



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМСАДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И
ИНФОРМАТИКУ



Зорана Томић

ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ ФУНКЦИЈА

Мастер рад

Нови Сад, 2012.

Предговор	3
1. Увод	4
Појам функције	4
2. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НИЗА	9
Дефиниција и особине	9
Кошијеви низови	11
3. ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ ФУНКЦИЈЕ	13
Дефиниција и особине	13
Кошијев принцип	18
Асимптоте	19
Неке важније граничне вредности функције	27
4. НЕПРЕКИДНОСТ ФУНКЦИЈЕ	29
Дефиниција непрекидности	29
Операције са непрекидним функцијама	33
Врсте прекида функције	33
Својства функција непрекидних на одсечку	36
Униформна непрекидност	37
5. ПРИПРЕМЕ ЧАСОВА ЗА ОБРАДУ НОВОГ ГРАДИВА	39
ПРВИ ЧАС: ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ ФУНКЦИЈЕ (обрада)	39
ДРУГИ ЧАС: ЛЕВА И ДЕСНА ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ (обрада)	41
ТРЕЋИ ЧАС: ОСНОВНЕ ТЕОРЕМЕ О ГРАНИЧНИМ ВРЕДНОСТИМА ФУНКЦИЈЕ (обрада)	44
ЧЕТВРТИ ЧАС: ЧЕТИРИ ВАЖНА ЛИМЕСА. БЕСКОНАЧНА ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ(обрада)	47
Четири важна лимеса	47
Бесконачна гранична вредност	50

ПЕТИ И ШЕСТИ ЧАС: ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ (понављање и утврђивање)	51
СЕДМИ ЧАС: НЕПРЕКИДНОСТ ФУНКЦИЈЕ. АСИМПТОТЕ ФУНКЦИЈА. (обрада)	52
Непрекидност функције.....	52
Асимптоте функције	52
6. ТЕСТОВИ.....	57
Први тест.....	58
Други тест (писмени задатак).....	59
7. ЛИТЕРАТУРА	60
8. КРАТКА БИОГРАФИЈА	61

ПРЕДГОВОР

Предмет изучавања овог рада су граничне вредности функције.

Сам почетак рада посвећен је основним појмовима функције, одговара на питања: Шта је функција, пресликавање функције, домен и кодомен, парност и непарност као и монотоност функције.

Рад је подељен на два дела. Први део говори о граничним вредностима низова и функција уопште. Садржи три главе. Прва глава, Гранична вредност низа, на почетку даје дефиницију и неке особине низова, затим говори о граничној вредности низа која нам је неопходна као увод у следећој глави, Граничне вредности функције, коју почињемо са дефиницијом граничне вредности, јер смо на почетку рекли шта је функција и њене особине. Дефинишемо леву и десну граничну вредност, а потом говоримо о асимптотама функције јер њих добијамо преко граничних вредности. Такође, преко граничне вредности функције, одређујемо непрекидност, па је трећа глава у првом делу рада управо, непрекидност функције.

Други део је и главни део рада, а он говори о граничним вредностима функције у настави. Садржи четири главе.

Даље, сам изложила своје припреме за час за детаљну обраду лекција које су им предвиђене наставним планом и програмом, као и примере неких тестова и писмених задатака.

Како се граничне вредности функције раде у четвртном разреду средње школе, у прилогу су дати планови и програми по типовима школе, односно по недељном фонду часова. Затим је дат план и програм за економску школу смер економски техничар, којима сам ове године и предавала у средњој школи "22. Октобар" у Жабљу. Огромну захвалност дугујем свом ментору, професору др Драгославу Херцегу на одабиру теме као и на корисним саветима и сугестијама током рада.

Захваљујем се свом супругу Ивану, сестри Стефани и мами Снежани на несебичној подршци током студирања и у животу.

Рад посвећујем покојном оцу Зорану који је заслужан за сваки мој постигнут успех.

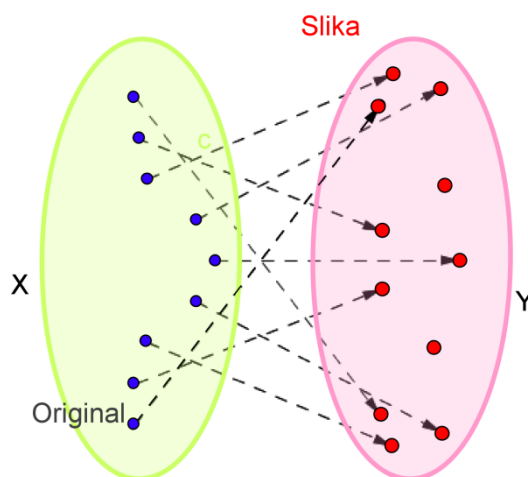
1. УВОД

Појам функције

Функција је један од основних појмова математике. Дефиниција функције као променљиве величине је несавршена јер се при томе користи нестроги појам променљиве величине и зато се обично користи савременији приступ овом проблему преко теорије скупова.

Скуп се у математици узима за основни појам. Декартов производ скупова је скуп уређених парова. Уређен пар елемената чине било која два елемента код којих се зна који од њих је први, а који други. Затим, релација је непразан подскуп Декартовог производа скупова, и коначно, функција је једна врста релације.

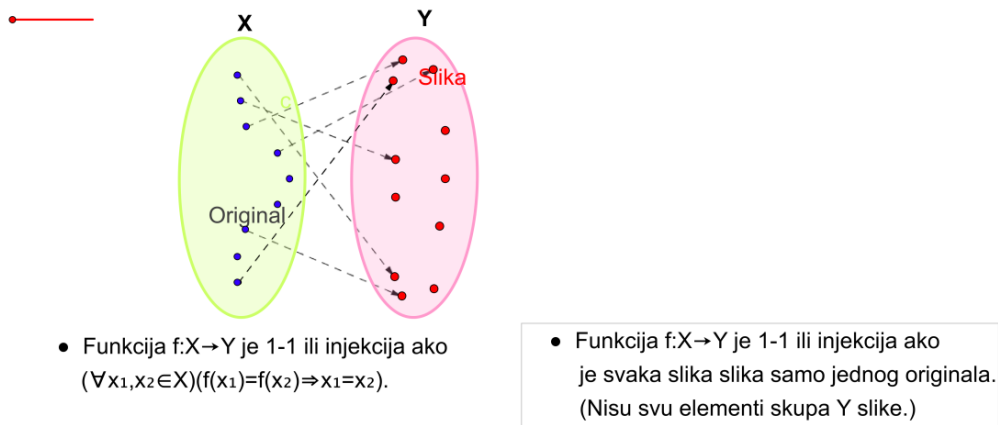
Дефиниција 1. Уређена тројка (X, Y, f) одређује функцију чији је скуп дефинисаности или домен X често се означава $D(f)$, а скуп у којем функција узима вредност или кодомен Y , често се означава са $K(f)$, док је f правило придруживање по којем сваком елементу из X одговара тачно један елемент из Y .



Слика 1. Пресликавање или функција

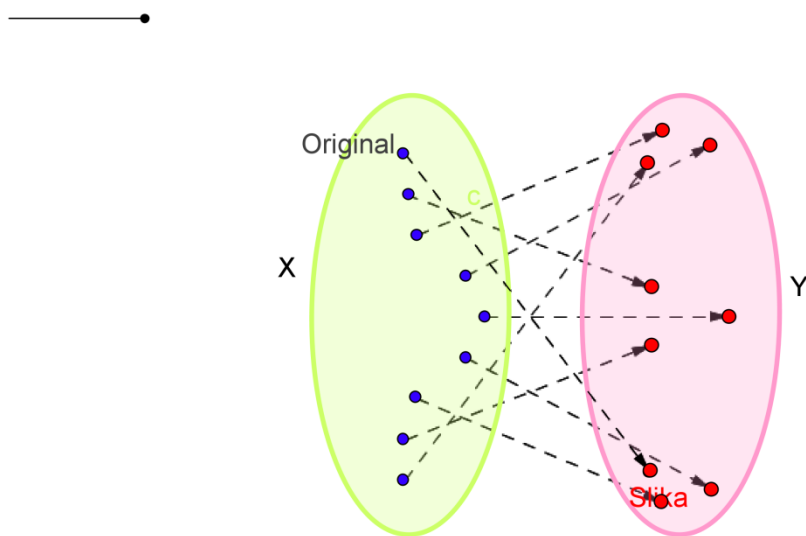
Дефиниција 2. Функција $f: X \rightarrow Y$ зове се сурјекција или “на” пресликавање ако је $K(f) = Y$. Једноставније речено, функција је сурјекција ако и само ако су сви елементи скупа Y нечије слике.

Дефиниција 3. Функција $f: X \rightarrow Y$ зове се инјекција или “1-1” пресликавање, ако важи $(\forall x_1, x_2 \in X)(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$



Слика 2. Пресликавање "1-1"

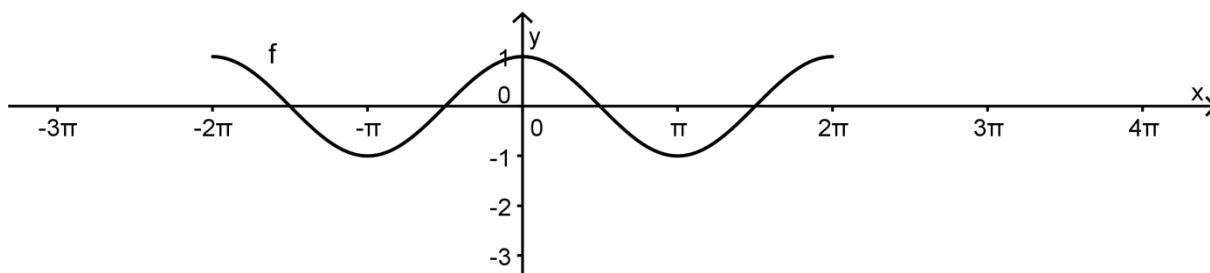
Дефиниција 4. Функција која је сурјекција и инјекција зове се бијекција или обострано једнозначно пресликавање. Ако је $X \subset P$ и $Y \subset P$, онда имамо функцију која је дефинисана у неком подскупу скупа реалних бројева и узима вредност у скупу реалних бројева. Таква функција назива се функција једне реалне променљиве.



Слика 3. Пресликавање бијекција

Дефиниција 5. За функцију $f: X \rightarrow P$ дефинисану на симетричном скупу $X \subset P$ $(\forall x \in X)(x \in X \Rightarrow -x \in X)$ кажемо да је:

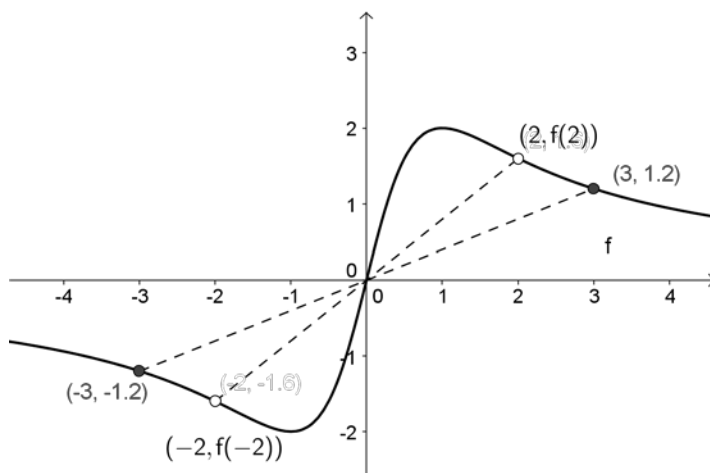
Парна ако $(\forall x \in X) f(-x) = f(x)$,



Слика 4. Парна функција

Непарна ако $(\forall x \in X) f(-x) = -f(x)$.

График парне функције је симетричан у односу на у-осу, а график непарне функције је симетричан у односу на координатни почетак.

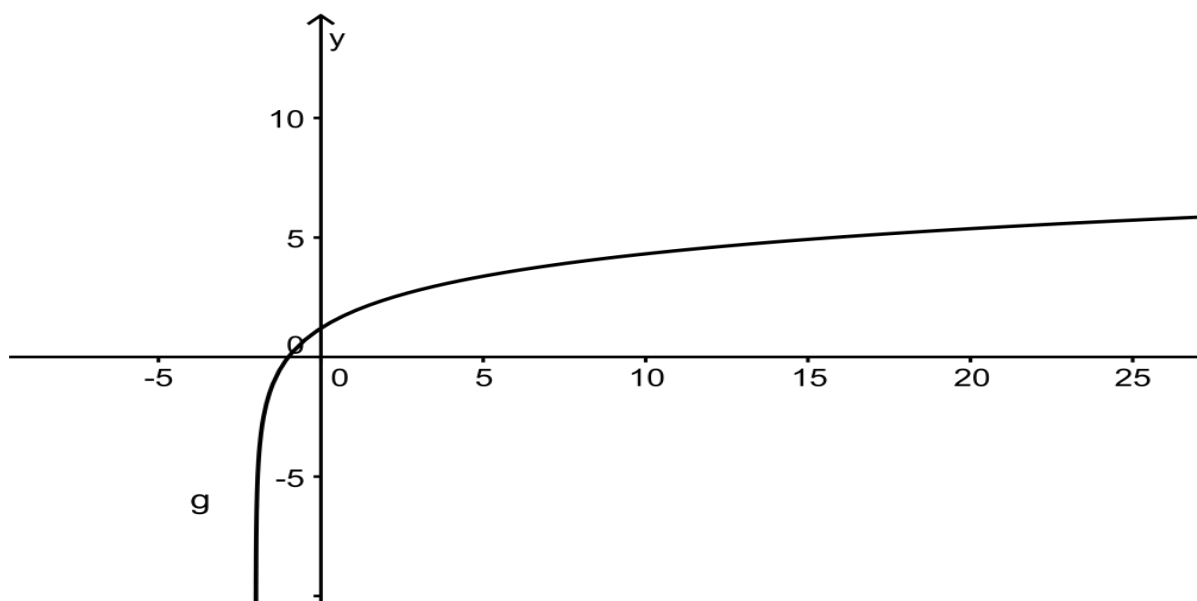


Слика 5. Непарна функција

Дефиниција 6. Функција $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ реалне променљиве назива се:

РАСТУЋА на X ако $(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$,

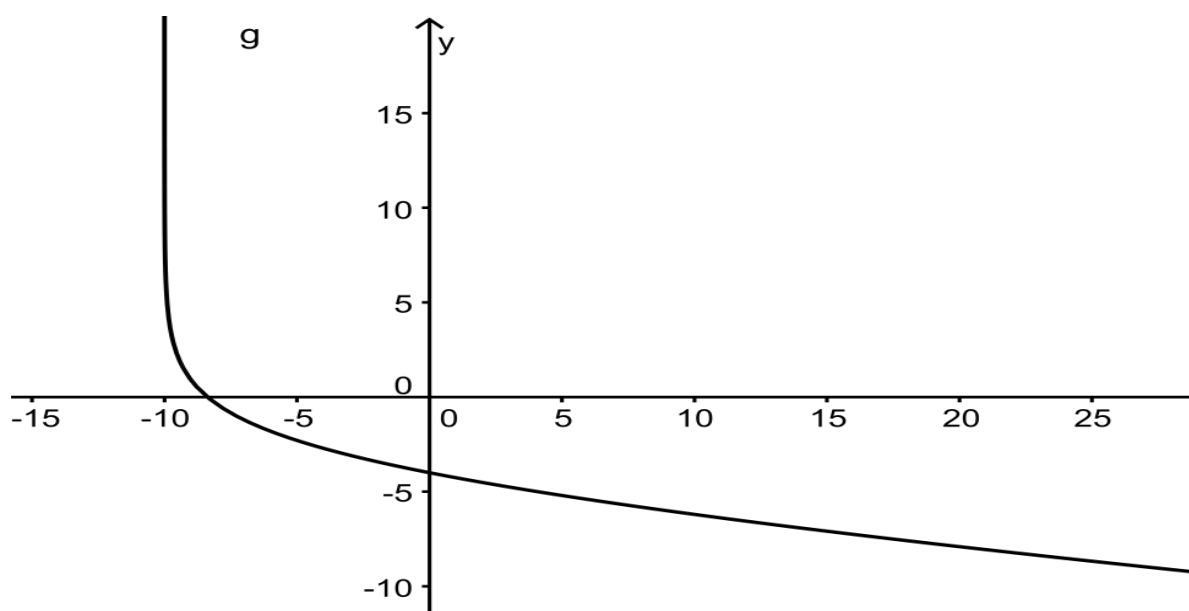
СТРОГО РАСТУЋА на X ако $(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$,



Слика 6. Строго растућа функција

ОПАДАЈУЋА на X ако $(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$,

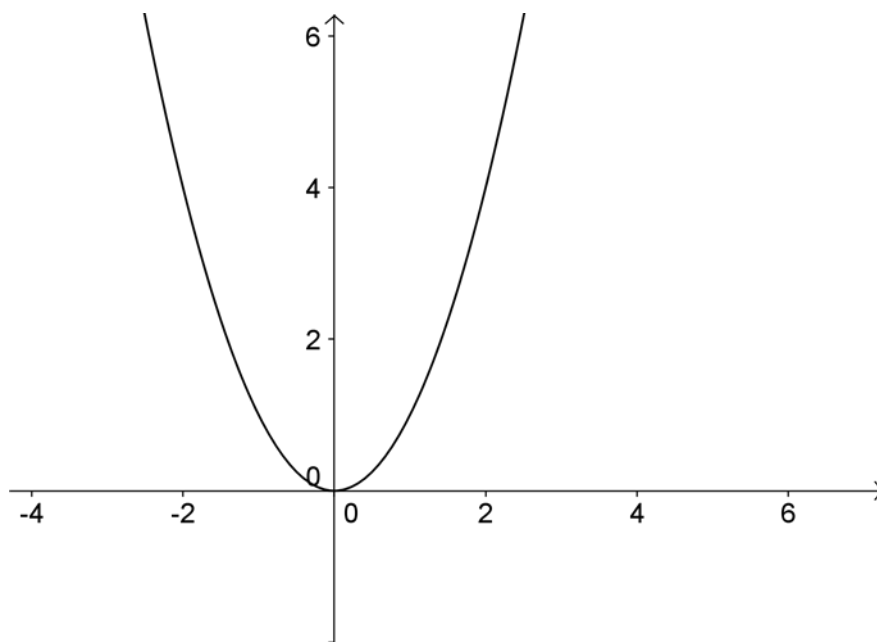
СТРОГО ОПАДАЈУЋА на X ако $(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.



Слика 7. Строго опадајућа функција

За функцију која задовољава било који од услова а) или с) кажемо да је монотона, а за функцију која задовољава услове б) или д) да је строго монотона.

Пример 1. Посматрајмо функцију $f(x) = x^2$ на $\mathbb{R}$.



Слика 8. Функција $f(x) = x^2$

Она је монотono опадајућа на $(-\infty, 0]$, а строго растућа на $[0, +\infty)$. Дакле, она није монотона на $\mathbb{R}$.

2. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НИЗА

Дефиниција и особине

Дефиниција 7. Низ је функција $a: N \rightarrow R$.

Уобичајно је да се пише $a_n := a(n)$, $n \in \mathbb{N}$ и $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Број a_n се зове општи члан низа a .

Даље ћемо са n означавати неки природан број.

Пример 2.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$, $n \in N$, $a_1, d \in R$ је **аритметички низ**.

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $n \in N$, $b_1, q \in R$ је **геометријски низ**.

$c_n = c$, $n \in N$ је **стационарни низ**.

Дефиниција 8. Низ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ је **ограничен** ако постоји позитиван реалан број M такав да за свако $n \in N$ важи $|a_n| \leq M$.

Пример 3. Низ са општим чланом $a_n = \frac{2n}{n^2+3}$ је ограничен јер је

$$0 < a_n < \frac{2n}{n^2} = \frac{2n}{n} \leq 2.$$

Пример 4. Низ $\{(-1)^n n^\alpha\}_{n \in \mathbb{N}}$ није ограничен ни са горње ни са доње стране.

Дефиниција 9. Реалан број L је **гранична вредност** низа $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in N$ са особином да за свако $n > n_0$ важи $|a_n - L| < \varepsilon$. Односно,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N)(n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon).$$

Ако је L гранична вредност (граница) низа $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ тада још кажемо да $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ конвергира ка броју L и записујемо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Теорема 1. Гранична вредност низа је јединствена.

Доказ 1. Претпоставимо супротно тврђењу, да низ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ има две граничне вредности a и b . За $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$, ε -околина тачака a и b су дисјунктне, па је немогуће да и у једној и у другој буду сви сем коначно много чланова низа $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. ■

Низ дивергира ако не конвергира. Издвајамо две класе дивергентних низова.

Дефиниција 10. Низ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ дивергира у $+\infty$ у ознаци $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, ако за свако $M > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да за свако $n > n_0$ важи $a_n > M$.

Дефиниција 11. Низ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ дивергира у $-\infty$ у ознаци $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, ако за свако $M > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да за свако $n > n_0$ важи $a_n < -M$.

Пример 5. Низ $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ је конвергентан и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Нека је дато $\varepsilon > 0$, на основу последице Архимедовог принципа, постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Онда за све $n \geq n_0$ важи да је

$$|a_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

што је и требало показати.

Уколико желимо да за познато ε израчунамо n_0 , решавамо једначину $\frac{1}{n} < \varepsilon$, добијамо да је једно решење $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$.

Низ $\{q^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $q > 1$, дивергира ка $+\infty$. Из $q = 1 + h$, за неко $h > 0$, следи да је $q^n = 1 + nh$ за све $n \geq 2$. За произвољно $M \in \mathbb{R}$, можемо одредити $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $1 + n_0 h > M$. Сада за све $n \geq n_0$ важи да је $q^n > M$, Што значи да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty, q > 1.$$

Теорема 2. Сваки конвергентан низ је ограничен.

Доказ 2. Нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Како је низ конвергентан, следи да је $a \in \mathbb{R}$. За свако $\varepsilon > 0$, па и за $\varepsilon = 1$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је за све $n > n_0$, $|a_n - a| < 1$. Нека је $l = \max\{1, |a_1 - a|, |a_2 - a|, \dots, |a_{n_0-1} - a|\}$. Тада је за све $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n - a| \leq l,$$

тј. $a - l \leq a_n \leq a + l$, за све $n \in \mathbb{N}$, што је и требало показати. ■

Теорема 3. Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, тада је $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$.

Доказ 3. Нека је $\varepsilon > 0$ дато. Из $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ следи да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је за све $n \geq n_0$ важи

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon,$$

што значи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$. ■

Теорема 4. Нека су $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ три бројна низа са особинама:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a.$$

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \text{ за све } n \in \mathbb{N}$$

Тада и низ $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ конвергира, односно $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

Доказ 4. Нека је $a \in R$ и нека је $\varepsilon > 0$ дато. Постоје n_0^a и $n_0^c \in N$. Такви да за све $n \geq n_0^a$ је $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ и за $n \geq n_0^c$ је $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$. Тада за све $n \geq n_0^b = \max\{n_0^a, n_0^c\}$ важи

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon,$$

односно, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$. ■

Теорема 5. Нека су $\{a_n\}_{n \in N}$ и $\{b_n\}_{n \in N}$ конвергентни низови и нека је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Тада је

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$

Збир два конвергентна низа је конвергентан низ и при томе је гранична вредност збира једнака збиру граничних вредности.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$

Производ два конвергентна низа је конвергентан низ и при томе је гранична вредност производа једнака производу граничних вредности.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$

Количник два конвергентна низа је конвергентан низ ако низ у имениоцу не тежи нули и при томе је гранична вредност количника једнака количнику граничних вредности.

