



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU



Dajana Jokić

MATEMATIČKI ASPEKTI U KARTOGRAFIJI

• master rad •

Mentor: dr Milica Žigić

docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Novi Sad, 2019.

Predgovor

Kartografija je nauka koja se bavi grafičkim prikazivanjem prostorne stvarnosti i fizičkog sveta u ravni. Iako u širem smislu ista predstavlja spoj nauke i umetnosti, opseg istraživanja ovom prilikom sveden je na matematičku kartografiju. Master rad pod nazivom „Matematički aspekti u kartografiji“ izučava temelje matematičke kartografije, odnosno metode preslikavanja elipsoida i sfere u čijim osnovama leže matematička tvrđenja, formule i adekvatna primena istih.

Prvo poglavlje predstavlja pregled definicija i pojmove o kojima će biti reči u preostalom delu rada. U najvećoj meri to je osvrt na fundamentalne pojmove iz teorije krivih i površi, diferencijalnog i integralnog računa, ravne i sferne trigonometrije i diferencijalne geometrije.

Drugo poglavlje sadrži pregled najpoznatijih kartografskih projekcija i njihovih karakteristika, s obzirom na različite kriterijume podele. Svaka od navedenih projekcija data je svojom parametrizacijom, grafičkim prikazom i opisom postupka preslikavanja. Generalno, uz navođenje razlika biće predstavljene i veze među navedenim načinima preslikavanja. Takođe, opisana je i povezanost kompleksne funkcije e^z sa Merkatorovom projekcijom, na koju je stavljen poseban akcenat, kao jednu od najčešće korišćenih u praksi.

Treće poglavlje izučava proces projektovanja Zemljine površine kao rotacionog elipsoida, osvrćući se sa druge strane na uobičajenu aproksimaciju iste kao sfere. Shodno tome, navodi se uporedni pregled navedenih načina modeliranja, uz relacije koje opisuju pojmove longitude i latitude, koordinata tačaka i transformacija istih. Uz to biće reči i o problemu optimalnih kartografskih projekcija, odnosno selekciji adekvatnih tehnika konsturisanja i samim kriterijumima izbora. U vezi s tim opisan je pojam Gausove zakrivljenosti Zemljine površi i čuvena „Theorema Egregium“. Kroz sažetu analizu teorije deformacija, biće obrađeni različiti pristupi minimizaciji navedenog. Svakako, u upotrebi su ponovo matematičke metode aproksimacije, iteracije i slični elementi numeričke analize.

Četvrto, ujedno i poslednje poglavlje daje prikaz stanja kartografije savremenog doba i nesumnjivog napretka koji je zabeležen sa razvojem geoinformacionih i „web“-tehnologija. Navedeni su i osnovni pojmovi koji se tiču državnog referentnog sistema Republike Srbije i službene kartografske projekcije Srbije.

Zaključak predstavlja kratak osvrt na tematiku obrađenu kroz ovaj rad. Uz to sadrži i neka od otvorenih pitanja i nedoumica sa kojima se susreću savremeni kartografi ili su se kao zanimljiva nametnula tokom ovog rada i istraživanja.

* * *

Veliku zahvalnost želim da iskažem svom mentoru, dr Milici Žigić i predsedniku komisije, dr Sanji Konjik na podršci pri izboru teme, kao i nesebičnoj pomoći, strpljenju i zalaganju da korisnim i konstruktivnim savetima i sugestijama ovaj rad dostigne formu koju sada ima. Takođe, zahvalnost dugujem i dr Ivani Vojnović što je pristala da bude član komisije za odbranu ovog master rada.

Posebnu zahvalnost dugujem svojim roditeljima i bratu koji su mi velikodušnu podršku, pažnju i ljubav pružali tokom celog školovanja. Svojim ohrabrenjima i savetima činili su me hrabrom i smelom za sve što me čeka, te kao takvi bili moja neiscrpna motivacija. Veliko hvala i svim mojim prijateljima koji su takođe bili i ostali uz mene.

Dajana Jokić

Sadržaj

Predgovor	2
1. Uvodni deo	6
1.1. Koordinate tačaka.....	6
1.2 Parametrizacija površi u \mathcal{R}^3	10
1.3. Osnovni pojmovi teorije kartografskih projekcija	24
1.4. Obrasci sferne trigonometrije i sferni trougao.....	29
2. Kartografske projekcije	30
2.1. Klasifikacija kartografskih projekcija	30
2.2. Konusne projekcije	33
2.2.1. Uspravna konformna konusna projekcija	34
2.2.2. Uspravna ekvivalentna konusna projekcija	36
2.2.3. Uspravna ekvidistantna konusna projekcija	37
2.3. Cilindrične projekcije	39
2.3.1. Uspravna konformna cilindrična projekcija.....	39
2.3.2. Uspravna ekvivalentna cilindrična projekcija	40
2.3.3 Uspravna ekvidistantna cilindrična projekcija	41
2.4. Azimutalne projekcije	42
2.4.1. Uspravna konformna azimutalna projekcija.....	42
2.4.2. Uspravna ekvivalentna azimutalna projekcija	43
2.4.3. Uspravna ekvidistantna azimutalna projekcija.....	44
2.5. Merkatorova projekcija	45
2.5.1. Jednačine Merkatorove projekcije	46
2.5.2 Veza sa kompleksnom funkcijom.....	47
3. Geometrija Zemljinog elipsoida i problemi kartografskih projekcija	49
3.1. Zakrivljenost Zemljine površi.....	49
3.2. Rotacioni elipsoid	50
3.3. Preslikavanje elipsoida na sferu	51
3.4. Problem optimalnih kartografskih projekcija.....	52
4. Kartografija savremenog doba.....	53

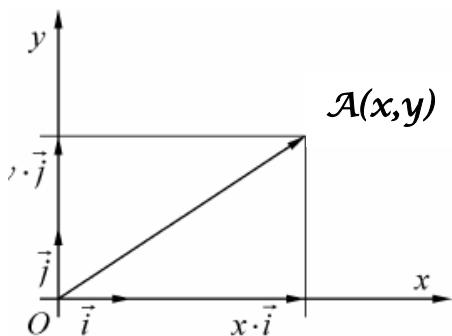
4.1. Primena kompjuterske tehnologije u kartografiji	53
4.2. Geografski informacioni sistem (GIS)	54
4.3. Beselov elipsoid i koordinatni sistem WGS 84	55
4.4. Gaus – Krigerova projekcija	56
5. Zaključak.....	58
Literatura	59
Biografija.....	61
Ključna dokumentacijska informacija	62
Key words documentation.....	65

1. Uvodni deo

U ovom poglavlju dat je pregled definicija i pojmove o kojima će biti reči u preostalom delu rada. U najvećoj meri to predstavlja osvrt na fundamentalne pojmove iz teorije krivih i površi, diferencijalnog i integralnog računa, ravne i sferne trigonometrije i diferencijalne geometrije. U ovom delu rada korišćene su reference [9],[10], [11], [15], [17] i [25], ispraćeno ilustracijama iz [17].

1.1. Koordinate tačaka

Podsetimo se najpre, položaj tačke u ravni ili prostoru jedinstveno je određen njenim koordinatama. Dekartov pravougli koordinatni sistem najjednostavniji je način prikazivanja tačaka u ravni i kao takav prvi je sa kojim se upoznaju početnici u matematici.

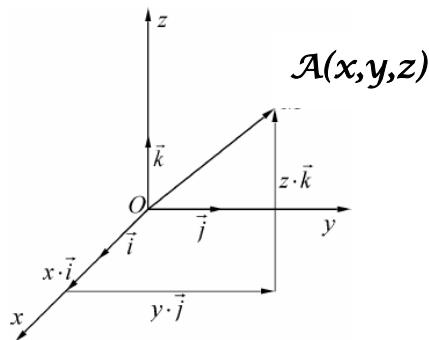


Slika 1. (levo): Dvodimenzionalni pravougli koordinatni sistem

Ovaj sistem čine dve međusobno normalne koordinatne ose x i y čija se tačka preseka naziva centrom O . Iste su nosioci baznih ortonormiranih vektora \vec{i} i \vec{j} (jediničnih međusobno normalnih vektora). Koordinate tačke A u ovom sistemu date su

uređenim parom brojeva (x, y) , koji predstavljaju koeficijente vektora $\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}$ i pritom, x nazivamo apscisom, a y ordinatom tačke A . Za nas će ipak bitnije biti da odredimo koordinate tačaka u prostoru, te shodno tome podsećamo i na Dekartov koordinatni sistem u prostoru, nastao analogno - proširenjem prethodno navedenog dvodimenzionalnog sistema. Važi:

$$A(x, y, z) \leftrightarrow \overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

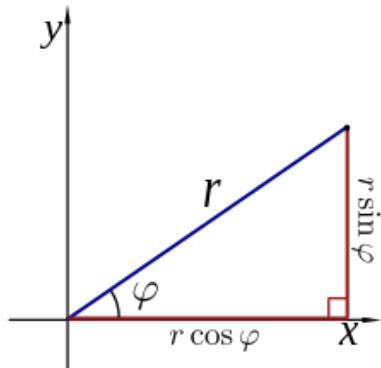


Slika 2. Dekartov pravouogli koordinatni sistem u prostoru

Položaj tačke takođe može biti predstavljen i preko polarnih koordinata. Veza sa pravolinijskim Dekartovim koordinatama sledi na osnovu trigonometrije pravouglog trougla i data je sledećim relacijama:

$$\boxed{x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi}$$

$$0 \leq r < \infty \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$



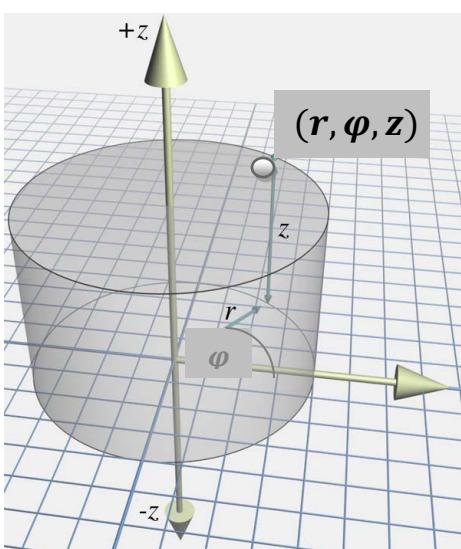
Slika 3. Polarni koordinatni sistem

Dvodimenzionalni polarni koordinatni sistem čini jedna osa koja se naziva polarnom i koja se poklapa sa pozitivnim delom x – ose. Položaj tačke opisan je na osnovu parametara r i φ , u skladu sa sledećim postupkom: rotiranjem polarne ose (dakle, poluprave sa centrom u tački $(0,0)$ za ugao φ i potom pronaalaženja tačke na istoj koja je na rastojanju r od koordinatnog početka, dobijamo poziciju tačke čije su polarne koordinate (r, φ) .

O primeni istih u matematičkoj kartografiji biće reči nakon što uredemo klasifikaciju kartografskih projekcija.

Najčešća uopštenja polarnih koordinata su cilindrične i sferne koordinate, koje primenu nalaze kada je reč o orientaciji i određivanju položaja tačaka u prostoru.

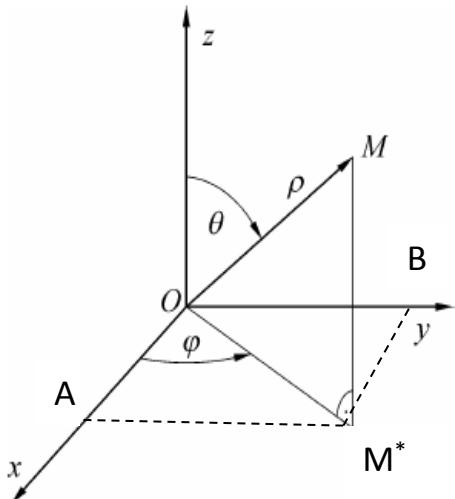
Naime, cilindrične koordinate uzimaju u obzir parametre r i φ sa istim značenjem kao što je slučaj sa polarnim koordinatama, ali uz iste vezuje se još jedan parametar, označen sa z , a on predstavlja rastojanje zadate tačke od Oxy – ravni.



Dakle, tačku u ravni određenu preko polarnih koordinata pomeramo vertiklano u pravcu z – ose i na taj način dobijamo položaj tražene tačke.

$$\boxed{x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z \in \mathbb{R}}$$

← Slika 4. Cilindrične koordinate



Slika 5. Sferni koordinatni sistem

Naime, položaj tačke u prostoru može biti opisan na sledeći način: najpre rotiramo horizontalnu osu za ugao φ , a potom i vertikalnu osu čiji je prvobitni položaj usmeren kao pozitivni deo z -ose za ugao θ . Preostaje da na dobijenoj polupravoj odredimo tačku koja je na rastojanju ρ od koordinatnog početka.

Posmatrajući pravougle trouglove na slici izvodimo sledeće relacije:

$$\begin{aligned}\angle M^*OM &= 90^\circ - \theta \Rightarrow \cos(\angle M^*OM) = \cos(90^\circ - \theta) \\ &= \cos 90^\circ \cos \theta + \sin 90^\circ \sin \theta = \sin \theta \\ \cos(\angle M^*OM) &= \frac{OM^*}{OM} = \sin \theta,\end{aligned}$$

Svakako, isti zaključak smo mogli da izvedemo i uočavajući da je ugao $\angle M^*MO = \theta$, u skladu sa činjenicom da je $Oz \parallel p(M^*, M)$.

Dakle, važi

$$\cos \varphi = \frac{OA}{OM^*} = \frac{x}{OM^*} \Rightarrow x = OM^* \cos \varphi = OM \sin \theta \cos \varphi$$

Dakle, $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, a sličnim razmatranjem, dobijamo i koordinatu $y = \sin \varphi \cdot OM^* = \rho \sin \varphi \sin \theta$, i poslednje i najprostije: $\cos \theta = \frac{z}{OM} \Rightarrow z = \rho \cos \theta$.

Napomena: Neretko se, radi jednostavnosti, posmatra jedinična sfera i tada tačke sa iste imaju koordinate: $x = \sin \theta \cos \varphi$, $y = \sin \varphi \sin \theta$, $z = \cos \theta$.

Ovim smo dobili vezu sfernih i Dekartovih pravouglih koordinata. U nastavku dodajemo jednu bitnu napomenu u vezi s istim.

Naime, sferne koordinate mogu biti date i na sledeći način:

$$x = \rho \cos \varphi \cos \theta \quad y = \rho \sin \varphi \cos \theta \quad z = \rho \sin \theta$$

uz uslove:

$$0 \leq \rho < \infty \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

U vezi s navedenim granicama, bitno je imati u vidu sledeće:

Postoje dva pristupa tumačenja, pa i postavljanja granica u skladu sa činjenicom koju smo paralelu odabrali kao referentnu.

Pre svega, jasno je da sferni koordinatni sistem za orientaciju koristi sfenu, sa centrom $O(0,0,0)$, koja može biti podeljena na kružnice paralelne ravni Oxy - paralele, među kojima je ekvatorijalna najčešće izdvojena kao glavna i kružnicama koje prolaze kroz polove – meridijanima, od kojih se kao vodeći uzima Grinič.

Shodno navedenom, opis položaja neke tačke najprikladnije je dati preko određenih uglova – dakle, u smislu udaljenosti od fiksog meridijana i udaljenosti od fiksne paralele. Nakon ovoga, preostaje još odrediti i udaljenost od koordinatnog početka.

Sada dolazimo do onoga što smo hteli da izdvojimo, a to je izbor referentne paralele.

Ukoliko je za fiksnu paralelu odabran Ekvator, tada su, očito, granice ugla $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, odnosno najudaljenije tačke su severni i južni pol, pa važi: $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, dok u slučaju kada se merenja datog ugla vrše od severnog pola, (slika 5.) parametrizacija sfere je:

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta \quad z = \rho \cos \theta$$

uz granice date sa:

$$0 \leq \rho < \infty \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Dakle, naveli smo dva moguća načina definisanja položaja tačke na sfeni, odnosno orientacije na sfeni, a time i parametrizacije iste.

1.2. Parametrizacija površi u \mathbb{R}^3

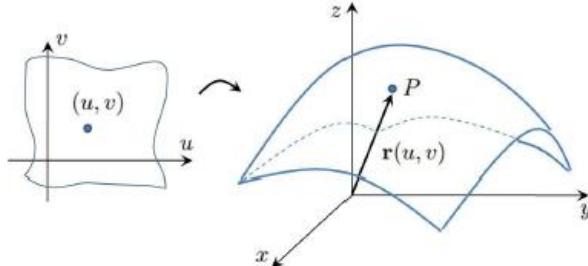
Koristeći se teorijom i metodama diferencijalne geometrije razmotrićemo sada neke osobine površi u euklidskom prostoru \mathbb{R}^3 . Iste će nam biti neophodne za razumevanje i dobru definisanost pojmove i tvrđenja navedenih u nastavku. Napomenimo još da će biti korištene pravougle Dekartove koordinate, kao i to da će tačka $A(x, y, z)$ ujedno biti identifikovana sa svojim radijus-vektorom $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Podsetimo se najpre, *parametrizovanom krivom* nazvali smo neprekidno preslikavanje skupa $I \subset \mathbb{R}$ u \mathbb{R}^n . U \mathbb{R}^3 ista je najčešće data parametarski sa $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Specijalno, u nastavku posmatraćemo preslikavanja takva da su komponentne funkcije $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in I = (a, b)$, neprekidno-diferencijabilne. Regularnost krive u tački $t \in I$ definisali smo putem uslova $\dot{r}(t) \neq 0$. Krivu koja je regularna u svakoj tački intervala I nazivamo *regularnom krivom*. Suprotno tome, tačku koja ne ispunjava navedeni uslov, odnosno za koju je $\dot{r}(t) = 0$ imenujemo *singularnom tačkom* date krive. Jasno, u skladu sa interpretacijom tangentnog vektora kao vektora brzine, uočavamo da uslov regularnosti može da se interpretira kao uslov da se čestica čije kretanje posmatramo u vremenu t neprestano kreće (odnosno, ne prestaje da se kreće - ne staje).

