УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ МАСТЕР РАДА

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ

1. Датум и орган који је именовао Комисију

9. 6. 2016, Веће Департмана за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду

2. Састав Комисије са назнаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:

- Проф. др Синиша Црвенковић, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду, ужа научна област: алгебра и математичка логика, изабран у звање 27. 3. 1992. – председник комисије
- Проф. др Игор Долинка, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду, ужа научна област: алгебра и математичка логика, изабран у звање 1. 4. 2008. – члан комисије
- Др Бојан Башић, доцент Природно-математичког факултета у Новом Саду, ужа научна област: дискретна математика, изабран у звање 1. 3. 2013. – ментор

II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ

1. Име, име једног родитеља, презиме:

Стефан (Бранислав) Хачко

2. Датум рођења, општина, република:

11. 8. 1993, Кикинда, Србија

3. Година уписа на дипломске академске студије, смер/усмерење:

2015, теоријска математика

III НАСЛОВ МАСТЕР РАДА

Линеарне форме логаритама у решавању Диофантових једначина

IV ПРЕГЛЕД МАСТЕР РАДА

Мастер рад заузима 56 страница (iv + 52), садржи 25 библиографских јединица и подељен је на шест глава: 1. Основне дефиниције и тврђења; 2. Pillai-ева једначина; 3. Проблем Erdős-а и Graham-а; 4. Једначина облика $(x^k - 1)(y^k - 1) = z^k - 1$; 5. Моноцифарски Фибоначијеви бројеви; 6. Бинарни палиндроми облика $10^n \pm 1$. Поједине главе су подељене на више секција, а поједине секције на више подсекција.

У првој, уводној глави најпре се, у почетне три секције, даје подсетник на неке дефиниције и тврђења из теорије поља, теорије верижних разломака и теорије квадратних остатака, што ће бити потребно у наставку рада. У секцији 1.4, подељеној на три подсекције, уводи се централни појам предметног мастер рада: линеарна форма логаритама, дефинисана као израз облика $\beta_1 \ln \alpha_1 + \beta_2 \ln \alpha_2 + \ldots + \beta_n \ln \alpha_n$, где су бројеви n и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ фиксирани. Затим се даје неколико теорема које се односе на доња ограничења оваквих и сличних форми, и које су главна спона између ове тематике и решавања Диофантових једначина, што је и тема предметног мастер рада.

У другој глави разматра се једначина $a^x - b^y = c$, где су a, b и c фиксирани ненула цели бројеви и $a,b \geq 2$. У секцији 2.2 доказује се главни резултат ове главе (а који би се, можда, због своје општости, могао сматрати и централним резултатом предметног мастер рада): посматрана једначина има највише два решења у скупу природних бројева. Затим се у секцији 2.3 подробније анализира ситуација када c задовољава ограничења $1 \leq c \leq 100$; овде се додатно профињује резултат претходне секције и показује се да тада посматрана једначина има највише једно решење, осим за десет експлицитно утврђених тројки (a,b,c), за које посматрана једначина има тачно два решења. У склопу овог доказа на одређеном месту је потребно решити једначину $y(y + 1) = x(x + 1)(x + 2)$. Ова једначина позната је и под називом *Морделова једначина*, и читав поступак њеног решавања изложен је у секцији 2.1, што је омогућило касније директно позивање на тај резултат без дигресије која би одвлачила пажњу.

У трећој глави решава се једначина $(p - 1)! + a^{p-1} = p^k$, коју су поставили Ердеш и Грејам 1980. год., а на чије се решење чекало све до 1996. год. Траже се решења у којима су a и k природни бројеви, а p непаран прост број. Два специјална случаја, $a = 1$ и $p = 3$, решавали су Лијувил и Апери, респективно, знатно пре него што је једначина и постављена у општем облику. Ова два случаја решавају се у секцији 3.1, и том приликом се добијају укупно три решења: $2! + 1 = 3^1$, $4! + 1 = 5^2$ и $2! + 5^2 = 3^3$ (првонаведено решење појављује се у оба ова специјална случаја). У наредне две секције (од којих се у првој обезбеђују потребни помоћни резултати, а у другој се доказује главно тврђење) испоставља се да су пронађена три решења заправо и једина.

У четвртој глави разматра се питање када је производ два k-та степена умањена за 1 поново k-ти степен умањен за 1, тј. посматра се једначина $(x^k - 1)(y^k - 1) = z^k - 1$, где је k задат природан број. Доказује се да ова једначина нема решења ни за једно $k > 75$.

У петој глави разматра се питање које на први поглед нема везе с Диофантовим једначинама: за које се природне бројеве n у децималном запису Фибоначијевог броја F_n јавља само један цифра (могуће поновљена више пута)? Бројеви који имају ту особину називају се *моноцифарски бројеви*. У раду се најпре ово питање сведе на решавање одређене Диофантове једначне, а затим се она решава обрађиваним техникама. Испоставља се да је једини моноцифарски Фибоначијев број поред (тривијално) једноцифрених број $F_{10} = 55$.

У шестој глави разматра се још једно питање које се тиче цифарске структуре природних бројева. Подсетимо се, кажемо да је природан број *палиндром* ако се „исто чита“ слева надесно и здесна налево. Јасно, својство палиндромичности неког броја зависи од базе у којој је тај број записан. Сви бројеви облика $10^n \pm 1$ очигледно су палиндроми у бази 10, а у овој глави одговара се на питање који од ових бројева су уједно палиндроми и у бази 2. Испоставља се (како је показано у раду) да се и ово питање може свести на решавање одређене Диофантове једначине, и њеним решавањем се добијају само следећа два решења: $10^1 - 1 = 9 = 1001_{(2)}$ и $10^2 - 1 = 99 = 1100011_{(2)}$.