Кошијеви низови

Дефиниција 12. Низ $\{a_n\}_{n \in N}$ је Кошијев ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall m, n \in N)(m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon),$$

односно,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n, p \in N)(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon).$$

Теорема 6. Сваки конвергентан низ је Кошијев.

Доказ. Нека је $\varepsilon > 0$ дато. Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in R$ можемо одредити $n_0 \in N$ такав да је за све прородно бројеве $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Сада за све $m, n \geq n_0$ важи

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Што је и требало показати. ■

Теорема 7. *Сваки Кошијев низ је ограничен.*

Теорема 8. *Сваки Кошијев низ има највише једну тачку нагомилавања.*

Теорема 9. *Бројни низ је конвергентан ако и само ако је Кошијев.*

3. ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ ФУНКЦИЈЕ

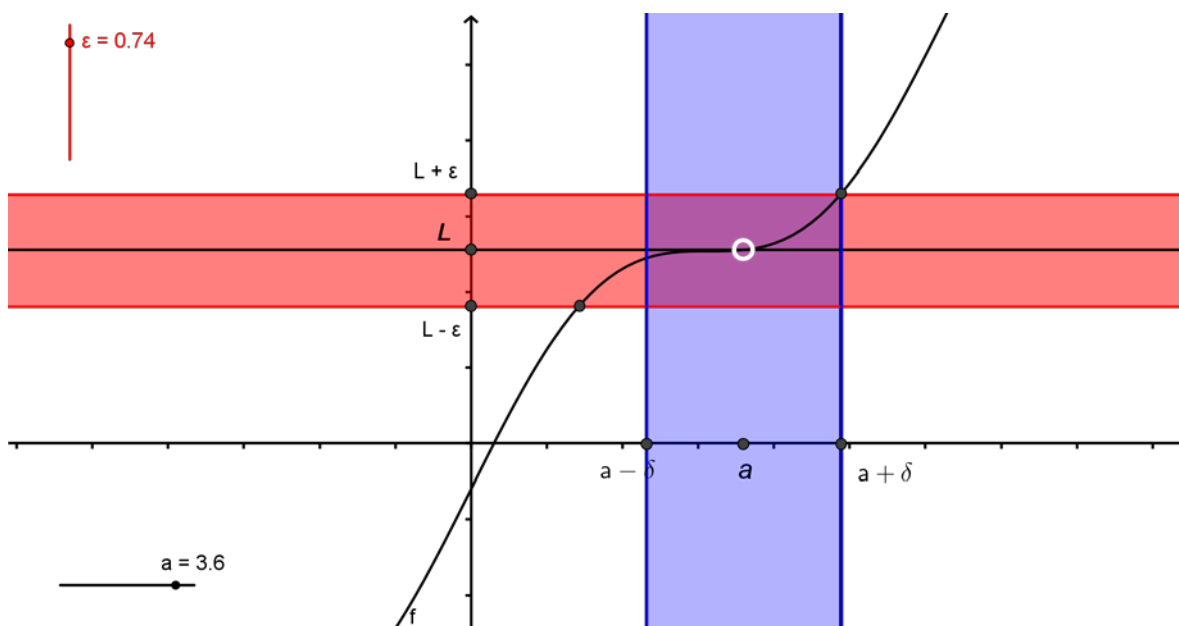
Дефиниција и особине

Појам граничне вредности уведен је у циљу испитивања понашања функције у околини неке тачке без обзира да ли је функција у тој тачки дефинисана или не.

Дефиниција 13. Нека је $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ функција реалне променљиве и $a \in \bar{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа X . Кажемо да је $b \in \bar{\mathbb{R}}$ гранична вредност (лимес) функције f у тачки a и пишемо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ако за сваку околину $V(b)$ тачке b постоји околина $U(a)$ тачке a таква да $(\forall x \in X)(x \in U(a), x \neq a \Rightarrow f(x) \in V(b))$.

Користећи ознаку $\dot{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}$ можемо записати

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall V(b))(\exists \dot{U}(a)) f(\dot{U}(a)) \subset V(b)$$



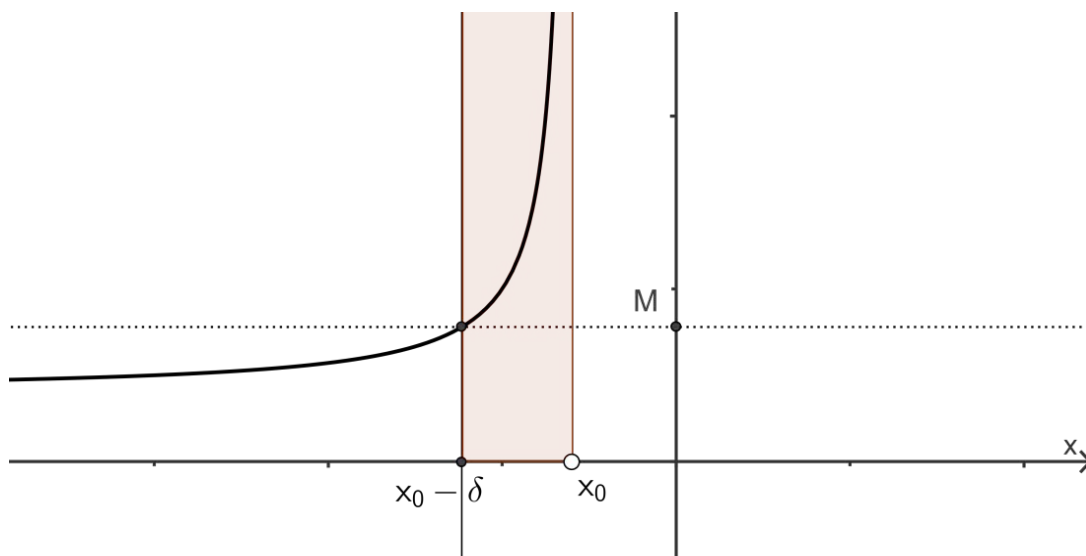
Слика 8. Гранична вредност функције у тачки

Дефиниција 14. Нека је $a, b \in \mathbb{R}$. Кажемо да је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Дефиниција 15. Нека је $a \in \mathbb{R}$. Кажемо да је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ако

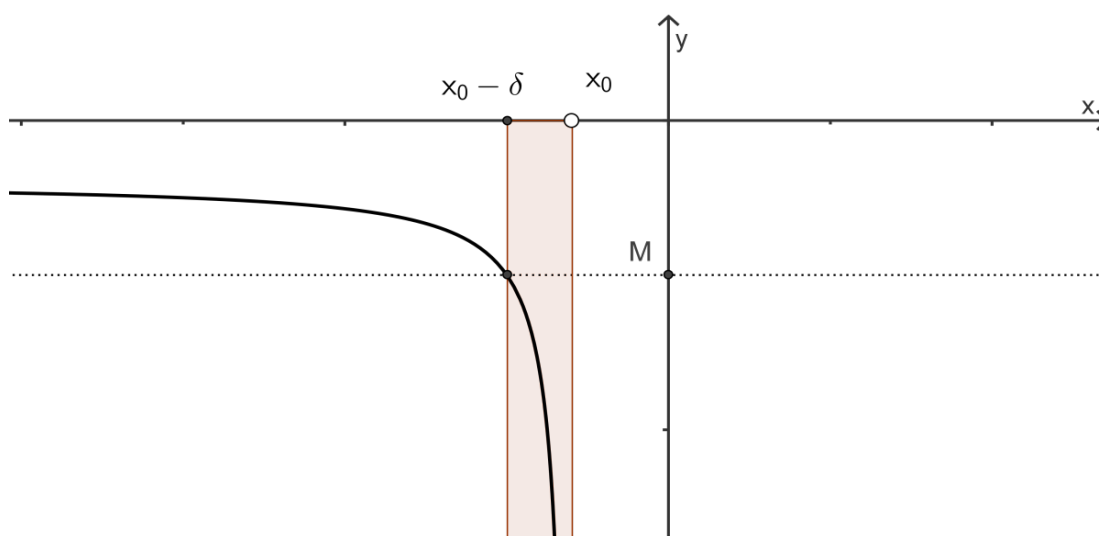
$$(\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M).$$



Слика 9. Плус бесконачно. Гранична вредност функције у тачки слева

Дефиниција 16. Нека је $a \in \mathbb{R}$. Кажемо да је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ако

$$(\forall M > 0)(\exists K > 0)(\forall x \in X)(x > K \Rightarrow f(x) < -M).$$



Слика 9. Минус бесконачно. Гранична вредност функције у тачки слева

Пример 6. Показати по дефиницији 2.2. да је $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 5) = -1$

Пример 7. Потребно је показати да за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, тако да из неједнакости $0 < |x - 2| < \delta$ следи $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$, где је $f(x) = 2x - 5$. Тако добијамо

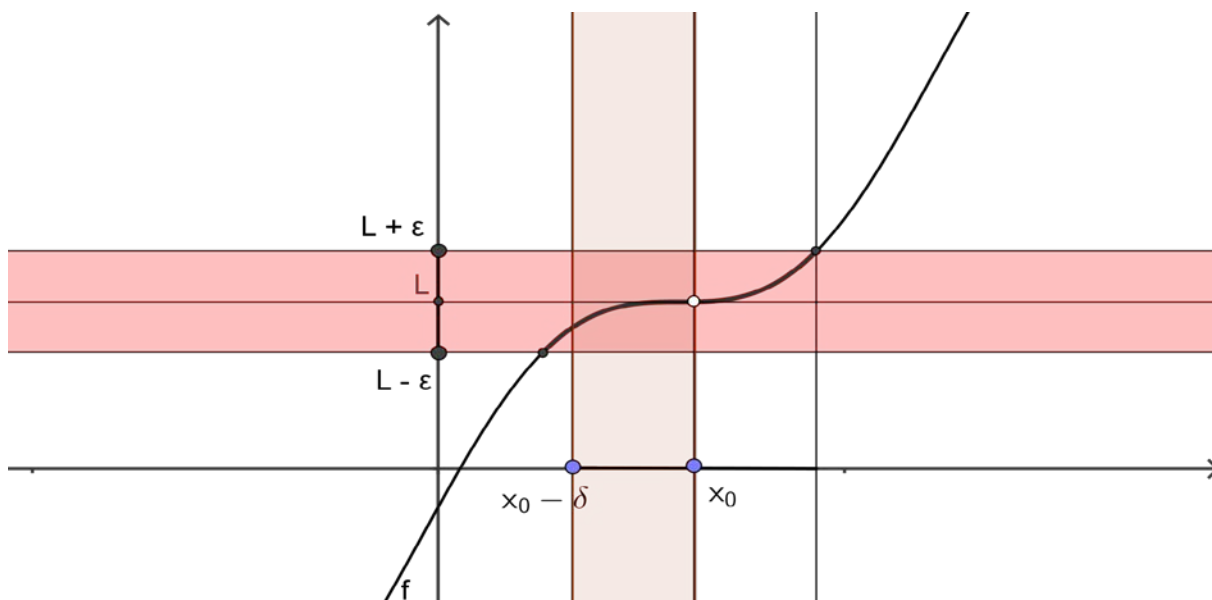
$$|2x - 5 - (-1)| = 2|x - 2| < \varepsilon.$$

Тада је неједнакост $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$ испуњена ако важи $0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$, па можемо узети $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$. Значи, за дато ε постоји δ тако да из $0 < |x - 2| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ следи $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$.

Дефиниција 17. Нека је $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је a тачка нагомилавања скупа $X^- = \{x \in X | x < a\}$. Вредност

$$\lim_{x \rightarrow a^-, x \in X} f(x) = \lim_{x \rightarrow a, x \in X^-} f(x)$$

Назива се лева гранична вредност функције f у тачки a и ако постоји означава се са $f(a - 0)$.

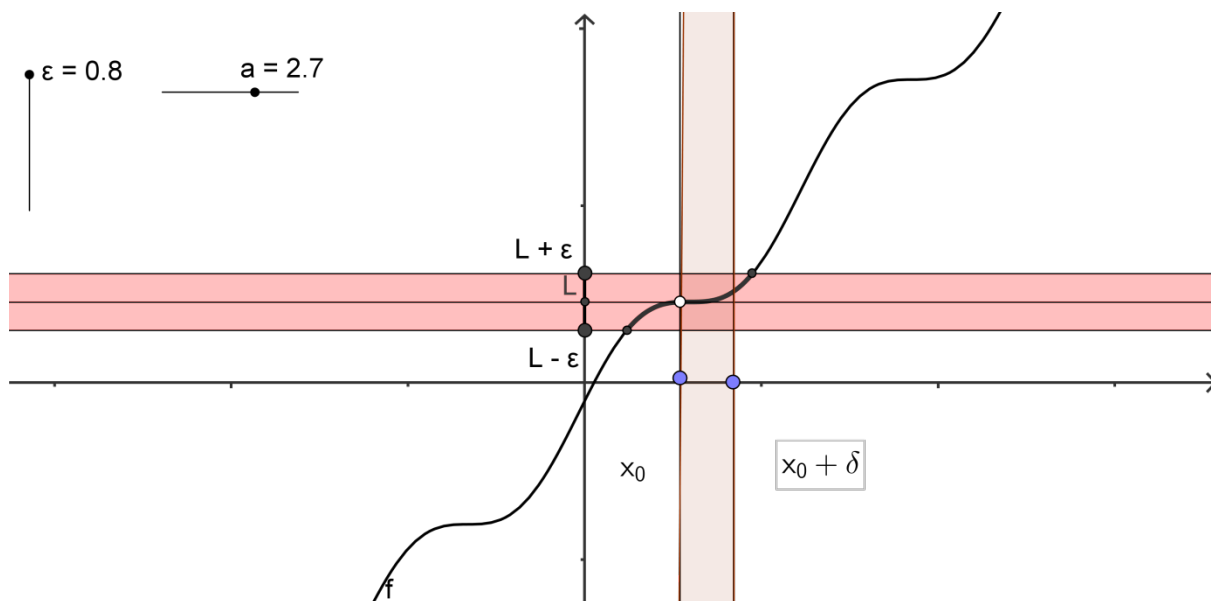


Слика 10. Лева гранична вредност функције

Аналогно, десна гранична вредност функције f у тачки a се дефинише као гранична вредност функције f у тачки a на скупу $X^+ = \{x \in X | x > a\}$, односно

$$\lim_{x \rightarrow a^+, x \in X} f(x) = \lim_{x \rightarrow a, x \in X^+} f(x)$$

Уколико постоји, означава се са $f(a + 0)$.

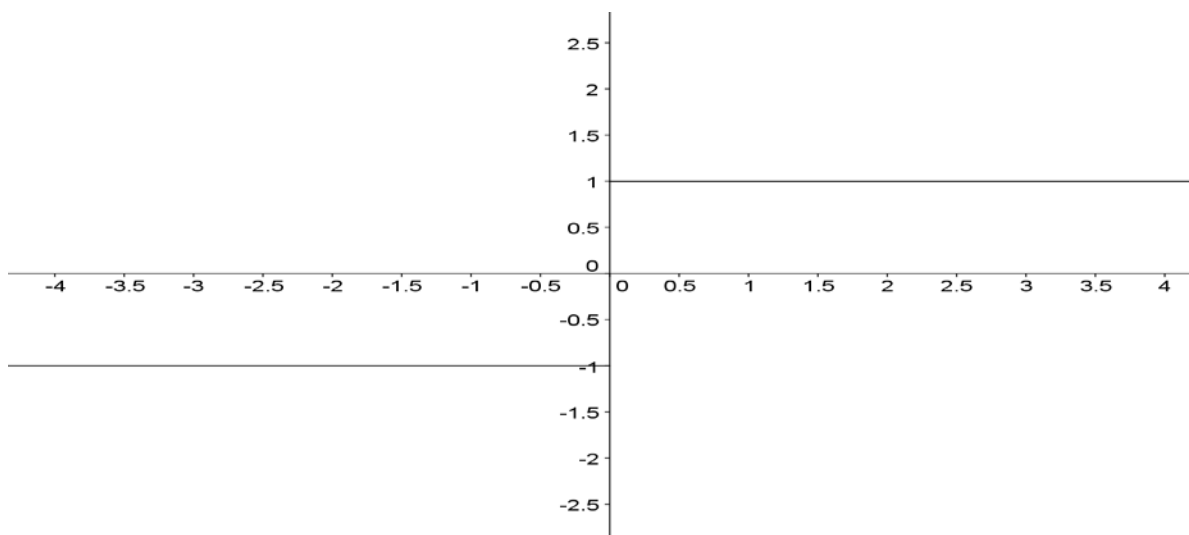


Слика 11. Десна гранична вредност функције

Пример 8. Функција $f(x) = \operatorname{sgn} x, x \in \mathbb{R}$, има и леву и десну граничну вредност у нули и при томе је:

$$\lim_{x \rightarrow 0^{-0}, x \in \mathbb{R}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x \in \mathbb{R}^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^{+0}, x \in \mathbb{R}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x \in \mathbb{R}^+} f(x) = 1$$



Слика 12. Функција $f(x) = \operatorname{sgn} x$

Теорема 10. Функција $f: X \rightarrow R$ има граничну вредност у тачки a , која је тачка нагомилавања скупова X^- и X^+ , ако и само ако има и леву и десну граничну вредност у тачки a и оне се поклапају.

Теорема 11. Ако функција f има граничну вредност у тачки a , она је јединствено одређена.

Теорема 12. Ако функција има коначну граничну вредност у тачки a , онда постоји околина $U \in V(a)$, таква да је функција f ограничена на $U \setminus \{a\}$.

Доказ 5. Нека је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in R$. За сваку околину тачке b , па и за околину $(b - 1, b + 1)$ постоји околина $U \in V(a)$ таква да је $f(U \setminus \{a\}) \subset (b - 1, b + 1)$, тј. да је за све $x \in U \setminus \{a\}$

$$b - 1 < f(x) < b + 1,$$

што је и требало показати. ■

Теорема 13. Ако је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ тада је $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|$ (обрнуто не важи).

Теорема 14. Ако је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq 0$ онда постоји околина $U \in V(a)$ таква да је за све $x \in U \setminus \{a\}$ $f(x) \neq 0$ и има исти знак као и b .

Доказ 6. Нека је $b > 0$ и $b \in R$. За $\varepsilon = b > 0$ одредимо $U \in V(a)$ такво да је $|f(x) - b| < b$. То значи да је за све $x \in U$

$$-b < f(x) - b < b, \text{ односно}$$

$$0 < f(x) < 2b.$$

За " $b < 0$ " бирамо $\varepsilon = -b > 0$. Аналогно и за $b = \pm\infty$. ■

Теорема 15. Ако за неку околину $U \in V(a)$ испуњен услов да је за све $x \in U \setminus \{a\}$, $f(x) \leq g(x)$ и функције f и g имају граничну вредност у тачки a , тада је

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Теорема 16. Нека су $f, g, h: X \rightarrow R$ три функције и нека је за све x из неке околине тачке a , са изузетком тачке a , $a \in \bar{R}$,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

Ако је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b \in \bar{R}$, тада је и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$.

Пример 9. За $0 < x < \frac{\pi}{2}$ важи неједнакост $\sin x < x < \tan x$

одакле се добија да је

$$\frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x} \quad / \cdot \sin x$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Пошто је $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ на основу претходне теореме следи да је $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Теорема 17. Нека је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ и $b, c \in \mathbb{R}$.

Тада је:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c; \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c; \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}, \quad c \neq 0.\end{aligned}$$

Теорема 18. (гранична вредност сложене функције)

Нека је $B \subseteq \mathbb{R}$ и $b \in \bar{B}$ тачка нагомилавања скупа B , нека је $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је

$$\lim_{y \rightarrow b, y \in B} g(y) = c.$$

Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \bar{A}$, тачка нагомилавања скупа A , $f: A \rightarrow B$ при чему за сваку V околинину тачке b постоји U околина тачке a таква да је

$$f((U \setminus \{a\}) \cap A) \subseteq V \setminus \{b\}$$

$$\text{Тада је } \lim_{x \rightarrow a, x \in A} (g \circ f)(x) = c.$$

Доказ 7. За произвољно $W \in V(c)$ постоји $V \in V(b)$ такво да је $g((V \setminus \{b\}) \cap B) \subseteq W$ јер је $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$. За ту V околинину тачке b , постоји околина $U \in V(a)$ таква да је $f((U \setminus \{a\}) \cap A) \subseteq V \setminus \{b\}$ па је

$$(g \circ f)((U \setminus \{a\}) \cap A) = g(f((U \setminus \{a\}) \cap A)) \subseteq g((V \setminus \{b\}) \cap B) \subseteq W$$

$$\text{А то и значи да је } \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(f(x)) = c. \quad \blacksquare$$

Кошијев принцип

Теорема 19. Функција једне реалне променљиве $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ има коначну граничну вредност у тачки $a \in \bar{X}$ (која је тачка нагомилавања скупа X) ако и само ако важи:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists U \in V(a))(\forall x', x'' \in X)(x', x'' \in U \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon).$$

Доказ 8. $(\Rightarrow)$ Нека је дато $\varepsilon > 0$. Ако је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Одредимо околинину $U \in V(a)$ таква да је са све $x \in U \setminus \{a\}$, $x', x'' \in X$ $|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. За произвољне две тачке $x', x'' \in (U \setminus \{a\}) \cap A$ важи да је

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - b| + |b - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Нека је $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X \setminus \{a\}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. За дато $\varepsilon > 0$ и околину $U \in V(a)$ која задовољава услов

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists U \in V(a))(\forall x', x'' \in X)(x', x'' \in U \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon).$$

Одредимо $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је за све $n \geq n_0$

$$x_n \in U \setminus \{a\}$$

Сада за све $m, n \geq n_0$ је $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$, што значи да је низ $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ Кошијев, а самим тим и конвергентан.

Нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b \in R$. Треба још проверити да и за било који други низ је $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ са особинама $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X \setminus \{a\}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ је $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = b$.

Правимо низ $z_n = \begin{cases} x_n, & n = 2k + 1 \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ y_n, & n = 2k \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$ који тежи ка a ,
кад $n \rightarrow \infty$,
(односно низ $x_1, y_2, x_3, y_4, x_5, y_6 \dots \rightarrow a$)

Сви чланови овог низа су различити од a па је $\{f(z_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, на основу доказаног, конвергентан низ. Користећи сада тврђење о јединствености граничне вредности низа и чињеницу да сви поднизови конвергентног низа конвергирају ка његовој граници добија се да број b не зависи од избора низа $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. ■

Асимптоте

Тачка M на графику $f(x)$ се приближава некој правој када се бесконачно удаљава од координатног почетка.

Такве праве називају се асимптоте.

Оне могу бити

Вертикалне, облика $x = a$
Хоризонталне, облика $y = b$
Косе, облика $y = kx + n, k \neq 0$.

Оне се једним именом називају праволинијске асимптоте.

Дефиниција 18. Функција f је "велико o " функције g , кад $x \rightarrow a$, ако постоје околина $U \in V(a)$ и $M > 0$ такви да је за све $x \in U \setminus \{a\}$

$$|f(x)| \leq M \cdot |g(x)|$$

Тада пишемо $f(x) = O(g(x))$, кад $x \rightarrow a$ и кажемо да је функција f ограничена у односу на функцију g у некој околини тачке a .

$O(1)$ кад $x \rightarrow a$ је скуп свих функција ограничених у некој околини тачке a .

