УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ МАСТЕР РАДА

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ

1. Датум и орган који је именовао Комисију

9. 2. 2015, Веће Департмана за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду

2. Састав Комисије са назнаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:

- Проф. др Војислав Петровић, редовни професор на Природно-математичком факултету у Новом Саду, ужа научна област: дискретна математика, изабран у звање 29. 12. 1997. – председник комисије
- Др Борис Шобот, доцент на Природно-математичком факултету у Новом Саду, ужа научна област: алгебра и математичка логика, изабран у звање 20. 1. 2010. – члан комисије
- Др Бојан Башић, доцент на Природно-математичком факултету у Новом Саду, ужа научна област: дискретна математика, изабран у звање 1. 3. 2013. – ментор

II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ

1. Име, име једног родитеља, презиме:
Радојка (Обренко) Цигановић

2. Датум рођења, општина, република:
7. 7. 1991, Нови Сад, Србија

3. Година уписа на дипломске академске студије, смер/усмерење:
2013, теоријска математика

III НАСЛОВ МАСТЕР РАДА

Трећи Хилбертов проблем и сродни проблеми разлагања

IV ПРЕГЛЕД МАСТЕР РАДА

Мастер рад заузима 62 странице (iii + 59), садржи 38 библиографских јединица и подељен је на осам глава: 1. Мотивација; 2. Хилбертови проблеми; 3. Формулација проблема; 4. Разлагања у равни; 5. Трећи Хилбертов проблем; 6. Денов метод; 7. Парадокс Банаха и Тарског; 8. Закључак. Свака глава подељена је на више секција.

Прва глава представља историјски осврт на геометрију у доба Еуклида, на технике које су Стари Грци користили у сврху рачунања запремине пирамиде, а које су суштински почивале на ономе што данас називамо граничним процесима. С правом се поставља питање да ли су гранични процеси овде збиља неопходни, чиме је дата мотивација за тему рада.

Друга глава такође је историјског карактера: у њој се укратко износи биографија Давида Хилберта, с посебним освртом на чувено предавање које је одржао 1900. године на Другом међународном конгресу математичара у Паризу, под називом *Математички проблеми*. На предавању је изложио 23 проблема која, по његовом мишљењу, представљају селекцију проблема којима математичари треба да посвете посебну пажњу у будућности. Трећи Хилбертов проблем управо је централна тема предметног мастер рада: у њему се поставља питање да ли је, за два полиедра једнаких запремина, увек могуће један од њих разрезати на коначан број делова, од којих се потом може саставити други.

У трећој глави формулише се проблем, уз осврт на Хилбертова запажања о проблему, његовим даљим импликацијама, могућности позитивног или негативног разрешења итд. Такође се укратко даје преглед развоја резултата оствариваних у наредним годинама на Трећем Хилбертовом проблему и сродним проблемима разлагања.

Пре преласка на решење Трећег Хилбертовог проблема, најпре се у четвртој глави разматра аналогно питање, али формулисано у равни: да ли је, за два многоугла једнаких површина, увек могуће један од њих разрезати на коначан број делова, од којих се потом може саставити други. Потврдан одговор на ово питање даје Волас–Бољаи–Гервинова теорема, чији је доказ детљано изложен на овом месту у предметном мастер раду.

У петој глави показује се да Трећи Хилбертов проблем има негативан одговор. Излаже се доказ који је дао Каган 1903. године, и за који би се могло рећи да, иако није хронолошки први доказ по реду, представља први, условно речено, „лако схватљив“ доказ (за разлику од оригиналног, који је био изразито компликован). Доказ се заснива на низу досетки, и залази у делове разних, можда на овом месту неочекиваних математичких области попут линеарне алгебре и комбинаторике.

У шестој глави разматрају се технике оригиналног доказа посматраног проблема (који је, поменимо то коначно, дао Макс Ден, Хилбертов ученик, убрзо након што је проблем постављен). Денов доказ је, као што је већ речено, изразито тежак за праћење, али средином XX века група математичара предвођена Хадвигером успела је да знатно упрости тај доказ, а да притом остане очувана Денова идеја из његове сржи. Ова верзија доказа изложена је у предметном мастер раду. Она почива на концепту тзв. Денових инваријанти, које су нашле разне даље употребе у многим сродним проблемима, и због тога се овај доказ данас сматра неком врстом „стандардног“ доказа разматраног проблема.

У седмој глави разматра се још један проблем разлагања: реч је о парадоксу Банаха и Тарског, који тврди да је задату лопту могуће поделити на коначан број делова, од којих је потом могуће саставити две лопте идентичне полазној (при чему је овде, за разлику од варијанте разложивости разматране у претходним главама, дозвољено да делови буду ма какви скупови тачака, не нужно добијени разрезивањем почетног тела по некој равни). Детаљно се излаже не само доказ парадокса Банаха и Тарског већ и доказ његове тзв. јаке верзије, која тврди да је за ма каква два ограничена скупа тачака у простору који имају непразне унутрашњости увек могуће један од њих поделити на коначан број делова од којих је потом могуће саставити други. Ова верзија парадокса понекад се назива *Парадокс о зрну грашка и Сунцу*, из јасних разлога.

Најзад, у осмој, закључној глави прави се резиме рада, међусобно се упоређују резултати изложени у претходним главама, и даје се наговештај како се аналогни проблеми понашају у n-димензионалном простору за број димензија већи од 3.

V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА МАСТЕР РАДА

Историјским уводом у почетним главама у раду је на јасан и у приличној мери популаран начин представљена мотивација за даље изучавање овог проблема. Овај део разумљив је можда чак и (напреднијим) основношколцима, те ове главе могу бити вредан материјал за популаризацију математике.

Разматрањем најпре аналогног проблема у равни (у четвртој глави) читалац се одмереним темпом уводи у тематику предметног мастер рада и на тај начин припрема за знатно сложенија разматрања која ће уследити у наредним главама. Додатна вредност четврте главе лежи у томе што је у њој дат *позитиван* одговор на питање постављено у две димензије, док ће се у наредним главама испоставити да је у три димензије одговор *негативан*, па се на тај начин лепо илуструје колико се промена једног параметра (у овом случају димензије) може драстично одразити на исход проблема.

Кагановo решење Трећег Хилбертовог проблема, изложено у петој глави, истиче се због низа креативних идеја које се простиру кроз доказ, и које притом повезују више математичких области.

Релевантност Деновог решења Трећег Хилбертовог проблема огледа се не само са историјског становишта (будући да је то прво понуђено решење), већ много више у чињеници да је у њему уведен појам тзв. Денових инваријанти, за које се испоставило да представљају врло значајну особину полиедра и које су касније нашле разне примене и изван Хилбертовог оригиналног питања. Због тога шеста глава предметног мастер рада, у којој је детаљно изложена верзија Деновог доказа упрошћена од групе математичара окупљених око Хадвигера, представља веома важан, можда и централни део овог рада.

Најзад, парадокс Банаха и Тарског (изложен у седмој глави) често се наводи међу првим примерима у обради теме разложивости на научно-популаран начин, и због тога овакав завршетак рада на упечатљив начин заокружује тему и оставља утисак кохерентне целине.

VI ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

Хилбертово предавање имало је једну од кључних рола у профилисању тока којим се математика XX века даље развијала. Поједини проблеми и данас су нерешени, а и међу онима који су решени, истраживање на таквим проблемима није стало оног момента када је пронађено решење, већ управо супротно: методе су даље усавршаване и уопштаване, и то је често доводило до великог развоја читавих грана математике. У предметном мастер раду ово се илуструје на примеру једног од њих. Одговор на аналогно питање у равни био је познат још од прве половине XIX века, решење Трећег Хилбертовог проблема пронађено је почетком XX века, а Сидлер је у другој половини XX века показао да, уз једнакост запремина два дата полиедра, једнакост Денових инваријанти заправо представља потребан и довољан услов за потврдан одговор на постављено питање разложивости. Један од праваца даљег развоја овог проблема тиче се постављања аналогног питања у више димензија, где је за 4 димензије нађен сличан потребан и довољан услов, док је за 5 или више димензија проблем и даље отворен.

VII КОНАЧНА ОЦЕНА МАСТЕР РАДА

Мастер рад је у потпуности урађен у складу са одобреном темом. Кандидаткиња је у мастер раду успела да на детаљан начин обради проблем који је постављен као један од 23 најзначајнија математичка проблема XX века, на врло разумљив начин је изложила чак два решења заснована на два битно различита приступа, и уз све то рад употпунила разматрањем више њему сродних проблема. Комисија сматра да би овај рад могао бити одлично штиво свакоме ко жели да се детаљено упути у Трећи Хилбертов проблем и многа сродна питања, а рад је притом написан на такав начин да је количина предзнања неопходна за његово читање минимална могућа.

VIII ПРЕДЛОГ
Имајући у виду све претходно речено, Комисија предлаже да се мастер рад прихвати, а кандидаткињи Радојки Цигановић одобри одбрана.

Нови Сад, 22. 10. 2015.

ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ

Др Војислав Петровић,
редовни професор ПМФ-а, председник

Др Борис Шобот,
доцент ПМФ-а, члан

Др Бојан Башић,
доцент ПМФ-а, ментор