



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU



Žužana Fekete

**Novi pristupi metričkim aspektima
cikloide i njoj srodnih krivih**

- master rad -

Mentor: dr Nevena Pušić

Novi Sad, 2012.

Sadržaj

Sadržaj.....	- 3 -
Glava I - Kriva generisana točkom	- 7 -
1.1. Uvod	- 7 -
1.2. Šta je cikloida?	- 8 -
1.3. Malo istorije	- 9 -
Glava II - Najvažnije osobine cikloide.....	- 11 -
Glava III - Krive srodne cikloidi.....	- 15 -
3.1. Hipocikloide.....	- 17 -
3.1.1. Osobine hipocikloide	- 19 -
3.1.2. Najpoznatije hipocikloide	- 21 -
3.1.3. Teorema dvostrukе generacije	- 25 -
3.2. Epicikloide	- 28 -
3.2.1. Osobine epicikloide	- 29 -
3.2.2. Najpoznatije epicikloide.....	- 32 -
3.3. Pericikloide	- 36 -
3.4. Familija trohoida	- 38 -
Glava IV - Površina ispod jednog svoda cikloide bez korišćenja integrala.....	- 40 -
4.1. Uvod	- 40 -
4.2. Ciklogoni	- 41 -
4.3. Kotrljajući jednakoststranični trougao	- 42 -
4.4 Kotrljajući kvadrat.....	- 42 -
4.5. Teorema o zbiru kvadrata rastojanja temena pravilnog mnogougla	- 43 -
4.6. Kotrljajući n-ugao.....	- 53 -
Glava V - Dužina luka cikloide bez korišćenja integrala	- 55 -
Glava VI - Dužina luka i površina ispod jednog svoda trohoide	- 59 -
Glava VII - Osobine srodne krive	- 63 -
7.1. Površina hipo- i epicikloide bez korišćenja integrala	- 64 -

7.2. Specijalni primeri	- 68 -
7.3. Dužina luka hipo- i epicikloide bez korišćenja integrala	- 73 -
7.4. Površina epi- i hipotrohoida	- 76 -
7.4. Elipsa	- 78 -
Zaključak	- 79 -

Predgovor

Glavna zamisao, kao profesora u srednjoj školi, bila mi je to da se ovaj rad može kasnije primenjivati u nastavi ali i u sekcijama i dodatnoj nastavi. Pošto smatram da je princip spiraliteta u podučavanju matematike najuspešnija metoda, trudila sam se da pronađem temu koja može zadovoljiti radoznalost učenika različitih starosnih doba. Suština principa spiraliteta se nalazi u tome što se, s vremena na vreme, pojavljuju određene tematske celine koje se mogu proučavati sa aktuelnim nastavnim gradivom uz odgovarajuća nastavna sredstva. Na ovaj način, učenici učvršćuju već prethodno stečena znanja, stiču nova saznanja i upoređuju različite načine rešavanja. Ovo im pomaže u boljem razumevanju, motiviše ih da na što elegantniji način rešavaju zadatke povezivanjem različitih matematičkih područja.

Prva tri poglavlja rada bave se cikloidom i srodnim krivama. Pored njihovog kratkog istorijskog pregleda nalaze se i definicije, zatim detaljan postupak izrade parametarskih jednačina, najosnovnije karakteristike kriva i njihovo dokazivanje. Da bismo mogli ove tvrdnje predstaviti učenicima potrebno im je predznanje iz trigonometrije, osnova koordinatne geometrije, graničnih vrednosti, integralnog računa kao i još mnogo toga. Iz tog razloga je ovo težak zadatak i za maturante gimnazija.

Glavni deo rada počinje četvrtim poglavlјem u kom predstavljam nove pristupe izračunavanju površine ispod jednog svoda krive, a koje se zasniva na radovima Toma Apostola i Mamikon Mnatsakaniana. Posebnost ovog pristupa je u tome što ne zahteva veliko matematičko predznanje, samo detaljno znanje mnogouglova i kruga. Takozvani ciklogoni - kriva

koja se dobija kao trag jednog temena pravilnog mnogougla dok se kotrlja po pravi - i izračunavanje njegove površine je razumljivo i interesantno svakom prvaku srednje škole, iako generalisanje je za njih novina. Sam proces nastajanja cikloida iz reda ciklogona može biti vidljiv uvod u granične vrednosti, što je za njih nepoznanica.

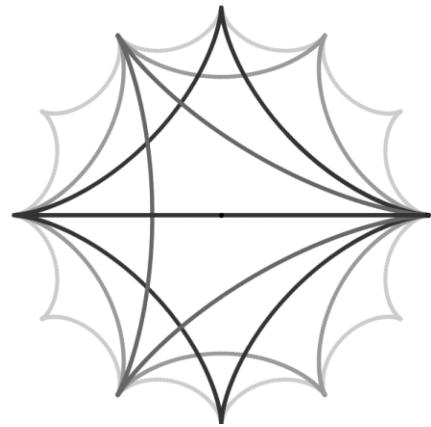
U petom poglavlju određujemo , na sličan način, dužine luka već pomenute krive.

Sa osobinama srodnih kriva se bavi šesto i sedmo poglavlje. Postupak je isti ali se , umesto po pravi, mnogouga kotrlja oko i unutar drugih mnogouglova, a umesto temena, tačka koja ostavlja trag može biti proizvoljna unutrašnja ili spoljašnja tačka mnogougla. U zavisnosti od odnosa broja stranica možemo približiti poznate krive kao što su astroida, deltoida, kardioida, pa čak i elipsa. Pošto je crtanje ovih kriva dosta komplikovano veliku korist možemo izvući iz kompjuterskih programa kao što su „Euklides“, „Mathematica“ ili „GeoGebra“. U „Mathematici“ i „Euklidesu“ jednom jedinom komandom možemo nacrtati željenu krivu pomoću parametarskih jednačina, dok u „GeoGebri“ možemo modelizovati proces okretanja pošto krivu prikazujemo uz pomoć podnožnice. Poslednje navedeno je korisnije u nastavi iz razloga što savršeno razumevanje gradiva nije dovoljno - neophodni su i kreativnost i preciznost.

Ovaj rad sadrži najbitnije osobine cikloide i njene srodne krive, što bih htela da interpretiram na takav način, s kojim bih lako mogla da iskoristim u nastavi matematike.

Novi Sad, 2012

Žužana Fekete



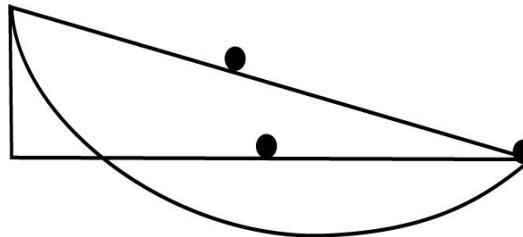
Glava I

Kriva generisana točkom

1.1. Uvod

Johan Bernuli¹ je 1696. godine postavio jedno interesantno pitanje bratu Jakobu²:

“*Koja je ta kriva kojom će telo uz uticaj gravitacione sile stići od tačke A do niže tačke B za najkraće vreme?*”



Slika 1. Brachistochron-ova problema

Zadatak su od grčke reči brachistochrone (koje znači najkraće vreme), nazvali Brahistokronovim problemom.

Kod rešavanja problema došli su i do zaključka, da kad pustimo telo iz bilo koje tačke ove krive, telu će uvek trebati istovremenski period da bi stiglo do najniže tačke te krive.

Jakob je tačno odgovorio : “Rešenje je cikloida! “

¹ Johann Bernoulli (1667-1748), švajcarski matematičar

² Jacob Bernoulli (1654-1705), švajcarski matematičar i naučnik

1.2. Šta je cikloida?

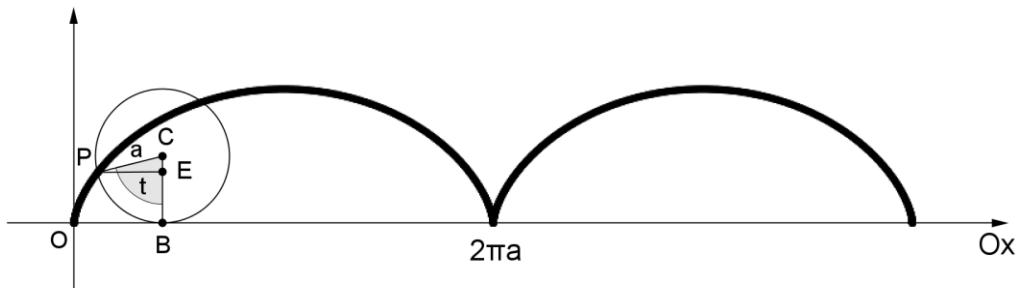
Cikloida je kriva koja se može opisati proizvoljnom tačkom periferije kruga koji se kotrlja po pravoj bez klizanja.

Neka je Ox (osa pravouglog Dekartovog³ koordinatnog sistema) prava, po kojoj se kotrlja krug K poluprečnika a . Neka je u početnom položaju kruga tačka O dodirna tačka kruga K i ose Ox . Označimo sa t ugao za koji se obrnuo krug počev od svog početnog položaja, tj. $t = \angle PCB$. Pošto se krug kotrlja bez klizanja, dobijamo rezultat da je duž OB jednaka luku $\widehat{PB} = a \cdot t$.

Koordinate tačke P , koje opisuje cikloidu, računamo na sledeći način:

$$\begin{aligned} x &= OB - PE & y &= CB - CE \\ x &= a(t - \sin t) & y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}$$

To su jednačine cikloide u parametarskom obliku.



Slika 2. Cikloida

Pod jednim svodom cikloide podrazumevamo deo krive koju posmatrana tačka P opisuje sa jednim obrtajem kruga K .

³ René Descartes (1596-1650), francuski matematičar, filozof i naučnik

1.3. Malo istorije

Jedna od najpoznatijih krivi u istoriji matematike je cikloida. Cikloidu je prvi proučavao de Kusu⁴, kasnije Mersen⁵. Kriva je dobila ime po Galileju⁶ 1599. godine. On je pokušao da odredi površinu ispod jednog luka, ali bezuspešno. Matematički metod nije uspeo da pronađe, te je izrezao komadiće metala u obliku površine ispod cikloide i uporedivao težinu sa težinom kruga koji generiše cikloidu. Došao je do rezultata da je cikloida teža oko tri puta od kruga, ali je on odbio da prihvati ovaj rezultat jer je verovao da odnos između ove dve težine, treba da bude iracionalan. Ispostavilo se da je Galilejev eksperiment zaista dao tačan rezultat.

Roberval⁷ je 1628. godine odredio površinu cikloide koristeći novi metod “beskonačno malih”, koji je razvijen od strane Kavalijerija⁸, Ferma⁹ i Dekarta, kao i Robervala, međutim svaki od njih je pronašao drugačiji metod za povlačenje tangente na ovu krvu. Toričeli¹⁰, učenik Galileja je 1644. godine objavio svoje otkriće o površinama i tangentama cikloida.

Cikloida je, u tom dobu, bila jedna od najpopularnijih problema matematike, mnogi sporovi i ljubomore su nastale vezani za nju, zato je pastala poznata po imenu “Helena geometričara”.

U skladu sa Arhimedovom tradicijom, Hajgens¹¹, Lajbnic¹² i Johan Bernuli su tražili posebne delove regionalne cikloide čije su površine jednostavnog pravolinijskog oblika. *Slika 3* ilustruje njihovu zajedničku stavku. Svaki cikloidni luk je opisan jednim pravougaonikom koji je prepolovljen po horizontalnoj srednjoj liniji, sa kotrljajućim krugom u centru.

⁴ Nicholas de Cusa (1401 - 1464), nemački filozof, matematičar i astronom

⁵ Marin Mersenne (1588 – 1648), francuski teolog, matematičar i filozof

⁶ Galileo Galilei (1564 – 1642), italijanski matematičar, fizičar i astronom

⁷ Gilles Personne de Roberval (1602 – 1675), francuski matematičar

⁸ Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647), italijanski matematičar

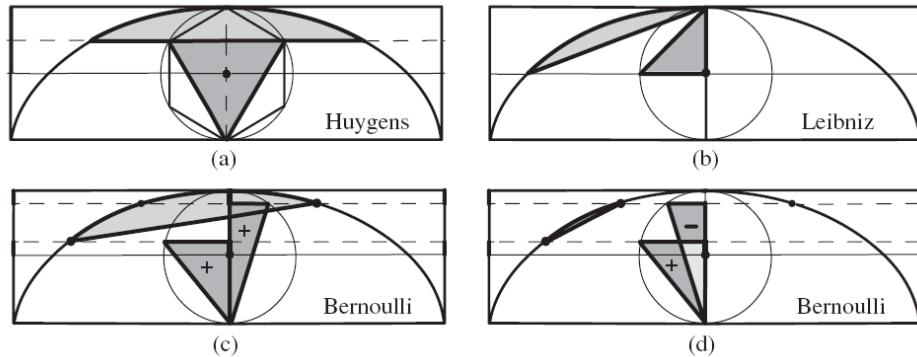
⁹ Pierre de Fermat (1601 - 1665), francuski matematički amater

¹⁰ Evangelista Torricelli (1608 - 1647), italijanski matematičar i fizičar

¹¹ Christiaan Huygens (1629 – 1695), holandski matematičar, fizičar i filozof

¹² Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), nemački matematičar i filozof

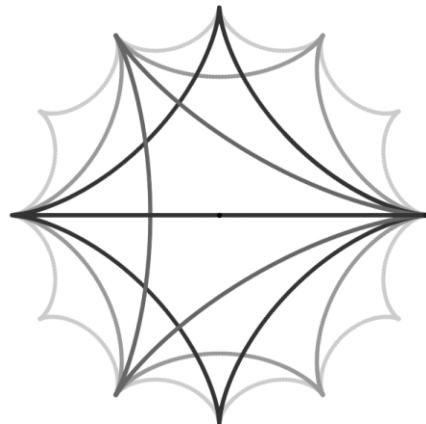
Godine 1658. Hajgens je pokazao da deo cikloide odsečen isprekidanom linijom na *slici 3(a)*, koja prepolovljava gornju polovinu pravougaonika, ima površinu jednaku polovini upisanog pravilnog šestougla u kotrljajući krug, ili ekvivalentno - jednaka površini osenčenog jednakostraničnog trougla upisanog u isti krug.



Slika 3. Pojedini delovi regiona cikloide

Dve decenije kasnije, godine 1678, Lajbnic je dokazao da segment cikloida na *slici 3(b)* ima istu površinu kao i osenčeni pravougli trougao, čiji su kraci jednaki poluprečniku kruga.

Nakon još dve decenije, godine 1699, Bernuli je proširio oba rezultata, koristeći dve horizontalne isprekidane linije, jednako udaljene od srednje i gornje linije kao što je na *slici 3(c)* i *3(d)*. On je dokazao da je površina segmenta cikloida na *slici 3(c)* zbir površina dva osenčena pravougla trougla, dok je manji segment cikloide na *slici 3(d)* predstavlja razliku površina pravouglih trougla. Dijagram na *slici 3(c)* se pojavljuje na naslovnim stranicama sva četiri toma sabrana dela Bernulija.



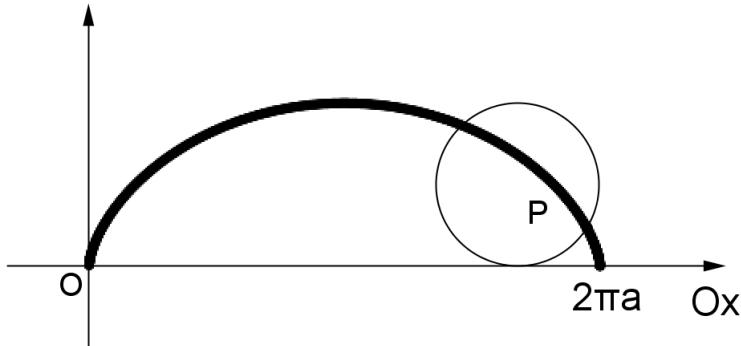
Glava II

Najvažnije osobine cikloide

Teorema 2.1. *Dužina luka jednog svoda cikloide je $8a$, gde je a poluprečnik kruga.*

Dokaz: Za dužinu luka krive imamo formulu:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$



Slika 4. Dužina luka cikloide

Iz $x = a(t - \sin t)$ dobijamo, da je prvi izvod $x' = a(1 - \cos t)$, a iz $y = a(1 - \cos t)$, da je $y' = a \sin t$.

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= (a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2 \\ &= a^2(1 - 2 \cos t + \cos^2 t) + a^2 \sin^2 t \\ &= a^2(1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^2(2 - 2 \cos t) = 2a^2(1 - \cos t) \\
&= 2a^2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2} = 4a^2 \cdot \sin^2 \frac{t}{2}
\end{aligned}$$

Sada se vratimo u integralu:

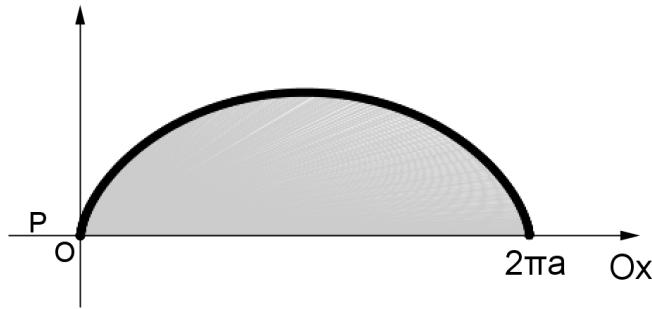
$$\begin{aligned}
L &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
&= \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = \\
&= -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4a \cdot (-1 - 1) = 8a
\end{aligned}$$

Teorema 2.2. Površina ograničena jednim lukom cikloide i osom Ox je $3a^2\pi$, gde je a poluprečnik kruga.

Dokaz: Posmatrajmo prvi luk cikloide, kada je $x \in [0, 2a\pi]$. Kako je $x = a(t - \sin t)$, dobijamo da je $dx = a(1 - \cos t)dt$.

$$x = 0 \Rightarrow a(t - \sin t) = 0 \Rightarrow t = \sin t \Rightarrow t = 0$$

$$x = 2a\pi \Rightarrow 2a\pi = a(t - \sin t) \Rightarrow 2\pi = t - \sin t \Rightarrow t = 2\pi$$



Slika 5. Površina ispod jednog svoda cikloide

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^{2a\pi} y dx = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))) dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos(2t)\right) dt \\
&= a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin(2t)\right) \Big|_0^{2\pi} = a^2 \frac{3}{2} 2\pi = 3\pi a^2
\end{aligned}$$

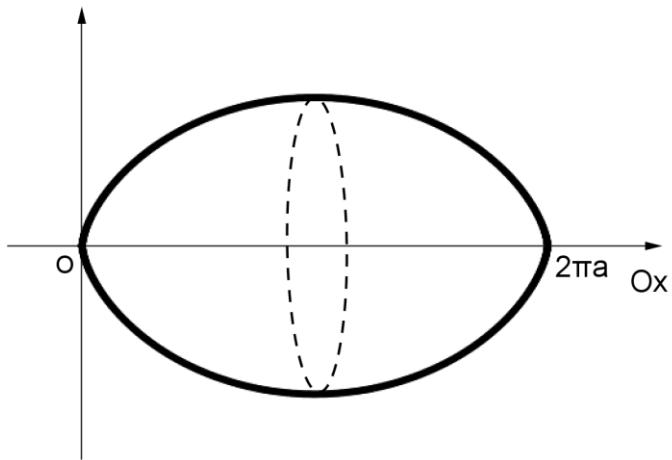
Teorema 2.3. Zapremina tela nastalog rotacijom jednog luka cikloide oko ose Ox je $5a^3\pi^2$, gde je a poluprečnik kruga.

Dokaz:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{2a\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} (a(1 - \cos t))^2 a(1 - \cos t) dt \\
&= \pi \int_0^{2\pi} (a(1 - \cos t))^3 dt = a^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt \\
&= a^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos^3 t) dt
\end{aligned}$$

Prva dva su tablična, zato rešavamo samo poslednja dva.

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 t &= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t\right) \\
&= \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \sin 2t
\end{aligned}$$

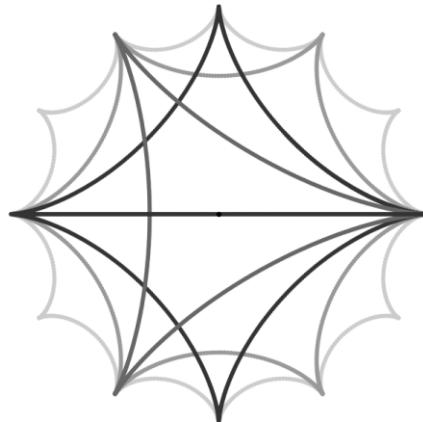


Slika 6. Zapremina obrtnog tela

$$\begin{aligned}
 \int \cos^3 t \, dt &= \int \cos t \cos^2 t \, dt = \int \cos t (1 - \sin^2 t) \, dt \\
 &= \int \cos t \, dt - \int \cos t \sin^2 t \, dt = \sin t - \int z^2 \, dz \\
 &= \sin t - \frac{z^3}{3} = \sin t - \frac{\sin^3 t}{3}
 \end{aligned}$$

gde smo koristili smenu $\sin t = z$, $\cos t \, dt = dz$.

$$V = a^3 \pi \left(t - 3 \cos t + 3 \left(\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \right) - \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = 5a^3 \pi^2$$



Glava III

Krive srodne cikloidi

Grčki matematičar Hiparh (oko 140 pne.) je bio prvi koji je koristio epicikloidu u njegovoj astronomskoj teoriji o epiciklima, u kojem je razvio model za kretanje Meseca.

Kasnije Ptolomej (oko 130 pne), grčki astronom i geograf, koristio je kombinacije epicikla za predviđanje položaja Sunca, Meseca i planeta. Proučavajući kretanje planeta došli su do krivih koje se dobijaju kada svemirsko telo učestvuje istovremeno u dve rotacije, krećući se po krugu čiji se centar kreće po drugom krugu. Ove krive se mogu opisati kao putanje fiksirane tačke kruga K koji se bez klizanja kotrlja po nepokretnom krugu K_0 . Zavisno od radijusa a i b krugova K_0 i K i od toga da li krug K rotira izvan ili unutar kruga K_0 imamo razne krive.

- Ako je $a > b$ i krug K se kotrlja iznutra po krugu K_0 , odgovarajuće krive zovemo *hipocikloide*.
- Ako se krug K kotrlja spolja po krugu K_0 , odgovarajuće krive zovemo *epicikloide*.

Ako je pak $a < b$ i K se kotrlja spolja po K_0 dobijamo specijalne epicikloide, koje zovemo *pericikloide*.

Ako je odnos poluprečnika a i b kod epi-, hipo- i pericikloida iracionalan, tačke „krive“ leže gusto i ispunjavaju kružni prsten oko nepokretnog kruga ili unutar njega, pa ne postoji neprekidna funkcija koja bi zadavala jednačinu krive u implicitnom obliku. U tom slučaju se i ne može govoriti o krivoj.

Ptolemejova teorija se ispostavila netačnom kada je Kopernik¹³ (1514. godine) postavio teoriju da je centar univerzuma Sunce, a ne Zemlja.

Konstrukcija epicikloide je prvi put zabeležena 1525. godine od strane Direra¹⁴, nemačkog umetnika. Direr je objavio ove i još mnoge druge krive u prvom nemačkom matematičkom tekstu.

Dezarg¹⁵ (1640. godine) je bio prvi koji je stavio epicikloidu u upotrebu, u sistem koji se koristi za podizanje nivoa vode u blizini Pariza. Sledeća praktična upotreba epicikloida je bila za rad mehaničkih zupčanika, iako se ne zna ko je prvi došao do te ideje. Romer¹⁶ je tražio korist cikloidalnih krivi u proizvodnji zubaca zupčanika 1674. godine.

Epicikloida je dobila ime po Romeru 1674. godine.

¹³ Nicolaus Copernicus (1473 – 1543), nemački astronom

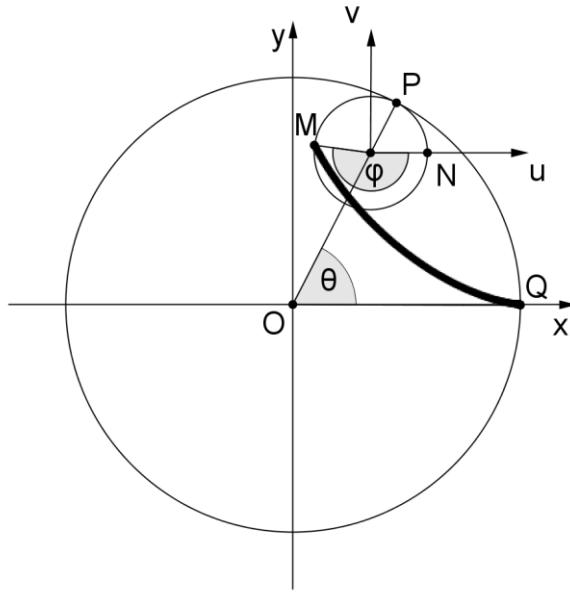
¹⁴ Albrecht Dürer (1471 – 1528), nemački slikar

¹⁵ Gérard Desargues (1591–1661), francuski matematičar i inženjer

¹⁶ Olaus Roemer (1644 –1710), danski astronom

3.1. Hipocikloide

Hipocikloidu opisuje tačka na kružnici koja se, bez trenja kotrlja sa unutrašnje strane druge kružnice.



Slika 7. Hipocikloida

Prepostavimo da se po unutrašnjosti kružnice K_0 poluprečnika a kotrlja bez trenja kružnica K poluprečnika b , $b < a$. Koordinatni početak ćemo postaviti u centar velike kružnice K_0 , a malu kružnicu K ćemo postaviti tako da dodiruje veliku kružnicu K_0 sa unutrašnje strane u tački Q preseka sa x osom. Posmatraćemo putanju koju opisuje tačka Q ; kada se mala kružnica K ravnomerno kotrlja u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu. Prepostavimo da je, posle izvesnog vremena t ta tačka prešla u tačku $M(x,y)$.

Uslov da je kotrljanje bez trenja, znači da je dužina $a\theta$ luka \widehat{QP} velike kružnice jednaka dužini $b(\theta + \varphi)$ luka \widehat{PNM} male kružnice. Dakle:

$$a\theta = b(\theta + \varphi) .$$

S druge strane , ukoliko se mala kružnica ravnomerno kotrlja znači da je pređeni put $|\widehat{QP}|$ proporcionalan vremenu t . To znači da je $a\theta = kt$; pri čemu je k brzina kotrljanja. Dakle, ako uzmemos da se mala kružnica kotrlja za a dužnih jedinica u jedinici vremena dobijamo $\theta = t$; pa se, dakle, ugao θ može tretirati kao vreme.

Odredimo sada koordinate tačke M u koordinatnom sistemu xy :

Koordinate centra male kružnice na kojoj se nalazi tačka M su:

$$((a - b) \cos \theta, (a - b) \sin \theta).$$

Postavimo koordinatni sistem uv tako da mu koordinatni početak bude u centru te male kružnice, a koordinatne ose paralelne sa x odnosno sa y osom. U tom koordinatnom sistemu koordinate u i v tačke M su :

$$u = b \cos(2\pi - \varphi) = b \cos \varphi$$

$$v = b \sin(2\pi - \varphi) = -b \sin \varphi.$$

Iz uslova $a\theta = b(\theta + \varphi)$ sledi da je

$$\varphi = \frac{a - b}{b} \theta,$$

tako da parametarske jednačine hipocikloide u koordinatnom sistemu xy su sledeći :

$$x = (a - b) \cos \theta + b \cos \left(\frac{a - b}{b} \theta \right)$$

$$y = (a - b) \sin \theta - b \sin \left(\frac{a - b}{b} \theta \right).$$

U zavisnosti od poluprečnika male i velike kružnice mogu se dobiti razni oblici hipocikloide. Pre svega zanima nas kada je hipocikloida zatvorena kriva. Hipocikloida će biti zatvorena kriva ako tačka M kotrljanjem padne ponovo u početni položaj. Dakle, da bi hipocikloida bila zatvorena kriva potrebno je i dovoljno da je taj odnos $a : b$ racionalan broj .

Pod jednim svodom hipocikloide podrazumevamo deo krive koju posmatrana tačka M opisuje jednim obrtajem kruga K unutar kruga K_0 .

Ako je odnos $a : b$ ceo broj, koji ćemo označiti sa s , onda možemo pričati o dužini luka i površini hipocikloide. Pod dužinom luka hipocikloide podrazumevamo dužinu s svodova, tj dužinu krive koju napiše posmatrana tačka dok ne stigne do početnog položaja. Površina hipocikloide je površina koja je ograničena sa s uzastopnim svodovima hipocikloide.

3.1.1. Osobine hipocikloide

Teorema 3.1. *Dužina luka hipocikloide je $8b(s - 1)$, gde je b poluprečnik kruga koji se kreće po unutrašnjosti nepokretnog kruga poluprečnika a i $s=a/b$ je broj svodova hipocikloide.*

Dokaz: Za dužinu luka krive imamo formulu $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} d\theta$.

$$\begin{aligned} x' &= -(a - b) \sin \theta - (a - b) \sin \left(\frac{a - b}{b} \theta \right) = \\ &= -(a - b) \left(\sin \theta + \sin \left(\frac{a - b}{b} \theta \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= (a - b) \cos \theta - (a - b) \cos \left(\frac{a - b}{b} \theta \right) = \\ &= (a - b) \left(\cos \theta - \cos \left(\frac{a - b}{b} \theta \right) \right) \end{aligned}$$

$$x'^2 = (a - b)^2 \left[\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \sin \left(\frac{a - b}{b} \theta \right) + \sin^2 \left(\frac{a - b}{b} \theta \right) \right]$$

$$y'^2 = (a - b)^2 \left[\cos^2 \theta - 2 \cos \theta \cos \left(\frac{a - b}{b} \theta \right) + \cos^2 \left(\frac{a - b}{b} \theta \right) \right]$$

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= (a - b)^2 \left[2 + 2 \left[\sin \theta \sin \left(\frac{a - b}{b} \theta \right) - \cos \theta \cos \left(\frac{a - b}{b} \theta \right) \right] \right] = \\ &= 2(a - b)^2 \left[1 - \cos \left(\theta + \frac{a - b}{b} \theta \right) \right] = \\ &= 4(a - b)^2 \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{a}{b} \theta \right) \right) = 4(a - b)^2 \sin^2 \left(\frac{a\theta}{2b} \right) \end{aligned}$$

Na osnovu ovoga dobijamo da je dužina luka jednog svoda hipocikloide:

$$\begin{aligned}
 L'_h &= \int_0^{\frac{2\pi b}{a}} \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} d\theta = 2(a-b) \int_0^{\frac{2\pi b}{a}} \sin\left(\frac{a\theta}{2b}\right) d\theta = \\
 &= 2(a-b) \frac{2b}{a} \left(-\cos\frac{a\theta}{2b} \right) \Big|_0^{\frac{2\pi b}{a}} = \frac{4b(a-b)}{a} \left(\cos 0 - \cos\frac{2ab\pi}{2ab} \right) = \\
 &= \frac{4b(a-b)}{a} \cdot (1 - (-1)) = \frac{8b(a-b)}{a}
 \end{aligned}$$

Dužinu luka s svodova hipocikloide ćemo dobiti na sledeći način:

$$L_h = s \cdot L'_h = \frac{a}{b} \cdot \frac{8b(a-b)}{a} = 8(a-b) = 8b(s-1).$$

Teorema 3.2. *Površina hipocikloide je $\pi b^2(s-1)(s-2)$, gde je b poluprečnik kruga koja se kreće po unutrašnjosti stalnog kruga poluprečnika a i $s=a/b$ je broj svodova hipocikloide.*

Dokaz: Računaćemo pomoću Grinove teoreme:

$$\begin{aligned}
 xy' - yx' &= \\
 &= \left[(a-b) \cos \theta + b \cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right) \right] \cdot (a-b) \left[\cos \theta - \cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right) \right] \\
 &\quad + \left[(a-b) \sin \theta - b \sin\left(\frac{a-b}{b}\theta\right) \right] \cdot (a-b) \left[\sin \theta + \sin\left(\frac{a-b}{b}\theta\right) \right] = \\
 &= ((a-b)^2 - b(a-b)) \left[1 + \sin \theta \sin\left(\frac{a-b}{b}\theta\right) - \cos \theta \cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right) \right] \\
 &= ((a-b)^2 - b(a-b)) \left[1 - \cos\left(\theta + \frac{a-b}{b}\theta\right) \right] \\
 &= 2(a^2 - 3ab + 2b^2) \sin^2\left(\frac{a\theta}{2b}\right).
 \end{aligned}$$

Nakon toga dobijamo površinu ispod jednog svoda:

$$\begin{aligned}
P_h' &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi b}{a}} (xy' - yx') d\theta = (a^2 - 3ab + 2b^2) \int_0^{\frac{2\pi b}{a}} \sin^2 \left(\frac{a\theta}{2b} \right) d\theta \\
&= (a^2 - 3ab + 2b^2) \frac{2b}{a} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{a\theta}{2b} - \frac{1}{4} \sin \frac{a\theta}{b} \right] \Big|_{0}^{\frac{2\pi b}{a}} \\
&= \pi b \frac{(a^2 - 3ab + 2b^2)}{a} = \pi \frac{(a^2 - 3ab + 2b^2)}{s}.
\end{aligned}$$

Kako je $s = \frac{a}{b}$ ceo broj, površina ispod s svodova je jednaka:

$$\begin{aligned}
P_h &= s \cdot P_h' = s\pi \frac{(a^2 - 3ab + 2b^2)}{s} = \pi(a^2 - 3ab + 2b^2) \\
&= \pi b^2(s - 1)(s - 2).
\end{aligned}$$

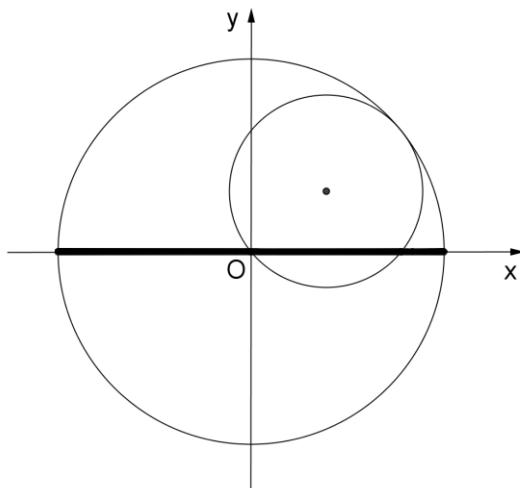
3.1.2. Najpoznatije hipocikloide

Navećemo sada nekoliko zanimljivih specijalnih slučajeva.

- $a=2b, s=2$. U ovom slučaju jednačine hipocikloide (dijametar) glase:

$$x = 2b \cos \theta$$

$$y = 0,$$



Slika 8. Dijametar

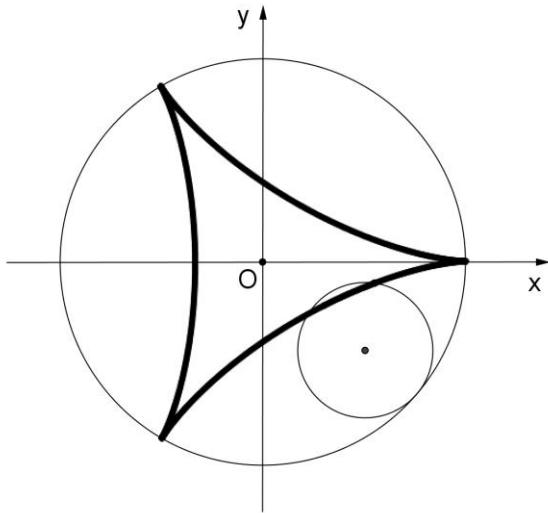
što znači da tačka na kotrljajućem krugu osciluje po prečniku velike kružnice. Ovo je jedan od najlepših modela koje pokazuje kako pretvoriti kružno kretanje u pravolinijsko i obrnuto.

Dužina luka te hipocikloide je $8b$.

- $a=3b, s=3$. Dobijamo trouglastu hipocikloidu (deltoidu, Štajnerovu¹⁷ krivu), sa jednačinama :

$$x = 2b \cos \theta + b \cos 2\theta$$

$$y = 2b \sin \theta - b \sin 2\theta.$$

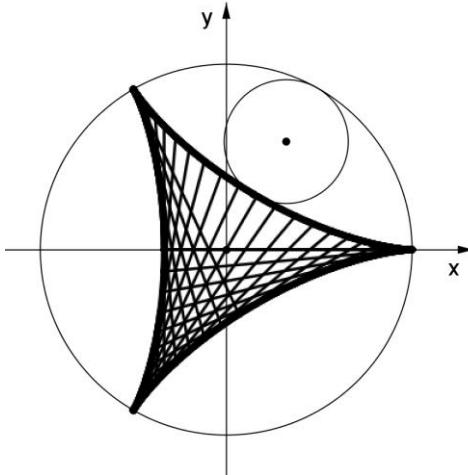


Slika 9. Deltoida

Deltoida ima zanimljivo svojstvo, da odsečci njenih tangentih unutar krive imaju konstantnu dužinu tj. jedan štap te dužine bi se mogao rotirati unutar nje stalno je dodirujući.

Deltoida ima površinu $2\pi b^2$ i dužinu luka $16b$.