Дефиниција 19. Функција f је "мало o " функције g , кад $x \rightarrow a$, ако постоје околина $U \in V(a)$ и бесконачно мала функција $\varepsilon(x)$, кад $x \rightarrow a$, такви да за све $x \in U \setminus \{a\}$

$$f(x) = \varepsilon(x) \cdot g(x)$$

Тада пишемо $f(x) = o(g(x))$, кад $x \rightarrow a$.

$o(1)$, кад $x \rightarrow a$ је скуп свих бесконачно малих функција кад $x \rightarrow a$.

Дефиниција 20. Функција f се асимптотски понаша ка функцији g када $x \rightarrow a$ ако постоје околина $U \in V(a)$ и функција α таква да је за све $x \in U \setminus \{a\}$

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 1$$

Тада пишемо $f \sim g$, када $x \rightarrow a$ и читамо " f еквивалентно са g када $x \rightarrow a$ " или " f се асимптотски понаша као g када $x \rightarrow a$ ".

Дефиниција 21. Нека је функција f дефинисана за све $x > M$ ($x < M$). Ако постоје бројеви k и l такви да је

$$(*) \quad f(x) - (kx + l) = o(1), \quad x \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow -\infty)$$

Права $y = kx + l$ назива се асимптота графика функције $y = f(x)$ кад $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$).

Бројеви k и l одређују се помоћу формуле

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx \quad (x \rightarrow -\infty).$$

Када је $k = 0$ график функције f има ХОРИЗОНТАЛНУ АСИМПТОТУ $y = l$ кад $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) и при томе је

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad (\text{кад } x \rightarrow -\infty)$$

Када је $k \neq 0$, права $y = kx + l$ назива се КОСА АСИМПТОТА графика функције f кад $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$).

Подсетићемо се области дефинисаности неких функција

За рационалну функцију $\frac{P(x)}{Q(x)}$, важи $Q(x) \neq 0$.

За функцију $\ln x$, важи $x > 0$.

За функцију $\sqrt{x}$, важи $x \geq 0$.

Функција $\sqrt[3]{x}$ је дефинисана на целом скупу R .

Функција e^x је дефинисана на целом скупу R .

За функцију $\arcsin x$ важи $-1 \leq x \leq 1$.

Функција $\arctg x$ је дефинисана на целом скупу R .

Дефиниција 22. Нека је функција f дефинисана у некој околини тачке x_0 сем у тачки x_0 . Ако је бар једна од граничних вредности

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$$

Једнака $+\infty$ или $-\infty$ права $x = x_0$ назива се x_0 ВЕРТИКАЛНА АСИМПТОТА графика функције f .

Пример 10. Наћи асимптоте следећих функција:

$$\begin{aligned} y &= x e^{\frac{1}{x}} \\ y &= \frac{x+1}{x-1} \\ y &= \ln \frac{x-2}{x+1} \end{aligned}$$

НАПОМЕНА:

Лопиталово правило

Ако се при израчунавања граничне вредности $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ јави неодређен облик $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ тада користимо Лопиталово правило (наравно $f(x)$ и $g(x)$ су диференцијалне у тачки $x = a$ и $(g(x))' \neq 0$).

Тада је $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, ако опет добијемо неодређени облик $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ онда је $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ итд.

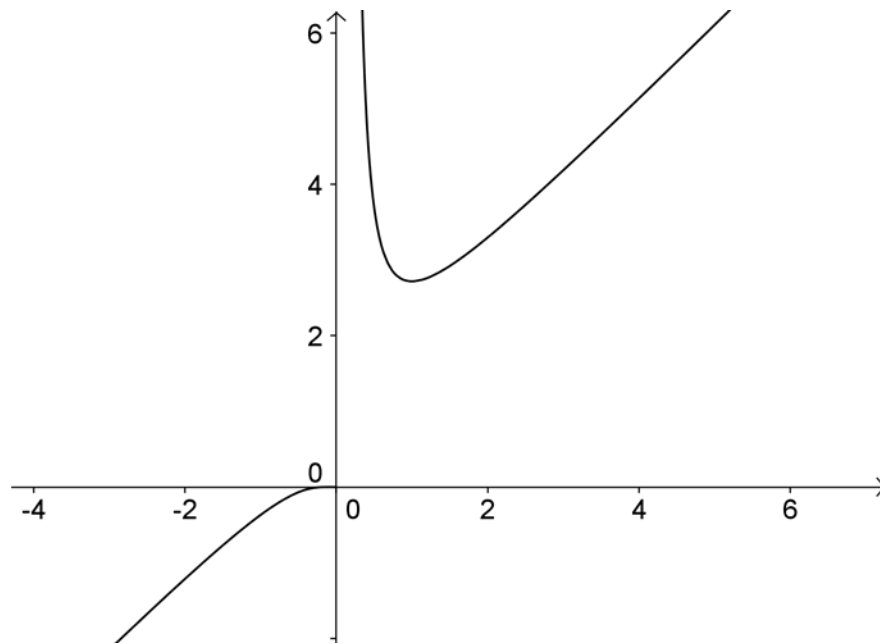
Одређени изрази су:

$$\begin{aligned} \infty \cdot \infty &= \infty \\ \infty + \infty &= \infty \\ k \cdot \infty &= \infty \quad (k \neq 0) \\ \frac{A}{\infty} &= 0 \quad (A \text{ је неки број}) \\ \frac{A}{0} &= \infty \quad (A \text{ је неки број}) \end{aligned}$$

Неодређени изрази су:

$$\begin{aligned} \infty - \infty \\ 0 \cdot \infty \\ \frac{\infty}{\infty} \\ \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Решење.



Слика 13. Функција $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

Вертикална асимптота

Како је функција $y = xe^{\frac{1}{x}}$ дефинисана за $x \neq 0$, $x = 0$ је потенцијална вертикална асимптота.

Како је $\lim_{x \rightarrow 0+\varepsilon} xe^{\frac{1}{x}} = (0 + \varepsilon)e^{\frac{1}{0}} = 0 \cdot \infty$, што је неодређен израз, морамо применити Лопиталово правило, али пре тога морамо функцију написати у облику $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

$\lim_{x \rightarrow 0+\varepsilon} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+\varepsilon} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$, можемо применити Лопиталово правило, траћимо извод именилаца и бројилаца посебно а онда пуштамо да $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+\varepsilon} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+\varepsilon} \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+\varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-\varepsilon} xe^{\frac{1}{x}} = (0 - \varepsilon)e^{\frac{1}{\varepsilon}} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Хоризонтална асимптота:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \infty \cdot e^{\frac{1}{\infty}} = \infty \cdot e^0 = \infty \cdot 1 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{1}{x}} = -\infty \cdot e^{\frac{1}{-\infty}} = -\infty \cdot e^0 = -\infty \cdot 1 = -\infty.$$

Дакле немамо хоризонталну асимптоту па ћемо тражити косу асимптоту.

Коса асимптота је права $y = kx + l$ треба одредити k и l .

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } l = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$$

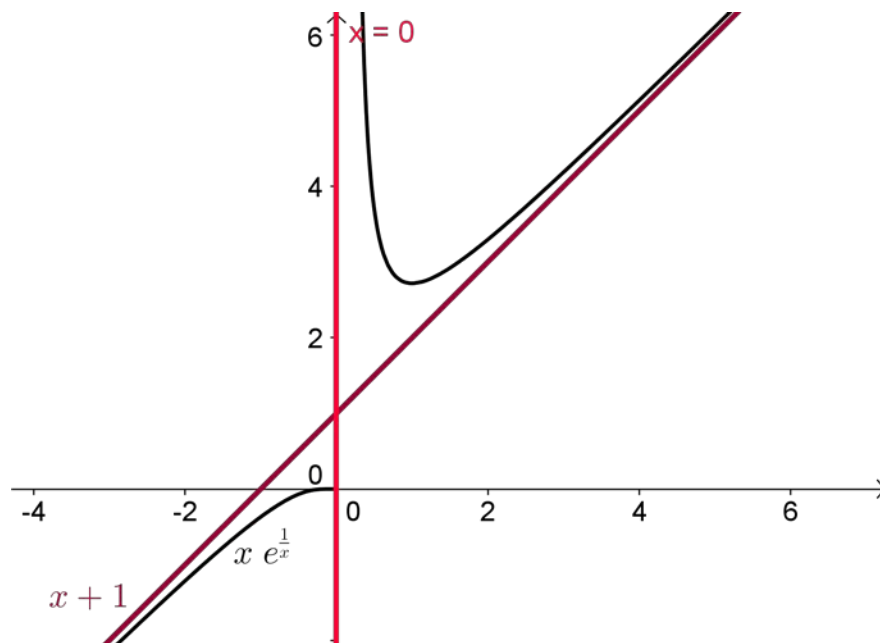
$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x e^{\frac{1}{x}} - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

Како је $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \infty \cdot 0$ неодређен израз, као и код вертикалне асимптоте, применићемо Лопиталово правило.

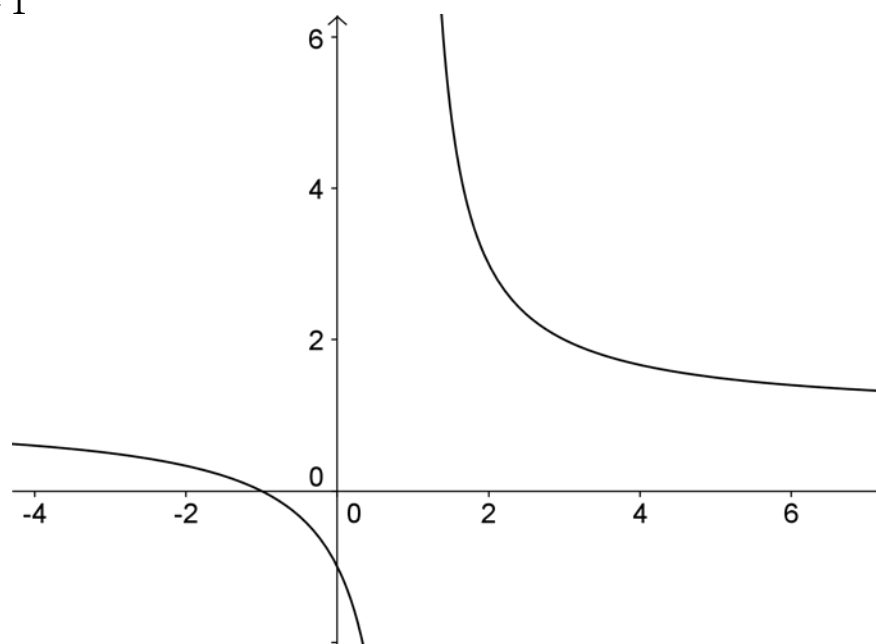
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$$

Добили смо и косу асимптоту функције $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$, права $y = x + 1$.



Слика 14. Асимптоте функције $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$



Слика 15. Функција $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Вертикална асимптота

Домен функције $y = \frac{x+1}{x-1}$ је $R \setminus \{1\}$, према томе, вертикалну асимптоту ћемо тражити у тачки $x = 1$.

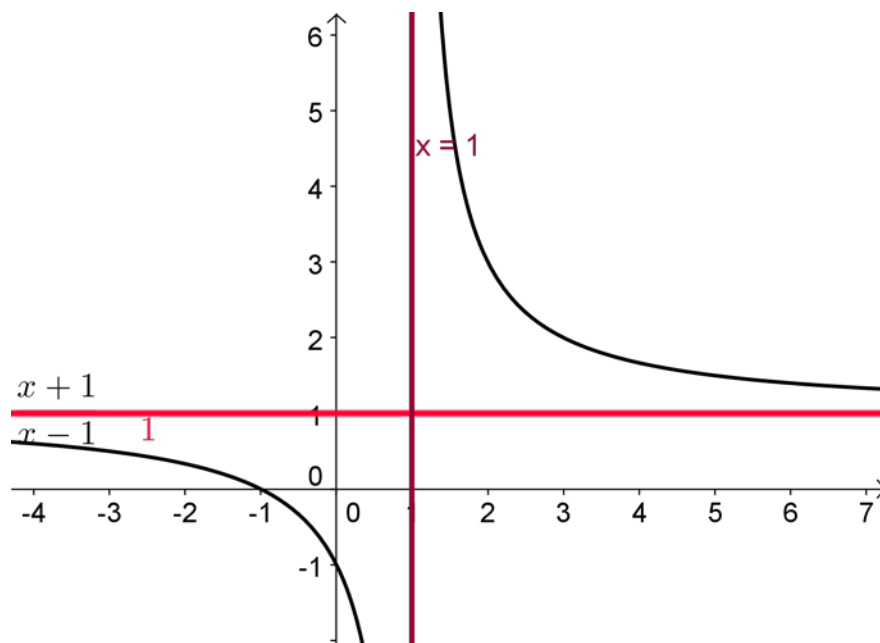
$\lim_{x \rightarrow 1+\varepsilon \text{ кад } \varepsilon \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0+\varepsilon} = +\infty$, значи да се x приближава јединици са позитивне стране кад функција $y = \frac{x+1}{x-1}$ тежи у $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 1-\varepsilon \text{ кад } \varepsilon \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0-\varepsilon} = -\infty$, значи да се x приближава јединици са негативне стране кад функција $y = \frac{x+1}{x-1}$ тежи у $-\infty$.

Хоризонтална асимптота

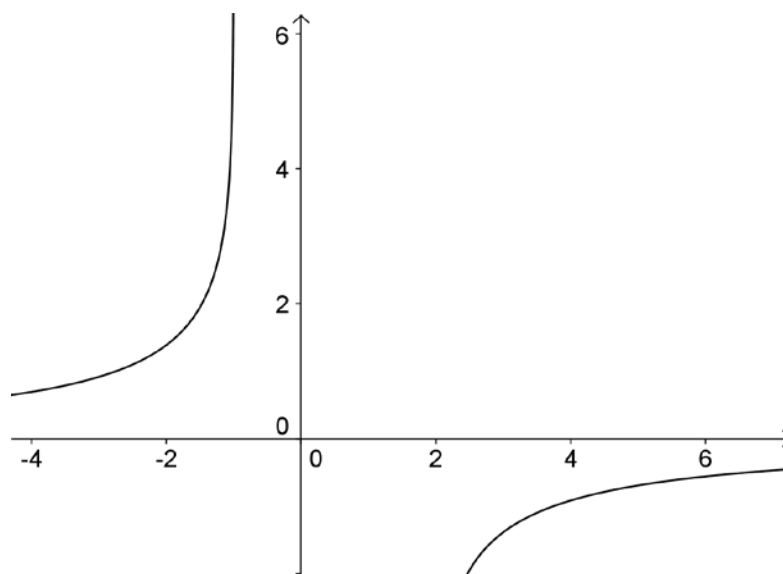
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x-1} = 1$$

Добили смо да је хоризонтална асимптота $y = 1$, дакле косу асимптоту немамо.



Слика 16. Асимптоте функције $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

$$y = \ln \frac{x-2}{x+1}$$



Слика 17. Функција $f(x) = \ln \frac{x-2}{x+1}$

Вертикална асимптота

Пре свега, морамо одредити домен функције $y = \ln \frac{x-2}{x+1}$

$\frac{x-2}{x+1} > 0$, правимо таблицу:

	$-\infty$ -1	-1 2	2 $+\infty$
$x - 2$	-	-	+
$x + 1$	-	+	+
$\frac{x - 2}{x + 1}$	+	-	+

Дакле, функција $y = \ln \frac{x-2}{x+1}$ је дефинисана за $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

Како функција на интервалу $(-1, 2)$ није дефинисана, вертикалну асимптоту ћемо тражити и $x = -1$ са леве стране и $x = 2$ са десне стране. Односно,

$\lim_{x \rightarrow 2+\varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{x-2}{x+1} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 2+\varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0} \frac{x-2}{x+1} \right) = \ln \frac{2+\varepsilon-2}{2+\varepsilon+1} = \ln 0 = -\infty$ (због непрекидности функције $\ln$)

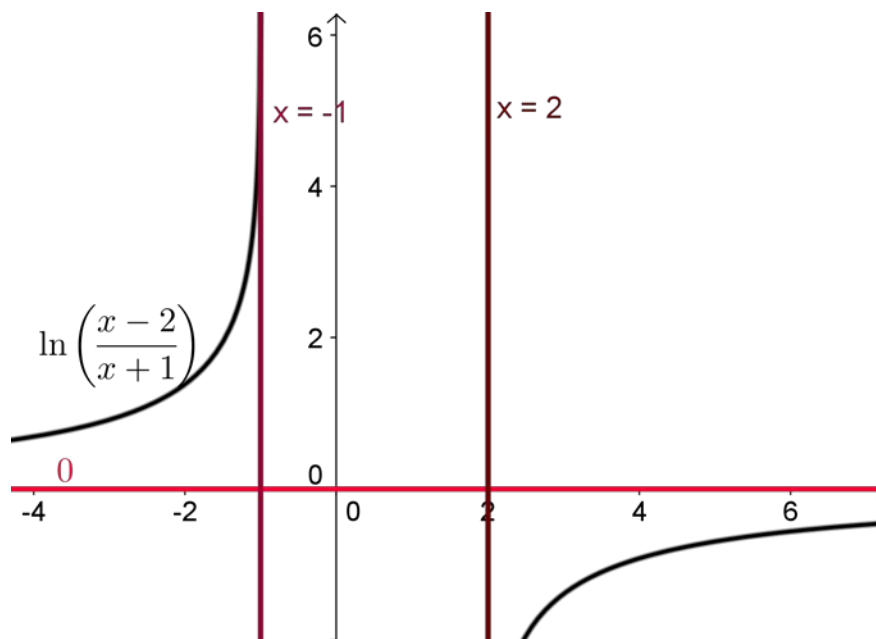
$$\lim_{x \rightarrow -1-\varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{x-2}{x+1} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow -1-\varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0} \frac{x-2}{x+1} \right) = \ln \frac{-1-\varepsilon-2}{-1-\varepsilon+1} = \ln \infty = \infty.$$

Хоризонтална асимптота

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \frac{x-2}{x+1} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x+1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{3}{x+1} \right) \right) = \ln 1 = 0$$

Хоризонтална асимптота функције $\ln \frac{x-2}{x+1}$ је $y = 0$.

Косу асимптоту немамо.



Слика 18. Асимптоте функције $f(x) = \ln \frac{x-2}{x+1}$

Неке важније граничне вредности функције

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a \in \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, a > 1, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0$$

Задатак 1.

Решити следеће граничне вредности:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin 2x \sin x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}, a > 0$$

Решење.

$$\text{Користићемо } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin 2x \sin x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - 2 \sin x \cos x}{\sin 2x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{1 - \cos x}{\sin 2x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{x^2}}{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{x^2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Користимо } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1-1}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1-1}{x+1} \right)^{x+1-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-(x+1)} \right)^{-(x+1) - \frac{x}{-(x+1)}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-(x+1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} -\left(\frac{x}{x+1}\right)} = e^{-\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-1}{x+1}} = e^{-\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-1}{x+1}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

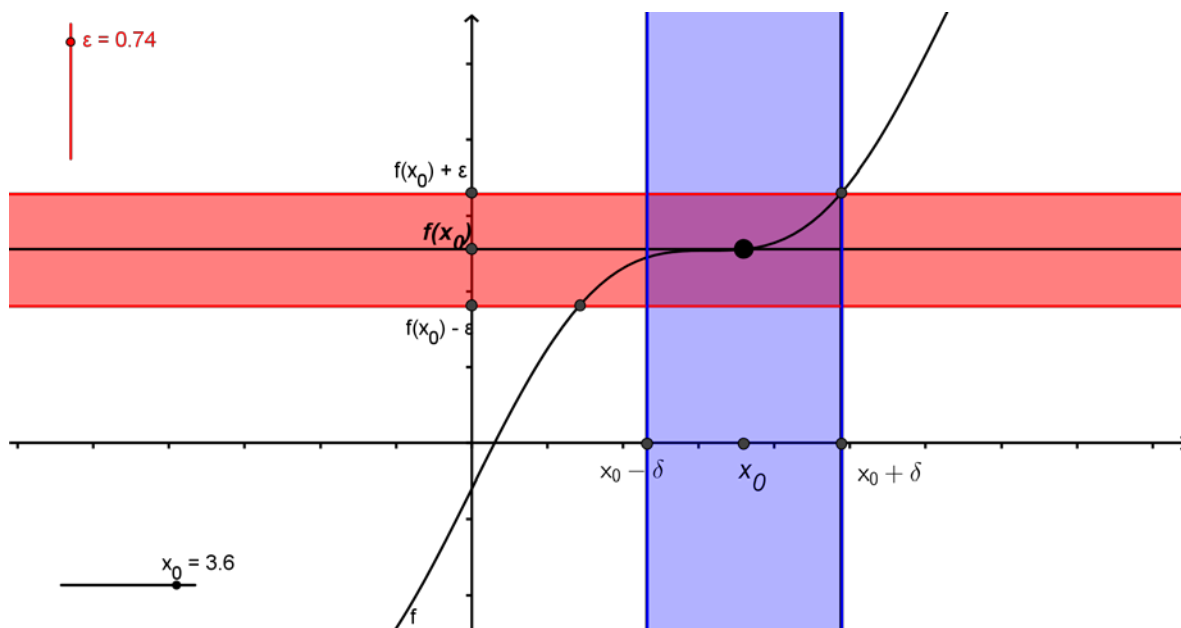
$$\text{Користимо } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \text{ и } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} &= a^a \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{x-a} - 1}{x-a} - \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(1 + \frac{x-a}{a}\right)^{a-1} - 1}{\frac{x-a}{a}} a^{a-1} = a^a \ln a - a \cdot \\ a^{a-1} &= a^a \ln \left(\frac{a}{e} \right). \end{aligned}$$

4. НЕПРЕКИДНОСТ ФУНКЦИЈЕ

Дефиниција непрекидности

Дефиниција 23. Функција $f(x)$ је непрекидна у тачки x_0 ако је $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$



Слика 19. Непрекидност функције у тачки

Другим речима: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

Ова дефиниција подразумева:

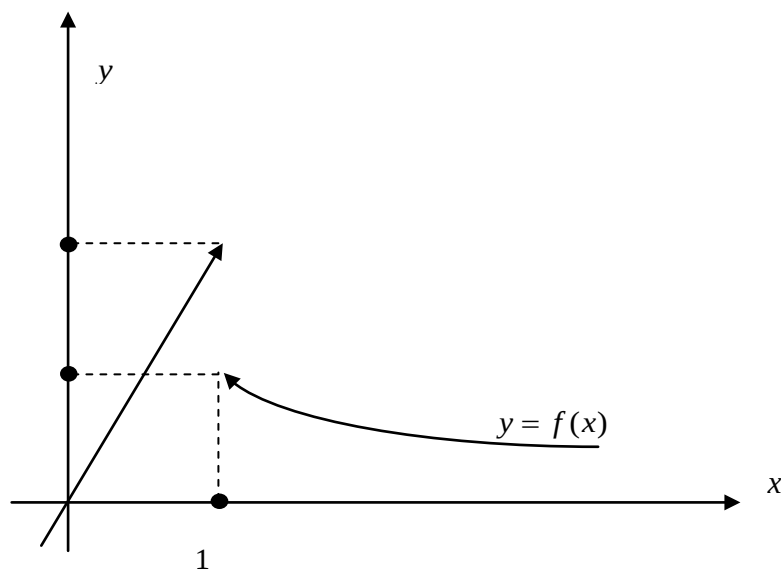
Функција је дефинисана у тачки x_0 , тј. постоји $f(x_0)$

Постоји лева и десна гранична вредност функције у тачки x_0 и једнаке су

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Пример 11.

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$



Слика 20. Лева и десна гранична вредност функције

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$$

Дакле, задата функција није непрекидна у тачки $x_0 = 1$.