Parametrizovana kriva $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je po delovima regularna ako je c neprekidna funkcija i postoji podela intervala $I : t_0 < t_1 < \dots < t_k$, tako da su restrikcije $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$, $i = 0, \dots, k+1$, regularne krive.

Vektor $\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ nazivamo tangentnim vektorom u tački $r(t)$ i interpretiramo kao vektor brzine.

Definicija 1.2.1. Neka je U otvoren skup u \mathbb{R}^2 . *Parametrizovana površ* u \mathbb{R}^3 je neprekidno-diferencijalno preslikavanje $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, a slika iste bio bi skup tačaka $r(U) \subset \mathbb{R}^3$.



Slika 6. Regularna parametrizovana površ

Površ može biti zadata na sledeća tri načina:

- ❖ **Parametarski** – $(u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ili $r: (u, v) \rightarrow (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v))$;
- ❖ **Kao grafik funkcije** – $g: U \rightarrow \mathbb{R}$;
- ❖ **Implicitno** – $F(x, y, z) = 0$.

Primer: 1) **Jedinična sfera** $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ je data sledećom parametrizacijom: $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ za $U = \{(\varphi, \theta) : 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi\}$;

2) **Cilindar** je dat parametrizacijom: $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ za $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (\cos v, \sin v, u)$ i $U = \{(u, v) : u \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi)\}$;

3) **Konus** je definisan sa $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$ za $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u)$, $U = \{(u, v) : u \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi)\}$. (1.1)

Parcijalni izvodi prvog reda parametrizovane površi r su:

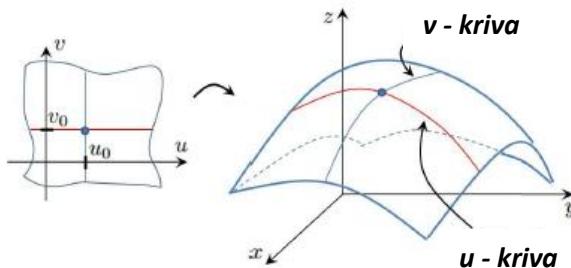
$$\frac{\partial r}{\partial u}(u, v) = r_u(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v))$$

$$\frac{\partial r}{\partial v}(u, v) = r_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v)) \quad (1.2)$$

Napomena: Izvod preslikavanja definisanog u zavisnosti od jednog parametra (slučaj krive) kroz ovaj rad označen je sa $\dot{r}(t)$ ali u prvom navođenju istog data je i oznaka $\frac{dr}{dt}$ takođe često korišćena u literaturi. U slučaju funkcijске zavisnosti od dva parametra (površ) ravnopravno će biti u upotrebi zapisi iz (1.2).

Definicija 1.2.2. Za fiksiranu tačku $(u_0, v_0) \in U$ parametri u i v generišu krive $u \rightarrow r(u, v_0)$, $v \rightarrow r(u_0, v)$ koje nazivamo *parametarske krive površi r ili koordinatne krive*.

Geometrijska interpretacija istih prikazana je na slici :



Slika 7. Parametarske krive regularne površi

Definicija 1.2.3. Tangentne vektore $\mathbf{r}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ i $\mathbf{r}_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ na u - i v - krive parametrizovane površi r , respektivno, nazivamo *koordinatnim vektorima* iste.

Analogno uslovu regularnosti za krive, isti se uvodi i za površi i to na sledeći način:

Definicija 1.2.4. Parametrizovanu površ $r(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (x(\mathbf{u}, \mathbf{v}), y(\mathbf{u}, \mathbf{v}), z(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ nazivamo *regularnom* u tački $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U$ ako važi $\mathbf{r}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \times \mathbf{r}_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$, u suprotnom, data tačka je *singularna tačka* površi r .

Napomena: Navedeni uslov regularnosti ekvivalentan je uslovima da su koordinatni vektori linearne nezavisni, odnosno uslovu da je rang Jakobijan matrice $J(r)(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ maksimalan, u ovom slučaju jednak 2.

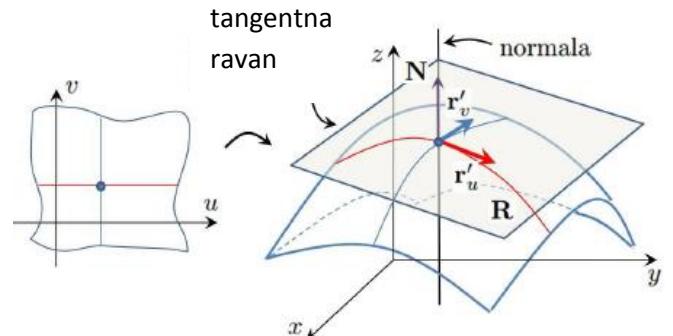
Dodajemo,

$$J(r)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

Definicija 1.2.5. Jedinični vektor normale površi r u tački $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U$ dat je sa:

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{r}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \times \mathbf{r}_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{r}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \times \mathbf{r}_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})|}.$$

Ravan određena tačkom $M = r(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ i vektorom normale N naziva se **tangentnom ravni**.



Slika 8. Tangentna ravan

Dakle, tangentna ravan i normala na površ r u tački $M = r(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ date su sa:

$$R(\lambda, \mu) = r(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda \cdot \mathbf{r}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mu \cdot \mathbf{r}_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

$$R(p) = r(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + p(\mathbf{r}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \times \mathbf{r}_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$$

Opšta jednačina ravni $R(x, y, z)$ u zadatoj tački $P(x_0, y_0, z_0)$ i vektorom normale $N = (n_x, n_y, n_z)$ bila bi:

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$$

Napomena: U regularnoj tački površi r uvek možemo da postavimo tangentnu ravan. Sa druge strane, singularitet može biti svojstven parametrizaciji, te odabirom neke druge parametrizacije isti može biti otklonjen, ali isto tako postoje primeri u kojima je singularitet svojstvo same površi, pa će svaka njena parametrizacija tada imati singularnu tačku.

Primeri. U vezi s prethodnom napomenom razmotrimo slučaj sfere i konusa u \mathcal{R}^3 :

- 1) Kao što je već navedeno, standardna parametrizacija sfere (koja se još naziva i geometrijska parametrizacija) data je sa: $\mathbf{r}(u, v) = (\sin u \cdot \cos v, \sin u \cdot \sin v, \cos u)$.

Koordinatni vektori tada su.:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u(u, v) &= (\cos u \cdot \cos v, \cos u \cdot \sin v, -\sin u) \\ \mathbf{r}_v(u, v) &= (-\sin u \cdot \sin v, \sin u \cdot \cos v, 0).\end{aligned}$$

Dalje imamo:

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)(u, v) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos u \cdot \cos v & \cos u \cdot \sin v & -\sin u \\ -\sin u \cdot \sin v & \sin u \cdot \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= \sin^2 u \cdot \cos v \vec{i} - \sin^2 u \cdot \sin v \vec{j} + \sin u \cdot \cos u \vec{k}\end{aligned}$$

Preostaje da proverimo koje tačke su na osnovu dobijenog takve da je

$$(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)(u, v) = \mathbf{0}.$$

Ako takve tačke postoje, nazivamo ih *singularnim tačkama*. U ovom slučaju, dakle imamo

$$\sin^2 u \cdot \cos v = 0, \quad \sin^2 u \cdot \sin v = 0, \quad \sin u \cdot \cos u = 0,$$

dakle, sve tačke $(0, v), (\pi, v)$ za $v \in [-\pi, \pi]$ su singulariteti. Slike takvih tačaka su $(0, 0, 1)$ i $(0, 0, -1)$, odnosno severni i južni pol kada govorimo o Zemlji i aproksimaciji iste kao sfere.

No, zaključak da sfera nije regularna površ bio bi pogrešan. Tačno je zapravo to da ne postoji regularna parametrizacija cele sfere odjednom, odnosno jedna takva koja bi je u celini pokrila.

Dakle, potrebno nam je više parametrizacija, i u ovom slučaju to bi mogla da bude prethodno navedena,

$$r(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \cdot \sin v, \cos u), \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi \quad \text{i}$$

$$r(u, v) = (\cos u \cdot \sin v, \sin u \cdot \sin v, \cos v), \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

Što je parametrizacija sfere rotirane tako da joj polovi leže u xy-ravni ili pak da u prvobitno navedenoj, standardnoj parametrizaciji samo isključimo granice intervala – koje nam i jesu problematične, dakle, da isključimo tačke iz domena čije slike su polovi.

Sa druge strane, sferu možemo da predstavimo i parametrizacijom njenih polusfera u Dekartovim koordinatama, te nakon provere ispunjenosti određenih uslova utvrdimo da je ista regularna površ.

U vezi s tim navodimo još jednu definiciju regularne površi:

Definicija 1.2.6. Regularna površ S je podskup u \mathbb{R}^3 tako da za svaku tačku $p \in S$ postoji otvoren skup $V \subset \mathbb{R}^3$, otvoren skup $U \subset \mathbb{R}^2$ i preslikavanje $\sigma: U \rightarrow S \cap V \subset \mathbb{R}^3$ koja zadovoljava uslove:

1. σ je preslikavanje čije komponentne funkcije – $x(\mathbf{u}, \mathbf{v}), y(\mathbf{u}, \mathbf{v}), z(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ imaju neprekidne parcijalne izvode k – og reda u U , $k \in \mathbb{Z}$;
2. σ je homeomorfizam (imajući u vidu prethodno, dovoljno je sada pokazati da postoji inverzna funkcija σ^{-1} i da je ista neprekidna);
3. (uslov regularnosti) za svako $q \in U$ važi $D_q \sigma$ je injektivno.

Ekvivalentni uslovi za 3. bili bi $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0$, ekvivalentno - navedeni vektori su linearno nezavisni, odnosno bar jedna od determinantni (1.3) je različita od nule u q :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}. \quad (1.3)$$

Primenom ove definicije pokazaćemo da je sfera regularna površ.

Tako npr. posmatramo li preslikavanja $\sigma_1: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma_2: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$ zadata sa $\sigma_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ i $\sigma_2(x, y) = (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2})$, uočićemo da ona zadovoljavaju uslove iz definicije i pokrivaju sferu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, preciznije predstavljaju parametrizacije gornje i donje polusfere respektivno.

Naime, na domenu $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ preslikavanje σ_1 je glatko (uslov 1.), inverzno preslikavanje je restrikcija projekcije na prve dve koordinate i kao takvo je neprekidno (uslov 2.) i konačno, uslov regularnosti proizilazi iz činjenice da su vektori σ_x i σ_y linearne nezavisni. Diferencijal preslikavanja σ_1 je:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial(\sqrt{1-x^2-y^2})}{\partial x} & \frac{\partial(\sqrt{1-x^2-y^2})}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Uočimo da smo na ovaj način pokrili tačke sfere van Ekvatora.

Slično možemo da razmatramo i levu i desnu, kao i prednju i zadnju otvorenu polusferu predstavljene analogno prethodnom sa:

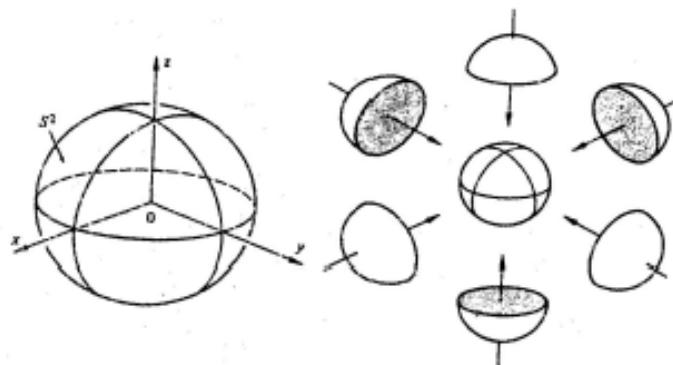
$$\sigma_3(x, z) = (x, \sqrt{1-x^2-z^2}, z)$$

$$\sigma_4(x, z) = (x, -\sqrt{1-x^2-z^2}, z)$$

$$\sigma_5(y, z) = (\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z)$$

$$\sigma_6(y, z) = (-\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z)$$

Sve one zajedno pokrivaju celu sferu i kao regularne parametrizacije delova sfere čine je regularnom površi.



Slika 9. Regularna parametrizacija sfere preko njenih polusfera

Podsetimo se sada i parametrizacije konusa i proverimo da li je to regularna površ:

- 2) Standardna parametrizacija konusa date je sa: $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \cos v, \mathbf{u} \cdot \sin v, \mathbf{u})$. Koordinatni vektori su:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\cos v, \sin v, 1) \\ \mathbf{r}_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (-\mathbf{u} \cdot \sin v, \mathbf{u} \cdot \cos v, 0).\end{aligned}$$

Ovo nam dalje daje

$$\begin{aligned}(r_u \times r_v)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -\mathbf{u} \cdot \sin v & \mathbf{u} \cdot \cos v & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -\mathbf{u} \cdot \cos v \vec{i} - \mathbf{u} \cdot \sin v \vec{j} + \mathbf{u} \vec{k}\end{aligned}$$

Kao što je u prethodnom primeru učinjeno, i sada proveravamo koje tačke su (ako takve postoje) takve da je $(r_u \times r_v)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, odnosno

$$\mathbf{u} \cdot \cos v = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \sin v = 0, \quad \mathbf{u} = 0.$$

Ovoga puta dobijamo da su to tačke oblika $(0, v)$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Slika istih identificuje se sa tačkom $(0,0,0)$ - vrhom konusa. Dakle ova tačka je *singularna tačka konusa*, svojstvena samoj površi, odnosno neotklonjiv singularitet.

Napomena: Zaista, tangentna ravan ne može biti postavljena na vrhu konusa, dok je kod sfere to u polovima moguće učiniti.

Jasno je da bi proces ispitivanja regularnosti neke površi putem uslova iz Definicije 1.2.6. bio komplikovan i sam po sebi vremenski dug. S toga, u nastavku navodimo još dva ekvivalentna uslova, koja prevashodno koristimo ukoliko je u pitanju površ zadata implicitno ili eksplisitno (kao grafik funkcije, o čemu je već bilo reči u prvim napomenama o pojmu površi).

Napomena: Orientisana po delovima regularna kriva je klasa ekvivalencije po delovima regularnih parametrizovanih krivih. Svaki predstavnik te klase se naziva parametrizacija. Orientisana po delovima regularna kriva se naziva *glatka kriva*.

Definicija 1.2.7. Neka je $U \subset \mathbb{R}^2$ otvoren skup i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ glatka funkcija.

Jednačina $z = f(x, y)$ naziva se *eksplisitnom jednačinom površi*, a skup $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$ koji predstavlja grafik iste – $G(f) = S$ nazivamo *eksplisitno zadano površi*.

Parametrizacija iste data je sa $r(u, v) = (u, v, f(u, v))$.

Lema 1.2.8. Grafik funkcije f , odnosno eksplisitno definisana površ iz prethodne definicije je *regularna*.

Dokaz. Posmatraćemo preslikavanje $r(u, v) = (u, v, f(u, v))$ i utvrditi da ono ispunjava uslove iz definicije regularnosti. Naime, ono je glatko, bijektivno i neprekidno jer su komponentne funkcije takve.

Inverzno preslikavanje je projekcija na prve dve koordinate, dakle neprekidno. Jakobijeva matrica ima linearne nezavisne kolone, odnosno vektori

$$r_u = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u} \right) \text{ i } r_v = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \quad (1.4)$$

su linearne nezavisne. Dakle, površ definisana u definiciji 1.2.7. je regularna. ■

Napomena: U vezi sa oznakama za izvode - već je bilo reči pri prvom uvođenju istih. Različiti zapisi u istoj jednakosti kao što je slučaj (1.4) dati su u cilju razlikovanja glavne i komponentne funkcije.

Definicija 1.2.9. Neka je $V \subset \mathbb{R}^3$ i $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ glatka funkcija.

Skup $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$ naziva se *implicitno zadano površi*, a jednačina $F(x, y, z) = 0$ *implicitnom jednačinom površi*.

Lema 1.2.10. Za otvoren skup $V \subset \mathbb{R}^3$ i glatku funkciju $F: V \rightarrow \mathbb{R}$, podskup S definisan u prethodnoj definiciji je regularna površ ako je gradijent ∇F funkcije F različit od nule u svim tačkama podskupa S .

Dokaz. Prepostavka da je $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \neq 0$ daje nam da je bar jedan od parcijalnih izvoda različit od nule u nekoj proizvoljnoj tački q u S .

Iz Teoreme o implicitnom preslikavanju imamo da se $F(x, y, z) = 0$ može rešiti za bar jednu promenljivu (bar lokalno) i neka je to npr. za promenljivu z . Dakle, dobijamo: postoji glatka funkcija $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ takva da važi

$$F(u, v, f(u, v)) = 0, (u, v) \in U$$

i tačke $(u, v, f(u, v))$ čine otvorenu okolinu tačke $q \in S$. Preslikavanje $r: (u, v) \rightarrow (u, v, f(u, v))$ je tada lokalni graf glatke funkcije f , što nam na osnovu prethodno izloženog ukazuje na regularnost date površi. ■

Teorema 1.2.11. Neka je S implicitno zadata površ sa svojom jednačinom $F(x, y, z) = 0$, $M \in S$ i $\nabla F(M) \neq 0$. Tada je vektor gradijenta funkcije F normalan na tangentnu ravan na površ S u tački M .

Dokaz. Uslov $\nabla F(M) \neq 0$ na osnovu prethodno izloženog ukazuje nam na egzistenciju regularne parametrizacije površi S , lokalno oko tačke $M \in S$. Neka je ista data sa:

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Tada je $F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = 0$, što nam nakon diferenciranja daje: $F_x x_u + F_y y_u + F_z z_u = 0$ i analogno za izvod po parametru v .

