UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Zorica Bera

Problem pakovanja kvadrata

- Master rad-

Mentor:

dr Bojan Bašić

Novi Sad, 2019.

Predgovor

Pakovanje geometrijskih objekata, kao što su krugovi i kvadrati, u drugi objekat predstavlja jednu klasu problema iz domena kombinatorne geometrije. Za problem pakovanja jediničnih kvadrata u kvadrat zainteresovala sam se pri susretu sa srodnim problemom bušenja kvadrata u okviru predmeta geometrijski praktikum na master studijama matematike. Ova oblast istraživanja je relativno mlada, budući da je aktivna tek poslednjih četrdesetak godina.

U ovom radu razmatra se problem određivanja stranice $s(n)$ najmanjeg kvadrata u koji se može spakovati n jediničnih kvadrata. Očigledno, funkcija $s(n)$ je neopadajuća i važi $s(n^2) = n$, a lako se vide i ograničenja $\sqrt{n} \leq s(n) \leq \lceil \sqrt{n} \rceil$. Za neke brojeve n moguće je odrediti tačnu vrednost funkcije $s(n)$, dok se za ostale, za koje tačne vrednosti još nisu određene, istraživanja kreću u pravcu nalaženja što boljih donjih i gornjih ograničenja.

Rad je koncipiran na sledeći način. U prvom poglavlju daćemo neke (uglavnom jednostavnije) primere pakovanja pomoću kojih se dobijaju neka gornja ograničenja za $s(n)$ za određene vrednosti n, i pomenućemo neke ideje kako se ova pakovanja mogu dalje nadograđivati u svrhu dobijanja gornjih ograničenja i za neke druge (veće) vrednosti n (pakovanja i tvrđenja iz ovog poglavlja su rezultati više naučnika koji su se bavili ovom tematikom).

U drugom poglavlju najpre navodimo i dokazujemo nekoliko lema koje će biti potrebne u tom poglavlju a i nadalje u radu. Ove leme su suštinske za tehniku tzv. *neizbežnih tačaka,* čije je osnove postavio Friedman [5], i pomoću nje pronašao nove dokaze, znatno prostije od do tada poznatih, za vrednosti $s(n)$ za $n \in \{2, 3, 5, 8, 15, 24, 35\}$. Ovi dokazi će biti izloženi i u ovom master radu. Uopštavanjem ove tehnike (uvodeći tzv. *skoro neizbežne tačke*), Friedman je dokazao i jednakosti $s(7) = 3$ i $s(14) = 4$; nakon primene ideje sa skoro neizbežnim tačkama, ovi dokazi se svode na ispitivanje određenog broja slučajeva, a u radu će biti prezentovana glavna ideja tih dokaza.

U trećem poglavlju prikazaćemo kako su Kearney i Shiu [9] dalje modifikovali ovu tehniku i time znatno pojednostavili dokaz jednakosti $s(7) = 3$, ali i dokazali jednakost $s(6) = 3$. Dalje ćemo u ovom poglavlju preći na rezultat Stromquista [11] i (nakon još nekoliko neophodnih tehničkih lema) dokazati jednakost $s(10) = 3 + \sqrt{\frac{1}{2}}$.

U četvrtom poglavlju prezentovaćemo rad Nagamochija [10]. U ovom radu autor je najpre uopštio problem posmatrajući pakovanja jediničnih kvadrata u pravougaonik i dokazao neke nejednakosti za takva pakovanja, a zatim je pokazao da, kao posledicu tih rezultata, možemo dobiti jednakosti $s(n^2 - 1) = s(n^2 - 2) = n$; ovo je od velikog značaja budući da je, primetimo, to prvo (a i dosad jedino) poznato tvrđenje kojim se određuje tačna vrednost funkcije s za beskonačnu familiju argumenata (izuzimajući, naravno, trivijalan slučaj $s(n^2) = n$). Dodatno, Nagamochijev rad daje i netrivijalno donje ograničenje funkcije $s(N)$ za bilo koji argument N koji nije oblika n^2, $n^2 - 1$ niti $n^2 - 2$.

* * *

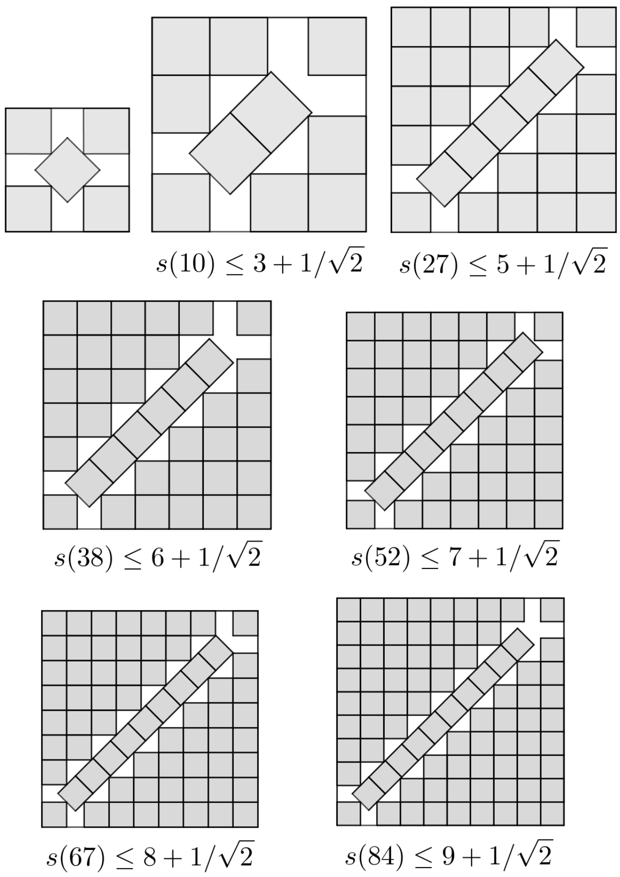
Zahvaljujem, pre svega, svom mentoru, dr Bojanu Bašiću, na pomoći, savetima i spremnosti da, i tokom studija i pri izradi ovog rada, odgovori na svakakva moja pitanja, kao i na svim predavanjima i vežbama iz najlepših oblasti matematike. Zahvaljujem se i dr Olgi Bodroža Pantić i dr Borisu Šobotu što su prihvatili da budu članovi komisije, pokazali predusretljivost i svojim sugestijama značajno unapredili ovaj rad. Posebno hvala članovima moje porodice koji su svih ovih godina verovali da ću uspeti. Hvala Nenadu Morači na nesebičnoj pomoći i podršci.

Novi Sad, 2019. Zorica Bera

Sadržaj

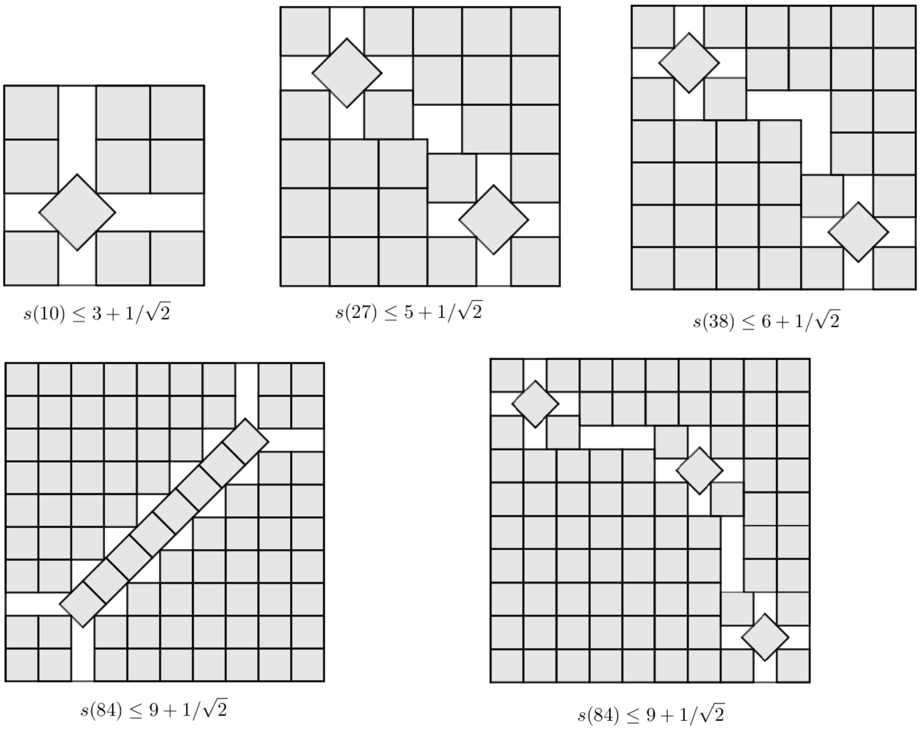
1 Jednostavniji primeri pakovanja kvadrata

Već iz uvodnih reči jasno je da određivanje minimalne stranice kvadrata u koji se može postaviti određen broj nepreklapajućih jediničnih kvadrata, podrazumeva da će ponekad bar neki od jediničnih kvadrata biti postavljen pod određenim uglom (različitim od 0) u odnosu na stranicu kvadrata u koji se jedinični kvadrati pakuju. Göbel [8] je otkrio i prvi objavio da postavljanjem dijagonalne trake jediničnih kvadrata, odnosno, postavljanjem kvadrata pod uglom od 45° u kvadrat stranice $a+1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ može biti spakovano $a^2+a+3+\lfloor (a-1)\sqrt{2} \rfloor$ kvadrata. Tako za $a=1$ dobijamo $s(5) \leq 2+\frac{1}{\sqrt{2}}$, za $a=2$, $s(10) \leq 3+\frac{1}{\sqrt{2}}$, za $a=4$, $s(27) \leq 5+\frac{1}{\sqrt{2}}$. Na ovaj način dobijamo najbolja poznata pakovanja za sve vrednosti $a \leq 8$ osim za $a=3$, tj. dobijamo pakovanja 5, 10, 27, 38, 52, 67 i 84 jediničnih kvadrata.



Slika 1.

Nekim promenama u položaju kvadrata dobijaju se alternativna pakovanja, od kojih neka imaju minimalan broj rotiranih kvadrata, što je ilustrovano na sledećoj slici:



Slika 2.

Jasno je da u kvadrat stranice $s(n)+1$ može da se upakuje $n+2\lfloor s(n)\rfloor+1$ kvadrata, tako što se na pakovanje n kvadrata u kvadrat stranice $s(n)$ dodaje pojas oblika slova „L" širine 1, u koji se može smestiti $2\lfloor s(n)\rfloor + 1$ kvadrata.

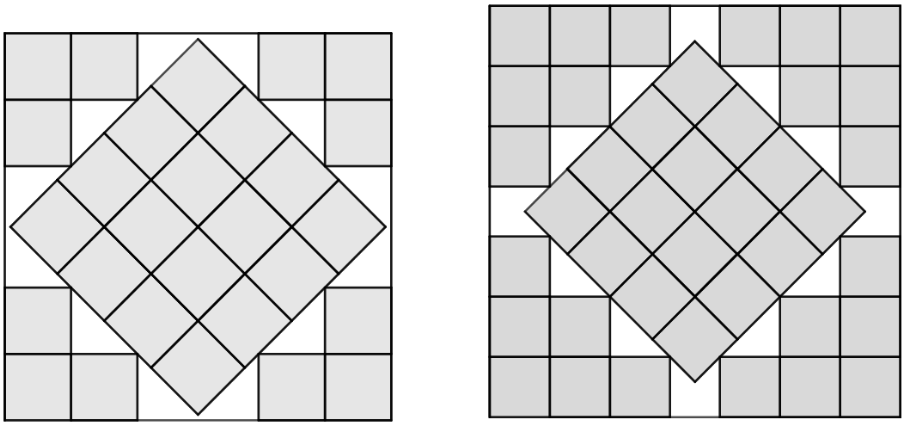
Göbel je takođe pronašao da ako celi brojevi a i b zadovoljavaju nejednakost

$$a - 1 < \frac{b}{\sqrt{2}} < a + 1,$$

onda je

$$s(2a^2 + 2a + b^2) \leq a + 1 + \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

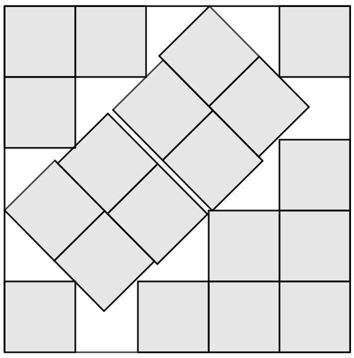
To se postiže postavljanjem $b \times b$ kvadrata pod uglom od 45° u centru kvadrata. Primetimo da, na primer, za $b = 4$ datu nejednakost zadovoljavaju i $a = 2$ i $a = 3$. Tako u prvom slučaju imamo da je $s(28) \leq 3 + 2\sqrt{2}$, a u drugom $s(40) \leq 4 + 2\sqrt{2}$, kao na sledećim slikama:



$s(28) \leq 3 + 2\sqrt{2}$ $s(40) \leq 4 + 2\sqrt{2}$

Slika 3.

Charles Cottingham koristio je dijagonalne trake širine 2 i tako poboljšao neka od Göbelovih pakovanja, a na sledećoj slici pokazaćemo pakovanje 19 kvadrata kojim je Robert Wainwright pokazao da $s(19) \leq 3 + 4\sqrt{2}/3$ (rezultate prenose Friedman [5] i Gardner [6]).

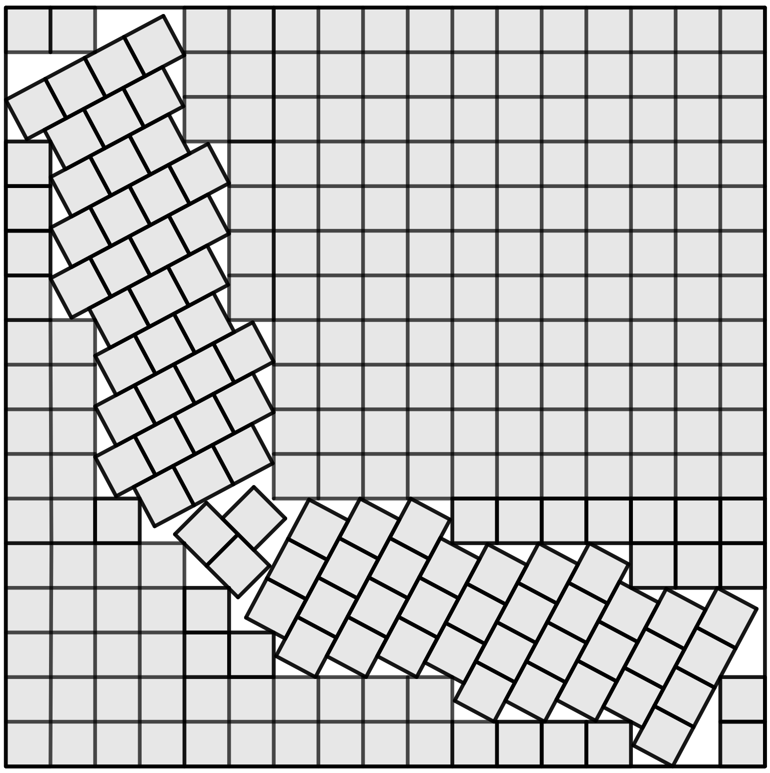


Slika 4.

Vidimo da su i u ovom pakovanju središnji kvadrati pod uglom od 45°, ali oni ne formiraju traku.

Postoji pretpostavka da je $s(n^2 - n) = n$ za male vrednosti n. Najmanji poznat kontraprimer za ovu pretpostavku dao je Lars Cleemann tako što je 272 kvadrata spakovao u kvadrat stranice manje od 17. U ovom pakovanju, osim jediničnih kvadrata čije su stranice paralelne stranicama kvadrata u koji se oni pakuju, tri kvadrata su pod uglom od 45°, a ostali su pod uglom arctg $\frac{8}{15}$ ili arctg $\frac{15}{8}$, pa se jednostavnim trigonometrijskim razmatranjem pokazuje da je stranica kvadrata sa slike manja od 17, tj.

$$s(272) \leq 15 + \frac{15}{17} + \frac{16}{15} < 17$$



Slika 5.

Generalizacijom pakovanja sa $b \times b$ kvadrata u centru pod uglom od 45° postavljanjem centralnog kvadrata malo dalje od centra dobijamo pakovanje $2a^2 + 4a + b^2 + 1$ kvadrata u kvadrat stranice $a + \dfrac{3}{2} + \dfrac{b}{\sqrt{2}}$, što daje najbolja poznata pakovanja za 26 i 85 kvadrata. Ta i mnoga druga pakovanja zainteresovani čitalac može naći u [4].