Дефиниција 24. Функција $f(x)$ је непрекидна здесна у тачки x_0 ако је $\lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} f(x) = f(x_0)$

Непрекидна слева у тачки x_0 ако је $\lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) = f(x_0)$.

Дефиниција 25. Функција $f(x)$ је непрекидна на интервалу (a, b) ако је непрекидна у свакој тачки тог интервала.

Дефиниција 26. Функција $f(x)$ је непрекидна на интервалу $[a, b]$ ако је непрекидна на интервалу (a, b) и ако је у тачки $x = a$ непрекидна здесна, а у тачки $x = b$ слева.

Нека је функција $f(x)$ дефинисана у некој околини тачке x_0 и нека је x произвољна тачка те околине.

Дефиниција 27. Величина $\Delta x = x - x_0$ називамо прираштај аргумената у тачки x_0 , а величину $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ називамо прираштај функције у тачки x_0 .

Теорема 20. Функција $f(x)$ је непрекидна у тачки x_0 ако и само ако важи:

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0.$$

Пример 12. Функција $f(x) = x^2$ је непрекидна у свакој тачки $x \in R$.

Решење.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \rightarrow 0 \text{ кад } \Delta x \rightarrow 0.$$

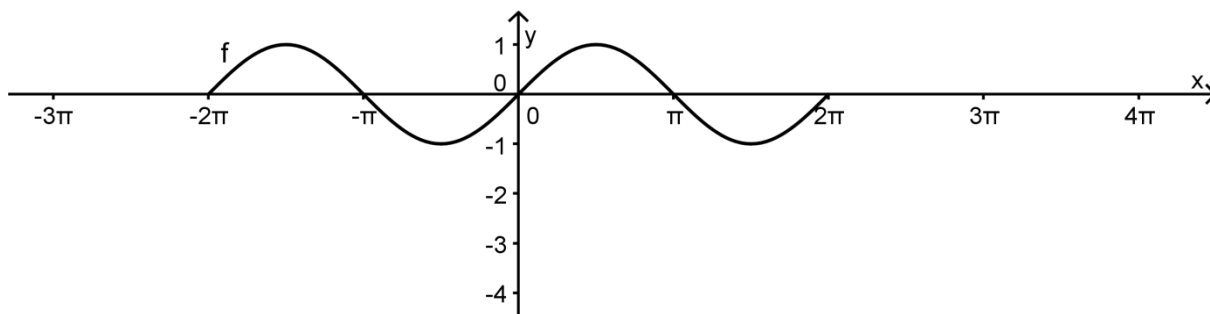
Пример 13. Функција $f(x) = \sin x$ је непрекидна у свакој тачки $x \in R$.

Решење.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$|\Delta y| \leq 2 \cdot 1 \cdot \left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| < 2 \cdot \left|\frac{\Delta x}{2}\right| = |\Delta x| \rightarrow 0 \text{ кад } \Delta x \rightarrow 0.$$

Користили смо неједнакост $|\sin x| < |x|$, $x \neq 0$.



Слика 21. Функција $f(x) = \sin x$

НАПОМЕНА:

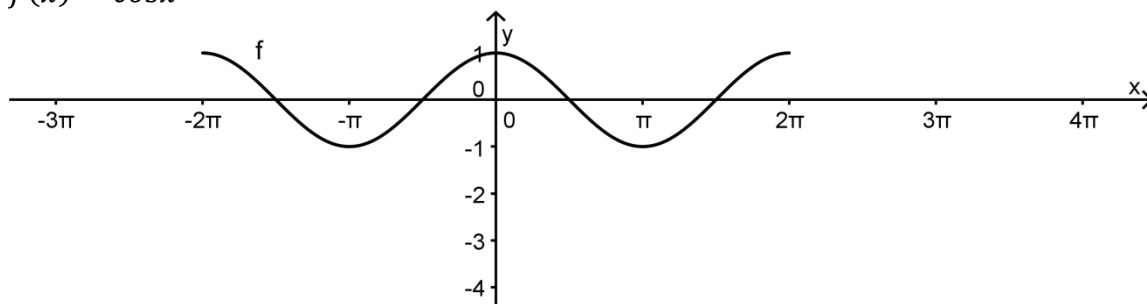
Све елементарне функције су непрекидне:

Полиноми: $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$

Рационалне функције: $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ (количник два полинома)

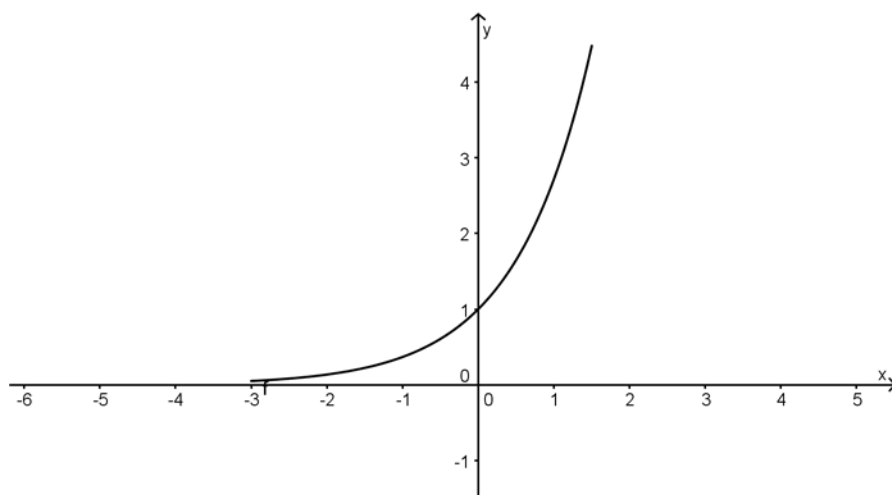
Тригонометријске функције: $f(x) = \sin x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$,
 $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

$$f(x) = \cos x$$



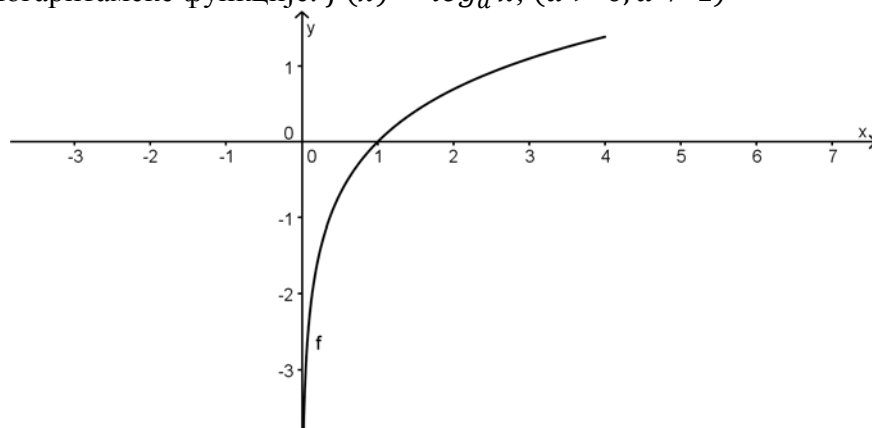
Слика 22. Функција $f(x) = \cos x$

Експоненцијалне функције: $f(x) = a^x$, ($a > 0, a \neq 1$)



Слика 23. Функција $f(x) = e^x$

Логаритамске функције: $f(x) = \log_a x$, ($a > 0, a \neq 1$)



Слика 24. Функција $f(x) = \ln x$

Операције са непрекидним функцијама

Теорема 21. Ако су $f(x)$ и $g(x)$ непрекидне функције у тачки x_0 онда су у тачки x_0 непрекидне и функције:

$$\frac{f(x) \pm g(x)}{f(x)g(x)} \text{ ако је } g(x_0) \neq 0$$

Доказ 9. Како су $f(x)$ и $g(x)$ непрекидне функције у тачки x_0 , важи $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$. Даље је

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0).$$

Одакле следи да је функција $f(x) + g(x)$ непрекидна у тачки x_0 .

Аналогно се доказује и за остале функције. ■

Теорема 22. Ако је функција $g(x)$ непрекидна у тачки x_0 , а функција $f(x)$ непрекидна у тачки $u_0 = g(x_0)$, онда је сложена функција $f(g(x))$ непрекидна у тачки x_0 .

Пример 14. Функција $f(x) = \sin(\ln x)$ је непрекидна за свако $x \in (0, +\infty)$.

Врсте прекида функције

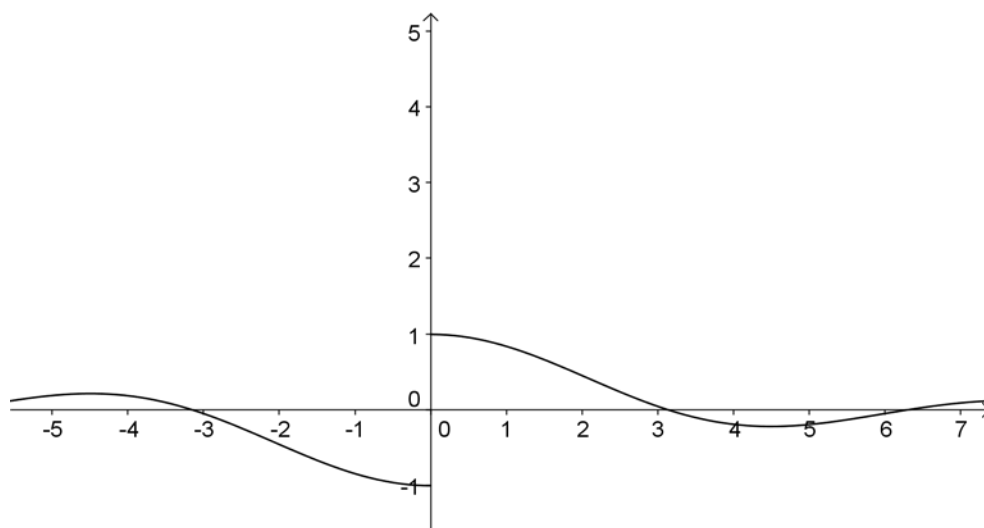
Дефиниција 28. Тачка $x = x_0$ је тачка прекида функције $f(x)$ ако је функција дефинисана у околини тачке x_0 осим у тачки x_0 или је дефинисана у тачки x_0 , али у тој тачки није непрекидна.

Пример 15. За функцију $f(x) = \frac{1}{x}$, $x = 0$ је тачка прекида

Пример 16. $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$; тачка $x = 0$ је тачка прекида.

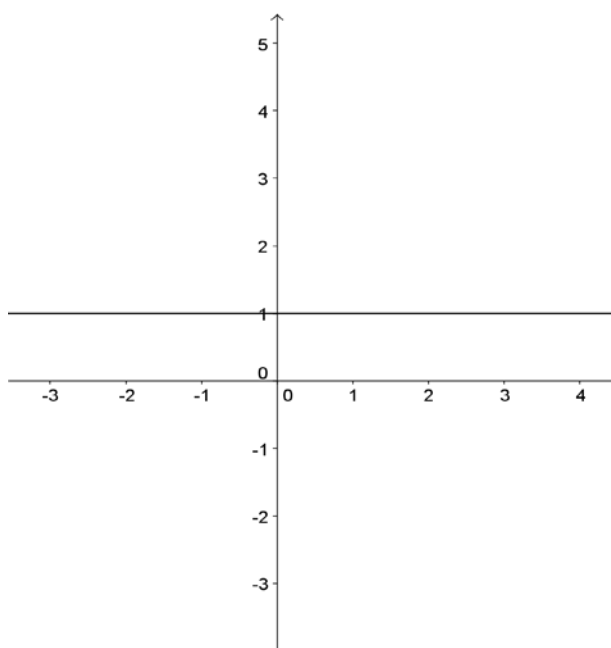
Дефиниција 29. Тачка прекида је тачка прекида прве врсте ако у тој тачки постоје коначне лева и десна гранична вредност.

Пример 17. $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$



Слика 25. Функција $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$

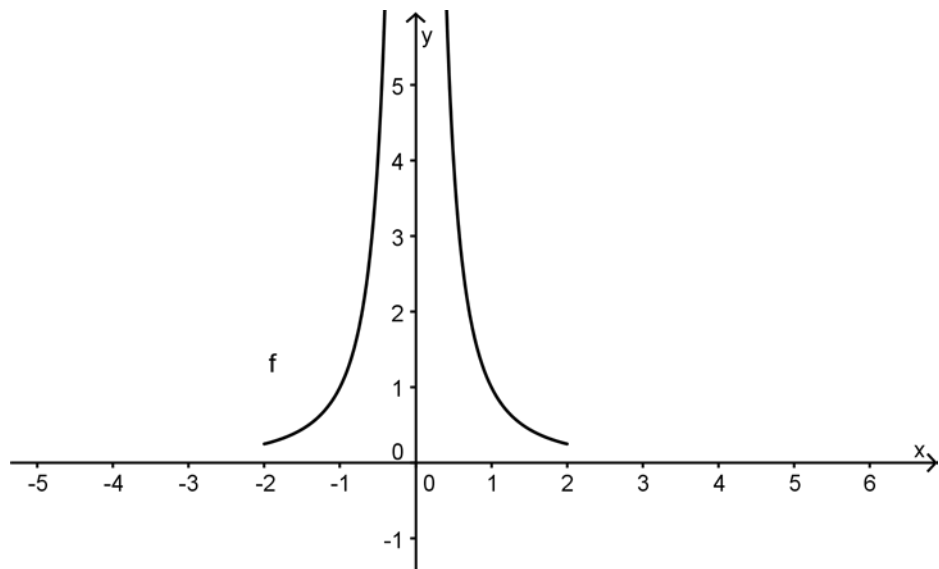
Пример 18. $f(x) = |\operatorname{sgn}(x)|$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq f(0) = 0$



Слика 26. Функција $f(x) = |\operatorname{sgn}(x)|$

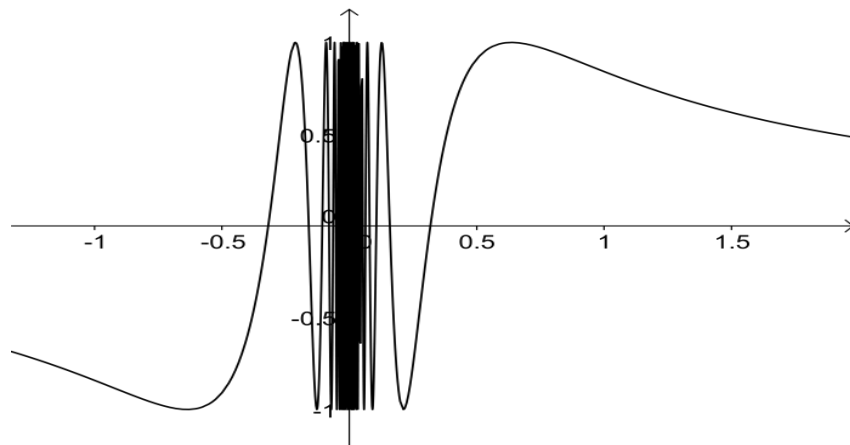
Дефиниција 30. Тачка прекида је тачка прекида друге врсте ако није тачка прекида прве врсте.

Пример 19. $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$



Слика 26. Функција $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Пример 20. $f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x_0 = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ не постоји}$



Слика 27. Функција $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

Својства функција непрекидних на одсечку

Теорема 23. *Ако је функција $f(x)$ непрекидна на одсечку $[a, b]$, онда је она ограничена на том одсечку.*

Теорема 24. (Вајерштрасова) *Ако је функција $f(x)$ непрекидна на одсечку $[a, b]$, онда она на том одсечку достиже своју најмању и највећу вредност.*

$$\text{Односно, } (\exists x_0)(x_0 \in [a, b]) f(x_0) \leq f(x) \forall x \in [a, b]$$

$$(\exists x^0)(x^0 \in [a, b]) f(x^0) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$$

Доказ 10. Нека је $L = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}$ (најмање горње ограничење функције на $[a, b]$).

Доказаћемо да постоји тачка $x_0 \in [a, b]$ таква да је $f(x_0) = L$.

Претпоставимо супротно: $f(x) < L, \forall x \in [a, b]$. Тада је функција

$$\varphi(x) = \frac{1}{L - f(x)}$$

Позитивна и непрекидна на одсечку $[a, b]$ па је према претходној теорему (Теорема 23.) ограничена на одсечку $[a, b]$:

$$\frac{1}{L - f(x)} < M, \forall x \in [a, b] \quad M > 0$$

$$f(x) < L - \frac{1}{M}, \forall x \in [a, b]$$

Што је супротно претпоставци да је L најмање горње ограничење функције $f(x)$ на одсечку $[a, b]$.

Слично се доказује и за најмању вредност. ■

Теорема 25. . (Прва Коши-Болцанова) *Ако је функција $f(x)$ непрекидна на одсечку $[a, b]$ и на крајевима одсечка има вредности различитог знака, онда постоји тачка c , $a < c < b$, таква да је $f(c) = 0$.*

Доказ 11. Нека је $a_0 = a, b_0 = b$ и $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$.

Нека је $f(a) < 0, f(b) > 0$. Ако је $f(x_0) = 0$ тада је $x_0 = c$. Ако је $f(x_0) < 0$ ставимо $a_1 = x_0, b_1 = b_0$, а ако је $f(x_0) > 0$ ставимо $a_1 = a_0, b_1 = x_0$.

Бирамо средину одсечка $[a_1, b_1]$: $x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ и поступак понављамо.



Тако добијамо низ уметнутих одсечака:

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

чија је дужина $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Према Канторовом принципу постоји јединствена тачка $c \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$ таква да је $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

С друге стране је $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0, (n \rightarrow \infty)$.

Због непрекидности функције $f(x)$ важи:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = f(c) \leq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right) = f(c) \geq 0.$$

Одакле следи да је $f(c) = 0$. ■

Теорема 26. . (Друга Коши-Болцанова) Нека је функција $f(x)$ непрекидна на одсечку $[a, b]$ и нека је $f(a) = A$,

$f(b) = B, A < B$. Ако је C било који број који задовољава услов $A < C < B$, онда постоји $c \in (a, b)$ такво да је $f(c) = C$.

Доказ.

Правимо помоћну функцију $g(x) = f(x) - C$.

Тада је $g(x)$ непрекидна на одсечку $[a, b]$ и важи:

$$g(a) = f(a) - C = A - C < 0$$

$$g(b) = f(b) - C = B - C > 0$$

према првој Коши-Болцановој теореме, постоји $c \in (a, b)$ такво да је $g(c) = 0$, тј. $f(c) - C = 0$, односно $f(c) = C$. ■

Униформна непрекидност

Дефиниција 31. Функција $f(x)$ је униформно непрекидна на интервалу (a, b) ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon); x_1, x_2 \in (a, b).$$

Пример 21. Функција $f(x) = x^2$ је униформно непрекидна на сваком одсечку $[a, b]$.

Решење.

$$(|f(x_1) - f(x_2)|) = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \leq (|x_1| + |x_2|)|x_1 - x_2| < 2M|x_1 - x_2|$$

Где је $M = \max\{|a|, |b|\}$, према томе ако за $\varepsilon > 0$ узмемо $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2M}$ имамо када је $|x_1 - x_2| < \delta$ онда важи $|f(x_1) - f(x_2)| < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$.

Међутим, функција $f(x)$ није униформно непрекидна на скупу R .

Нека је $x'_n = \sqrt{n+1}$, $x''_n = \sqrt{n}$.

Тада је $|f(x'_n) - f(x''_n)| = |n+1 - n| = 1$, а при томе $|x'_n - x''_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$.

Теорема 27. *Ако је функција $f(x)$ непрекидна на одсечку $[a, b]$, онда је она и униформно непрекидна на том одсечку.*

5. ПРИПРЕМЕ ЧАСОВА ЗА ОБРАДУ НОВОГ ГРАДИВА

ПРВИ ЧАС: ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ ФУНКЦИЈЕ (обрада)

Уводни део часа

Поновићемо основне појмове код функција

Главни део часа

Посматрамо функцију $f(x) = x^2$. Домен ове функције је $x \in \mathbb{R}$, односно дефинисана је за $x \in (-\infty, +\infty)$ онда је дефинисана и за $x = 3$.

Како не можемо да проверимо вредност дате функције за бесконачно много, а ни за коначно много, вредности броја x , па ћемо видети шта се дешава за шест вредности променљиве x које су блиске броју 3.

Када променљива x узима низ вредности $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ које се приближавају броју 3, онда функције $f(x)$ добија низ вредности $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ које се приближавају ка броју 9

Правимо таблицу за израчунавање вредности функције за 6 вредности аргумента, блиских броју 3:

x	2,9	3,1	2,99	3,01	2,999	3,001
x^2	8,41	9,61	8,9401	9,0601	8,994001	9,006001

Можемо уочити да се вредност функције $f(x) = x^2$ приближава броју 9 са леве или десне стране у зависности од вредности променљиве x .

Каже се да је број 9 гранична вредност (лимес) функције $f(x) = x^2$ када x тежи броју 3 или функција $f(x) = x^2$ конвергира броју 9 кад x тежи броју 3:

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$$

За функцију $f(x) = x^2$ је $f(3) = 9$. Дакле, та функција не само да има граничну вредност у тачки $x = 3$ већ је она једнака вредности функције у тој тачки.

Међутим, посматрајмо сада функцију $f(x) = 3 + \frac{x^2 - 4}{2(x - 2)}$.

За разлику од претходне функције, ова функција није дефинисана у $x = 2$, односно дефинисана је за $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Да видимо онда шта се код оваквих функција дешава у околини оног броја за који та функција није дефинисана, у овом случају правимо таблицу за пет вредности променљиве x које су блиске броју 2 :

x	1,9	2,1	1,99	2,01	1,999
$3 + \frac{x^2 - 4}{2(x - 2)}$	4,95	5,05	4,995	5,005	4,9995

Показаћемо да је $|f(x) - 5| \leq \varepsilon$ за произвољно $\varepsilon > 0$ када је $0 < |x - 2| \leq \delta$ где је $\delta > 0$ и зависи од ε .

$$|f(x) - 5| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \left| 3 + \frac{x^2 - 4}{2(x - 2)} - 5 \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{x^2 - 4 - 4x + 8}{2(x - 2)} \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{(x - 2)^2}{2(x - 2)} \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |x - 2| \leq 2\varepsilon$$

$$\text{Следи: } 0 < |x - 2| \leq 2\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 4}{2(x - 2)} - 2 \right| \leq \varepsilon$$

То значи да из $0 < |x - 2| \leq \delta$ за $\delta = 2\varepsilon$ следи неједнакост $\left| 3 + \frac{x^2 - 4}{2(x - 2)} - 5 \right| \leq \varepsilon$ што је и требало показати.

Функција $f(x) = 3 + \frac{x^2 - 4}{2(x - 2)}$ конвергира броју 5 кад x тежи броју 2:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3 + \frac{x^2 - 4}{2(x - 2)} = 5$$

Вредност ове функције у тачки $x = 2$, за разлику од претходне, није једнака њеној граничној вредности када x тежи 2, јер она није дефинисана у тачки $x = 2$.

На основу ова два примера, можемо конструисати дефиницију граничне вредности функције $f(x)$ кад x тежи некој тачки a , али морамо претпоставити да је функција дефинисана у некој околини тачке a , осим можда у самој тачки a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

b је гранична вредност функције $f(x)$ у тачки a .

Закључујемо да тачка у којој се тражи гранична вредност функције, може а и не мора бити у домену те функције, односно када тражимо граничну вредност неке функције у тачки a , не тражимо њену вредност у тој тачки, односно не тражимо $f(a)$, чак и када постоји $f(a)$, не мора бити да је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Сада ћемо дати пример функције која има две гране, да видимо шта се дешава са граничном вредношћу такве функције:

Пример 22. Нека је

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \neq -1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$$

Тада је $f(-1) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 1) = -3$, уочимо да постоји $f(-1)$ и $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ али да те вредности нису једнаке.

Домаћи: Аналитички показати тачност релације $\lim_{x \rightarrow -1} (2x - 1) = -3$.

ДРУГИ ЧАС: ЛЕВА И ДЕСНА ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ (обрада)

Уводни део часа

Проверити домаћи са прошлог часа и поновити дефиницију граничне вредности

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x - 1) = -3$$

Требало је наћи $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такво да важи

$$|x - (-1)| \leq \delta \Rightarrow |2x - 1 - (-3)| \leq \varepsilon$$

$$|f(x) - (-3)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |2x - 1 - (-3)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |2x + 2| \leq \varepsilon \Leftrightarrow 2|x + 1| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x + 1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Следи: } |x - (-1)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2x - 1 - (-3)| \leq \varepsilon$$

Односно из $|x - (-1)| \leq \delta$ за $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ следи неједнакост $|2x - 1 - (-3)| \leq \varepsilon$ што је и требало показати.

Главни део часа

На овом часу ћемо видети шта се дешава са функцијама из чијег домена не искључујемо само тачку већ интервал, а онда ћемо увести и појам леве и десне граничне вредности.

Посматрајмо функцију $f(x) = \sqrt{x}$, знамо да је она дефинисна за $x \geq 0$, односно за $x \in [0, +\infty)$. Знамо да се о $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ говори ако је функција $f(x)$ дефинисана у некој околини тачке a , односно за неко $x < a$ и неко $x > a$, осим можда у самој тачки a . Како функција $f(x) = \sqrt{x}$ није дефинисана за $x < 0$ испитујемо понашање функције кад $x \rightarrow 0$ и узима вредности десно од нуле.

Правимо таблицу:

x	0,25	0,16	0,09	0,04	0,01	0,0001	0,000001
$\sqrt{x}$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,01	0,001

Показаћемо да је $|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} \leq \varepsilon$ за $\varepsilon > 0$ када је $x > 0$ и $|x - 0| \leq \delta$

Дакле,

$$\sqrt{x} \leq \varepsilon \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \varepsilon^2$$

$$|x - 0| \leq \varepsilon$$

Што значи да $\delta = \varepsilon^2$ обезбеђује тачност импликације:

$$0 < |x - 0| \leq \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - 0| \leq \varepsilon$$

Каже се да је 0 десна гранична вредност функције $f(x) = \sqrt{x}$ у тачки 0. Пише се:

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \sqrt{x} = 0 \text{ или } \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} = 0.$$

Дефиниција 32. Број b_2 је десна гранична функције $f(x)$ у тачки $x = a$ ако:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - b_2| \leq \varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) = b_2 \text{ или } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b_2$$

Дефиниција 33. Број b_1 је лева гранична функције $f(x)$ у тачки $x = a$ ако:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(-\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - b_1| \leq \varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x) = b_1 \text{ или } \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b_1$$

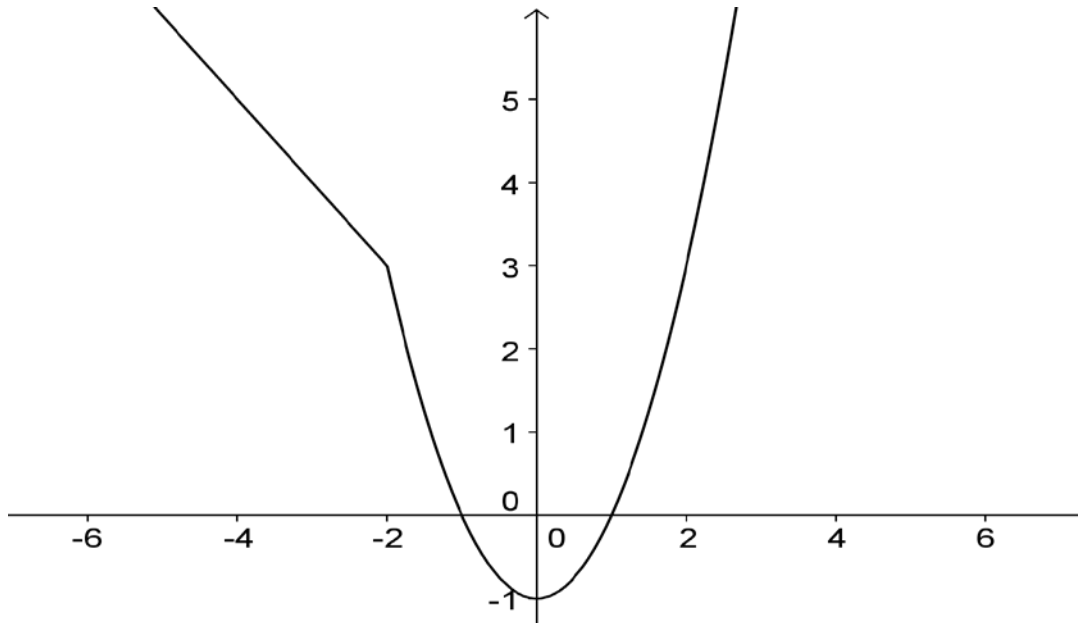
Теорема 28. Ако постоји $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ и ако су они једнаки, онда постоји и $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и при томе је $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$.

Одмах дајемо и пример за ову теорему:

Задатак 2.

Испитати да ли постоји $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ ако је:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < -2 \\ x^2 - 1, & x \geq -2 \end{cases}$$



Слика 28. Функција

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < -2 \\ x^2 - 1, & x \geq -2 \end{cases}$$

Решење.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-0} (1 - x) = \lim_{x \rightarrow -2} (1 - x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+0} (x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 1) = 3$$

Како лева и десна гранична вредност постоји у $x = -2$ и оне су једнаке, на основу претходне теореме важи $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3$.

Домаћи.

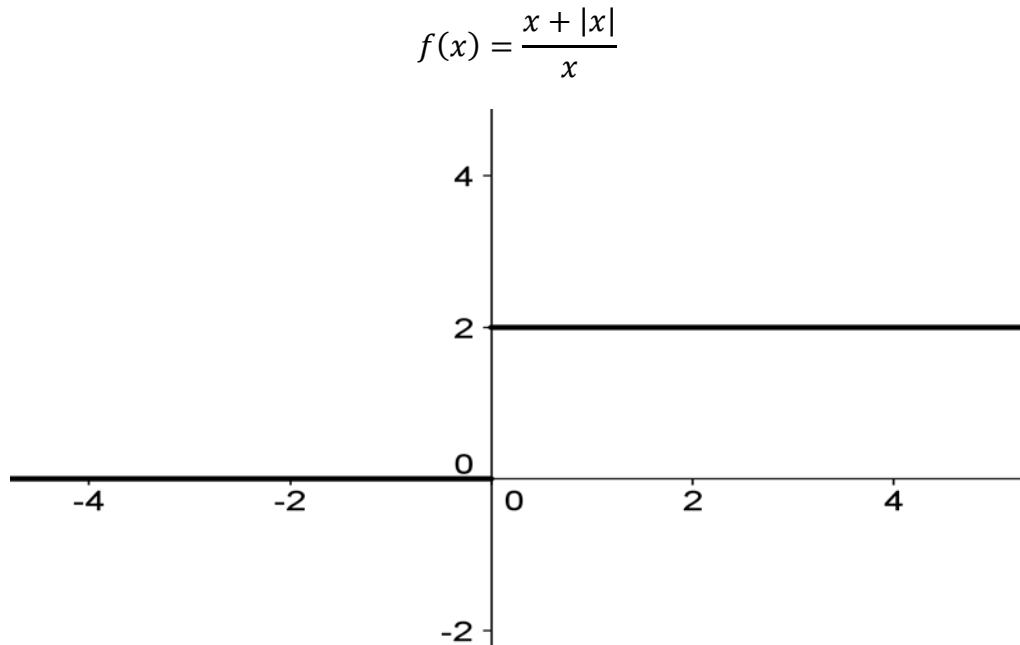
Задатак 3. Испитати да ли постоји $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+|x|}{x}$.

Овим задатком дајемо пример функције која има леву и десну граничну вредност али оне нису једнаке.

ТРЕЋИ ЧАС: ОСНОВНЕ ТЕОРЕМЕ О ГРАНИЧНИМ ВРЕДНОСТИМА ФУНКЦИЈЕ (обрада)

Уводни део часа

Проверити домаћи са прошлог часа.



Слика 29. Функција

$$f(x) = \frac{x + |x|}{x}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + (-x)}{x} = \frac{0}{x} = 0, & x < 0 \\ \frac{x + x}{x} = \frac{2x}{x} = 2, & x > 0 \end{cases}$$

Функција $f(x)$ није дефинисана у тачки $x = 0$, али је дефинисана у свакој околини те тачке. Зато тражимо $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} 0 = 0$$

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} 2 = 2$, како леви и десни лимеси постоје, али они нису једнаки, значи да не постоји $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Главни део часа

Уводимо теореме које ћемо користити приликом одређивања граничне вредности збира, разлике, производа и количника функције.

Теорема 29. *Ако постоје $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, онда постоји и $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)]$ и при томе важи:*

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Теорема 30. *Ако постоје $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, онда постоји и $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$ и при томе важи:*

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Ако постоји $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, онда за свако $k \in \mathbb{R}$ постоји и $\lim_{x \rightarrow a} [kf(x)]$ и важи:

$$\lim_{x \rightarrow a} [kf(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Теорема 31. *Ако постоје $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, и при томе је $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ онда постоји и $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$ и важи:*

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Теорема 32. (теорема о укљештеној функцији):

Нека у некој околини тачке a , осим можда у самој тачки a , важи:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

тада из $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ следи $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Сада ћемо урадити неколико примера за чије решење су нам потребле претходно дате теореме.

Задатак 4.

$$\text{Наћи } \lim_{x \rightarrow -1} (9x^2 + 6x + 8)$$

Решење.

Приметимо да у овом задатку имамо функцију која је састављена из збира и производа других функција па је за решавање потребно употребити теореме 29 и 30:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (9x^2 + 6x + 8) = \lim_{x \rightarrow -1} (9x^2) + \lim_{x \rightarrow -1} (6x) + \lim_{x \rightarrow -1} 8 = 9 \lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 6 \lim_{x \rightarrow -1} x + 8$$

$$= 9 \left(\lim_{x \rightarrow -1} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow -1} x \right) + 6(-1) + 8 = 9(-1)(-1) - 6 + 8 = 9 + 2 = 11$$

Задатак 5.

$$\text{Наћи } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8-x^3}{x^2-4}$$

Решење.

Како ова функција није дефинисана за $x=2$ прво ћемо написати бројилац и именилац у облику чиниоца, користимо разлику кубова и разлику квадрата, а после скраћивања употребићемо теореме 29,30,31.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8-x^3}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(4+2x+x^2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(4+2x+x^2)}{(x+2)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} -(4+2x+x^2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)} = \frac{-(4+4+4)}{(2+2)} = -3 \end{aligned}$$

Овај задатак је важан јер није довољно само применити горе поменуте теореме.

Пре свега ученици морају одредити домен функције, а затим препознати разлику кубова и квадрата.

Неко од ученика ће испред табле решавати следеће задатке. Приликом решавања користимо претходно дате теореме.

Задатак 6.

$$\text{Наћи } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{2+x}-1}$$

Ако бисмо одмах применили теореме добили бисмо неодређен израз " $\frac{0}{0}$ ".

Према томе и у овом задатку треба искористити претходно знање, потребно је рационалисати бројилац и именилац, односно помножити бројилац са $\frac{\sqrt{5+x}+2}{\sqrt{5+x}+2}$, а именилац са $\frac{\sqrt{2+x}+1}{\sqrt{2+x}+1}$. Након извршеног поступка рационалисања и применом теореме о граничној вредности количника и збира функције, за решење добијамо $\frac{1}{2}$

$$\text{Наћи } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right)$$

Директним убацивањем вредност $x = 2$ добијамо "дељење нулом", значи да је потребно извршити неку трансформацију. Сабраћемо та два разломка и добијамо $\frac{1}{x+2}$, применом теореме о количнику функције добијамо решење $\frac{1}{4}$

Задатак 7.

$$\text{Наћи } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{x^3 + 4x^2 + 2x}$$

Идеја приликом решавања оваквих задатака, где имамо полином и у бројиоцу и у имениоцу је да "извучемо" x у бројиоцу и x у имениоцу, скратимо и добијамо $\frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 + 4x + 2}$, потом примењујемо претходно дате теореме и добијемо за решење $\frac{3}{2}$.

Домаћи.

За домаћи рад дајем задатак за који је приликом решавања потребно користити све теореме, односно теореме за одређивања граничне вредности збира, разлике, производа и количника функције. Задатак је аналоган задатку 7. Који смо урадили на часу.

Задатак 8.

$$\text{Наћи } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x + 3x^2 - 5x^3}{x - 2x^2 - x^3}.$$

ЧЕТВРТИ ЧАС: ЧЕТИРИ ВАЖНА ЛИМЕСА. БЕСКОНАЧНА ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ(обрада)

Четири важна лимеса

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\text{Задатак 9. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 \right) = 1 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Ова гранична вредност је битна за економисте, јер при датој номиналној стопи се са повећањем броја капитаисања повећава и ефективна каматна стопа. Но, повећање

ефективне каматне стопе није неограничено, односно ефективна каматна стопа има граничну вредност ако број капиталисања тежи бесконачности. Тада говоримо о **континуираном капиталисању**, јер претпостављамо да се капиталисање врши у временским интервалима који тежи ка нули, односно континуирано.

Ако је p дата годишња каматна стопа и m број капиталисања, онда је ефективна стопа

$$p_e = \left(1 + \frac{p}{m}\right)^m - 1$$

А укамаћена вредност након n година

$$V = G(1 + p_e)^n$$

Па је код континуираног капиталисања

$$V = G \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{m}\right)^{mn} = G \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{m}\right)^{\frac{m}{p}pn} = Ge^{np}$$

Јер је

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{m}\right)^{\frac{m}{p}} = e$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Уводимо смену $a^x - 1 = t$ кад $x \rightarrow 0$ онда и $t \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a(1+t)^{1/t}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

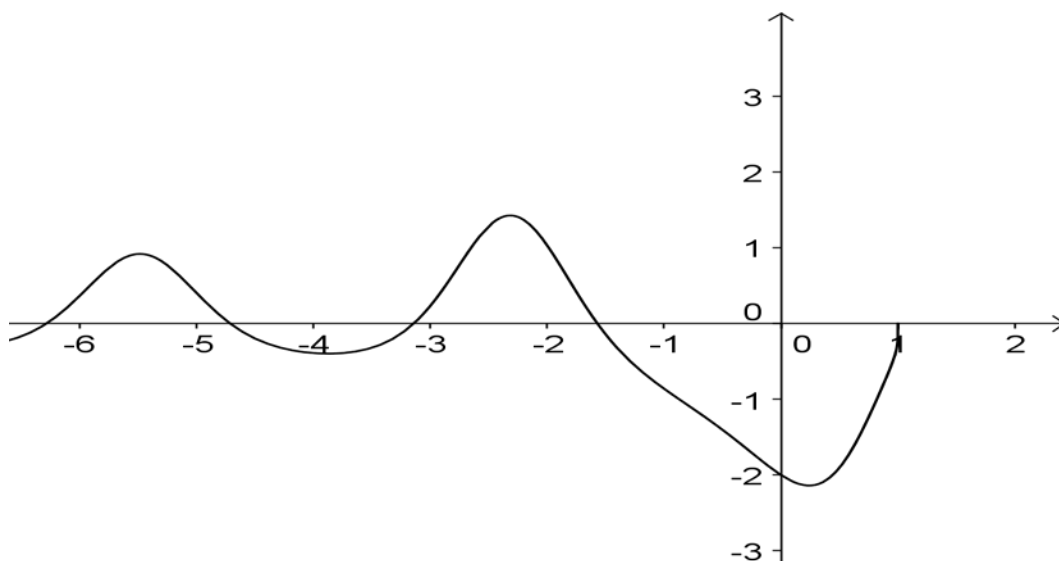
$$\text{За } a = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Решавамо задатке у којима треба препознати неки од предходно дата лимеса.

Задатак 10. **Наћи следеће граничне вредности:**

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\ln(1-x)} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \end{aligned}$$

Решење.



Слика 29. Функција
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{-x}{\ln(1-x)} \cdot \frac{2x}{-x} \right) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2) = -2$$

Домаћи: 1. и 3. задатак.

За први задатак користимо $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, а затим користимо теореме о граничној вредности збира и количника функције. Пишемо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1 - (e^{-x} - 1)}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1 + 1}{1} = 2$$

За трећи задатак користимо формулу полуугла $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, односно

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\sin \frac{x}{2} \right)^2}{4 \left(\frac{x}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sin \frac{x}{2} \right)^2}{\left(\frac{x}{2} \right)^2}$$

Како $\frac{x}{2} \rightarrow 0$ када $x \rightarrow 0$ онда је и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sin \frac{x}{2} \right)^2}{\left(\frac{x}{2} \right)^2} = 1$ односно решење је $\frac{1}{2}$.

Бесконачна гранична вредност

У случају када не постоји коначна гранична вредност $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, можемо говорити о бесконачном лимесу.

Релација $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty (-\infty)$ значи да су функције $f(x)$ веће (мање) од било ког позитивног (негативног) броја M када је x довољно блиско тачки x_0 .

Пример 23. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \log_2 x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$$

Исто тако када $x \rightarrow +\infty (-\infty)$ функција може имати коначну или бесконачну граничну вредност.

Пример 24. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{-x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 - x + 1):x^2}{(-x^2 + 2x - 1):x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{-1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = -2$

Ако имамо рационалну функцију, у којој су и бројилац и именилац полиноми, тада делимо бројилац и именилац највећим степеном од x који се јавља у функцији.

Такође, користимо чињеницу да је $\frac{k}{\pm\infty} = 0, k \in R$.

НАПОМЕНА:

$$\text{Нека је } P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$Q_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \begin{cases} \infty, & m > n \\ \frac{a_m}{a_n}, & m = n \\ 0, & m < n \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}): \sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 2): \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}{1 + \frac{2}{\sqrt{x}}} = 2$$

Домаћи.

Задатак 11.

Наћи $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 4}{-x^2 + 2x}$

Задатак 12.

Наћи $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 4x^2 - 2}{4x^2 - 3x}$

Приликом решавања домаћег задатка треба искористити претходно дату напомену.

ПЕТИ И ШЕСТИ ЧАС: ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ (понављање и утврђивање)

Овај час је предвиђен за вежбање претходног градива и тако се припреме за контролни и писмени задатак. Задатке радимо пред таблом, тако да долази у обзир и оцењивање уколико неко покаже добро разумевање градива.

Задаци:

Решити следеће граничне вредности:

Задатак 13. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

Задатак 14. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$

Задатак 15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

Задатак 16. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^3 + 1}$

Задатак 17. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{3x^2 - 4x - 4}$

Задатак 18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 5}{5x^3 + 1}$

Задатак 19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x - 5}}{\sqrt{x^2 - x - 10}}$

Задатак 20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$

Задатак 21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$

Задатак 22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3 \cdot 2^{x-1}}{2^x}$

Задатак 23. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x}$

Задатак 24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$

Задатак 25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\cos x - 1}$

Задатак 26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$

Задатак 27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

Задатак 28. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x \right)$

СЕДМИ ЧАС: НЕПРЕКИДНОСТ ФУНКЦИЈЕ. АСИМПТОТЕ ФУНКЦИЈА. (обрада)

Непрекидност функције

Дефиниција 34. Функција $f(x)$ је непрекидна у тачки x_0 ако у тој тачки важи

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

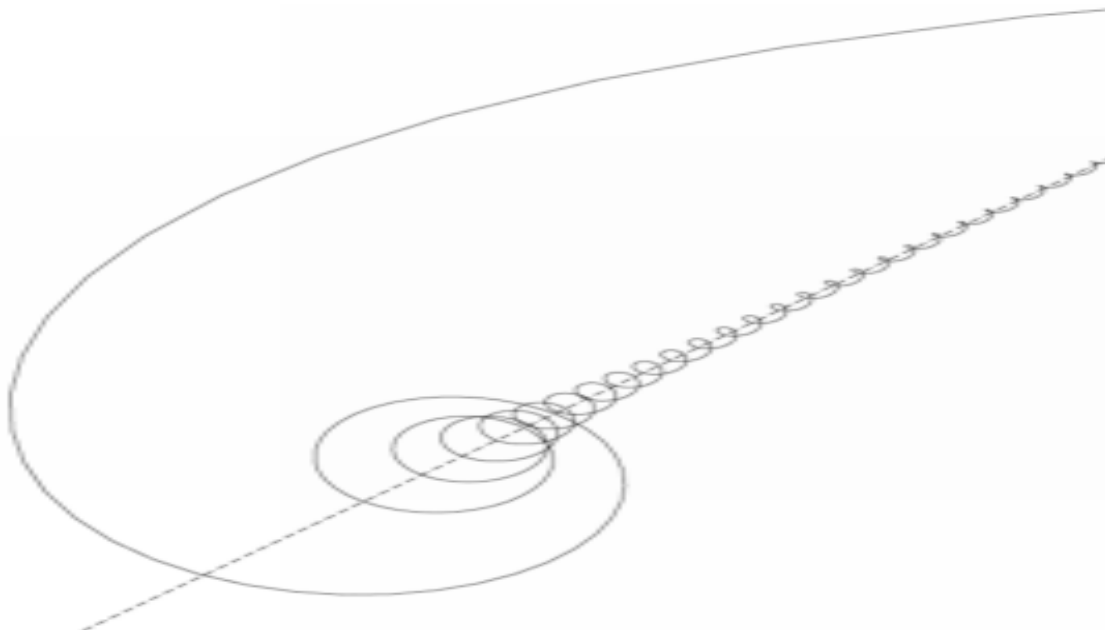
Дефиниција 35. Функција $f(x)$ је непрекидна на неком скупу A ако је непрекидна у свакој тачки скупа A .

Теорема 33. Ако је функција $f(x)$ непрекидна на $[a, b]$ и важи $f(a) > 0$, $(f(a) < 0)$ и $f(b) < 0$, $(f(b) > 0)$ онда постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је $f(c) = 0$.

Асимптоте функције

Асимптота је права којој се функција приближава, може а и не мора да је додирује.

Функција може да пресече асимптоту бесконачан број пута, али се њено максимално одступање од асимптоте смањује.



Слика 30. Пример када крива може да пресече своју асимптоту, чак и бесконачан број пута.

Оне могу бити:

Вертикалне, права облика $x = a$

Хоризонталне, права облика $y = b$

Косе, права облика $y = kx + n$, $k \neq 0$.

Дефиниција 36. (Вертикална асимптота)

Нека је D домен функције $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Права $x = x_0$ је вертикална асимптота графика функције $f(x)$ ако је бар једна од граничних вредности $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ једнака $+\infty$ или $-\infty$.

Дефиниција 37. (Хоризонтална асимптота)

Нека је D домен функције $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Права $y = kx + n$, $k \neq 0$ је коса асимптота када $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) графика функције $f(x)$ ако важи

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + n)) = 0 \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (kx + n)) = 0)$$

Бројеви k и n се добијају из следећих формула:

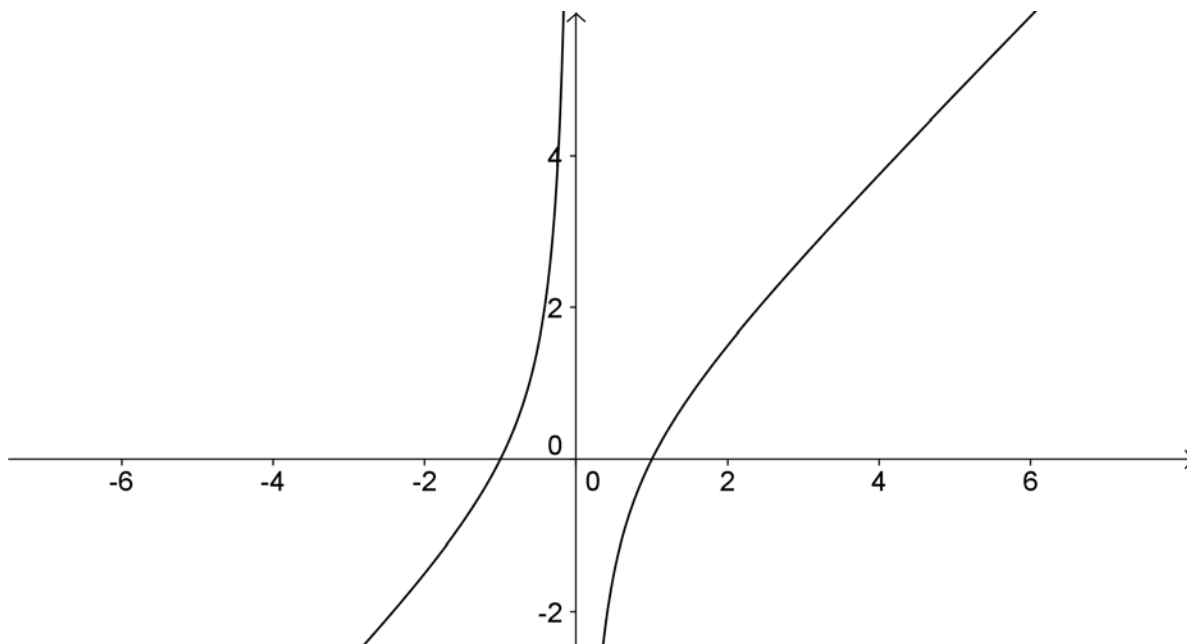
$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \left(k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \right)$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) \quad (n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx))$$

Задатак 29.

Наћи асимптоте $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

Решење.



Слика 31. Функција

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$$

Вертикална асимптота:

Прво одређујемо домен функције $f(x)$: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Како 0 не припада домену, тражимо вертикалну асимптоту у нули:

$\lim_{x \rightarrow 0+\varepsilon \text{ кад } \varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{x} = \frac{-1}{0+\varepsilon} = -\infty$, значи да се x приближава нули са позитивне стране кад функција $y = \frac{x^2-1}{x}$ тежи у $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 0-\varepsilon \text{ кад } \varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{x} = \frac{-1}{0-\varepsilon} = +\infty$, значи да се x приближава нули са негативне стране кад функција $y = \frac{x^2-1}{x}$ тежи у $+\infty$.

Вертикална асимптота је $x = 0$.

Хоризонтална асимптота

Функција $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ је количник полинома, пошто тражимо бесконачну граничну вредност делимо бројилац и именилац са највећим степеном од x у овом случају то је x^2 . Па је:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{0} = \infty$$

Функција $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ нема хоризонталну асимптоту, тражимо косу асимптоту.

Коса асимптота

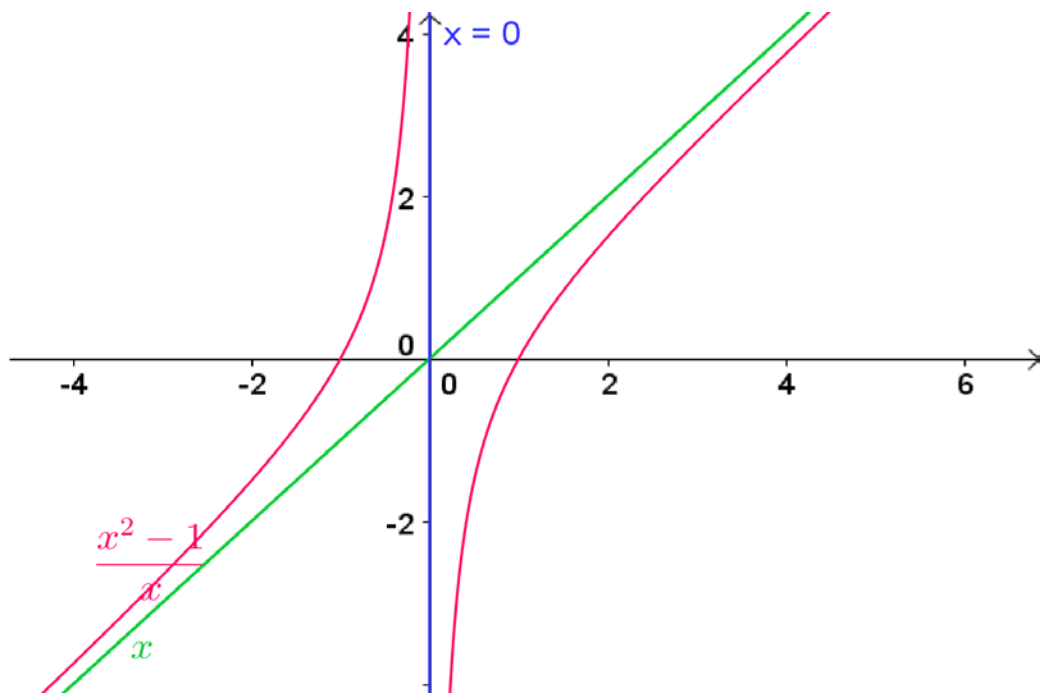
Коса асимптота је права $y = kx + l$ треба одредити k и l .

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } l = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2-1}{x} - x\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2-1-x^2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-1}{x}\right) = 0$$

Дакле, коса асимптота је $y = x$.



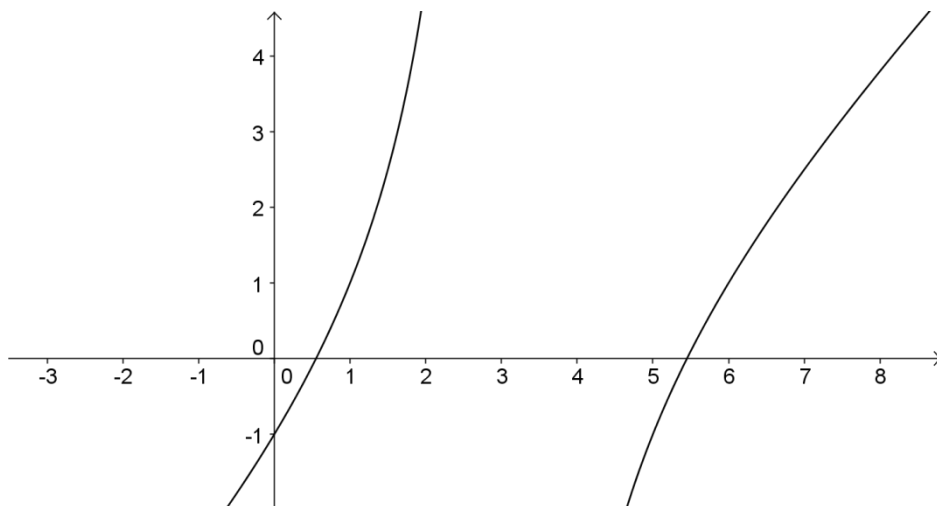
Слика 32. Асимптоте функције

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$$

Домаћи.

Задатак 30. Наћи асимптоте $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$

Задатак за домаћи се ради аналогно задатку који смо радили на часу, сматрам да ће, уколико су ученици схватили задатак са часа, моћи самостално да га ураде.



Слика 33. График функције $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$

6. ТЕСТОВИ

Један од инструмената за праћење степена и квалитета учениковог знања је свакако и тест знања, наставни тест.

Реч „тест“ потиче од латинског глагола тестор (посведочити, доказати). Та реч је код нас дошла преко енглеског језика.

Тестови знања могу да се деле према разним критеријумима:

а) по ширини употребе и степену проверености;

стандардизовани (баждарени) и нестандардизовани (неформални) тест.

б) према времену одређеном за одговоре

тест брзине и тест нивоа.

в) према намени у наставном процесу.

ревизиони тест и дијагностички тест.

Врсте задатака у тесту

1. Задатке везане форме (задаци редоследа, задаци двочланог избора, задаци вишеструког избора, задаци упоређивања и сређивања);
2. Задатке слободне форме.

Први тест

Овај тест је дијагностички са задацима везане форме.

Садржај дијагностичког теста, за разлику од ревизионог, ужи је, ограничен на мање подручје. Обично је посвећен једној настанвој целини (нпр. сабирању и одузимању разлика и сл). Намена овог теста је да даје јасну, подробну слику о томе да ли је, и у којој мери ученик усвојио сваки поједини аспект неког образовног добра. Помоћу њега наставник добија праву представу (дијагнозу) о потешкоћама сваког ученика при савладавању одређеног наставног градива. Анализом добијених података наставник долази до сазнања о празнинама у знању сваког ученика и одмах доноси закључке о мерама које треба предузети да се оне елиминишу.

1. Заокружити тачно решење $\lim_{x \rightarrow -1} (5x + 3) =$

- а) -2 б) -4 в) 10 г) $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 3x + 2) =$$

- а) -1 б) 0 в) $-\frac{1}{4}$ г) $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (12x^2 + x^3 - x^4) =$$

- а) 2 б) 3 в) ∞ г) -1

2. Повезати задатак са формулом коју користимо приликом решавања:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{5}{x}}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+10x)}{x}$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

3. Написати решење без поступног решавања:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 4x + 1} =$ _____

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x}{x^2 + x + 1} =$ _____

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x + 4}{x^4 + 1} =$ _____

Други тест (писмени задатак)

Нестандардизовани тест са задацима слободне форме.

Нестандардизовани тест се обично проверава на малом броју ученика, махом на ученицима из средине за коју се припрема. Њега конструише сам наставник или група наставника. Служи за интерну употребу у школи.

1. Одредити следеће граничне вредности:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{4x} \\ \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+6x-7}{x^2-5x+4} \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2} \end{aligned}$$

2. Одредити следеће граничне вредности:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 10x}) \\ \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{8\sqrt{x}-x^2}{8-4\sqrt{x}} \end{aligned}$$

3. Одредити следеће граничне вредности:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \\ \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2} \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} \end{aligned}$$

4. Одредити асимптоте:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \frac{x^2-5x+7}{x-2} \\ \text{б) } f(x) &= \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \\ \text{в) } f(x) &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

7. ЛИТЕРАТУРА

- [1] Herceg, D., Herceg, Đ., Elementi matematičke analize i Mathematica, Symbol, Novi Sad, 2008.
- [2] http://www.matematiranje.com/IV%20godina/granicne_vrednosti_funkcija_teorija.pdf
- [3] http://www.rgf.bg.ac.rs/predmet/RO/II%20semestar/Matematika%20II/Predavanja/M2_RO_Lim.pdf
- [4] <https://skydrive.live.com/?cid=99A1ECFC96C6D1B2&id=99A1ECFC96C6D1B2!837>
- [5] Богетић, Б., Збирка задатака из математике за ученике средњих школа, Грифон Београд, 2002.
- [6] Богославов, В. Т., Збирка решених задатака из математике за 4. разред средње школе, завод за удзбенике и наставна средства, Београд, 2002.
- [7] Бујас, З., основе психофизиологије рада, Загреб, 1959.
- [8] Вучичевић, Р., Ђорђевић, М., Лазић, М., Математика са збирком задатака за 4. разред средње школе, завод за удзбенике, Београд, 2003.
- [9] Гајић Љ., Предавања из анализе I, ПМФ, Нови Сад, 2004
- [10] Гајић Љ., Херцег Д., Крејић Н., Елементи пословне математике, ПМФ, Нови Сад, 1999.
- [11] Милошевић, Д. М., Тестови и њихова примена у настави математике у старијим разредима основне школе, Математика 13, 4 (1984), 15-38
- [12] Обрадовић, М., Георгијевић, Д., Математика за 4. Разред средње школе, Завод за удзбенике и наставна средства, Београд, 2003.
- [13] Пешић, Д., Непрекидност функције у настави математике, Нови Сад, ауторски репринт, 2006.
- [14] Поткоњак, Н. М., Вредновање рада основних школа, Београд, 1972.
- [15] Сиђи Ј., "Настава функције у средњој школи", Мастер рад, ПМФ Нови Сад, 2011.
- [16] Такачи, Ђ., Такачи, А., Збирка задатака из анализе II (први део), ПМФ, Нови Сад, 2004.
- [17] Татар, Ј., Гранична вредност функције - обрада у гимназијској настави, Нови Сад, ауторски репринт, 2004.
- [18] Татар, Ј., Низови—обрада у настави математике, Нови Сад, ауторски репринт, 2007.

8. КРАТКА БИОГРАФИЈА

Рођена сам 14. децембра 1987. године у Сомбору. Основну школу "Бора Станковић" сам завршила у Каравукову као носилац Вукове дипломе а потом сам уписала гимназију "Јован Јовановић Змај" у Новом саду, природно-математички смер и матурирала одличним успехом 2006. године. 2004. године сам уписала, паралелно са гимназијом, и средњу музичку школу "Исидор Бајић" у Новом Саду, теоријски одсек и завршила 2008. године.

Природно-математички факултет, одсек математика, смер професор математике, уписала сам 2006. године и завршила Јуна 2010. године са просечном оценом 9,22. Исте године сам уписала мастер студије на природно-математичком факултету Универзитета у Новом Саду, одсек за математику, смер настава математике. Положила сам све испите предвиђене наставним планом и програмом мастер студија и тако стекла право за одбрану мастер рада.

Од 17. јануара 2011. године радим у средњој школи "22. Октобар" у Жабљу.

Нови Сад, 2012.

Зорана Томић



1. ПЛАНОВИ РАДА ПО ТИПОВИМА ШКОЛА

1.1. ГОДИШЊИ ОРИЈЕНТАЦИОНИ ПЛАН ЗА ОБРАЗОВНИ ПРОФИЛ МАШИНСКИ ТЕХНИЧАР ЗА КОМПЈУТЕРСКО КОНСТРУИСАЊЕ ЗА ШКОЛСКУ 2010/11. ГОДИНУ

ПОДРУЧЈЕ РАДА:		МАШИНСТВО И ОБРАДА МЕТАЛА				
ОБРАЗОВНИ ПРОФИЛ:		МАШИНСКИ ТЕХНИЧАР ЗА КОМПЈУТЕРСКО КОНСТРУИСАЊЕ				
РАЗРЕД:		ЧЕТВРТИ				
ОДЕЉЕЊЕ:		ТРИ				
ПРЕДМЕТ:		МАТЕМАТИКА				
ГОДИШЊИ ФОНД ЧАСОВА:		ТЕОРИЈСКА НАСТАВА	ВЕЖБЕ	ПРАКТИЧНА НАСТАВА	БЛОК	ПРОФЕСИОНАЛНА ПРАКСА
		160				160
РБ	ТЕМА	ЦИЉЕВИ				БРОЈ ЧАСОВА
1.	Функције	Обнављање и проширивање знања о функцијама				35
2.	Извод функције	Стицање основних знања о изводима функција и примени извода				34
3.	Интеграл	Стицање основних знања о интегралима и примена одређеног интеграла				28
4.	Диференцијалне једначине	Стицање основних знања о диференцијалним једначинама				13
5.	Комбинаторика	Обнављање и проширивање знања из комбинаторике				17
6.	Вероватноћа и статистика	Стицање основних знања из вероватноће и статистике				21
7.	Четири писмена задатка и исправке	Писмена провера знања				12
		укупно				160

ОПЕРАТИВНИ ПЛАН РАДА

ПЛАН ЗА ПОСТИЗАЊЕ ИСХОДА У ТЕМИ			
НАЗИВ ТЕМЕ: Функције			ТРАЈАЊЕ ТЕМЕ: 35
Изабрани исход / и: - обнови́ти стечена знања о елементарним функцијама - обнови́ти и проши́рити знања о домену функције, нулама функције, знаку - умети да испитају парност функције - знати шта је сложена функција - умети да нађу инверзну функцију - схватити појам граничне вредности функције - знати да нађу разне типове граничних вредности функције			
ВРЕМЕ	АКТИВНОСТ УЧЕЊА	НАСТАВНИ МЕТОДИ	НАСТАВНИ МАТЕРИЈАЛИ / СРЕДСТВА
1. час	Упознавање ученика са планом и програмом	Вербални метод	
2. час	Дефиниција функције- обнављање	Вербални метод;презентација	Свеска и оловка;табла
3. час	Преглед елементарних функција	Кооперативно учење	Свеска и оловка;табла, рачунар
4. час	Преглед елементарних функција	Вербални метод и дискусија	Папир и оловка; табла
5. час	Преглед елементарних функција	Индивидуални рад и презентација	Свеска и оловка;табла
6. час	Сложена функција	Вербални метод	Табла
7. час	Сложена функција	Кооперативно учење	Папир и оловка; табла
8.час	Инверзна функција	Вербално рецептивно учење	Папир и оловка; табла
9.час	Инверзна функција	Слагалица знања	Папир и оловка; табла
10.час	Област дефинисаности функције	Вербално рецептивно учење	Свеска и табла
11.час	Област дефинисаности функције	Кооперативно учење	Папир и табла
12.час	Област дефинисаности функције	Индивидуални рад и презентација	Табла
13.час	Нуле и знак функције	Вербални метод	Свеска и табла
14.час	Нуле и знак функције, пресек са у осом	Кооперативно учење	Свеска и оловка
15.час	Парност функције	Индивидуални рад	Свеска и табла
16.час	Парност функције	Практично смисаоно учење	Папир и оловка

17.час	Функције- утврђивање	Питања и дискусија	Свеска и оловка;табла
18.час	Монотоност функције	Кооперативно учење	Папир и оловка
19.час	Периодичност функције	Кооперативно учење	Свеска и оловка;табла
20.час	Функције- утврђивање	Питања и кооперативно учење	Папир и табла
21.час	Непрекидност функције	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
22.час	Гранична вредност функције	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
23.час	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$	Дискусија и кооперативно учење	Свеска, табла
24.час	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
25.час	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{P(x)} - \sqrt{Q(x)})$	Групни рад и презентација	Наставни материјали, табла
26.час	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
27.час	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	Кооперативно учење	Свеска и оловка;табла
28.час	Контролна вежба	Индивидуални рад	Папир и оловка
29.час	Израда задатака са контролне вежбе	Слагалица знања	Папир и табла
30.час	$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
31.час	$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$	Групни рад и презентација	Наставни материјали, табла

32.час	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
33.час	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$	Кооперативно учење	Свеска и оловка;табла
34.час	Функције- утврђивање	Слагалица знања	Табла
35.час	Припрема за писмени	Питања и одговори	Табла

ПЛАН ЗА ПОСТИЗАЊЕ ИСХОДА У ТЕМИ			
НАЗИВ ТЕМЕ: Извод функције			ТРАЈАЊЕ ТЕМЕ: 35
Изабрани исход / и: - упознати појам извода функције - знати изводе елементарних функција - умети да нађу извод сложене функције - користити изводе функција у испитивању графика функције - знати да одреде асимптоте функције - умети да цртају и испитују графике функција			
ВРЕМЕ	АКТИВНОСТ УЧЕЊА	НАСТАВНИ МЕТОДИ	НАСТАВНИ МАТЕРИЈАЛИ / СРЕДСТВА
1.час	Појам извода функције и геометријска интерпретација	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
2.час	Појам извода функције и геометријска интерпретација	Вербални метод;презентација	Свеска и оловка;табла
3.час	Изводи елементарних функција	Вербални метод и дискусија	Свеска и оловка;табла
4.час	Изводи елементарних функција	Индивидуални рад и презентација	Папир и оловка; табла
5.час	Таблица извода	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
6.час	Извод инверзне функције	Вербални метод	Табла
7.час	Основне теореме о изводу	Вербално рецептивно учење	Папир и оловка; табла
8.час	Основне теореме о изводу	Кооперативно учење	Папир и оловка; табла
9.час	Основне теореме о изводу	Слагалица знања	Папир и оловка; табла

10.час	Извод сложене функције	Вербално рецептивно учење	Свеска и табла
11.час	Извод сложене функције	Кооперативно учење	Папир и табла
12.час	Извод сложене функције	Индивидуални рад и презентација	Табла
13.час	Извод функције- утврђивање	Мозгалица и дискусија	Свеска и табла
14.час	Монотоност и екстремне вредности функције	Вербални метод	Свеска и оловка
15.час	Монотоност и екстремне вредности функције	Кооперативно учење	Свеска и табла
16.час	Монотоност и екстремне вредности функције	Практично смисаоно учење	Папир и оловка
17.час	Конвексност и конкавност функције. Превојне тачке	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
18.час	Конвексност и конкавност функције. Превојне тачке	Кооперативно учење	Папир и оловка
19.час	Монотоност и конвексност функције- утврђивање	Групни рад и презентација	Наставни материјали и табла
20.час	Лопиталово правило	Вербални метод	Папир и табла
21.час	Лопиталово правило	Кооперативно учење	Свеска и оловка;табла
22.час	Лопиталово правило	Индивидуални рад и презентација	Свеска и оловка;табла
23.час	Контролна вежба	Писани индивидуални рад	Папир и оловка
24.час	Израда задатака са контролне вежбе	Питања и дискусија	Свеска и оловка;табла
25.час	Асимптоте функција	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
26.час	Асимптоте функција	Кооперативно учење	Свеска и оловка;табла
27.час	Асимптоте функција	Индивидуални рад	Свеска и оловка;табла
28.час	Цртање графика и испитивање функција	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
29.час	Цртање графика и испитивање функција	Кооперативно учење	Рачунар
30.час	Цртање графика и испитивање функција	Кооперативно учење	Свеска и оловка. рачунар
31.час	Цртање графика и испитивање функција	Питања ученика	Свеска и оловка;табла
32.час	Цртање графика и испитивање функција	Индивидуални рад	Свеска и оловка;табла
33.час	Цртање графика и испитивање функција	Групни рад и презентација	Наставни материјали и табла
34.час	Цртање графика и испитивање функција	Слагалица знања	Свеска и оловка;табла
35.час	Припрема за писмени	Питања и дискусија	Свеска и оловка;табла