Dakle, zapišemo li to na ovaj način: $\nabla F \cdot r_u = 0, \nabla F \cdot r_v = 0$ imamo jasno iskazane jednakosti koje nam pokazuju da je vektor gradijenta ortogonalan na koordinatne vektore. Kako je tangentna ravan upravo njima određena, odnosno oni čine bazu tangentnog prostora vektora tangentne ravni, sledi traženo. ■

Jasno je sada da opšta jednačina tangentne ravni može biti iskazana i na sledeći način:

$$F_x \cdot (X - x) + F_y \cdot (Y - y) + F_z \cdot (Z - z) = 0$$

Napomena: Upotreba oznake F_x za izvod (isto važi i za druge dve promenljive – oznake za komponentne funkcije), ponovo je opravdana ciljem razlikovanja parcijalnih izvoda složenih funkcija.

U dokazu teoreme 1.2.11. koristili smo pojam tangentnog prostora, imajući u vidu prethodno stečeno znanje uopšteno o vektorskom prostoru i operacijama definisanim u istom. No, definišimo precizno navedene pojmove:

Dakle, za regularnu površ r i tačku $P = r(u, v)$ skup

$$T_P(r) = \{ \lambda \cdot r_u(u, v) + \mu \cdot r_v(u, v), \quad \lambda, \mu \in \mathcal{R} \}$$

nazivamo tangentnim prostorom površi r u tački P , a elemente istog tangentnim vektorima. Isti je zatvoren za sabiranje i množenje skalarom i predstavlja potprostor vektorskog prostora V^3 . Bazu ovog prostora dakle čine koordinatni vektori r_u i r_v , ali svakako svaki od njih može biti predstavljen i kao linearna kombinacija jediničnih ortonormiranih vektora $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. (1.5)

Definicija 1.2.12. Za regularnu površ r i tačku $P = r(u, v)$ preslikavanje I_P dato sa

$$I_P : T_P(r) \times T_P(r) \rightarrow \mathcal{R}, \quad I_P(t_1, t_2) = t_1 \cdot t_2$$

naziva se *prva fundamentalna forma površi* r , pri čemu je sa $t_1 \cdot t_2$ označen skalarni proizvod tangentnih vektora iz $T_P(r)$.

Imajući u vidu (1.5) zaključujemo da prva fundamentalna forma može biti predstavljena sa:

- 1) $I_P(t_1, t_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, za $t_1 = (x_1, y_1, z_1)$ $t_2 = (x_2, y_2, z_2)$ predstavljene u standardnoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ vektorskog prostora \mathbb{R}^3 .
- 2) $I_P(t_1, t_2) = \lambda_1\lambda_2 \cdot r_u \cdot r_u + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) \cdot r_u \cdot r_v + \mu_1\mu_2 \cdot r_v \cdot r_v$, za $t_1 = (\lambda_1, \mu_1)$, $t_2 = (\lambda_2, \mu_2)$ predstavljene u bazi vektorskog prostora $T_P(r)$.

Napomena: Uvedimo oznake:

$$E = r_u r_u, \quad G = r_v r_v, \quad F = r_u r_v \text{ ili preciznije preslikavanja}$$

$$\begin{aligned} E(u, v) &= r_u(u, v) \cdot r_u(u, v) \\ G(u, v) &= r_u(u, v) \cdot r_v(u, v) \\ F(u, v) &= r_v(u, v) \cdot r_v(u, v) \end{aligned}$$

pri čemu $(u, v) \in U$ predstavlja tačku u kojoj računamo vrednosti tangentnih vektora ($u \in P = r(u, v)$), dakle njenoj slici posmatrali smo tangentnu ravan postavljenu na površ r).

Sve ovo može biti iskazano i kroz matrični zapis na sledeći način:

$$I_P(t_1, t_2) = [\lambda_1 \mu_1] \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix}.$$

Podsetimo se dalje - formula za izračunavanje dužine luka krive $c : (a, b) \rightarrow \mathcal{R}$ data je sa: $s(a, b) = \int_a^b |\dot{c}(t)| dt$.

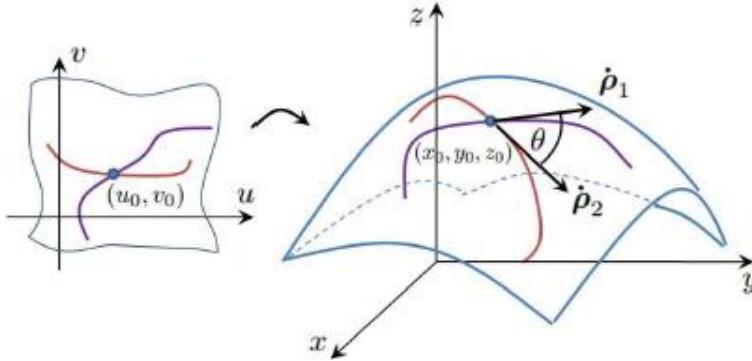
Posmatramo li regularnu parametrizovau površ $r : U \rightarrow \mathcal{R}^3$ i krivu $c : I \rightarrow \mathcal{R}^3$ na njoj, koja kao takva može biti predstavljena sa $c(t) = r(u(t), v(t))$, sledi:

Definicija 1.2.13. Dužina luka krive na intervalu $(a, b) \in I$ je:

$$\begin{aligned} s(a, b) &= \int_a^b |\dot{c}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{c}(t) \cdot \dot{c}(t)} dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{(r_u \cdot \dot{u} + r_v \cdot \dot{v})((r_u \cdot \dot{u} + r_v \cdot \dot{v})} dt = \int_a^b \sqrt{E \cdot \dot{u}^2 + 2 \cdot F \cdot \dot{u} \cdot \dot{v} + G \cdot \dot{v}^2} dt \\ \text{Dakle, } ds &= \sqrt{E \cdot \dot{u}^2 + 2 \cdot F \cdot \dot{u} \cdot \dot{v} + G \cdot \dot{v}^2} dt, \text{ odnosno } ds^2 = E \cdot d\dot{u}^2 + 2 \cdot F \cdot d\dot{u} \cdot d\dot{v} + G \cdot d\dot{v}^2, \text{ što nazivamo elementom dužine luka (linijskim elementom).} \end{aligned}$$

Napomena: Poslednja jednakost sledi na osnovu izraza: $\dot{u} = \frac{du}{dt}$, $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$.

Definicija 1.2.14. Ugao između dve krive ρ_1 i ρ_2 na površi $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($\rho_1 = r(u_1(t), v_1(t))$, $\rho_2 = r(u_2(t), v_2(t))$) u tački preseka istih ($r(u_0, v_0)$) određujemo kao ugao između njihovih tangentnih vektora u zadatoj tački.



Slika 10. Ugao između dve krive na regularnoj parametrizovanoj površi

$$\text{Dakle, } \cos\theta = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{|\rho_1| \cdot |\rho_2|}$$

$$= \frac{\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \dot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{F} \cdot (\dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}_2 + \dot{\mathbf{u}}_2 \cdot \dot{\mathbf{v}}_1) + \mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{v}}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}_2}{\sqrt{\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{u}}_1^2 + 2 \cdot \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{v}}_1^2} \cdot \sqrt{\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{u}}_2^2 + 2 \cdot \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{u}}_2 \cdot \dot{\mathbf{v}}_2 + \mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{v}}_2^2}}$$

Jasno je da je uslov da su dve proizvoljne krive na površi međusobno normalne ekvivalentan uslovu $\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \dot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{F} \cdot (\dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}_2 + \dot{\mathbf{u}}_2 \cdot \dot{\mathbf{v}}_1) + \mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{v}}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}_2 = 0$.

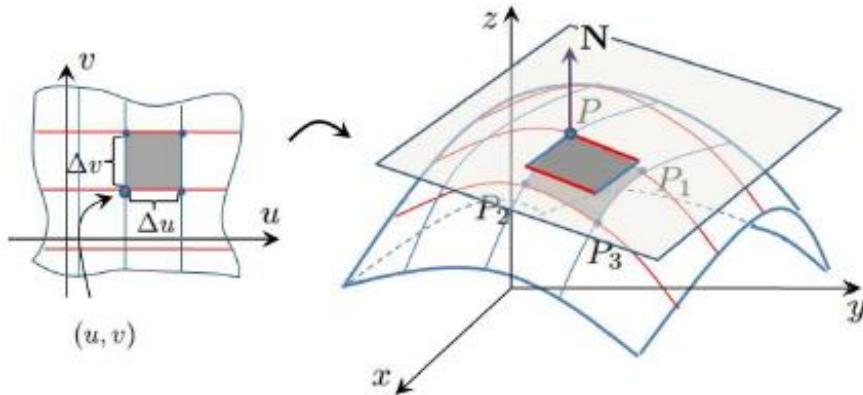
Specijalno, prepostavka da su u fiksiranoj tački (u_0, v_0) posmatrane krive zapravo ρ_1 u-kriva i ρ_2 v-kriva, pojednostavljuje izraz za ugao između parametarskih krivih (Definicija 1.2.2), te je isti sada dat sa:

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad \text{i} \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}} \tag{1.6}$$

Definicija 1.2.15. Površina dela regularne parametrizovane površi $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, uz pretpostavku da je U ograničeno glatkom krivom data je izrazom:

$$P = \iint_U \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Slično kao što smo uveli za dužinu luka, izraz $\sqrt{EG - F^2}dudv$ nazivamo elementom površine.



Slika 11. Površina dela površi i element površi

Napomena: Na osnovu izloženog, u nastavku navodimo prve fundamentalne forme za sferu, konus, cilindar i elipsoid. Ove veličine biće nam neophodne u nastavku kada obrađujemo pojам deformacija kartografskih projekcija.

Dakle, imajući u vidu (1.1) odredimo koeficijente E, F i G prve fundamentalne forme:

- **Sfera**

$$\mathbf{r}(u, v) = (\sin u \cdot \cos v, \sin u \cdot \sin v, \cos u)$$

$$E = r_u \cdot r_u = \cos^2 u \cdot \cos^2 v + \cos^2 u \cdot \sin^2 v + \sin^2 u = 1$$

$$F = r_u \cdot r_v = -\cos u \cdot \cos v \cdot \sin u \cdot \sin v + \cos u \cdot \sin v \cdot \sin u \cdot \cos v + 0 = 0$$

$$G = r_v \cdot r_v = \sin^2 u \cdot \sin^2 v + \sin^2 u \cdot \cos^2 v + 0 = \sin^2 u$$

- **Konus**

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cdot \cos v, u \cdot \sin v, u)$$

$$E = r_u \cdot r_u = \cos^2 v + \sin^2 v + 1 = 2$$

$$F = r_u \cdot r_v = -u \cdot \cos v \cdot \sin v + u \cdot \sin v \cdot \cos v + 0 = 0$$

$$G = r_v \cdot r_v = u^2(\sin^2 v + \cos^2 v) = u^2$$

- **Cilindar**

$$\mathbf{r}(u, v) = (\cos v, \sin v, u)$$

$$E = r_u \cdot r_u = 1$$

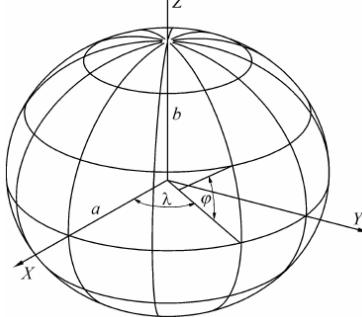
$$F = r_u \cdot r_v = 0$$

$$G = r_v \cdot r_v = 1$$

- **Rotacioni elipsoid**

Napomena: Jednačina rotacionog elipsoida sa centrom u koordinatnom početku i poluosama a i b glasi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$



Slika 12. Elementi Zemljinog elipsoida

Veza sa Dekartovim koordinatama odnosno parametrizacija elipsoida data je sa: (uz uvedene oznake $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$ i $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ gde je e ekscentricitet – konstanta karakteristična za elipse i elipsoide i naglasak na to da su ovde u primeni geografske koordinate čiji je odnos sa koordinatama sfernog sistema: $\lambda = \varphi$, $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, te otuda i granice za iste) :

$$\begin{aligned} r(\varphi, \lambda) &= (x(\varphi, \lambda), y(\varphi, \lambda), z(\varphi, \lambda)) = \left(\frac{a}{W} \cos \varphi \cdot \cos \lambda, \frac{a}{W} \cos \varphi \cdot \sin \lambda, \frac{a(1-e^2)}{W} \sin \varphi \right) \\ &- \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad -\pi < \lambda < \pi. \end{aligned}$$

U nastavku određujemo parcijalne izvode:

$$\begin{aligned} x_\varphi &= \left(\frac{a}{W} \right) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda + \frac{a}{W} \cdot (-\sin \varphi) \cdot \cos \lambda = a \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^3}} \right) \cdot (-e^2 \cdot 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi) \cdot \\ &\cos \varphi \cdot \cos \lambda - \frac{a}{W} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \lambda = \frac{a}{W^3} \cdot e^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda - \frac{a}{W} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \lambda = \sin \varphi \cdot \\ &\cos \lambda \cdot \left(\frac{a}{W^3} \cdot e^2 \cdot \cos^2 \varphi - \frac{a}{W} \right) = \sin \varphi \cdot \cos \lambda \cdot \left(\frac{a(e^2 \cdot \cos^2 \varphi - (1-e^2 \sin^2 \varphi))}{W^3} \right) = \sin \varphi \cdot \cos \lambda \cdot \frac{a(e^2 - 1)}{W^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Slično dobijamo i } y_\varphi &= \sin \varphi \cdot \sin \lambda \cdot \frac{a(e^2 - 1)}{W} \text{ i } z_\varphi = \left(\frac{a}{W} \right) \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi + \frac{a(1-e^2)}{W} \cdot \cos \varphi = \\ &\frac{a}{W^3} \cdot e^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi + \frac{a(1-e^2)}{W} \cdot \cos \varphi = a \cdot (1 - e^2) \cdot \\ &\cos \varphi \left(\frac{e^2 \cdot \sin \varphi + (1 - e^2 \sin^2 \varphi)}{W^3} \right) = \frac{a(1-e^2)}{W^3} \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

Dalje, $x_\lambda = \frac{a}{w} \cdot \cos\varphi \cdot (-\sin\lambda)$, slično, $y_\lambda = \frac{a}{w} \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda$ i $z_\lambda = 0$.

Uočimo da se pojavljuju dva karakteristična izraza za koja, radi jednostavnosti daljih zapisa, uvodimo oznake i to : $\frac{a(1-e^2)}{w^3} = R_1$, $\frac{a}{w} = R_2$.

Dakle, koeficijenti prve fundamentalne forme su:

$$\begin{aligned} r_\varphi &= (-R_1 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\lambda, -R_1 \cdot \sin\varphi \cdot \sin\lambda, R_1 \cdot \cos\varphi) \\ r_\lambda &= (-R_2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda, R_2 \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda, 0) \\ E &= r_\varphi \cdot r_\varphi = \left(\frac{a(1-e^2)}{w^3}\right)^2 = R_1^2, \quad F = r_\varphi \cdot r_\lambda = 0 \\ G &= r_\lambda \cdot r_\lambda = \left(\frac{a}{w} \cos\varphi\right)^2 = R_2^2 \cos^2\varphi \end{aligned}$$

Detaljnije o izvođenju korišćenih formula, upotrebljenih oznaka i korisnih transformacija može se pronaći u referencama [3] i [22].

U geodetskoj i kartografskoj literaturi često se pominju normalni preseci, poluprečnici zakrivljenosti po meridijanima i paralelama. Kako se isti kroz jednakosti vežu za već uvedene oznake, dajemo kratak pregled o teorijskim osnovama istih i izraze kojima se definišu. Više o tome istražiti kroz reference [3], [4] i [9].

Definicija 1.2.16. Ravan određena normalom regularne tačke na površi i tangentnim vektorom u datoj tački, seče elipsoid i taj presek nazivamo normalnim presekom. Među beskonačno mnogo njih, mogu da se izdvoje dva koja imaju minimalnu i maksimalnu zakrivljenost¹.

Pronalazak ekstremnih vrednosti svodi se na rešavanje sistema diferencijalnih jednačina i daje – meridijani i paralele su krive ekstremnih vrednosti i važi $K_1 = \frac{1}{R_1}$ i $K_2 = \frac{1}{R_2} \cdot \cos\varphi$, pri čemu su K_1, K_2 respektivno zakrivljenosti u smeru meridijana i paralela.

Napomena: Poluprečnik zakrivljenosti meridijana je R_1 , a paralele $R_2 \cdot \cos\varphi$, što sledi na osnovu prve diferencijalne forme elipsoida. U kartografiji najčešće su u primeni oznake:

$$M = R_1, \quad N = R_2 \cdot \cos\varphi. \quad (1.7)$$

Više o ovome istražiti u [9].

¹ Zakrivljenost normalnog preseka površi definiše se kao zakrivljenost krive r koja leži u preseku tangentne i normalne ravni, po definiciji zakrivljenosti krive $k = \frac{\dot{r} \times \ddot{r}}{\dot{r}^3}$ ili pak preko koeficijenata prve i druge fundamentalne forme, kada je površ zadata svojom regularnom parametrizacijom. Više o tome u [25].

² Geometrijska interpretacija zakrivljenosti je da je ista zapravo mera promene ugla tangentnog vektora, a $R = \frac{1}{k}$ predstavlja poluprečnik zakrivljenosti krive.

³ Specijalno, r je poluprečnik paralele.

1.3. Osnovni pojmovi teorije kartografskih projekcija

Relacije preko kojih se uspostavlja veza između koordinata tačaka na Zemlji kao sferi ili elipsoidu i slika istih u projekciji, najčešće su date u funkcijskoj zavisnosti od dva parametra – geografske širine i geografske dužine.

Meridijan je kružnica na Zemljinoj sferi dobijena presekom iste sa ravni čiji se pravac poklapa sa osom rotacije sfere, tj. sa pravcem koji prolazi kroz severni i južni pol.

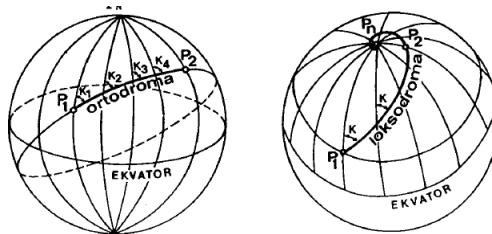
Geografska dužina predstavlja ugao između ravni početnog meridijana i ravni meridijana date tačke ($0^\circ < \lambda < 180^\circ$). Početni meridijan - Grinič⁴ je dakle referentni i u odnosu na njega – istočno ili zapadno vrši se merenje, te tako razlikujemo istočnu i zapadnu geografsku dužinu⁵.