2 Donja ograničenja za neke vrednosti $s(n)$

Pre nego što definišemo skup neizbežnih tačaka, pomoću kog ćemo određivati donja ograničenja funkcije $s(n)$ za neke vrednosti argumenta n, potrebno je da dokažemo nekoliko tehničkih lema.

2.1 Tehničke leme

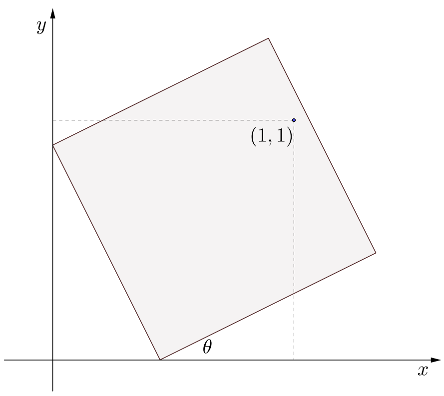
Lema 1 *Svaki jedinični kvadrat u prvom kvadrantu čiji centar je u* $[0,1]^2$ *sadrži, u unutrašnjosti ili na rubu, tačku* $(1,1)$.

Dokaz: S obzirom na uslov da je centar jediničnog kvadrata u $[0,1]^2$, položaj kvadrata u kom je njegov centar najudaljeniji od tačke $(1,1)$ (u poređenju sa svim jediničnim kvadratima nagnutim pod istim uglom u odnosu na x-osu) je onaj gde jedinični kvadrat dodiruje koordinatne ose. Ako pokažemo da jedinični kvadrat u tom položaju sadrži tačku $(1,1)$ u svojoj unutrašnjosti ili na rubu, to će značiti da i jedinični kvadrat koji ne dodiruje koordinatne ose, a ispunjava uslove leme, takođe sadrži tačku $(1,1)$.

Ako je kvadrat pod uglom θ u odnosu na pozitivan smer x-ose, dva njegova temena su $(\sin\theta, 0)$ i $(0, \cos\theta)$. Druga dva temena kvadrata $(\cos\theta, \cos\theta + \sin\theta)$ i $(\cos\theta + \sin\theta, \sin\theta)$ leže na pravoj $y - \sin\theta = -\operatorname{ctg}\theta\,(x - \sin\theta - \cos\theta)$. Kada je $x = 1$,

$$y = \frac{\sin^2\theta - \cos\theta(1 - \sin\theta - \cos\theta)}{\sin\theta}$$

$$y = \frac{1 + \cos\theta(1 - \sin\theta)}{\sin\theta} \geq 1$$



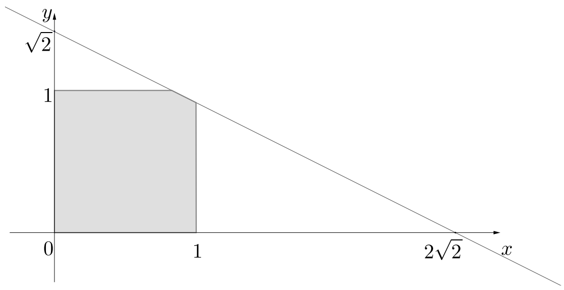
Slika 6.

Znači, tačka $(1,1)$ je ispod prave određene drugim parom temena, pa je unutar kvadrata.

Napomena 1: Iz prikazanog dokaza vidimo da važi i malo opštije tvrđenje: svaki jedinični kvadrat u prvom kvadrantu koji ima centar u pravougaoniku $[0,a]\times[0,b]$, za $0<a\le 1$, $0<b\le 1$, sadrži tačku (a,b).

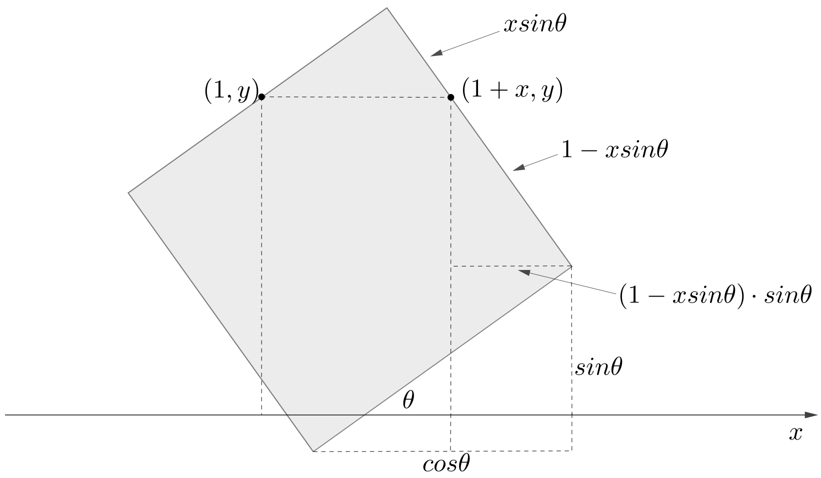
Lema 2 *Neka je* $0<x\le 1$, $0<y\le 1$ *i* $x+2y<2\sqrt{2}$. *Tada bilo koji jedinični kvadrat u prvom kvadrantu čiji centar se nalazi u* $[1,1+x]\times[0,y]$ *sadrži tačku* $(1,y)$ *ili tačku* $(1+x,y)$.

Dokaz: Zbog kasnije česte primene ove leme, primetimo prvo da (x,y) pripada ovakvoj oblasti:



Slika 7.

Ako pokažemo da jedinični kvadrat čiji je centar u $[1,1+x]\times[0,y]$ i koji sadrži tačke $(1,y)$ i $(1+x,y)$ na svom rubu sadrži tačku na x-osi, onda će dato tvrđenje važiti za svaki jedinični kvadrat koji ispunjava uslove leme, a koji se može dobiti translacijom ovog kvadrata. Kvadrat dobijen translacijom „vertikalno naviše" (onoliko koliko dozvoljava uslov leme o položaju njegovog centra), tačke $(1,y)$ i $(1+x,y)$ će sadržati u unutrašnjosti, a posle horizontalne translacije tog kvadrata, u unutrašnjosti kvadrata će ostati bar jedna od pomenutih tačaka.



Slika 8.

Pošto je $y \leq 1$, ako tačke $(1, y)$ i $(1+x, y)$ leže na istoj stranici kvadrata, očigledno je da će kvadrat sadržati tačku x-ose na svom rubu. Ako tačke $(1, y)$ i $(1+x, y)$ ne leže na istoj stranici kvadrata i ako je kvadrat nagnut pod uglom θ u odnosu na x-osu, najniže teme kvadrata ima koordinate

$$(1 + x + (1 - x\sin\theta)\sin\theta - \cos\theta, y - (1 - x\sin\theta)\cos\theta - \sin\theta),$$

koje se dobijaju osnovnim trigonometrijskim razmatranjima prikazanim na slici. Ova tačka je van prvog kvadranta kada

$$f(\theta) = \cos\theta + \sin\theta - x\sin\theta\cos\theta > y.$$

Iz

$$f'(\theta) = (\cos\theta - \sin\theta)(1 - x(\cos\theta + \sin\theta))$$

kritične tačke $f(\theta)$ su:

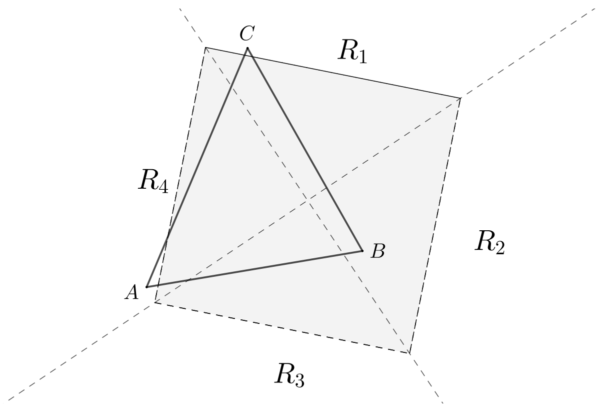
$$(\cos\theta, \sin\theta) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$(\cos\theta, \sin\theta) = (\frac{1 \pm \sqrt{2x^2 - 1}}{2x}, \frac{1 \mp \sqrt{2x^2 - 1}}{2x})$$

Druge dve od ove tri vrednosti su realne vrednosti samo za $x \geq 1/\sqrt{2}$, što znači da za $x < 1/\sqrt{2}$ postoji samo jedna kritična tačka. Fiksiranjem jednog $x \geq 1/\sqrt{2}$ i posmatranjem leve i desne okoline pomenutih dveju tačaka, može se zaključiti da u tim tačkama funkcija dostiže maksimum, a ne minimum, pa kako je $f''(45°) > 0$, $f(\theta)$ postiže minimum za $\theta = 45°$. Stoga, kad je $y < \sqrt{2} - \frac{x}{2}$, kvadrat sadrži neku tačku x -ose. $\square$

Lema 3 *Ako je centar jediničnog kvadrata U u unutrašnjosti trougla ABC, čije stranice nisu veće od 1, onda kvadrat sadrži A, B ili C.*

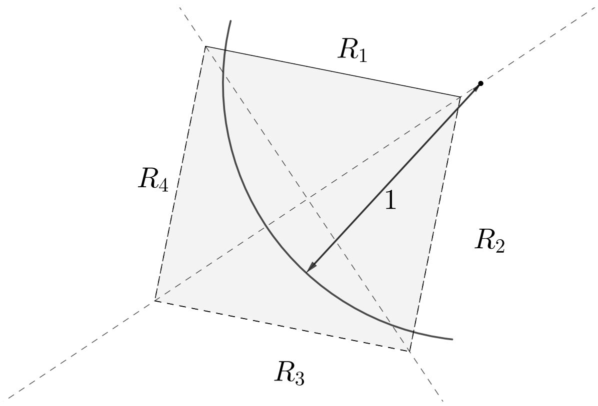
Dokaz: Prave koje sadrže dijagonale kvadrata U dele ravan na četiri oblasti obeležene u smeru kazaljke na satu sa R_1, R_2, R_3, R_4.



Slika 9.

Te oblasti imaju zajedničke rubne poluprave. Tačke A, B i C ne mogu sve biti na istoj strani bilo koje prave na kojoj su dijagonale, jer tada trougao ABC ne bi sadržao centar kvadrata U. Tako, ili R_1 i R_3 sadrže bar po jedno teme trougla, ili ih sadrže druge dve oblasti. U svakom slučaju, dva temena trougla ABC su u oblastima (moguće na rubu) u kojima su dve naspramne stranice kvadrata. Kako rastojanje između temena trougla nije veće od 1, a naspramne stranice kvadrata su na rastojanju 1, kvadrat mora sadržati bar jednu od ovih tačaka.

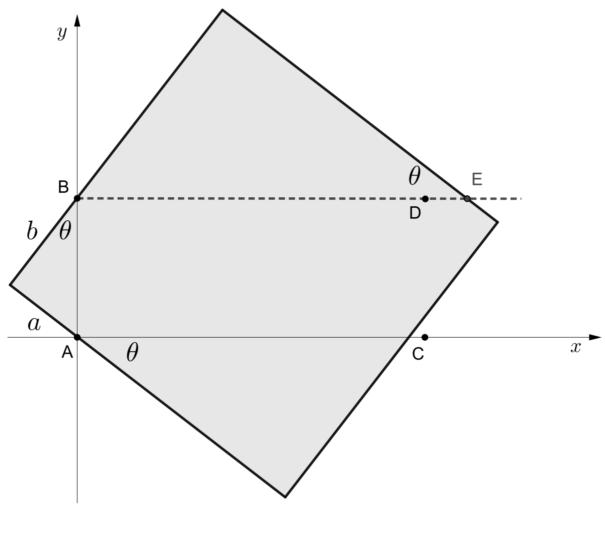
Primetimo da je nemoguće da dva temena trougla budu na rubovima oblasti ako su van jediničnog kvadrata, jer je rastojanje između njih manje od 1. Ako bi jedno teme trougla bilo na zajedničkoj rubnoj polupravi dveju susednih oblasti, onda bar jedno teme trougla mora biti u nekoj od preostale dve oblasti (jer ne mogu sva tri temena biti u dvema susednim oblastima), a kako je na rastojanju manjem od 1 od temena koje je na rubu, ne može biti van kvadrata.



Slika 10.

Lema 4 *Ako je centar jediničnog kvadrata U sadržan u pravougaoniku $R = [0,1] \times [0, 0.4]$, onda U sadrži teme pravougaonika R.*

Dokaz: Neka je $A(0,0)$, $B(0,0.4)$, $C(1,0)$, $D(1,0.4)$. Dovoljno je pokazati da bilo koji jedinični kvadrat U sa centrom u pravougaoniku R kom su A i B na rubu, sadrži ili C ili D. To je jasno ako A i B leže na istoj stranici kvadrata U. Ako $\theta = 45°$, U sadrži i C i D. Dokazaćemo u nastavku da ako je $\theta < 45°$, U sadrži tačku D, a ako je $\theta > 45°$, U sadrži tačku C.



Slika 11.

Razmotrićemo slučaj kad je $\theta < 45°$. Prateći oznake sa slike, očigledno je da:

$$a < \frac{0.4}{\sqrt{2}} \text{ pa je } b > \frac{0.4}{\sqrt{2}} \text{ tj. } 1 - b < 1 - \frac{0.4}{\sqrt{2}}$$

Ako je tačka E presečna tačka prave BD sa stranicom kvadrata, dalje imamo:

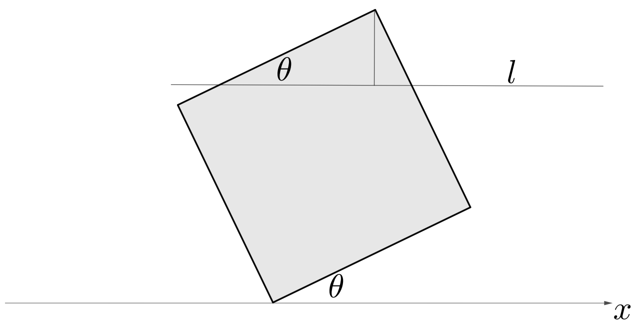
$$BE > (1 - \frac{0.4}{\sqrt{2}})\sqrt{2} = \sqrt{2} - 0.4 > 1 > BD$$

što znači da je D unutar kvadrata. □

Lema 5 *Ako jedinični kvadrat ima centar ispod prave $y = 1$ i potpuno je iznad x-ose, onda je dužina preseka prave $y = 1$ sa kvadratom najmanje $2\sqrt{2} - 2$.*

Dokaz: Neka je l prava $y = 1$. Pošto je centar kvadrata ispod l, dva ili manje temena kvadrata su iznad l. Ako su dva temena iznad l, onda l preseca dve naspramne stranice kvadrata, a samim tim presečna duž ima dužinu najmanje 1. Ako nijedno teme nije iznad l, onda dva temena leže na x-osi, a dužina presečne duži je 1.

Pretpostavimo sad da je jedno teme iznad l. U tom slučaju presečna duž se smanjuje pomeranjem kvadrata nadole dok ne dodirne x-osu.



Slika 12.

Ako kvadrat gradi ugao θ sa x-osom, vertikalna duž sa slike ima dužinu $\sin\theta + \cos\theta - 1$, tako da je dužina preseka kvadrata sa l:

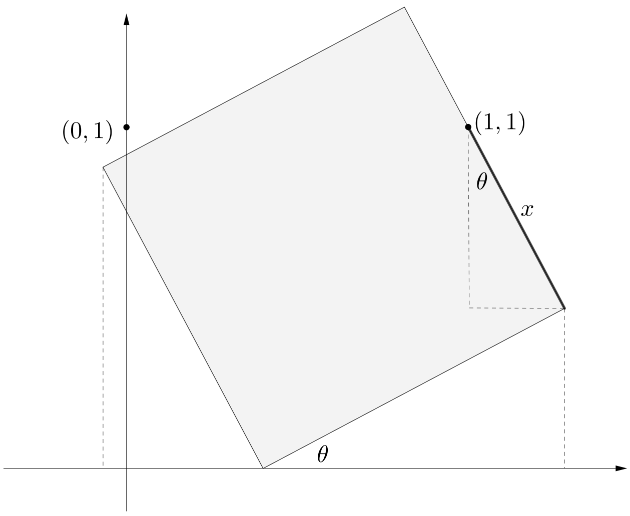
$$D = (\sin\theta + \cos\theta - 1)(\operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta)$$

$$D = \frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta}$$

Presek je minimalan kada je $\frac{dD}{d\theta} = 0$, tj. $\frac{(\sin\theta - \cos\theta)(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta \sin^2\theta} = 0$, što se javlja za $\theta = 45°$. Znači, $D \geq \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2} - 2$. $\square$

Lema 6 *Ako jedinični kvadrat ima centar u oblasti* $[0,1]^2$*, ne sadrži bilo koju od tačaka* $(0,1)$ *i* $(1,1)$*, a potpuno je iznad* x*-ose, onda kvadrat pokriva neku tačku* $(0,y)$ *za* $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ *i neku tačku* $(1,y)$ *za* $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$.

Dokaz: Jedinični kvadrat u datom položaju spustićemo do dodira sa x-osom i translirati horizontalno do dodira sa tačkom $(1,1)$, tj. tako da tačka $(1,1)$ bude na njegovom rubu. Oba pomeranja spuštaju presek sa y-osom (videćemo kasnije da taj presek zaista i postoji). Pokazaćemo da takav kvadrat koji dodiruje x-osu i tačku $(1,1)$ pokriva neku tačku $(0,y)$ za $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$, a drugi deo leme sledi iz simetrije.



Slika 13.

Ako je x rastojanje obeleženo na slici, onda je $\sin\theta + x\cos\theta = 1$ ili $x = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$. To znači da je x-koordinata tačke dodira kvadrata sa x-osom:

$$1 + x\sin\theta - \cos\theta = 1 + \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta - \cos\theta = 1 + \operatorname{tg}\theta(1-\sin\theta) - \cos\theta.$$

Levo teme kvadrata je tačka: $(1 + \operatorname{tg}\theta(1-\sin\theta) - \cos\theta - \sin\theta, \cos\theta)$, pa tačka najvišeg preseka kvadrata sa y-osom ima y-koordinatu $D = \cos\theta - \operatorname{tg}\theta(1+$

$\operatorname{tg}\theta(1-\sin\theta)-\cos\theta-\sin\theta)$ (presek y-ose i prave kroz levo teme kvadrata sa koeficijentom pravca $\operatorname{tg}\theta$), tj.

$$D=\frac{\cos^3\theta+\sin\theta(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

Primetimo da je $D>\cos\theta$, što znači da postoji presek kvadrata sa y-osom, jer, ako bi prava na kojoj leži „gornja” stranica kvadrata sekla y-osu u tački koja nije na stranici kvadrata, y-koordinata preseka bila bi manja od $\cos\theta$. Iz $\dfrac{dD}{d\theta}=\dfrac{(1-\cos\theta-\sin\theta)(1-\sin\theta)}{\cos^3\theta}<0$, D je opadajuće, pa je minimalna vrednost D granična vrednost D kad θ teži pravom uglu, a to je $\frac{1}{2}$ po Lopitalovom pravilu.$\square$

Lema 7 *Ako jedinični kvadrat ima centar u oblasti* $[0,1]^2$*, ne sadrži nijednu od tačaka* $(0,1)$ *ili* $(1,1)$ *i ceo je iznad* x*-ose, tada kvadrat pokriva tačku* $(0,\sqrt{2}-\frac{1}{2})$ *ili tačku* $(1,\sqrt{2}-\frac{1}{2})$*.*

Dokaz: Ako centar kvadrata ima y-koordinatu manju ili jednaku $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$, po lemi 2 pokriva jednu od dve navedene tačke. Ako je y-koordinata centra jediničnog kvadrata između $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$ i 1, onda je jedna od tih tačaka pokrivena na osnovu leme 4.$\square$

2.2 Skupovi neizbežnih tačaka

Da bismo odredili donje ogranjčenje za $s(n)$, tj. broj k takav da $s(n)\geq k$, naći ćemo skup P – skup $n-1$ tačaka u kvadratu S sa stranicom k, tako da svaki jedinični kvadrat u S sadrži neku od tačaka iz P, moguće na svom rubu.

Homotetijom sa faktorom $1-\frac{\epsilon}{k}$ kvadrat S sa skupom P preslikava se u kvadrat S' sa skupom tačaka P'. Tačke skupa P', njih $n-1$, su u kvadratu S' sa stranicom $k-\epsilon$, tako da svaki jedinični kvadrat u S' sadrži element skupa P' u svojoj unutrašnjosti. Zato u kvadrat stranice $k-\epsilon$ ne može da se spakuje više od $n-1$ nepreklapajućih jediničnih kvadrata, odakle sledi da je $s(n)\geq k$.

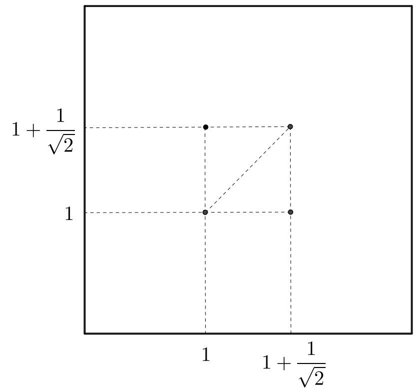
Skup P zvaćemo **skupom neizbežnih tačaka** u S ili često i **neizbežnim skupom tačaka**. Nadalje dokazujemo donja ograničenja za $s(n)$ pokazujući da su neki skupovi neizbežni skupovi. Dakle, kada želimo da pokažemo da je $s(n)\geq k$, dovoljno je da nađemo skup od $n-1$ neizbežnih tačaka u kvadratu sa stranicom k.

Teorema 1 $s(2)=s(3)=2$.

Dokaz: Znamo da $s(2) \leq s(3) \leq s(4) = 2$, pa je za dokaz ove teoreme dovoljno pokazati da $s(2) \geq 2$, što znači da nam je potreban jednočlani skup neizbežnih tačaka. Posmatrajmo jedinični kvadrat U u $[0,2]^2$. Centar kvadrata U nalazi se u $[0,1]^2$ ili u $[0,1] \times [1,2]$ ili u $[1,2] \times [0,1]$ ili u$[1,2]^2$, pa kad se na bilo koji od tih slučajeva primeni lema 1, znamo da U sadrži tačku $(1,1)$. Skup $P = \{(1,1)\}$ je skup neizbežnih tačaka u $[0,2]^2$, čime je tvrđenje dokazano.□

Teorema 2 $s(5) = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Dokaz: Skup $P = \Big\{(1,1),(1,1+\frac{1}{\sqrt{2}}),(1+\frac{1}{\sqrt{2}},1),(1+\frac{1}{\sqrt{2}},1+\frac{1}{\sqrt{2}})\Big\}$ je skup neizbežnih tačaka u $[0,2+\frac{1}{\sqrt{2}}]^2$. Jedinični kvadrat može da zauzme jedan od sledećih položaja: njegov centar je u uglu, tj. u kvadratu $[0,1]^2$ ili jednom od ostalih simetričnih, njegov centar je u pravougaoniku između ugaonih kvadrata i centar je u jednom od trouglova sa slike.

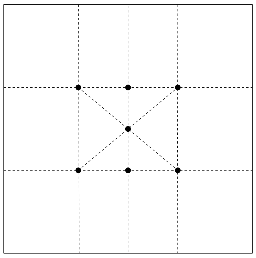


Slika 14.

Ako je centar u ugaonom kvadratu, onda su tačke neizbežne po lemi 1. Ako je centar u pravougaoniku do stranice, onda se primenjuje lema 2, tako da se uvrste vrednosti $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $y = 1$. Ako je centar u jednom od trougova sa slike, može se primeniti lema 3, jer stranice trouglova nisu veće od 1. Dakle, kvadrat stranice $2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ima četiri neizbežne tačke, pa je $s(5) \geq 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, a u prvom poglavlju smo videli Göbelovu eksplicitnu konstrukciju koja pokazuje da je to ujedno i gornje ograničenje, te važi jednakost. □

Teorema 3 $s(8) = 3$

Dokaz: Skup $P = \{(0.9, 1), (1.5, 1), (2.1, 1), (1.5, 1.5), (0.9, 2), (1.5, 2), (2.1, 2)\}$ je skup neizbežnih tačaka u $[0, 3]^2$.



Slika 15.

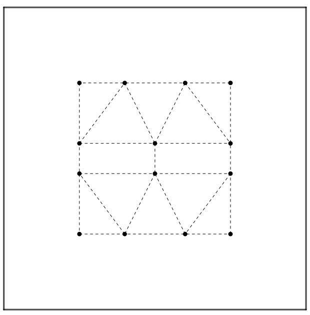
Na pravougaonike u uglovima kvadrata sa slike primenjuje se lema 1 (napomena 1), na pravougaonike uz stranice kvadrata lema 2, a na trouglove lema 3. Skup od sedam neizbežnih tačaka daje nam $s(8) \geq 3$, ali znamo da $s(8) \leq s(9) = 3$, pa je dokazana jednakost.$\square$

Teorema 4 $s(15) = 4$

Dokaz: Skup

$$P = \{(1, 1), (1.6, 1), (2.4, 1), (3, 1), (1, 1.8), (2, 1.8), (3, 1.8),$$
$$(1, 2.2), (2, 2.2), (3, 2.2), (1, 3), (1.6, 3), (2.4, 3), (3, 3)\}$$

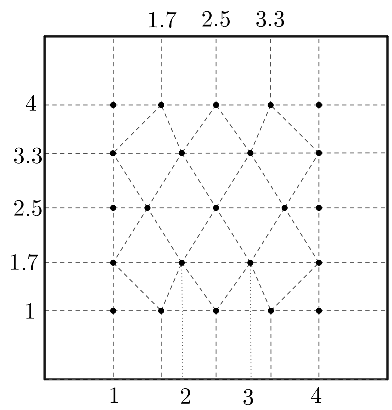
je skup neizbežnih tačaka u $[0, 4]^2$, jer se na kvadrate u uglovima može primeniti lema 1, na pravougaonike na rubu lema 2, na trouglove lema 3, kao u prethodnim teoremama, a za pravougaonike u centru kvadrata primenjuje se lema 4. Skup od 14 neizbežnih tačaka daje nam $s(15) \geq 4$, ali pošto je $s(15) \leq s(16) = 4$, važi jednakost.



Slika 16.

Teorema 5 $s(24) = 5$

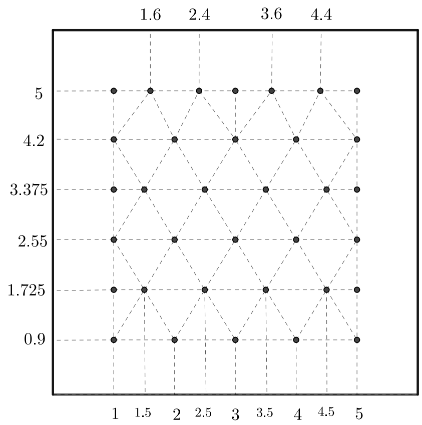
Dokaz: Skup neizbežnih tačaka prikazan je na slici. Sa sličnim argumentima kao u prethodnim teoremama, primenjuju se leme 1, 2 i 3. Kvadrati i pravougaonici sa slike očigledno ispunjavaju uslove leme 1 i leme 2, a izračunavanjem dužina stranica trouglova lako se vidi da oni ispunjavaju uslove leme 3. Pošto smo u kvadratu sa stranicom dužine 5 odredili skup od 23 neizbežne tačke, zaključujemo da je $s(24) \geq 5$, pa kako je i $s(24) \leq s(25) = 5$, važi jednakost.



Slika 17.

Teorema 6 $s(35) = 6$

Dokaz: Skup neizbežnih tačaka prikazan na slici 18 odabran je tako da pravougaonici i trouglovi zadovoljavaju uslove leme 1 (napomena 1), leme 2 i leme 3, pa važi tvrđenje.

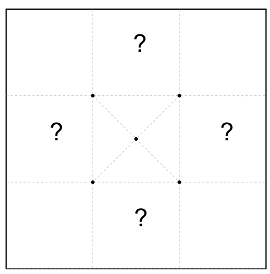


Slika 18.

Dokazi za $s(7) = 3$ i $s(14) = 4$ su malo složeniji. Nalazimo skupove tačaka koje su „skoro neizbežne”. Te tačke ne čine skup neizbežnih tačaka, ali na osnovu njih određujemo određene pozicije kvadrata. Koristeći lemu 5, lemu 6 i lemu 7, možemo pokazati da su određene oblasti pokrivene i nalazimo skupove neizbežnih tačaka za ostale kvadrate.

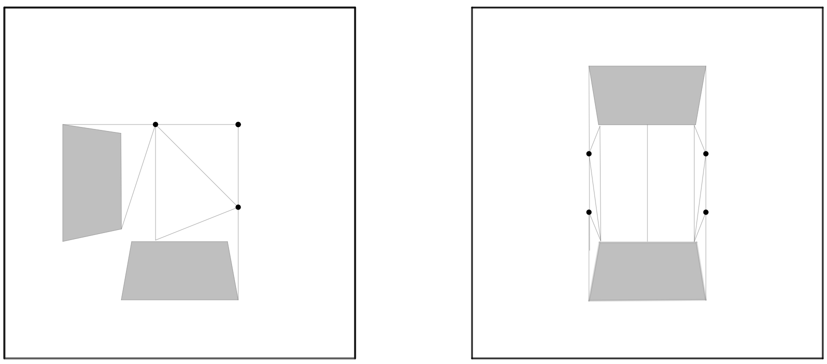
Teorema 7 $s(7) = 3$

Ideja dokaza: Ako je sedam jediničnih kvadrata spakovano u kvadrat stranice $3 - \epsilon$, najviše pet kvadrata pokrivaju pet tačaka u skoro neizbežnom skupu na slici 19.



Slika 19.

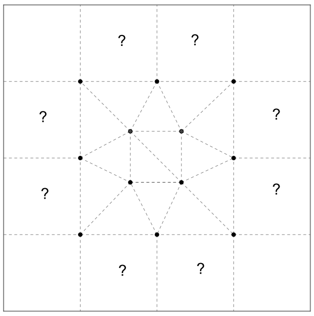
Tih pet tačaka ne čine neizbežan skup, jer je moguće postaviti jedinične kvadrate koji ih ne sadrže. Najmanje dva kvadrata imaju centre u oblastima koje su označene upitnicima (sl. 19). Ta dva kvadrata mogu biti u susednim ili naspramnim oblastima, do na rotaciju i simetriju. Po lemi 5, presek takvog jednog kvadrata, npr. onog u čiji je centar u oblasti označenoj donjim upitnikom, sa pravom $y = 1$ je bar $2\sqrt{2} - 2$. Po lemi 6 takav kvadrat pokriva neke tačke za koje je $1/2 \leq y \leq 1$, ali „najgori" slučaj je $y = 1/2$ (inače bi još lakše mogla da se opravda „neizbežnost" datih tačaka). Tako dolazimo do oblasti koje sigurno moraju biti pokrivene (sl. 20), što je označeno osenčenim trapezima. Gornje osnovice trapeza dobijene su iz leme 5, a donje osnovice iz leme 6, za vrednost $y = \frac{1}{2}$. U slučaju da se za y uzme neka druga vrednost, pokrivena oblast će odstupiti od označenog trapeza, ali za nju će takođe važiti zaključci izvedeni za slučaj sa slike. Ako dva kvadrata pokrivaju osenčene oblasti sa slike, onda možemo odabrati skup od tri (ili četiri u drugom slučaju) neizbežne tačke (tačke su neizbežne za figuru dobijenu izbacivanjem označenih trapeza), što nam daje da je $s(7) \geq 3$. Tačke se biraju tako da su rastojanja najviše 1, pa se primenom lema 1, 2 i 3 lako pokazuje da su one neizbežne. $\square$



Slika 20.

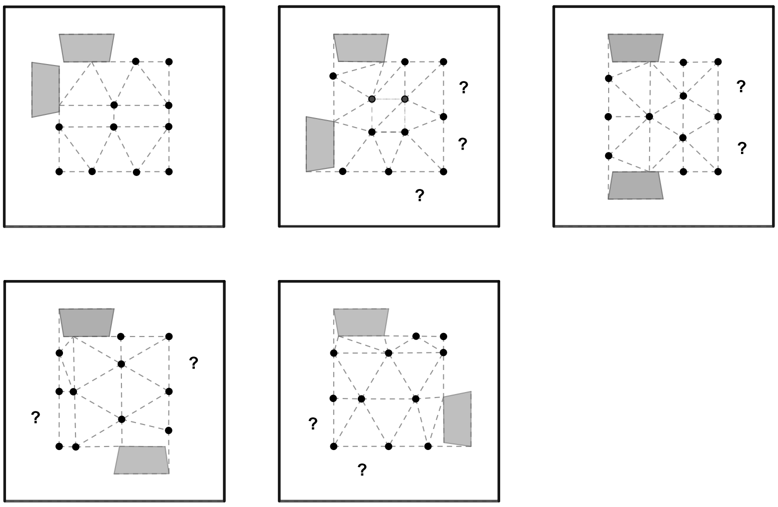
Teorema 8 $s(14) = 4$

Ideja dokaza: Dokaz ove teoreme izvodi se slično kao dokaz teoreme 5. Ako 14 jediničnih kvadrata spakujemo u kvadrat stranice $4 - \epsilon$, najviše 12 kvadrata pokriva 12 tačaka u skoro neizbežnom skupu kao na slici. Zato najmanje dva kvadrata imaju centre u oblastima označenim upitnikom.



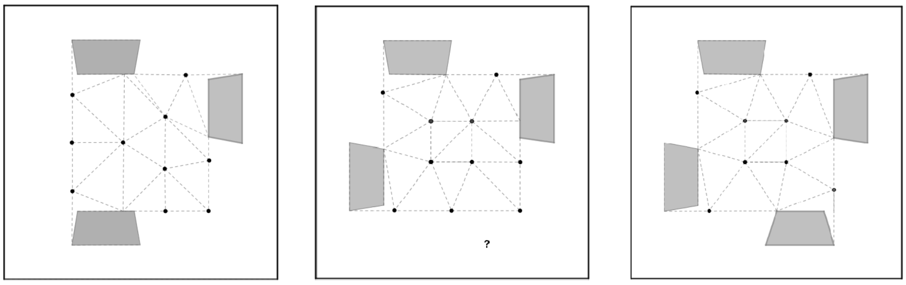
Slika 21.

Postoji pet različitih položaja, do na rotaciju i simetriju, za ova dva kvadrata (sl. 21.) i u svakom od njih može se odrediti skup od dodatnih 11 neizbežnih, ili skoro neizbežnih, tačaka, čime je teorema dokazana.



Slika 22.

Napominjemo da iz ovih pet položaja ishode i dodatni slučajevi (sl. 23.), kada još jedan ili dva kvadrata imaju centre u oblastima označenim upitnicima. Tada se formiraju novi skupovi neizbežnih tačaka sličnim rezonovanjem kao u prethodnim slučajevima.



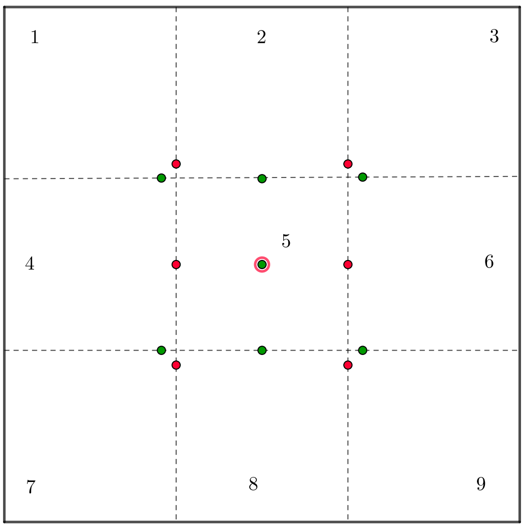
Slika 23.

3 Pakovanje 6 i 10 kvadrata

U prethodnom poglavlju videli smo kako je Friedman pomoću skupa skoro neizbežnih tačaka dokazao tvrđenje da je $s(7) = 3$. Ovde ćemo izneti nešto jednostavniji dokaz za isto tvrđenje, jer nam je on potreban za određivanje $s(6)$. Za dokaz da je $s(8) = 3$ Friedman je koristio skup od 7 neizbežnih tačaka u kvadratu $S = [0,3]^2$:

$$\left\{(\sqrt{2}-\frac{1}{2},1),(\frac{3}{2},1),(\frac{7}{2}-\sqrt{2},1),(\frac{3}{2},\frac{3}{2}),(\sqrt{2}-\frac{1}{2},2),(\frac{3}{2},2),(\frac{7}{2}-\sqrt{2},2)\right\}$$

Ovaj skup tačaka u kvadratu S obojićemo zelenom bojom i reći da taj skup formira zelenu rešetku u okviru S. Rotacijom ove rešetke za prav ugao oko tačke $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ dobijamo crvenu rešetku od takođe 7 tačaka. Za kvadrat S i crvena rešetka formira neizbežan skup tačaka i možemo je uzeti kao dualnu zelenoj rešetki. Ove dve rešetke imaju zajedničku centralnu tačku $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$, pa njihova unija sadrži 13 različitih tačaka. Ovih 13 tačaka podelićemo u tri grupe: centralnu tačku $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ zvaćemo C-tačka, osam tačaka najudaljenijih od C-tačke zvaćemo A-tačke, a preostale 4 tačke na rastojanju $\frac{1}{2}$ od C-tačke zvaćemo B-tačke. Zato se svaka rešetka sastoji od četiri A-tačke, dve B-tačke i jedne C-tačke.

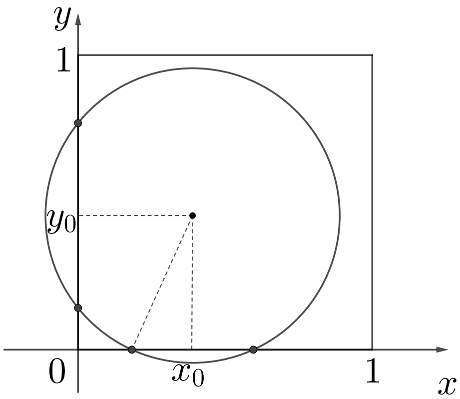


Slika 24.

Pošto svaka rešetka formira skup neizbežnih tačaka, svaki jedinični kvadrat koji se nalazi u S, mora pokrivati bar jednu tačku iz svake rešetke.

Lema 8 *Svaki jedinični kvadrat koji pokriva C-tačku, pokriva i B-tačku.*

Dokaz: Neka jedinični kvadrat koji pokriva C-tačku ima dijagonalu od tačke $(0, 0)$ do tačke $(1, 1)$. Zbog simetrije možemo pretpostaviti da C-tačka ima koordinate (x_0, y_0) za $0 \leq x_0 \leq y_0 \leq \frac{1}{2}$. Kružnica sa centrom u C-tački i poluprečnikom $\frac{1}{2}$ ima jednačinu $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{1}{4}$, pa seče stranice kvadrata u tačkama: $(x_0 \pm \sqrt{\frac{1}{4} - y_0^2}, 0)$ i $(0, y_0 \pm \sqrt{\frac{1}{4} - x_0^2})$.



Slika 25.

Posmatrajmo rastojanje dveju tačaka sa pozitivnim znakom. Kvadrat tog rastojanja je najmanje:

$$x_0^2 + (\frac{1}{4} - y_0^2) + y_0^2 + (\frac{1}{4} - x_0^2) = \frac{1}{2},$$

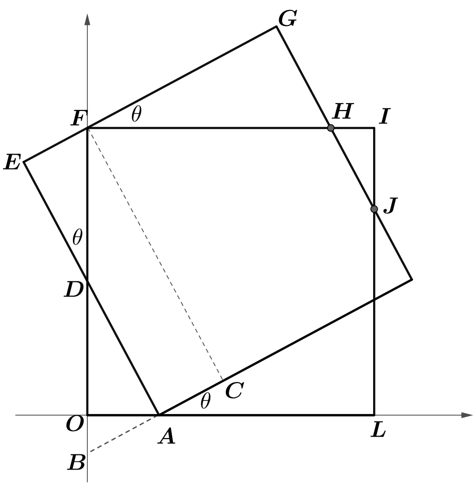
tj. rastojanje je najmanje $\frac{\sqrt{2}}{2}$, što znači da jedinični kvadrat pokriva bar jednu B-tačku, jer su one jednako raspoređene u krugu, a luk kružnice leži unutar jediničnog kvadrata naspram ugla koji je najmanje prav, tj. veći deo kružnice leži unutar jediničnog kvadrata. $\square$

Ako bismo mogli spakovati sedam jediničnih kvadrata u kvadrat stranice manje od 3, svaki kvadrat bi morao obuhvatiti tačno jednu tačku svake rešetke. Pošto C-tačka pripada i crvenoj i zelenoj rešetki, iz Leme 8 sledi da S ne može imati stranicu dužine manje od 3, tj. $s(7) = 3$.

Teorema 9 $s(6) = 3$

Dokaz ove teoreme mnogo je komplikovaniji od prethodnog. Svaki od 6 kvadrata koji se pakuju mora da pokriva najmanje jednu tačku iz svake rešetke, tako da jedan jedinični kvadrat mora da pokriva dve tačke jedne mreže. Ako C-tačka nije pokrivena, onda svaki kvadrat mora da pokriva tačno jednu tačku iz svake mreže i to ćemo zvati konfiguracijom (a). Ako je C-tačka pokrivena jediničnim kvadratom, tada, po lemi 1, taj kvadrat pokriva i B-tačku, za koju možemo pretpostaviti da je zelena tačka, ne umanjujući opštost, i to ćemo zvati konfiguracija (b). Ostaje da pokažemo da su ove dve konfiguracije nemoguće kada S ima stranicu manju od 3. Najpre ćemo dokazati dve tehničke leme.

Lema 9 *Neka je U jedinični kvadrat sa centrom u unutrašnjosti $[0,1]^2$. Pretpostavimo da jednim temenom U dodiruje x-osu i sa njom gradi ugao θ, a da je tačka $(0,1)$ na naspramnoj stranici kvadrata. Tada tačke $(\frac{1+t^2}{1+t}, 1)$ i $(1, \frac{1+2t-t^2}{2})$, gde je $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ leže na rubu kvadrata.*



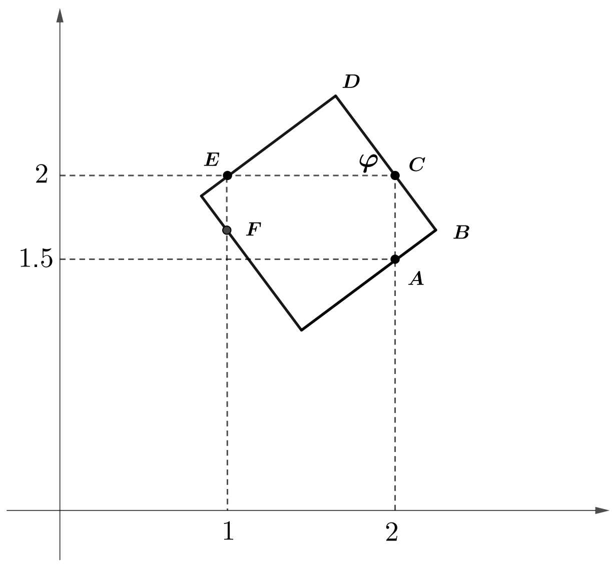
Slika 26.

Dokaz: Kako je $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, znamo da je $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{2t}{1-t^2}$. Prateći oznake sa slike imamo: $1 + OB = \frac{FC}{\cos\theta}$, odakle je

$OB = \dfrac{2t^2}{1-t^2}$. $OA = \dfrac{OB}{\operatorname{tg}\theta} = t$, pa je onda $AD = \dfrac{OA}{\sin\theta} = \dfrac{1+t^2}{2}$, $DE = 1 - AD = \dfrac{1-t^2}{2}$. Dobijamo $EF = DE \cdot \operatorname{tg}\theta = t$, pa kako je $GF = 1-t$, konačno dobijamo da je $FH = \dfrac{1-t}{\cos\theta} = \dfrac{1+t^2}{1+t}$, čime smo pokazali prvi deo tvrđenja.

Drugu presečnu tačku dobićemo jednostavno: $IH = 1 - FH$, $IJ = \dfrac{IH}{\operatorname{tg}\theta} = \dfrac{(1-t)^2}{2}$, pa je $LJ = 1 - IJ = \dfrac{1+2t-t^2}{2}$. $\square$

Lema 10 *Neka je V jedinični kvadrat koji pokriva tačku $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ i neka tačke $(1,2), (2,2), (2, \frac{3}{2})$ leže na tri stranice kvadrata V. Tada preostala stranica seče pravu $x = 1$ na visini $y = \frac{5}{3}$.*



Slika 27.

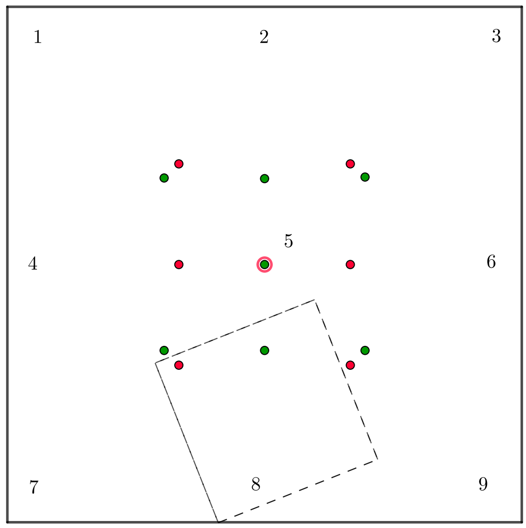
Dokaz: Primetimo da jedinični kvadrat V kome su tačke $(1,2), (2,2)$ i $(2, \frac{3}{2})$ na tri različite stranice, ima tačno određen položaj. Prateći oznake sa slike, vidimo da je $\sin\varphi = BC/0.5$. S jedne strane $CD = \cos\varphi$, a s druge $CD = 1 - \dfrac{\sin\varphi}{2}$, pa dobijamo da je $\varphi = 2 \operatorname{arctg} 0.5 \approx 53,13°$. Kako je

$ED = \sin\varphi$, onda je $EF = \dfrac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{1}{3}$, pa smo pokazali da y-koordinata tačke F iznosi $\dfrac{5}{3}$.$\square$

Važno je napomenuti da za koordinate tačaka u lemi 9 za $0 \le t \le 1$ važe sledeće nejednakosti:

$$(*) \qquad \frac{1+t^2}{1+t} \ge 2\sqrt{2}-2, \quad \frac{1+2t-t^2}{2} \ge \frac{1}{2}, \quad \frac{1+t^2}{1+t} + \frac{1+2t-t^2}{2} \ge \frac{3}{2}.$$

Primenimo Lemu 2 sa konfiguracijom (a) u kojoj C-tačka nije pokrivena, tako da svaki od 6 jediničnih kvadrata pokriva tačno jednu zelenu i jednu crvenu tačku. Uzmimo jedinični kvadrat U koji pokriva zelenu B-tačku, a možemo pretpostaviti da se njegov centar nalazi u oblasti 8. Kvadrat U mora pokriti jednu od susednih crvenih A-tačaka, npr. onu u oblasti 7. Ako U ne pokriva tačku $(1,1)$, onda, po lemi 9, seče pravu $x = 2$ tako da je nemoguće da neki drugi kvadrat pokrije crvenu A-tačku u oblasti 9, a da ne pokrije i crvenu B-tačku u oblasti 6. Do tog zaključka dolazimo kad lemu 9 primenimo dva puta: prvi put koristimo y-koordinatu presečne tačke jediničnog kvadrata koji pokriva oblast 8, a onda zarotiramo ose za prav ugao i na neki drugi jedinčni kvadrat koji pokriva crvenu tačku u oblasti 9 ponovo primenimo lemu 9 i poslednju nejednakost iz (*), odakle je minimalno gornje presecanje tog kvadrata sa pravom $x = 2$ najmanje $\dfrac{3}{2}$. Analogno se pokazuje da ako U ne pokriva tačku $(1,1)$, onda bilo koji jedinični kvadrat koji pokriva zelenu tačku u oblasti 7 i crvenu tačku u oblasti 4, seče pravu $y = 2$, tako da je nemoguće da neki drugi kvadrat pokrije zelenu tačku u oblasti 1, a da ne pokrije zelenu B-tačku u oblasti 2. Dakle, konfiguracija (a) je nemoguća.



Slika 28.

U konfiguraciji (b), jedinični kvadrat V pokriva C-tačku, kao i zelenu B-tačku, recimo u oblasti 2, tako da svaka od preostalih pet zelenih tačaka mora biti pokrivena jediničnim kvadratom. Centar drugog jediničnog kvadrata W, koji pokriva preostalu B-tačku, tada se nalazi u oblasti 8. Kvadrat W mora pokrivati bar jednu od susednih crvenih A-tačaka, npr. onu u oblasti 7. Ako W pokriva i tačku $(1, 1)$, onda slično kao u prethodnoj konfiguraciji, svaki jedinični kvadrat koji pokriva zelenu A-tačku u oblasti 7 i crvenu B-tačku u oblasti 4, mora seći pravu $y = 2$ tako da neki drugi jedinični kvadrat ne može da pokrije zelenu A-tačku u oblasti 1, a da ne pokreije i već pokrivenu zelenu B-tačku u oblasti 2. Tako W ne može da pokrije tačku $(1, 1)$, ali onda, po Lemi 9, jedinični kvadrat koji pokriva zelenu A-tačku u oblasti 9 mora da pokriva i B-tačku u oblasti 6. Znači, sledeći parovi tačaka moraju biti pokriveni različitim kvadratima:

(i) zelena A-tačka u oblasti 7 sa crvenom B-tačkom u oblasti 4

(ii) dve A-tačke u oblasti 1

(iii) C-tačka sa zelenom B-tačkom u oblasti 2

(iv) dve A-tačke u oblasti 3.