¹⁷ Jakob Steiner (1796 -1863), švajcarski matematičar

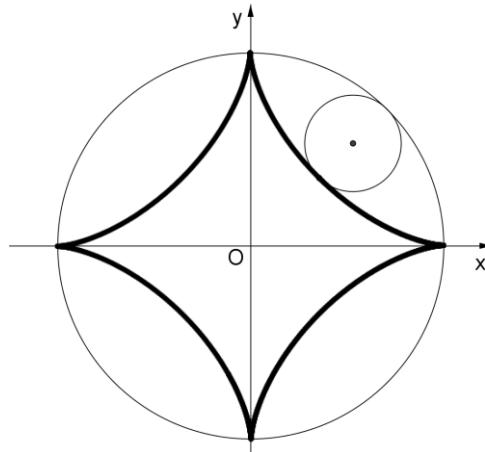


Slika 10. Ilustracija poznate osobine deltoide

- $a=4b, s=4$. U ovom slučaju ćemo dobiti astroidu, sa parametarskim jednačinama:

$$x = 3b \cos \theta + b \cos 3\theta = a \cos^3 \theta$$

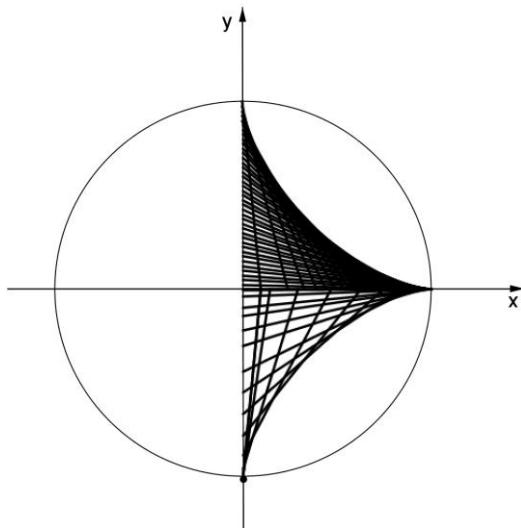
$$y = 3b \sin \theta - b \sin 3\theta = a \sin^3 \theta.$$



Slika 11. Astroida

Poreklo imena astroida može se naći u grčkoj reči (asteri) čije je značenje zvezda. Ova kriva je ranije nazivana i kubocikloidom i paraciklom. Ima slično svojstvo kao deltoide: ako se odsečak fiksirane dužine kreće u

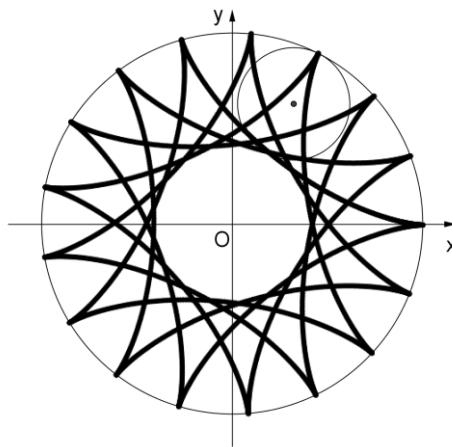
ravni tako da njegovi krajevi klize po koordinatnim osama, obvojnica dobijene familije odsečaka je astroide.



Slika 12. Ilustracija pozne osobine astroide

Površina astroide je $6\pi b^2$, a dužina luka je $24b$.

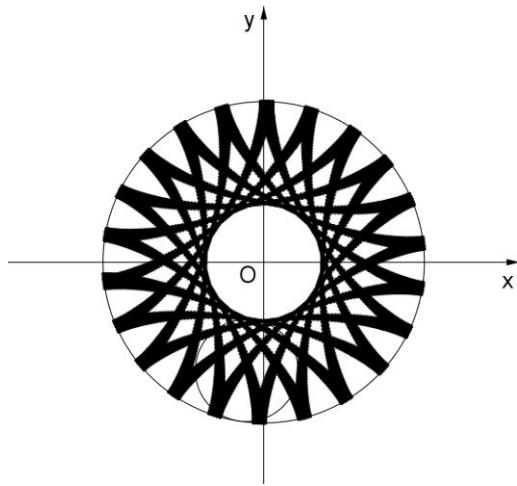
- Za $a=17$, $b=5$ i $s = \frac{17}{5}$, dobijamo hipocikloidu, koja je prikazana na slici 13.



Slika 13. Hipocikloida : $a=17$, $b=5$

Mali krug poluprečnika b pet puta treba da obide veliki krug poluprečnika a da bi fiksirana tačka došla u početni položaj, tj da bi hipocikloida bila zatvorena.

- $a = \pi$, $b = 1$ i $s = \pi$. Pošto je odnos prečnika iracionalan, hipocikloida se nikada neće zatvoriti. Ako bi nastavili kotrljati krug do beskonačnosti, dobili bi jedan prsten.



Slika 14. Posle 50 krugova.

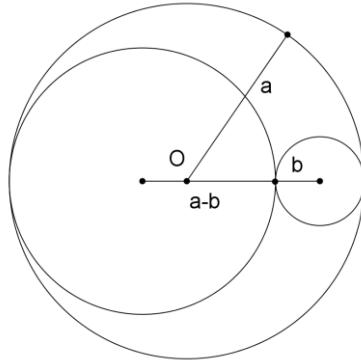
3.1.3. Teorema dvostrukе generacije

Godine 1725, Daniel Bernuli¹⁸ je otkrio jedno izvanredno svojstvo hipocikloida koje se danas naziva "teoremom dvostrukе generacije".

Teorema 3.3. *Krug poluprečnika b , koji se kreće po unutrašnjosti kruga poluprečnika a , generiše istu hipocikloidu kao i krug poluprečnika $a - b$ krećući se unutar istog kruga.*

¹⁸ Daniel Bernoulli (1700-1782), švajcarski matematičar

Ako označimo prvu hipocikloidu sa $H(a,b)$ a drugu sa $H(a,a-b)$ na osnovu teoreme dobijamo da je $H(a,b) = H(a,a-b)$. Primetimo da su ova dva unutrašnja kruga komplementarna u odnosu na nepokretan krug, tj. zbir njihovih poluprečnika jednak je poluprečniku nepokretnog kruga.



Slika 15. Teorema dvostrukе generacije

Dokaz teoreme: iskoristićemo parametarske jednačina hipocikloide $H(a,b)$:

$$x = (a - b) \cos \theta + b \cos \left(\frac{a - b}{b} \theta \right)$$

$$y = (a - b) \sin \theta - b \sin \left(\frac{a - b}{b} \theta \right).$$

Zamenjujući $b' = a - b$ i $\varphi = \frac{a-b}{b} \theta$, odnosno $\theta = \frac{b\varphi}{a-b} = \frac{a-b'}{b'} \varphi$ u ovu jednačinu, dobijamo:

$$x = b' \cos \left(\frac{a - b'}{b'} \varphi \right) + (a - b') \cos \varphi$$

$$y = b' \sin \left(\frac{a - b'}{b'} \varphi \right) - (a - b') \sin \varphi.$$

Sada zamenimo redosled sabiraka:

$$x = (a - b') \cos \varphi + b' \cos \left(\frac{a - b'}{b'} \varphi \right)$$

$$y = -(a - b') \sin \varphi + b' \sin \left(\frac{a - b'}{b'} \varphi \right).$$

Ako u drugoj jednačini koristimo poznate trigonometrijske identitete (svođenje na prvi kvadrat):

$$\cos(-\varphi) = \cos \varphi$$

$$\sin(-\varphi) = -\sin \varphi,$$

i zamenimo parametar $-\varphi$ na ω onda ćemo dobiti parametarske jednačine hipocikloide $H(a,a-b)$, koje su potpuno identične sa početnim jednačinama:

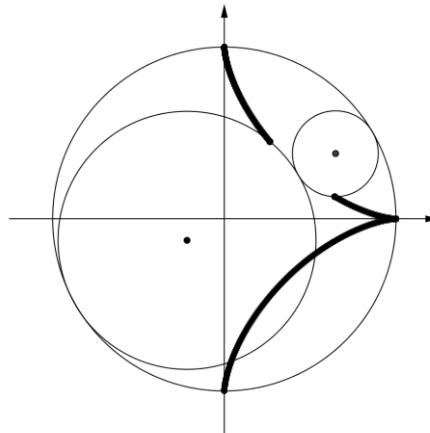
$$x = (a - b') \cos \omega + b' \cos \left(\frac{a - b'}{b'} \omega \right)$$

$$y = (a - b') \sin \omega - b' \sin \left(\frac{a - b'}{b'} \omega \right),$$

što znači da ja hipocikloida $H(a,a-b)$ generiše isti skup tačaka kao i $H(a,b)$.

Tako smo dokazali teoremu dvostrukе generacije.

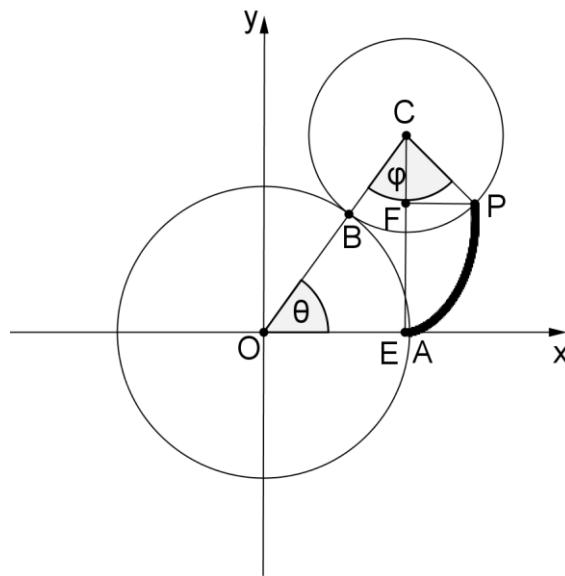
Kao posledica ove teoreme imamo da se istu astroidu može dobiti i rotiranjem kruga poluprečnika $\frac{3a}{4}$ i rotiranjem kruga poluprečnika $\frac{a}{4}$ unutar fiksiranog kruga poluprečnika a .



Slika 16. Dve kružnice generišu istu astroidu

3.2. Epicikloide

Izvedimo jednačine epicikloide. U centar stalnog kruga K_0 poluprečnika $OA = a$ postavimo pravougli Dekartov koordinatni sistem. Tačka $P(x,y)$ pokretnog kruga K poluprečnika $CB = b$ u početku obrtanja imala je početni položaj A na osi Ox . Pošto kod ovog kretanja nema klizanja, lukovi \widehat{AB} i \widehat{BP} su jednakih i zato je $\theta \cdot a = \varphi \cdot b$, pri čemu je φ ugao između duži OC koja spaja centre krugova i poluprečnika CP kružnice K . (dva poluprečnika pokretnog kruga: poluprečnika dodirne tačke B i poluprečnika tačke P , koja opisuje epicikloidu.)



Slika 17. Epicikloida

Na osnovu slike možemo zaključiti da je apscisa tačke P :

$$x = OE + FP = (a + b) \cos \theta + b \sin(\angle FCP).$$

Koristeći adicione formule dobićemo da je $\sin(\angle FCP) = -\cos(\varphi + \theta)$, jer je $\angle FCP = \angle BCP - \angle OCE$ i $\angle OCE = \frac{\pi}{2} - \theta$, pa koordinatu x dobijamo kao sledeću funkciju veličine φ :

$$x = (a + b) \cos \theta - b \cos(\varphi + \theta)$$

i slično bismo dobili y koordinatu :

$$y = (a + b) \sin \theta - b \sin(\varphi + \theta).$$

Iz razloga što među uglovima φ i θ važi odnos $\theta \cdot a = \varphi \cdot b$, možemo φ izraziti preko θ i na taj način dobijamo parametarske jednačine epicikloide:

$$\begin{aligned} x &= (a + b) \cos \theta - b \cos \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) \\ y &= (a + b) \sin \theta - b \sin \left(\frac{a+b}{b} \theta \right). \end{aligned}$$

Slično kao kod hipocikloide, pod jednim svodom epicikloide podrazumevamo deo krive koju posmatrana tačka P opisuje sa jednim obrtajem kruga K oko kruga K_0 . Ako je odnos poluprečnika kružnice $a : b$ racionalan broj , tada je kriva zatvorena. Ukoliko je odnos $a : b$ ceo broj s , možemo pričati o dužini luka i površini epicikloide. Pod dužinom luka epicikloide podrazumevamo dužinu s svodova . Površina epicikloide je površina koja je ograničena sa s uzastopnim svodovima epicikloide .

3.2.1. Osobine epicikloide

Teorema 3.4. *Dužina luka epicikloide je $8b(s + 1)$, gde je b poluprečnik kruga koja se kreće po spoljašnjosti nepokretnog kruga poluprečnika a i $s=a/b$ je broj svodova epicikloide.*

Dokaz: Za izračunavanje dužine luka krive imamo formulu:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} d\theta.$$

$$\begin{aligned} x' &= -(a + b) \sin \theta + (a + b) \sin \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) = \\ &= -(a + b) \left(\sin \theta - \sin \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y' &= (a+b) \cos \theta - (a+b) \cos \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) = \\
&= (a+b) \left(\cos \theta - \cos \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) \right) \\
x'^2 &= (a+b)^2 \left[\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \sin \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) + \sin^2 \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) \right] \\
y'^2 &= (a+b)^2 \left[\cos^2 \theta - 2 \cos \theta \cos \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) + \cos^2 \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) \right] \\
x'^2 + y'^2 &= (a+b)^2 \left[2 - 2 \left[\sin \theta \sin \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) + \cos \theta \cos \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) \right] \right] \\
&= 2(a+b)^2 \cdot \left[1 - \cos \left(\theta - \frac{a+b}{b} \theta \right) \right] = \\
&= 4(a+b)^2 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(-\frac{a}{b} \theta \right) \right) \\
&= 4(a+b)^2 \sin^2 \left(\frac{a\theta}{2b} \right)
\end{aligned}$$

Na osnovu ovoga dobijamo da je dužina luka jednog svoda epicikloide:

$$\begin{aligned}
L'_e &= \int_0^{\frac{2\pi b}{a}} \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} d\theta = 2(a+b) \int_0^{\frac{2\pi b}{a}} \sin \left(\frac{a\theta}{2b} \right) d\theta = \\
&= 2(a+b) \cdot \frac{2b}{a} \left(-\cos \frac{a\theta}{2b} \right) \Big|_0^{\frac{2\pi b}{a}} = \frac{4b(a+b)}{a} \cdot \left(\cos 0 - \cos \frac{2ab\pi}{2ab} \right) = \\
&= \frac{4b(a+b)}{a} \cdot (1 - (-1)) = \frac{8b(a+b)}{a}
\end{aligned}$$

Dužinu s svodova epicikloide ćemo dobiti na sledeći način:

$$L_e = s \cdot L'_e = \frac{a}{b} \cdot \frac{8b(a+b)}{a} = 8(a+b) = 8b(s+1).$$

Teorema 3.5. *Površina epicikloide je $\pi b^2(s+1)(s+2)$, gde je b poluprečnik kruga koja se kreće po spoljašnjosti nepokretnog kruga poluprečnika a i $s=a/b$ je broj svodova epicikloide.*

Dokaz: Računaćemo pomoću Grinove teoreme:

$$\begin{aligned}
xy' - yx' &= \\
&= \left[(a+b) \cos \theta - b \cos \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) \right] \cdot (a+b) \left[\cos \theta - \cos \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) \right] \\
&\quad + \left[(a+b) \sin \theta - b \sin \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) \right] \cdot (a+b) \left[\sin \theta - \sin \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) \right] = \\
&= (a+b)((a+b)+b) \left[1 - \sin \theta \sin \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) - \cos \theta \cos \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) \right] \\
&= ((a+b)^2 + b(a+b)) \left[1 - \cos \left(\theta - \frac{a+b}{b} \theta \right) \right] \\
&= 2(a^2 + 3ab + 2b^2) \sin^2 \left(\frac{a\theta}{2b} \right).
\end{aligned}$$

Nakon toga dobijamo površinu ispod jednog svoda:

$$\begin{aligned}
P'_e &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi b}{a}} (xy' - yx') d\theta = (a^2 + 3ab + 2b^2) \int_0^{\frac{2\pi b}{a}} \sin^2 \left(\frac{a\theta}{2b} \right) d\theta \\
&= (a^2 + 3ab + 2b^2) \cdot \frac{2b}{a} \cdot \left[\frac{1}{2} \frac{a\theta}{2b} - \frac{1}{4} \sin \frac{a\theta}{b} \right] \Big|_{0}^{\frac{2\pi b}{a}} \\
&= \pi b \frac{(a^2 + 3ab + 2b^2)}{a} = \pi \frac{(a^2 + 3ab + 2b^2)}{s}.
\end{aligned}$$

Ako je $s = \frac{a}{b}$ racionalan broj, površina ispod s-svodova je jednaka:

$$\begin{aligned}
P_e &= s \cdot P'_e = s\pi \cdot \frac{(a^2 + 3ab + 2b^2)}{s} = \pi(a^2 + 3ab + 2b^2) \\
&= \pi b^2(s+1)(s+2).
\end{aligned}$$

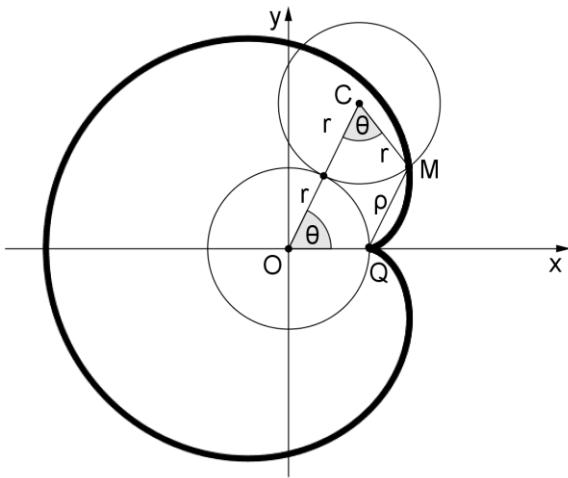
3.2.2. Najpoznatije epicikloide

- Najpoznatija od svih epicikloida je kardioida koja se dobija u slučaju $a = b$ i $s = 1$. Njene su parametarske jednačine :

$$x = b(2 \cos \theta - \cos 2\theta)$$

$$y = b(2 \sin \theta - \sin 2\theta).$$

Polarna jednačina kardioide se može dobiti jednostavno, uzimajući tačku Q za koordinatni početak, a x osu za polarnu osu.



Slika 18. Kardioida

U ovom slučaju je, dakle, $a = b$, pa je $\varphi = \theta$. Na taj način je ρ kraća osnova ravnokrakog trapeza $OCMQ$ čija je veća osnova $2b$, kraci jednaki b , a θ ugao na većoj osnovi. Odатле lako dobijamo

$$\rho = 2b(1 - \cos \theta),$$

što je polarna jednačina kardioide.

Površina kardioide je $6\pi b^2$, a dužina luka je $16b$.

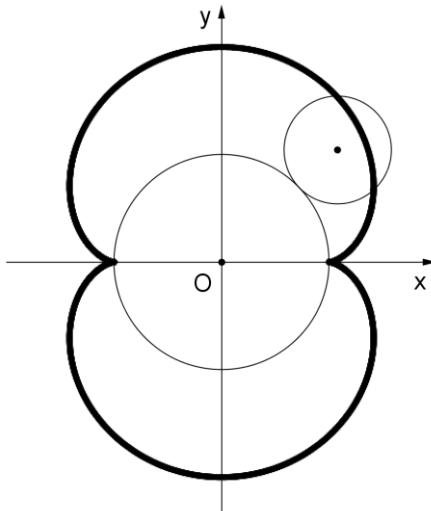
Ime je dobila po srčanom obliku krive (grčka reč *kardioeides* = *kardia* : srce, a *eidos* : oblik, forma). Uporedivši je sa simbolom srca (♥), kardioida ima samo jedan vrh. Više liči na poprečnipresek jedne šljive.

- Ako je $a = 2b$, $s = 2$ dobijamo nefroidu, sa parametarskim jednačinama:

$$x = b(3 \cos \theta - \cos 3\theta)$$

$$y = b(3 \sin \theta - \sin 3\theta) = 4a \sin^3 \theta,$$

površinom $12\pi b^2$, i dužinom luka $24b$.



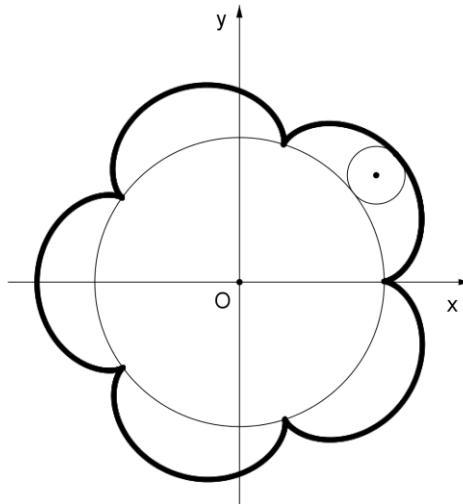
Slika 19. Nefroida

Ona ima jedno interesantno svojstvo. Još su stari Grci primetili da ako se paralelni snop svetlosti odbija od ogledala intenzitet odbijene svetlosti se pojačava duž neke krive, takozvane kaustike. Kod paraboličkog ogledala to je kao što znamo jedna tačka - fokus. Kod sfernog ogledala kaustika je upravo nefroida.

Iako je termin nefroida korišćena za opisivanje drugih krivi, u ovom našem slučaju Proktor¹⁹ je ove krive nazvao nefroidama 1878-e godine.

¹⁹ Richard Anthony Proctor (1837-1888) – engleski matematičar

- Ranunkuloida je epicikloida, kad $a = 5b$, $n = 5$.



Slika 20. Ranunkuloida

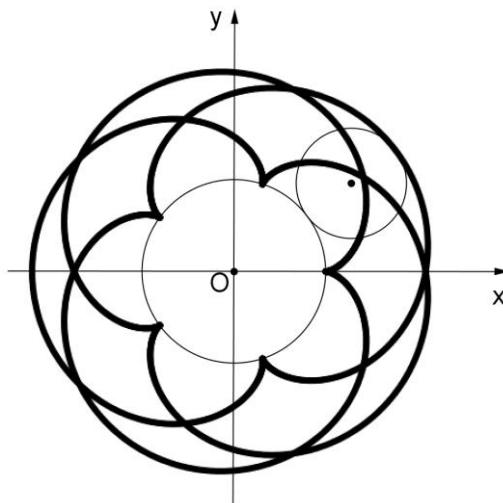
Parametarske jednačine su sledeće:

$$x = b(6 \cos \theta - \cos 6\theta)$$

$$y = b(6 \sin \theta - \sin 6\theta)$$

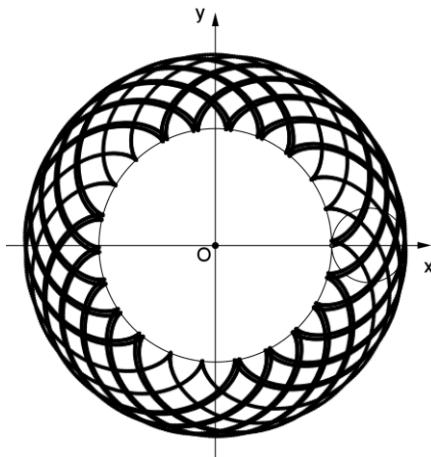
Površina i dužina luka su : $42\pi b^2$ i $48b$.

- $a=5$, $b=3$. Krug poluprečnika b tri puta treba da obide krug poluprečnika a da bi se kriva zatvorila.



Slika 21. Epicikloida : $a=5$, $b=3$

- $a=\pi$, $b=1$. Hipocikloidi slično, kao kod epicikloide kada je odnos iracionalan, dobijamo prsten.



Slika 22. Epicikloida posle 12 obrtaja

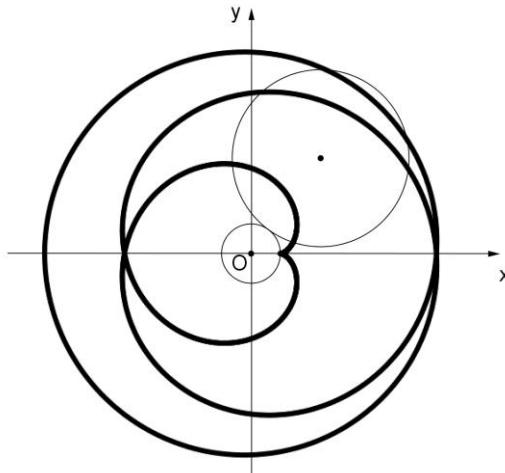
3.3. Pericikloide

Pericikloide su specijalne epicikloide sa osobinom da je poluprečnik nepokretnog kruga K manji od poluprečnika kotrljajućeg kruga K_0 , tj $a < b$.

- $a=1, b=3$. Ova je jedna pericikloida interesantnog oblika koja po delovima liči na kardioidu. Veliki krug tri puta treba da obide mali krug da bi se kriva zatvorila. Parametarske jednačine su sledeće:

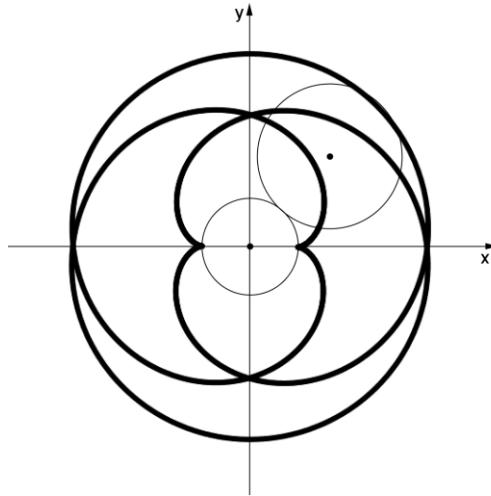
$$x = 4 \cos \theta - 3 \cos\left(\frac{4}{3}\theta\right)$$

$$y = 4 \sin \theta - 3 \sin\left(\frac{4}{3}\theta\right).$$



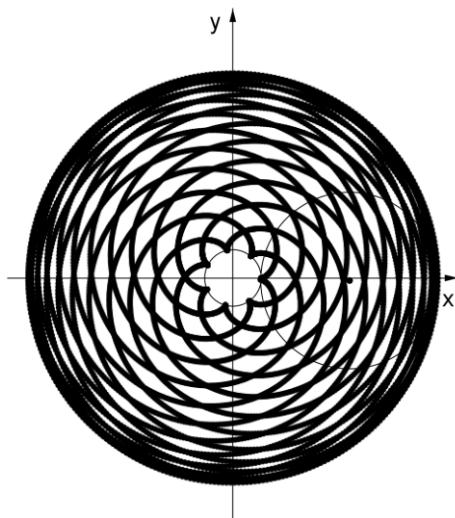
Slika 23. Pericikloida: $a=1, b=3$

- $a=2$ i $b=3$. Suprotno od prethodnog primera ovde dobijamo pericikloidu koja ima dve ose simetrije.



Slika 24. Pericikloida : $a=2$ i $b=3$

- $a=\pi$, $b=1$. Nije iznenađenje, da ako je odnos poluprečnika dve kružnice iracionalan, onda i kod pericikloide dobijamo jedan prsten, i kriva se neće zatvoriti.

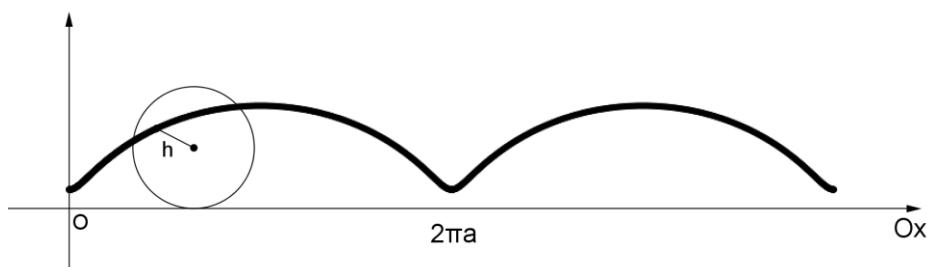


Slika 25. Pericikloida posle 20 obrtaja

3.4. Familija trohoida

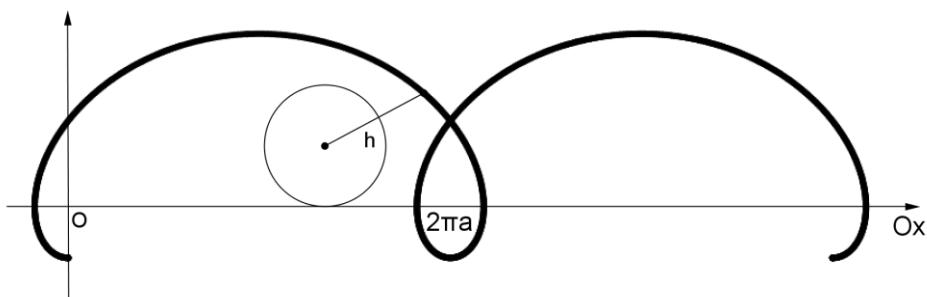
Trohoida je kriva koju opisuje tačka koja je na rastojanju h od centra kruga poluprečnika a koja se kotrlja po pravoj. Trohoide su dobile ime od Robervala²⁰. U zavisnosti od rastojanja h i poluprečnika a imamo sledeće podele trohoida:

- $h = a$. Kriva je upravo cikloida.
- $0 < h < a$. Kriva se naziva *skraćena cikloida*.



Slika 26. Skraćena cikloida

- $h > a$. Kriva se naziva *produžena cikloida*.



Slika 27. Produžena cikloida

Parametarske jednačine trohoida su:

$$x = at - h \sin t$$

$$y = a - h \cos t.$$

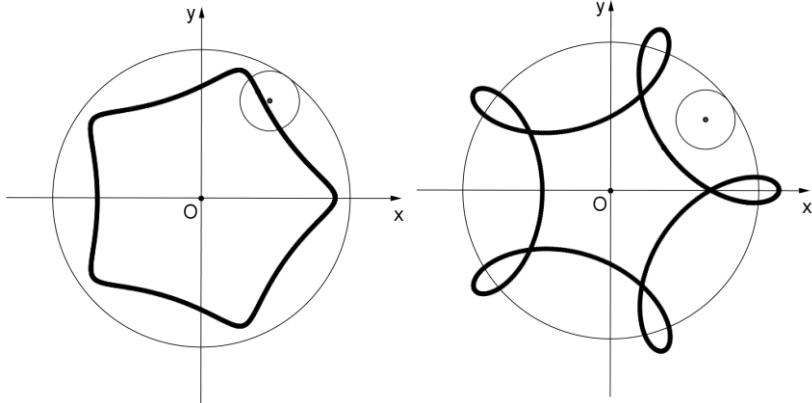
²⁰ Gilles Personne de Roberval (1602 – 1675), francuski matematičar

Slično se definišu epitrohoide i hipotrohoide. Njihove parametarske jednačine su sledeće:

- Hipotrohoida:

$$x = (a - b) \cos \theta + hb \cos \left(\frac{a - b}{b} \theta \right)$$

$$y = (a - b) \sin \theta - hb \sin \left(\frac{a - b}{b} \theta \right)$$



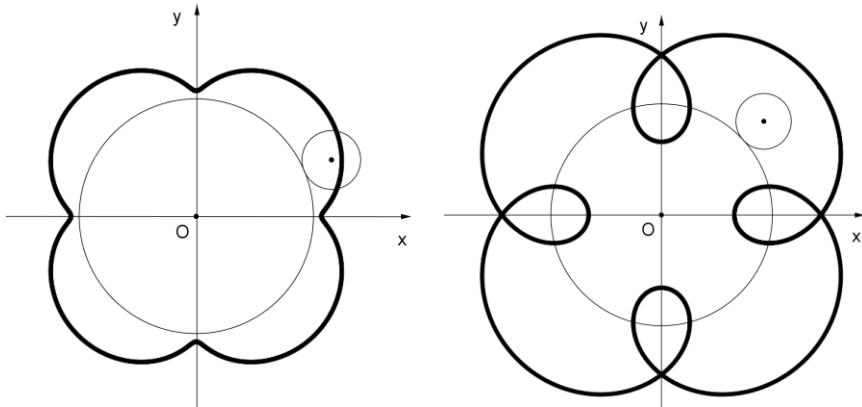
Slika 28. Hipotrohoida za $a/b=5$, kada je h manji

odnosno veći od b

- Epitrohoida:

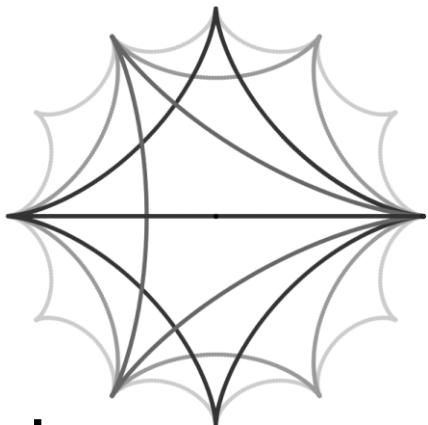
$$x = (a + b) \cos \theta - hb \cos \left(\frac{a + b}{b} \theta \right)$$

$$y = (a + b) \sin \theta - hb \sin \left(\frac{a + b}{b} \theta \right)$$



Slika 29. Epitrohoida za $a/b=4$, kada je h manji

odnosno veći od b



Glava IV

Površina ispod jednog svoda cikloide bez korišćenja integrala

4.1. Uvod

U drugom poglavlju smo pomoću integrala dokazali da je površina ispod jednog luka cikloide tri puta veća od površine kotrljajućeg kruga. Ako ćemo ovu površinu obeležavati sa P , a površinu kruga sa \odot , tada :

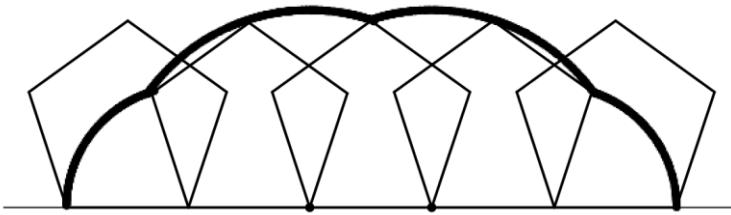
$$P = 3 \cdot \odot.$$

U ovom poglavlju kotrljajući krug ćemo zameniti nekim pravilnim mnogouglogom. Ovim postupkom dobijamo jednu krivu koju ćemo nazvati *ciklogenonom*. Jedan ceo obrtaj pravilnog mnogougla generiše jedan svod ciklogona.

Povećanjem broja stranica mnogouglova do beskonačnosti, kao graničnu vrednost niza ciklogona dobijamo cikloidu. Ovom geometrijskom metodom bez integrala i bez znanja parametrijskih jednačina, jednostavno možemo dobiti površinu ispod jednog svoda cikloide.

4.2. Ciklogoni

Kada se jedan pravilan mnogougao kotrlja bez klizanja po pravoj, jedno teme njegovog obima ostavlja trag jedne krive, koju zovemo *ciklogonom*. Jedan svod ciklogona generisan sa n -ugлом se sastoji od $n-1$ kružnih lukova koje čine jednu neprekidnu krivu, kako je na *slici 30* prikazana kod kotrljajućeg petouglja.



Slika 30. Ciklogon generisan pravilnim petouglom

Lukovi ne moraju imati isti poluprečnik.

Ako P^g označava površinu između prave i jednog svoda te krive, pokazaćemo da je umesto:

$$P = 3 \odot$$

imamo drugu sličnu formulu za površinu ciklogona :

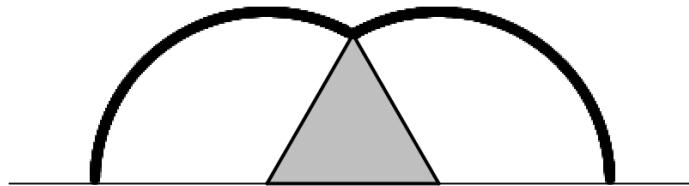
$$P^g = \otimes + 2 \odot,$$

gde \otimes označava površinu kotrljajućeg pravilnog mnogougla, a \odot označava površinu kruga koja opisuje isti mnogougao.

Ako posmatramo jedan niz pravilnih mnogouglova, tako da je prvi član trougao, drugi četvorougao a n -ti član je $n+2$ -ugao, i da svaki od navedenih mnogouglova imaju isti poluprečnik opisane kružnice, onda kao graničnu vrednost ovog niza dabijamo baš pomenutu kružnicu. Odavde sledi da je i cikloida granična vrednost niza ciklogona generisana sa tim nizom mnogouglova, i jednačinu $P = 3 \cdot \odot$, za površinu ispod jednog svoda cikloide možemo gledati kao granični slučaj jednačine $P^g = \otimes + 2 \odot$.

4.3. Kotrljajući jednakostranični trougao

Slika 31 pokazuje jedan svod ciklogona, konstruisanu kotrljanjem jednakostraničnog trougla čija je stranica jednak c .



Slika 31. Ciklogen generisan jednakostraničnim trouglom

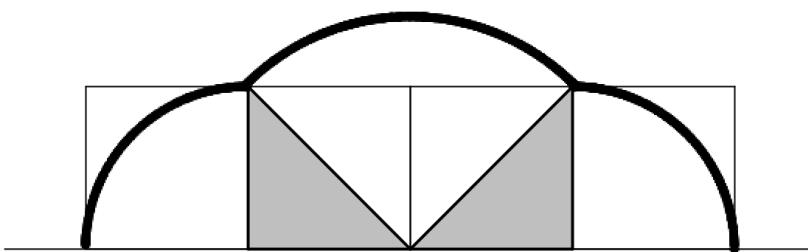
Površina između jednog svoda krive i prave sastoji se od dva jednakaka kružna isečka poluprečnika c i datog jednakostraničnog trougla. Kružni isečci imaju površinu $\frac{\pi}{3} \cdot c^2$, što je i površina opisane kružnice oko datog jednakostraničnog trougla stranice c . Odavde sledi :

$$P^g = \otimes + 2 \frac{\pi}{3} \cdot c^2$$

što dokazuje jednačinu $P^g = \otimes + 2 \cdot \odot$.

4.4 Kotrljajući kvadrat

Slika 32 pokazuje ciklogen konstruisan kvadratom.



Slika 32. Ciklogen generisan kvadratom

Površina između jednog svoda krive i prave sastoji se od dva pravouglja trougla čije su katete c i tri površine četvrtine kruga, dva poluprečnika c i jedan poluprečnik $c\sqrt{2}$. Odnosno suma površina kružnih isečaka je:

$$2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot c^2 + \frac{\pi}{4} (c\sqrt{2})^2 = 2 \cdot \pi \left(c \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 2 \cdot \odot.$$

Odavde sledi da je : $P^g = c^2 + 2 \cdot \odot$,

što dokazuje jednačinu $P^g = \otimes + 2 \cdot \odot$, i u ovom slučaju.

4.5. Teorema o zbiru kvadrata rastojanja temena pravilnog mnogougla

Da bi stigli do cilja poglavlja, tj da dokažemo da je formula $P^g = \otimes + 2 \cdot \odot$ važi za svaki ciklogen nezavisno od broja stranica pravilnog mnogougla, potrebno je dokazati dve teoreme.

Teorema 4.5.1.: $\sum_{k=1}^m \cos \theta_k = -\frac{1}{2}$ gde je $\theta_k = \frac{2k\pi}{2m+1}$, $k, m \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Za dokazivanje ove teoreme koristićemo poznati trigonometrijski identitet:

$$\sum_{k=1}^n \cos k\alpha = \frac{-\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Ako uvodimo sledeću zamenu:

$$n = m \text{ i } \alpha = \frac{2\pi}{2m+1},$$

onda dobijamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \cos k \frac{2\pi}{2m+1} &= \frac{-\sin \frac{2\pi}{2(2m+1)} + \sin \frac{(2m+1) \cdot 2\pi}{2(2m+1)}}{2 \sin \frac{2\pi}{2(2m+1)}} \\ &= \frac{-\sin \frac{\pi}{2m+1} + \sin \pi}{2 \sin \frac{\pi}{2m+1}} = \frac{-\sin \frac{\pi}{2m+1}}{2 \sin \frac{\pi}{2m+1}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

odnosno:

$$\sum_{k=1}^m \cos \frac{2k\pi}{2m+1} = -\frac{1}{2}$$

što smo hteli da dokažemo.