Paralela je kružnica na Zemljinoj sferi koja nastaje presekom iste sa ravni koja je normalna na osu rotacije sfere. Glavnu (referentnu paralelu – Ekvator) u odnosu na koju se vrše merenja, karakteriše jednaka udaljenost od polova i najveća vrednost dužine (obima).

Geografska širina predstavlja ugao između Ekvatora i normale na Zemljiju sferu povučene kroz datu tačku. Slično kao za prethodno, merenja mogu biti izvršena, u ovom slučaju, severno ili južno, te tako razlikujemo severnu i južnu geografsku širinu.⁶ Dakle, sve tačke na površi Zemlje određene su presekom koordinatnih linija⁷ meridijana i paralela. Svaka mreža koordinatnih linija preslikana na ravan naziva se kartografska mreža, a mreža Zemlje bila bi osnovna kartografska mreža.

Azimutom nazivamo ugao određen meridijanom neke tačke i pravca kretanja ka drugoj tački na sferi. Kriva koja sve meridijane seče pod istim azimutom naziva se **loksodroma**. Najkraću krivu koja spaja neke dve tačke na sferi nazivamo **ortodromom**. (Slika 13). Ovi pojmovi postaju izrazito značajni kada je reč o plovidbi i navigaciji, te onda kada se karta izrađuje prevashodno u te svrhe, loksodrome se u ravni projektuju kao pravci, odnosno prave linije.

Više o tome u drugom poglavljtu ovog rada, a čitaocu zainteresovane za izračunavanje dužine putanja i upoređivanja istih kroz primenu prethodno navedenih pojmoveva upućujemo na reference [18] i [26].



← Slika 13. Ortodroma i loksodroma

⁴ U cilju jedinstvenog prikaza uvodi se dogovor o meridijanu u odnosu na koji se vrše merenja i čija je geografska dužina 0° . Naziv je dobio po istoimenom predgrađu Londona kroz koje prolazi.

⁵ Vrednost ugla merenog u smeru istoka uzima se kao pozitivna.

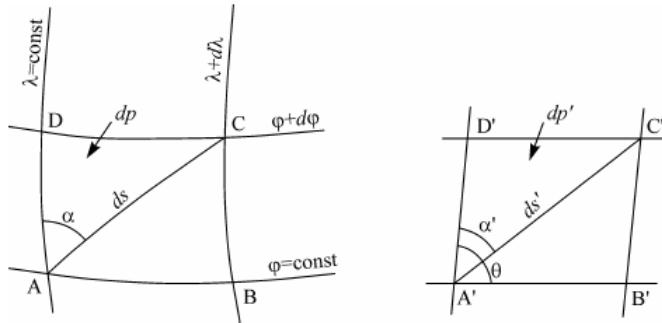
⁶ Merenje ugla u smeru severa smatramo pozitivnim smerom.

⁷ Koordinatne linije su skupovi tačaka koje dobijamo fiksiranjem vrednosti jedne koordinate, za sve moguće vrednosti druge koordinate.

Sledeća bitna karakteristika svake karte jeste njeni *merili*. Ono predstavlja odnos između dužina na karti i odgovarajućih dužina na Zemljinom elipsoidu ili sferi. No, u vezi s tim bitno je napomenuti da merilo ne može biti očuvano na celom prostoru koji se preslikava, tako da zapravo kada govorimo o merilu, razlikujemo glavno⁸ i lokalno⁹ merilo. Radi preciznijeg definisanja, posmatramo nadalje diferencijalni deo Zemljinog elipsoida ili sfere. Zaključke do kojih pritom dođemo, koristićemo u nastavku kada definišemo različite vrste kartografskih projekcija i deformacije koje one sa sobom nose.

Definicija 1.3.1. Odnos diferencijala dužine luka u projekciji, u oznaci ds^* i diferencijala odgovarajuće dužine na Zemljinom elipsoidu ili sferi ds , nazivamo *linearnim merilom* i označavamo sa c . Dakle, važi:

$$c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{ds^*}{ds}$$



Slika 14. Elementarni (diferencijalni) deo na elipsoidu i u projekciji

Slično, uvodimo i pojам koji se odnosi na merilo površina i nazivamo ga *površinskim merilom*. Analogno prethodnom sledi:

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dp^*}{dp}$$

U nastavku, služeći se uvedenim oznakama za koeficijente prve fundamentalne forme i njihovu vezu sa poluprečnicima zakrivljenosti dajemo izraze za deformacije projekcija.

⁸ Glavno ili opšte merilo dobijamo na osnovu podatka koliko je Zemljin elipsoid ili sfera umanjen radi projekcije istog.

⁹ Lokalno merilo u zavisnosti od projekcije manje ili više odstupa od glavnog merila i razlikuje se od tačke do tačke.

Teorema 1.3.2. (Linearne deformacije) Linearno merilo zavisi od položaja tačke i azimuta α linijskog elementa. Veza istih data je relacijom:

$$c^2 = \frac{E}{M^2} \cos^2 \alpha + \frac{F}{Mr} \sin 2\alpha + \frac{G}{r^2} \sin^2 \alpha$$

Dokaz.

Najpre na osnovu definicija 1.2.13, 1.3.1., kao i uvedenih oznaka (1.7), sledi jednakost:

$$c^2 = \frac{ds^*}{ds^2} = \frac{Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2}{M^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2}, \text{ što dalje imajući u vidu sliku 14. i sledeće izraze:}$$

$$\begin{aligned} \alpha - \text{azimut, } t\varphi \alpha &= \frac{\sqrt{G}d\lambda}{\sqrt{E}d\varphi} = \frac{rd\lambda}{Md\varphi} \Rightarrow \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}t\varphi \alpha} = \frac{r}{Mt\varphi \alpha} \text{ i } \frac{d\varphi^2}{d\lambda^2} = \frac{G}{Et\varphi^2 \alpha} = \frac{r^2}{M^2 t\varphi^2 \alpha} \\ c^2 &= \frac{E \frac{d\varphi^2}{d\lambda^2} + 2F \frac{d\varphi}{d\lambda} + G}{M^2 \frac{d\varphi^2}{d\lambda^2} + r^2} = \frac{E \frac{d\varphi^2}{d\lambda^2}}{\frac{d\varphi^2}{d\lambda^2} \cdot \left(M^2 + \frac{r^2 d\lambda^2}{d\varphi^2} \right)} + \frac{2F \frac{d\varphi}{d\lambda}}{\frac{d\varphi^2}{d\lambda^2} \cdot \left(M^2 + \frac{r^2 d\lambda^2}{d\varphi^2} \right)} + \frac{G}{\frac{d\varphi^2}{d\lambda^2} \cdot \left(M^2 + \frac{r^2 d\lambda^2}{d\varphi^2} \right)} \\ &= \frac{E}{M^2(1 + t\varphi^2 \alpha)} + \frac{2F}{r \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot M^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} \right)} + \frac{G}{r^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1 \right)} \end{aligned}$$

implicira traženo. ■

Posledica: Specijalno, merilo u smeru meridijana dobijamo za $\alpha = 0^\circ$, dakle tada je $c^2 = \frac{E}{M^2} = m^2$ i merilo u pravcu paralele za $\alpha = 90^\circ$, $c^2 = \frac{G}{r^2} = n^2$. Uvedene oznake m i n biće često korišćene u nastavku.

Napomena: U kartografiji su u upotrebi i pojmovi glavnih pravaca, označenih sa a i b , a kako se isti vezuju za pojam merila, navodimo i definiciju istih. Naime, u svakoj tački elipsoida postoje međusobno normalni pravci (što i u projekciji ostaje očuvano) duž kojih merilo uzima ekstremne vrednosti i navedene pravce zovemo glavnim prvcima.

Teorema 1.3.3. (Deformacija površina) Merilo površina p određeno je sledećom jednakosti:

$$p = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{Mr}$$

Dokaz.

Ponovo, imajući u vidu definiciju 1.3.1, prethodno navedeno – element površine regularne površi r računamo kao $\sqrt{\text{Det}(I)}$, $I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ i oznake za koeficijente prve fundamentalne forme Zemljinog elipsoida imamo:

$$p = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{M^2 r^2}} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{Mr}. ■$$

Posledica: Ugao između meridijana i paralela (kao ugao između parametarskih krvi), na osnovu (1.6) dat je sa:

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Uz oznake iz prethodne posledice, omogućeno nam je da merilo površina izrazimo sa:

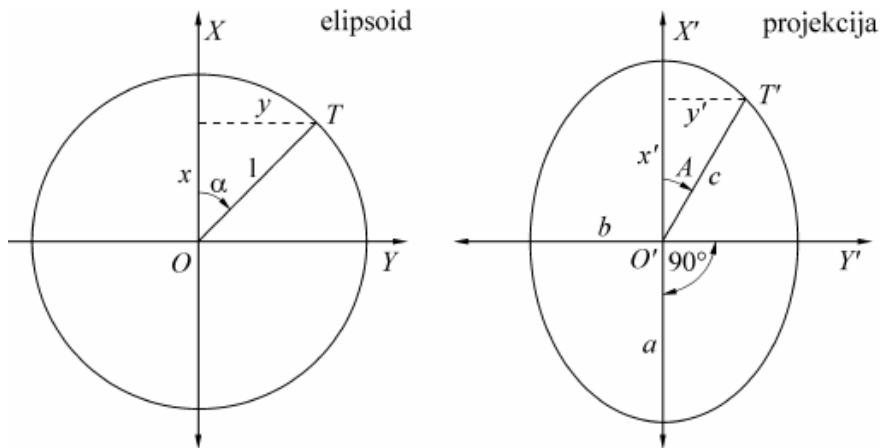
$$p = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{Mr} = \frac{\sin\theta \cdot \sqrt{EG}}{\frac{\sqrt{E}}{m} \cdot \frac{\sqrt{G}}{n}} = m \cdot n \cdot \sin\theta.$$

Takođe, $m \cdot n \cdot \sin\theta = a \cdot b \Rightarrow p = a \cdot b$,

što sledi iz Apolonijeve teoreme, više o tome možemo pronaći u [16].

Za teoremu koja sledi, potrebni su nam sledeći podaci:

Naime, proizvoljna kružnica na elipsoidu preslikava se na elipsu i istu nazivamo elipsom deformacije (Slika 15.).



Slika 15. Elipsa deformacije

Jednačina elipse tada je $(\frac{x'}{a})^2 + (\frac{y'}{b})^2 = 1$, odnosno sledi veza: $a = \frac{x'}{x}$, $b = \frac{y'}{y}$, uz pretpostavku da se koordinatne ose poklapaju sa glavnim pravcima. (1.8)

Teorema 1.3.4. (Deformacija uglova) Maksimalna deformacija ugla, u oznaci ω data je relacijom:

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Dokaz.

Posmatrajmo ugao $\beta = \pi - 2\alpha$ i njegovu projekciju $\beta' = \pi - 2\alpha'$.

Neka je ω maksimalna deformacija istog, dakle maksimalna vrednost razlike:

$$\beta' - \beta = (\pi - 2\alpha) - (\pi - 2\alpha') = 2(\alpha' - \alpha)$$

U skladu sa oznakama na slici 16. imamo:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{y'}{x'}$$

Koristeći (1.8) sledi: $\operatorname{tg}\alpha' = \frac{by}{ax} = \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Dalje se služimo pogodnim transformacijama:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha' &= \operatorname{tg}\alpha - \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \left(1 - \frac{b}{a}\right) \\ \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha' &= \operatorname{tg}\alpha + \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right) \\ \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha'} &= \frac{\frac{a-b}{a}}{\frac{a+b}{a}} = \frac{a-b}{a+b} \end{aligned}$$

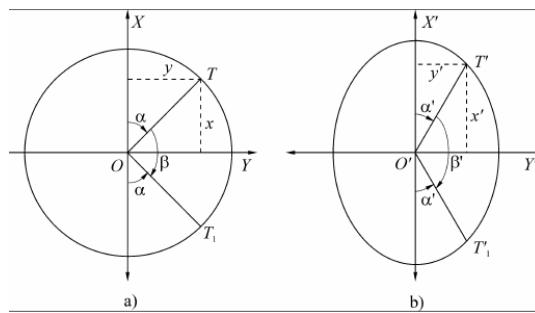
$$\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha'}{\cos\alpha'}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha'}{\cos\alpha'}} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha' - \sin\alpha' \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha' + \sin\alpha' \cdot \cos\alpha},$$

te koristeći: $\sin(\alpha \pm b) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$ imamo: $\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} = \frac{a-b}{a+b}$.

Označimo li sa α_e, α'_e uglove za koje je $\alpha - \alpha'$ maksimalno (a to je kada je njihov zbir $\frac{\pi}{2}$) i tada:

$$\sin(\alpha_e - \alpha'_e) = \frac{a-b}{a+b} \cdot \sin(\alpha_e + \alpha'_e) = \frac{a-b}{a+b} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a-b}{a+b}.$$

Konačno, sledi $\alpha_e - \alpha'_e = \frac{\omega}{2}$, čime je dokazana željena jednakost. ■



Slika 16. Deformacija ugla

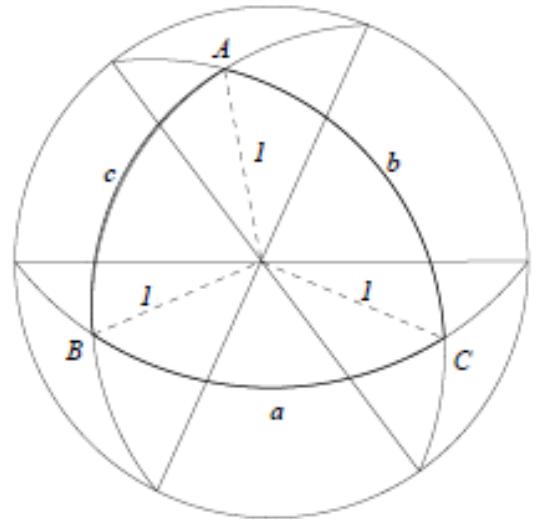
1.4. Obrasci sferne trigonometrije i sferni trougao

Posmatrajmo sferni trougao ABC na slici 17.

Kao što je prikazano na istoj, stranice sfernog trougla su lukovi velikih kružnica. Uglove ovog trougla označavamo velikim latiničnim slovima u skladu sa odgovarajućim temenom.

Specifičnosti istog u odnosu na trougao u ravni bile bi sledeće:

- Zbir uglova u sfernem trouglu nema konstantnu vrednost, ali se zna da je vrednost u rasponu od 180° do 540° .
- Stranice se izražavaju u uglovnim jedinicima, te se može izračunati i njihov zbir, koji je takođe promenljiv ali uvek manji od 360° .
- Nejednakost trougla ipak važi kao i u ravni.



Slika 17. Sferni trougao

Za rešavanja sfernih trouglova, dovoljno je znati i koristiti sledeća tri obrasca:

- sinusni;
- kosinusni;
- sinusno-kosinusni.

Sinusni obrazac dat je sa:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

Kosinusni obrazac dat je sa:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

Sinusno-kosinusni obrazac dat je sa:

$$\sin a \cdot \cos B = \sin c \cdot \cos b - \cos c \cdot \sin b \cdot \cos A$$

Zainteresovane čitaoce upućujemo na reference [3] i [14] u kojima mogu da pronađu više detalja o sfernoj trigonometriji, kao i zanimljivim, u ovom radu nepomenutim, koordinatnim sistemima i transformacijama koordinata među istim. Primena navedenog ponajviše se može videti u geodeziji i astronomiji.

2. Kartografske projekcije

2.1. Klasifikacija kartografskih projekcija

Kartografskim projekcijama nazivamo matematički utemjeljene načine preslikavanja Zemlje ili njenih delova. S obzirom na specifičnosti oblika i izgleda Zemljine površine, pred kartografe je postavljen ne tako lak zadatak. Uz pomenuti osnovni zadatak – otkrivanje eksplisitnih oblika preslikavanja elipsoida na ravan i obrnuto, pronalaženje izraza za inverzno preslikavanje, postupak iziskuje i analizu i interpretaciju geografskih karata, kao i određivanje relevantnih kriterijuma izbora i kvaliteta projekcija. Kao što je već napomenuto, opravdanja za izbore i odluke pronalazimo u različitim matematičkim disciplinama.

U nastavku dajemo podelu projekcija, na osnovu različitih kriterijuma klasifikacije istih. Napominjemo da će jedan od načina podele biti vrsta deformacije što ukazuje na to da zapravo svaka karta ima određenu deformaciju. Za sada se vodimo ovom tezom, dok će ista biti detaljnije obrazložena u trećem poglavljju ovog rada.

Dakle, na osnovu osobina preslikavanja, odnosno vrste deformacije razlikujemo:

- Konformne projekcije (karakteriše ih odsustvo deformacije uglova, odnosno uglovi u prirodi odgovaraju uglovima na karti);
- Ekvivalentne (kod kojih je sačuvana jednakost površina);
- Ekvidistantne (za koje važi da je sačuvana jednakost dužina, u jednom pravcu);
- Uslovne (kod kojih su proizvoljno odabrane specifičnosti prikaza).

Napomena: Uglovi, dužine i površine su osnovni elementi kartografskog domena, o čemu je već bilo reči u uvodnom delu. Svaka projekcija zapravo mora da ima odstupanja u dužinama, posmatrano na celoj oblasti koja se projektuje, s toga kao prvi kriterijum treba posmatrati deformacije dužine, odnosno odabrati preslikavanje koje će istu svesti na minimum.

Sledeća klasifikacija bila bi prema obliku normalne kartografske mreže¹⁰:

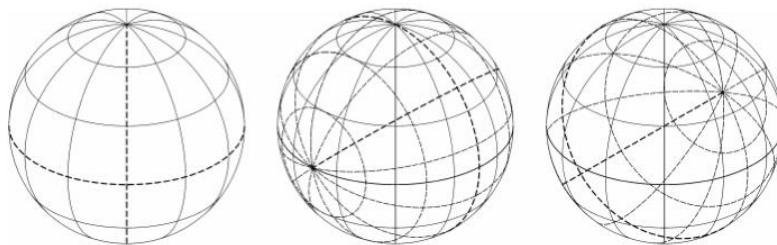
- Cilindrične;
- Konusne;
- Azimutalne;
- Pseudokonusne;
- Pseudocilindrične;
- Polikonusne;
- Kružne.

¹⁰ Normalna kartografska mreža je mreža koordinatnih linija po obliku jednostavnija od bilo koje druge mreže.

Kroz rad će biti predstavljene i preciznije opisane prve tri navedene projekcije, prograđene grafičkim prikazima istih. U ovom delu korišćene su reference [4], [9], [23], [24] i takođe slike iz navedenih.

Poslednja klasifikacija vrši se na osnovu položaja pola normalne kartografske mreže i daje nam sledeće projekcije (*Slika 18.*):

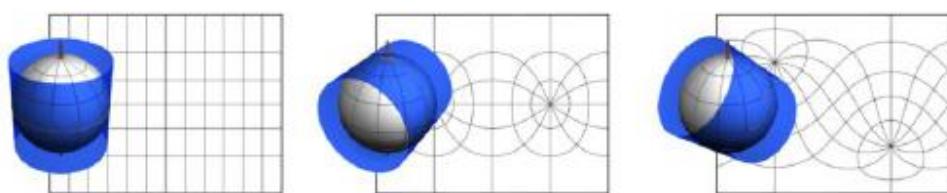
- Uspravne (pol normalne kartografske mreže poklapa se sa geografskim polom);
- Poprečne (pol normalne kartografske mreže nalazi se na ekvatoru);
- Kose (pol normalne kartografske mreže nalazi se u proizvoljnoj tački na poziciji između pola i ekvatora).



Slika 18. Normalna mreža uspravnih, poprečnih i kosih projekcija

Dakle, kod uspravnih projekcija mreža meridijana i paralela poklapa se s normalnom mrežom. Kod poprečnih projekcija pol normalne mreže nalazi se na ekvatoru mreže meridijana i paralela, a ekvator normalne mreže prolazi polom mreže meridijana i paralela. Kod kosih projekcija normalna mreža stoji u nekom proizvoljnom položaju u odnosu na mrežu meridijana i paralela, te proizilazi da su uspravne i poprečne projekcije posebni slučajevi kosih projekcija.

Neformalniji opis neke projekcije može biti najprostije dat na sledeći način: najpre sferu ili elipsoid preslikamo na površ koja može da se "razmota" (kao npr. cilindar ili konus), a potom se ista preseče i razvije u ravan. U zavisnosti od početne postavke površi na koju preslikavamo sferu imamo prethodno navedenu klasifikaciju. (*Slika 19.*)



Slika 19. Uspravne, poprečne i kose projekcije

Zaključujemo, za uspravnu (normalnu) projekciju važi - osa simetrije pomoćne površi podudara se sa osom rotacije sfere ili elipsoida, za poprečnu (transverzalnu) projekciju ispunjeno je - osa simetrije pomoćne površi normalna je na osu rotacije sfere ili elipsoida i poslednje, kosu projekciju odlikuje – ugao između navedenih osa je proizvoljan oštar ugao.

Napomena: (Veza između uspravnih, poprečnih i kosih projekcija)

Naime, kako su uspravne projekcije jednostavnije za rad, najčešće se upravo one i koriste. Ipak, kada je nepodno koristiti kosu ili poprečnu projekciju, zapravo se najpre izvrši preslikavanje s karakteristikama koje odgovaraju uspravnoj projekciji, a potom transformacija koordinata među sistemima, najpre izračunavajući koordinate polova.

U nastavku navodimo i specifičnosti projekcija klasifikovanih po druga dva kriterijuma:

Konformne projekcije: Uslov za postojanje konformnosti ekvivalentan je sa uslovima da su merila duž meridijana i paralela međusobno jednakia, kao i to da se meridijani i paralele sekut pod pravim uglom. Odsustvo deformacija uglova čini da je merilo dužina u jednoj tački jednak u svim pravcima, odnosno ne zavisi od azimuta. Dakle, zadržava se sličnost korespondentnih infinitesimalnih likova na elipsoidu i u ravni. Na osnovu posledice teoreme 1.3.2., teoreme 1.3.4. i uslova $\omega = 0$ konačno sledi:

$$c = m = n = a = b$$

Ekvivalentne projekcije: Budući da deformaciju površina definišemo kao odstupanje površinskog merila p od jedinice, za ove projekcije ono je jednako jedinici. Jednačina koja određuje ekvivalentno preslikavanje ukazuje nam na to da ne može da se desi slučaj $a = b$, stoga nijedna projekcija nije ujedno i ekvivalentna i konformna.

$$p = ab = mnsin\theta = 1$$

Ekvidistantne projekcije: Po vrstama i veličini deformacija ekvidistantne projekcije se nalaze između konformnih i ekvivalentnih projekcija. Naime u ekvidistantnim projekcijama deformacije površina manje su nego u konformnim projekcijama, a deformacije uglova manje su nego u ekvivalentnim projekcijama. Važi:

$$a = 1 \text{ ili } b = 1$$

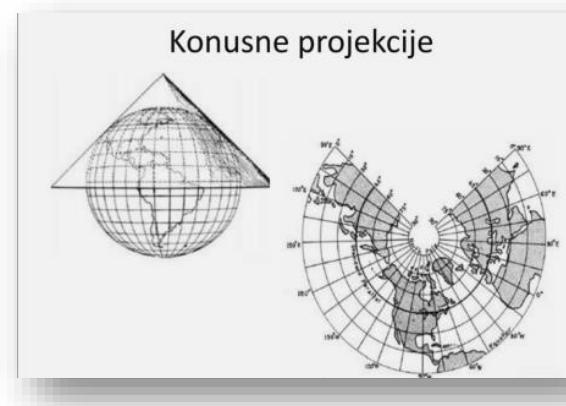
Tabelarni uporedni pregled tipova deformacija prema tipu projekcije i stepenu generalizacije može se pronaći u [24], a u [20] album različitih prikaza projekcija. U ovom i narednom delu u kome izvodimo jednačine klasifikovanih projekcija, korišćene su reference [1], [5], [9] i [22].

2.2. Konusne projekcije

Meridijani uspravnih projekcija preslikavaju se na pravce koji se seku u jednoj tački, pod uglovima proporcionalnim odgovarajućim razlikama dužina.

Sa druge strane, paralele su predstavljene kao lukovi koncentričnih kružnica sa centrom u preseku meridijana.

Jednačine ove projekcije u polarnim koordinatama date su sa:

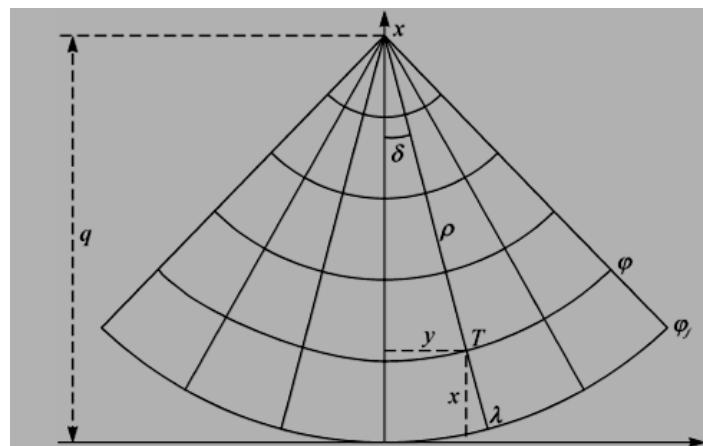


Slika 20. Konusna projekcija

$$\rho = f_1(\varphi), \quad \delta = k(\lambda - \lambda_0) \quad (2.1)$$

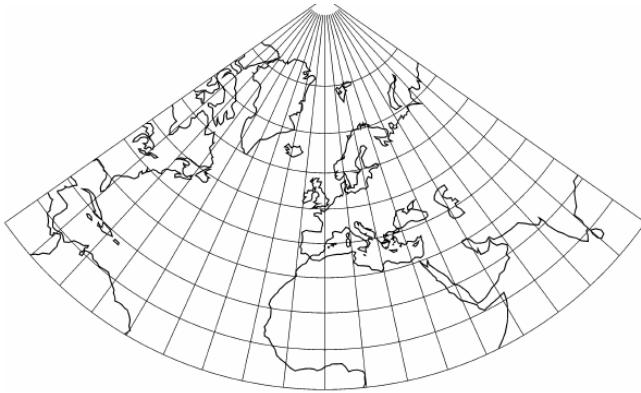
pri čemu δ predstavlja ugao između meridijana tj. ugao pod kojim se isti seku u datoj projekciji, ρ – poluprečnik paralela, k je konstanta proporcionalnosti, λ geografska dužina i λ_0 –geografska dužina srednjeg meridijana na delu koji se preslikava.

Funkcija f_1 određuje se na osnovu uslova konformnosti, ekvivalentnosti ili ekvidistantnosti. U nastavku dajemo pregled konusnih projekcija, s obzirom na navedena tri uslova.



Slika 21. Elementi konusne projekcije

2.2.1. Uspravna konformna konusna projekcija



Slika 22. Prikaz Zemljine površi – uspravna konformna konusna projekcija

Veza sa Dekartovim koordinatama (u skladu sa slikom 21.) izražava se na sledeći način:

$$x = \rho \cos \delta, \quad y = \rho \sin \delta.$$

Teorema 2.2.1. Funkcija f_1 iz (2.1) koja zadovoljava uslov konformnosti data je sa

$$\rho = f_1(\varphi) = \frac{K}{P^k}, \text{ pri čemu je } P \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})}{\operatorname{tg}^e(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})}.$$

Dokaz. Imajući u vidu da data projekcija treba da zadovoljava uslov konformnosti, polazne relacije su $\omega = 0, m = n$. Na osnovu prethodno izvedenog imamo i :

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 = \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2, \quad m^2 = \frac{E}{M^2} \Rightarrow m = -\frac{d\rho}{Md\varphi}, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 = (\rho \cdot k)^2, \quad n^2 = \frac{G}{r^2} \Rightarrow n = \frac{\rho \cdot k}{r} \\ \Rightarrow \frac{d\rho}{Md\varphi} &= \frac{\rho \cdot k}{r} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{M \cdot k \cdot d\varphi}{r} \Rightarrow \int \frac{d\rho}{\rho} = \int -\frac{M \cdot k \cdot d\varphi}{N \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Dalje, koristeći (1.7) dobijamo:

$$\ln \rho = k \cdot \int -\frac{\frac{a(1-e^2)}{w^3}}{\frac{a}{w}} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi = k \cdot \int -\frac{(1-e^2)}{w^2} d\varphi = k \cdot \int -\frac{(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi.$$

Napomena: $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \ln(\sec\varphi + \tan\varphi)$. Rešenje ovog integrala biće predstavljeno u delu o Merkatorovoj projekciji (poglavlje 2.5.1). U vezi s tim u nastavku navodimo jedan identitet koji je ovde često u primeni:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \sec\varphi + \tan\varphi.$$

Koristeći adicione formule imamo: $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1 + \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1 + \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}{1 - \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}} =$

$$\begin{aligned} \frac{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} &= \frac{\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1 + 2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi} \\ &= \frac{1 + \sin\varphi}{\cos\varphi} = \sec\varphi + \tan\varphi \end{aligned}$$

Dakle, označimo li sa K konstantu integracije i θ takvo da važi $\sin\theta = e\sin\varphi$, tada imamo:

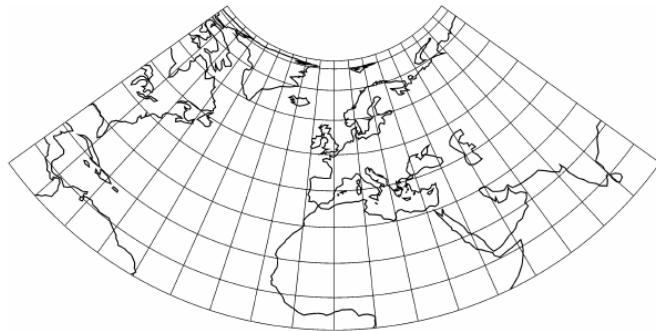
$$\ln\rho = k \cdot \int -\frac{(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)} \cdot \frac{1}{\cos\varphi} d\varphi \Rightarrow \ln\rho = \ln K - k \cdot \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) + k \cdot \ln\left(\tan^e\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

odnosno:

$$\begin{aligned} \ln\rho &= \ln K - k \left(\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) - \ln\left(\tan^e\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) \right) = \\ \ln K - k \cdot \ln\left(\frac{\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right)}{\left(\tan^e\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right)}\right) &= \ln\left(\frac{K}{P^k}\right), \text{ za } P = \frac{\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right)}{\left(\tan^e\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right)}, \text{ što je i trebalo dokazati.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Detaljnije o samim izvođenjima i daljim načinima određivanja korišćenih konstanti može se pronaći u [1] i [9].

2.2.2. Uspravna ekvivalentna konusna projekcija



Slika 23. Prikaz Zemljine površi – uspravna ekvivalentna konusna projekcija

Osnovne kartografske jednačine kojim su izražene specifičnosti ove projekcije su:

$$m \cdot n = 1 \Rightarrow -\frac{d\rho}{Md\varphi} \cdot \frac{\rho \cdot k}{r} = 1$$

Ovo nam dalje daje:

$$-\rho d\rho = \frac{M \cdot r \cdot d\varphi}{k} \Rightarrow \int -\rho d\rho = \int \frac{M \cdot N \cos\varphi \cdot d\varphi}{k} \Rightarrow \frac{1}{2} \rho^2 = \frac{1}{k} \cdot \int MN \cos\varphi d\varphi + K$$

Integral sa desne strane jednakosti predstavlja površinu trapeza na površi elipsoida. Njegova vrednost odnosno izraz kojim je dat je složen, te je postupak integracije ovom prilikom izostavljen. (Rešenje istog može se pronaći u [1] ili [9]). Konačno, funkcija f kojom se definišu koordinate ove projekcije data je sa:

$$\rho^2 = \frac{2}{k}(K - S),$$

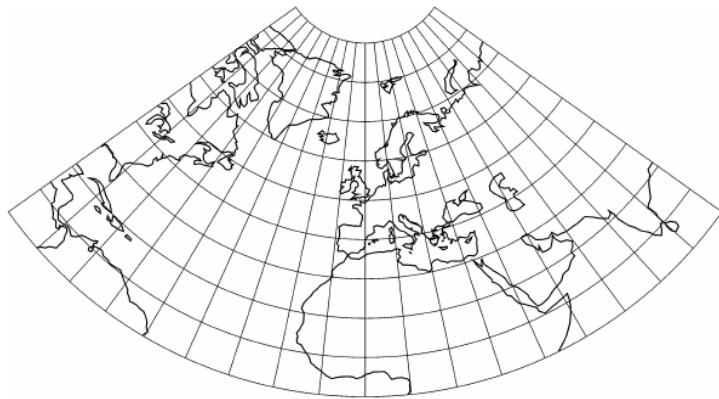
pri čemu konstanta S predstavlja rešenje integracije $\int MN \cos\varphi d\varphi$. Ovim smo zapravo utvrdili:

Teorema 2.2.2. Opšte kartografske jednačine koje određuju uspravnu ekvivalentnu konusnu projekciju date su sa:

$$x = q - \rho \cos\delta, \quad y = \rho \sin\delta, \quad \delta = k(\lambda - \lambda_0)$$

$$\rho^2 = \frac{2}{k} \cdot (K - S), \quad S = \frac{b^2}{2} \left(\frac{\sin\varphi}{1 - e^2 \sin^2\varphi} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e \sin\varphi}{1 - e \sin\varphi} \right).$$

2.2.3. Uspravna ekvidistantna konusna projekcija



Slika 24. Prikaz Zemljine površi – uspravna ekvidistantna konusna projekcija

Osnovne kartografske jednačine kojim su izražene specifičnosti ove projekcije ponovo definišemo kroz teoremu:

Teorema 2.2.3. Koordinate u uspravnoj ekvidistantnoj konusnoj projekciji određene su sa:

$$x = q - \rho \cos \delta, \quad y = \rho \sin \delta, \quad \delta = k(\lambda - \lambda_0)$$

$$\rho = K - I_0^\varphi, \quad I_0^\varphi = \int_0^\varphi M d\varphi.$$

Dokaz. Prepostavimo da se meridijani preslikavaju bez deformacija, stoga imamo uslov:

$$m = 1 \Rightarrow -\frac{d\rho}{Md\varphi} = 1$$

$$\rho = -\int_0^\varphi M d\varphi$$

Integral koji se javlja u prethodnoj jednakosti rešava se razvijanjem u redove:

$$\int_0^\varphi M d\varphi = A(\varphi + \sin 2\varphi(c_1 + (c_2 + (c_3 + (c_4 + c_5 \cos 2\varphi) \cos 2\varphi) \cos 2\varphi) \cos 2\varphi) + ..)$$

gde su:

$$A = a \cdot (1 - n) \cdot (1 - n^2) \cdot \left(1 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{225}{64}n^4 + \dots \right),$$

$$c_1 = -\frac{3}{2}n + \frac{31}{24}n^3 - \frac{669}{640}n^5 \dots, \quad c_2 = \frac{15}{8}n^2 - \frac{435}{128}n^4 \dots, \quad c_3 = -\frac{35}{12}n^3 + \frac{651}{80}n^5 \dots, \quad c_4 = \frac{315}{64}n^4 \dots,$$
$$c_5 = -\frac{693}{80}n^5 \dots \text{ i } n = \frac{a-b}{a+b},$$

pri čemu su sa a, b označene poluose elipsoida i sa n jedan od izraza za spljoštenost elipsoida. Na osnovu sledi

$$\rho = K - \int_0^\varphi M d\varphi,$$

dok se konstante određuju uz postavljanje uslova o vrednostima merila. ■

Konusnim projekcijama slične su pseudokonusne projekcije koje karakteriše:

- Paralele su predstavljene kao lukovi koncentričnih kružnica;
- Meridijani u ovom slučaju nisu pravci, zapravo svim sem srednjeg meridijana koji se slika kao pravac, predstavljeni su kao krive simetrične u odnosu na isti.

Najpoznatija takva jeste "Bonneova" projekcija, čiji je prikaz dat na slici ispod:



Slika 25. Pseudokonusna projekcija

2.3. Cilindrične projekcije

Meridijani uspravnih cilindričnih projekcija preslikavaju se u projekciji kao paralelni pravci uz rastojanja proporcionalna odgovarajućim razlikama dužina, a paralele su takođe pravci - normalni na merdijane. U skladu sa već uvedenim oznakama najpre dajemo pregled formula za ova preslikavanja, a potom kao i prethodnom slučaju razmatramo u zavisnosti od uslova konformnosti/ekvivalentnosti/ekvidistantnosti date projekcije.

U posmatranom koordinatnom sistemu (imati u vidu sliku 19.) koordinatne ose x i y odgovaraju – projekciji ekvatora i srednjeg meridijana područja koje se preslikava respektivno.

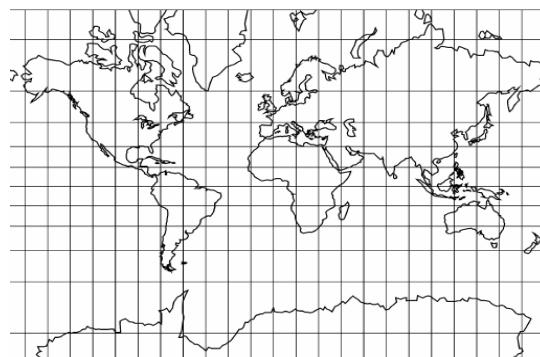
Dakle:

$$x = f(\varphi), \quad y = k(\lambda - \lambda_0).$$

Dalje,

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 = \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^2, \quad m^2 = \frac{E}{M^2} \Rightarrow m = \frac{dx}{Md\varphi}, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 = k^2, \quad n^2 = \frac{G}{r^2} \Rightarrow n = \frac{k}{r}. \end{aligned}$$

2.3.1. Uspravna konformna cilindrična projekcija



Slika 26. Prikaz Zemljine površi – uspravna konformna cilindrična projekcija

U nastavku imamo u vidu osobine konformnih preslikavanja, konkretno odnos:

$$c = m = n = a = b.$$

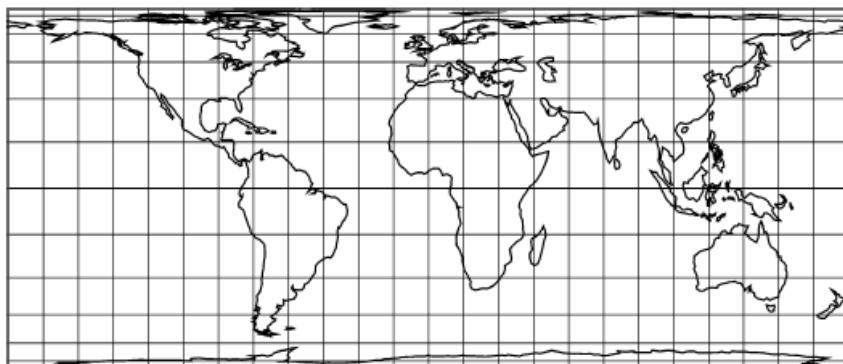
Osnovne kartografske jednačine kojim su izražene specifičnosti ove projekcije su:

$$\frac{dx}{Md\varphi} = \frac{k}{r} \Rightarrow x = k \cdot \int \frac{M \cdot}{N \cos\varphi} d\varphi.$$

Ovaj integral smo već imali u teoremi 2.1., te koristeći se istim sada imamo:

$$x = k \cdot \ln U, \quad U \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})}{\operatorname{tg}^e(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})}.$$

2.3.2. Uspravna ekvivalentna cilindrična projekcija



Slika 27. Prikaz Zemljine površi – uspravna ekvivalentna cilindrična projekcija

Sada koristimo pravilo koje izražava ekvivalentnost, dakle već pomenutu jednakost:

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 1$$

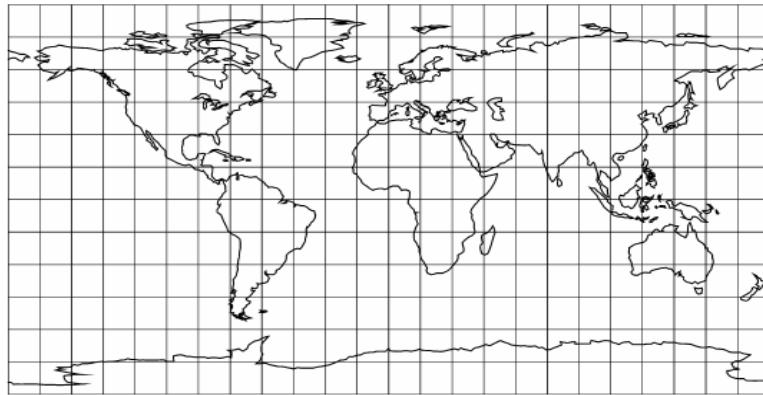
Uobičajeno je da pri ovim projekcijama Zemljinu površ aproksimiramo sferom. Osnovne kartografske jednačine kojim su izražene specifičnosti ove projekcije tada su:

$$\frac{dx}{Rd\varphi} \cdot \frac{k}{R \cos\varphi} = 1 \Rightarrow \frac{dx}{Rd\varphi} = \frac{R \cos\varphi}{k} \Rightarrow dx = \frac{1}{k} \cdot R^2 \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi$$

$$x = \frac{R^2}{k} \cdot \int \cos\varphi \cdot d\varphi = \frac{R^2}{k} \cdot \sin\varphi + K.$$

Napomena: Specijalno, izborom koordinatnog sistema takvog da se osa y poklapa sa projekcijom ekvatora, dobijamo $K = 0$. Takođe, konstanta k određuje se pod uslovom da nema deformacija paralela, te je merilo duž paralela tada jednako 1.

2.3.3 Uspravna ekvidistantna cilindrična projekcija



Slika 28. Prikaz Zemljine površi – uspravna ekvidistantna cilindrična projekcija

Napomena: Kao i u prethodnom slučaju, u ovim projekcijama Zemlju opisujemo kao sferu. Imajući u vidu $m = 1$, osnovne kartografske jednačine kojim su izražene specifičnosti ove projekcije su:

$$\frac{dx}{Rd\varphi} = 1 \Rightarrow x = R \cdot \int d\varphi = R \cdot \varphi + K.$$

Takođe, ako se y – osa poklapa sa ekvatorskom ravninom sledi $K = 0$, odnosno

$$x = R \cdot \varphi, \quad y = k(\lambda - \lambda_0),$$

pri čemu se ponovo konstanta k određuje uz uslov o odsustvu deformacije paralela.

Kako je navedeno, u ovim projekcijama koristili smo vrednosti merila duž meridijana i paralela definisanih za sferu, te ovde navodimo pregled istih:

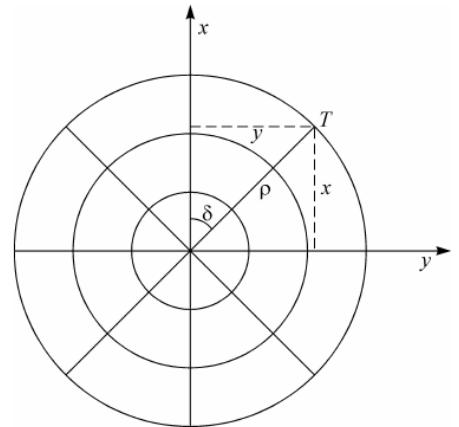
$$m = \frac{dx}{Rd\varphi}, \quad n = \frac{k}{R \cos \varphi}$$

što sledi iz $M = N = R$ za sferu, formula za merila duž meridijana i paralela generalno izvedenih za elipsoid i ranije uvedenih oznaka za M, N i r .

2.4. Azimutalne projekcije

Paralele uspravnih azimutalnih projekcija preslikavaju se kao koncentrične kružnice. Sa druge strane, meridijani su pravci koji se sekaju u centru paralela, pod uglovima jednakim odgovarajućim razlikama dužina.

$$x = \rho \cos \delta, \quad y = \rho \sin \delta$$



Slika 29. Koordinatni sistem uspravnih azimutalnih projekcija

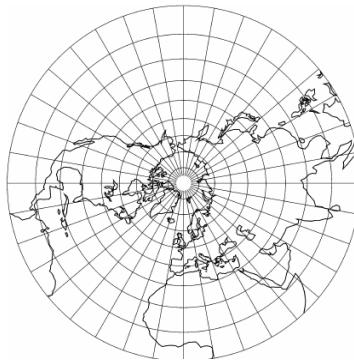
Važi: ρ je poluprečnik paralele date tačke, a $\delta = \lambda - \lambda_0$, ugao između meridijana, konkretno razlika geografskih dužina posmatrane tačke i referentnog meridijana.

$$E = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\right)^2 \Rightarrow m = -\frac{d\rho}{Md\varphi}, \quad G = \rho^2 \Rightarrow n = \frac{\rho}{N \cos \varphi}.$$

Specijalno, za sferu, $M = N = R$, te su izrazi za merila duž meridijana i paralela data sa:

$$m = -\frac{d\rho}{R d\varphi}, \quad n = \frac{\rho}{R \cos \varphi}.$$

2.4.1. Uspravna konformna azimutalna projekcija



Slika 30. Prikaz Zemljine površi – uspravna konformna azimutalna projekcija

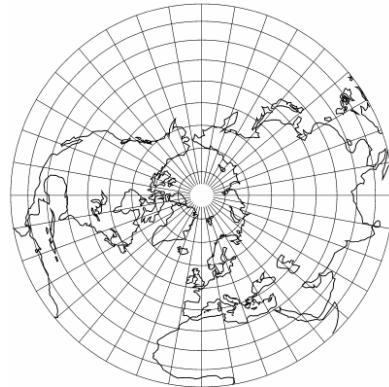
Teorema 2.4.1. Osnovne kartografske jednačine kojim su izražene specifičnosti ove projekcije su:

$$\delta = \lambda - \lambda_0, \quad \rho = K \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Dokaz. Uslov konformnosti dat je preko jednakosti $m = n$, stoga sledi:

$$\begin{aligned} -\frac{d\rho}{Rd\varphi} &= \frac{\rho}{R\cos\varphi} \Rightarrow -\frac{d\rho}{\rho} = \frac{Rd\varphi}{R\cos\varphi} \Rightarrow -\ln\rho = \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} + K \\ \Rightarrow \quad \ln\rho &= \ln K - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \\ \Rightarrow \quad \rho &= \frac{K}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} = K \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$
■

2.4.2. Uspravna ekvivalentna azimutalna projekcija



Slika 31. Prikaz Zemljine površi –uspravna ekvivalentna azimutalna projekcija

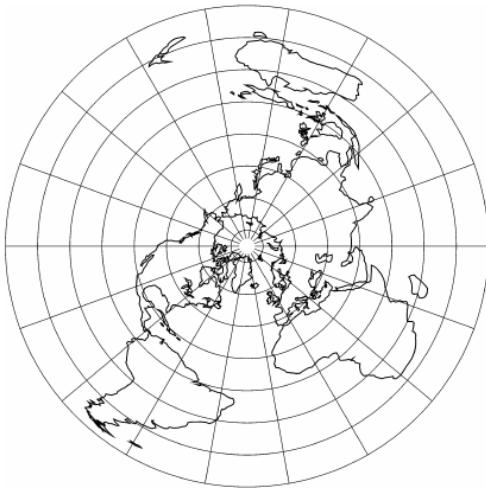
Teorema 2.4.2. Osnovne kartografske jednačine kojim su izražene specifičnosti ove projekcije su:

$$\delta = \lambda - \lambda_0, \quad \rho = \sqrt{2R\sin\varphi}$$

Dokaz. Jasno, kao u prethodnim primerima, koristeći uslov $m \cdot n = 1$ dobijamo:

$$\begin{aligned} -\frac{d\rho}{Rd\varphi} \cdot \frac{\rho}{R\cos\varphi} \\ \Rightarrow \rho \cdot d\rho = -R^2 \cdot \cos\varphi \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \rho^2 = -R^2 \cdot \sin\varphi + K \end{aligned}$$
■

2.4.3. Uspravna ekvidistantna azimutalna projekcija



Slika 32. Prikaz Zemljine površi – uspravna ekvidistantna azimutalna projekcija

Teorema 2.4.3. Osnovne kartografske jednačine kojim su izražene specifičnosti ove projekcije su:

$$\delta = \lambda - \lambda_0, \quad \rho = -R\varphi + K$$

Dokaz. Izraz kojim je definisano ρ u ovoj projekciji dobijamo uz uslov $m = 1$. Dakle:

$$-\frac{d\rho}{Rd\varphi} = 1 \Rightarrow d\rho = -Rd\varphi$$

$$\rho = -R \cdot \int d\varphi = R \cdot \varphi + K$$

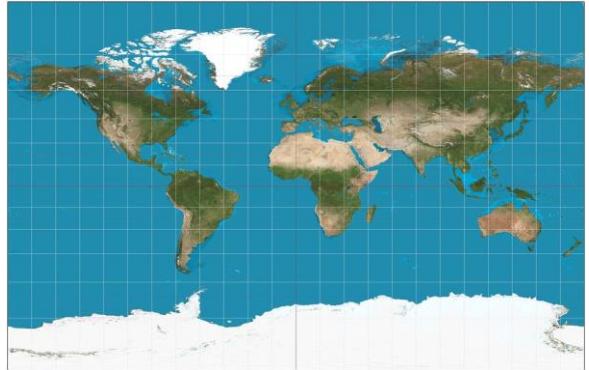
■

Uz uslov da se pol slika u tačku imamo $\varphi = 90^\circ \rightarrow \rho = 0$, te dalje sledi:

$$K = R \cdot 90^\circ \rightarrow \rho = R \cdot (90^\circ - \varphi).$$

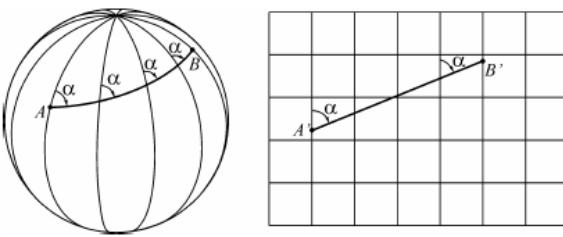
2.5. Merkatorova projekcija

Merkatorova projekcija je uspravna konformna cilindrična projekcija o kojoj je već bilo reči. Stoga, u ovom delu izvodimo formule koje određuju koordinate u slučaju aproksimacije Zemlje sferom. Takođe, navodimo dodatno i neke njene specifičnosti, koje je i čine najprimenljivijom kartografskom projekcijom.



Slika 33. Prikaz Zemljine površi u Merkatorovoј projekciji

Naime, ova projekcija najznačajniju primenu ima u pomorskom saobraćaju i navigaciji, pre svega jer je odlikuje sledeće: meridijani i paralele preslikavaju se kao pravci, konformna je i specijalno, odnosno za pomorce najbitnije - loksodrome se preslikavaju kao pravci (slika 34.). Ovo konkretno znači da brod ne menja kurs pri celom svom kretanju.



Slika 34. Prikaz loksodrome u Merkatorovoј projekciji

Karakteristika loksodrome je da se ona kao kriva linija pod istim uglom seče meridijane postepeno približava polu, ali nikada "ne stiže" do njega. Specijalno, za azimut $\alpha = 0^\circ$, loksodroma je referentni meridijan, a za $\alpha = 90^\circ$ ona se poklapa sa Ekvatorom.

Kada je reč o putovanjima po loksodromi, prednosti su uočljive onda kada se radi o kraćim relacijama, dok se ka udaljenijim mestima češće plovi po ortodromi. Zanimljivo je da i tu ima odstupanja, pa tako npr. dešava se da se ortodroma kao kriva linija preseca odnosno deli na prave linije – loksodrome i na taj način smanjuje broj promena kursa broda. Dakle, u ovom slučaju to se dešava samo pri prelazu na sledeću loksodromu, dok bi pri putovanju po ortodromi broj promena bio znatno veći te samo putovanje za pomorce otežavajuće. Primer takvog (Rt Dobre Nade → Melburn) dat je u [16].

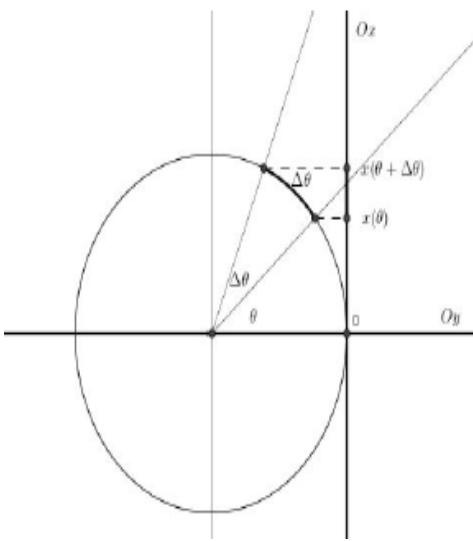
2.5.1. Jednačine Merkatorove projekcije

Kao što je navedeno, u ovom delu posmatraćemo Zemlju kao sferu poluprečnika $R = 1$ i shodno tome doći do formula koje određuju koordinate iste. Najpre pretpostavimo da smo Zemlju obavili cilindrom (kao na slici 19.). Svakoj tački na površi sfere pridružujemo tačku na cilindru. Potom kao što je ranije opisano (projekcije se i vrše na oblasti koje se mogu razviti) cilindar razvijamo u ravni i tada prelazimo na Dekartove koordinate. Cilj je uspostaviti vezu x i y sa sfernim koordinatama (φ, θ) tačaka na sferi. *Napomena:* Pri razvijanju cilindra u ravan pretpostavljamo da se u posmatranom koordinatnom sistemu x – osa poklapa sa izvodnicom cilindra, a y – osa sa Ekvatorom.

Posmatrajmo sada proizvoljnu tačku na sferi. Kružnica na površi sfere koja sadrži istu i koja je paralelna sa ekvatorskom ravni ujedno je smeštena u kružnicu na površi cilindra, na visini koja odgovara vrednosti θ . Kako je cilindar postavljen tako da obavija sferu jediničnog poluprečnika, njegova baza i svaki njoj paralelan krug su takođe istog poluprečnika. Sa druge strane, poluprečnik kruga koja sadrži našu posmatranu tačku jednak je $\cos\theta$, što je direktna posledica definisanosti ugla θ pomenute još pri parametrizaciji sfere i pretpostavke da izvođenja vršimo na sferi jediničnog poluprečnika.

Generalno, odnos poluprečnika ova dva posmatrana kruga je $\frac{1}{\cos\theta}$ i u smislu zapisa kojim je dat nezavisan je od izbora tačke koju projektujemo. Dakle, ovaj izraz se može posmatrati kada razmatramo ovaj tip projekcije, stoga u nastavku izvodimo formule koje će ispunjavati uslov – odnos poluprečnika kružnica je lokalno zadržan duž x -ose.

To bi značilo da zapravo treba da bude ispunjen uslov: $y = \varphi$, $\frac{x(\theta + \Delta\theta) - x(\theta)}{\Delta\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$.



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \quad \frac{dx}{d\theta} &= \frac{1}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad x = \int \frac{d\theta}{\cos\theta}, \\
 \int \frac{d\theta}{\cos\theta} &= \int \frac{\cos\theta \cdot d\theta}{1 - \sin^2\theta} = \int \frac{dt}{1 - t^2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{1-t} \right) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}\right) = \ln\sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}} \\
 &= \ln\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \ln(\sec\theta + \tan\theta)
 \end{aligned}$$

← Slika 35. Projekcija tačke sfere na cilindričnu površ

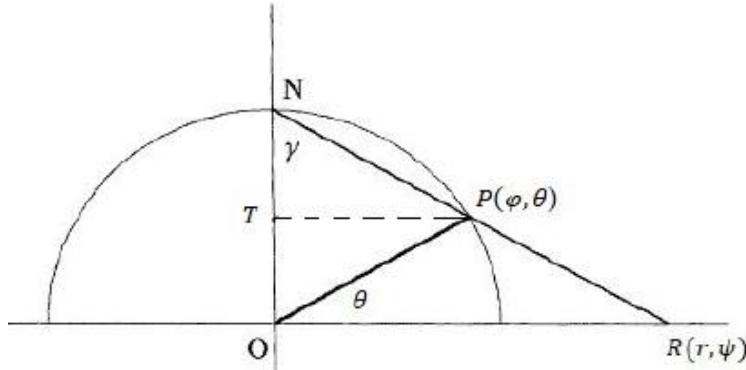
2.5.2. Veza sa kompleksnom funkcijom

U ovom delu prikazaćemo vezu Merkatorove i još jedne projekcije čijom se kompozicijom dobija preslikavanje u kompleksnoj ravni. (Izvor: [23])

Sada najpre definišemo stereografsku projekciju.

Definicija 2.5.1. Projekcija koja preslikava sferu sa jednog od njenih polova na ravan paralelnu sa ekvatorskom ravninom, naziva se *stereografska projekcija*. Uobičajeno je da se projekcija vrši specijalno na ekvatorsku ravan ili pak tangencijalnu ravan (koja sadrži pol suprotan onom iz kog vršimo preslikavanje).

Nama će u ovom slučaju poslužiti primer projekcije na ravan Ekvatora, definisanu iz severnog pola (Slika 36.). Dakle, ovom projekcijom tačka $P(\varphi, \theta)$ zadata sfernim koordinatama slika se na tačku $R(r, \psi)$, zadatu polarnim koordinatama. Napomena: Kako je ravan projekcije ekvatorijalna ravan važi: $\varphi = \psi$.



Slika 36. Stereografska projekcija

U skladu sa oznakama na slici 36., koristeći sličnost trouglova imamo:

$$\frac{OR}{TP} = \frac{ON}{TN}.$$

Uz pretpostavku o aproksimaciji Zemlje jediničnom sferom, dalje sledi:

$$OP = 1, ON = 1, TP = \cos\theta, OT = \sin\theta \Rightarrow \frac{r}{\cos\theta} = \frac{1}{1-\sin\theta}$$

$$r = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = \sec\theta + \tan\theta$$

Dakle, dobili smo koordinate tačke pri stereografskom preslikavanju. Uporedimo sada iste sa Merkatorovom projekcijom.

Tačka $P(\varphi, \theta)$ stereografskom projekcijom slika se na $R(r, \psi)$, $r = \sec\theta + \tan\theta$, $\psi = \varphi$, dok pri Merkatorovoj projekciji dobijamo tačku $M(x, y)$, $x = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$, $y = \varphi$.

Definišimo sada preslikavanje

$$f: U \rightarrow V, \quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}, \\ f(x, y) = (e^x, \psi)$$

Naime, na osnovu prethodno izloženih formula u projekcijama, nije teško uočiti vezu:

$$r = \sec\theta + \tan\theta = e^{\ln(\sec\theta + \tan\theta)} = e^x \\ \psi = \varphi = y.$$

Skup U je dvodimenzionalni podskup skupa \mathbb{R}^2 , koji možemo da predstavimo i na sledeći način:

$$U = \{z : z = x + iy, -\pi < y < \pi\}$$

Slika koju dobijamo ovim preslikavanjem, odnosno skup koji možemo da označimo sa V podskup je takođe dvodimenzionalne ravni, isključujući ishodište. Izborom skupa U kao podskupa kompleksne ravni, činimo da je i skup V takođe isto to. Označimo njegove elemente sa v .

Tada važi (sada se služimo polarnim koordinatama):

$$v = r\cos\theta + ir\sin\theta = e^x\cos\theta + ie^x\sin\theta = e^x(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{x+iy} = e^z$$

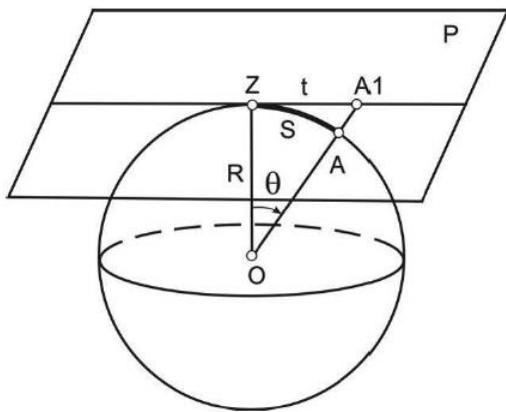
Dakle, važi: $f(z) = e^z$, čime smo dobili povezanost Merkatorove i stereografske funkcije sa kompleksnom funkcijom.

Napomena: Svojstvo konformnosti ostaje očuvano, odnosno važi i za funkciju f .

3. Geometrija Zemljinog elipsoida i problemi kartografskih projekcija

3.1. Zakrivljenost Zemljine površi

U ovom delu razmotrićemo pitanje: da li se određeni delovi Zemljine površi mogu aproksimirati kao ravan? Svakako da specifičnost reljefa i drugih Zemljinih elemenata generalno to ne dopušta, ali uz određene napomene o greškama, odnosno razmeri i grafičkoj strani karte, može se govoriti o pomenutoj aproksimaciji. Za nastavak korisna nam je slika 37, preuzeta iz [2], gde je detaljnije obrađena ova tema.



Slika 37. Aproksimacija dela Zemljine površi ravnim delom

U skladu sa oznakama na slici, projekcija Zemljinog luka ZA na ravan P je tangenta na sferu u tački Z . Minimizacijom razlike istih ukazujemo na mogućnost željene aproksimacije. Konkretno, vrednost razlike dužine luka i njegove projekcije na ravan – dužine duži ZA_1 je “pogodna” u našem smislu aproksimacije, ukoliko je manja od unapred postavljene granice tačnosti karte odnosno razmere, merila i odstupanja iste. Označimo razliku koju razmatramo sa ΔS . Primenom trigonometrije i Maklorenovog razvoja funkcije $\operatorname{tg}(\theta)$ s opravdanjem da $\theta \rightarrow 0$, imamo:

$$\begin{aligned}\Delta S &= S - t = R \cdot \theta - R \cdot \operatorname{tg} \theta = R(\theta - \operatorname{tg} \theta) = R \left(\theta - \left(\theta - \frac{\theta^3}{3} \right) \right) = R \cdot \frac{\theta^3}{3} \\ &= R \cdot \frac{s^3}{3 \cdot R^3} = \frac{s^3}{3 \cdot R^2}.\end{aligned}$$

Dakle, poznajući grafičku tačnost karte, možemo da odredimo maksimalnu udaljenost merenu po površi sfere od tačke u kojoj je postavljena tangentna ravan i time procenimo koji deo je dozvoljeno posmatrati i projektovati kao ravan.

3.2. Rotacioni elipsoid

Parametrizaciju i osnovne označke koje prate rotacioni elipsoid predstavili smo već u prvom poglavlju rada. Sada ćemo kratko da se osvrnemo na isti, sa stanovišta kartografskih projekcija. Naime, Zemljinu površ sa svim svojim neravninama nemoguće je kao takvu projektovati, stoga se pribegava povoljnim aproksimacijama iste. Svakako, izbor tada pada na površi koje je dovoljno dobro opisuju i to bi na prvom mestu bio baš rotacioni elipsoid, pa tek onda sfera. No, kako je ponovo od ove dve površi sfera "lakša" za rad, neretko je Zemlja poistovećena sa njom.

U nastavku definišemo pojam Gausove zakrivljenosti regularne površi kao uvod u teoremu koja predstavlja značajnu matematičku osnovu i obrazloženje o deformacijama.

Definicija 3.2.1. (Gausova krivina) Neka je $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna parametrizovana površ. Gausova krivina površi r predstavlja funkciju izraženu kao proizvod glavnih krivina, čije se vrednosti računaju u tački $P = r(u, v)$. Dakle:

$$K(u, v) = K_1(u, v) \cdot K_2(u, v) = \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{1}{\rho_2}.$$

Sada, kada razmatramo mogućnost i načine projektovanja jedne površi na drugu, uviđamo značaj pojma krivine. Naime, važi sledeće - ukoliko želimo izometričko preslikavanje između dve površi (preslikavanje koji bi čuvalo uglove i dužine) neophodno je da posmatrane površi imaju iste vrednosti Gausove zakrivljenosti u odgovarajućim tačkama. Preciznije:

Teorema 3.2.2. (Teorema Egregium) Zakrivljenost K regularne površi r je svojstvo koje ostaje očuvano pri identičkom preslikavanju površi.

Posledica: Ne postoji identičko preslikavanje sfere na ravan (Gausova zakrivljenost ravni je $K = 0$, a za sferu iznosi $\frac{1}{R^2}$).

Napomena: Gausova zakrivljenost, za elipsoid nije konstantna nego zavisi od geografske širine tačke u čijim koordinatama računamo vrednost, no ipak je bliža krivini sfere nego krivini ravni. Zbog toga su odstupanja manja pri preslikavanju elipsoida na sferu, nego na ravan. Jednakost Gausovih zakrivljenosti u korespondentnim tačkama za dve posmatrane površi generalno je potreban uslov za identičko preslikavanje između istih, a u slučaju Gausovih zakrivljenosti konstantnih vrednosti (npr. kao za sferu ili specijalno za ravan), uslov je i potreban i dovoljan.

U ovom delu rada korišćena je referenca: [11].

3.3. Preslikavanje elipsoida na sferu

Kao što je već pomenuto, površ Zemlje uobičajeno se aproksimira rotacionim elipsoidom. Za potrebe izrade različitih karata, vrše se dalje aproksimacije i tada možemo da govorimo generalno o dva postupka:

- Preslikavanja elipsoida na ravan, uz veća odstupanja i deformacije;
- Preslikavanje elipsoida najpre na sferu, a potom sfere na ravan.

Kada je reč o ovom drugom načinu, izdvojićemo sledeće napomene:

- 1) Deformacije su manje u odnosu na direktni i komplikovaniji prvi način projekcije;
- 2) Uspostavljanjem funkcije između ove dve površi, određuju se osobine preslikavanja (konformnost, ekvivalentnost ili ekvidistantnost) u skladu sa namenom karte i veličinom dela koji se preslikava;
- 3) Uobičajeno se nastoji da se meridijani elipsoida slikaju na meridijane sfere, pri čemu geografske dužine korespondentnih tačaka bivaju jednake ili proporcionalne;
- 4) Kompozicija konformnih (ekvivalentnih) preslikavanja je ponovo konformno (ekvivalentno) preslikavanje, što će reći da ukoliko npr. elipsoid konformno preslikamo na sferu, a potom istu konformno na ravan, dobijeno preslikavanje elipsoida na ravan ispunjava uslov konformnosti. Za ekvidistantna preslikavanja, generalno to ne važi;
- 5) Veze između geografskih širina tačaka elipsoida i sfere su u međusobnoj funkcijskoj zavisnosti koja prati postavljene uslove o deformacijama. Pri tom, izrazi do kojih se dolazi su prilično složeni i uključuju trigonometrijske funkcije koje se u svrhu preciznih preračunavanja razvijaju u redove. Veliku ulogu tu uzimaju savremene tehnologije i primena istih u otklanjanju računskih poteškoća.

Detaljno i postupno, pomenute veze i razvoji funkcija, predstavljeni su u [1] i referencama [6] i [7] - naučnim radovima u kojima su posebno proučavana konformna i ekvidistantna preslikavanja, te zainteresovane čitaoce upućujemo na pomenute izvore.

3.4. Problem optimalnih kartografskih projekcija

Svakako najveći izazov za kartografe predstavlja izbor adekvatnih tehnika konstruisanja kako bi karta, kao umanjena i uopštena slika Zemlje ili nekog njenog dela, ipak bila verodostojan prikaz stvarnog stanja. Dakle, u osnovi je cilj da prostorne relacije među prikazanim objektima u najmanjoj mogućoj meri odstupaju od realnosti, odnosno da sačuvaju svojstva uprkos činjenici da je izvršena redukcija veličine istih. Kao što smo već naveli, deformacije pri projektovanju su neizbežne, te se baš na osnovu veličina istih može i govoriti o kriterijumima za ocenu kartografskih projekcija. U vezi s tim najpre ćemo da napomenemo da postoje dve mogućnosti – merenja i poređenja maksimalnih deformacija (odstupanja od glavnih pravaca) u svakoj tački površi ili pak druga (primenjivija opcija) – poređenje srednje kvadratne deformacije izmerene na celom području čija se projekcija vrši.

U kartografskoj literaturi prihvaćen je kriterijum Airy-a¹¹ koji je izražen sa:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2}[(a - 1)^2 + (b - 1)^2] \Rightarrow E^2 = \frac{1}{S} \cdot \int_S \varepsilon^2 \cdot dS$$

pri čemu je sa ε^2 označena aritmetička sredina deformacija u odnosu na glavne pravce, a sa E^2 srednja kvadratna deformacija na celoj posmatranoj površi S.

Takođe, u praksi je primenjiva i formula koja deformacije izražava kroz logaritamsku zavisnost od glavnih pravaca:

$$E^2 = \frac{1}{2S} \cdot \int_S ((lna)^2 + (lnb)^2) \cdot dS \quad (3.1)$$

Minimizacijom (3.1) dolazimo do najpovoljnije projekcije u smislu najmanjih deformacija.

Napomena: Integracija (3.1) neretko je komplikovana, ponekad i nemoguća. Zapravo, u samo nekoliko slučajeva istu je moguće direktno izvršiti, dok se u suprotnom pribegava primeni različitih numeričkih metoda od kojih se izdvaja metoda najmanjih kvadrata. Izračunavanja se vrše u određenom broju tačaka koje verodostojno predstavljaju posmatrani domen, dobijene vrednosti ponovo uvrštavaju i ceo iterativni postupak ponavlja sve dok (3.1) uzima redom sve manje vrednosti. Proces prestaje kada se vrednosti počnu ponavljati i tada se dobijeno definiše kao najmanja konačna vrednost. Ponovo značajnu ulogu i ovde preuzimaju računarske tehnologije, pa se često i same metode prilagođavaju istom.

U ovom delu, u osnovi korišćeni su pojmovi iz reference [10]. U navedenoj je izložena i Čebiševljeva teorema specijalno za deformacije konformnih preslikavanja.

¹¹ Airy je engleski astronom koji je 1861. godine definisao kriterijum za procenu kartografskih projekcija.

4. Kartografija savremenog doba

4.1. Primena kompjuterske tehnologije u kartografiji

Koreni matematičke kartografije, odnosno potrebe za prikazivanje Zemlje i sveta oko nas, sežu u davnu prošlost, te pregled istorijata sam za sebe bio bi obiman posao. Stoga, u nastavku izlaganja akcenat će biti stavljen na kartografiju savremenog doba, sa osvrtom na blagodeti razvoja i sveukupnog napretka informacionih tehnologija.

Proces izrade karata je vrlo složen i dug. Primena kompjuterske tehnologije na prvom mestu doprinosi ubrzanju tog procesa. Takođe, u skladu sa promenama koje skoro svakodnevno nastaju (imamo u vidu razvoj arhitekture i građevinarstva), karte je neophodno osavremenjivati. Tako značajnu ulogu ponovo preuzimaju upravo savremene tehnologije, dok klasični postupci izrade ostaju po strani, kako zbog vremenske zaostalosti tako i finansijske (ne)isplativosti. Svakako kao prednost možemo da izdvojimo i poboljšanje kvaliteta karata, kao i mogućnost rešavanja nekih problema koje je klasičnim metodama bilo teško ili nemoguće rešiti.

Ipak, ne budemo li pristrasni, olako ćemo uočiti i određene nedostatke. Tako npr. kartograf danas mora biti stručnjak za računarsko programiranje, baze podataka, digitalnu obradu slika, daljinska istraživanja, zemljije i geografske informacijske sisteme. Dakle, tehnička umeća kojima isti treba da ovlada rastu iz dana u dan.

Sa druge strane, kao posledica napretka savremene tehnologije stoji činjenica da danas ne postoji jasna razlika između autora i korisnika karata, budući da je izrada karte, zbog sve veće interaktivnosti na Internetu, omogućena svakom pojedincu. Naime, kartografija je ušla u period demokratizacije. Shodno tome, sada je vidljiv i u upotrebi ne tako mali broj neispravnih karata. Više o mogućnosti prikazivanja pogrešnih podataka putem karata, zainteresovani čitaoci mogu da pronađu u [13].

Takođe, detaljnije o vezi kartografije i internacionalne istorije i politike, odnosno sveprisustnom uticaju istih na karte koje su u upotrebi, sa kojih se i danas očitavaju podaci i u školama izučava svet oko nas, možemo da pronađemo u [19].

4.2. Geografski informacioni sistem (GIS)

Među pregršt definicija GIS-a, izvodićemo onu koja ga definiše kao „skup ili skladište digitalnih karata” i „kompjuterizovani alat za obradu geografskih podataka”. Isti čine različiti podsistemi zaduženi za unos i izradu karata, skladištenje i analizu istih.

Ako je prvo bitno i bio osmišljen za upotrebu i rad povezan s kartografijom, geodezijom i srodnim naukama, danas se njegovim resursima služe pojedinci iz različitih profesija i sa različitim namenama. Razvoj GIS tehnologije doprinosi sveopštem napretku u različitim sferama i procesima upravljanja i organizacije.

GIS je usko povezan sa kartografijom (sam nastanak veže se za potrebu predstavljanja karata u digitalnom obliku), bazama podataka (koje čuvaju podatke i čine skup matematičkih struktura koje rešavaju probleme predstavljene računarskom grafikom) i kompjuterskom grafikom i daljinskim upravljanjem (aplikacijama za stvaranje i čuvanje digitalnih podataka). Izvor: [12].



Slika 38. Veza GIS-a sa drugim disciplinama

4.3. Beselov elipsoid i koordinatni sistem WGS 84

Referentnim elipsoidom nazivamo elipsoid na kojem se vrše proučavanja i koji se koristi kao aproksimacija Zemljine površi. Jedan od najpoznatijih jeste Beselov elipsoid, ali svakako primenu u praksi našlo je još mnogo njih. Parametri kojima su definisani proučavali su se, merili i prihvatali u različitim vremenskim periodima, zavisno od područja koje je bilo potrebno prikazati, kao i same namene karte. U nastavku sledi tabelarni prikaz parametara poznatih elipsoida pri čemu su sa a , b , f respektivno označene poluose i spljoštenost na polovima:

Naziv	Godina	a	b	$1/f$
Everest	1830	6377276.345	6356075.415	300.801726
Bessel	1841	6377397.155	6356078.963	299.152813
Clarke	1866	6378206.400	6356583.800	294.978698
Clarke	1880	6378249.145	6356514.967	293.466308
Hayford Internacionalni	1909 1924	6378388	6356911.946	297
Krasovskij	1940	6378245	6356863.019	298.3
GRS 1967	1967	6378160	6356774.516	298.247166
GRS 1980	1980	6378137	6356752.3141	298.257222
WGS 72		6378135	6356750.520	298.26
WGS 84	1987	6378137	6356752.314	298.257223563

Slika 39. Parametri elipsoida

Zanimljivo je da je u prošlosti svaka zemlja imala svoj referentni elipsoid, uređujući podatke u skladu sa područjem koje se predstavlja, što je u slučaju potrebe za ujedinjenom projekcijom prestavljalo problem zbog neslaganja.

Pod pojmom datum karte podrazumevamo koordinatni sistem određen centrom Zemlje, Ekvatorom i glavnim meridijanom u odnosu na položaj elipsoida. WGS 84 predstavlja svetski referentni datum uveden radi pojednostavljenja odnosno otklanjanja poteškoća u vezi sa preračunima oko prelaza podataka datih u različitim datumima. Više o ovome može se istražiti u [21].

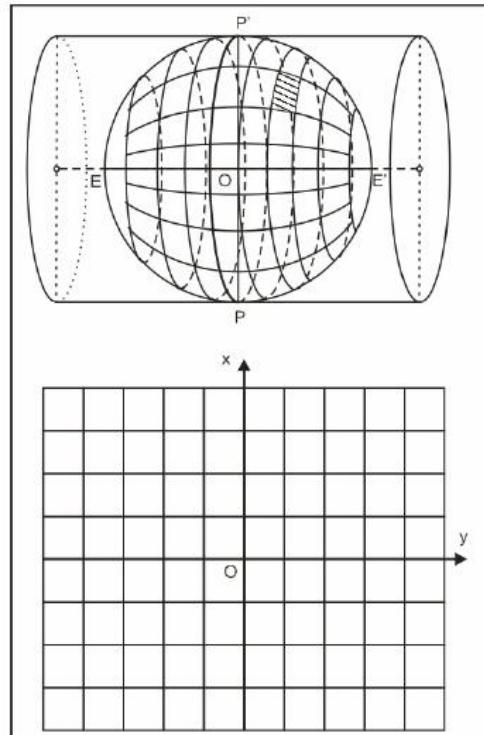
4.4. Gaus – Krigerova projekcija

Topografske karte Srbije (i drugih zemalja u okruženju) koriste Gaus – Krigerovu projekciju, koja bi, prema klasifikaciji koju smo u drugom poglavlju predstavili, pripala poprečnoj konformnoj cilindričnoj projekciji.

Datum karte odnosno koordinatni sistem koji je u upotrebi naziva se "Hermannskogel" uz "Beselov elipsoid 1841". Dimenzije istog (poluprečnik na Ekvatoru i spljoštenje na polovima) date su sa:

$$a = 6377397.155 \text{ m}$$

$$\frac{1}{f} = 299.1528128 \text{ m}$$



Slika 40. Poprečna cilindrična projekcija

Transformaciju ovih koordinata određenih geografskom dužinom i širinom u pravougle koordinate (x, y), sada je moguće izvršiti primenom kalkulatora dostupnih na internetu.

Matematički postupak koji se krije iza istog detaljno je opisan u [9].

Zanimljiva i korisna analiza sadržaja dostupnog na internetu koji se odnosi na tematiku kartografije i kartografskih projekcija predstavljena je u [8], te zainteresovane upućujemo na pregled sadržaja iste.



Slika 41. UTM¹² projekcija

¹² UTM je skraćenica za univerzalnu poprečnu Merkatorovu projekciju, sličnu Gaus-Krigerovoj projekciji.

U Gaus – Krigerovoj projekciji, počevši od Griniča, izvršena je podela na meridijanske zone čije širine iznose 3 stepena. Prema takvoj podeli, Srbija pripada šestoj i sedmoj zoni. Najveća deformacija dužine unutar zone je 0.1 m/km .



Slika 42. Projekcija Srbije u Gaus-Krigerovoj projekciji

Gaus-Krigerevoj projekciji potpuno je slična prethodno pomenuta UTM projekcija. Naime, razlika je jedino u tome da UTM projekciju odlikuje podela na meridijanske zone širine 6 stepeni, takođe koristeći Grinič kao početni meridijan. Najveća deformacija dužine unutar zone ovde iznosi 0.4 m/km .

Poređenja radi, primetimo da teritorija Srbije u UTM projekciji cela pripada 34 zoni (Slika 41.). U ovom delu primenjena je referenca [21].

5. Zaključak

Cilj ovog rada bio je izložiti i detaljnije objasniti matematičku stranu teorije kartografskih projekcija. Opisane su zakonitosti iz različitih sfera matematike kojima se služe kartografi u procesu rešavanja teorijskih i praktičnih zadataka. Uz to nepobitna je i povezanost teorije kartografskih projekcija sa geografijom, geodezijom, geodetskom astronomijom kao i drugim srodnim naukama za čije se potrebe izrađuje velik broj raznovrsnih karata.

Iako je skup preslikavanja elipsoida i sfere na ravan zapravo beskonačan, do sada je primenu našao samo konačan broj. Zavisno od namene projektovanog crteža vrši se i odabir same projekcije, a neke od najčešće korišćenih detaljnije su obrazložene u drugom poglavlju ovog rada.

Takođe, na osnovu Gaussova dostignuća utvrđeno je da idealna karta ne postoji. Obrazloženje za to leži u činjenici da sfera (ili elipsoid) imaju različite Gausove zakrivljenosti u odnosu na ravan, te ne postoji izometričko preslikavanje među navedenim površima.

Dakle, ovo predstavlja opravdanje za uvek prisutne deformacije ali isto, pred kartografe stavlja težak zadatak – pronalazak projekcija koje bi karakterisala minimalna odstupanja. Na snagu tada stupaju savremene tehnologije i sva otkrića propraćena razvojem istih. No, poželjno je naglasiti da kartografija i danas, u doba interneta i tehnološke revolucije, ne gubi konvencionalne elemente, odnosno ona je samo postala spoj konvencionalnih i tehnički podržanih metoda za izradu karata.

Uprkos velikim odstupanjima u merama i deformacijama koje odlikuju Merkatorovu projekciju, Google Maps istu koristi za prikaz površine Zemlje. Kako statistički podaci o površinama različitih zemalja i kontinenata nisu informacije koje koristi i pamti šira populacija, mnogima ostaje nepoznata činjenica o stvarnim veličinama pojedinih delova Zemlje. U prilog tome navodimo nekoliko zanimljivosti. Afrika i Grenland prikazaju se na Merkatorovoј projekciji u približno istim merama, dok je Afrika zapravo oko 14 puta veća. Takođe, dok Velika Britanija i Madagaskar na karti uzimaju slične dimenzije, u stvarnosti je Madagaskar 2 puta veći. Slična poređenja nepobitno vode do činjenice da su karte zapravo vrlo često metod manipulacije i kao što je već bilo reči, bitan deo političke sfere jedne države.

Literatura

- [1] Benitez J., Thome N.: „***Applications of differential geometry to cartography***“, Universidad Politecnica de Valencia, Departamento de Matematica, International Journal of Mathematical Education, January 2004, pages: 29-38
- [2] Borisov M, Banković R.: „***Zakrivljenost Zemljine površi i vidljivost između dva položaja***“, Vojnogeografski institut Beograd, Vojnotehnički glasnik, 2012., str.216-234
- [3] Borisov M.: „***Viša geodezija***“, FTN, Univerzitet u Novom Sadu, 2017.
- [4] Deakin R.: “***A guide to the mathematics of map projections***”, 2002, “Presented at the Victorian Tasmanian Survey Conference Across the Strait, Launceston Tasmania April 15-17, 2004”
- [5] Deetz C., Adams O.: „***Elements of map projection***“, United States Goverment Printing Office, Washington 1938.
- [6] Frančula N., Jovičić D., Žarinac-Frančula B., Lapaine M.: „***Ekvidistantno preslikavanje po meridijanima rotacionog elipsoida i obratno primjenom trigonometrijskih redova***“, Geodetski list 4, Zagreb 1994., str.351-359
- [7] Frančula N., Jovičić D., Žarinac-Frančula B., Lapaine M.: „***Konformno preslikavanje rotacionog elipsoida na sferu i obratno primjenom trigonometrijskih redova***“, Geodetski list 2, Zagreb 1992., str.181-189
- [8] Frančula N., Vučetić N., Tutić D.: “***Kartografske projekcije na internetu***”, Geodetski fakultet, Zagreb, septembar 2002., link: https://www.researchgate.net/publication/281150116_Kartografske_projekcije_na_internetu
- [9] Frančula N.: „***Kartografske projekcije***“, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Zagreb 2004.
- [10] Frankić K.: „***Problem optimalnih kartografskih projekcija***“, Geodetski glasnik broj 45, 2014., str. 5-28
- [11] Hak S., Uroš M.: „***Gausova i srednja zakrivljenost ploha***“, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, 2004.
- [12] Jovanović V., Đurđev B., Srđić Z., Stankov U.: „***Geografski informacioni sistemi***“, Univerzitet Singidunum, Univerzitet u Novom Sadu, Beograd 2012.

- [13] Monmonier M.: „**How to lie with maps**“, The University of Chicago Press, Chicago and London / „**Lying with maps**“, Statistical Science, Institut of Mathematical Statistics, 2005.
- [14] Ogrizović V.: „**Geodetska astronomija**“, Fakultet za građevinarstvo i geodeziju, Univerzitet u Ljubljani, 2007.
- [15] Pašić V.: „**Euklidska diferencijalna geometrija krivih i površi u tri dimenzije**“, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Tuzli, 2016.
- [16] Salihović A.: „**Primjenjena kartografija**“, Univerzitet u Sarajevu, 1974.
- [17] Sedlar J.: „**Diferencijalna geometrija - 2016/17**“, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije u Splitu
- [18] Simović A.: „**Terestrička navigacija**“, Školska knjiga, Zagreb 1987.
- [19] Slukan-Altić M.: „**Kartografski izvori između povijesti i politike ili kako lagati kartama**“, Institut društvenih znanosti Ivo Pilar, Zagreb 2002., str. 313-334
- [20] Snyder J., Voxland P.: „**An album of map projections**“, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, US Government Printing Office, 1989.
- [21] Supurović P.: „**Šta je datum geografske topografske karte?**“ - link: <https://pedja.supurovic.net/sta-je-datum-geografske-topografske-karte/>
- [22] Thomas P.: „**Conformal projections in geodesy and cartography**“, United States Goverment Printing Office, Washington 1952.
- [23] Tomić N.: „**Merkatorova i srodne kartografske projekcije**“, PMF, Sveučilište u Zagrebu, 2017.
- [24] Urošev N.: „**Uticaj deformacija kartografskih projekcija na stepen generalizacije sadržaja karata**“, Geografski institut „Jovan Cvijić“, Zbornik radova – Knjiga 59-1, 2009., str. 163-178
- [25] Wolfgang K.: „**Differential geometry: curves-surfaces-manifolds**“, second edition, American Mathematical Society, 2006.
- [26] „**Loksodroma i ortodroma**“, Sveučilište u Zadru, link: http://www.unizd.hr/portals/1/nastmat/terestrika/ae_terestrika5.pdf

Biografija



Dajana Jokić je rođena 13.09.1994. u Banja Luci. Osnovnu školu „Petar Kočić“ u Prijedoru završava 2009. godine kao nosilac Vukove diplome. Nakon toga upisuje gimnaziju „Sveti Sava“ u Prijedoru koju završava 2013. Iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet, smer Diplomirani profesor matematike. Po završetku osnovnih studija, 2017. godine upisuje se na smer Master profesor matematike.

Položivši sve ispite predviđene planom i programom navedenog studijskog programa, stiče pravo na odbranu ovog master rada.

Novi Sad, 2019.

Dajana Jokić

**UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA**

Redni broj

RBR

Identifikacioni broj

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani dokument

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor : Dajana Jokić

AU

Mentor: Milica Žigić, docent, PMF, UNS

MN

Naslov rada: Matematički aspekti u kartografiji

NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: Srpski/engleski

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2019

GO

Izdavač: **Autorski reprint**

IZ

Mesto i adresa: **Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad MA**

Fizički opis rada: **5/67/26/0/42/0/0**

(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)

FO

Naučna oblast: **Matematika**

NO

Naučna disciplina: **Diferencijalna geometrija**

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: **Matematička kartografija, metode preslikavanja elipsoida i sfere, rotacioni elipsoid, kartografske projekcije, parametrizacija, koordinate, Mercatorova projekcija, geografska širina i dužina, Gausova krivina, minimizacija deformacija projekcija, teorema Egregium**

PO

UDK:

Čuva se: **Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu**

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

Ovaj master rad sastoji se od pet poglavlja. Uvodni deo je posvećen osnovnim pojmovima iz teorije krivih i površi, diferencijalnog i integralnog računa i diferencijalne geometrije. U drugom i trećem poglavlju predstavljene su kartografske projekcije, njihove najbitnije karakteristike i deformacije istih. Svaka od navedenih projekcija data je svojom parametrizacijom, grafičkim prikazom i opisom postupka preslikavanja. U vezi sa deformacijama projekcija navodi se „Theorema Egregium“. Četvrto poglavlje je sažet pregled stanja kartografije savremenog doba dok zaključak predstavlja osvrt na sadržaj rada i

navodi neke zanimljivosti o veličinama pojedinih država na Merkatorovoj karti.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 06.06.2019.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: Dr Sanja Konjik, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: Dr Milica Žigić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Dr Ivana Vojnović, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

**UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION**

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

*Document type: **Monographic type***

DT

*Type of record: **Printed text***

TR

*Contents Code: **Master thesis***

CC

*Author: **Dajana Jokić***

AU

*Mentor: **Milica Žigić, PhD***

MN

*Title: **Mathematical aspects of cartography***

TI

*Language of text: **Serbian***

LT

*Language of abstract: **Serbian/English***

LA

*Country of publication: **Republic of Serbia***

CP

*Locality of publication: **Vojvodina***

LP

*Publication year: **2019.***

PY

Publisher: **Author's reprint**

PU

Publ. place: **Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences,
University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad**

PP

Physical description: **5/67/26/0/42/0/0**

(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)

PD

Scientific field: **Mathematics**

SF

Scientific discipline: **Differential geometry**

SD

Subject/Key words: **Mathematical cartography, methods of mapping ellipsoids and spheres, rotational ellipsoid, cartography projections, parametrization, coordinates, Mercator projection, longitude and latitude, Gaussian curve, minimization of projection deformations, theorema Egregium**

SKW

UC:

Holding data: **Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad**

HD

Note:

N

Abstract:

AB

This master thesis consists of five chapters. The introductory section is dedicated to the study of the theory of curves and surfaces, differential and integral calculus and differential geometry. The second and third chapters present the cartography projections and their most important characteristics and deformations. Each of these projections is given by its parameterization, graphical representation and description of the mapping process. In relation to the deformations of the projections "Theorema Egregium" is presented. The fourth chapter summarizes

the state of cartography in modern world and conclusion is a review of the content and some interesting facts about the sizes of states on the Mercator map.

Accepted by the Scientific Board on: **06.06.2019.**

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: Dr Sanja Konjik, Associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Mentor: Dr Milica Žigić, Assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Dr Ivana Vojnović, Assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad