Нагамочија из 2005. год. Он је најпре уопштио проблем посматрајући паковања јединичних квадрата у правоугаоник и доказао неке неједнакости за таква паковања, а затим је показао да, као последицу тих резултата, можемо добити једнакости $s(n^2 - 2) = s(n^2 - 1) = n$; ово је од великог значаја будући да је, приметимо, то прво (а и досад једино) познато тврђење којим се одређује тачна вредност функције s за бесконачну фамилију аргумената (изузимајући, наравно, тривијалан случај $s(n^2) = n$). Додатно, Нагамочијев рад даје и нетривијално доње ограничење функције $s(N)$ за било који аргумент N који није облика n^2, $n^2 - 1$ нити $n^2 - 2$. Сва наведена тврђења су детаљно доказана у предметној мастер тези.

У петој (закључној) глави сумира се шта је у тези урађено, и даје се нека оквирна слика о још неким резултатима и правцима истраживања на ову тему.

V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА МАСТЕР РАДА

Рад *Проблем паковања квадрата* садржи све битне елементе мастер рада: предговор, текст који је подељен у пет глава (са закључком на крају) и списак коришћене литературе. Структура рада је добро конципирана (најпре се, у првој глави, дају једноставнији примери, како би се читалац боље упознао с предметом изучавања; затим се, у другој глави, приказује начин рада са тзв. неизбежним тачкама и показују се неки резултати који се добијају релативно праволинијском применом те технике, а у наредним двема главама приказују се неке модификације те технике и сложенији резултати до којих се на тај начин долази). Текст је пропраћен обиљем цртежа (чак 44), које је кандидаткиња самостално исцртавала и који изразито олакшавају праћење текста.

На српском језику, колико је Комисији познато, нема литературе која се бави овом тематиком, па чињеница да је у предметној тези окупљен велик број резултата добијених у радовима великог броја научника током последњих 40-ак година (колико је ова област актуелна) представља вредан допринос. Изложени докази страних аутора су обогаћени додатним детаљима и објашњењима.

Комисија сматра да селекција изложених резултата чини лепо заокружену целину. Свакако, тезом нису обухваћени сви постојећи резултати из ове области (што не би ни било могуће), али вредна је помена чињеница да, у моменту писања овог извештаја, постоје још само две публиковане егзактне вредности функције s (поред оних изложених у тези), наиме (резултати Бенца из 2010. год.) $s(13) = 4$ и $s(46) = 7$!

VI ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

Иако је поставка проблема којим се теза бави лако разумљива чак и у врло раном узрасту, презентовани резултати показују да је проблем заправо много дубљи него што би се на први поглед могао погрешно доживети. Чињеница да су у раду приказане све познате егзактне вредности функције s осим тек два изузетка, а имајући у виду да је реч о актуелној области којом се и даље баве савремени математичари, јасна је сведоџба о сложености посматраног проблема. О актуелности проблема казује и податак да се, за време писања рада, на репозиторијуму arXiv појавио резултат Бенца у ком се (бар како се тврди, имајући у виду да рад још није званично публикован) показују једнакости $s(22) = 5$ и $s(33) = 6$; заједно с резултатима за $s(6)$, $s(13)$ и $s(46)$, овим се „комплетира формула“ $s(n^2 - 3) = n$ за $3 \leq n \leq 7$, а није познато да ли можда ова формула важи за све $n \geq 3$. Актуелни правци истраживања овог проблема тичу се не само одређивања конкретних вредности $s(n)$, већ и налажења што бољих доњих и горњих ограничења у случајевима када се конкретне вредности чине изван тренутних дохвата; доња ограничења се добијају разним идејама (међу којима важно место поново заузимају већ поменута техника неизбежних тачака и њена уопштења), док се горња ограничења најчешће добијају експлицитним проналажењем што бољег паковања за дато n, па поменимо још и то да су за ту сврху Женсан и Рикелинк 2005. године развили одређени хеуристички алгоритам и помоћу њега успели да побољшају најбоља до тада позната горња ограничења за $s(n)$ за више вредности n.

VII КОНАЧНА ОЦЕНА МАСТЕР РАДА

Тема мастер рада је обрађена веома детаљно, а резултати су наведени редом од најједноставнијих до веома сложених. За писање рада било је неопходно познавање разних грана геометрије (комбинаторна, аналитичка, тригонометрија), што је кандидаткиња успешно спровела у дело. Рад је добро организован и прегледан, а коришћена литература је релевантна и актуелна.

VIII ПРЕДЛОГ

Имајући у виду све претходно речено, Комисија предлаже да се мастер рад прихвати а кандидаткињи Зорици Бера одобри одбрана.

Нови Сад,

ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ

Др Олга Бодрожа-Пантић,
редовни професор ПМФ-а, председник

Др Борис Шобот,
ванредни професор ПМФ-а, члан

Др Бојан Башић,
ванредни професор ПМФ-а, ментор