Druga potrebna teorema bavi se zbirom kvadrata rastojanja temena pravilnog mnogougla.

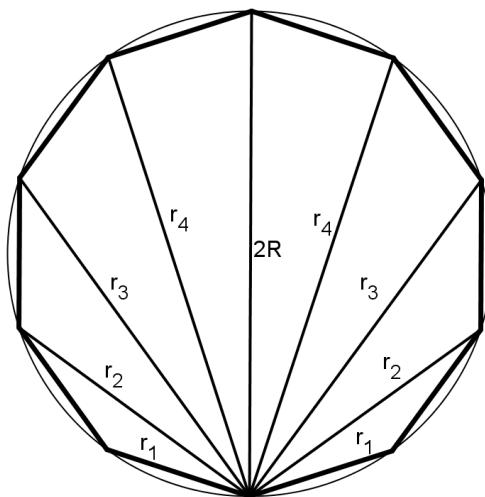
Teorema 4.5.2.: *Zbir kvadrata rastojanja r_k , $k=1,2,\dots,n-1$ od jednog temena pravilnog n -ugla prema ostali $n-1$ temena je jednak $2nR^2$, gde je R poluprečnik opisanog kruga oko pravilnog mnogougla. Tj:*

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k^2 = 2nR^2.$$

Dokaz: za dokazivanje ove teoreme moramo razmotriti dva slučaja, zavisno od toga da li je broj stranica pravilnog mnogougla paran ili neparan.

- Prvi slučaj: broj stranice je paran, tj $n=2m$.

Dokaz za paran broj n čini uzastopno korišćenje Pitagorine teoreme. Na primer uzmimo slučaj $n=10$, kao što je prikazano na *slici 35*, koja pokazuje devet duži povučene od jednog temena prema ostalim ($n-1=9$) temenima, za pravilan desetougao.



Slika 35. Devet duži povučen iz jednog temena pravilnog desetougla prema ostalim temenima

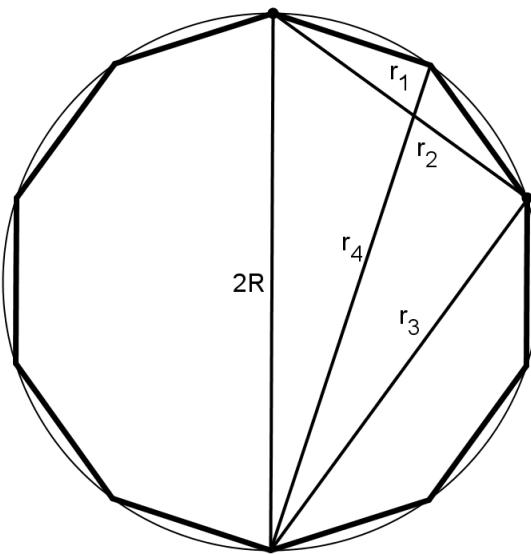
Na slici 35 imamo četiri duži označene sa r_1 , r_2 , r_3 , r_4 , njene osno simetrične slike gde je osa simetrije vertikalni prečnik opisanog kruga oko pravilnog desetougla i prečnik dužine $2R$. Dakle zbir kvadrata tih rastojanja je sledeća:

$$2 \sum_{k=1}^4 r_k^2 + (2R)^2.$$

Slika 36 prikazuje, dve centralno simetrično preslikane duži r_1 i r_2 , gde je centar simetrije centar opisane kružnice desetougla, odnosno središte prečnika $2R$.

Prema preslikavanju dobijamo novi r_1 koji se spaja na obimu kruga sa prethodnim r_4 i koji sa vertikalnim prečnikom kruga čini pravougli trougao (ako se hipotenuza prečnik kruga i naspramno teme nalazi na obim kružnice, trougao je pravougli). Prema Pitagorinoj teoremi:

$$r_1^2 + r_4^2 = 4R^2.$$



Slika 36. Preslikavanje duži r_1 i r_2

Analogno preslikani r_2 spaja se sa prethodnim r_3 i konstruišu sa vertikalnim prečnikom kruga drugi pravougli trougao. Još jednom koristimo Pitagorinu teoremu i dobijamo:

$$r_2^2 + r_3^2 = 4R^2.$$

Odavde sledi da je:

$$\sum_{k=1}^9 r_k^2 = 2 \sum_{k=1}^4 r_k^2 + 4R^2 = 20R^2,$$

što pokazuje teoremu za $n=10$.

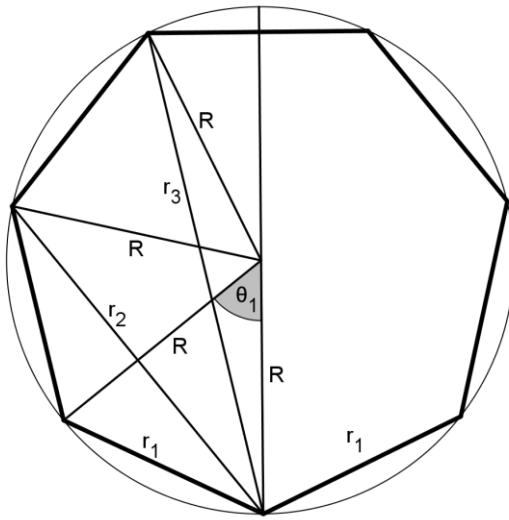
U opštem slučaju kod parnih n , jedna od $n-1$ duži je prečnik opisanog kruga oko pravilnog n -ugla, a ostali $n-2$ duži od $\frac{n-2}{2}$ su u parovima, jer su osno simetrične. Isti argumenti koji su bili kod $n=10$, ukazuju da:

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k^2 = 2 \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} r_k^2 + 4R^2 = \frac{n-2}{2} 4R^2 + 4R^2 = 2nR^2$$

što dokazuje da formula važi za svaki paran broj n .

- Drugi slučaj: broj stranice je neparan, tj $n=2m+1$.

Imamo drugačiji metod, koji važi za sve pravilne mnogouglove sa neparnim brojem stranica, kao što je pravilan sedmougao ilustrovan na *slici 37*.



Slika 37. Pravilni sedmougao sa stranicama r_1 upisan u krugu poluprečnika R .

Slično kao i kod parnih brojeva stranica: imamo tri duži, i njihove osno simetrične slike gde je osa simetrije vertikalni prečnik opisanog kruga oko pravilnog sedmouglja. Sada ukupno imamo šest duži, povućena iz jednog temena prema ostalih 6 temena. Sada želimo da dokažemo :

$$2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = 14R^2 \quad \text{ili} \\ r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 7R^2.$$

Koristimo kosinusnu teoremu na sva tri jednakokraka trougla na *slici 37*, čije je teme u centru sedmouglja. Kraci su jednakim poluprečnikom R , a osnovica je r_k , za $k=1,2,3$. Odgovarajući uglovi (centralni uglovi između krakova trougla) su θ_k , gde je:

$$\theta_1 = \frac{2\pi}{7}, \quad \theta_2 = \frac{4\pi}{7}, \quad \theta_3 = \frac{6\pi}{7}.$$

Kosinusna teorema za jednakokrake trouglove sa uglovim $\theta_k = \frac{2k\pi}{2m+1}$,

kaže da:

$$r_k^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \theta_k.$$

Odavde sledi da je:

$$\sum_{k=1}^3 r_k^2 = 2R^2 \sum_{k=1}^3 (1 - \cos \theta_k) = 6R^2 - 2R^2 \sum_{k=1}^3 \cos \theta_k.$$

Ali kada uzmemo u obzir trigonometrijski identitet (koji smo već dokazali):

$$\sum_{k=1}^m \cos \theta_k = -\frac{1}{2}$$

gde je $\theta_k = \frac{2k\pi}{2m+1}$, $k, m \in \mathbb{N}$, formula $\sum_{k=1}^3 r_k^2 = 6R^2 - 2R^2 \sum_{k=1}^3 \cos \theta_k$ će se implicirati sa

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 7R^2.$$

U opštem slučaju kod pravilnog mnogougla sa $n=2m+1$ stranica, želimo da dokažemo :

$$\sum_{k=1}^{2m} r_k^2 = 2(2m+1)R^2,$$

Odnosno, da je:

$$\sum_{k=1}^m r_k^2 = (2m+1)R^2.$$

što važi zbog simetričnosti duži r_k i r_{2m+1-k} .

U ovom slučaju se pozivamo na kosinusnu teoremu za m jednakokrakih trouglova. Koristeći formulu $r_k^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \theta_k$ gde kod svakog trougla (između krakova) imamo ugao:

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{2m+1}$$

dobijamo jednačinu:

$$\sum_{k=1}^m r_k^2 = 2R^2 \sum_{k=1}^m (1 - \cos \theta_k) = 2mR^2 - 2R^2 \sum_{k=1}^m \cos \theta_k.$$

Isto kao malopre, uzmememo poznati trigonometrijski identitet $\sum_{k=1}^m \cos \theta_k = -\frac{1}{2}$, gde je $\theta_k = \frac{2k\pi}{2m+1}$ i dobijamo da iz $\sum_{k=1}^m r_k^2 = 2mR^2 - 2R^2 \sum_{k=1}^n \cos \theta_k$ sledi :

$$\sum_{k=1}^m r_k^2 = (2m+1)R^2,$$

Tako smo došli do jednačine:

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k^2 = 2 \sum_{k=1}^m r_k^2 = 2(2m+1)R^2 = 2nR^2,$$

što smo hteli da dokažemo.

Ako prethodnu teoremu primenimo na pravilan mnogougao koja ima tačno pet stranica, onda možemo napisati jedan potpuno drugačiji dokaz.

Teorema 4.5.3.: *U pravilnom petouglu je $\sum_{k=1}^4 r_k^2 = 10R^2$, gde su r_k , $k=1,2,\dots,4$ rastojanje od jednog temena petouglja prema ostalim 4, a R je poluprečnik opisanog kruga .*

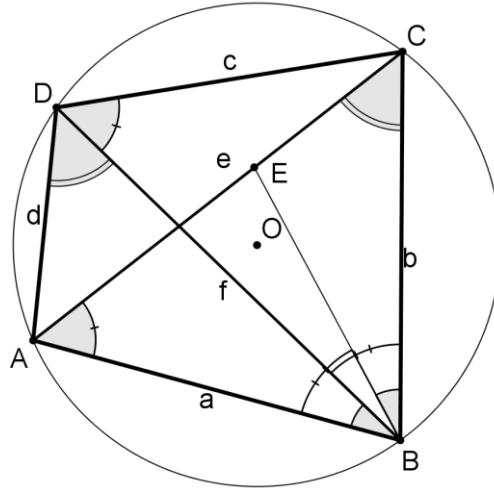
U dokazu ove teoreme ćemo koristiti Ptolomejovu²¹ teoremu za tetivni četvorougao, zato ćemo prvo to formulisati.

Teorema 4.7.2.: (Ptolomejova teorema) *Za svaki tetivni četvorougao proizvod dužina dijagonale jednak je zbiru proizvoda dužina naspramnih stranica.*

Dokaz: Na slici 38 je prikazano $ABCD$ tetivni četvorougao, sa stranicama a, b, c i d i dijagonalama e i f . Neka se tačka E nalazi na dijagonali e , tako da je $ABD\alpha = EBC\alpha$.

²¹ Klaudije Ptolomej (90-168), poslednji od velikih helenskih astronomova

$BDA\angle$ i $BCA\angle$ su periferijski uglovi nad istom tetivom AB , što znači da su jednaki. Naravno iz ovoga možemo videti: $BAD\angle = 180^\circ - ABD\angle - BDA\angle = 180^\circ - EBC\angle - BCE\angle = CEB\angle$.



Slika 38. Ptolomejova teorema

Sledi da su $ABD\triangle$ i $BCE\triangle$ imaju tri para jednakih uglova, tj slične.

Možemo napisati proporciju:

$$d : f = EC : b \text{ ili } EC = \frac{db}{f}.$$

Na sličan način, možemo primeniti da je: $ABE\angle = DBC\angle$. i da $CAB\angle = CDB\angle$ jer su periferijski uglovi nad tetivom BC . Zato su i $EAB\triangle$ i $DBC\triangle$ slične, što implicira:

$$AE : a = c : f \text{ ili } AE = \frac{ac}{f}.$$

Kako je $e = AE + EC = \frac{ac}{f} + \frac{bd}{f}$, dobili smo da je:

$$ef = ac + bd$$

što smo hteli da dokažemo.

Dokaz teoreme 4.5.3:

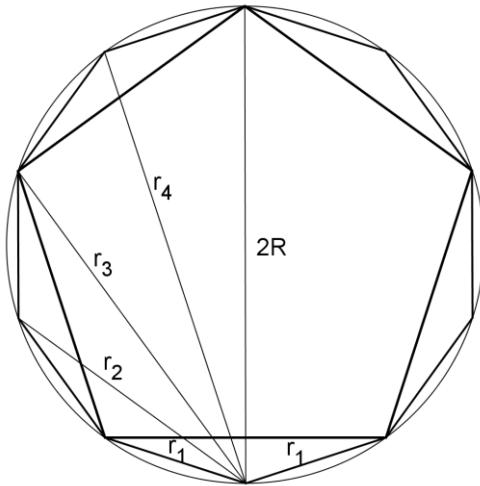
Slika 39 nam pokazuje pravilan petougao sa stranicama r_2 upisan u pravilan desetougao sa stranicama dužine r_1 .

Prečnik opisane kružnice desetouglja je $2R$, a duži r_2 , r_3 i r_4 su dijagonale mnogougla. Sada ćemo dokazati da je:

$$r_2^2 + r_4^2 + r_2^2 + r_4^2 = 10R^2$$

ili ekvivalentan izraz:

$$r_2^2 + r_4^2 = 5R^2.$$



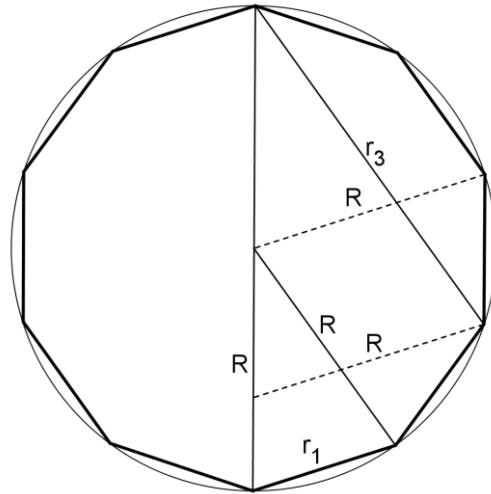
Slika 39. Tetivni četvorougao sa tri stranice dužine r_1 i jedne sa r_3 , i dve dijagonale r_2

Koristimo Ptolemejevu teoremu za tetivni četvorougao na *slici 39* sa dve ukrštajuće dijagonale dužine r_2 , da bismo dobili:

$$r_2^2 = r_1 r_3 + r_1^2.$$

Na *slici 40* možemo videti dva slična jednakokraka trougla sa odnosom stranica:

$$\frac{R}{r_1} = \frac{r_3}{R} \quad \text{ili} \quad r_1 r_3 = R^2.$$



Slika 40. Jednakokraki trouglovi, sa kracima r_3 i osnovicom R je sličan trouglom sa kracima R i osnovicom r_1 .

Uzmimo jednačine $r_2^2 = r_1r_3 + r_1^2$ i $r_1r_3 = R^2$ i primenimo Pitagorinu teoramu na pravougli trougao sa kracima r_1, r_4 i hipotenuzom $2R$:

$$r_1^2 + r_4^2 = 4R^2$$

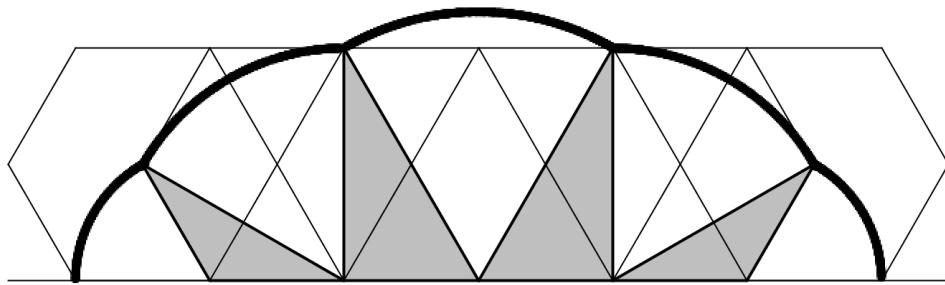
i dobijamo da:

$$r_2^2 = R^2 + r_1^2 = R^2 + 4R^2 - r_4^2 = 5R^2 - r_4^2$$

što implicira jednačinu $r_2^2 + r_4^2 = 5R^2$.

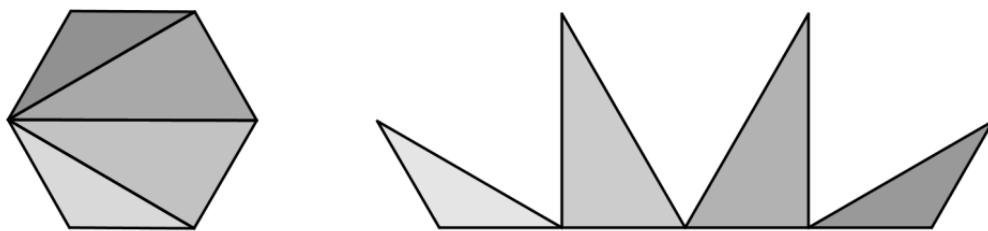
4.6. Kotrljajući n-ugao

Kod slučaja sa pravilnim mnogougrom sa n temena, površina između jednog svoda krive i prave sastoji se od $n-2$ trouglova i $n-1$ kružnih isečaka sa uglom od $\frac{2\pi}{n}$ radijana, što je jednak sa spoljašnjim uglom pravilnog n -ugla.



Slika 33. Otisci ciklogona generisanog
pravilnim šestouglom

Te $n-2$ trouglove možemo nacrtati kao tragove ostavljene prilikom kotrljanja. Trouglove možemo dobiti deljenjem mnogougla sa $n-3$ dijagonalom. Dijagonale dobijamo tako što dato teme spajamo sa svakim nesusednim temenom (dva put računamo i stranice), kao što je ilustrovano na Slici 34 za $n=6$.