U slučajevima (ii) i (iv) jedinični kvadrati moraju da pokriju i $(1, 2)$ i $(2, 2)$ redom, jer je centar kvadrata 2×2 neizbežni jednočlani skup. Kvadrat

V koji pokriva C-tačku i zelenu B-tačku je sada toliko ograničen, da ne može da pokriva bilo koju od tačaka $(1, \frac{3}{2}), (1, 2), (2, \frac{3}{2}), (2, 2)$. Sada iz Leme 10 i činjenice da je crvena A-tačka u oblasti 7 već pokrivena, sledi da je dužina nepokrivenog intervala na pravoj $x = 1$ najviše $\frac{5}{3} - (\sqrt{2} - \frac{1}{2}) = \frac{13}{6} - \sqrt{2} < 2\sqrt{2} - 2$. Međutim, po Lemi 9 i prvoj nejednakosti iz $(*)$, presek kvadrata koji pokriva zelenu A-tačku u oblasti 7 i crvenu A-tačku u oblasti 4 sa pravom $x = 1$ zahteva interval dužine najmanje $2\sqrt{2} - 2$. Tako je i konfiguracija (b) nemoguća, pa smo dokazali da je $s(6) = 3$. □

Za dokaz da je $s(10) = 3 + \sqrt{\frac{1}{2}}$ definisaćemo otvoreni kvadrat kao unutrašnjost kvadrata čija je stranica strogo veća od 1. Da bismo utvrdili donje ograničenje u obliku $s(n) \geq a$, dokazujemo ekvivalentno tvrđenje da n nepreklapajućih otvorenih kvadrata ne može biti spakovano u kvadrat sa stranicom tačno a. Otvorene kvadrate ćemo uglavnom tretirati kao jedinične, a razlika u površini omogućiće nam da jednakosti prevodimo u nejednakosti. Walter Stromquist, čiji rezultat ćemo ovde predstaviti, za dokaz da je $s(10) = 3 + \sqrt{\frac{1}{2}}$ koristi pet lema, od kojih su lema 2 i lema 3 već dokazane u drugom poglavlju, kao i lema 1, koju ćemo formulisati malo drukčije (lema 11) i dokazaćemo još dve leme.

Lema 11 *Neka je $a \leq 1$ i $b \leq 1$. Tada svaki otvoreni kvadrat čiji centar je u pravougaoniku $[0, a] \times [0, b]$, mora seći x-osu, y-osu ili pokrivati tačku(a, b).*

Lemu 2 koristićemo najčešće u slučaju kada je $a = 2\sqrt{2} - 2, b = 1$ ili kad $a = 1, b = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$. Za sledeću lemu potrebno je da za $2\sqrt{2} - 2 < a < 1$ definišemo $f(a)$ kao:

$$f(a) = \frac{\cos\theta^*}{1 + \cos\theta^*} + \frac{1 - acos\theta^*}{sin\theta^*}, \tag{1}$$

gde je θ^* najmanja pozitivna vrednosti za θ, koja zadovoljava:

$$2\cos^3\theta - (2a + 2)\cos^2\theta + (a^2 - 2a + 3)cos\theta - (1 - a^2) = 0. \tag{2}$$

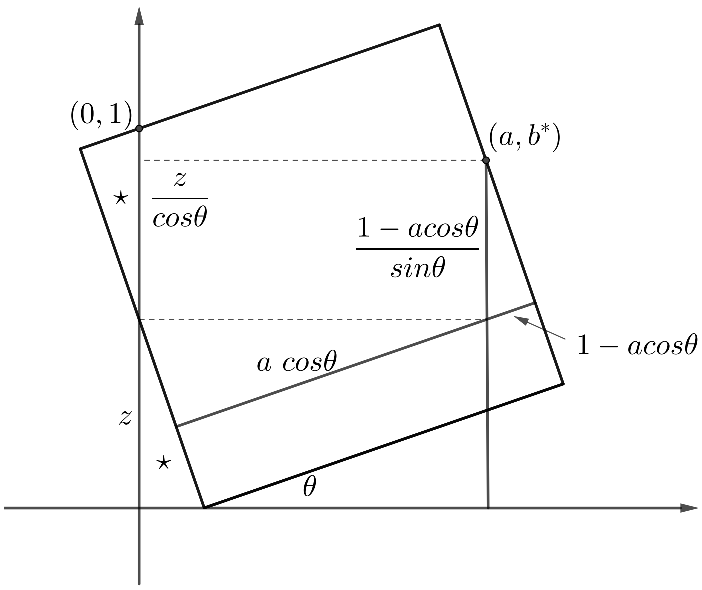
Za vrednost a iz domena funkcije f uvek je $0 < \theta^* < 45°$ i $0 < f(a) < 1$.

Na lemu 11 oslanjaćemo se u sledećim slučajevima:

a	$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8}} \approx 0.853$	$\sqrt{\frac{4}{5}} \approx 0.894$	0.96
$f(a)$	0.972	0.926	0.769
θ^*	39.5°	24.1°	17.7°

Lema 12 *Neka a i b zadovoljavaju sledeće uslove: $2\sqrt{2}-2 < a < 1$, $0 < b < 1$, (a,b) je udaljeno najviše 1 od $(0,1)$ i $b \leq f(a)$. Tada svaki otvoreni kvadrat sa centrom u četvorouglu čija su temena $(0,0),(0,1),(a,0),(a,b)$, mora seći x-osu ili pokrivati neku od tačaka $(0,1)$ ili (a,b).*

Dokaz: Ako otvoreni kvadrat ne izbegava x-osu i tačku $(0,1)$, onda njegov rub možda dodiruje oboje kao na sledećoj slici:



Slika 29.

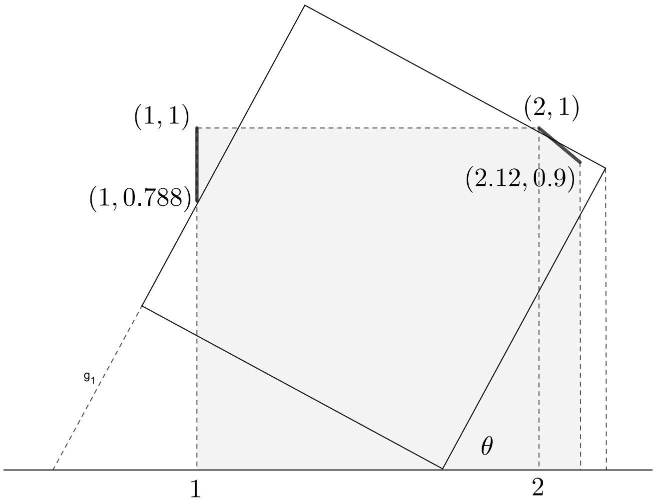
Neka je (s,b^*) tačka u kojoj gornja stranica otvorenog kvadrata seče pravu $x=a$. Trouglovi označeni zvezdicom su podudarni. Pošto je $z+\dfrac{z}{\cos\theta}=1$, sledi da $z=\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$ i

$$b^* = \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} + 1 - a\ \cos\theta\sin\theta \tag{3}$$

Ako je $2\sqrt{2}-2 < a < 1$ i θ u prvom kvadrantu, onda desna strana jednakosti (3) ima jedinstven minimum, koji dostiže za $\theta < 45^\circ$ i $b^* < 1$. Kako je (a,b) najviše 1 udaljeno od $(0,1)$, ali ispod $(a,f(a))$, niže je od (a,b^*) bez obzira na vrednost θ, to onda znači da je (a,b) unutar otvorenog kvadrata.$\square$

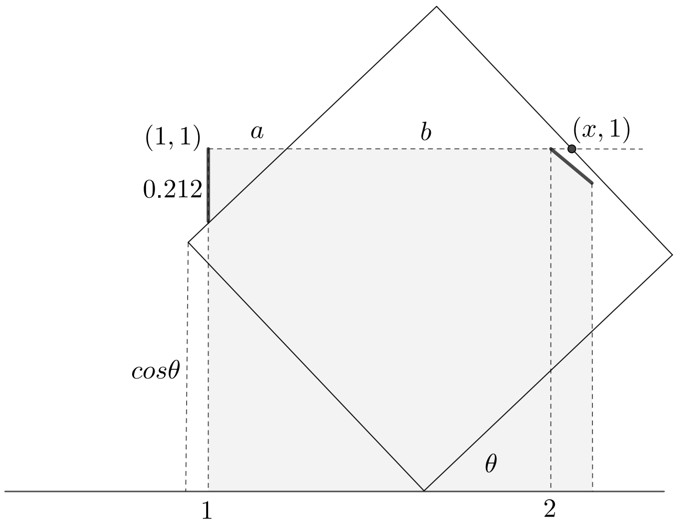
Lema 13 *Neka je P petougao sa temenima* $(1,0),(1,1),(2,1),(2.12,0.9),$ $(2.12,0)$. *Tada svaki otvoreni kvadrat čiji centar je u unutrašnjosti P, mora seći x-osu, duž od* $(1,0.788)$ *do* $(1,1)$ *ili duž od* $(2,1)$ *do* $(2.12,0.9)$.

Dokaz: Bez umanjenja opštosti, posmatraćemo slučaj kada rub otvorenog kvadrata dodiruje x-osu i obuhvata tačku $(1,0.788)$. Neka je θ ugao pod kojim je otvoreni kvadrat nagnut u odnosu na x-osu.



Slika 30.

Ako je $\theta \leq \arctan 1.2 \approx 50,2^\circ$, onda računamo x-koordinatu tačke $(x,1)$ na kojoj gornja desna ivica otvorenog kvadrata seče pravu $y=1$. Na slici



Slika 31.

je očigledno

$$a = \frac{0.212}{\operatorname{tg}\theta} \quad \text{i} \quad b = \frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta},$$

pa je:

$$x = 1 + \frac{0.212}{\operatorname{tg}\theta} + \frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta}$$

za svaku vrednost θ iz prvog kvadranta $b > 0.828$, iz čega sledi da je za $\operatorname{tg}\theta \leq 1.2$

$$x > 1 + \frac{0.212}{1.2} + 0.828 > 2.004,$$

zbog čega otvoren kvadrat mora sadržati tačku $(2, 1)$.

Ako je $\arctan 1.2 < \theta < \arcsin 0.9 \approx 64.2°$, slično kao u prethodnom slučaju računamo x-koordinatu tačke u kojoj gornja desna ivica seče pravu $y = 0.9$ i dobijamo:

$$x = 1 + \frac{0.112}{\operatorname{tg}\theta} + \frac{\sin\theta + \cos\theta - 0.9}{\sin\theta\cos\theta}.$$

Ova funkcija dostiže svoj minimum u $\theta \approx 52.6°$, kada je $x = 2.1256$, tako da ivica prolazi uvek desno od $(2.12, 0.9)$.

Ako je $\arcsin 0.9 < \theta$, treba da izračunamo koordinate x, y temena otvorenog kvadrata koje je najviše desno:

$$x = 1 + \frac{1}{\sin\theta} + \cos\theta - \frac{0.788}{tg\theta} \quad \text{i} \quad y = \sin\theta.$$

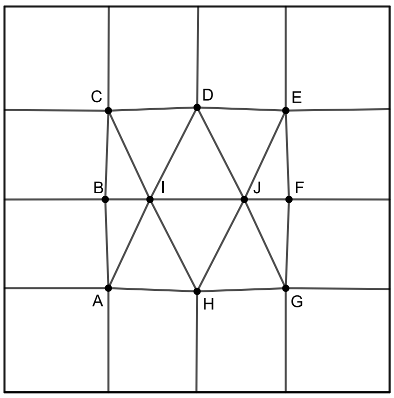
Pošto $0.9 < y < 1$, teme je desno od posmatrane duži ako $\frac{x-2}{1-y} > 1.2$. Računamo da je:

$$\frac{x-2}{1-y} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} + 0.212\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

Kada je $\sin\theta > 0.9$ prvi sabirak na desnoj strani jednakosti je najmanje 0.6, a drugi najmanje 1, pa je lema dokazana.□

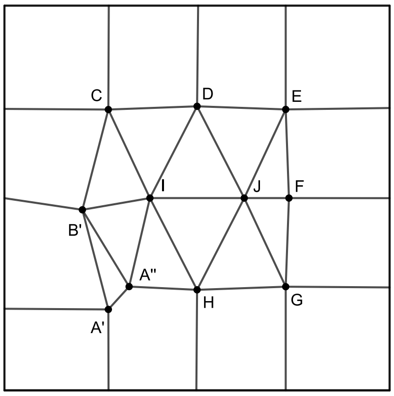
Teorema 10 *Deset po parovima nepresecajućih otvorenih kvadrata ne mogu se upakovati u unutrašnosti kvadrata sa stranicom* $s = 3 + \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Dokaz: Neka je S kvadrat $[0, s]^2$. Definišimo deset tačaka $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ kao što je prikazano na slici. Tačke su: $A(1,1), B(0.97, \frac{s}{2}), I(1.4, \frac{s}{2})$, a ostale tačke simetrično u S.



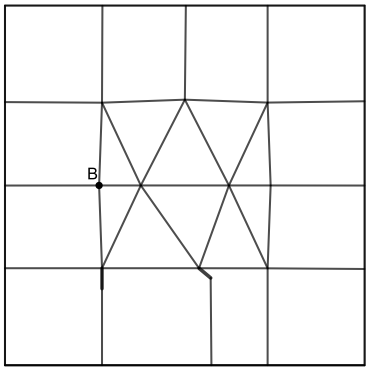
Slika 32.

Ako kvadrat S podelimo na oblasti kao na slici, na svaku od njih odnosi se neka od lema 11, 3 i 12, gde je $a \approx 0.853, b = 0.97$. Na osnovu toga znamo da je skup koji čine tih deset tačaka skup neizbežnih tačaka, što znači da svaki otvoreni kvadrat mora da sadrži jednu od njih. Ako bi deset otvorenih kvadrata bilo spakovano u S, svaki bi morao da sadrži tačno jednu od njih. Nazvaćemo otvorene kvadrate po tačkama koje sadrže A-otvoreni kvadrat, B-otvoreni kvadrat itd. Suština dokaza je da se pokaže da H-otvoreni kvadrat sadrži neku tačku duži od $(2, 1)$ do $(2.12, 0.9)$, pa ćemo na osnovu te činjenice doneti važan zaključak. Primetimo prvo da skup tačaka ostaje neizbežan i ako se B zameni sa $B'(0.75, s-1.96)$ i možemo zaključiti da se tačka B' nalazi u B-otvorenom kvadratu, pri čemu koristimo lemu 12 sa $a = 0.96, b = 0.75$. Ako sada A zamenimo dvema tačkama: $A'(1, s - 2.92)$ i $A''(1.2, 1)$, tačke ostaju neizbežne, što znači da A-otvoreni kvadrat mora sadržati bar jednu od tačaka A', A''.



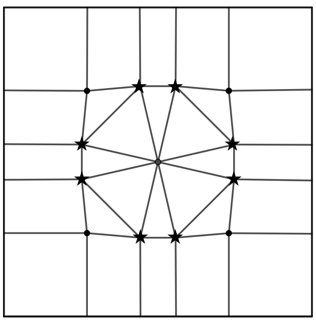
Slika 33.

Imajmo u vidu da je $s - 2.92 < 0.788$. Razmotrimo sada svaku od ove dve mogućnosti. Ako A-otvoreni kvadrat sadrži $A''(1.2, 1)$, onda tačke $A, A'', B', C, D, E, F, I, J$ i tačka $(2, 1)$ formiraju neizbežan skup. Sve one su van H-kvadrata, osim $(2, 1)$, pa H-kvadrat mora sadržati $(2, 1)$. Na ovaj slučaj primenićemo lemu 2. S druge strane, ako A-otvoreni kvadrat sadrži $A'(1, s - 2.92)$, onda cela duž AA', uključujući duž od $(1, 0.788)$ do $(1, 1)$ nema zajedničkih tačaka sa H-otvorenim kvadratom, kao ni tačke B, C, D, E, F, G, I, J. Na sledećoj slici pokazana je podela kvadrata S na oblasti, pa na osnovu leme 13 vidimo da H-kvadrat mora dodirnuti duž $(2, 1) - (2.12, 0.9)$.



Slika 34.

U svakom slučaju, H-otvoreni kvadrat mora sadržati neku tačku na pomenutoj duži. Tačku preseka označićemo zvezdicom, a sedam ostalih zvezdica na sledećoj slici označavaju ostale tačke koje moraju biti sadržane u B-, D-, F- otvorenim kvadratima, analogno analiziranom slučaju H-kvadrata. Te tačke su negde na onakvim simetričnim „kratkim dužima" (kao što je duž od $(2,1)$ do $(2.12, 0.9)$), ne znamo tačno gde, ali je sigurno da su najviše 1 udaljene od centra kvadrata S i od svake od dve najbliže zvezdice. Svake dve zvezdice povezane kraćom duži moraju biti u istom otvorenom kvadratu.



Slika 35.

Na kraju možemo zaključiti da osam zvezdica na slici, tačke A, C, E i G i centar kvadrata S čine skup od trinaest neizbežnih tačaka. Sve one su van I i J- otvorenog kvadrata, a ta dva otvorena kvadrata ne mogu oba da sadrže centar, što znači da je nemoguće pakovanje deset otvorenih kvadrata.$\square$

4 Pakovanje jediničnih kvadrata u pravougaonik

U dosadašnjem izlaganju odredili smo $s(N)$ samo za nekoliko nekvadratnih brojeva N manjih od 100, određujući donja ograničenja za svaki slučaj posebno. U ovom poglavlju pokazaćemo kako je Nagamochi [8], razmatrajući problem pakovanja jediničnih kvadrata u pravougaonik, došao do metoda određivanja donjeg ograničenja za $s(N)$ za bilo koje $N \geq 4$, kao i do dokaza za hipotezu da $s(n^2-1) = s(n^2-2) = n$.

4.1 Nova donja ograničenja

Uvodimo oznaku $\nu(a,b)$, koja označava maksimalan broj jediničnih kvadrata, koji mogu biti spakovani u unutrašnjost pravougaonika $[0,a'] \times [0,b']$, gde je $a' < a, b' < b$. Očigledno, trivijalno gornje ograničenje je $\nu(a,b) < ab$, a mi ćemo pokazati sledeće:

Teorema 11 *$\nu(a,b) < ab - (a+1-\lceil a \rceil) - (b+1-\lceil b \rceil)$, za realne brojeve $a, b \geq 2$.*

Vidimo da za cele brojeve $a, b \geq 2$ važi da je $a \times b$ najmanji pravougaonik sa odnosom stranica $a : b$ u koji je moguće spakovati $ab-2$ jediničnih kvadrata.

Teorema 12 *Neka je n ceo broj i $n \geq 1$.*
(i) Za svaki pozitivan ceo broj N, takav da je $N \in \{n^2, n^2-1, n^2-2\}$, važi da $s(N) = n$.
(ii) Za svaki pozitivan ceo broj N, takav da $N \notin \{n^2, n^2-1, n^2-2\}$, važi da $s(N) \geq \sqrt{N - 2\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1} + 1 > \sqrt{N}$.

Posebno naglasimo da je ovo novo ograničenje u teoremi 2 (ii) strogo veće od trivijalnog donjeg ograničenja. Najpre ćemo dokazati da teorema 12 sledi iz teoreme 11.

Dokaz: Ako je N potpun kvadrat, tj. $N = n^2$, onda za njega važi:

$$s(N) = n = \sqrt{N} = \lceil \sqrt{N} \rceil = \sqrt{N - 2\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1} + 1$$

i

$$\sqrt{N+2} \geq \lceil \sqrt{N} \rceil.$$

Sada pretpostavimo da $\sqrt{N}$ nije ceo broj, pa za njega važi $\lceil \sqrt{N} \rceil = \lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1$. Onda imamo

$$\sqrt{N - 2\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1} + 1 = \sqrt{N - (\lceil \sqrt{N} \rceil)^2 + (\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1)^2 - 2\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1} + 1 =$$

$$\sqrt{N+2-(\lceil\sqrt{N}\rceil)^2+(\lfloor\sqrt{N}\rfloor)^2}+1.$$

Znači, $\sqrt{N-2\lfloor\sqrt{N}\rfloor+1}+1 \geq \lfloor\sqrt{N}\rfloor+1$ ako i samo ako $\sqrt{N+2} \geq \lceil\sqrt{N}\rceil$. Pozitivan ceo broj N zadovoljava nejednakost $\sqrt{N+2} \geq \lceil\sqrt{N}\rceil$ ako i samo ako postoji ceo broj n takav da je $\sqrt{N+2} \geq n \geq \sqrt{N}$, tj. $n^2 \geq N \geq n^2-2$. Znamo da $s(1)=1$ i $s(2)=s(3)=s(4)=2$, pa ćemo posmatrati $N \geq 4$.

Prvo razmatramo slučaj gde je $\sqrt{N+2} \geq \lceil\sqrt{N}\rceil$. Po teoremi 11, kada je $a=b=\lceil\sqrt{N}\rceil \geq 2$, važi da $\nu(\lceil\sqrt{N}\rceil,\lceil\sqrt{N}\rceil) < (\lceil\sqrt{N}\rceil)^2-2 \leq N$, što znači da N jedniničnih kvadrata ne može biti spakovano u kvadrat stranice manje od $\lceil\sqrt{N}\rceil$, tj. $s(N) \geq \lceil\sqrt{N}\rceil$. Dokazali smo (i).

Razmotrićemo i drugi slučaj, kada $\sqrt{N+2} < \lceil\sqrt{N}\rceil$. Neka je $k = \lfloor\sqrt{N}\rfloor \geq 2$ i $\alpha = \sqrt{N-2\lfloor\sqrt{N}\rfloor+1} - \lfloor\sqrt{N}\rfloor+1$. Očigledno je α rešenje jednačine $(\alpha+k-1)^2 = N-2k+1$ i, pošto je $\sqrt{N+2} < \lceil\sqrt{N}\rceil$, imamo $\alpha < 1$. Kada teoremu 11 primenimo za $a=b=k+\alpha \geq 2$, imamo

$$\nu(k+\alpha,k+\alpha) < (k+\alpha)^2-2(\alpha+1-\lceil\alpha\rceil) = (k+\alpha)^2-2\alpha = (k+\alpha-1)^2+2k-1 = N.$$

Iz ovog vidimo da N jediničnih kvadrata ne mogu da se spakuju u kvadrat stranice manje od $k+\alpha = \sqrt{N-2\lfloor\sqrt{N}\rfloor+1}+1$, pa smo dokazali da $s(N) \geq \sqrt{N-2\lfloor\sqrt{N}\rfloor+1}+1$. Pošto je $\sqrt{N-2\lfloor\sqrt{N}\rfloor+1}+1 > \sqrt{N-2\sqrt{N}+1}+1 = \sqrt{N}$, dokazano je i (ii).$\square$

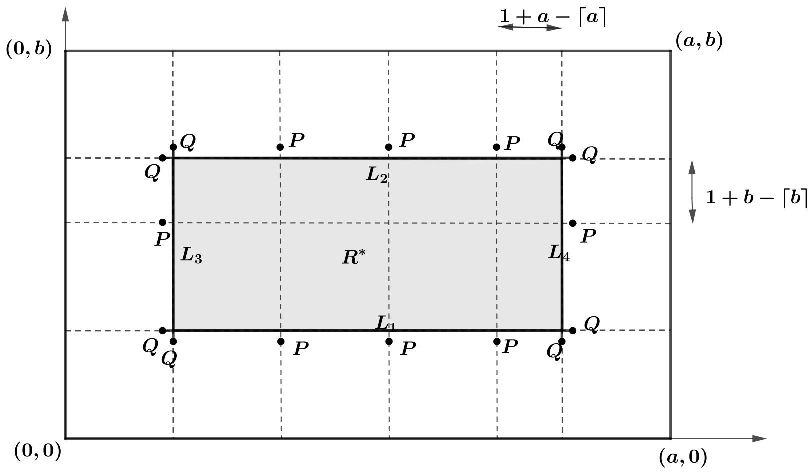
4.2 Neizbežni skupovi i tehničke leme

Dosad smo za određivanje donjeg ograničenja a za $s(n)$ kod pakovanja jediničnih kvadrata u kvadrat koristili neizbežni skup tačaka. Ovde, u slučaju pakovanja u pravougaonik R, neizbežan skup tačaka nazovimo U, pa možemo zaključiti da $|U|+1$ jediničnih kvadrata ne može biti spakovano u R. Sada ćemo definisati skup sačinjen od određenih tačaka, ali i duži i pravougaonika, i pomoću njega ćemo na određen način (koji u nekom smislu podseća na tehniku neizbežnih tačaka) dokazati željene nejednakosti. U xy-ravni, duž L, koja povezuje tačke $p_1=(x_1,y_1)$ i $p_2=(x_2,y_2)$ označavamo sa $L=[p_1,p_2]$ ili $[(x_1,y_1),(x_2,y_2)]$. Pravougaonik sa stranicama paralelnim koordinatnim osama označavamo uobičajeno $[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]$. Da bismo dokazali $\nu(a,b) < ab-(a+1-\lceil a\rceil)-(b+1-\lceil b\rceil)$ za realne brojeve $a,b \geq 2$, posmatramo pravougaonik $[0,a]\times[0,b]$ u xy-ravni. Neka se skup U sastoji od pravougaonika R^*, četiri duži $L_i (i = 1, 2, 3, 4)$, skupa Q od osam tačaka i skupa P od $2\lceil a \rceil + 2\lceil b \rceil - 12$ tačaka:

$$
\begin{aligned}
R^* &= [1, a-1] \times [1, b-1] \\
L_1 &= [(0.9, 1), (a-0.9, 1)] \\
L_2 &= [(0.9, b-1), (a-0.9, b-1)] \\
L_3 &= [(1, 0.9), (1, b-0.9)] \\
L_4 &= [(a-1, 0.9), (a-1, b-0.9)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q = \{&(0.9, 1), (a-0.9, 1), (0.9, b-1), (a-0.9, b-1), (1, 0.9), (1, b-0.9), \\
&(a-1, 0.9), (a-1, b-0.9)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P = \{&(i, 0.9), (i, a-0.9) | i = 2, 3, ..., \lceil a \rceil - 2\} \cup \{(0.9, j), (b-0.9, j)| \\
&j = 2, 3, ... \lceil b \rceil - 2\}
\end{aligned}
$$



Slika 36.

Neka je $\lambda > 1$. Reći ćemo da se R i U sužavaju ka $(0, 0)$ za faktor λ^{-1}, ako svaku tačku (x, y) iz R i U preslikamo u novu tačku $(\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y)$. Tako dobijene homotetične slike skupova R i U označimo sa $\lambda^{-1}R$ i $\lambda^{-1}U$. Za dati jedinični kvadrat S unutar $\lambda^{-1}R$ i objekat $K \in \{Q, P, L_1, L_2, L_3, L_4, R^*\}$ definišemo **skor** $\sigma(S; K)$ od S za K na sledeći način:

- $\sigma(S; R^*) =$ (površina preseka S i R^*) $\cdot \lambda^2$,
- $\sigma(S; L_i) =$ (zbir duži u preseku S i duži L_i) $\cdot 0.5 \cdot \lambda$,
- $\sigma(S; Q) =$ (broj tačaka iz Q sadržanih u S) $\cdot 0.45$,
- $\sigma(S; P) =$ (broj tačaka iz P sadržanih u S) $\cdot 0.5$.

Definišemo
$\sigma(S) = \sigma(S; R^*)+\sigma(S; L_1)+\sigma(S; L_2)+\sigma(S; L_3)+\sigma(S; L_4)+\sigma(S; Q)+\sigma(S; P)$. Duži L_i i tačke iz Q mogu doprineti ukupnom skoru svih kvadrata najviše za $2(a - 1.8) \times 0.5 + 2(b - 1.8) \times 0.5 + 8 \times 0.45 = a + b$. Svi objekti iz U ukupnom skoru svih kvadrata mogu doprineti maksimalno $(a - 2)(b - 2) + a + b + \lceil a \rceil - 3 + \lceil b \rceil - 3 = ab - (a + 1 - \lceil a \rceil) - (b + 1 - \lceil b \rceil)$. Suština dokaza će biti sledeća lema.

Lema 14 *Svaki jedinični kvadrat S unutar $\lambda^{-1}R$ zadovoljava $\sigma(S) > 1$.*

Dokaz leme 14 izvešćemo tek kada pokažemo niz tehničkih lema (lema 15 - lema 19), a sada pokazujemo da teorema 11 sledi iz leme 14.

Pretpostavimo da je u $\lambda^{-1}R$ spakovano N' jediničnih kvadrata, od kojih svaki, po lemi 14, ima skor veći od 1. Pošto je ukupan skor u U jednak $ab - (a + 1 - \lceil a \rceil) - (b + 1 - \lceil b \rceil)$, zaključujemo da je

$$N' < ab - (a + 1 - \lceil a \rceil) - (b + 1 - \lceil b \rceil)$$

za faktor $\lambda^{-1} < 1$, tj.

$$\nu(a, b) < ab - (a + 1 - \lceil a \rceil) - (b + 1 - \lceil b \rceil).\Box$$

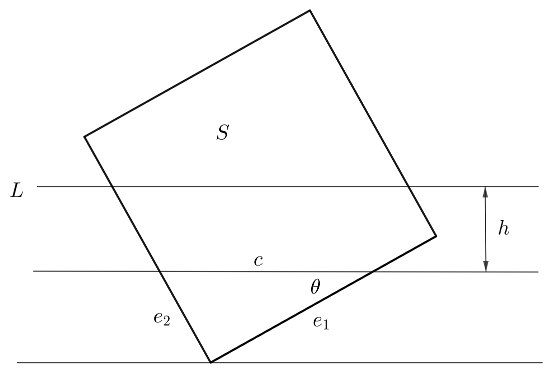
U daljim razmatranjima kvadrat S sa stranicom dužine λ zvaćemo $\lambda \times \lambda$ kvadrat. Za dokaz leme 14 pogodnije nam je da posmatramo pakovanje $\lambda \times \lambda$ kvadrata sa $\lambda > 1$ u pravougaonik $R = [0, a] \times [0, b]$, umesto prethodno posmatranih $\lambda^{-1}R$ i $\lambda^{-1}U$. U ovom slučaju, svaki L_i doprinosi $\sigma(S)$ sa 0.5 po jedinici dužine i R^* sa 1 po jedinici površine, dok svaka tačka Q doprinosi sa 0.45 i svaka tačka P sa 0.5. Dovoljno je da se pokaže da svaki $\lambda \times \lambda$ kvadrat S sa $\lambda \in (1, 1.01]$ ima $\sigma(S) > 1$ nad R i U.

U cilju dokazivanja leme 14, dokazaćemo sledeće leme, u kojima ćemo koristiti $\lambda \in [1, 1.01]$.

Lema 15 *Neka je S kvadrat $\lambda \times \lambda$ sa $\lambda \in [1, 1.01]$. Za pravu L na rastojanju $h \in [0, (\sqrt{2}-1)/2)$ od centra kvadrata S, neka je c dužina presečne duži l i S. Onda je $c \geq \lambda$ ili $c > 1$.*

Dokaz: Neka L seče stranice e_1 i e_2 jediničnog kvadrata S. Ako e_1 i e_2 nisu susedne, očigledno je $c \geq \lambda$, pa je dovoljno razmatrati slučaj kad su one susedne. Neka θ označava ugao koji grade prava L i e_2, gde je, bez umanjenja opštosti, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Neka je $t = \tan\frac{\theta}{2}$, što znači da je $0 < t = \tan\frac{\theta}{2} \leq \sqrt{2}-1$. Tada je

$$c = -h\frac{(1+t^2)^2}{2t(1-t^2)} + \frac{(1+t^2)(1+2t-t^2)}{4t(1-t^2)}.$$



Slika 37.

Za fiksno t ova funkcija je opadajuća po h, pa je dovoljno da pokažemo da je ta funkcija veća ili jednaka 1 za maksimalno h, tj. da

$$f(h,t) = -2h(1+t^2)^2 + (1+t^2)(1+2t-t^2) - 4t(1-t^2) \geq 0$$

za $h = (\sqrt{2}-1)/2$.

$$f(\frac{\sqrt{2}-1}{2}, t) = (t+1-\sqrt{2})^2(-\sqrt{2}\,t^2 + (2+2\sqrt{2})t + 2 + \sqrt{2}).$$

Iz konkavnosti kvadratne funkcije $g(t) = -\sqrt{2}\,t^2 + (2+2\sqrt{2})t + 2 + \sqrt{2}$ i činjenice da $g(0) > 0$, $g(\sqrt{2}) > 0$, za $0 < t \geq \sqrt{2}-1$ zaključujemo da je $g(t) > 0$, pa onda i $f(\frac{\sqrt{2}-1}{2}, t) \geq 0$ i $c \geq 1$.□

Lema 16 *Neka je S kvadrat $\lambda \times \lambda$ sa $\lambda \in [1, 1.01]$, tako da jedan ugao od S dodiruje x-osu i S je potpuno iznad x-ose. Za pravu $L : y = h$ sa $h \in (0.5, \sqrt{2} - 0.5)$, neka je c dužina presečne duži S i L. Onda je $c \geq \lambda$ ili $c > 1$.*

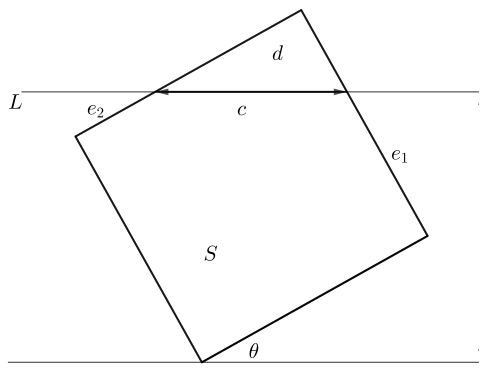
Dokaz: Neka L seče stranice kvadrata S. Kao u prethodnoj lemi, možemo pretpostaviti da su to susedne stranice, jer inače $c \geq \lambda$. Za $h > 0.5$ nijedna od stranica e_1, e_2 ne dodiruje x-osu. Neka je θ ugao koji L gradi sa e_2, gde $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Neka je $t = \tan\frac{\theta}{2}$, što znači da je $0 < t = \tan\frac{\theta}{2} \leq \sqrt{2} - 1$. Onda je:

$$c = -(h-1)\frac{(1+t^2)^2}{2t(1-t^2)} + \frac{2t(1-t+t^2-t^3)}{2t(1-t^2)},$$

koja je opadajuća funkcija za fiksno t. Slično kao u dokazu prethodne leme, dovoljno je pokazati da je

$$f(h,t) = -(h-1)(1-t^2)^2 + 2t - 2t^2 + 2t^3 - 2t^4 - 2t + 2t^3 \geq 0$$

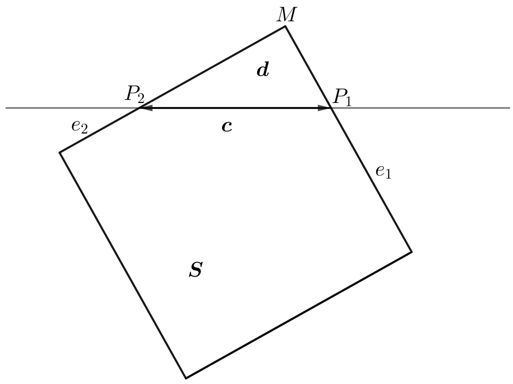
za $h = \sqrt{2} - 0.5$.



Slika 38.

Imamo: $f(\sqrt{2} - 0.5, t) = (t + 1 - \sqrt{2})^2(-(1 + 2\sqrt{2})t^2 + (2\sqrt{2} + 2)t + 1)$, pa opet iz konkavnosti kvadratne funkcije $g(t) = -(1 + 2\sqrt{2})t^2 + (2\sqrt{2} + 2)t + 1$, $g(0) > 0$ i $g(\sqrt{2} - 1) > 0$ je $g(t) > 0$, jer $0 < t < \sqrt{2} - 1$. Na kraju, $f(\sqrt{2} - 0.5, t) \geq 0$ i $c > 1$.$\square$

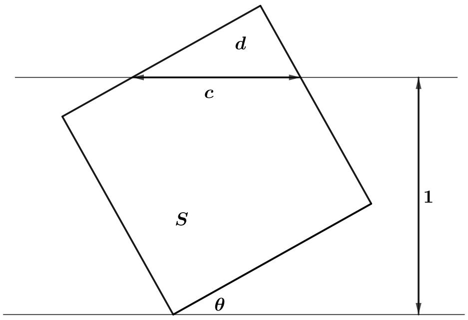
Lema 17 *Neka je S kvadrat $\lambda \times \lambda$ sa $\lambda \in [1, 1.01]$ i e_1 i e_2 susedne stranice kvadrata S koje se sastaju u temenu M kvadrata S. Za tačke P_1 na e_1 i P_2 na e_2 (obe različite od M) neka je c dužina duži $L = [P_1, P_2]$, a d površina trougla koji zaklapa L i duži $[P_1, M]$ i $[M, P_2]$. Tada $0.5c > d$.*



Slika 39.

Dokaz: Neka su h i l dužine duži $[P_1, M]$ i $[M, P_2]$ redom. Tada je $c = \sqrt{h^2 + l^2}$ i $d = \dfrac{hl}{2}$. Dovoljno je pokazati da $h^2 + l^2 - h^2 l^2 > 0$. Pošto $h, l \in (0, \lambda]$, imamo $h^2 + l^2 - h^2 l^2 = (h - l)^2 + hl(2 - l) \geq hl(2 - \lambda^2) > 0.\Box$

Lema 18 *Neka je S kvadrat $\lambda \times \lambda$ sa $\lambda \in [1, 1.01]$, takav da jedno njegovo teme leži na x-osi i S je potpuno iznad x-ose, $c > 0$ je dužina preseka S sa pravom $L : y = 1$, a d je površina trougla koji zaklapaju S i L. Onda je $d + 0.5c > 0.5$.*



Slika 40.

Dokaz: Neka je $\theta \in (0, \frac{\pi}{4}]$ ugao koji grade stranica kvadrata i x-osa i $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$. Dobijamo $d = c^2 \cdot t(1-t^2)/(1+t^2)^2$. Za $\lambda = 1$ vrednosti c i d označimo sa $\overline{c}$ i $\overline{d}$. Tada važi:

$$1 - \overline{c} = \overline{d} = (t - t^2)/(1 + t)$$

$$\overline{d} + 0.5\overline{c} = 1 - \overline{c} + 0.5\overline{c} = 0.5 + 0.5(1 - \overline{c}) > 0.5$$

Razmotrimo sada slučaj kada je $\lambda > 1$. U tom slučaju možemo pisati $c = \overline{c} + x$ i tada

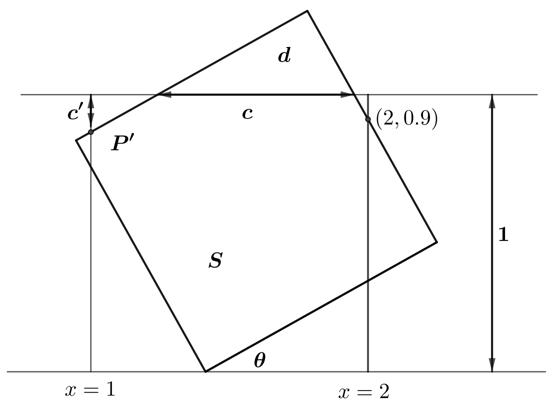
$$d = (\overline{c} + x)^2 \cdot t(1-t^2)/(1+t^2)^2 = \overline{d} + (2\overline{c} + x^2) \cdot t(1-t^2)/(1+t^2)^2$$

za neki broj $x > 0$. Tada

$$d + 0.5c = \overline{d} + 0.5\overline{c} + 0.5x + (2\overline{c} + x^2) \cdot t(1-t^2)/(1+t^2)^2 \geq \overline{d} + 0.5\overline{c} > 0.5$$

□

Lema 19 *Neka je S kvadrat $\lambda \times \lambda$ sa $\lambda \in [1, 1.01]$, tako da jedno njegovo teme leži na x-osi i S je potpuno iznad x-ose. Pretpostavimo da dve susedne stranice e_1 i e_2 kvadrata S seku pravu $L : y = 1$, tačka $(1,1)$ nije u S, tačka $(2, 0.9)$ je na stranici e_2. Neka je c dužina preseka S i L, d površina trougla koji zaklapaju S i L, a $P' = (1, 1 - c')$ je tačka preseka e_1 i prave $x = 1$. Tada $d + 0.5c + 0.5 - 0.5c' > 1$.*



Slika 41.

Dokaz: Za vrednosti $d, c, -c'$ za $\lambda \times \lambda$ kvadrat S sa $\lambda > 1$ možemo dobiti manje vrednosti $d, c, -c'$ izborom $\lambda' \times \lambda'$ kvadrata, gde je $1 \leq \lambda' < \lambda$. Posmatraćemo samo slučaj $\lambda = 1$. Neka je $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ ugao koji grade e_1 i prava $L : y = 1$. Izračunavamo:

$$d = \frac{t(1-t)}{1+t}, \quad c = \frac{t+t^2}{1+t}, \quad c' = \frac{2t(t(1-t)^2 - 0.2t)}{(1+t^2)^2}.$$

Da bi c' bilo pozitivno, tj. da bi tačka $(1, 1)$ bila van S, mora biti $t(1-t)^2 - 0.2t > 0$, tj. $t < 1 - \sqrt{0}.2$. Uzmimo $c = 1 - d$. Da bismo dokazali tvrđenje, dovoljno je dokazati da $d > c'$, tj.

$$\frac{t(1-t)}{1+t} > \frac{2t(t(1-t)^2 - 0.2t)}{(1-t^2)^2}, \quad 0 < t < 1 - \sqrt{0}.2$$

Ekvivalentna nejednakost je $f(t) = (1-t)^2(1-t^2) - 2(t(1-t)^2 - 0.2t) \geq 0$. Funkcija $f(t) = (1-t)^2(2-(1+t)^2) + 0.4t$ je pozitivna za $0 < t \leq \sqrt{2} - 1$. Ako je $0.41 < \sqrt{2} - 1 < t < 1 - \sqrt{0}.2 < 0.56$, onda imamo: $(1 - 0.41)^2(2 - (1 + 0.56)^2) + 0.4 \cdot 0.41 > 0$, pa je lema dokazana.$\square$

4.3 Dokaz leme 14

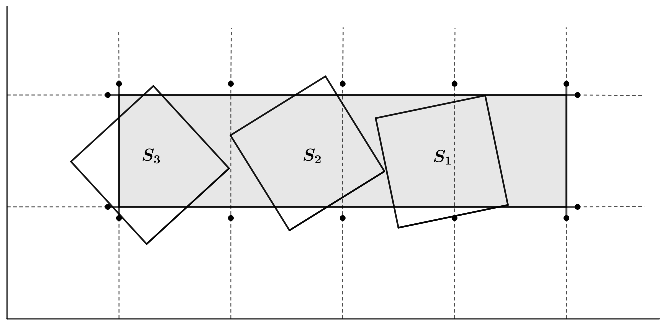
Ako sa S označimo $\lambda \times \lambda$ kvadrat, gde je $\lambda \in (1, 1.01]$, koji je u celosti sadržan u pravougaoniku $R = [0, a] \times [0, b]$. Da bismo dokazali lemu 14, dokazaćemo da je $\sigma(S) > 1$. U odnosu na položaj kvadrata S razlikujemo sedam slučajeva.

Prvi slučaj

Ovo je slučaj kad je S kompletno sadržan u $R^* = [1, a-1] \times [1, b-1]$, pa se lako vidi da je $\sigma(S) \geq \sigma(S; R^*) = \lambda^2 > 1$.

Drugi slučaj

Razmatramo slučaj kad S nije kompletno u R^*, centar kvadrata S je u R^*, S ne sadrži nijednu tačku iz Q kao svoju unutrašnju tačku i ne postoji duž $L_i \in U$, koja seče dve nesusedne ivice S. U ovom slučaju postoji duž $L_i \in U$ koja seče dve susedne stranice kvadrata S, odsecajući od njega trougao T_i koji nije sadržan u R^*. Mogući položaji kvadrata S prikazani su na sledećoj slici, a pomenuti trouglovi mogu i da se preklapaju, kao u slučaju kvadrata S_3:

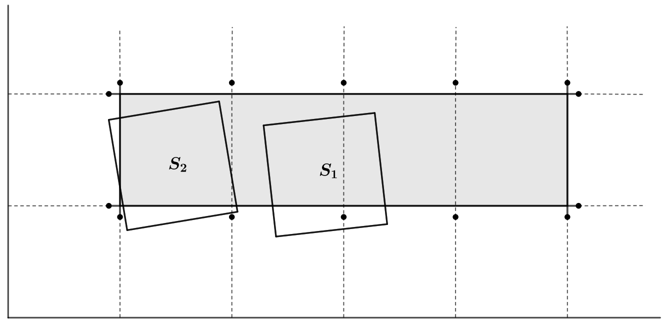


Slika 42.

Neka je d_i površina trougla T_i, a c_i dužina presečne duži L_i i S. Iz leme 17 znamo da je $0.5c_i > d_i$ za sve takve L_i, pa onda gubitak d_i u $\sigma(S; R^*)$ nadoknađuje $\sigma(S; L_i) = 0.5c_i$. Znači, $\sigma(S)$ nije manje nego kod kvadrata S kompletno sadržanog u R^*, pa je $\sigma(S) > 1$.

Treći slučaj

Centar kvadrata S je u R^*, S ne sadrži nijednu tačku iz Q kao unutrašnju tačku, ali postoji duž L_i koja seče dve nesusedne stranice S. Dužina presečne duži L_i i S je bar $\lambda > 1$. Ako bi postojale dve takve duži, onda $\sigma(S) \geq 2 \cdot 0.5 \cdot \lambda > 1$. Ako jedna duž L_i odseca od S četvorougao koji nije sadržan u R^*, a druga duž L_j odseca nepokriven trougao T_j, pošto je centar kvadrata S u R^* i $\sigma(S; R^*) \geq 0.5\lambda^2$, biće $\sigma(S) \geq \sigma(S; R^*) + \sigma(S; L_i) \geq 0.5\lambda^2 + 0.5\lambda > 1$.



Slika 43.

Četvrti slučaj

U ovom slučaju centar kvadrata S je u R^* i S sadrži tačku iz Q kao unutrašnju. Pokazaćemo da se ovaj slučaj može svesti na drugi slučaj. Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da S sadrži tačku $(1, 0.9)$. Za procenu minimuma $\sigma(S)$, privremeno zamenimo tačku (1,0.9) sa duži $L' = [(1, 0.9), (1, 0)]$, podešavajući da skor duži L' po dužini bude 0.5. Napominjemo da je ukupan skor od L' 0.45, isto kao za tačku (1,0.9). Analogno postupamo u slučaju da S sadrži druge tačke iz Q. Ovim „zamenama" $\sigma(S)$ se ne povećava, pa sa istim argumentima iz drugog slučaja dokazujemo da je $\sigma(S) > 1$.

Za naredne slučajeve potrebno je da dokažemo sledeću lemu:

Lema 20 *Neka je S kvadrat $\lambda \times \lambda$, gde je $\lambda \in (1, 1.01]$, koji je u celosti sadržan u R. Pretpostavimo da centar kvadrata S pripada pravougaoniku $[0, a] \times [0, 1]$. Tada*

(*i*) *Dužina preseka S i prave $L : y = 0.9$ je veća od 1*

(*ii*) *Ako centar od S pripada kvadratu $[0, 1] \times [0, 1]$, onda S sadrži tri tačke: $(1, 1), (1, 0.9), (0.9, 1) \in Q$*

(*iii*) *S sadrži najmanje jednu tačku iz $Q \cup P$*

(*iv*) $\sigma(S; R) > 0$

Dokaz:

(*i*) Ako L seče dve nesusedne stranice, jasno je da je dužina preseka $c \geq \lambda > 1$. Zato pretpostavimo da L seče dve susedne stranice kvadrata S. Ako je centar ispod prave L, onda je dovoljno da razmatramo samo slučaj kada ugao kvadrata S dodiruje x-osu („najgori slučaj”), a tada možemo primeniti lemu 16 sa $h = 0.9$, pa sledi da je $c > 1$. Kada se centar nalazi između pravih L i $y = 1$, iz leme 15 sa $h = 0.1$ sledi da je $c > 1$.

(*ii*) Na osnovu leme 1 znamo da svaki jedinični kvadrat u prvom kvadrantu čiji je centar u $[0,1] \times [0,1]$ sadrži tačku $(1,1)$, pa onda S, za $\lambda > 1$, sadrži $(1,1)$ kao unutrašnju tačku. Dokazaćemo da S sadrži tačku $(1,0.9)$ (analogno se može pokazati za tačku $(0.9,1)$). Iz (*i*) vidimo da S sadrži jednu od tačaka $(0,0.9)$ i $(1,0.9)$. Pretpostavimo da sadrži $(0,0.9)$, ali ne i $(1,0.9)$. To se može dogoditi samo kada je jedno teme kvadrata S baš tačka $(0,0.9)$. Ako sa e_1 i e_2 označimo stranice kvadrata S koje ne ishode iz tog temena, onda je rastojanje bilo koje tačke sa e_1 ili e_2 od tačke $(0,0.9)$ najmanje $\lambda > 1$, pa S mora sadržati tačku$(1,0.9)$ u unutrašnjosti.

(*iii*) Ovo tvrđenje je posledica (*i*) i (*ii*)

(*iv*) Ako centar kvadrata S pripada pravougaoniku $[1, a-1] \times [0,1]$, iz $\lambda > 1$ lako se vidi da $\sigma(S; R^*) > 0$, a ako pripada preostalim kvadratima, to sledi iz (*ii*).

Peti slučaj

U ovom slučaju centar kvadrata S pripada pravougaoniku $[0,1] \times [0,1]$. Iz leme 20 (*ii*) vidimo da S sadrži $(1,0.9), (0.9,1) \in Q$ i duži $[(1,0.9)(1,1)]$ i $[(0.9,1),(1,1)]$, pa je onda

$$\sigma(S) \geq \sigma(S; R^*) + 0.45 \cdot 2 + 0.1 \cdot 2 \cdot 0.5 > 1$$

Šesti slučaj

U ovom slučaju centar kvadrata S pripada pravougaoniku $[1, a-1] \times [0,1]$ i prava $y = 1$ seče dve susedne stranice e_1 i e_2 od S. Neka je L' presečna duž prave $y = 1$ i S, c njena dužina, a d površina trougla T, koji zaklapaju L', e_1 i e_2.

- Prvo pretpostavimo da S sadrži tačku P i nijednu od tačaka $(0.9,1), (a-0.9,1)$ koje su u Q. Tada će cela duž L' biti u L_1. Tačka P u ukupnom skoru doprinosi sa 0.5, pa, ako T pripada R^*, potrebno je proceniti minimum od $d + 0.5c$. Za procenu tog minimuma uzmimo da S dodiruje x-osu („najgori slučaj"). Na osnovu leme 18, imamo $d+0.5c > 0.5$, pa je $\sigma(S) \geq d+0.5c+0.5 > 1$. Ako se trougao T dobija u preseku sa L_2, primenićemo lemu 17 na trougao koji grade S i L_2.

- Kada S sadrži tačku iz P i bar jednu od tačaka $(0.9, 1), (a-0.9, 1) \in Q$, recimo $(0.9, 1)$, onda sadrži i duž $[(0.9, 1), (1, 1)]$, pa imamo $\sigma(S) \geq \sigma(S; R^*) + 0.5 + 0.45 + 0.05 > 1$.

- Ako S ne sadrži tačku iz P, tada, po lemi 20 (*iii*), sadrži bar jednu od tačaka $(1, 09), (a - 1, 0.9) \in Q$. Pretpostavimo da sadrži tačku $(1, 0.9)$. Ako sadrži i tačku $(0.9, 1)$, onda sadrži duž $[(0.9, 1), (1, 1)]$ i $[(1, 0.9), (1, 1)]$ i tada je $\sigma(S) \geq \sigma(S; R^*) + 2 \cdot (0.45 + 0.1 \cdot 0.5) > 1$. Ako S sadrži tačku $(a - 1, 0.9)$, onda se lako pokazuje da S sadrži duži $[(a - 1, 0.9), (a - 1, 1)]$ i $[(a - 0.9, 1), (a - 1, 1)]$, pa je $\sigma(S) \geq 1$. Pretpostavimo sada da S ne sadrži nijednu od tačaka $(1, 09), (a-1, 0.9)$. Ako sadrži tačku $(\min(2, a - 1), 0.9)$, onda na osnovu leme 18 sledi da $\sigma(S) \geq 0.45 \cdot 2 + d + 0.5c > 1$. Ako ne sadrži tačku $(\min(2, a - 1), 0.9)$, gde je $a \geq 3$, (slučaj $a < 3$ analizira se analogno), posmatraćemo „najgori" slučaj, kada jedan ugao kvadrata S dodiruje x-osu i tačka $(2, 0.9)$ je na jednoj stranici kvadrata S. Ako je tačka $(1, 1)$ u S, onda $\sigma(S; L_3) + \sigma(S; Q) \geq 0.5$ i $\sigma(S) \geq d + 0.5c + 0.5 > 1$ na osnovu leme 18.

- Pretpostavimo sad da tačka $(1, 1)$ nije u S. Neka je $P' = (1, 1 - c')$ presečna tačka duži $[(1, 0.9), (1, 1)]$ i stranice kvadrata S, gde duž $[(1, 0.9), (1, 1)]$ nije sadržana u S. Tada je $\sigma(S; L_1) = 0.5c$ i $\sigma(S; L_3) + \sigma(S; Q) = 0.5 - 0.5c'$. Onda važi $\sigma(S) \geq d + 0.5c + 0.5 - 0.5c' > 1$ na osnovu leme 19.

Sedmi slučaj

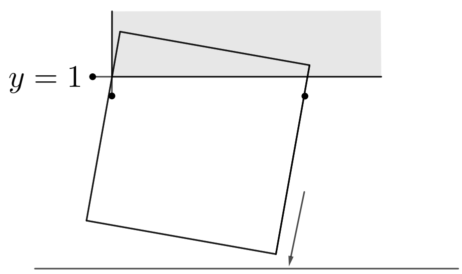
Poslednji slučaj je slučaj gde je centar kvadrata S u pravougaoniku $[1, a-1] \times [0, 1]$ i prava $y = 1$ seče dve nesusedne stranice e_1 i e_2 od S. Neka je L' duž u preseku prave $y = 1$ i S, a njena dužina c. Jasno je da je tada $c \geq \lambda > 1$.

- Ako duž L' pripada L_1, tj. S ne sadrži nijednu od tačaka $(0.9, 1), (a - 0.9, 1) \in Q$, i S sadrži tačku P, onda $\sigma(S) \geq 0.5c + 0.5 > 1$.

- Ako S sadrži obe tačke $(0.9, 1), (a - 0.9, 1) \in Q$, onda L_1 cela pripada S, pa $\sigma(S) \geq \sigma(S; R^*) + (0.45 + 0.05) \cdot 2 > 1$.

- Kada S sadrži $(0.9, 1)$, ali ne i $(a - 0.9, 1)$ (obrnut slučaj razmatra se analogno), po lemi 20(iii), S sadrži jednu od P tačaka $(2, 0.9)$ ili $(1, 0.9)$. Tada sadrži duž $[(0.9, 1), (1, 1)]$ ili duž $[(1, 0.9), (1, 1)]$, odakle imamo $\sigma(S) \geq \sigma(S; R^*) + 0.5 + 0.5 > 1$.

- U slučaju kada L' pripada L_1 i S ne sadrži tačku P, po lemi 20(iii), S sadrži $(1, 0.9)$ ili $(a - 1, 0.9)$. Pretpostavimo da S sadrži $(1, 0.9)$ (drugi slučaj analogno). Ako tada sadrži i $(1, 1)$, onda sadrži duž $[(1, 0.9), (1, 1)]$ i zadovoljava $\sigma(S) \geq 0.5c + 0.5 > 1$. U slučaju da S sadrži $(1, 0.9)$, ali ne i $(1, 1)$ i $(\min\{2, a - 1\}, 0.9)$, kao na slici.



Slika 44.

Da bismo procenili minimum $\sigma(S)$ u ovom slučaju, možemo pretpostaviti da S dodiruje x-osu, dozvoljavajući mogućnost da $y = 1$ ne seče dve nesusedne stranice kvadrata S, ali tada imamo situaciju razmatranu u šestom slučaju.

Kompletiranjem ovih sedam slučaja, dokazana je lema 14.□

5 Zaključak

U ovom radu pokazali smo primere pakovanja jediničnih kvadrata u kvadrat, za neke vrednosti n odredili tačnu vrednost, a za neke pronašli netrivijalna gornja i donja ograničenja za $s(n)$, stranicu najmanjeg kvadrata u koji možemo spakovati n jediničnih kvadrata. Dokazali smo niz tehničkih lema i uveli tehniku skupa neizbežnih i skoro neizbežnih tačaka, što nam je omogućilo da odredimo vrednosti $s(n)$ ili donja ograničenja te vrednosti za još neke brojeve n. Utvrdili smo netrivijalnu gornju granicu broja jediničnih kvadrata koji mogu biti spakovani u pravougaonik datih stranica, tom prilikom uvodeći (znatno) uopštenje tehnike neizbežnih tačaka (uključujući u tehniku i druge objekte: duži i pravougaonike), što nas je dovelo do tačnih vrednosti $s(n^2-1)$ i $s(n^2-2)$ za sve prirodne brojeve n, kao i do novih donjih ograničenja za $s(n)$ za sve vrednosti $n \geq 4$.

Rezultati izloženi u master tezi su originalno dobijeni u radovima velikog broja naučnika tokom poslednjih 40-ak godina (koliko je ova oblast aktuelna). Selekcija izloženih rezultata načinjena je s idejom da teza predstavlja neku zaokruženu celinu (čitalac će prosuditi koliko je uspešno to postignuto). Jasno, ova teza nije zamišljena da bude (niti može biti) *sveobuhvatan* prikaz rezultata iz ove oblasti, ali bar u nekim aspektima jesmo došli prilično blizu toga da iscrpemo i zapravo sve što je poznato: naime, možda neočekivano, u momentu pisanja ovog teksta postoje još samo dve publikovane egzaktne vrednosti funkcije s (pored onih izloženih u tezi), naime $s(13) = 4$ i $s(46) = 7$ [2] (što zapravo svedoči o složenosti posmatranog problema, iako bi se on na prvi pogled mogao pogrešno doživeti kao vrlo jednostavan, možda čak i banalan)!

Oblast je i dalje aktuelna kod savremenih matematičara i pojavljuju se novi rezultati. Izdvojili bismo rezultat Bentza (po našim saznanjima, još neobjavljen, tj. postavljen samo na arXiv-u [3]), u kom se dokazuju jednakosti $s(22) = 5$ i $s(33) = 6$ (zajedno s rezultatima za $s(6)$, $s(13)$ i $s(46)$, ovim se „kompletira formula" $s(n^2-3) = n$ za $3 \leq n \leq 7$; da li možda ova formula važi za sve $n \geq 3$?). Pomenimo još, ispostavilo se da su se određena istraživanja na jednom drugom, naizgled nepovezanom problemu kombinatorne geometrije ispostavila kao tesno povezana s ovim problemom, i zapravo su se odatle dobila neka nova donja ograničenja za $s(n)$ [1]. Što se tiče gornjih ograničenja, ona se najčešće dobijaju eksplicitnim pronalaženjem što boljih pakovanja za dato n, od čega treba izdvojiti pristup Gensana i Ryckelyncka [7], koji razvili određeni heuristički algoritam i pomoću njega uspeli da poprave najbolja do tada poznata gornja ograničenja za $s(n)$ za više vrednosti n.

Biografija

Zorica Bera (rođena Zarić) rođena je 11. jula 1969. godine u Futogu. Osnovnu školu "Branko Radičević" u Staparu završila je 1984. a Srednju školu prirodno-tehničkih struka "Veljko Vlahović" u Somboru, matematičkog usmerenja (pomoćni istraživač u matematici) 1988. godine, obe kao nosilac Vukove diplome. Posle završene srednje škole upisuje studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, koje nije privela kraju. Posle veće pauze u studiranju, vraća se na isti fakultet, gde 2014. na studijskom programu profesor matematike stiče visoko obrazovanje u stručnom nazivu diplomirani profesor matematike i iste godine upisuje master akademske studije na smeru master profesor matematike. Od aprila 2016. radi u Tehničkoj školi "Mihajlo Pupin" u Inđiji kao nastavnik matematike. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i time stekla uslov za odbranu ovog rada.

Literatura

[1] B. Bašić, A. Slivková, *On optimal piercing of a square*, Discrete Appl. Math. 247 (2018), 242–251

[2] W. Bentz, *Optimal packings of 13 and 46 unit squares in a square*, Electron. J. Combin.17 (2010), Research Paper #R126, 11 pp.

[3] W. Bentz, *Optimal packings of 22 and 33 unit squares in a square*, arXiv:1606.03746

[4] S. El Moumni, *Optimal packings of unit squares in a square*, Studia Sci. Math. Hungar. 35 (1999), 281-290

[5] E. Friedman, *Packing unit squares in squares: a survey and new results*, Elecrtron. J. Combin., Dynamic Survey # DS7

[6] M. Gardner, *Mathematical Games*, Scientific American (Oct 1979, Nov 1979, Mar 1980, Nov 1980).

[7] T. Gensane & P. Ryckelynk, *Improved dense packing of congruent squares in a square*, Discrete Comput. Geom. 34 (2005), 97–109.

[8] F. Göbel, *Geometrical Packing and Covering Problems*, in: A.Schrijver (ed.), Packing and covering in combinatorics, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1979.

[9] M. Kearney & P. Shiu, *Efficient Packing of Unit Squares in a Square*, Electron. J. Combin. 9 (2002), Research paper # R14, 14 pp.

[10] H. Nagamochi, *Packing Unit Squares in a Rectangle*, Electron. J. Combin. 12 (2005), Research paper # R37, 13 pp.

[11] W. Stromquist, *Packing 10 or 11 Unit Squares in a Square*, Electron. J. Combin 10 (2003), Research paper # R8, 11 pp.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Zorica Bera
AU
Mentor: Bojan Bašić
MN
Naslov rada: Problem pakovanja kvadrata
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina:2019.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 5/52/11/1/44/0/0
(broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Kombinatorna geometrija
ND
Predmetna odrednica/ključne reči: jedinični kvadrat, pakovanje kvadrata, skupovi neizbežnih tačaka
PO
UDK:
Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Problem pakovanja jediničnih kvadrata u kvadrat podrazumeva određivanja stranice $s(n)$ najmanjeg kvadrata u koji se može spakovati n jediničnih kvadrata. Za neke brojeve n moguće je odrediti tačnu vrednost funkcije $s(n)$, dok se za ostale istraživanja kreću u pravcu nalaženja što boljih donjih i gornjih ograničenja. Za određivanje donjih ograničenja uvodi se tehnika tzv. *neizbežnih tačaka,* koja omogućava i određivanje vrednosti $s(n)$ za neke brojeve n. Njenim uopštenjem (uključivanjem u neizbežan skup i drugih objekata), dolazi se do tačnih vrednosti $s(n^2-1)$ i $s(n^2-2)$ za sve prirodne brojeve n, kao i do novih donjih ograničenja za $s(n)$ za sve vrednosti $n \geq 4$. Master rad sastoji se iz četiri dela. U prvom delu daju se primeri nekih jednostavnijih pakovanja i pominju neke ideje kako se ta pakovanja mogu modifikovati i nadograditi. U drugom delu navode se i dokazuju leme potrebne za dalja razmatranja, uvode se tehnike neizbežnih i skoro neizbežnih tačaka i pomoću nih izvode dokazi za neke vredsnosti $s(n)$. U trećem poglavlju daju se nešto složeniji dokazi za vrednosti $s(7), s(6)$ i $s(10)$. U četvrtom poglavlju prezentuju se značajni rezultati Nagamochija, koji dokazuje jednakosti $s(n^2-1) = s(n^2-2) = n$ za sve n, kao i netrivijalno donje ograničenje za $s(n)$ za sve n.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 28. septembar 2018
DP
Datim odbrane:
DO
Članovi komisije:
Predsednik: dr Olga Bodroža Pantić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor: dr Bojan Bašić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Boris Šobot, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Master's thesis
CC
Author: Zorica Bera
AU
Mentor: Bojan Bašić
MN
Title: The square-packing problem
TI
Language of text: Serbian (Latin)
LT
Language of abstract: Serbian/English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2019.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 5/52/11/1/44/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Combinatorial geometry

SD
Subject/Keywords: unit square, square packing, unavoidable points
SKW
UDK:
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: The square-packing problem deals with determining the side-length $s(n)$ of the smallest square into which n unit squares can be packed. For some values of n it is possible to determine the exact value of $s(n)$, while for other values of n research directions are aimed toward finding as good as possible lower and upper bounds. For the lower bounds a technique of the so-called *unavoidable points* is introduced, which also makes it possible to determine the exact values $s(n)$ for some numbers n. By its generalization (including also some other objects in an unavoidable set), it is possible to obtain the exact values of $s(n^2-1)$ and $s(n^2-2)$ for all n, as well as some new lower bounds for $s(n)$ for all $n \geq 4$. The thesis consists of four parts. In the first part, some simpler examples of packings are given, and there are mentioned some ideas how to modify and generalize those packings. In the second part, some necessary lemmas for further considerations are formulated and proved, techniques of unavoidable and almost unavoidable points are introduced, and they are used to prove some values of $s(n)$. In the third part, some more complex proofs for the values $s(7)$, $s(6)$ and $s(10)$ are given. In the fourth part, significant results of Nagamochi are presented, who proved equalities $s(n^2-1) = s(n^2-2) = n$ for all n, as well as nontrivial lower bounds for $s(n)$ for all n.
AB
Accepted by Scientific Board on: September 28, 2018
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
President: Olga Bodroža Pantić, PhD, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Mentor: Bojan Bašić, PhD, Associate Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: Boris Šobot, PhD, Associate Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
DB