УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ МАСТЕР РАДА

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ

1. Датум и орган који је именовао Комисију

24. 6. 2016, Веће Департмана за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду

2. Састав Комисије са назнаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:

- Проф. др Игор Долинка, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду, ужа научна област: алгебра и математичка логика, изабран у звање 1. 4. 2008. – председник комисије
- Др Борис Шобот, доцент Природно-математичког факултета у Новом Саду, ужа научна област: алгебра и математичка логика, изабран у звање 20. 1. 2010. – члан комисије
- Др Бојан Башић, доцент Природно-математичког факултета у Новом Саду, ужа научна област: дискретна математика, изабран у звање 1. 3. 2013. – ментор

II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ

1. Име, име једног родитеља, презиме:

Данијела (Драго) Митровић

2. Датум рођења, општина, република:

5. 11. 1993, Бијељина, Република Српска

3. Година уписа на дипломске академске студије, смер/усмерење:

2015, теоријска математика

III НАСЛОВ МАСТЕР РАДА

Туе–Морсова реч и неке њене примене

IV ПРЕГЛЕД МАСТЕР РАДА

Мастер рад заузима 65 страница, садржи 25 библиографских јединица и подељен је на пет глава: 1. Увод; 2. Дефиниција Туе–Морсове речи; 3. Особине Туе–Морсове речи; 4. Примена у теорији бројева; 5. Неке куриозитетне примене. Свака глава подељена је на више секција.

У првој, уводној глави дефинишу се основни појмови из области комбинаторике на речима, и показују се поједине њихове особине и међусобне везе. Међу дефинисане појмове спадају реч, префикс, фактор, преклапање, преокретање, палиндром, морфизам итд. Уводе се и поједине класе бесконачних речи, као што су периодичне, евентуално периодичне и апериодичне.

Друга глава је посвећена дефинисању централног појма предметног мастер рада: Туе–Морсове речи (у ознаци *TM*). Она се најпре дефинише преко рекурентне везе за слова у њеном запису, а затим се доказују три теореме које демонстрирају још три начина на која се може дефинисати Туе–Морсова реч (еквивалентна оригиналној дефиницији): преко парности суме цифара у бинарном запису природних бројева, преко граничне вредности одређеног низа коначних речи, као и преко коефицијената у развоју одређеног бесконачног производа. Затим се, у секцији 2.1, уводи појам тзв. Туе–Морсовог морфизма, и у њој се долази до још две еквивалентне дефиниције Туе–Морсове речи: она је јединствена фиксна тачка, до на комплементирање, Туе–Морсовог морфизма, а такође се може дефинисати и преко тзв. Морсових блокова, што је дефиниција за коју се у каснијим деловима рада испоставило да има велику употребну вредност. Коначно, у секцији 2.2 дефинише се и тзв. уопштена Туе–Морсова реч, која је заснована на уопштењу дефиниције преко парности суме бинарних цифара (уопштавајући базу која се посматра, као и модул по ком се посматра сума цифара).

У трећој глави испитују се особине Туе–Морсове речи. У секцији 3.1 најпре се утврђује да она не садржи преклапање, а остатак секције посвећен је разним последицама ове чињенице. Показује се да је Туе–Морсова реч кубно слободна и да је апериодична. Затим се доказује теорема која даје следећу карактеризацију Туе–Морсове речи: то је највећа (у смислу лексикографског поретка) бинарна бесконачна реч без преклапања која почиње словом 0 (чиме је практично добијена још једна еквивалентна дефиниција Туе–Морсове речи). Коначно, истражује се и питање које се после ове теореме сáмо намеће: која је лексикографски највећа бинарна реч без преклапања – одговор: 110110*TM*. На крају се, у подсекцији 3.1.1, испитује која је минимална неопходна кардиналност алфабета над којим се може конструисати бесконачна квадратно слободна реч. Показује се да то није могуће извести над двоелементним алфабетом, а онда се даје конструкција такве речи над троелементним алфабетом (уз, наравно, суштинску употребу Туе–Морсове речи), чиме се одговара на постављено питање.

Четврта глава презентује одабир неких примена Туе–Морсове речи у теорији бројева: презентована су три примера, сваки у по једној секцији. У секцији 4.1 разматра се тзв. Пруе–Тари–Ескотов проблем; главни резултат ове секције је тврђење у ком се показује да за сваки природан број k постоје два дисјунктна скупа природних бројева кардиналности 2^k таква да су збирови елемената тих скупова међусобно једнаки, а такође и збирови квадрата, збирови кубова, ..., све до збирова k-тих степена (очекивано, Туе–Морсова реч игра кључну ролу у овом доказу). При крају секције се напомиње да је у литератури разматрана и општија верзија овог проблема, у којој се тражи m скупова (не више само 2) а да притом свака два испуњавају описан услов. Скицирана је конструкција која решава и ову верзију проблема, а која је заснована на уопштеној Туе–Морсовој речи. У секцији 4.2 показује се на који начин Туе–Морсова реч игра улогу у одређивању граничне вредности једног низа рационалних бројева. Коначно, секција 4.3 бави се развојем реалних бројева у нецелобројним базама. Кроз највећи део секције остаје мистериозно на који начин су резултати ове секције повезани са Туе–Морсовом речју; конекција се коначно успоставља у финалној (уједно и главној) теореми: иако, у општем случају, развој задатог реалног броја (нпр. 1) у некој нецелобројној бази не мора бити јединствен, постоји најмања база у којој овај развој јесте јединствен, и притом низ цифара у развоју броја 1 у тој бази генерише управо Туе–Морсову реч!

У последњој, петој глави сакупљене су неке појаве Туе–Морсове речи у потпуно неочекиваним, чак нематематичким областима: кроз три секције презентоване су, респективно, примене у шаху, музици и економији. У шаху (секција 5.1) Туе–Морсова реч може бити искоришћена како би се конструисала бесконачно дугачка партија шаха, имајући у виду тзв. „немачко правило“ за реми, које је важило у једном периоду. Затим, композитор Том Џонсон написао је композицију под називом „Аутоматска музика“, и један њен део је на одређен начин заснован управо на Туе–Морсовој речи (секција 5.2). Коначно, у економији (секција 5.3), помоћу Туе–Морсове речи, може се осмислити систем поделе одређеног добра за који се испоставља да је знатно више фер за укључене стране него што је то случај при подели на класичан начин.

V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА МАСТЕР РАДА

Прве три главе представљају квалитетан увод у појам и особине Туе–Морсове речи. Постојање великог броја различитих дефиниција у раду (уз доказ међусобне еквиваленције) сведочи о исцрпности кандидаткињиног приступа. Кроз читав рад, а нарочито у уводу, разни апстрактни концепти илустровани су обиљем примера, што у великој мери разбија сувопарност и рад чини знатно приступачнијим.

Четврта глава представља занимљиву илустрацију честе појаве у математици када две наизглед потпуно неповезане области налазе примену једна у другој. Туе–Морсова реч је, током свог постојања, нашла примене у импресивној листи математичких области: поред (наравно) комбинаторике, ту су и теорија бројева, диференцијална геометрија (управо је Морс дошао до ове речи приликом изучавања одређеног проблема из диференцијалне геометрије), теорија аутомата (Туе–Морсова реч је међу основним примерима 2-аутоматских низова), теорија група и теорија полугрупа (негативно решење Бернсајдовог проблема како за групе тако и за полугрупе суштински је засновано на Туе–Морсовој речи), реална анализа (Туе–Морсова реч појавила се приликом испитивања максимума Кнопове функције), физика (нарочито приликом изучавања контролисане неуређености и квазикристала), теорија фрактала, компјутерска графика итд. Наравно, свеобухватан приказ свих ових примена захтевао би неупоредиво више простора него што то један мастер рад дозвољава, па се кандидаткиња ограничила на одабир неколико примера из једне од ових области, теорије бројева. Кандидаткиња је у овој глави показала не само да се одлично сналази у комбинаторици на речима (што је било јасно већ и из прве три главе), већ и да има одличан увид и у теорију бројева, чиме је демонстрирала поседовање математичке ширине.

Коначно, у петој, последњој глави наставља се илустрација појаве из претходног пасуса, али овај пут се лествица подиже и прелази се на још неочекиваније примене: у шаху, музици и економији. Можда је овде посебно занимљиво поменути да би се презентовани пример примене у економији заправо могао у истом облику срести и у другим областима, практично било где где постоји потреба утврђивања одређеног редоследа по ком се нешто одвија, па кандидаткиња наводи чак и неколико примера из спорта: распоред наступа на такмичењу, редослед извођења пенала у фудбалу, избор боје фигура у шаховским мечевима...! (Нажалост, овај систем ипак није заживео у пракси, и како кандидаткиња у раду примећује, до неке мере је имплементиран, али ни ту у потпуности, једино у распореду сервирања у тајбрејку у тенису.) Ова демонстрација на крају предметног мастер рада како Туе–Морсова реч може бити од користи и на овако „егзотичним“ местима на упечатљив начин заокружује читав рад.

VI ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

Иако по својој дефиницији спада у област комбинаторике (конкретно, комбинаторике на речима), Туе–Морсова реч нашла је своје примене и у бројним другим областима. У раду је то илустровано на примеру теорије бројева, као и, што је својеврстан куриозитет, чак у разним нематематичким областима.

Резултати који се добијају током рада с Туе–Морсовом речју често умеју да буду прилично неочекивани и изненађујући. О томе најбоље сведоче следећа два резултата из предметног мастер рада (и то су управо она два резултата који имају најкомплексније доказе). Финални резултат секције 3.1 тврди да је лексикографски највећа бесконачна бинарна реч без преклапања баш $110110TM$ – на први (па и други, трећи...) поглед, читалац се с правом може запитати одакле је „испливао“ овај, рекло би се, прилично „неприродан“ одговор. А можда је још лепши пример секција 4.3, где се на пуних 17 страница развија теорија за коју делује да нема никаквих додирних тачака с темом предметног мастер рада, да би се тек на крају Туе–Морсова реч савршено уклопила у читаву причу и тиме се добио резултат вредан поновног читања.

VII КОНАЧНА ОЦЕНА МАСТЕР РАДА
Мастер рад је у потпуности урађен у складу са одобреном темом. Коришћене библиографске јединице датирају од 1851. год. па све до 2012. год., што сведочи о практично ванвременском карактеру одабране теме, чија популарност не јењава.
VIII ПРЕДЛОГ
Имајући у виду све претходно речено, Комисија предлаже да се мастер рад прихвати, а кандидаткињи Данијели Митровић одобри одбрана.

Нови Сад, 20. 9. 2016.

ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ

Др Игор Долинка,
редовни професор ПМФ-а, председник

Др Борис Шобот,
доцент ПМФ-а, члан

Др Бојан Башић,
доцент ПМФ-а, ментор