

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ МАСТЕР РАДА

<b>I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ</b>
<b>1. Датум и орган који је именовao Комисију</b> 24. октобар 2013, Веће Департмана за математику и информатику Природно-математичког факултета у Новом Саду
<b>2. Састав Комисије са назнаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• проф. др Ђура Паунић, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду, ужа научна област Алгебра, изабран у звање 10. марта 1997 године-председник</li><li>• проф. др Олга Бодрожа-Пантић, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду, ужа научна област Дискретна математика, изабрана у звање 2. марта 2006. године – члан</li><li>• проф. др Невена Пушић, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду, ужа научна област Геометрија, изабрана у звање 30. децембра 2002. -ментор</li></ul>
<b>II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ</b>
<b>1. Име, име једног родитеља, презиме:</b> Милорад Милана Ероп
<b>2. Датум рођења, општина, република:</b> 1. VI 1987. Рума, Србија
<b>3. Година уписа на дипломске академске студије, смер/усмерење:</b> 27. X 2012, настава математике
<b>III НАСЛОВ МАСТЕР РАДА</b>
Хомогене и нехомогене координате у пројективној геометрији
<b>IV ПРЕГЛЕД МАСТЕР РАДА</b>
<p>Овај мастер рад, односно, његов математички садржај, написан је на укупно 85 густо куцаних страница и подељен у укупно 7 поглавља: Увод, Једнодимензионе многострукости, Дводимензионе многострукости, Тродимензионе многострукости, Барицентричне координате, Пликерове координате праве и Закључак. Најобимније је поглавље Дводимензионе многострукости, које има 30 страна. Сва поглавља су снабдевена геометријским цртежима помоћу којих је много лакше и лепше пратити текст, иако се докази у знатно већој мери заснивају на пројективном координатном принципу.</p> <p>Напомињемо да пројективна геометрија може да се посматра на два начина: један је синтетички, који користи аксиоме пројективног простора, њихове дуале (овде важи принцип дуалитета) и последице; други је аналитички, односно изводи геометријске последице коришћењем специфичног пројективног координатног принципа. Осим тога, треба имати у виду да је Пројективна геометрија затворена научна област. Тако да разматрање доказа и њихово коришћење, при томе успешно, захтева велико умеће.</p> <p>У Уводу су описани основни принципи и начела пројективне геометрије.</p> <p>У првом поглављу, описана је координатизација пројективне праве поједностављеном фон Штаутовом методом. Такође је разматран аналитички аспект хармонијске четворке тачака на правој, аксиома непрекидности, хомогене и нехомогене координате тачака и правих, као и стандардна нумеричка инваријанта пројективних пресликавања, дворазмера. Приказани су и аналитички изрази и разне врсте пројективних пресликавања и њихове како аналитичке, тако и</p>

синтетичке особине. Такође, овде су детаљно приказане операције сабирања и множења тачака на правој, као и њима инверзне операције одузимања и дељења. Ово су све предуслови за координатизацију. Исто тако је приказана комутативност сабирања и множења, као и асоцијативност множења у односу на сабирање. Овде је приказан значај аксиоме некидности, захваљујући којој је сваки реалан број координата неке тачке на пројективној правој. Такође се и овде прави разлика између хомогених и нехомогених координата тачака. Приказује се и важење принципа дуалитета у равни приказивањем принципа координатизације, где и праве у истој равни такође имају координате на истом принципу као и тачке и где је јасно представљена инциденција.

У другом поглављу, приказана је координатизација пројективне равни помоћу координатизације двеју њених правих; на свакој од тих двеју правих постоји репер који се састоји од нулте, јединичне и бесконачне тачке, а свака тачка у равни коришћењем тачака са бесконачним координатама на осам онда има две координате. То су нехомогене координате, а могу се увести и хомогене. На сличан начин се могу координатизовати и праве и то је овде такође приказано. Ту се такође очитује принцип дуалитета. Такође су приказани праволинијски низови тачака и праменови правих, једначинама које повезују њихове координате. Направљена је и разлика између хомогених и нехомогених координата; приказане су предности и једних и других, те је стога ово поглавље и најдуже. Хомогене координате се уводе да би се тачке потпуно подједнако третирали. Трећа хомогена координата бесконачних тачака је једнака нули и то је овде приказано. Овде постоји и права чија свака тачка има бесконачну нехомогену координату.

У трећем поглављу, приказана је координатизација тродимензионог пројективног простора. Ту свака тачка и свака раван имају по три нехомогене координате. Ово се ради на потпуно аналоган начин ономе на који се врши координатизација равни. Због више димензије, неке ствари су овде компликованије. Овде постоји такозвана сингуларна раван, као што свака права има сингуларну тачку, тако да је овде и на тај начин очитован пројективни принцип дуалитета у простору. Такође, то је аналогно постојању сингуларне праве у равни. Према томе, свака тачка има четири хомогене координате, а то важи и за сваку раван.

У четвртном поглављу описане су и приказане барицентричне координате које је први увео Мебијус и приказао их у својој књизи. За ову сврху, било је неопходно увести меру троугла и појам пројективних правих које се секу у сингуларној тачки, а то су овде, заправо, паралелне праве. То је уведено. Наведена је и објашњена физичка мотивација за увођење барицентричних координата.

У петом поглављу, приказане су Пликерове координате пројективне праве. Код овог система координатизације, свака права одређена са две тачке приказана је помоћу шест бројева. Ова уређена шесторка представља Пликерове координате дотичне праве. Приказане су неке особине које се лепо могу описати коришћењем Пликерових координата, као што је на пример одређивање тачке пресека двеју правих.

На крају, у Закључку, лепо су, укратко, описани добијени резултати.

Овде, у опису, нисмо Увод рачунали као прво поглавље.

## **V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА МАСТЕР РАДА**

Прво, морамо рећи да је ова тема врло сложена за обраду. Без обзира што је пројективна геометрија једна затворена математичка област, она има на располагању две методе које се између себе допуњују, а свака од њих је на свој начин компликована. При томе, координатни принцип је овде нешто компликованији од синтетичког. Овде су циљеви рада већ у предговору добро дефинисани, а и касније су испитивања добро спроведена. Јасно су и добро дефинисани појмови пројективне геометрије, добро је приказан одговарајући аналитички приступ, као што је направљен и добар одабир појмова и релација којим се овај рад бави. Одређене релације су дефинисане и сукцесивно су доказане све њихове битне особине. Неке релације су посматране по аналогији. Посебно је за похвалу што су обрађене Пликерове и барицентричне координате и што су дати конкретни примери. Такође, кандидат је користио 14 библиографских јединица, добро одабраних, од којих су неке веома обимне.

## **VI ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА**

Рукопис рада ``Хомогене и нехомогене координате у пројективној геометрији`` садржи све битне

елементе једног мастер рада: садржај, увод, текст подељен у пет поглавља, закључак, литературу. Материја је изложена са разумевањем и прегледно. Кандидат је рад урадио углавном самостално и претежно самостално бирао релевантну литературу.

#### **VII КОНАЧНА ОЦЕНА МАСТЕР РАДА**

Мастер рад је урађен у потпуности у складу са темом која је одобрена. Проблеми који су били наведени у пријави рада су у потпуности адекватно анализирани. Рад је написан прегледно и подробно, докази су математички коректно изведени, целина је добро издељена на поглавља и параграфе.

#### **VIII ПРЕДЛОГ**

Имајући у виду претходно речено, Комисија предлаже да се мастер рад прихвати, а кандидату Милораду Ерору одобри одбрана.

Нови Сад,

7. јула 2014.

ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ

\_\_\_\_\_  
др Ђура Паунић, ред. проф. ПМФ, председник

\_\_\_\_\_  
др Олга Бодрожа-Пантић, ред. проф. ПМФ, члан

\_\_\_\_\_  
др Невена Пушић, ред. проф. ПМФ, ментор