Slika 34. Rastavljenje pravilnog šestouglja na trouglove

Poluprečnici kružnog isečka su jednak dužinama koje spajaju dato teme sa preostalim $n-1$ temena. Kružni isečak je određen sa poluprečnikom

r_k i uglem od $\frac{2\pi}{n}$ radijana i njegova površina iznosi $\frac{\pi \cdot r_k^2}{n}$, pa je zbir svih kružnih isečaka jednaka:

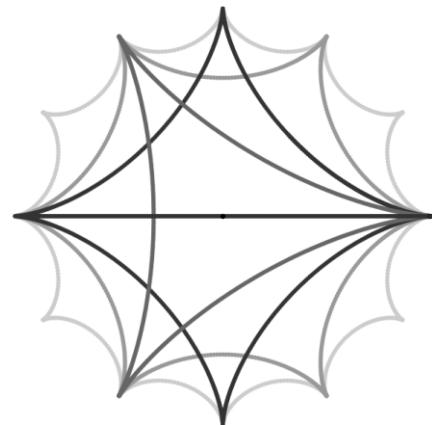
$$\frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} r_k^2.$$

U prethodnom poglavlju dokazali smo da je zbir kvadrata ovih poluprečnika jednak $2nR^2$, gde je R poluprečnik opisanog kruga oko datog pravilnog mnogougla. Tako je zbir površina svih kružnih isečaka jednak $2\pi R^2$, što je dva puta veća površina nego površina datog opisanog kruga. Drugim rečima, jednačina $P^g = \otimes + 2 \cdot \odot$ je posledica jednačine:

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k^2 = 2nR^2,$$

jer važi:

$$P^g = \otimes + \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} r_k^2 = \otimes + \frac{\pi}{n} 2nR^2 = \otimes + 2 \cdot \odot.$$

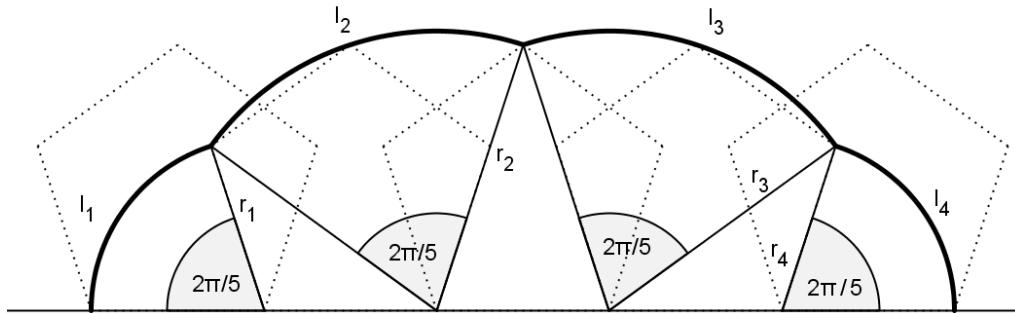


Glava V

Dužina luka cikloide bez korišćenja integrala

Pomoću integrala smo već izračunali da je dužina luka jednog svoda cikloide je $8a$, gde je a poluprečnik kotrljajućeg kruga. To možemo napisati u obliku: $L=8a$ ili $L=4D$, gde je D prečnik kružnice. U ovom poglavlju ćemo prikazati kako možemo stići do ovog rezultata sa jednim drugim interesantnim metodom.

Dužina luka jednog svoda ciklogona L^g je dobijena od kotrljajućeg pravilnog n -ugla, i jednak je zbiru dužina $n-1$ luka l_k kružnog isečaka sa poluprečnikom r_k i uglom od $\frac{2\pi}{n}$ radijana.



Slika 41. Dužina luka ciklogona generisan sa petougлом

To možemo napisati i ovako:

$$L^g = \sum_{k=1}^{n-1} l_k = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} r_k.$$

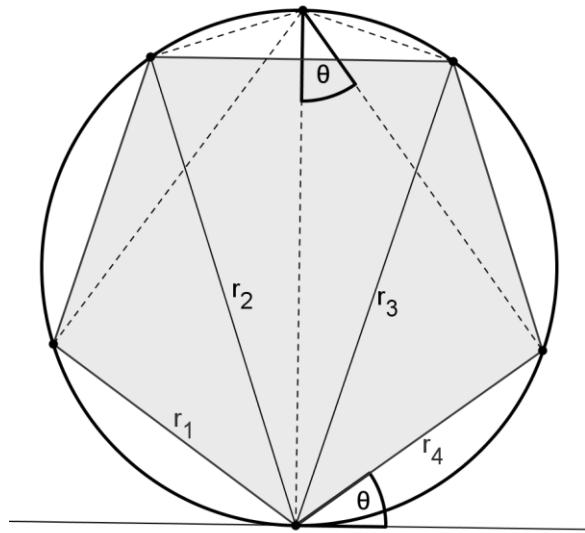
U tabeli su dati primeri ciklogona, u slučaju kada je dužina stranice kotrljajućeg pravilnog trougla, četvorougla i šestougla je c , a prečnik opisane kružnice pravilnog mnogougla je D .

	poluprečnici	Prečnik opisane kružnice	Ugao kruž- nog isečka	Dužina luka jednog svoda
Kotrljajući trougaon	$r_1 = r_2 = c$	$D = \frac{2c\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}2c \approx 3,63 \cdot D$
Kotrljajući četvorougao	$r_1 = r_3 = c$ $r_2 = c\sqrt{2}$	$D = c\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{4}(2 + \sqrt{2})c$ $\approx 3,79 \cdot D$
Kotrljajući šestougao	$r_1 = r_5 = c$ $r_2 = r_4 = c\sqrt{3}$ $r_3 = 2c$	$D = 2c$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{6}(4 + 2\sqrt{3})c$ $\approx 3,91 \cdot D$

Tablica 1. Dužina luka nekih ciklogona

Iz zadnje kolone tabele (dužina luka) se jasno vidi da se sa povećanjem broja stranica sve bliže približavamo $4D$.

Na slici 42 je prikazan slučaj kada je $n=5$. Duži r_1, r_2, r_3, r_4 spajaju jedno teme pravilnog petougla sa ostalim $n-1$, i svaki par r_k i r_{n-k} su osno simetrične, gde je osa simetrije vertikalni prečnik D .



Slika 42. Dijagonale petougla

U opštem slučaju u pravilnom n -uglu, svaki od odsečaka r_k sa prečnikom kruga D određuju pravougli trougao upisan u polukrug. Tada jedan od oštrih uglova pravouglog trougla jednak je:

$$k\theta = \frac{k\pi}{n},$$

gde je θ ugao između stranice mnogougla i tangente opisane kružnice.

Tada dužinu isečka možemo izračunati na sledeći način:

$$r_k = D \sin \frac{k\pi}{n}.$$

Koristeći prethodnu formulu, dužinu luka ciklogona možemo napisati i u obliku:

$$L^g = \frac{2D\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}.$$

Za eliminaciju zbiru sinusa koristimo poznate trigonometrijske identitete:

$$\sum_{k=1}^n \sin(2k\alpha) = \frac{\sin n\alpha \cdot \sin(n+1)\alpha}{\sin \alpha}.$$

Ako koristimo smenu $\alpha = \frac{\pi}{2n}$, onda ćemo dobiti ekvivalentan izraz :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} &= \sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k \frac{\pi}{2n} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \right) \sin \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}. \end{aligned}$$

Došli smo do rezultata prema kojem je dužina luka jednog svoda ciklogona dobijena kotrljajućem pravilnim mnogougrom sa n stranica jednak:

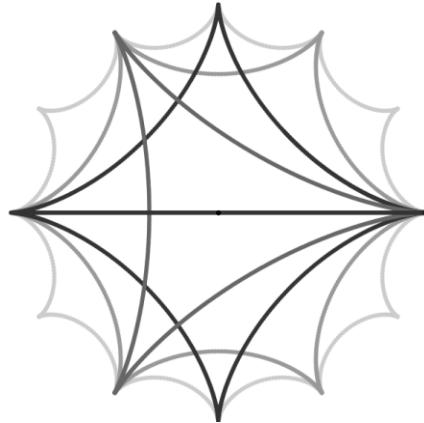
$$L^g = \frac{2D\pi}{n} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} = 4D \left(\frac{\pi}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \right).$$

Isto kao kod površine, povećanjem broja stranica mnogougla do beskonačnosti, iz ranije formule kao graničnu vrednost dobićemo formulu za dužinu luka jednog svoda cikloide :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4D \left(\frac{\pi}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4D \left(\frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \right) = 8a \cos 0 = 8a$$

Tj kraće:

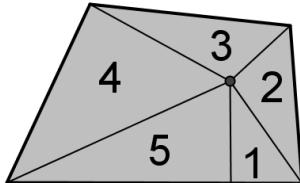
$$\lim_{n \rightarrow \infty} L^g = L.$$



Glava VI

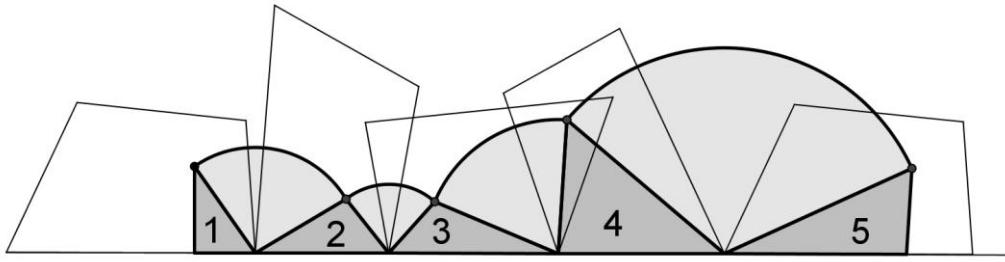
Dužina luka i površina ispod jednog svoda trohoide

Prvo ćemo se baviti sa nepravilnim konveksnim n-uglom, koji se kotrlja po pravoj bez klizanja. Na *slici 43* je prikazan četvorougao koji zadovoljava sve uslove jednog nepravilnog mnogougla.



Slika 43. Podeljen nepravilan četvorougao

Kako se tačka koja ostavlja trag nalazi u unutrašnjosti četvorougla, ta tačka jednim obrtajem opisuje četiri kružna luka. Trohogonalna površina je površina između tih lukova (trohongan) i prave na kojoj se četvorougao kotrlja i sastoji se od četiri kružnih isečaka i skupom od pet trouglova, dobijena je razdvajanjem datog mnogougla.



Slika 44. Trohogon generisan opštim četvorougloom

U opštem slučaju, unutrašnja tačka n -ugla, sa jednim obrtajem po pravoj, sa tragom određuje trohogonalnu površinu, koja se sastoji od n kružnih isečaka, i skupom od $n+1$ trouglova, koje možemo dobiti deljenjem datog mnogougla. Dobijena površina P_t^g je jednaka zbiru površina \otimes kotrljajućeg mnogougla i sumi površina n kružnih isečaka.

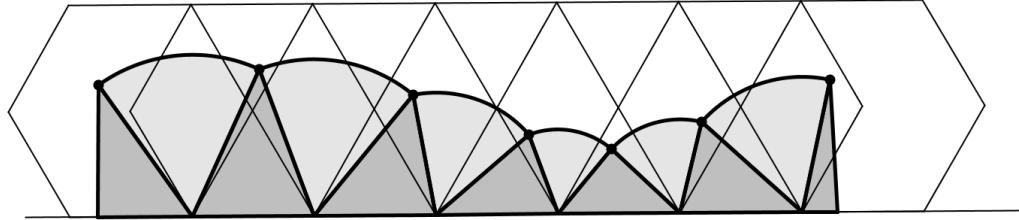
Površina k -tog isečaka jednak je $\frac{\varphi_k r_k^2}{2}$, gde je r_k poluprečnik kružnog isečka sa ugлом φ_k radijana, $k = 1, 2, \dots, n$. Međutim, dužina poluprečnika r_k jednak je rastojanju između k -tog temena mnogougla i tačke z koja ostavlja trag, a ugao φ_k je spoljašnji ugao mnogougla, koji leži kod k -tog temena. Površinu ispod jednog svoda trohogona možemo napisati formulom:

$$P_t^g = \otimes + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k r_k^2.$$

Dužina lukova dobijenih kružnih isečaka je $\varphi_k r_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, a suma dužina svih tih lukova je L_t^g koju zovemo dužinom luka jednog svoda trohogona, tj:

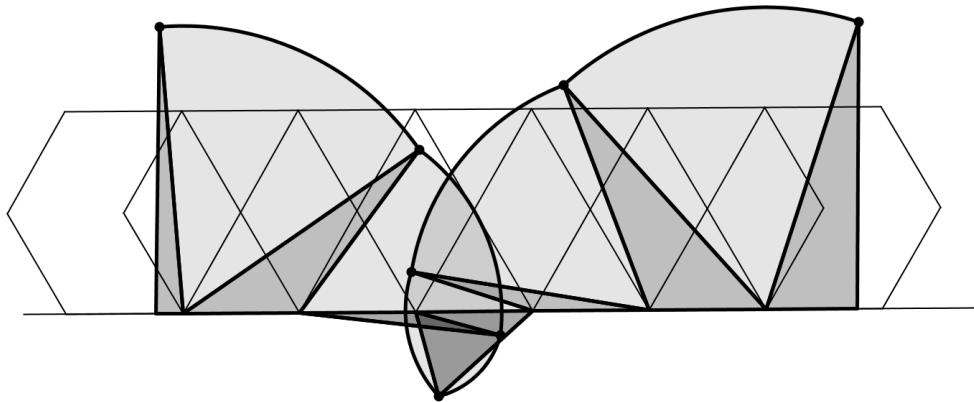
$$L_t^g = \sum_{k=1}^n \varphi_k r_k.$$

- Ako je kotrljajući n -ugao pravilan, i tačka z koja ostavlja trag se nalazi u unutrašnjosti mnogougla, onda dobijenu krivu nazivamo *skraćenim ciklogenom*.



Slika 45. Skraćeni ciklogen

- Ako je tačka koja ostavlja trag izvan pravilnog mnogougla, onda ćemo dobiti *produženi ciklogen*.



Slika 46. Produženi ciklogen

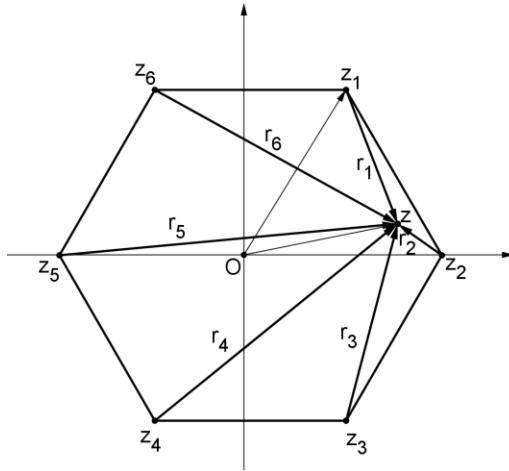
U tim slučajevima - kada je mnogougao pravilan - prethodne sume možemo napisati u jednom jednostavnijem obliku.

Kako je mnogougao pravilan, svaki od spoljašnjih uglovova φ_k su jednaki sa spoljašnjim uglom mnogougla, tj. sa $\frac{2\pi}{n}$ radijana, što znači, da prethodne formule možemo pretvoriti na sledeći način:

$$P_t^g = \otimes + \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n r_k^2 \quad i \quad L_t^g = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n r_k.$$

Zbir $\sum_{k=1}^n r_k^2$ možemo pojednostaviti pomoću kompleksnih brojeva.

Neka su z_1, z_2, \dots, z_n leže na kružnici poluprečnika r i centrom u koordinatnom početku, i zadovoljavaju uslov da se baricentar (centroid) tih tačaka nalazi isto u koordinatnom početku, kako je prikazano na slici 47.



Slika 47. Pravilan mnogougao sa baricentrom u tački O

Kako je O baricentar tih n tačaka, možemo napisati da je:

$$\sum_{k=1}^n z_k = 0.$$

Tada za svaku tačku z ravni, važi da je:

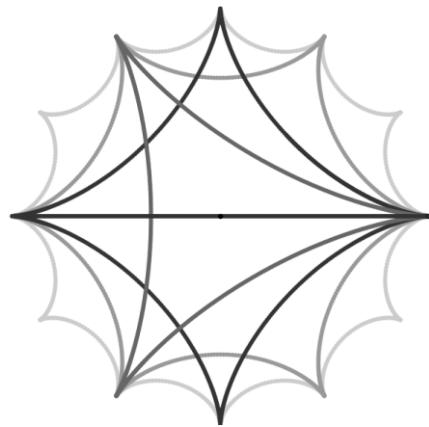
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |z - z_k|^2 &= \sum_{k=1}^n (z - z_k)(\bar{z} - \bar{z}_k) = \sum_{k=1}^n (|z|^2 + |z_k|^2 - z\bar{z}_k - \bar{z}z_k) \\ &= n|z|^2 + \sum_{k=1}^n |z_k|^2 = n(r^2 + |z|^2) \end{aligned}$$

Ako su tačke z_1, z_2, \dots, z_n temena pravilnog mnogougla, sa istim uslovima, onda $r_k = |z - z_k|$, i tada sledi da je:

$$\frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^n r_k^2 = \pi r^2 + \pi|z|^2 = \odot + \odot$$

gde \odot označava površinu kruga koja opisuje kotrljajući mnogougao, a \odot označava površinu kružnice, čiji je poluprečnik jednak rastojanju između centra opisane kružnice i tačke z . Konačno, za površinu ispod trohogona dobili smo jedan neočekivano jednostavan rezultat:

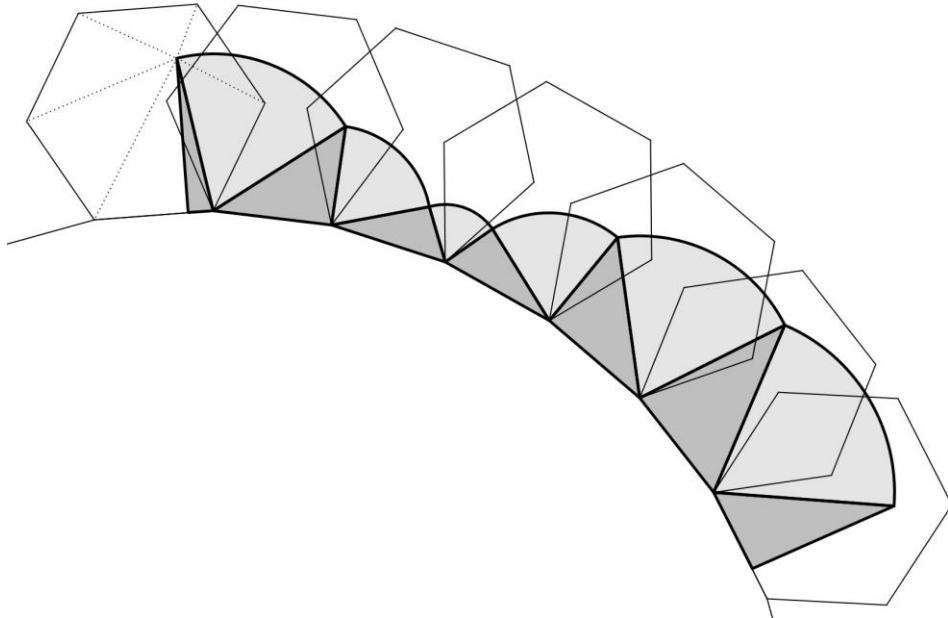
$$P_t = \odot + \odot + \odot.$$



Glava VII

Osobine srodne krive

Metoda prikazana u prethodnim poglavljima može se primeniti ne samo na cikloidu već i na njene srodne krive. Zamislimo šta bi se desilo kad bi se pravilni n-ugao kotrljao oko drugog pravilnog m-ugla. Dužine stranica moraju da se podudaraju.



Slika 48. Epitrohogon generisan pravilnim šestougлом

Kriva konstruisana tačkom z koja se nalazi unutar, odnosno izvan pravilnog n -ugla se zove *hipotrohogon* odnosno *epitrohogon*, a kriva konstruisana temenom n -ugla je *hipociklogon*, odnosno *epiciklogon*.

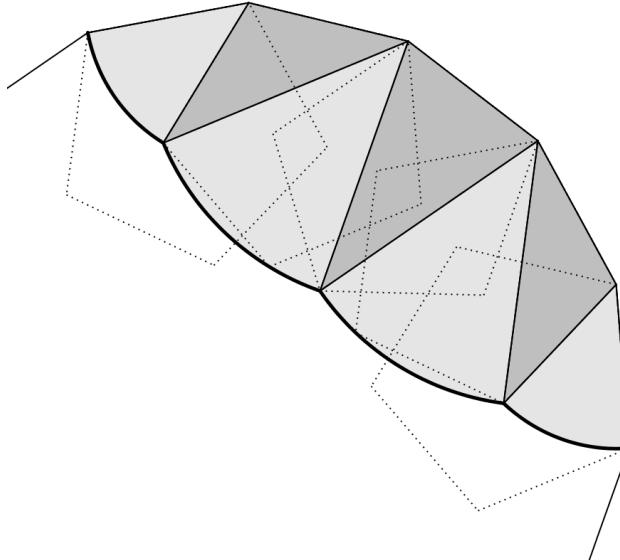
Nomenklatura nije slučajna, jer povećanjem broja stranica prema beskonačnosti dobijamo hipocikloidu odnosno epicikloidu. Iz ovoga se jasno vidi da se površina između ovim krivama i mnogougla može dobiti pomenutim metodama, i nazvaćemo ih kraćom površinom hipo- i epitrohogona.

7.1. Površina hipo- i epicikloide bez korišćenja integrala

U drugom poglavlju smo već dokazali da je površina hipocikloide je $\pi b^2(s - 1)(s - 2)$, gde je b poluprečnik kruga koja se kreće po unutrašnjosti nepokretnog kruga poluprečnika a i $s = a/b$ je broj svodova hipocikloide, a površina epicikloide je $\pi b^2(s + 1)(s + 2)$, odnosno:

$$P_h = \bigcirc (s - 1)(s - 2) \quad \text{i} \quad P_e = \bigcirc (s + 1)(s + 2),$$

gde je \bigcirc površina kotrljajuće kružnice. Pomoću hipo- i epiciklogona možemo dobiti formule, čije su granične vrednosti ekvivalentni sa ovim rezultatima.



Slika 49. Hipociklogen sa $n=5$ i $m=15$

Na *slici 49* prikazan je deo hipociklogona, generisan sa pravilnim petnaestougloom i kotrljajućim petougloom. Očigledno je da površinu hipociklogona možemo dobiti tako da iz površine m-ugla izvučemo $\frac{m}{n}$ puta površinu A_h^g koja je ograničena sa m-uglom i jednim svodom hipociklogona. Površina A_h^g sastoji se od $n-2$ trouglova, koje zajedno daju površinu kotrljajućeg n-ugla (označena sa \otimes), i $n-1$ kružnih isečaka. Znači, možemo napisati:

$$A_h^g = \otimes + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi r_k^2$$

gde je $\frac{1}{2} \varphi r_k^2$ površina k -tog kružnog isečka, a r_k , $k = 1, 2, \dots, n-1$ su dužine koje spajaju jedno teme n-ugla sa ostalim $n-1$ temenima. U slučaju ciklogona smo imali da je ugao kružnog isečka jednak je $\frac{2\pi}{n}$, koji moramo smanjiti sa spoljašnjim uglom m-ugla, tj. $\varphi = \frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{m}$. To znači da je:

$$\begin{aligned} A_h^g &= \otimes + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{m} \right) r_k^2 = \otimes + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{m} \right) \sum_{k=1}^{n-1} r_k^2 = \\ &= \otimes + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{m} \right) \cdot 2nR^2 = \otimes + 2R^2\pi \left(1 - \frac{n}{m} \right) \\ &= \otimes + 2 \odot \left(1 - \frac{n}{m} \right) \end{aligned}$$

gde je R poluprečnik opisane kružnice kotrljajućeg pravilnog n-ugla.

Sada posmatramo niz hipociklogona generisan sa n-uglom koji se kotrlja unutar m-ugla (označen sa $H^g(n, m)$) upisan u krug poluprečnika a , tako da odnos broja stranica $v = \frac{m}{n}$ pravilnih mnogouglova se ne menja.

Prvi član niza je ciklogen generisan sa trouglom koji se kotrlja oko $3v$ -ugla, drugi član niza je generisan sa kvadratom koji se kotrlja oko $4v$ -ugla, n -ti član generiše pravilan $n+2$ -ugao koji se kotrlja oko $(n+2)v$ -ugla . Preciznije, niz ciklogona izgleda ovako:

$$H^g(3, 3v), H^g(4, 4v), H^g(5, 5v), \dots, H^g(n, m), \dots$$

Kako su stranice n-ugla i m-ugla jednake dužine, možemo posmatrati da za svaki član niza važi da je obim nepokretnog mnogougla v puta veća od kotrljajućeg. U graničnom slučaju, $n \rightarrow \infty$ zato i $m \rightarrow \infty$ jer je $m = v \cdot n$, što znači da smo dobili dve kružnice, takve da je obim prve kružnice v puta manji od obima druge kružnice, tj i poluprečnici imaju odnos $v = \frac{m}{n}$. Što možemo napisati ovako: $\frac{m}{n} \rightarrow \frac{a}{b}$, gde je a poluprečnik kružnice K_0 opisan oko m-ugla, a b poluprečnik kotrljajuće kružnice K dobijen od pravilnog n-ugla

Tada:

$$A_h = \lim_{n \rightarrow \infty} A_h^g = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\otimes + 2 \odot \left(1 - \frac{n}{m} \right) \right) = \odot \left(3 - 2 \frac{b}{a} \right)$$

Koristeći prethodni rezultat i da je $s = a/b$ broj svodova hipocikloide, dobijamo da je površina hipocikloide jednak:

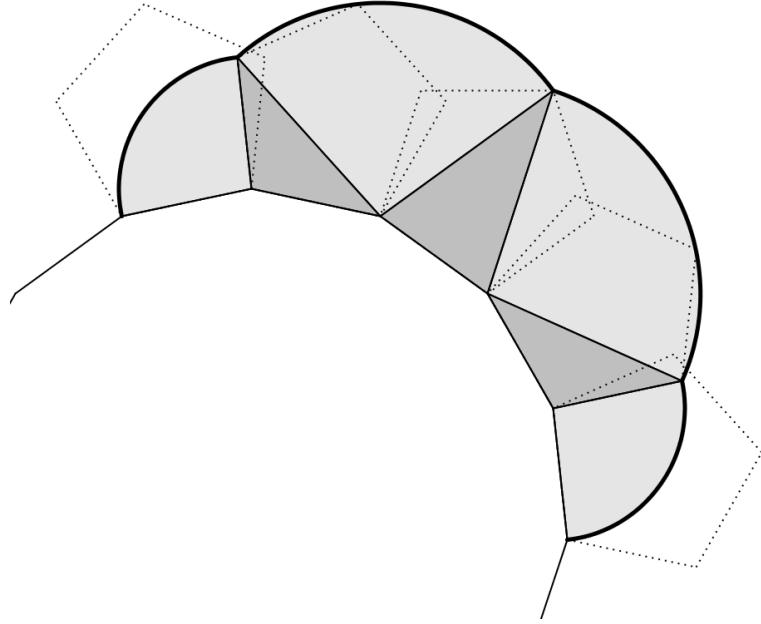
$$\begin{aligned} P_h &= a^2\pi - sA_h = s^2 \odot -s \cdot \odot \left(3 - \frac{2}{s} \right) = \odot (s^2 - 3s + 2) \\ &= \odot (s - 1)(s - 2) \end{aligned}$$

što smo već dokazali pomoću integrala.

Površinu epiciklogona možemo dobiti na sličan način sa razlikom, da ćemo površinu m-ugla povećati $\frac{m}{n}$ puta sa površinom A_e^g , koja je ograničena sa m-uglom i jednim svodom epiciklogona. Ova površina data je jednačinom:

$$A_e^g = \otimes + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi r_k^2$$

Na slici 50 je prikazan deo epicikloide generisane sa pravilnim petouglog koji se kotrlja oko pravilnog petnaestougla.



Slika 50. Epiciklogen sa $n=5$ i $m=15$

Sada moramo uzeti u obzir da je ugao kružnog isečka veći za spoljašnjim uglom m -ugla od ugla kružnog isečka kod ciklogona. Zato možemo napisati sledeće:

$$A_e^g = \otimes + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{m} \right) r_k^2 = \otimes + 2 \odot \left(1 + \frac{n}{m} \right)$$

U graničnom slučaju, kada je i $n \rightarrow \infty$, odnosno $\frac{n}{m} \rightarrow \frac{b}{a}$:

$$A_e = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} A_e^g = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \otimes + 2 \odot \left(1 + \frac{b}{a} \right) = \odot \left(3 + 2 \frac{b}{a} \right)$$

gde je a poluprečnik kružnice K_0 opisan oko pravilnog m -ugla,, a b poluprečnik male kružnice K generisana n -ugлом.

Koristeći prethodni rezultat i da je $s = a/b$ broj svodova epicikloide, dobijamo da je površina epicikloide jednak:

$$\begin{aligned} P_e &= a^2 \pi + s A_e = \odot \pi + s \cdot \odot \left(3 + \frac{2}{s} \right) = \odot (s^2 + 3s + 2) \\ &= \odot (s+1)(s+2) \end{aligned}$$

što smo hteli, da dokažemo.

7.2. Specijalni primeri

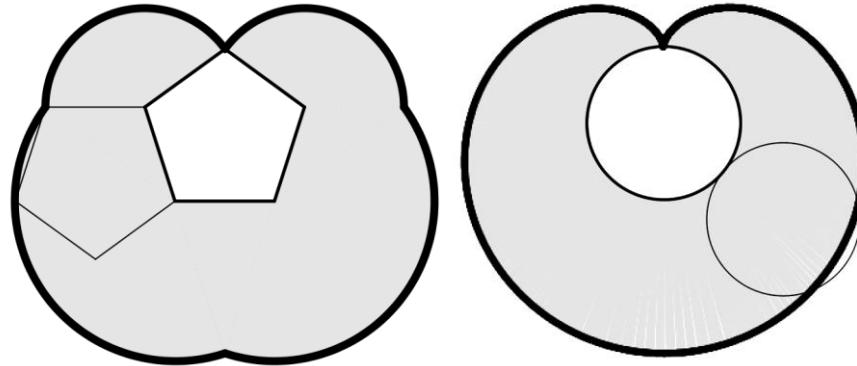
Sada ćemo predstaviti nekoliko primera kako iz hipo- i epiciklogona možemo dobiti poznate krive.

- Ako se n -ugao kotrlja oko m -ugla, i važi, da je $\frac{n}{m} = 1$, onda jedno teme n -ugla opisuje krivu, koju nazivamo kardiogon. Površina između kvadrata i krive je:

$$A_e^g = \bigcirc + 4 \odot.$$

Kad $n \rightarrow \infty$, onda je $\bigcirc \rightarrow \odot$, i kriva kardiogon se pretvara u poznatu kardioidu. Tada se događa da je površina između krive i kružnice jednaka $5 \odot$. A iz ovoga sledi rezultat, što smo već izračunali pomoću integrala, da je cela površina ograničena kardioidom, jednaka :

$$P_e = \odot + 5 \odot = 6 \odot.$$



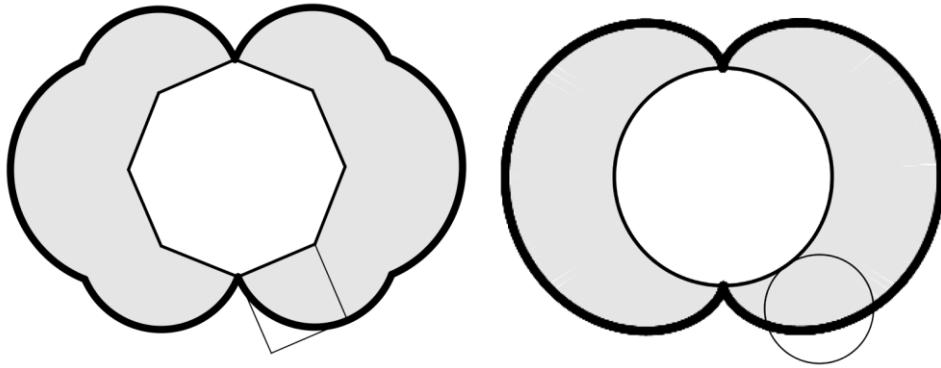
Slika 51. Kardiogon i kardioida

- U slučaju $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$, dobijamo nefrogon, sa površinom :

$$A_e^g = \bigcirc + 3 \odot.$$

Kad $n \rightarrow \infty$ dobijamo rezultat, da je površina ispod jednog svoda jednaka sa:

$$A_e = 4 \odot.$$



Slika 52. Nefrogon i nefroidea

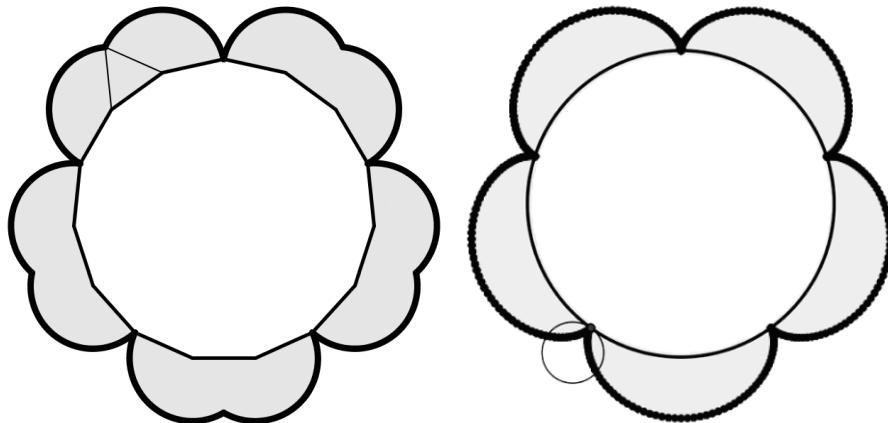
Možemo videti da se nefroidea sastoji od dve jednake krive, što znači da je površina cele nefroide jednak:

$$P_e = 4 \odot + 2A_e = 12 \odot$$

što je poznato.

- Na slici je prikazana ranunkulogon, generisan petnaestouglohom i trouglom, tj $\frac{n}{m} = \frac{1}{5}$. Ova kriva se sastoji od 5 svodova, svaki sa površinom:

$$A_e^g = \odot + \frac{12}{5} \odot$$



Slika 53. Ranunkulogon i ranunkuloida

Kad $n \rightarrow \infty$ tada ranunkulogon postaje ranunkuloida, sa površinom između nepokretne kružnice i jednog svoda: $A_e = \frac{17}{5} \odot$.

Kako je poluprečnik nepokretne kružnice pet puta veći od male, možemo napisati da je površina ranunkuloide :

$$P_e = 25 \odot + 5A_e = 42 \odot$$

- Ako je $\frac{n}{m} = \frac{1}{4}$, i n-ugao se kotrlja unutar drugog mnogougla, dobijeni hipociklogon nazivamo astrogonom, sa površinom ispod jednog svoda:

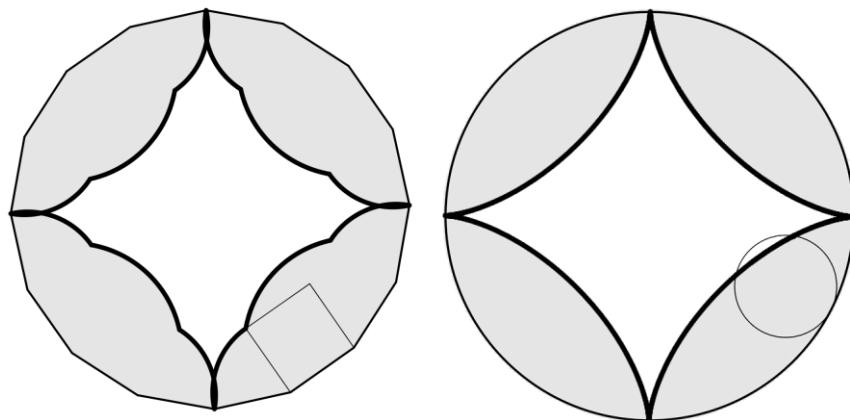
$$A_h^g = \odot + \frac{3}{2} \odot.$$

Ako $n \rightarrow \infty$, $\odot \rightarrow \odot$, dobijamo krivu astroida, koja se sastoji od četiri svoda, i ograničena površina je razlika nepokretnog kruga i površine između ta četiri svoda i kruga.

To znači, da možemo pisati:

$$P_h = 16 \odot - 4 \left(\odot + \frac{3}{2} \odot \right) = 6 \odot,$$

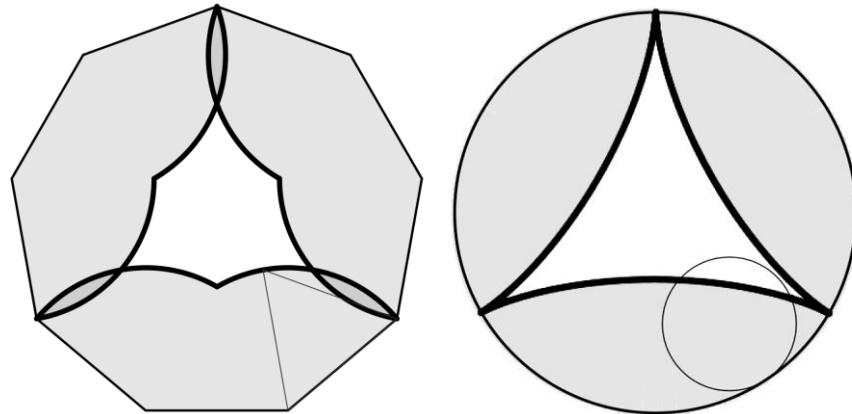
što je opet, jedan poznat rezultat.



Slika 54. Astrogon i astroida

- Deltogon je hipociklogen generisan sa mnogouglovima odnosom brojem stranica: $\frac{n}{m} = \frac{1}{3}$. Deltogon ima površinu između jednog svoda i fiksnog m-ugla:

$$A_h^g = \odot + \frac{4}{3} \odot.$$

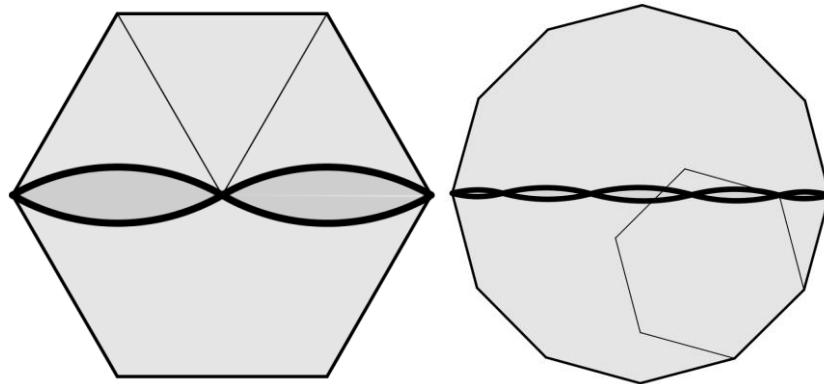


Slika 55. Deltogon i deltoida

Kad $n \rightarrow \infty$, dobijamo poznatu deltoidu sa tri svoda, koja ima površinu:

$$P_h = 9 \odot - 3 \cdot \frac{7}{3} \odot = 2 \odot.$$

- Jeden interesantan primer hipociklogone je takozvani dijamogon. To možemo dobiti kada je $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$.



Slika 56. Dijamogoni

Dok se n -gon kotrlja u unutrašnjosti pravilnog $2n$ -ugla, opiše osno simetričnu krivu, koja se sastoji od $n-1$ svodova. Na *slici 56* su prikazane dijamogone za $n=3$ i $n=6$.

Površinu između jednog svoda i $2n$ -ugla možemo lako izračunati:

$$A_h^g = \otimes + \odot.$$

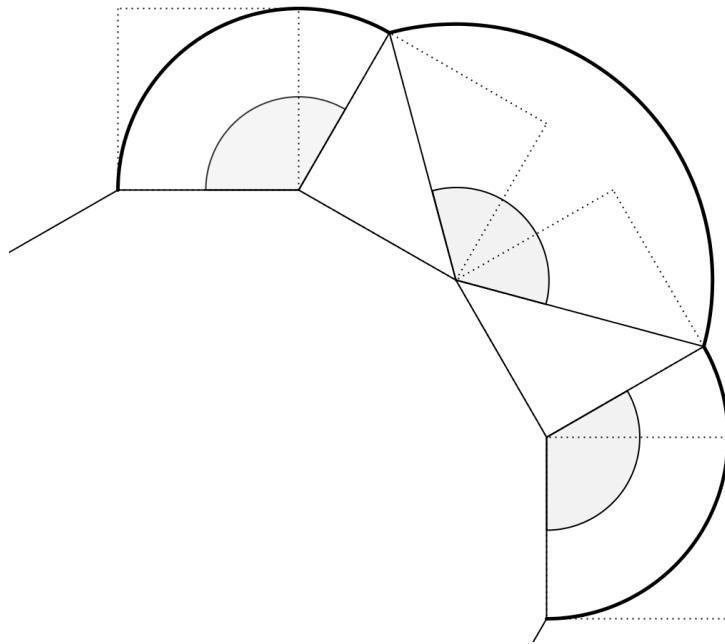
U graničnom slučaju, kada $n \rightarrow \infty$, dobijamo da je $A_h = 2 \odot$, tj površina ispod dva svoda je $4 \odot$. Kako je površina $2n$ -ugla takođe jednak sa $4 \odot$, odavde sledi da površina dijamogona teži nuli. Drugim rečima kada $n \rightarrow \infty$, dijagonon postaje prečnik nepokretne kružnice.

7.3. Dužina luka hipo- i epicikloide bez korišćenja integrala

Na osnovu prethodnog poglavlja možemo izračunati jedan još opštiji izraz, koji daje dužinu luka jednog svoda hipo- i epicikloide, korišćenjem jednostavne formule za dužinu luka ciklogona. Znamo da je dužina luka ciklogona jednak:

$$L^g = \sum_{k=1}^{n-1} l_k = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} r_k$$

gde su r_k , $k=1, 2, \dots, n-1$ poluprečnici kružnih isečaka sa ugлом od $\frac{2\pi}{n}$ radijana.



Slika 57. Dužina luka epiciklogona
generisana kvadratom

Ovu formulu moramo promeniti, jer kod epiciklogonih kružnih isečaka imamo uglove od $\frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{m}$ radijana, a kod hipociklogona od $\frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{m}$. Na *slici 57* možemo videti epiciklogen, kada je $m=12$ i $n=4$, pa kružni isečak ima ugao od $\frac{2\pi}{4} + \frac{2\pi}{12}$ radijana.

Očigledno je, da za dužinu luka jednog svoda možemo napisati formulu:

$$L_{e,h}' = \left(\frac{2\pi}{n} \pm \frac{2\pi}{m}\right) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} r_k = \frac{2\pi}{n} \left(1 \pm \frac{n}{m}\right) \sum_{k=1}^{n-1} r_k.$$

gde uzimamo znak plus za izračunavanje površinu epiciklogona, a minus za hipociklogen.

Još jednom, znamo da je $r_k = D \sin \frac{k\pi}{n}$, gde je D prečnik opisane kružnice kotrljajućeg mnogouglja, i da je dužina luka ciklogona $L_g = 4D \left(\frac{\pi}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}\right)$. Zato možemo pisati da je:

$$L_{e,h}' = 4D \left(1 \pm \frac{n}{m}\right) \left(\frac{\pi}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}\right)$$

U graničnom slučaju, kada $n, m \rightarrow \infty$, dobijamo jednu nepokretnu kružnicu sa poluprečnikom a i drugu kružnicu sa poluprečnikom b , koja se kotrlja unutar ili van prve, tako da se odnos broja stranice i dva poluprečnika ne menja, tj $\frac{n}{m} \rightarrow \frac{b}{a}$. Ako uzmemo u obzir, da je u tom slučaju $D = 2b$, tada dobijamo :

$$L'_{e,h} = 4D \left(1 \pm \frac{D}{2a}\right) = 8b \left(1 \pm \frac{b}{a}\right)$$

tj, dužina luka cele hipo- i epicikloide je jedenak:

$$L_{e,h} = \frac{a}{b} \cdot L'_{e,h} = s \cdot 8b \left(1 \pm \frac{1}{s}\right) = 8b(s \pm 1)$$

gde je $s = \frac{a}{b}$ broj svodova.

U sledećoj tabeli čemo dati neke primere:

Epi-hipotrohogon	faktor	Epi- hipocikloid	Dužina luka jednog svoda	Dužina luka
diamogon	$1 - \frac{n}{m} = \frac{1}{2}$	dijametar	$4b$	$8b$
deltogon	$1 - \frac{n}{m} = \frac{2}{3}$	deltoida	$\frac{16b}{3}$	$16b$
astrogon	$1 - \frac{n}{m} = \frac{3}{4}$	astroida	$6b$	$24b$
kardiogon	$1 + \frac{n}{m} = 2$	kardioda	$16b$	$16b$
nefrogram	$1 + \frac{n}{m} = \frac{3}{2}$	nefroida	$12b$	$24b$
ranunkulogon	$1 + \frac{n}{m} = \frac{6}{5}$	ranunkuloida	$\frac{48b}{5}$	$48b$

Tablica 2. Dužina luka neke poznate krive

7.4. Površina epi- i hipotrohoida

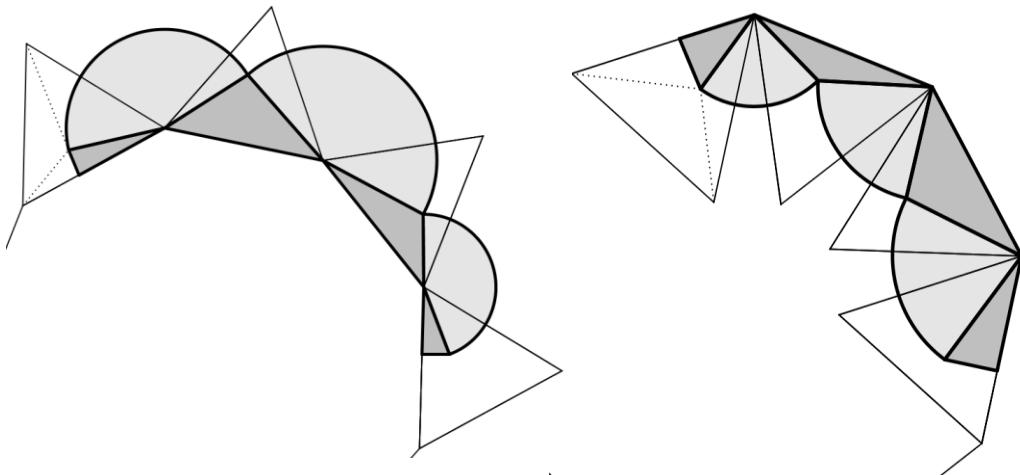
Površina ograničena sa nepokretnim mnogouglom i jednim svodom epi- ili hipotrohogona je data sa:

$$A_{et,ht}^g = \otimes + \left(1 \pm \frac{n}{m}\right) (\odot + \odot)$$

gde uzimamo znak plus za izračunavanje površine epitrohogona, a minus za hipotrohongan.

Ako $m, R \rightarrow \infty$, nepokretan mnogougao postaje prava, i kao granični slučaj iz prethodne formule dobijamo već poznatu formulu $A_t^g = \otimes + \odot + \odot$

Na *slici 57* je prikazana kriva dobijena kotrljanjem trougla oko i unutar pravilnog devetougla, kada je tačka z koja ostavlja trag leži u unutrašnjosti jednakostraničnog trougla.



Slika 58. Epi- i hipotrohogen genetisane trouglom

Tražena površina $A_{et,ht}^g$ sastoji se od četiri trougla, koje zajedno daju površinu kotrljajućeg trougla, i tri kružna isečka. Znači, možemo napisati:

$$A_{et,ht}^g = \otimes + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \varphi r_k^2$$

gde je $\frac{1}{2} \varphi r_k^2$ površina k -te kružne isečke.

U opštem slučaju, kada se pravilan mnogougao sa n stranica kotrlja oko pravilnog poligona sa m stranica, tačka z koja se zajedno kreće sa n-ugлом, konstruiše površinu, koja se sastoji od n kružnih sektora sa poluprečnikom r_k i uglovim φ , i skupa sa $n+1$ trouglom koji formira mnogougao koji je u pokretu. Poluprečnik r_k je isto kao kod trohogona jednak rastojanju tačke z i k-tog temena mnogougla, ali je sada ugao φ zbir ili razlika dva spoljašnja ugla, u zavisnosti od toga da li imamo epitrohogonu ili hipotrohogonu, tj. možemo pisati: $\varphi = \frac{2\pi}{n} \pm \frac{2\pi}{m}$. Znači, formulu za površinu trohogona moramo formirati na sledeći način:

$$A_{et,ht}^g = \otimes + \left(1 \pm \frac{n}{m}\right) \cdot \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n r_k^2.$$

Sada ćemo opet koristiti poznatu formulu iz kompleksne analize $\sum_{k=1}^n |z - z_k|^2 = n(r^2 + |z|^2)$, i dobijamo već navedeno rešenje:

$$A_{et,ht}^g = \otimes + \left(1 \pm \frac{n}{m}\right) (\odot + \odot)$$

Opst ćemo ispitati granični slučaj. Ako $n, m \rightarrow \infty$, tada mnogouglovi postaju kružnice, tako da se odnos broja stranica i poluprečnika kružnice ne menja, tj. $\frac{n}{m} \rightarrow \frac{b}{a}$. U tom slučaju važi da je:

$$A_{et,ht} = \odot + \left(1 \pm \frac{b}{a}\right) (\odot + \odot).$$

Kako epi- i hipotrohoid ima $\frac{b}{a} = s$ svodova, cela površina je sledeća:

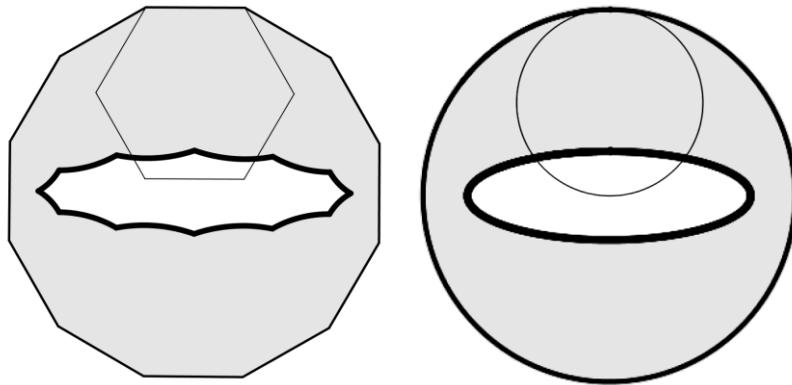
$$P_{et,ht} = s^2 \odot \pm s \cdot A_{et,ht} = s^2 \odot \pm s \left(\odot + \left(1 \pm \frac{b}{a}\right) (\odot + \odot) \right)$$

$$= \begin{cases} (s+1)((s+1)\odot + \odot) \\ (s-1)((s-1)\odot - \odot) \end{cases}$$

7.4. Elipsa

Sedmo poglavlje će završiti jednim interesantnim primerom hipotrohogona koju ćemo zvati elipsogonom. Nije teško shvatiti, šta će biti granični slučaj ovog hipotrohogona.

Neka je tačka z u unutrašnjosti kotrljajućeg šestougla - koja je unutar 12-ugla - ostavlja trag, što je prikazana na *slici 59*. Odnos broja stranice mnogouglova je $1:2$. Kada je $n \rightarrow \infty$, elipsagon postaje elipsa.



Slika 59. Elipsagon i elipsa

U graničnom slučaju, površina između stalnog kruga i jednog svoda krive je:

$$A_{ht} = \odot + \frac{1}{2}(\odot + \odot)$$

Iz ovoga sledi, da je površina elipse ispod 2 svoda sledeća:

$$P_{ht} = 4\odot - 2A_{ht} = \odot - \odot.$$

Ako uzmemo da je poluprečnik kotrljajuće kružnice r , a rastojanje između tačke z i centra te kružnice h , onda je:

$$P_{ht} = \odot - \odot = \pi(r^2 - h^2) = \pi(r - h)(r + h)$$

Možemo videti da su dužine $a = r + h$ i $b = r - h$ poluprečnici elipse, što znači da je:

$$P_{ht} = \odot - \odot = \pi ab,$$

što je poznata formula za površinu elipse.

Zaključak

U prvom delu rada sam, pomoću integrala, dokazala neke važne teoreme – dužinu luka, površinu i zapreminu obrtnog tela – vezane za cikloidu i njene srodne krive. Posle toga sam definisala pojam ciklogona i uvela hipotezu – ako broj stranica pravilnog mnogougla koji generiše ciklogen povećamo do beskonačnosti, tokom kotrljanja, posmatrana tačka opisuje cikloidu. Pomoću teorije ciklogona ponovo sam dokazala teoreme iz prvog dela rada. Suština rada jeste u tome da ukaže na to da možemo izračunati površinu, ograničene sa takvim složenim krivama kao što je na primer astroida ili kardioida, a sve to bez znanja parametarskih jednačina i integrala.

Literatura

- [1] E.H. Lockwood, *A book of curves*, Cambridge, 1961
- [2] Eli Maor, *Trigonometric Delights*, Princeton, New Jersey, 1998, pp 95-102.
- [3] George F. Simmons, *Calculus gems: Brief Lives and Memorable Mathematics*, The Mathematical Association of America, 2007
- [4] Ian Stewart, *Taming the Infinite*, London, 2008
- [5] Lipkovski, Aleksandar, *Linearna algebra i analitička geometrija*, Beograd
- [6] Rašajski, Dobrivoje N., *Analitička geometrija*, Beograd
- [7] Robert C. Yates, *A Handbook on Curves and Their Properties*, J.W. Edwards , Ann Arbor, 1947
- [8] Sain Márton, *Nincs királyi út!*, Budapest, 1986
- [9] Tacon David, *The Cycloid: “The Helen of Geometers”*, Parabola Volume 29, Issue 3, 1993
- [10] Tom M. Apostol and Mamikon A. Mnatsakanian, *Area & Arc Length of Trochogonal Arches*, Math Horizons, Nov. 2003, pp 24-27.
- [11] Tom M. Apostol and Mamikon A. Mnatsakanian, *Cycloidal Areas without Calculus*, Math Horizons , Sept.1999, pp. 12-16.
- [12] Tom M. Apostol and Mamikon A. Mnatsakanian, *Generalized Cyclogons*, Math Horizons , Sept. 2002 ,pp. 25-28.
- [13] Tom M. Apostol and Mamikon A. Mnatsakanian, *New Insight into Cycloidal Areas*, American Mathematical Monthly August-September, 2009, pp. 608-609.
- [14] Tom M. Apostol and Mamikon A. Mnatsakanian, *Sums of Squares of Distances*, Math Horizons ,Nov 2001, p. 21.
- [15] Weissten, Eric W., *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRC Press LLC, 1999.
- [16] <http://mathworld.wolfram.com>

Kratka biografija



Žužana Fekete je rođena 25.1.1986. godine u Senti, gde je završila osnovnu školu i Gimnaziju sa odličnim rezultatom. Na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Departman za matematiku i informatiku, upisala se na smer diplomirani matematičar - profesor matematike. Diplomirala je 2010. Iste godine upisala se na master studije na istom fakultetu, smer: matematika, modul: nastava matematike. Položila je sve predmete predviđene planom i programom, i tako stekla uslov za odbranu master rada.

Novi Sad, decembar 2012.

Žužana Fekete

**UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA**

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni Stampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Fekete Žužana

AU

Mentor: dr Nevena Pušić

MN

Naslov rada: Novi pristupi metričkim aspektima cikloide i njoj srodnih krivih

MR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / e

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2012

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (7/85/16/2/59/0) (broj poglavlja/ broj strana/ broj lit. citata/ broj tabela/ broj slika/ broj grafika broj priloga)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Geometrija

ND

Ključne reči: cikloida, hipocikloida, epickloida, teorema dvostrukе generacije, ciklogen

PO

UDK:

Čuva se:

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Master rad obrađuje temu cikloide, njene najbitnije karakteristike, srodne krive i jednu metodu izračunavanja površine ispod cikloide i njenih srodnih krivi, odnosno dužinu luka bez korišćenja parametarskih jednačina i integrala. Prikazuje Brahistokronov problem, definiciju i jednačinu cikloide. Sadrži proračune dužine luka jednog svoda, površine ispod krive i zapremine obrtnog tela. Treće poglavje prikazuje srodne krive: hipocikloidu, epicikloidu, pericikloidu i trohoidu. Zatim sadrži definicije ciklogona, epiciklogona, hipociklogona, trohogona, epitrohogona i hipotrohogona. Bavi se određivanjem površine i dužine luka ciklogona. Sa sličnom metodom dokazuje teoreme o površini srodnih krivi. Na kraju pokazuje nekoliko konkretnih primera, kao što su: kardioida i kardiogon, nefroida i nefrogon, astroida i astrogon, deltoida i deltigon, diamogon, elipsa i elipsagon.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: jun 2012

DP

Datum odbrane: oktobar 2012

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Đura Paunić, redovni professor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Olga Bodroža-Pantić, redovni professor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Nevena Pušić, redovni professor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE KEY
WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification umber:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Graduation thesis

CC

Author: Fekete Zsuzsanna

AU

Mentor: dr Nevena Pušić

MN

Title: New Approach to Cycloid and Related Curves

XI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: s/en

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2012

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

PP

Physical description: (7/85/16/2/59/0) (broj poglavlja, broj strana, broj lit. citata, broj tabela,
broj slika, broj grafika, broj priloga)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Geometry

Key words: cycloid, epicycloid, hypocycloid, double generation theorem, cyclogon

UC:

Holding data:

HD Note:

Abstract: Master thesis deals with the topic cycloid, its most important characteristics, related curves and a method of calculating the arc length and the area under the cycloid and related curves without the use of parametric equations and integrals. Displays Brahistrokronov problem definition and equation of the cycloid. Includes calculations arc length of one arch, area under the curve and the volume of the solid of revolution. The third chapter shows related curves: hypocycloid, epicycloid, trochoid. Then includes definitions of cyclogon, epicyclogon, hypocyclogon, trochogon, and epitrochogon, hypotrochogon. It deals with the area and with the arc length of the cyclogon. Contains the proofs of the theoremes about the area of the related curves with the similar method. In the end show some concrete examples like cardioid and cardiogon, nephroid and nephrogon astroid and astrogon, deltoid and deltagon, diamogon, ellipse and ellipsogon.

AB

Accepted by the Scientific Board on: Jun 2012

Defended: August 2012

Thesis defend board:

President: Dr Đura Paunić, full profesor, Faculty of Science, Novi Sad

Member: Dr Olga Bodroža-Pantić, full profesor, Faculty

of Science, Novi Sad

Mentor: Dr Nevena Pušić, full profesor, Faculty of Science, Novi Sad