V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА МАСТЕР РАДА

Почетне секције прве главе имају практичну вредност: у њима су садржане неке (мање или више) познате ствари из различитих математичких области, али овако груписане на једном месту умногоме олакшавају читање рада. Затим се у последњој секцији прве главе наводи низ резултата у вези с доњим ограничењима линеарних форми логаритама. Ови резултати су врло дубоки, доказ безмало сваког од њих заузима неколико десетина страница, и штавише, до првог резултата овог типа дошао је Бејкер у серији радова започетој 1966. год., а за тај пробој је 1970. год. награђен Филдсовом медаљом. Притом се Бејкерови резултати могу сматрати уопштењем теореме Гељфонда и Шнајдера из 1935. год., која је дала одговор на седми Хилбертов проблем. С обзиром на овај историјат, врло је неочекивано и надасве импресивно што се резултати овог калибра не само помињу у једном мастер раду, већ представљају и главно оруђе које се користи кроз њега!

Већ у другој глави се на упечатљив начин демонстрира моћ ове технике. Решавање једначине $a^x - b^y = c$, за конкретне ненула целе бројеве a, b и c и $a,b \geq 2$, може се испоставити као озбиљан изазов. Због тога теорема секције 2.2, где се показује да ова једначина увек има највише два решења (без икаквих додатних ограничења за a, b и c!), представља дивљења вредан резултат. Додатно профињење овог резултата из секције 2.3, за „мале" вредности броја c ($1 \leq c \leq 100$), само још интензивира утисак. Међутим, овде треба посебно поменути и резултат из секције 2.1. Наиме, поступак решавања Морделове једначине прилично је сложен, користи дубоке технике рада са раширењима (чак кубним раширењима!) прстена целих бројева, и заправо би Морделова једначина самостално, уз детаљнију разраду неопходних теоријских основа, могла бити прикладна тема за засебан мастер рад. С друге стране, у овом мастер раду то представља само један успутан корак, за који се притом користе технике које немају практично никаквих додирних тачака с техникама које су централна тема рада, што сведочи о његовој изразитој комплексности.

Једначине које се разматрају у наредне две главе, међусобно прилично различите а уједно и различите од једначине из главе 2, јасан су показатељ високог степена примењивости линеарних форми логаритама у решавању Диофантових једначина. Другим речима, нису линеарне форме логаритама посебно компатибилне с једначином из главе 2, већ их је с једнаком успешношћу могуће примењивати на врло широком спектру Диофантових једначина. Осим тога, приликом вредновања садржаја ових глава треба посебно истаћи и доказ теореме Аперија (теореме 3.2); с обзиром на недоступност рада у ком се ова теорема први пут појавила, као и на неуспешност проналажења алтернативног доказа у литератури, у предметном мастер раду изложен је независан доказ.

Најзад, последње две главе тичу се два проблема за која би се можда могло рећи да се налазе на граници с делокругом рекреативне математике. Заједничко им је то што се оба тичу цифарске структуре природних бројева, те (практично последично) што заправо нису формулисани као решавање одређених Диофантових једначина, нити на први поглед делују као да имају додира с тим. Стога, ова демонстрација на крају предметног мастер рада како линеарне форме логаритама могу бити од користи и приликом решавања оваквих „егзотичних" проблема на упечатљив начин заокружује читав рад.

VI ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

Линеарне форме логаритама представљају врло моћно оруђе за решавање Диофантових једначина. Грубо говорећи, „стратегија" која се притом користи изгледа овако: успоставља се кореспонденција између „великих" решења разматране Диофантове једначине и „малих" вредности одређене линеарне форме логаритама. У литератури се могу наћи разна доња ограничења за линеарне форме логаритама, па да би ова ограничења била испуњена, добијамо да разматрана Диофантова једначина не може имати решења већа од одређене границе. Тиме се њено решавање своди на испитивање коначног броја случајева. Како добијене границе често могу бити прилично велике, те испитивање преосталих случајева није могуће практично извести, најпре се помоћу одређених додатних техника добијене границе своде на разуман ниво, па се решавање једначине потом доврши испитивањем преосталих случајева.

VII КОНАЧНА ОЦЕНА МАСТЕР РАДА

Мастер рад је у потпуности урађен у складу са одобреном темом. Кроз примере је на разумљив начин изложена примена једне врло дубоке математичке теорије. У многим од обрађених примера било је неопходно, приликом „припреме терена" за примену линеарних форми логаритама, закорачити у сасвим друге математичке области (квадратна раширења прстена целих бројева у теореми 3.2, кубна раширења у теореми 2.2, врло домишљата употреба квадратних остатака у леми 3.3...), што кандидат чини без икаквог зазора и на једнако јасан начин као и у „главним" деловима рада, чиме је показао поседовање изразите математичке ширине.

VIII ПРЕДЛОГ

Имајући у виду све претходно речено, Комисија предлаже да се мастер рад прихвати, а кандидату Стефану Хачку одобри одбрана.

Нови Сад,

ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ

____

Др Синиша Црвенковић,
редовни професор ПМФ-а, председник

____

Др Игор Долинка,
редовни професор ПМФ-а, члан

____

Др Бојан Башић,
доцент ПМФ-а, ментор