ПЛАН ЗА ПОСТИЗАЊЕ ИСХОДА У ТЕМИ			
НАЗИВ ТЕМЕ: Интеграл			ТРАЈАЊЕ ТЕМЕ: 27
Изабрани исход / и: - упознати појам примитивне функције и неодређеног интеграла - знати основна правила о интегралу - знати таблицу интеграла - умети да решају интеграле методом смене и методом парцијалне интеграције - умети да интеграле рационалне функције - знати шта је одређени интеграл и како се израчунава - умети да примене одређене интеграле за ректификацију, квадратуру и кубатуру			
ВРЕМЕ	АКТИВНОСТ УЧЕЊА	НАСТАВНИ МЕТОДИ	НАСТАВНИ МАТЕРИЈАЛИ / СРЕДСТВА
1.час	Примитивна функција и појам неодређеног интеграла	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
2.час	Основна правила о интегралу	Вербални метод;презентација	Свеска и оловка;табла
3.час	Таблични интеграл	Вербални метод и дискусија	Свеска и оловка;табла
4.час	Интеграција применом табличних интеграла	Кооперативно учење	Папир и оловка; табла
5.час	Интеграција применом табличних интеграла	Индивидуални рад и презентација	Свеска и оловка;табла
6.час	Интеграција применом табличних интеграла	Питања и дискусија	Свеска и оловка;табла
7.час	Интеграција методом смене	Вербални метод	Табла, свеска
8.час	Интеграција методом смене	Кооперативно учење	Папир и оловка; табла
9.час	Интеграција методом смене	Индивидуални рад	Папир и оловка; табла
10.час	Метод парцијалне интеграције	Вербални метод	Папир и оловка; табла
11.час	Метод парцијалне интеграције	Кооперативно учење	Свеска и табла
12.час	Метод парцијалне интеграције	Индивидуални рад	Папир и табла
13.час	Метод парцијалне интеграције	Питања и дискусија	Табла
14.час	Интеграција рационалних функција	Вербални метод	Свеска и табла
15.час	Интеграција рационалних функција	Кооперативно учење	Свеска и оловка
16.час	Интеграција рационалних функција	Кооперативно учење	Свеска и табла
17.час	Одређени интеграл. Њутн- Лајбницова формула	Вербални метод	Папир и оловка
18.час	Одређени интеграл. Њутн- Лајбницова формула	Практично смисаоно учење	Свеска и оловка;табла
19.час	Примена одређеног интеграла (за израч. површине)	Вербални метод	Папир и оловка

20.час	Примена одређеног интеграла (за израчунавање површине)	Кооперативно учење	Наставни материјали и табла
21.час	Примена одређеног интеграла (за израчунавање запремине)	Кооперативно учење	Папир и табла
22.час	Примена одређеног интеграла- ректификација	Кооперативно учење	Свеска и оловка;табла
23.час	Интеграли- утврђивање	Групни рад и презентација	Свеска и оловка;табла
24.час	Интеграли- утврђивање	Индивидуални рад и дискусија	Наставни материјали и табла
25.час	Контролна вежба	Писани индивидуални рад	Папир и оловка
26.час	Израда задатака са контролне вежбе	Питања и дискусија	Свеска и оловка;табла
27.час	Интеграли - утврђивање	Слагалица знања	Свеска и оловка;табла
28.час	Интеграли - утврђивање	Слагалица знања	Свеска и оловка;табла

ПЛАН ЗА ПОСТИЗАЊЕ ИСХОДА У ТЕМИ			
НАЗИВ ТЕМЕ: Диференцијалне једначине			ТРАЈАЊЕ ТЕМЕ: 16
Изабрани исход / и: - схватити појам диференцијалне једначине - препознати диференцијалну једначину која раздваја променљиве - умети да реше хомогену диференцијалну једначину првог реда - знати да реше линеарну диференцијалну једначину првог реда - упознати линеарну хомогену диференцијалну једначину другог реда са константним коефицијентима - знати да реши линеарну нехомогену диференцијалну једначину другог реда			
ВРЕМЕ	АКТИВНОСТ УЧЕЊА	НАСТАВНИ МЕТОДИ	НАСТАВНИ МАТЕРИЈАЛИ / СРЕДСТВА
1. час	Појам диференцијалне једначине и решења диф. једначине	Вербални метод	Свеска и оловка; табла
2. час	Диференцијална једначина која раздваја променљиве	Вербални метод	Свеска и оловка; табла
3. час	Диференцијална једначина која раздваја променљиве	Кооперативно учење	Свеска и оловка; табла
4. час	Диференцијална једначина која раздваја променљиве	Индивидуални рад и презентација	Папир и оловка; табла
5. час	Хомогена диференцијална једначина првог реда	Вербални метод	Свеска и оловка; табла
6. час	Хомогена диференцијална једначина првог реда	Кооперативно учење	Свеска и оловка; табла
7. час	Линеарна диференцијална једначина првог реда	Вербални метод	Табла, свеска
8. час	Линеарна диференцијална једначина првог реда	Индивидуални рад	Папир и оловка; табла
9. час	Линеарна хомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима	Вербални метод	Папир и оловка; табла
10. час	Линеарна хомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима	Кооперативно учење	Папир и оловка; табла
11. час	Линеарна нехомогена диф. једначина другог реда	Вербални метод	Свеска и табла
12. час	Линеарна нехомогена диф. једначина другог реда	Кооперативно учење	Папир и табла
13. час	Припрема за писмени	Питања ученика	Табла
	Трећи писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
	Трећи писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
	Исправак трећег писменог задатка	Интерактивно учење	Вежбанка и табла

ПЛАН ЗА ПОСТИЗАЊЕ ИСХОДА У ТЕМИ			
НАЗИВ ТЕМЕ: Комбинаторика			ТРАЈАЊЕ ТЕМЕ: 17
Изабрани исход / и: - обновити знања из комбинаторике - знати шта су пермутације, варијације, комбинације - умети да решавају комбинаторне проблеме на више начина - упознати биномну формулу - умети да примењује биномну формулу у задацима			
ВРЕМЕ	АКТИВНОСТ УЧЕЊА	НАСТАВНИ МЕТОДИ	НАСТАВНИ МАТЕРИЈАЛИ / СРЕДСТВА
1. час	Комбинаторика - обнављање	Вербални метод	Свеска и оловка; табла
2. час	Пермутације без понављања елемената	Вербални метод	Свеска и оловка; табла
3. час	Пермутације са понављањем елемената	Кооперативно учење	Свеска и оловка; табла
4. час	Пермутације	Групни рад и презентација	Папир и оловка; табла
5. час	Пермутације	Индивидуални рад	Свеска и оловка; табла
6. час	Варијације са и без понављања елемената	Вербални метод	Свеска и оловка; табла
7. час	Варијације	Кооперативно учење	Табла, свеска
8. час	Варијације	Индивидуални рад	Папир и оловка; табла
9. час	Варијације	Питања и одговори	Папир и оловка; табла
10. час	Комбинације са и без понављања елемената	Вербални метод	Папир и оловка; табла
11. час	Комбинације	Кооперативно учење	Свеска и табла
12. час	Комбинације	Индивидуални рад	Папир и табла
13. час	Комбинације	Слагалица знања	Табла
14. час	Биномна формула	Вербални метод	Свеска и оловка; табла
15. час	Биномна формула	Кооперативно учење	Свеска и оловка; табла
16. час	Биномна формула	Интерактивно учење	Свеска и оловка; табла
17. час	Биномна формула	Питања и одговори	Табла

ПЛАН ЗА ПОСТИЗАЊЕ ИСХОДА У ТЕМИ			
НАЗИВ ТЕМЕ: Вероватноћа и статистика			ТРАЈАЊЕ ТЕМЕ: 21
Изабрани исход / и: - упознати појам случајног догађаја и вероватноће - знати шта је условна вероватноћа - умети да да нађе вероватноћу независних догађаја - знати формулу тоталне вероватноће - знати шта је случајна променљива - знати шта је популација и обележје - знати шта је средња вредност и дисперзија - знати како се прикупљају и сређују подаци			
ВРЕМЕ	АКТИВНОСТ УЧЕЊА	НАСТАВНИ МЕТОДИ	НАСТАВНИ МАТЕРИЈАЛИ / СРЕДСТВА
1.час	Случајни догађај	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
2.час	Појам вероватноће	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
3.час	Појам вероватноће	Вербални метод и дискусија	Свеска и оловка;табла
4.час	Појам вероватноће	Кооперативно учење	Папир и оловка; табла
5.час	Условна вероватноћа	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
6.час	Условна вероватноћа	Кооперативно учење	Свеска и оловка;табла
7.час	Контролна вежба	Писани метод	Папир и оловка; табла
8.час	Израда задатака са контролне вежбе	Кооперативно учење	Свеска и оловка; табла
9.час	Вероватноћа независних догађаја	Вербални метод	Папир и оловка; табла
10.час	Вероватноћа независних догађаја	Индивидуални рад	Папир и оловка; табла
11.час	Формула тоталне вероватноће	Вербални метод	Свеска и табла
12.час	Формула тоталне вероватноће	Кооперативно учење	Папир и табла
13.час	Припрема за писмени	Питања и дискусија	Табла
	Четврти писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
	Четврти писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
	Исправак писменог задатка	Кооперативно учење	Вежбанка
14.час	Случајне променљиве	Вербални метод	Папир и оловка
15.час	Биномна, Пуасонова и нормална расподела	Практично смисаоно учење	Свеска и оловка;табла, рачунар

16.час	Биномна, Пуасонова и нормална расподела	Кооперативно учење	Папир и оловка
17.час	Популација, обележје, узорак	Вербални метод	Свеска и табла
18.час	Средња вредност и дисперзија	Вербални метод	Папир и табла
19.час	Средња вредност и дисперзија	Групни рад и презентација	Наставни материјали и табла
20.час	Прикупљање и сређивање података	Кооперативно учење	Свеска и оловка;табла, рачунар
21.час	Систематизација градива	Слагалица знања	Табла

1.2. ГОДИШЊИ ОРИЈЕНТАЦИОНИ ПЛАН ЗА ГИМНАЗИЈУ – ОПШТИ ТИП

	Четврти разред-општи тип	Обрада новог градива	Вежбе и понављ.	Остало	Свега
	Теме				
1.	Функције	10	12	2	24
2.	Извод функције	7	22	11	40
3.	Интеграли	8	17	4	29
4.	Комбинаторика	5	11	1	17
5.	Вероватноћа	6	8	4	18
	Укупно часова	36	70	22	128

Легенда:

Тип часа: ОНГ -обрада новог градива
 КОМ -комбиновани
 В -вежбе
 ЧПЗ -час провере знања

Облик рада: ФР -фронтални
 ГР -групни
 ИНД -индивидуални
 МЕШ -мешовити

Наставна средства: Т -табла
 К -креда
 У -уџбеник
 С -свеска
 ГП -геометријски прибор
 П -папир
 О -оловка

Место рада и наст. Средства: КАБ -кабинет
 МУЛТИМЕД.СР.-мултимедијална средства

ОПЕРАТИВНИ ПЛАН РАДА НАСТАВНИКА
Школска 2011/2012. година

Назив предмета: Математика Разред IV Недељни фонд часова 4

Тема бр.	Час	Наставна јединица	Тип часа	Облик рада	Наставна средства	Место рада и наставна средства	Иновације	Евалуација и корекција
1	1	Упознавање ученика са програмом рада		ФР		КАБ,МУЛТИМЕД.СР.		
1	2	Важнији појмови о функцијама једне променљиве	ОНГ	ФР	Т,К	КАБ,МУЛТИМЕД.СР.		
1	3	Домен функције	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР.		
1	4	Нуле функције	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР.		
1	5	Вежбе: одређивање домена и нула функције	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР.		
1	6	Парност и непарност функције	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР.	АНИМАЦИЈЕ	
1	7	Монотоност функције	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР.	АНИМАЦИЈЕ	
1	8	Примери за вежбу	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР.		
1	9	Периодичне функције	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР.	АНИМАЦИЈЕ	
1	10	Инверзне функције	КОМ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР.	АНИМАЦИЈЕ	
1	11	Сложене функције	КОМ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР.	АНИМАЦИЈЕ	
1	12	Инверзне тригонометријске функције	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР.	АНИМАЦИЈЕ	
1	13	Вежбе: инверзне и сложене функције	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР.		
1	14	Преглед елементарних функција	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР.		
1	15	Непрекидност функција	КОМ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР.		
1	16	Вежбе: непрекидност функција	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР.		
1	17	Гранична вредност функција	ОНГ	ФР	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР.		

1	18	Вежбе: гранична вредност функција	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР.		
1	19	Вежбе: гранична вредност функција	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
1	20	Вежбе: гранична вредност функција	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
1	21	Асимптоте функција	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
1	22	Вежбе: асимптоте	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
1	23	Понављање функција	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
1	24	Контролни задатак	ЧПЗ		П,О	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	25	Прираштај функције	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
2	26	Проблем тангенте и брзине	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
2	27	Дефиниција извода	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	28	Изводи елементарних функција. Основне теореме о изводу	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	29	Извод збира, производа и количника	КОМ		ВЕЖБАНКА	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	30	Вежбе: извод функције	В		ВЕЖБАНКА	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	31	Извод инверзне функције	ОНГ	ГР И ИНД	С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	32	Вежбе: извод инверзне функције	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	33	Припрема за писмени задатак	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	34	Први писмени задатак	ЧПЗ		ВЕЖБАНКА	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	35	Први писмени задатак	ЧПЗ		ВЕЖБАНКА	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	36	Исправак писменог задатка	ЧПЗ	ИНД И ГР	С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	37	Извод сложене функције	ОНГ	ФР	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	38	Вежбе: извод сложене функције	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	39	Примена извода: тангента и нормала криве	КОМ	МЕШ	Т,С,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	40	Примена извода: тангента и нормала криве	КОМ	МЕШ	Т,С,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
2	41	Диференцијал	ОНГ	МЕШ	Т,С,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
2	42	Примена диференцијала	КОМ		Т,С,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
2	43	Испитивање функције и цртање графика	КОМ	МЕШ	Т,С,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
2	44	Испитивање функције и цртање графика	В	МЕШ	Т,С,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
2	45	Испитивање функције и цртање графика	В	МЕШ	Т,С,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	46	Испитивање функције и цртање графика	В	МЕШ	Т,С,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		

2	47	Испитивање функције и цртање графика	В	МЕШ	Т,С,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
2	48	Испитивање функције и цртање графика	В	МЕШ	Т,С,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
2	49	Испитивање функције и цртање графика	В	МЕШ	Т,С,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
2	50	Испитивање функције и цртање графика	В	МЕШ	Т,С,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
2	51	Испитивање функције и цртање графика	В	МЕШ	Т,С,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
2	52	Испитивање функције и цртање графика	В	МЕШ	Т,С,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
2	53	Испитивање функције и цртање графика	В	МЕШ	Т,С,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
2	54	Испитивање функције и цртање графика	В	МЕШ	Т,С,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
2	55	Испитивање функције и цртање графика	В	МЕШ	Т,С,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
2	56	Припрема за писмени задатак	В	ФР И ГР	Т,С,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	57	Други писмени задатак	ЧПЗ		ВЕЖБАНКА	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	58	Други писмени задатак	ЧПЗ		ВЕЖБАНКА	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	59	Исправак писменог задатка	ЧПЗ	ГР	С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	60	Полугодишње понављање градива	ЧПЗ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	61	Полугодишње понављање градива	ЧПЗ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	62	Полугодишње понављање градива	ЧПЗ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	63	Полугодишње понављање градива	ЧПЗ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
2	64	Полугодишње понављање градива	ЧПЗ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	65	Неодређени интеграл	ОНГ	ФР	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	66	Интеграл елементарних функција	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	67	Примери за вежбу	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	68	Метод интеграције: метода смене	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	69	Вежбе: интеграција методом смене	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	70	Вежбе: интеграција методом смене	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	71	Вежбе: интеграција методом смене	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	72	Метода парцијалне интеграције	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	73	Вежбе: парцијална интеграција	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	74	Примери за вежбу: интеграл	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	75	Примери за вежбу: интеграл	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	76	Понављање интеграла	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		

3	77	Контролни задатак	ЧПЗ		П,О	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	78	Одређени интеграл. Њутн-Лајбницова формула	ОНГ	ФР	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	79	Вежбе: одређени интеграл	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	80	Основне особине одређеног интеграла	КОМ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	81	Основне особине одређеног интеграла	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	82	Примена одређеног интеграла: израчунавање површине равне фигуре	ОНГ	МЕШ	Т,К,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
3	83	Вежбе: површина равне фигуре	В	МЕШ	Т,К,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
3	84	Вежбе: површина равне фигуре	В	МЕШ	Т,К,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
3	85	Одређивање дужине лука криве линије применом одређеног интеграла	ОНГ	МЕШ	Т,К,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
3	86	Вежбе: дужина лука	В	МЕШ	Т,К,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
3	87	Одређивање запремине обртних тела применом одређеног интеграла	ОНГ	МЕШ	Т,К,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
3	88	Вежбе: запремина обртних тела	В	МЕШ	Т,К,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
3	89	Вежбе: запремина обртних тела	В	МЕШ	Т,К,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР	АНИМАЦИЈЕ	
3	90	Припрема за писмени задатак	В	МЕШ	Т,К,ГП	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	91	Трећи писмени задатак	ЧПЗ		ВЕЖБАНКА	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	92	Трећи писмени задатак	ЧПЗ		ВЕЖБАНКА	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
3	93	Исправак писменог задатка	ЧПЗ	ИНД И ГР	С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
4	94	Увод у комбинаторику	ОНГ	ФР	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
4	95	Пермутације	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
4	96	Вежбе: пермутације	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
4	97	Варијације	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
4	98	Вежбе: варијације	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
4	99	Вежбе: пермутације и варијације	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
4	100	Комбинације	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
4	101	Вежбе: комбинације	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
4	102	Вежбе: комбинаторика	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		

4	103	Вежбе: комбинаторика	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
4	104	Контролни задатак	ЧПЗ		П,О	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
4	105	Биномна формула	ОНГ	ФР	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
4	106	Особине биномних коефицијената	КОМ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
4	107	Вежбе: биномни коефицијенти	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
4	108	Примена биномне формуле	КОМ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
4	109	Вежбе: биномна формула	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
4	110	Понављање биномне формуле	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
5	111	Случајни догађаји. Вероватноћа случајног догађаја	ОНГ	ФР	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
5	112	Условне вероватноће	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
5	113	Вежбе: условна вероватноћа	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
5	114	Вежбе: условна вероватноћа	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
5	115	Вежбе: условна вероватноћа	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
5	116	Потпуна вероватноћа	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
5	117	Вежбе: потпуна вероватноћа	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
5	118	Случајне величине и расподела вероватноће	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
5	119	Биномна расподела	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
5	120	Вежбе: биномна расподела	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
5	121	Поасонова расподела	ОНГ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
5	122	Вежбе: расподела вероватноће	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
5	123	Вежбе: расподела вероватноће	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
5	124	Припрема за писмени	В	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
5	125	Четврти писмени задатак	ЧПЗ	МЕШ	ВЕЖБАНКА	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
5	126	Четврти писмени задатак	ЧПЗ	МЕШ	ВЕЖБАНКА	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
5	127	Исправак писменог задатка	ЧПЗ	МЕШ	С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		
5	128	Годишње понављање градива	ЧПЗ	МЕШ	Т,К,У,С	КАБ,МУЛТИМЕД.СР		

1.3. ГОДИШЊИ ОРИЈЕНТАЦИОНИ ПЛАН ЗА ОБРАЗОВНИ ПРОФИЛ ГЕОДЕТСКИ ТЕХНИЧАР - ГЕОМЕТАР

ПОДРУЧЈЕ РАДА:		ГЕОДЕЗИЈА И ГРАЂЕВИНАРСТВО					
ОБРАЗОВНИ ПРОФИЛ:		ГЕОДЕТСКИ ТЕХНИЧАР-ГЕОМЕТАР					
РАЗРЕД:		ЧЕТВРТИ					
ПРЕДМЕТ:		МАТЕМАТИКА					
ГОДИШЊИ ФОНД ЧАСОВА:		ТЕОРИЈСКА НАСТАВА	ВЕЖБЕ	ПРАКТИЧНА НАСТАВА	БЛОК	ПРОФЕСИОНАЛНА ПРАКСА	УКУПНО
		128					128
РБ	ТЕМА	ЦИЉЕВИ					БРОЈ ЧАСОВА
1.	Функције	Обнављање и проширивање знања о функцијама					29
2.	Извод функције	Стицање основних знања о изводима функција и примени извода					31
3.	Интеграли	Стицање основних знања о интегралима и примена одређеног интеграла					23
5.	Комбинаторика	Обнављање и проширивање знања из комбинаторике					14
6.	Вероватноћа и статистика	Стицање основних знања из вероватноће и статистике					19
7.	Четири писмена задатка и исправке	Писмена провера знања					12
		укупно					128

ОПЕРАТИВНИ ПЛАН РАДА

ПЛАН ЗА ПОСТИЗАЊЕ ИСХОДА У ТЕМИ			
НАЗИВ ТЕМЕ: Функције			ТРАЈАЊЕ ТЕМЕ: 35
Изабрани исход / и: - обновити стечена знања о елементарним функцијама обновити и проширити знања о домену функције, нулама функције, знаку умети да испитају парност функције знати шта је сложена функција умети да нађу инверзну функцију схватити појам граничне вредности функције знати да нађу разне типове граничних вредности функције			
ВРЕМЕ	АКТИВНОСТ УЧЕЊА	НАСТАВНИ МЕТОДИ	НАСТАВНИ МАТЕРИЈАЛИ / СРЕДСТВА
1. час	Упознавање ученика са планом и програмом	Вербални метод	
2. час	Функција реалне променљиве, појам, дефиниција и начин задавања	Вербални метод;презентација	Свеска и оловка;табла
3. час	Област дефинисаности функције-домен	Кооперативно учење	Свеска и оловка;табла, рачунар
4. час	Нуле и знак функције	Вербални метод и дискусија	Папир и оловка; табла
5. час	Домен, нуле и знак функције	Индивидуални рад и презентација	Свеска и оловка;табла
6. час	Парност функције	Индивидуални рад	Свеска и табла
7. час	Монотоност функције	Кооперативно учење	Папир и оловка
8.час	Периодичност функције	Кооперативно учење	Свеска и оловка;табла
9.час	Монотоност и периодичност функције	Слагалица знања	Папир и оловка; табла
10.час	Сложена функција	Вербално рецептивно учење	Свеска и табла
11.час	Сложена функција	Индивидуални рад и презентација	Табла
12.час	Инверзна функција	Вербално рецептивно учење	Свеска и табла
13.час	Инверзна функција	Индивидуални рад и презентација	Табла
14.час	Преглед елементарних функција	Кооперативно учење	Свеска и оловка
15.час	Преглед елементарних функција	Индивидуални рад	Свеска и табла

16.час	Контролна вежба	Писани индивидуални рад	Папир и оловка
17.час	Гранична вредност функције	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
18.час	Гранична вредност функције	Индивидуални рад и презентација	Табла
19.час	Четири основна лимеса	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
20.час	Четири основна лимеса	Индивидуални рад и презентација	Табла
21.час	Четири основна лимеса	Индивидуални рад и презентација	Табла
22.час	Гранична вредност функције	Индивидуални рад и презентација	Табла
23.час	Гранична вредност функције	Индивидуални рад и презентација	Табла
24.час	Непрекидност функције	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
25.час	Непрекидност функције	Индивидуални рад и презентација	Табла
26.час	Асимптоте функције	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
27.час	Асимптоте функције	Индивидуални рад и презентација	Табла
28.час	Асимптоте функције	Индивидуални рад и презентација	Табла
29.час	Функције-систематизације	Индивидуални рад и презентација	Табла
30.час	Први писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
31.час	Први писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
32.час	Исправак првог писменог задатка	Интерактивно учење	Вежбанка и табла

ПЛАН ЗА ПОСТИЗАЊЕ ИСХОДА У ТЕМИ			
НАЗИВ ТЕМЕ: Извод функције			ТРАЈАЊЕ ТЕМЕ: 35
Изабрани исход / и: - упознати појам извода функције знати изводе елементарних функција умети да нађу извод сложене функције користити изводе функција у испитивању графика функције знати даодред асимптоте функције умети да цртају и испитују графике функција			
ВРЕМЕ	АКТИВНОСТ УЧЕЊА	НАСТАВНИ МЕТОДИ	НАСТАВНИ МАТЕРИЈАЛИ / СРЕДСТВА
1.час	Прираштај функције-појам (независна и зависна променљива)	Вербални метод	Свеска и оловка;табла

2.час	Веза са аналитићком геометријом, физиком и механиком	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
3.час	Веза са аналитићком геометријом, физиком и механиком	Индивидуални рад и презентација	Табла
4.час	Извод елементарних функција	Вербални метод	Табла
5.час	Основне теореме о изводу	Кооперативно учење	Папир и оловка; табла
6.час	Основне теореме о изводу	Слагалица знања	Папир и оловка; табла
7.час	Основне теореме о изводу	Слагалица знања	Папир и оловка; табла
8.час	Извод сложене функције	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
9.час	Извод инверзне функције	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
10.час	Извод сложене и инверзне функције	Индивидуални рад и презентација	Табла
11.час	Извод функције	Индивидуални рад и презентација	Табла
12.час	Контролна вежба	Писани индивидуални рад	Папир и оловка
13.час	Изводи вишег реда	Кооперативно учење	Папир и оловка; табла
14.час	Изводи вишег реда	Слагалица знања	Папир и оловка; табла
15.час	Диференцијал функције и његова примена	Кооперативно учење	Папир и оловка
16.час	Диференцијал	Групни рад и презентација	Наставни материјали и табла
17.час	Монотоност и екстремне вредности	Вербални метод	Папир и табла
18.час	Монотоност и екстремне вредности	Кооперативно учење	Свеска и оловка;табла
19.час	Монотоност и екстремне вредности	Индивидуални рад и презентација	Свеска и оловка;табла
20.час	Конвексност и превојне тачке	Писани индивидуални рад	Папир и оловка
21.час	Монотоност, конвексност, превојне тачке и екстремне вредности	Питања и дискусија	Свеска и оловка;табла
22.час	Цртање графика и испитивање функција	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
23.час	Цртање графика и испитивање функција	Кооперативно учење	Рачунар
24.час	Цртање графика и испитивање функција	Кооперативно учење	Свеска и оловка. рачунар
25.час	Цртање графика и испитивање функција	Питања ученика	Свеска и оловка;табла
26.час	Цртање графика и испитивање функција	Индивидуални рад	Свеска и оловка;табла
27.час	Други писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
28.час	Други писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
29.час	Исправак другог писменог задатка	Интерактивно учење	Вежбанка и табла
30.час	Цртање графика и испитивање функција	Слагалица знања	Свеска и оловка;табла

31.час	Цртање графика и испитивање функција	Слагалица знања	Свеска и оловка;табла
32.час	Цртање графика и испитивање функција	Слагалица знања	Свеска и оловка;табла
33.час	Контролна вежба	Писани индивидуални рад	Папир и оловка
34.час	Систематизација градива првог полугодишта	Слагалица знања	Свеска и оловка;табла

ПЛАН ЗА ПОСТИЗАЊЕ ИСХОДА У ТЕМИ			
НАЗИВ ТЕМЕ: Интеграл			ТРАЈАЊЕ ТЕМЕ: 27
Изабрани исход / и: - упознати појам примитивне функције и неодређеног интеграла знати основна правила о интегралу знати таблицу интеграла умети да решавју интеграле методом смене и методом парцијалне интеграције умети да интеграле рационалне функције знати шта је одређени интеграл и како се израчунава умети да примене одређене интеграле за ректификацију, квадратуру и кубатуру			
ВРЕМЕ	АКТИВНОСТ УЧЕЊА	НАСТАВНИ МЕТОДИ	НАСТАВНИ МАТЕРИЈАЛИ / СРЕДСТВА
1.час	Примитивна функција и појам неодређеног интеграла	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
2.час	Основна правила о интегралу	Вербални метод;презентација	Свеска и оловка;табла
3.час	Таблични интеграл	Вербални метод и дискусија	Свеска и оловка;табла
4.час	Интеграл елементарних функција	Кооперативно учење	Папир и оловка; табла
5.час	Интеграција методом смене	Вербални метод	Табла, свеска
6.час	Интеграција методом смене	Кооперативно учење	Папир и оловка; табла
7.час	Интеграција методом смене	Индивидуални рад	Папир и оловка; табла
8.час	Метод парцијалне интеграције	Вербални метод	Папир и оловка; табла
9.час	Метод парцијалне интеграције	Кооперативно учење	Свеска и табла
10.час	Метод парцијалне интеграције	Индивидуални рад	Папир и табла
11.час	Неодређени интеграл	Кооперативно учење	Свеска и табла
12.час	Неодређени интеграл	Индивидуални рад	Папир и табла
13.час	Контролна вежба	Писани индивидуални рад	Папир и оловка

14.час	Одређени интеграл. Њутн- Лајбницова формула	Вербални метод	Папир и оловка
15.час	Одређени интеграл. Њутн- Лајбницова формула	Практично смисаоно учење	Свеска и оловка;табла
16.час	Одређени интеграл. Њутн- Лајбницова формула	Индивидуални рад	Папир и табла
17.час	Примена одређеног интеграла (за израчунавање површине)	Вербални метод	Папир и оловка
18.час	Примена одређеног интеграла (за израчунавање површине)	Кооперативно учење	Наставни материјали и табла
19.час	Примена одређеног интеграла (за израч. површине)	Вербални метод	Папир и оловка
20.час	Примена одређеног интеграла (за израчунавање запремине)	Вербални метод	Папир и оловка
21.час	Примена одређеног интеграла (за израчунавање запремине)	Кооперативно учење	Наставни материјали и табла
22.час	Примена одређеног интеграла (за израчунавање запремине)	Вербални метод	Папир и оловка
23.час	Интеграл-и утврђивање	Групни рад и презентација	Свеска и оловка;табла
24.час	Трећи писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
25.час	Трећи писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
26.час	Исправак трећег писменог задатка	Интерактивно учење	Вежбанка и табла

ПЛАН ЗА ПОСТИЗАЊЕ ИСХОДА У ТЕМИ			
НАЗИВ ТЕМЕ: Комбинаторика			ТРАЈАЊЕ ТЕМЕ: 17
Изабрани исход / и: - обновити знања из комбинаторике знати шта су пермутације, варијације, комбинације умети да решавају комбинаторне проблеме на више начина упознати биномну формулу - умети да примењује биномну формулу у задацима			
ВРЕМЕ	АКТИВНОСТ УЧЕЊА	НАСТАВНИ МЕТОДИ	НАСТАВНИ МАТЕРИЈАЛИ / СРЕДСТВА
1.час	Варијације са и без понављања	Вербални метод	Свеска и оловка;табла

2.час	Варијације	Кооперативно учење	Табла, свеска
3.час	Пермутације без понављања	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
4.час	Пермутације без понављања	Групни рад и презентација	Папир и оловка; табла
5.час	Комбинације без понављања	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
6.час	Комбинације без понављања	Кооперативно учење	Табла, свеска
7.час	Особине биномних коефицијената	Кооперативно учење	Табла, свеска
8.час	Биномна формула	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
9.час	Биномна формула	Кооперативно учење	Свеска и оловка;табла
10.час	Биномна формула	Интерактивно учење	Свеска и оловка;табла
11.час	Биномна формула	Питања и одговори	Табла
12.час	Биномна формула	Питања и одговори	Табла
13.час	Комбинације	Слагалица знања	Табла
14.час	Контролна вежба	Писани индивидуални рад	Папир и оловка

ПЛАН ЗА ПОСТИЗАЊЕ ИСХОДА У ТЕМИ			
НАЗИВ ТЕМЕ: Вероватноћа и статистика			ТРАЈАЊЕ ТЕМЕ: 21
Изабрани исход / и: - упознати појам случајног догађаја и вероватноће знати шта је условна вероватноћа умети да да нађе вероватноћу независних догађаја знати формулу тоталне вероватноће знати шта је случајна променљива знати шта је популација и обележје знати шта је средња вредност и дисперзија знати како се прикупљају и сређују подаци			
ВРЕМЕ	АКТИВНОСТ УЧЕЊА	НАСТАВНИ МЕТОДИ	НАСТАВНИ МАТЕРИЈАЛИ / СРЕДСТВА
1.час	Случајни догађај	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
2.час	Појам вероватноће	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
3.час	Појам вероватноће	Вербални метод и дискусија	Свеска и оловка;табла

4.час	Вероватноћа збира догађаја	Кооперативно учење	Папир и оловка; табла
5.час	Условна вероватноћа. Вероватноћа производа сл.догађаја	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
6.час	Условна вероватноћа. Вероватноћа производа сл.догађаја	Кооперативно учење	Свеска и оловка;табла
7.час	Формула тоталне вероватноће-Бајесова формула	Вербални метод	Свеска и табла
8.час	Формула тоталне вероватноће-Бајесова формула	Кооперативно учење	Папир и табла
9.час	Формула тоталне вероватноће-Бајесова формула	Кооперативно учење	Папир и табла
10.час	Вероватноћа-систематизација	Слагалица знања	Папир и оловка; табла
11.час	Четврти писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
12.час	Четврти писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
13.час	Исправак писменог задатка	Кооперативно учење	Вежбанка
14.час	Случајна променљива и њена нумеричка карактеристика	Вербални метод	Свеска и табла
15.час	Биномна расподела. Бернулијева шема	Практично смисаоно учење	Свеска и оловка;табла, рачунар
16.час	Биномна расподела. Бернулијева шема	Кооперативно учење	Папир и оловка
17.час	Прикупљање, сређивање и приказивање статистичких података	Вербални метод	Папир и оловка
18.час	Средња вредност	Практично смисаоно учење	Свеска и оловка;табла, рачунар
19.час	Дисперзија	Кооперативно учење	Папир и оловка
20.час	Средња вредност и дисперзија	Индивидуални рад	Свеска и табла
21.час	Вероватноћа и статистика-систематизација	Слагалица знања	Свеска и оловка;табла
22.час	Систематизација градива другог полугодишта	Слагалица знања	Свеска и оловка;табла

2. ПЛАН РАДА ЗА ЧЕТВРТИ РАЗРЕД ЕКОНОМСКЕ ШКОЛЕ (економски техничар)

ПОДРУЧЈЕ РАДА:	ЕКОНОМИЈА, ПРАВО И АДМИНИСТРАЦИЈА					
ОБРАЗОВНИ ПРОФИЛ:	ЕКОНОМСКИ ТЕХНИЧАР					
РАЗРЕД:	ЧЕТВРТИ					
ОДЕЉЕЊЕ:	ТРИ					
ПРЕДМЕТ:	МАТЕМАТИКА					
ГОДИШЊИ ФОНД ЧАСОВА:	ТЕОРИЈСКА НАСТАВА	ВЕЖБЕ	ПРАКТИЧНА НАСТАВА	БЛОК	ПРОФЕСИОНАЛНА ПРАКСА	УКУПНО
	100					100
РБ	ТЕМА	ЦИЉЕВИ				БРОЈ ЧАСОВА
1.	Реалне Функције	Обнављање и проширивање знања о функцијама				23
2.	Извод функције и његова примена	Стицање основних знања о изводима функција и примени извода				30
3.	Комбинаторика и вероватноћа	Стицање основних знања из комбинаторике и вероватноће				25
4.	Елементи финансијске математике	Стицање основних знања о финансијској математици				22
		укупно				100

ОПЕРАТИВНИ ПЛАН РАДА

ПЛАН ЗА ПОСТИЗАЊЕ ИСХОДА У ТЕМИ			
НАЗИВ ТЕМЕ: Функције			ТРАЈАЊЕ ТЕМЕ: 23
Изабрани исход / и: - обновити стечена знања о елементарним функцијама обновити и проширити знања о домену функције, нулама функције, знаку умети да испитају парност функције знати шта је сложена функција умети да нађу инверзну функцију схватити појам граничне вредности функције знати да нађу разне типове граничних вредности функције знати да одреде асимптоте функције			
ВРЕМЕ	АКТИВНОСТ УЧЕЊА	НАСТАВНИ МЕТОДИ	НАСТАВНИ МАТЕРИЈАЛИ / СРЕДСТВА
1. час	Основни појмови код функције	Вербални метод;презентација	Свеска и оловка;табла
2. час	Инверзна функција	Вербално рецептивно учење	Папир и оловка; табла
3. час	Инверзна функција	Индивидуални рад и презентација	Табла
4. час	Сложена функција	Вербални метод	Табла
5. час	Неке особине функције	Вербално рецептивно учење	Папир и оловка; табла
6. час	Неке особине функције	Индивидуални рад и презентација	Табла
7. час	Неке особине функције	Индивидуални рад и презентација	Табла
8.час	Неке особине функције-утврђивање	Питања и дискусија	Свеска и оловка;табла
9.час	Полиноми	Вербални метод;презентација	Свеска и оловка;табла
10.час	Гранична вредност функције	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
11.час	Лева и десна гранична вредност функције	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
12.час	Основне теореме о граничним вредностима функција	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
13.час	Четири важна лимеса, бесконачна гранична вредност	Вербални метод и презентација	Свеска и оловка;табла

14.час	Гранична вредност функције-утврђивање	Питања и дискусија	Свеска и оловка;табла
15.час	Гранична вредност функције-утврђивање	Питања и дискусија	Свеска и оловка;табла
16.час	Непрекидност функције .Асимптоте функција	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
17.час	Асимптоте функција	Индивидуални рад	Свеска и оловка;табла
18.час	Функције- утврђивање	Питања и кооперативно учење	Папир и табла
19.час	Функције- утврђивање	Слагалица знања	Табла
20.час	Припрема за писмени	Питања и одговори	Табла
21.час	Први писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
22.час	Први писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
23.час	Исправак првог писменог задатка	Интерактивно учење	Вежбанка и табла

ПЛАН ЗА ПОСТИЗАЊЕ ИСХОДА У ТЕМИ			
НАЗИВ ТЕМЕ: Извод функције			ТРАЈАЊЕ ТЕМЕ: 30
Изабрани исход / и: - упознати појам извода функције знати изводе елементарних функција умети да нађу извод сложене функције користити изводе функција у испитивању графика функције умети да цртају и испитују графике функција			
ВРЕМЕ	АКТИВНОСТ УЧЕЊА	НАСТАВНИ МЕТОДИ	НАСТАВНИ МАТЕРИЈАЛИ / СРЕДСТВА
1.час	Извод-дефиниција и основне особине	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
2.час	Геометријска интерпретација извода, бесконачан извод	Вербални метод;презентација	Свеска и оловка;табла
3.час	Таблица извода	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
4.час	Основне теореме о изводу	Вербално рецептивно учење	Папир и оловка; табла
5.час	Извод- утврђивање	Мозгалица и дискусија	Свеска и табла
6.час	Извод функције	Вербални метод	Табла
7.час	Извод функције	Индивидуални рад и презентација	Табла
8.час	Извод- утврђивање	Индивидуални рад и презентација	Табла
9.час	Извод сложене функције	Вербално рецептивно учење	Свеска и табла

10.час	Извод сложене функције	Кооперативно учење	Папир и табла
11.час	Извод инверзне функције	Вербално рецептивно учење	Свеска и табла
12.час	Други извод и извод вишег реда	Вербално рецептивно учење	Свеска и табла
13.час	Виши изводи функције	Вербално рецептивно учење	Свеска и табла
14.час	Монотоност и екстремне вредности функције	Вербални метод	Свеска и оловка
15.час	Монотоност и екстремне вредности функције	Кооперативно учење	Свеска и табла
16.час	Монотоност и екстремне вредности функције	Практично смисаоно учење	Папир и оловка
17.час	Конвексност и конкавност функције. Превојне тачке	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
18.час	Конвексност и конкавност функције. Превојне тачке	Кооперативно учење	Папир и оловка
19.час	Монотоност и конвексност функције- утврђивање	Групни рад и презентација	Наставни материјали и табла
20.час	Контролна вежба	Писани индивидуални рад	Папир и оловка
21.час	Примена извода на економске функције	Вербални метод	Свеска и оловка
22.час	Примена извода на економске функције	Индивидуални рад и презентација	Свеска и оловка;табла
23.час	Припрема за писмени	Питања и одговори	Табла
24.час	Други писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
25.час	Други писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
26.час	Исправак другог писменог задатка	Интерактивно учење	Вежбанка и табла
27.час	Примена извода на економске функције	Индивидуални рад и презентација	Свеска и оловка;табла
28.час	Примена извода на економске функције-понављање	Индивидуални рад и презентација	табла
29.час	Примена извода на економске функције-утврђивање	Индивидуални рад	табла
30.час	Контролна вежба	Писани индивидуални рад	Папир и оловка

ПЛАН ЗА ПОСТИЗАЊЕ ИСХОДА У ТЕМИ			
НАЗИВ ТЕМЕ: Комбинаторика и вероватноћа			ТРАЈАЊЕ ТЕМЕ: 25
Изабрани исход / и: - обновити знања из комбинаторике знати шта су пермутације, варијације, комбинације умети да решавају комбинаторне проблеме на више начина упознати биномну формулу - умети да примењује биномну формулу у задацима - упознати појам случајног догађаја и вероватноће знати шта је условна вероватноћа умети да нађе вероватноћу независних догађаја знати формулу тоталне вероватноће знати шта је случајна променљива знати шта је случајна променљива знати шта је популација и обележје знати шта је средња вредност			
ВРЕМЕ	АКТИВНОСТ УЧЕЊА	НАСТАВНИ МЕТОДИ	НАСТАВНИ МАТЕРИЈАЛИ / СРЕДСТВА
1.час	Комбинаторика - обнављање	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
2.час	Пермутације без понављања елемената	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
3.час	Варијације без понављања елемената	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
4.час	Комбинације са и без понављања елемената	Вербални метод	Папир и оловка; табла
5.час	Комбинаторика-утврђивање	Индивидуални рад	Свеска и оловка;табла
6.час	Случајни догађај	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
7.час	Појам вероватноће	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
8.час	Појам вероватноће	Вербални метод и дискусија	Свеска и оловка;табла
9.час	Условна вероватноћа, вероватноћа независних догађаја	Вербални метод	Папир и оловка; табла
10.час	Условна вероватноћа-вежбање	Кооперативно учење	Свеска и оловка;табла
11.час	Вероватноћа. Сложени догађаји	Вербални метод	Папир и оловка; табла
12.час	Бернулијева шема	Вербални метод	Папир и оловка; табла
13.час	Адициона теорема	Вербални метод	Папир и оловка; табла

14.час	Формула тоталне вероватноће	Вербални метод	Свеска и табла
15.час	Бајесова формула	Кооперативно учење	Свеска и оловка;табла
16.час	Контролна вежба	Писани метод	Папир и оловка; табла
17.час	Случајна променљива и њена расподела	Вербални метод	Папир и оловка
18. час	Нумеричке карактеристике случајних променљивих	Вербални метод	Папир и оловка; табла
19.час	Обележје. Статистичко обележје	Вербални метод	Папир и оловка; табла
20.час	Расподела обележја	Вербални метод	Папир и оловка; табла
21.час	Графичко приказивање и нумерација података	Вербални метод	Папир и оловка; табла
22.час	Средње вредности	Вербални метод	Папир и оловка; табла
23.час	Припрема за писмени	Питања и одговори	Табла
24.час	Трећи писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
25.час	Трећи писмени задатак	Писани метод	Вежбанка

ПЛАН ЗА ПОСТИЗАЊЕ ИСХОДА У ТЕМИ			
НАЗИВ ТЕМЕ: Елементи финансијске математике			ТРАЈАЊЕ ТЕМЕ: 22
Изабрани исход / и: Стицање знања о финансијској математици Упознати појам зајма Упознати појам амортизације и конверзије зајма			
ВРЕМЕ	АКТИВНОСТ УЧЕЊА	НАСТАВНИ МЕТОДИ	НАСТАВНИ МАТЕРИЈАЛИ / СРЕДСТВА
1.час	Зајмови који се отплаћују једнаким ануитетима	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
2.час	Зајмови који се отплаћују једнаким ануитетима-утврђивање	Индивидуални рад и презентација	Табла
3.час	Зајмови који се исплаћују заокруженим ануитетима	Вербални метод и дискусија	Свеска и оловка;табла
4.час	Зајмови који се амортизују једнаким отплатама	Кооперативно учење	Папир и оловка; табла
5.час	Зајмови који се амортизују једнаким отплатама	Индивидуални рад и презентација	Табла
6.час	Зајмови који се амортизују једнаким ануитетима који су чешћи од обрачуна камате	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
7.час	Зајмови који се амортизују једнаким ануитетима који су	Индивидуални рад и дискусија	Табла

	чешћи од обрачуна камате		
8.час	Амортизација зајмова подељена на обвезнице	Вербални метод	Свеска и оловка;табла
9.час	Амортизација зајмова подељена на обвезнице	Вербални метод и дискусија	Свеска и оловка;табла
10.час	Амортизација зајмова подељена на обвезнице	Индивидуални рад	Папир и оловка; табла
11.час	Конверзија зајма	Вербални метод	Свеска и табла
12.час	Конверзија зајма	Кооперативно учење	Папир и табла
13.час	Конверзија зајма	Питања и дискусија	Табла
14.час	Конверзија зајма	Питања и дискусија	Табла
15.час	Елементи финансијске математике	Вербални метод	Свеска и табла
16.час	Елементи финансијске математике	Питања и дискусија	Табла
17.час	Контролна вежба	Писани индивидуални рад	Папир и оловка
18.час	Припрема за писмени	Питања и одговори	Табла
19.час	Други писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
20.час	Други писмени задатак	Писани метод	Вежбанка
21.час	Исправак другог писменог задатка	Интерактивно учење	Вежбанка и табла
22.час	Закључивање оцене		

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Zorana Tomic

AU

Mentor: dr Dragoslav Herceg

MN

Naslov rada: Granicne vrednosti funkcija

MR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski i engleski

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2012.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku

Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 3

MA

Fizički opis rada: 6 poglavlja/93 strana/1 fotografija/33 grafika /18 literature/

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Metodika nastave matematike

ND

Ključne reči: Funkcije, granicne vrednosti nizova, granicne vrednosti funkcija

KR

Predmetna odrednica: Granicne vrednosti funkcija za cetvrti razred srednje ekonomske skole

PO

Čuva se: u Biblioteci Departmana za matematiku i informatiku

ČU

Važna napomena: /

VN

Izvod: U master radu se govori i granicnim vrednostima funkcija, prvenstveno uvodimo osnovne osobine funkcija, zatim govorimo o nizovima i njihovim granicnim vrednostima sto predstavlja uvod u granicnim vrednostima funkcija. Na kraju je metodicki obradjena tema „granicne vrednosti funkcija“ u srednjaoj ekonomskoj skoli.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 10.5.2012.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Đurđica Takači,

redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Zorana Lužanin,

redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Dragoslav Herceg,

redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monographic publication

DT

Type of record: Textual printed material

TR

Contents Code: Master thesis

CC

Author: Zorana Tomic

AU

Mentor: dr Dragoslav Herceg

MN

Title: Limit of a function

XI

Language of text: Serbian (Latinic)

LT

Language of abstract: Serbian and English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2012

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics,
Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3

PP

Physical description: 6 chapters/93 pages/1 photographs/33 graph/18 references

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Teaching methods in mathematics

SD

Key words: Functions, sets limit values, limit values of functions

KW

Holding data: Library of Department of Mathematics and Informatics

HD

Note: /

N

Abstract: In the master report deals with the limit values of functions, primarily introduce the basic properties of functions, then we talk about strings and their limit values as an introduction

to the limit values of functions. Finally, the issue methodically processed "limit values of functions" in the Secondary School of Economics.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 10.05.2012.

ASB

Defended:

DE

Thesis defense board:

DB

President: Dr Djurdjica Takaci,
Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Dr Zorana Lužanin,
Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Dr Dragoslav Herceg,
Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad