UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Zagorka Nestorović

O RAZNIM KLASAMA POVRŠI

-master rad-

Novi Sad, 2018.

Predgovor

Diferencijalna geometrija proučava svojstva krivih i površi koristeći analizu i linearnu algebru. U ovom radu, predmet istraživanja su različite klase površi (pravolinijske, rotacione i minimalne).

Rad se sastoji od četiri poglavlja. U prvom poglavlju su uvedeni osnovni pojmovi teorije krivih i površi koji su potrebni za dalje razumevanje izložene materije. U drugom poglavlju su izložene pravolinijske površi, kao i neke podklase linijskih površi. Nihova velika primena je u arhitekturi i građevinarstvu, pa su iz tog razloga interesantne za proučavanje. U trećem poglavlju definisane su rotacione površi, njihove geometrijske veličine i specijalan tip krivih koje se nalaze na njima-glavne krive. Pokazano je da su glavne krive baš meridijani i paralele. U četvrtom poglavlju razmatrane su minimalne površi. To je oblast koja je i danas interesantna jer postoji fizička ilustracija matematičkog problema minimalnih površi.

Zahvaljujem se svom mentoru, dr Sanji Konjik, na velikoj pomoći i stručnim savetima pri pisanju ovog rada, kao i na strpljenju i celokupnom zalaganju.

Takođe, zahvalnost dugujem članovima komisije dr Milici Žigić i dr Dušanu Zorici na stručnim savetima i sugestijama.

Veliku zahvalnost dugujem svojim roditeljima, sestrama, baki, deki i dragom Marjanu, za neizmernu podršku i razumevanje tokom čitavih studija.

Novi Sad, 2018. Zagorka Nestorović

Sadržaj

1 Osnovni pojmovi teorije krivih i površi

U uvodnom delu daćemo definiciju krive u $\mathbb{R}^n$. One se mogu definisati kao neprekidna preslikavanja iz intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^n$. Međutim za analitičko izučavanje krivih neprekidnost je isuviše slab uslov, jer tako definisane krive mogu da izgledaju dosta komplikovano i da imaju mnoge neočekivane osobine. Na primer, postoje neprekidne krive koje prekrivaju čitav kvadrat u ravni. Samim tim, prirodno je da uz uslov neprekidnosti imamo i uslov diferencijabilnosti. Dakle, dodatni uslov samo govori da krivu možemo linearno aproksimirati u datoj tački sa:

$$c(t) = c(t_0) + c'(t_0)(t - t_0).$$

Stoga, da bi ova linearna aproksimacija u tački $c(t_0)$ bila moguća, zahtevaćemo još da je $c'(t_0) \neq 0$.

Sada možemo definisati pojam regularne parametrizovane krive.

Definicija 1.1. *Regularna parametrizovana kriva je preslikavanje* $c\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *klase* C^1 *za koje važi* $\frac{dc}{dt} = c'(t) \neq 0, \forall t \in I$, *gde je* I *interval u* $\mathbb{R}$.

Definicija 1.2. *Kriva* $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ *je parametrizovana dužinom luka odnosno prirodno parametrizovana ako je* $\|c'(t)\| = 1, \forall t \in I$.

U ovom radu ćemo koristiti teoremu o inverznom preslikavanju pa ćemo navesti njenu formulaciju:

Teorema 1.3. *Neka je* U *otvoren podskup od* $\mathbb{R}^n$ *i* $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *klase* $C^\infty, x_0 \in U, y_0 \coloneqq f(x_0)$ *i* $Df(x_0)$ *invertibilno preslikavanje (tj.* $detDf(x_0) \neq 0$*). Tada je lokalno u okolini* x_0 *,* f *difeomorfizam, tj. postoji otvorena okolina* $U_1 \subseteq U$ *tačke* x_0 *i otvorena okolina* V_1 *tačke* y_0 *tako da je* $f\colon U_1 \longrightarrow V_1$ *bijekcija i* $f^{-1}\colon V_1 \longrightarrow U_1$ *je klase* C^∞.

Posmatrajmo sledeće parametrizacije:

$$\begin{aligned} c(t) &= (r\cos t\,, r\sin t), && t \in [0,2\pi], \\ \gamma(t) &= (r\cos(2t)\,, r\sin(2t)), && t \in [0,\pi], \\ \sigma(t) &= (r\cos(2t)\,, r\sin(2t)), && t \in [0,2\pi]. \end{aligned}$$

Date parametrizacije opisuju istu krivu: kružnicu u $\mathbb{R}^2$ sa centrom u $(0,0)$ poluprečnika $r > 0$.

Obzirom da naizgled različite parametrizacije mogu opisivati istu krivu, definišimo pojam reparametrizacije krive na sledeći način:

Definicija 1.4. *Neka su $\alpha: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i $\beta: (c, d) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferencijabilne krive. Kažemo da je β pozitivna reparametrizacija krive α ako postoji diferencijabilna funkcija $h: (c, d) \longrightarrow (a, b)$ takva da $h'(u) > 0$, za sve $c < u < d$ i $\beta = \alpha \circ h$.*

Slično, kriva β je negativna reparametrizacija krive α ako postoji diferencijabilna funkcija $h: (c, d) \longrightarrow (a, b)$ takva da $h'(u) < 0$, za sve $c < u < d$ i $\beta = \alpha \circ h$.

Kažemo da je β reparametrizacija krive α bez obzira na to da li je pozitivna ili negativna reparametrizacija krive α.

Primetimo, izvodi $c', c'', \dots, c^{(n-1)}$ imaju važnu ulogu u opisivanju krive c. Ako su dodatno oni linearno nezavisni u svakoj tački krive c, moći će da se formira n −okvir (tj. ortonormirana baza) koja će u potpunosti opisivati svojstva krive.

Definicija 1.5. *Neka je c regularna prirodno parametrizovana kriva u $\mathbb{R}^n$ klase C^n. Kriva c naziva se Freneova ako su vektori $c', c'', \dots, c^{(n-1)}$ linearno nezavisni u svakoj tački krive. Tada se krivoj c može pridružiti Freneov n −okvir $\{e_1(s), \dots, e_n(s)\}$, $s \in I$, koji je jedinstveno određen sledećim svojstvima:*

- *i)* $\{e_1(s), \dots, e_n(s)\}$ *formira ortonormiranu bazu koja je pozitivno orijentisana tj.* $det(e_1, \dots, e_n) > 0$.
- *ii)* $span\{c'(s), c''(s), \dots, c^{(k)}(s)\} = span\{e_1(s), \dots, e_k(s)\}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$
- *iii)* $\langle c^{(k)}(s), e_k(s)\rangle > 0$, $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\forall s$.

Nadalje, ćemo podrazumevati da vektori zavise od parametra s pa ćemo ga radi lakšeg zapisa izostavljati.

Konstrukcija Freneovog okvira krive se vrši sledećim Gram-Šmitovim postupkom:

$$e_1 = c'$$

$$e_2 = \frac{c''}{\|c''\|}$$

$$e_3 = \frac{c''' - \langle c''', e_1\rangle e_1 - \langle c''', e_2\rangle e_2}{\|c''' - \langle c''', e_1\rangle e_1 - \langle c''', e_2\rangle e_2\|}$$

$$\vdots$$

$$e_{n-1} = \frac{c^{(n-1)} - \sum_{i=1}^{n-2}\langle c^{n-1}, e_i\rangle e_i}{\left\|c^{(n-1)} - \sum_{i=1}^{n-2}\langle c^{n-1}, e_i\rangle e_i\right\|}.$$

Poslednji vektor e_n je jedinstveno određen u skladu s uslovom i) iz definicije.

Primetimo da je svaka regularna kriva klase C^3 u $\mathbb{R}^3$ Freneova ako važi $c'' \neq 0$ jer da bi kriva u ovom slučaju bila Freneova trebalo bi da c' i c'' budu linearno nezavisni. Međutim, kako je kriva prirodno parametrizovana imamo da je

$$\langle c', c'\rangle = 1,$$

pa diferenciranjem ove jednakosti dobijamo da je:

$$\langle c', c'' \rangle = 0.$$

Dakle, $0 \neq c'$ i c'' su ortogonalni, pa da bi bili linearno nezavisni, mora i $c'' \neq 0$, a to je baš ono što smo tvrdili.

Definicija 1.6. *Neka je c Freneova kriva u $\mathbb{R}^3$ (tj. važi $c'' \neq 0$). Funkcija krivine u oznaci $\kappa(s)$, regularne krive klase C^3 u $\mathbb{R}^3$ definiše se kao:*

$$\kappa(s) := \|c''(s)\|.$$

Krivina krive se geometrijski interpretira kao mera odstupanja krive u datoj tački od prave, tj. meri u svakoj tački koliko brzo tangentni vektor menja svoj pravac. Preciznije, ona predstavlja intenzitet brzine promene pravca tangentnog vektora.

Definicija 1.7. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Kažemo da je preslikavanje $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferencijabilno u tački $x \in U$ ako postoji linearno preslikavanje $A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ takvo da važi:*

$$f(x+\xi) = f(x) + A\xi + o(\|\xi\|), \qquad \|\xi\| \longrightarrow 0.$$

A se naziva Jakobijan funkcije f, tj. $A = \left(D_k f_i(x)\right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n} =: (Df)(x)$.
Rang preslikavanja f se definiše kao rang Jakobijana $(Df)(x)$.

Definicija 1.8. *Neka je skup $U \subseteq \mathbb{R}^k$ otvoren. Preslikavanje $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se naziva regularno ako je za svako $x \in U$ rang Jakobijana $Df(x)$ maksimalan tj. $rk\, Df(x) = min\{k, n\}$. Imamo $rkDf(x) = dim\big(Im\, Df(x)\big) = dim(\mathbb{R}^k) - dim(Ker\, Df(x))$. Tada:*

i) $k \leq n \Longrightarrow dim(Ker\, Df(x)) = 0 \Longrightarrow Df(x)$ *je injektivno i f se naziva imerzija*
ii) $k \geq n \Longrightarrow dim(Im\, Df(x)) = n \Longrightarrow Df(x)$ *je sirjektivno i f se naziva submerzija.*

Radi odgovarajućeg istraživanja teorije površi zahtevamo da površ nije data samo kao diferencijabilno preslikavanje dve promenljive, već više, zahtevamo geometrijsku linearizaciju u smislu da u svakoj tački površi postoji linearna površ (tj. ravan) koja dodiruje površ u toj tački. Stoga, prirodno je da zahtevamo da Jakobijan površi u svakoj tački ima maksimalan rang (tj. da je preslikavanje imerzija).

Definicija 1.9. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup. Parametrizovani površinski element je imerzija $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. f se naziva parametrizacija, elementi skupa U se nazivaju parametri, a njihove slike preslikavanjem f tačke.*

Ubuduće ćemo često govoriti umesto parametrizovani površinski element samo površ. Takođe, sliku površinskog elementa ćemo označavati sa $\mathcal{M}$.

Ako površinski element predstavimo u lokalnim (Dekartovim) koordinatama parametrizacija f je data sa:

$$f(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big).$$

Tada je

$$Df(u,v) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}(u,v) = (f_u\, f_v)(u,v),$$

pa pošto rang preslikavanja $Df(u,v)$ mora biti maskimalan jer je f imerzija sledi da su vektori f_u i f_v linearno nezavisni na U, jer se rang definiše kao maksimalan broj linearno nezavisnih kolona. Vektori f_u i f_v generišu tangentni prostor (tangentnu ravan) na površinski element f.

Uvodimo sledeće oznake za parametrizovani površinski element
$f: U \to \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren, $u \in U, p = f(u)$:

$\boldsymbol{T_u U}$ – tangentni prostor u u na U, $T_u U = \{u\} \times \mathbb{R}^2$ (tj. prostor svih vektora u $\mathbb{R}^2$ koji počinju u tački u)
$\boldsymbol{T_p \mathbb{R}^3}$ – tangentni prostor u p na $\mathbb{R}^3$, $T_p\mathbb{R}^3 = \{p\} \times \mathbb{R}^3$ (tj. prostor svih vektora u $\mathbb{R}^3$ koji počinju u tački p)

Definicija 1.10. *Tangentna ravan na površinski element f u tački $f(u)$ u oznaci $T_u f$ definiše se kao:*

$$T_u f := Df|_u(T_u U).$$

Elementi prostora $T_u f$ se nazivaju tangentni vektori.

Označimo sa $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Euklidski unutrašnji (skalarni) proizvod u $\mathbb{R}^3$ kao i u svakom tangentnom prostoru $T_p\mathbb{R}^3$, tj. koristićemo notaciju

$$\langle (p,\xi)(p,\eta)\rangle = \langle \xi, \eta\rangle,$$

gde su ξ i η vektori iz tangentnog prostora $T_p\mathbb{R}^3$ koji imaju početak u tački p. Često ćemo govoriti da su vektori ξ i η zakačeni za tačku p.

Sada možemo da definišemo prvu fundamentalnu formu u oznaci $|(\cdot,\cdot)$.

Definicija 1.11. *Prva fundamentalna forma površinskog elementa f je restrikcija $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (skalarnog proizvoda) na sve tangentne ravni $T_u f, u \in U$, tj.*

$$|(X,Y) := \langle X, Y\rangle, \;\; X, Y \in T_u f.$$

U datoj parametrizaciji prva fundamentalna forma se može posmatrati i kao simetrična bilinearna forma na $T_u U$, tj. kao preslikavanje

$$T_u U \times T_u U \ni (V,W) \longmapsto \langle Df|_u(V), Df|_u(W)\rangle.$$

Primetimo da smo za svaku tačku površi prvu fundamentalnu formu definisali na tangentnom prostoru (tangentnoj ravni) površi. Pokazaćemo da postoji jedinstvena matrica koja predstavlja prvu fundamentalnu formu u odnosu na standardnu bazu tangentnog prostora $T_u f$. Primetimo da komponente ove matrice zavise od tačke $f(u)$ na površi $\mathcal{M}$. Za bilo koju drugu tačku $f(u_1) \in \mathcal{M}$, gde $u_1 \in U$, prva fundamentalna forma je definisana na isti način ali je odgovarajuća matrica različita od prethodne. Predstavimo površinski element u lokalnim (Dekartovim) koordinatama kao:

$$f(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big).$$

Kako je f imerzija vektori f_u i f_v generišu tangentni prostor $T_u f$. Želimo da izrazimo unutrašnji (skalarni) proizvod $\mathrm{I}(\cdot,\cdot)$ u funkciji baze površi f. Neka su $X, Y \in T_u f$. Tada X i Y možemo izraziti pomoću baze prostora $T_u f$ tj.

$$X = a_1 f_u + a_2 f_v \text{ i } Y = b_1 f_u + b_2 f_v.$$

Računajući dobijamo:

$$\langle X, Y\rangle = a_1 b_1 \langle f_u, f_u\rangle + a_1 b_2 \langle f_u, f_v\rangle + a_2 b_1 \langle f_v, f_u\rangle + a_2 b_2 \langle f_v, f_v\rangle =$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{\langle f_u, f_u\rangle}_{E} + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \underbrace{\langle f_u, f_v\rangle}_{F} + a_2 b_2 \underbrace{\langle f_v, f_v\rangle}_{G}.$$

Dakle, dokazali smo sledeću lemu:

Lema 1.12. *Neka je* $\mathrm{I}(\cdot,\cdot)\colon T_u f \longrightarrow \mathbb{R}$ *prva fundamentalna forma u tački* $f(u) \in \mathcal{M}$. *Matrica opisana prvom fundamentalnom formom* $\mathrm{I}(\cdot,\cdot)$ *u odnosu na bazu* $\{f_u, f_v\}$ *je*

$$\big(g_{ij}\big) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathrm{I}(f_u, f_u) & \mathrm{I}(f_u, f_v) \\ \mathrm{I}(f_v, f_u) & \mathrm{I}(f_v, f_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f_u, f_u\rangle & \langle f_u, f_v\rangle \\ \langle f_v, f_u\rangle & \langle f_v, f_v\rangle \end{pmatrix}.$$

Primetimo, matrica je simetrična i pozitivno definitna.

Prva fundamentalna forma nam omogućava da računamo metričke osobine objekata na površi, kao npr. dužinu luka krive na površi, uglove između tangentnih vektora ili površine delova površi posmatrajući samu površ a ne prostor $\mathbb{R}^3$ u kom ona leži.

Neka je $\mathcal{M}$ regularna površ parametrizovana sa $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, gde je $U \subset \mathbb{R}^2$ otvoren. Posmatramo krivu na $\mathcal{M}$ datu sa $c(t) = f\big(u(t), v(t)\big)$, gde je $\gamma(t) = \big(u(t), v(t)\big)$ diferencijabilna parametrizovana ravanska kriva na domenu U. Koristeći formulu za dužinu luka krive na intervalu $[t_0, t]$:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(\tau)\| d\tau.$$

Računajući dobijamo:

$$c'(\tau) = f_u u' + f_v v',$$

gde su u' i v' izvodi po τ. Imamo da je:

$$\|c'\|^2 = \langle c', c'\rangle = \langle f_u u' + f_v v', f_u u' + f_v v'\rangle =$$

$$= \langle f_u, f_u\rangle u'^2 + 2\langle f_u, f_v\rangle u'v' + \langle f_v, f_v\rangle v'^2.$$

Konačno:

$$\|c'\| = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}.$$

Dakle, dužina luka krive c na intervalu $[t_0, t]$ je:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, d\tau.$$

Posmatrajmo sada dve ravanske krive $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ na U takve da prolaze kroz istu tačku tj. $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = q$. Označimo sa $\gamma = f \circ \alpha$ i $\delta = f \circ \beta$ odgovarajuće krive na regularnoj površi $\mathcal{M}$. Onda u tački $f(q) = p$ krive $\gamma(t)$ i $\delta(t)$ obrazuju ugao θ, takav da je

$$\cos\theta = \frac{\langle \gamma'(t_0), \delta'(t_0)\rangle}{\|\gamma'(t_0)\|\|\delta'(t_0)\|} = \frac{\mathrm{I}\big(\alpha'(t_0), \beta'(t_0)\big)}{\sqrt{\mathrm{I}\big(\alpha'(t_0), \alpha'(t_0)\big)}\sqrt{\mathrm{I}\big(\beta'(t_0), \beta'(t_0)\big)}}.$$

Kao što smo pomenuli, prva fundamentalna forma nam dozvoljava da računamo površinu određene oblasti na površi.

Lema 1.13. *Neka je $\mathcal{M}$ regularna parametrizovana površ u $\mathbb{R}^3$ i $f\colon U \longrightarrow \mathcal{M}$ njena parametrizacija. Neka je dat ograničen skup Q u U. Površina dela površi $f(Q)$ je data sa:*

$$A\big(f(Q)\big) = \iint_Q \sqrt{det\big(g_{ij}\big)}dudv.$$

Dokaz. Formula za površinu dela površi je:

$$A\big(f(Q)\big) = \iint_{f(Q)} dA = \iint_Q \|f_u \times f_v\| dudv.$$

Imamo da je:

$$det\big(g_{ij}\big) = \|f_u\|^2\|f_v\|^2 - \langle f_u, f_v\rangle^2 = \|f_u\|^2\|f_v\|^2(1-\cos^2\theta) =$$

$$= \|f_u\|^2\|f_v\|^2 \sin^2\theta = \|f_u \times f_v\|^2.$$

Korenovanjem prethodne jednakosti i uvrštavanjem u formulu za površinu dela površi dobijamo traženo.

■

Definicija 1.14. *Za površinski element $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Gausovo preslikavanje $\nu\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je definisano sa*

$$\nu := \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}.$$

Jedinični vektor normale $\nu(u)$ nije vektor sa početkom u tački $f(u)$ već je transliran tako da mu početak bude u koordinatnom početku.

Definicija 1.15. *Preslikavanje* $L := -D\nu \circ (Df)^{-1}$ *definisano sa*

$$L_u = -D\nu|_u \circ (Df|_u)^{-1}: T_u f \longrightarrow T_u f$$

naziva se Vajngartenovo preslikavanje ili shape operator od f.

Sledeća teorema obezbeđuje dobru definisanost Vajngartenovog preslikavanja.

Teorema 1.16. *Neka je* $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *površinski element sa Gausovim preslikavanjem* $\nu: U \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$

i) *Za svako* $u \in U$ *ravan koja je slika linearnog preslikavanja* $D\nu|_u: T_u U \longrightarrow T_{\nu(u)}\mathbb{R}^3$ *je paralelna sa tangentnom ravni* $T_u f$. *Na osnovu identifikacije* $T_{\nu(u)}\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \cong T_{f(u)}\mathbb{R}^3$ *se* $D\nu$ *u svakoj tački može posmatrati kao preslikavanje*

$$D\nu|_u: T_u U \longrightarrow T_u f$$

Takođe preslikavanje $Df|_u$ *je linearni izomorfizam* $Df|_u: T_u U \longrightarrow T_u f$ *sa inverznim preslikavanjem* $(Df|_u)^{-1}$ *koje je takođe izomorfizam.*

ii) *Za svako* $u \in U$, L_u *je linearni endomorfizam tangentne ravni u odgovarajućoj tački* $f(u)$.

iii) *L ne zavisi od parametrizacije (do na izbor znaka* ν*). Takođe L je samoadjungovani operator s obzirom na prvu fundamentalnu formu (tj. važi* $|(LX, Y) = |(X, LY), \ \forall X, Y \in T_u f$*)*

Definicija 1.17. *Neka su* $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3, \nu: U \longrightarrow S^2$ *i L kao u prethodnom tvrđenju. Tada za tangentne vektore X i Y (tj. za* $X, Y \in T_u f$*) definišemo*

i) *drugu fundamentalnu formu u oznaci* $||(\cdot,\cdot)$ *od* f *sa:*

$$||(X, Y) = |(LX, Y)$$

ii) *treću fundamentalnu formu u oznaci* $|||(\cdot,\cdot)$ *od* f *sa:*

$$|||(X, Y) = |(LX, LY) = (L^2 X, Y)$$

U narednoj lemi ćemo dati dva načina za izračunavanje druge fundamentalne forme kada je poznat površinski element $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i Gausovo preslikavanje $\nu: U \longrightarrow S^2$.

Lema 1.18. *Za površinski element* $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *i Gausovo preslikavanje* $\nu: U \longrightarrow S^2$ *važi:*

$$h_{ij} = -\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle = \left\langle \nu, \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle,$$

gde smo sa h_{ij} *označili elemente matrice druge fundamentalne forme.*

Dokaz. Kako svaki element iz prostora $T_u f$ može da se prikaže pomoću baznih vektora i kako je prema prethodnoj teoremi L linearno preslikavanje traženu jednakost je dovoljno pokazati za bazne vektore. Dakle, uzmimo da je $X = \frac{\partial f}{\partial u_i}$ i $Y = \frac{\partial f}{\partial u_j}$.
Dalje, imamo:

$$II\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j}\right) = I\left(L\frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j}\right) = \left\langle L\frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j}\right\rangle \overset{*}{=} \left\langle -\frac{\partial \nu}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j}\right\rangle \overset{**}{=}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial u_i}\underbrace{\left\langle \nu, \frac{\partial f}{\partial u_j}\right\rangle}_{=0} + \left\langle \nu, \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i}\right\rangle \overset{***}{=} \left\langle \nu, \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i}\right\rangle,$$

pri čemu smo u jednakosti:
$*$ koristili definiciju Vajngartenovog preslikavanja,
$**$ Lajbnicovo pravilo za skalarni proizvod vektora,
$***$ vektor normale ν je normalan na bazni vektor $\frac{\partial f}{\partial u_j}$, pa je njihov skalarni proizvod jednak nuli. ■

Slično se pokazuje da su elementi matrice treće fundamentalne forme jednaki:

$$e_{ij} = \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial u_i}, \frac{\partial \nu}{\partial u_j}\right\rangle$$

koristeći definiciju treće fundamentalne forme.

Sumirajući prethodno dokazano, imamo sledeću napomenu.

Napomena. U lokalnim koordinatama za fundamentalne forme imamo sledeće izraze:

I: $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j}\right\rangle$, (prva fundamentalna forma)

II: $h_{ij} = -\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j}\right\rangle = \left\langle \nu, \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}\right\rangle$, (druga fundamentalna forma)

III: $e_{ij} = \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial u_i}, \frac{\partial \nu}{\partial u_j}\right\rangle$, (treća fundamentalna forma)

za $i, j = 1,2$.

Kao što smo matricu prve fundamentalne forme označavali sa $(g_{ij}) := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, tako i matricu druge fundamentalne forme možemo zapisati kao:

$$(h_{ij}) := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

U sledećoj lemi ćemo pokazati kako izgledaju elementi matrice Vajngartenovog preslikavanja izračunati preko elemenata matrica prve i druge fundamentalne forme.

Lema 1.19. *Ako sa h_i^j označimo elemente matrice Vajngartenovog preslikavanja, tada važi:*

$$h_i^j = \sum\nolimits_k h_{ik} g^{kj},$$

gde smo sa h_{ik} označili elemente matrice druge fundamentalne forme, a sa g^{kj} elemente matrice inverzne matrici prve fundamentalne forme.

Dokaz. Kako je Vajngartenovo preslikavanje $L: T_u f \longrightarrow T_u f$, posmatraćemo kako preslikavanje L deluje na bazne elemente tangentnog prostora $T_u f$. Kako je slika preslikavanja L opet u $T_u f$ imamo:

$$L\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right) = \sum_{j=1}^{2} h_i^j \frac{\partial f}{\partial u_j},$$

Sada imamo:

$$h_{ik} = \left\langle L\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right), \frac{\partial f}{\partial u_k}\right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{2} h_i^j \frac{\partial f}{\partial u_j}, \frac{\partial f}{\partial u_k}\right\rangle = \sum_{j=1}^{2} h_i^j\, g_{jk}$$

pa pošto je matrica prve fundamentalne forme pozitivno definitna, imamo da je $\det(g_{jk}) \neq 0$, pa postoji njoj inverzna, odnosno dobijamo:

$$h_i^j = \sum\nolimits_k h_{ik} g^{kj}.$$

Ovde, (g^{kj}) označava inverznu matricu: $(g_{jk})^{-1}$, tj.

$$(g^{kj}) = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(g_{kj})}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}.$$

■

Definicija 1.20. *Neka je $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ površinski element, $u \in U$, $p = f(u)$ i neka je $X \in T_u f$. Posmatramo krivu c koja leži na površi f i čiji je tangentni vektor u p baš X tj. $\dot{c}(p) = X$. Tada definišemo normalnu krivinu κ_v krive c sa:*

$$\kappa_v = ||(X, X).$$

Definicija 1.21. *Neka je $X \in T_u f$ jedinični tangentni vektor, tj. $|(X, X) = 1$. X se naziva glavni pravac za f ako važi jedan od sledeća dva ekvivalentna uslova:*

i) $||(X, X)$ *(tj. normalna krivina κ_v u pravcu X) ima minimalnu ili maksimalnu vrednost među svim X sa osobinom $|(X, X) = 1$.*

ii) *X je sopstveni vektor Vajngartenovog preslikavanja L. Odgovarajuća sopstvena vrednost λ ($LX = \lambda X$) se naziva glavna krivina.*

Može se pokazati da su u prethodnoj definiciji uslov i) i ii) ekvivalentni.

Nadalje ćemo sopstvene vrednosti matrice Vajngartenovog preslikavanja (tj. glavne krivine) označavati sa κ_1 i κ_2.

Definicija 1.22.

i) *Determinanta* $K = det(L) = \kappa_1\kappa_2$ *se naziva Gausova krivina.*

ii) *Aritmetička sredina* $H = \frac{1}{2}Tr(L) = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}$ *se naziva srednja krivina.*

Posledica 1.23. *U lokalnim koordinatama imamo:*

$$K = \frac{det(||)}{det(|)} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{1}{2}(h_1^1 + h_2^2) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} h_{ij}g^{ji} = \frac{1}{2det(g_{ij})}(h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}),$$

tj.

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}.$$

U ovom poglavlju korišćene su reference: [2], [4] i [10].

2 Pravolinijske površi (Linijske površi)

Pravolinijske površi predstavljaju važnu klasu površi koje sadrže prave linije. Pravolinijska površ nastaje pomeranjem prave po nekoj krivoj. Ova vrsta površi, a posebno konoidne površi se jako često koriste u građevinarstvu i arhitekturi. Takođe, konoidne površi se koriste kao smele krovne konstrukcije. Uglavnom su se koristili tzv. *sawtooth roofs* ili naborani krovovi, za pokrivanje industrijskih hala. Ovi krovovi se formiraju povezivanjem istih elemenata na različite načine. Pružaju veliku količinu dnevne svetlosti koja prolazi kroz vertikalne površine stakala. Jednostavna proizvodnja i veoma bogat spektar oblika glavni su razlog primena ovih vrsta površi u krovnim i drugim konstrukcijama.

U ovom poglavlju analiziraćemo pravolinijske površi, neke njihove osobine i dati njihovu vizuelizaciju koristeći paket *Mathematica*. Kao podklasu pravolinijskih površi posmatraćemo i površi nulte Gausove krivine, poznate kao razvojne površi. Koristićemo reference: [1], [5], [8] i [9].

2.1 Definicija i klasifikacija

Definicija 2.1.1. *Pravolinijska površ $\mathcal{M}$ u $\mathbb{R}^3$ je površ koja sadrži bar jednu jednoparametarsku familiju pravih i parametrizovana je sa $f: U \longrightarrow \mathcal{M}$ tako da:*

$$f(u,v) = c(u) + vr(u),$$

gde su c i r krive u $\mathbb{R}^3$. Krivu c nazivamo direktrisom ili bazičnom krivom linijske površi, a krivu r generatrisom.

U definiciji iznad ćemo pretpostaviti da je c' uvek različito od nule, kako bismo imali regularnost krive c kao i da r nije identički jednaka nuli jer u tom slučaju uopšte nemamo površ.

Imamo da je $f_u = c'(u) + vr'(u)$ i $f_v = r(u)$
Primetimo, x je regularno ako i samo ako su $c'(u) + vr'(u)$ i $r(u)$ linearno nezavisni.

Definicija 2.1.2. *U slučaju kada pravolinijska površ ima dve različite parametrizacije ovog oblika, za datu površ kažemo da je dvostruko pravolinijska.*

Teorema 2.1.3. *Za Gausovu krivinu pravolinijske površi važi da je* $K \leq 0$.

Dokaz. Iz Posledice 1.23 imamo da je

$$K = \frac{det(||)}{det(|)} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Kako je za linijsku površ $N = h_{22} = \langle v, f_{vv} \rangle = 0$ jer je:

$$f_v = r(u), \qquad f_{vv} = 0,$$

a takođe važi $det(|) = \|f_u \times f_v\|^2 > 0$, sledi da je

$$K = \frac{det(||)}{det(|)} = \frac{-M^2}{det(|)} \leq 0 .$$

■

Definicija 2.1.4. *Razvojna površ je pravolinijska površ nulte Gausove krivine.*

Lema 2.1.5. *Površ je razvojna ako i samo ako je* $M = 0$. *(*$M = h_{12}$*)*

Dokaz. Direktna posledica prethodne teoreme:

$$K = \frac{-M^2}{EG-F^2} = 0 \text{ ako i samo ako } M = 0 .$$

Definicija 2.1.6. *Neka je* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ *površ. Onda:*

i) $\mathcal{M}$ *je tangentna razvojna površ krive* $c: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *ako* $\mathcal{M}$ *ima parametrizaciju*

$$f(u,v) = c(u) + vc'(u).$$

ii) $\mathcal{M}$ *je uopštena cilindrična površ nad krivom* $c: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *ako* $\mathcal{M}$ *ima parametrizaciju*

$$f(u,v) = c(u) + vq,$$

gde je $q \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ *fiksna tačka.*

iii) $\mathcal{M}$ *je uopštena konusna površ nad krivom* $c: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *ako* $\mathcal{M}$ *ima parametrizaciju*

$$f(u,v) = p + vc(u),$$

gde je $p \in \mathbb{R}^3$ *fiksna tačka. Tačka p je vrh konusa.*

Lema 2.1.7.
i) Neka je $c: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *regularna kriva čija je krivina* $\kappa \neq 0$ *svuda. Tangentna razvojna površ* f *krive* c *je regularna svuda osim duž krive* c.

ii) Uopštena cilindrična površ $f(u,v) = c(u) + vq$ *je regularna kad god je* $c' \times q \neq 0$.

iii) Uopštena konusna površ $f(u,v) = p + vc(u)$ *je regularna kad god je* $vc \times c' \neq 0$ *i nije nikada regularna u vrhu konusa.*

Dokaz. i) Za tangentnu razvojnu površ imamo:

$$f_u \times f_v(u,v) = (c' + vc'') \times c' = c' \times c' + vc'' \times c' = vc'' \times c'.$$

Kako je

$$0 \neq \kappa = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3}$$

(Vidi literaturu [5], teorema 7.15)

sledi da je $c' \times c'' \neq 0$. Dakle, površ je regularna kad je $v \neq 0$. Dakle ako je $v = 0$ imamo $f(u,v) = c(u)$ pa je površ regularna u svim tačkama osim duž krive c.

Ostale činjenice dokazujemo slično kao i).

■

Lema 2.1.8. *Ako je $\mathcal{M}$ tangentna razvojna površ, uopšteni cilindar ili uopšteni konus tada je $\mathcal{M}$ razvojna površ.*

Dokaz. Prema Lemi 2.1.5. ako pokažemo da je $M = 0$ u svakom od tri slučaja imaćemo da je površ razvojna.
Za tangentnu razvojnu površ imamo da je $f(u,v) = c(u) + vc'(u)$, pa je $f_u = c' + vc''$, $f_v = c'$ i $f_{uv} = c''$. Dalje dobijamo:

$$M = \langle \nu, f_{uv} \rangle = \left\langle \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}, f_{uv} \right\rangle = \frac{1}{\|f_u \times f_v\|} \langle f_u \times f_v, f_{uv} \rangle =$$
$$= \frac{1}{\|f_u \times f_v\|} [f_u \ f_v \ f_{uv}] = \frac{1}{\|f_u \times f_v\|} [c' + vc'' \ \ c' \ \ c''] = 0.$$

Za uopštenu cilindričnu površ imamo da je $f(u,v) = c(u) + vq$, pa je $f_u = c', f_v = q$ i $f_{uv} = 0$. Odatle imamo:

$$M = \langle \nu, f_{uv} \rangle = 0.$$

Za uopštenu konusnu površ imamo da je $f(u,v) = p + vc(u)$, pa je $f_u = vc',\ f_v = c$ i $f_{uv} = c'$. Odatle imamo:

$$M = \langle \nu, f_{uv} \rangle = \left\langle \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}, f_{uv} \right\rangle =$$
$$= \frac{1}{\|f_u \times f_v\|} \langle vc' \times c, c' \rangle = 0.$$

■

Lema 2.1.9. *Gausova krivina linijske površi $f(u,v) = c(u) + vr(u)$ je negativna akko su c', r i r' linearno nezavisni.*

Dokaz. U Teoremi 2.1.3. smo pokazali da je za linijske površi Gausova krivina $K \leq 0$. Ako pokažemo da je $K = 0$ ako i samo ako su c', r i r' linearno zavisni, imaćemo traženo.
U Lemi 2.1.5. smo videli da je $K = 0$ ako i samo ako je $h_{12} = 0$ tj. $M = 0$ odnosno kada imamo razvojnu površ. Dalje računamo h_{12}.

Kako je

$f_u \times f_v = (c' + vr') \times r = c' \times r + v(r' \times r)$ i $f_{uv} = r'$ sledi da je:

$$\begin{aligned} h_{12} = \langle \nu, f_{uv} \rangle &= \frac{1}{\|f_u \times f_v\|} \langle f_u \times f_v, f_{uv} \rangle = \\ &= \frac{1}{\|f_u \times f_v\|} \langle c' \times r + v(r' \times r), r' \rangle = \\ &= \frac{1}{\|f_u \times f_v\|} (\langle c' \times r, r' \rangle + \langle v(r' \times r), r' \rangle). \end{aligned}$$

Odatle je:

$$h_{12} = \frac{1}{\|f_u \times f_v\|} \langle c' \times r, r' \rangle.$$

Sada imamo da je $h_{12} = 0$ ako i samo ako $\langle c' \times r, r' \rangle = 0$ ako i samo ako je $\det(c', r, r') = 0$ ako i samo ako su c', r i r' komplanarni tj. linearno zavisni.

■

Primer 2.1.10. *Mebijusova traka, jednograni hiperboloid i hiperboloički paraboloid imaju Gausovu krivinu* $K < 0$.

Rešenje. Pokazali smo da za linijske površi važi: $K \leq 0$. Jednostavno se proverava da su Mebijusova traka, jednograni hiperboloid i hiperbolički paraboloid linijske površi, pa je dovoljno pokazati da je $K \neq 0$ pa ćemo imati traženo.

Iz prethodne leme imamo da je $K \neq 0$ ako i samo ako je $h_{12} \neq 0$ ako i samo ako je $\langle c' \times r, r' \rangle \neq 0$.

Mebijusova traka je parametrizovana sa:

$$moebiusstrip[a](u,v) = \left(a \cos u + v \cos\frac{u}{2} \cos u \,, a \sin u + v \cos\frac{u}{2} \sin u \,, v \sin\frac{u}{2}\right),$$

Za Mebijusovu traku imamo:

$c(u) = (a \cos u \,, a \sin u \,, 0)$, $r(u) = \left(\cos\frac{u}{2} \cos u \,, \cos\frac{u}{2} \sin u \,, \sin\frac{u}{2}\right)$, pa je

$c'(u) = (-a \sin u \,, a \cos u \,, 0)$,

$r'(u) = \left(-\frac{1}{2} \sin\frac{u}{2} \cos u - \cos\frac{u}{2} \sin u \,, -\frac{1}{2} \sin\frac{u}{2} \sin u + \cos\frac{u}{2} \cos u \,, \frac{1}{2} \cos\frac{u}{2}\right)$,

$c'(u) \times r(u) = \left(a \cos u \sin\frac{u}{2}, a \sin u \sin\frac{u}{2}, -a \cos\frac{u}{2}\right)$,

$\langle c'(u) \times r(u), r'(u) \rangle = -\frac{1}{2} a \neq 0.$

Odatle imamo da je za Mebijusovu traku važi $K < 0$.

Jednograni hiperboloid je definisan neparametarski sa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Pokazaćemo da je jednograni hiperboloid dvostruko-linijska površ nalazeći dve linijske parametrizacije. Fiksirajući $a, b, c > 0$ i definišući

$$hyperboloid[a, b, c]^{\pm}(u, v) = c(u) \pm vc'(u) + v(0,0, c),$$

gde je

$$c(u) = ellipse[a, b](u) = (a \cos u\,, b \sin u\,, 0)$$

standardna parametrizacija elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Lako se proverava da je

$$hyperboloid[a, b, c]^{\pm}(u, v) = (a(\cos u \mp v \sin u), b(\sin u \pm v \cos u), cv)$$

zaista parametrizacija hiperboloida.

Uzmimo $hyperboloid[a, b, c]^{+}(u, v) = (a(\cos u - v \sin u), b(\sin u + v \cos u), cv)$, pa imamo:

$c(u) = (a \cos u\,, b \sin u\,, 0),\ \ r(u) = (-a \sin u\,, b \cos u\,, c).$

Odatle je:

$c'(u) = (-a \sin u\,, b \cos u\,, 0), r'(u) = (-a \cos u\,, -b \sin u\,, 0),$

$c'(u) \times r(u) = (bc \cos u\,, ac \sin u\,, 0), \qquad \langle c'(u) \times r(u), r'(u)\rangle = -abc \neq 0.$

Sledi da je za jednograni hiperboloid Gausova krivina $K < 0$.

Hiperbolički paraboloid je definisan neparametarski sa

$$z = xy.$$

Možemo ga parametrizovati sa:

$$hparaboloid(u, v) = (u, 0,0) + v \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} (0,1, u).$$

Za hiperbolički paraboloid imamo:

$c(u) = (u, 0,0), \qquad r(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + u^2}} (0,1, u),$

$c'(u) = (1,0,0),$

$$r'(u) = \left(0, \frac{-u}{\sqrt{(1+u^2)^3}}, \frac{1}{\sqrt{(1+u^2)^3}}\right),$$

$$c'(u) \times r(u) = \left(0, \frac{-u}{\sqrt{1+u^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right),$$

$$\langle c'(u) \times r(u), r'(u) \rangle = \frac{1}{1+u^2} \neq 0.$$

Sledi da je za hiperbolički paraboloid $K < 0$.

■

2.2 Necilindrične pravolinijske površi

U ovom odeljku ćemo pokazati da ukoliko uvedemo dodatnu pretpostavku u definiciju linijskih površi, tj da je $r \times r'$ uvek različito od nule, gde je r generatrisa linijske površi, onda ćemo pravolinijsku površ moći da reparametrizujemo pomoću tzv. "*standardnih parametara*".

Definicija 2.2.1. *Pravolinijska površ parametrizovana sa* $f(u,v) = c(u) + vr(u)$ *je necilindrična ako je* $r \times r'$ *uvek različito od nule.*

Lema 2.2.2. *Neka je* $\tilde{f}$ *parametrizacija necilindrične pravolinijske površi oblika* $\tilde{f}(u,v) = c(u) + vr(u)$. *Tada* $\tilde{f}$ *ima reparametrizaciju oblika:*

$$f(u,v) = \sigma(u) + v\delta(u),$$

gde je $\|\delta\| = 1$ *i* $\langle \sigma', \delta' \rangle = 0$. *Krivu* σ *nazivamo strikcionom krivom od* $\tilde{f}$.

Dokaz. Pošto je $r \times r'$ uvek različito od nule, r je uvek različito od nule.

Definišimo reparametrizaciju $\tilde{\tilde{f}}$ od $\tilde{f}$ sa

$$\tilde{\tilde{f}}(u,v) = \tilde{f}\left(u, \frac{v}{\|r(u)\|}\right) = \beta(u) + \frac{vr(u)}{\|r(u)\|}.$$

Jasno, $\tilde{\tilde{f}}$ ima istu sliku kao $\tilde{f}$. Ako stavimo $\delta(u) = \frac{r(u)}{\|r(u)\|}$, onda

$$\tilde{\tilde{f}}(u,v) = \beta(u) + v\delta(u).$$

Štaviše, $\|\delta(u)\| = 1$ i odatle je $\langle \delta(u), \delta'(u) \rangle = 0$.
Dalje, trebalo bi da nađemo krivu σ takvu da $\langle \sigma'(u), \delta'(u) \rangle = 0$. Predstavimo krivu σ u obliku :

$$\sigma(u) = \beta(u) + t(u)\delta(u)$$

za neku funkciju $t = t(u)$ koju ćemo naći u nastavku. Diferenciranjem prethodne jednakosti dobijamo:

$$\sigma'(u) = \beta'(u) + t'(u)\delta(u) + t(u)\delta'(u).$$

Pošto je $\langle \delta(u), \delta'(u) \rangle = 0$, sledi da je

$$\langle \sigma'(u), \delta'(u) \rangle = \langle \beta'(u), \delta'(u) \rangle + t(u)\langle \delta'(u), \delta'(u) \rangle.$$

Kako se $r \times r'$ nikada ne anulira, r i r' su uvek linearno nezavisni, pa imamo da je δ' uvek različito od nule. Odatle, ako definišemo t sa

$$t(u) = -\frac{\langle \beta'(u), \delta'(u) \rangle}{\|\delta'(u)\|^2},$$

dobijamo: $\langle \sigma'(u), \delta'(u) \rangle = 0$. Sada definišimo:

$$f(u,v) = \tilde{\tilde{f}}(u, t(u) + v).$$

Onda je $f(u,v) = \beta(u) + (t(u) + v)\delta(u) = \sigma(u) + v\delta(u)$, pa $f, \tilde{f}$ i $\tilde{\tilde{f}}$ opisuju istu krivu i f zadovoljava uslov teoreme.

■

Lema 2.2.3. *Strikciona kriva necilindrične pravolinijske površi f ne zavisi od izbora bazične krive linijske površi.*

Dokaz. Neka su β i β' dve bazične krive za f. Ako uzmemo notaciju iz prethodnog dokaza, zaključujemo:

$$\beta(u) + v\delta(u) = \tilde{\beta}(u) + w(v)\delta(u),$$

za neku funkciju $w = w(v)$. Neka su σ i $\tilde{\sigma}$ odgovarajuće strikcione krive. Onda:

$$\sigma(u) = \beta(u) - \frac{\langle \beta'(u), \delta'(u) \rangle}{\|\delta'(u)\|^2}\delta(u)$$

i

$$\tilde{\sigma}(u) = \tilde{\beta}(u) - \frac{\langle \tilde{\beta}'(u), \delta'(u) \rangle}{\|\delta'(u)\|^2}\delta(u),$$

pa je

$$\sigma - \tilde{\sigma} = \beta - \tilde{\beta} - \frac{\langle \beta' - \tilde{\beta}', \delta' \rangle}{\|\delta'\|^2}\delta.$$

S druge strane, iz prve jednakosti sledi da: $\beta - \tilde{\beta} = (w(v) - v)\delta$. Diferenciranjem poslednje jednakosti dobijamo: $\beta' - \tilde{\beta}' = (w(v) - v)\delta'$.
Rezultat sledi.

■

Definicija 2.2.4. *Neka je f necilindrična linijska površ data kao u Lemi 2.2.2. Onda je parametar distribucije od f funkcija $p = p(u)$ definisana sa:*

$$p = \frac{[\sigma' \ \delta \ \delta']}{\langle \delta', \delta' \rangle}.$$

Lema 2.2.5. *Neka je $\mathcal{M}$ necilindrična linijska površ, parametrizovana sa površinskim elementom f oblika kao u Lemi 2.2.2. Onda je f regularno kad god je $v \neq 0$, ili kada je $v = 0$ i $p(u) \neq 0$. Stoga, Gausova krivina od f je data u funkciji od parametra distribucije sa:*

$$K = \frac{-p(u)^2}{(p(u)^2 + v^2)^2}.$$

Takođe,

$$\mathrm{E} = \|\sigma'\|^2 + v^2\|\delta'\|^2, \qquad F = \langle \sigma', \delta \rangle, \qquad G = 1,$$

$$N = 0, \qquad M = \frac{p\|\delta'\|}{\sqrt{p^2 + v^2}}.$$

Dokaz. Prvo, primetimo da su vektori: i $\sigma' \times \delta$ i δ' normalni na δ i na σ'. Stoga, $\sigma' \times \delta$ je kolinearno sa δ', pa mora biti jednako nekom umnošku od δ'. Takođe, imamo:

$$\sigma' \times \delta = p\delta'$$

gde je

$$p = \frac{[\sigma' \; \delta \; \delta']}{\langle \delta', \delta' \rangle}.$$

Pošto je $f_u = \sigma' + v\delta'$ i $f_v = \delta$, imamo:

$$f_u \times f_v = p\delta' + v\delta' \times \delta,$$

pa je:

$$\|f_u \times f_v\|^2 = \|p\delta'\|^2 + \|v\delta' \times \delta\|^2 = (p^2 + v^2)\|\delta'\|^2.$$

Sada je jasno da je regularnost od f utvrđena.
Dalje, $f_{uv} = \delta'$ i $f_{vv} = 0$, pa je $N = \langle \nu, f_{vv} \rangle = 0$ i

$$M = \langle \nu, f_{uv} \rangle = \frac{1}{\|f_u \times f_v\|}\langle f_u \times f_v, f_{uv} \rangle = \frac{\langle p\delta', \delta' \rangle + v\langle \delta' \times \delta, \delta' \rangle}{\sqrt{p^2 + v^2}\|\delta'\|} =$$

$$= \frac{p\|\delta'\|^2 + v\|\delta' \times \delta\|\|\delta'\| \cos 90^\circ}{\sqrt{p^2 + v^2}\|\delta'\|} = \frac{p\|\delta'\|}{\sqrt{p^2 + v^2}}.$$

Konačno dobijamo Gausovu krivinu:

$$K = \frac{-M^2}{\|f_u \times f_v\|^2} = \frac{-p^2}{(p^2 + v^2)^2}.$$

2.3 Primeri pravolinijskih površi

Helikoidna površ je parametrizovana sa:

$$helicoid[a,b](u,v) = (av\cos u\,, av\sin u\,, bu).$$

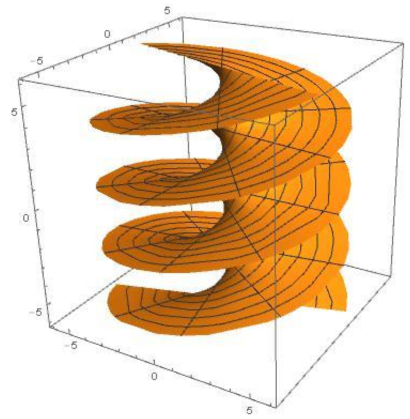
Ukoliko definiciju zapišemo u obliku:

$$helicoid[a,b](u,v) = c(u) + vr(u),$$

gde je

$$c(u) = (0,0,bu), \qquad r(u) = a(\cos u\,, \sin u\,, 0),$$

zaključujemo da je $c' \neq 0$ i $r \neq 0$, pa je helikoid pravolinijska površ čija je bazična kriva z −osa, a generatrisa je krug.



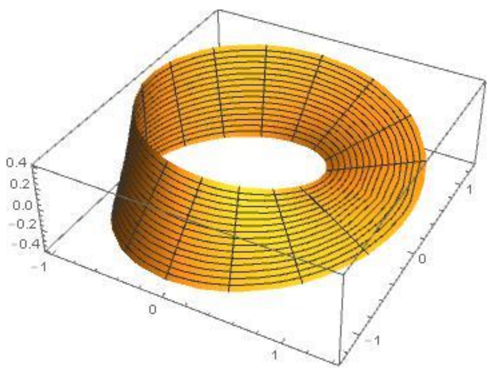
Mebijusovu traku možemo parametrizovati sa:

$$moebiusstrip[a](u,v) = c(u) + vr(u),$$

gde

$$c(u) = a(\cos u\,, \sin u\,, 0), \qquad r(u) = \left(\cos\frac{u}{2}\cos u\,, \cos\frac{u}{2}\sin u\,, \sin\frac{u}{2}\right).$$

U ovom primeru, bazična kriva linijske površi je krug, a generatrisa je kriva koja leži na jediničnoj sferi.



Jednograni hiperboloid je definisan neparametarski sa:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Predstavlja dvostruku pravolinijsku površ, pošto može biti parametrizovan na dva načina:

$$x^{\pm}(u,v)=t(u)\pm vt'(u)+v(0,0,c),$$

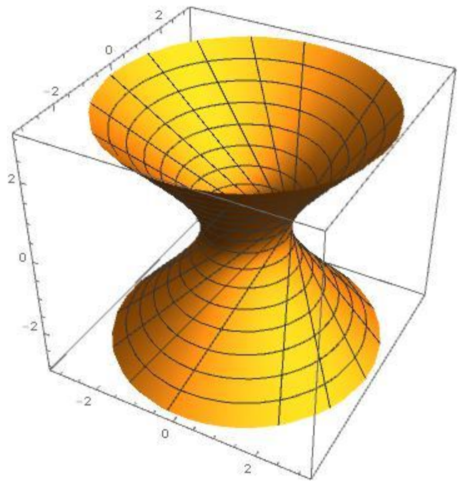
gde je

$$t(u)=ellipse[a,b](u)=(a\cos u\,,b\sin u\,,0)$$

standardna parametrizacija elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

u xy −ravni.

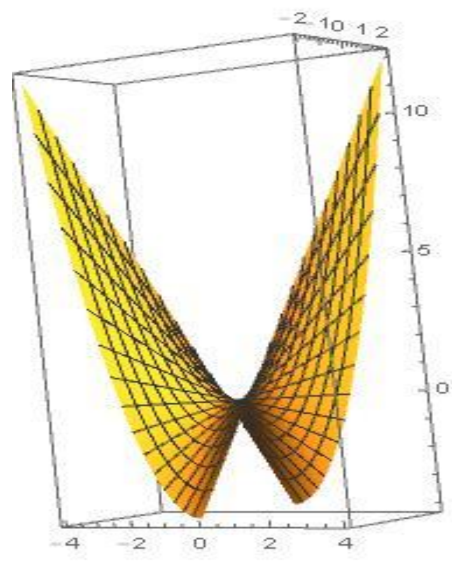


Hiperbolički paraboloid je neparametarski definisan sa:

$$z=\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}.$$

Predstavlja dvostruku pravolinijsku površ, pošto može biti parametrizovan na dva načina:

$$x^{\pm}(u,v)=(au,0,u^2)+v(a,\pm b,2u)=(a(u+v),\pm bv,u^2+2uv).$$

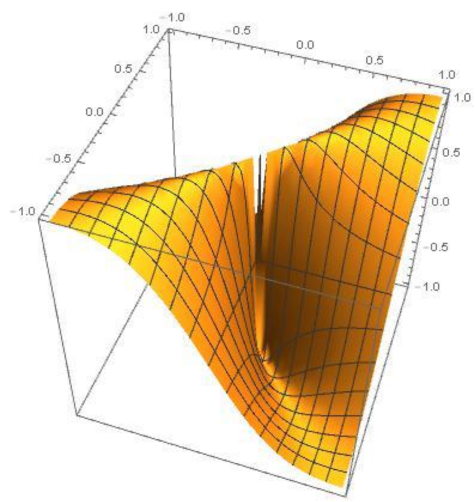


Plikerov konoid je neparametarski definisan sa:

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

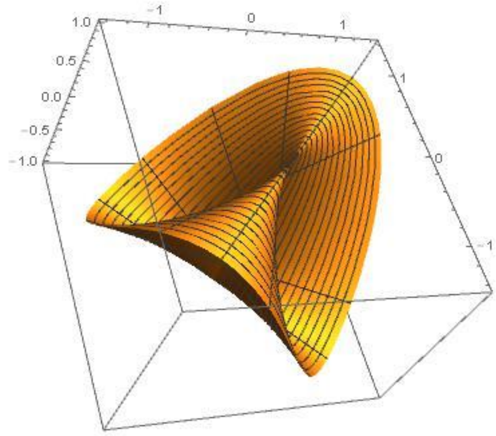
Možemo ga parametrizovati sa:

$$pluecker(u, v) = \left(u, v, \frac{2uv}{u^2 + v^2}\right).$$



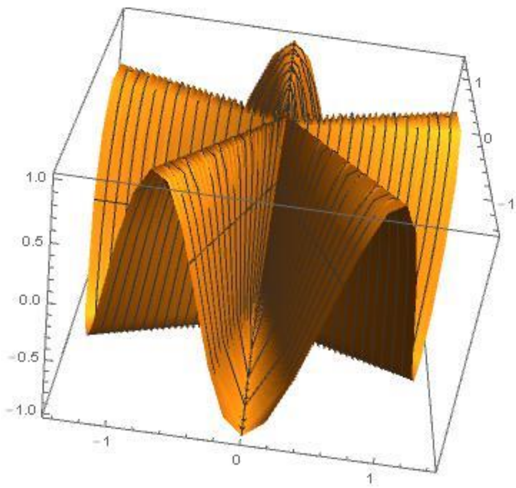
Ovom parametrizacijom paket *Mathematica* ne prikazuje ovu površ kao pravolinijsku. To se postiže uvođenjem polarnih koordinata:

$$pluecker polar(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \sin 2\theta) = (0,0,\sin 2\theta) + r(\cos\theta, \sin\theta, 0).$$



Poslednja jednačina pokazuje da je z −osa bazična kriva, a krug je generatrisa. Sada je lako definisati uopštenje Plikerovog konoida koji ima n nabora:

$$plueckerpolar[n](r,\theta) = (r\cos\theta\,, r\sin\theta\,, \sin n\theta).$$



3 Rotacione površi

Rotacione površi formiraju najlakše prepoznatljivu klasu površi. Rotaciona površ se dobija rotiranjem ravanske krive oko ose u $\mathbb{R}^3$. Veoma često se koriste u arhitekturi jer doprinose zanimljivosti forme i poigravanju istom. U ovom poglavlju koristićemo reference: [5], [7] i [10].

3.1 Definicija i geometrijske veličine

Definicija 3.1.1. *Neka je $\Pi -$ ravan u $\mathbb{R}^3$, $a -$ prava u ravni Π, a $c -$ kriva u Π. Kada se c rotira u $\mathbb{R}^3$ oko prave a rezultujući skup tačaka $\mathcal{M}$ se naziva rotaciona površ generisana sa c. c se naziva profilna kriva površi $\mathcal{M}$, dok je prava a osa rotacije za $\mathcal{M}$.*

Zbog pogodnosti biramo $xz-$ ravan za Π, a z-osu za a. Za tačke skupa c možemo pretpostaviti da imaju parametrizaciju $\alpha: (a,b) \longrightarrow c$, koja je diferencijabilna. Pišemo $\alpha = (\varphi, \psi)$.

Definicija 3.1.2. *Površinski element $f[\alpha]: (0,2\pi) \times (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definisan sa*

$$f[\alpha](u,v) = \big(\varphi(v)\, cos\, u\,, \varphi(v)\, sin\, u\,, \psi(v)\big)$$

naziva se standardna parametrizacija rotacione površi $\mathcal{M}$.

Uzmimo da u leži u otvorenom intervalu $(0,2\pi)$ i često pretpostavljamo da je $\varphi(v) > 0$ kako bismo bili sigurni da profilna kriva ne prelazi osu rotacije.

Definicija 3.1.3. *Neka je c skup tačaka u ravni $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ i neka je $\mathcal{M}$ rotaciona površ u $\mathbb{R}^3$ generisana rotacijom skupa c oko prave $a \subset \Pi$. Presek proizvoljne ravni koja sadrži osu rotacione površi $\mathcal{M}$ i površi $\mathcal{M}$ naziva se meridijan na $\mathcal{M}$. Paralela na $\mathcal{M}$ je presek proizvoljne ravni normalne na osu rotacione površi $\mathcal{M}$ i površi $\mathcal{M}$.*

Za površ parametrizovanu kao u Definiciji 3.1.2. paralele su

$$u \longmapsto f[\alpha](u,v_0) = \big(\varphi(v_0)\cos u\,, \varphi(v_0)\sin u\,, \psi(v_0)\big),$$

a meridijani su

$$v \longmapsto f[\alpha](u_0,v) = \big(\varphi(v)\cos u_0\,, \varphi(v)\sin u_0\,, \psi(v)\big).$$

Teorema 3.1.4. *Neka je $\mathcal{M}$ rotaciona površ sa profilnom krivom $\alpha = (\varphi, \psi)$. Neka je $f[\alpha]$ standardna parametrizacija od $\mathcal{M}$. Tada važi:*

$$E = \varphi^2, \qquad F = 0, \qquad G = \varphi'^2 + \psi'^2.$$

Preslikavanje $f[\alpha]$ je regularno kad god su $\varphi^2 \neq 0$ i $\varphi'^2 + \psi'^2 \neq 0$. U tom slučaju:

$$L = \frac{-|\varphi|\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \qquad M = 0, \qquad N = \frac{sign(\varphi)(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}},$$

a jedinična normala na površ je data sa:

$$\nu(u,v) = \frac{sign(\varphi)}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}(\psi' \cos u, \psi' \sin u, -\varphi').$$

Dokaz.

Kako je rotaciona površ $\mathcal{M}$ data standardnom parametrizacijom, imamo da je

$$f[\alpha](u,v) = \big(\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(v)\big).$$

Radi lakšeg zapisa označimo sa $f \coloneqq f[\alpha]$. Dobijamo:

$f_u(u,v) = (-\varphi(v)\sin u, \varphi(v)\cos u, 0)$, $\quad f_v(u,v) = \big(\varphi'(v)\cos u, \varphi'(v)\sin u, \psi'(v)\big)$,

$f_{uu}(u,v) = (-\varphi(v)\cos u, -\varphi(v)\sin u, 0)$,

$f_{uv}(u,v) = (-\varphi'(v)\sin u, \varphi'(v)\cos u, 0)$,

$f_{vv}(u,v) = \big(\varphi''(v)\cos u, \varphi''(v)\sin u, \psi''(v)\big)$

$$\nu = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|} = \frac{1}{|\varphi|\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}\varphi(\psi'\cos u, \psi' \sin u, -\varphi') =$$

$$= \frac{sign(\varphi)}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}(\psi'\cos u, \psi' \sin u, -\varphi')$$

$E = \langle f_u, f_u\rangle = \varphi^2$, $\quad F = \langle f_u, f_v\rangle = 0$, $\quad G = \langle f_v, f_v\rangle = \varphi'^2 + \psi'^2$,

$L = \langle \nu, f_{uu}\rangle = \dfrac{-|\varphi|\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}$, $\quad M = \langle \nu, f_{uv}\rangle = 0$,

$N = \langle \nu, f_{vv}\rangle = \dfrac{sign(\varphi)(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}$.

Takođe, primetimo da je preslikavanje f regularno kada je:

$f_u \times f_v \neq \vec{0}$, tj. kada je $\|f_u \times f_v\| \neq 0$, odnosno kada važi: $\varphi^2 \neq 0$ i $\varphi'^2 + \psi'^2 \neq 0$.

■

Teorema 3.1.5. *Glavne krivine rotacione površi parametrizovane standardnom parametrizacijom su:*

$$\kappa_1 = \frac{-\psi'}{|\varphi|\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}},$$

$$\kappa_2 = \frac{sign(\varphi)(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{\left(\varphi'^2 + \psi'^2\right)^{3/2}}.$$

Gausova krivina je data sa:

$$K = \frac{-\psi'^2\varphi'' + \varphi'\psi'\psi''}{\varphi\left(\varphi'^2 + \psi'^2\right)^2},$$

dok je srednja krivina data sa:

$$H = \frac{\varphi(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'') - \psi'\left(\varphi'^2 + \psi'^2\right)}{2|\varphi|\left(\varphi'^2 + \psi'^2\right)^{3/2}}.$$

Dokaz.

Da bismo izračunali glavne krivine rotacione površi potrebno je da nađemo matricu Vajngartenovog preslikavanja L.

$L = \left(h_{ij}\right)\left(g_{ij}\right)^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-|\varphi|\psi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}} & 0 \\ 0 & \frac{sign(\varphi)(\varphi''\psi'-\varphi'\psi'')}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'^2 + \psi'^2 & 0 \\ 0 & \varphi^2 \end{pmatrix} \frac{1}{\varphi^2\left(\varphi'^2+\psi'^2\right)} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-\psi'}{|\varphi|\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}} & 0 \\ 0 & \frac{sign(\varphi)(\varphi''\psi'-\varphi'\psi'')}{\left(\varphi'^2+\psi'^2\right)^{3/2}} \end{pmatrix},$$

pa su glavne krivine:

$$\kappa_1 = \frac{-\psi'}{|\varphi|\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \qquad \kappa_2 = \frac{sign(\varphi)(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{\left(\varphi'^2 + \psi'^2\right)^{3/2}}.$$

Gausova krivina je:

$$K = det(L) = \kappa_1\kappa_2 = \frac{-\psi'^2\varphi'' + \varphi'\psi'\psi''}{\varphi\left(\varphi'^2 + \psi'^2\right)^2}.$$

Srednja krivina je:

$$H = \frac{1}{2}Tr(L) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{\varphi(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'') - \psi'\left(\varphi'^2 + \psi'^2\right)}{2|\varphi|\left(\varphi'^2 + \psi'^2\right)^{3/2}}.$$

■

3.2 Glavne krive

U ovom odeljku načinićemo prvi korak u proučavanju krivih koje leže na površi. Definisaćemo pojam “glavna kriva” i pokazati da su paralele i meridijani glavne krive, koje su tangentne na pravce koji su definisani pomoću glavnih krivina.
Radi jednostavnosti, posmatraćemo samo orijentabilne površi. Za takvu površ $\mathcal{M}$, odabraćemo globalno definisan jedinični vektor normale ν.

Definicija 3.2.1. *Glavna kriva na $\mathcal{M}$ je kriva čiji trag leži na $\mathcal{M}$ i čiji je tangentni vektor svugde glavni.*

Primetimo, kriva c na regularnoj površi $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ naziva se glavna kriva ako i samo ako c' ima za pravac glavni pravac. Stoga,

$$Lc' = \kappa_i c',$$

gde L predstavlja shape operator (tj. Vajngartenovo preslikavanje) površi $\mathcal{M}$ u odnosu na ν, a κ_i $(i = 1$ ili $2)$ je glavna krivina površi $\mathcal{M}$.

Sledeća lema daje potreban i dovoljan uslov da tangentni vektor bude glavni.

Lema 3.2.2. *Nenula tangentni vektor v_p na regularnu površ $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ je glavni ako i samo ako*

$$Lv_p \times v_p = 0.$$

Stoga, kriva c na površi $\mathcal{M}$ je glavna kriva ako i samo ako $Lc' \times c' = 0$.

Dokaz. Ako $Lv_p = \kappa_i v_p$, onda $Lv_p \times v_p = \kappa_i v_p \times v_p = 0$. Suprotno, ako je $Lv_p \times v_p = 0$, onda su Lv_p i v_p linearno zavisni, pa postoji κ_i tako da je $Lv_p = \kappa_i v_p$.
Iz prethodne definicije i do sada pokazanog sledi da je kriva c glavna ako i samo ako je $Lc' \times c' = 0$.

∎

Sledeća teorema obezbeđuje jednostavan, ali koristan kriterijum koji govori kada je kriva koja je presek dve površi glavna kriva na obe.

Teorema 3.2.3. *Neka je c kriva čiji trag leži u preseku regularnih površi $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathbb{R}^3$. Označimo sa ν_i jedinični vektor normale na $\mathcal{M}_i, i = 1,2$. Pretpostavimo da se duž krive c površi $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ seku pod konstantnim uglom, tj. $\langle \nu_1, \nu_2 \rangle$ je konstantno duž c. Tada, c je glavna kriva na $\mathcal{M}_1$ akko je glavna kriva na $\mathcal{M}_2$.*

Dokaz. Duž presečne krive imamo:

$$0 = \frac{d}{ds}\langle \nu_1, \nu_2 \rangle = \left\langle \frac{d}{ds}\nu_1, \nu_2 \right\rangle + \left\langle \nu_1, \frac{d}{ds}\nu_2 \right\rangle.$$

Pretpostavimo da je presečna kriva c glavna kriva na $\mathcal{M}_1$. Onda:

$$\frac{d}{ds}\nu_1 = -\kappa_1 c',$$

gde je κ_1 glavna krivina na $\mathcal{M}_1$. Kako je c' ortogonalno i na ν_2, imamo da je $\langle c', \nu_2 \rangle = 0$, pa iz prethodnog zaključujemo da je

$$\left\langle \nu_1, \frac{d}{ds}\nu_2 \right\rangle = 0.$$

Diferenciranjem jednakosti $\langle \nu_2, \nu_2 \rangle = 1$, dobijamo da je $\frac{d}{ds}\nu_2$ takođe ortogonalno na ν_2. Zaključujemo da je vektor $\frac{d}{ds}\nu_2$ kolinearan sa c' pa je:

$$\frac{d}{ds}\nu_2 = -\kappa_2 c',$$

za neko κ_2. Drugim rečima, c je glavna kriva na $\mathcal{M}_2$.

■

Važnom primenom prethodne teoreme nalazimo glavne krive na rotacionoj površi.

Teorema 3.2.4. *Pretpostavimo da je rotaciona površ $\mathcal{M}$ generisana ravanskom krivom c regularna površ. Onda su meridijani i paralele na $\mathcal{M}$ glavne krive.*

Dokaz. Svaki meridijan se nalazi u preseku površi $\mathcal{M}$ i ravni Π_m koja sadrži osu rotacije površi $\mathcal{M}$. Za tačku $p \in \mathcal{M} \cap \Pi_m$ jasno je da normala $\nu(p)$ površi $\mathcal{M}$ leži u Π_m. Stoga, $\nu(p)$ i jedinična normala površi Π_m su ortogonalne. Primenjujući prethodnu teoremu dobijamo da su meridijani glavne krive površi $\mathcal{M}$.

Dalje, neka je Π_p ravan ortogonalna na osu rotacije površi $\mathcal{M}$. Rotacionom simetrijom jedinični vektor normale ν površi $\mathcal{M}$ zaklapa konstantan ugao sa jediničnom normalom ravni Π_p. Opet, primenjujući prethodnu teoremu dobijamo da su paralele glavne krive .

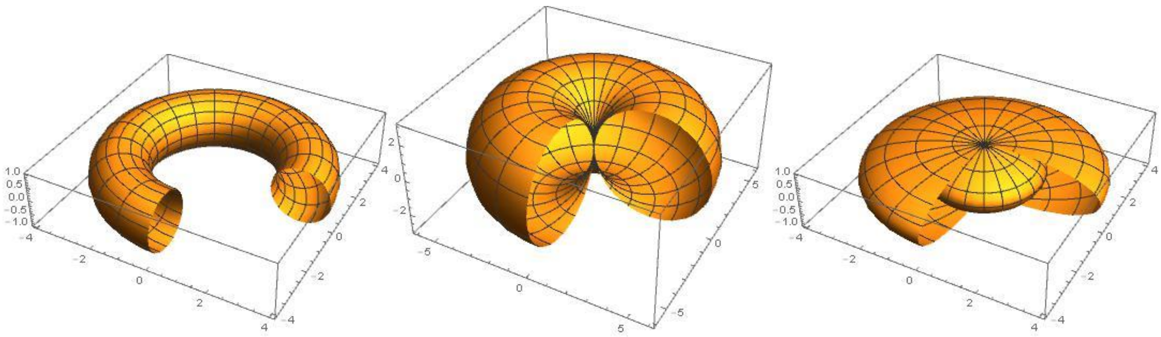
■

3.3 Primeri rotacionih površi

Torus je rotaciona površ koja se dobija rotacijom kružnice u trodimenzionalnom prostoru oko ose komplanarne sa kružnicom. Ako osa rotacije ne dodiruje kružnicu površ ima oblik prstena i naziva se prstenasti torus ili samo torus. U slučaju da je osa rotacije tangenta kružnice dobijena površ se naziva rog torus, a kada za osu rotacije uzmemo tetivu kružnice rezultujuća površ je vretenasti torus.
Kao takva površ torus ima "rupu". Ako označimo sa c radijus od centra "rupe" do centra torusa, a sa a radijus torusa dolazimo do njegove parametrizacije:

$$torus[a,c]\colon [0,2\pi) \times [0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$torus[a,c](\mathrm{u},\mathrm{v}) = \big((c + a\cos v)\cos u\,, (c + a\cos v)\sin u\,, a\sin v\big).$$



Koeficijenti prve fundamentalne forme su:

$$E = (c + a\cos v)^2, \qquad F = 0, \qquad G = a^2,$$

dok su koeficijenti druge fundamentalne forme:

$$L = -(c + a\cos v)\cos v, \qquad M = 0, \qquad N = -a.$$

Gausova i srednja krivina su date sa:

$$K = \frac{\cos v}{a(c + a\cos v)}, \qquad H = -\frac{c + 2a\cos v}{2a(c + a\cos v)}.$$

Elipsoid je površ koja nastaje rotacijom elipse oko jedne od njenih glavnih osa. Njena jednačina je oblika:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

gde su a, b i c dužine njenih poluosa. U parametarskom obliku ga možemo prikazati na sledeći način:

$$ellipsoid[a,b,c](u,v) = (a\cos u\sin v\,, b\sin u\sin v\,, c\cos v),$$

za $u \in [0,2\pi)$ i $v \in [0,\pi]$.

U ovoj parametrizaciji koeficijenti prve fundamentalne forme su:

$$E = (b^2 cos^2 u + a^2 sin^2 u) sin^2 v,$$
$$F = (b^2 - a^2) \cos u \sin u \cos v \sin v,$$
$$G = (a^2 cos^2 u + b^2 sin^2 u) cos^2 v + c^2 sin^2 v,$$

dok su koeficijenti druge fundamentalne forme:

$$L = \frac{abc\ sin^2 v}{\sqrt{a^2 b^2 cos^2 v + c^2 (b^2 cos^2 u + a^2 sin^2 u) sin^2 v}},$$

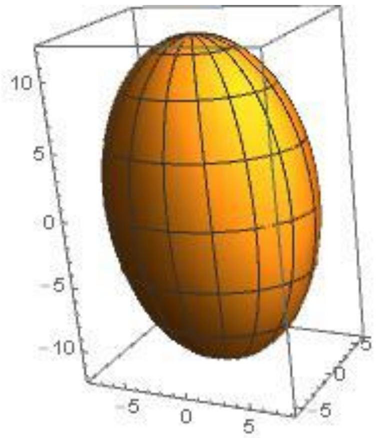
$$M = 0,$$

$$N = \frac{abc}{\sqrt{a^2 b^2 cos^2 v + c^2 (b^2 cos^2 u + a^2 sin^2 u) sin^2 v}}.$$

Gausova i srednja krivina su date sa:

$$K = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 b^2 cos^2 v + c^2 (b^2 cos^2 u + a^2 sin^2 u) sin^2 v)^2},$$

$$H = \frac{abc(3(a^2 + b^2) + 2c^2 + (a^2 + b^2 - 2c^2) \cos(2v) - 2(a^2 - b^2) \cos(2u) sin^2 v)}{8(a^2 b^2 cos^2 v + c^2 (b^2 cos^2 u + a^2 sin^2 u) sin^2 v)^{3/2}}.$$



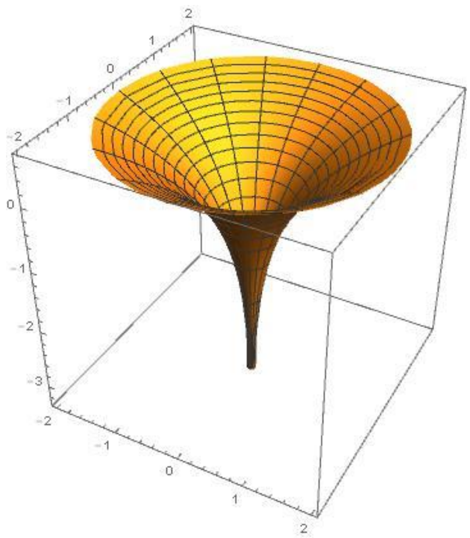
Fanel površ nastaje rotacijom krive $ln\, x$ oko z −ose. Njena jednačina glasi:

$$z = \frac{1}{2} a\, ln(x^2 + y^2),$$

dok je njen parametarski oblik:

$$funnel[a](u, v) = (u \cos v\, , u \sin v\, , a\, ln\, u),$$

za $u > 0$ i $v \in [0,2\pi)$.



Koeficijenti prve fundamentalne forme su:

$$E = 1 + \frac{a^2}{u^2}\,, \qquad F = 0, \qquad G = u^2,$$

dok su koeficijenti druge fundamentalne forme:

$$L = -\frac{a}{u\sqrt{a^2+u^2}}\,, \qquad M = 0, \qquad N = \frac{au}{\sqrt{a^2+u^2}}\,.$$

Gausova i srednja krivina su date sa:

$$K = -\frac{a^2}{(a^2+u^2)^2}\,,$$

$$H = \frac{a^3}{2u(a^2+u^2)^{3/2}}\,.$$

4 Minimalne površi

4.1 Motivacija

Mnoge pojave u prirodi imaju matematičku interpretaciju. Minimalne površi su samo jedan od mnogih primera da je zaista tako.

Prva minimalna površ je otkrivena u 18. veku. Naravno, na početku su bile poznate samo jednostavne i u sadašnje vreme nezanimljive površi, ali su za nivo znanja onog vremena predstavljale pravu revoluciju. Naime, prva takva površ bila je ravan i dobijena je tako što je za njenu granicu izabrana zatvorena kriva u ravni. Francuski geometer i inženjer Menije je krajem 18.veka konstruisao prve složenije primere minimalnih površi: helikoid i katenoid.

Posle ovih otkrića nastupa period stagnacije, koji je prekinuo Vaještras. On je otkrio formulu koja je sa jedne strane omogućila istraživanje o minimalnim površima u opštem slučaju, a sa druge strane dopušta otkrivanje novih minimalnih površi.

Novi primer minimalne površi je pronađen i objavljen tek 1935.godine. Nju je otkrio Šerk, a posle perioda stagnacije otkriće nove površi je bilo prava senzacija. Istovremeno, belgijski fizičar Plato je izvršio više osetljivih eksperimenata stvarajući tzv. film od sapunice, za koji je kasnije dokazano da se u potpunosti slaže sa matematičkim rezultatima i da je film od sapunice ustvari fizička interpretacija matematičkog problema. Plato je formulisao i važnu hipotezu nazvanu Platoov problem . Suština tog problema je u tome da svaka zatvorena kriva koja nema samopreseke može biti granica za minimalnu površ.

Kompletan matematički dokaz jedne verzije ovog problema su nezavisno jedan od drugog dali Daglas i Rado koristeći samo matematički aparat. Njihov rezultat je pomogao razvoju varijacionog računa, matematičke discipline koja se razvijala više od 200 godina samo u okviru ovog problema.

Poslednjih trideset godina istraživanja su napredovala u pravcu razvoja površi koje se dosta udaljavaju od izvornog značenja termina "minimalne" kao npr. površi koje nisu ograničene krivom. Međutim, naziv "minimalne" se ustalio i ima istorijski značaj jer ga je prvi uveo Lagranž, 1760.godine, kada je i definisao minimalne površi.
U ovom poglavlju koristićemo reference: [3], [5] i [9].

4.2 Normalna varijacija

Definisaćemo minimalne površi kao regularne površi čija je srednja krivina jednaka nuli. To je Lagranžova definicija iz 1760. godine. Minimalnu površ možemo definisati i više intuitivno kao površ najmanje površine iz familije površi koje imaju isti rub. U želji da pokažemo da se ove dve definicije poklapaju definišemo normalnu varijaciju površi $\mathcal{M}$ u $\mathbb{R}^3$ da bude familija površi $t \longrightarrow \mathcal{M}(t)$ koja predstavlja kako se $\mathcal{M}$ menja kada je pomeramo u pravcu normalnom na površ $\mathcal{M}$. Neka $A(t)$ predstavlja površinu površi $\mathcal{M}(t)$. Pokazujemo da je srednja krivina od $\mathcal{M}$ jednaka nuli ako i samo ako se prvi izvod preslikavanja $t \longrightarrow \mathcal{M}(t)$ anulira na $\mathcal{M}$.
Prvo ćemo definisati notaciju normalne varijacije, ograničenog podskupa i uopštenu formulu za površinu ograničene oblasti na površi u $\mathbb{R}^n$.

Definicija 4.2.1. *Neka je S podskup od $\mathbb{R}^n$. Kažemo da je S ograničen ako postoji broj M takav da je $\|p\| \leq M$, za svako $p \in S$.*

Definicija 4.2.2. *Minimalna površ u $\mathbb{R}^3$ je regularna površ kod koje je srednja krivina jednaka nuli u svakoj tački površi.*

Definicija 4.2.3. *Neka je $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ regularna parametrizovana površ i neka je $Q \subset U$ ograničen poddomen. Pretpostavimo da je $h: Q \longrightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilno i $\varepsilon > 0$. Označimo sa ν jediničnu normalu površi f. Onda je normalna varijacija od f i Q određena sa h preslikavanje*

$$X_t: (-\varepsilon, +\varepsilon) \times Q \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

dato sa

$$X_t(u,v) = f(u,v) + th(u,v)\, \nu(u,v),$$

za $(u,v) \in Q$ i $-\varepsilon < t < \varepsilon$.

Iz ove definicije sledi da je X_t regularna parametrizovana površ za svako t, gde $-\varepsilon < t < \varepsilon$ i za dovoljno malo ε. Neka je:

$$E(t) = \langle (X_t)_u \,, (X_t)_u \rangle$$
$$F(t) = \langle (X_t)_u \,, (X_t)_v \rangle$$
$$G(t) = \langle (X_t)_v \,, (X_t)_v \rangle.$$

Iz Leme 1.13. sledi da je površina površi $X_t(Q)$ data sa:

$$A(t) = \iint_Q \sqrt{E(t)G(t) - F(t)^2}\, du\, dv.$$

Sada možemo pokazati sledeću lemu.

Lema 4.2.4. *Imamo da je*

$$A'(0) = -2 \iint_Q hH\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

gde H predstavlja srednju krivinu od $\mathcal{M}$, a E, G i F su koeficijenti prve fundamentalne forme površi X_t date u definiciji 5.2.3.

Dokaz. Kako je

$$X_t(u,v) = f(u,v) + th(u,v)\, \nu(u,v)$$

parcijalni izvodi ove površi su:

$$(X_t)_u = f_u + th_u\nu + th\nu_u$$
$$(X_t)_v = f_v + th_v\nu + th\nu_v.$$

$E(t) = \langle f_u + th_u\nu + th\nu_u\ ,\ f_u + th_u\nu + th\nu_u \rangle =$

$= \langle f_u\ , f_u \rangle + th\langle f_u\ , \nu_u \rangle + t^2 {h_u}^2 \langle \nu, \nu \rangle + t^2 h_u h \langle \nu, \nu_u \rangle +$

$+\ th\langle \nu_u, f_u \rangle + t^2 h_u h \langle \nu_u, \nu \rangle + t^2 h^2 \langle \nu_u\ , \nu_u \rangle =$

$= E + th(\langle f_u\ , \nu_u \rangle + \langle f_u\ , \nu_u \rangle) + t^2 h^2 \langle \nu_u\ , \nu_u \rangle + t^2 h_u h_u$

pri čemu smo koristili da je $f_u \perp \nu$, $f_v \perp \nu$ i da je $0 = \frac{\partial}{\partial u}\langle \nu, \nu \rangle = 2\langle \nu_u, \nu \rangle$.

Analogno dobijamo da je:

$$F(t) = F + th(\langle f_u\ , \nu_v \rangle + \langle f_v\ , \nu_u \rangle) + t^2 h^2 \langle \nu_u\ , \nu_v \rangle + t^2 h_u h_v\ ,$$

$$G(t) = G + th(\langle f_v\ , \nu_v \rangle + \langle f_v\ , \nu_v \rangle) + t^2 h^2 \langle \nu_v\ , \nu_v \rangle + t^2 h_v h_v\ .$$

Ako napišemo prethodno dobijene jednakosti u drugom obliku, dobijamo:

$$\begin{gathered} E(t) = E - 2thL + O(t^2), \\ F(t) = F - 2thM + O(t^2), \\ G(t) = G - 2thN + O(t^2). \end{gathered}$$

Iz prethodnih jednakosti i Posledice 1.23. dobijamo:

$E(t)G(t) - F(t)^2 = \big(E - 2thL + O(t^2)\big)\big(G - 2thN + O(t^2)\big) - \big(F - 2thM + O(t^2)\big) =$

$= EG - F^2 - 2th(EN + GL - 2FM) + O(t^2) = EG - F^2 - 4thH(EG - F^2) + O(t^2) =$

$= (EG - F^2)(1 - 4thH) + O(t^2).$

Koristeći pravila za računanje sa O notacijom i Maklorenov razvoj funkcije

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2)$ sledi:

$\sqrt{E(t)G(t) - F(t)^2} = \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH) + O(t^2)} =$

$= \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH) + (EG - F^2)O(t^2)} =$

$= \sqrt{EG - F^2}\sqrt{1 + \big(-4thH + O(t^2)\big)} = \sqrt{EG - F^2}(1 - 2thH) + O(t^2)$

$$A(t) = \iint\limits_Q \sqrt{E(t)G(t) - F(t)^2}\, du\, dv = \iint\limits_Q \Big(\sqrt{EG - F^2}(1 - 2thH) + O(t^2)\Big)\, du\, dv =$$

$$= \iint\limits_Q \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv - 2t \iint\limits_Q hH\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv + O(t^2).$$

Konačno, dobijamo:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} A(t) = A'(0) = -2 \iint_Q hH\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

■

Teorema 4.2.5. *Neka je $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ regularna parametrizovana površ i $Q \subset U$ ograničen. Onda je f minimalna na Q akko je $A'(0) = 0$ za normalnu varijaciju od f i Q u odnosu na bilo koju $h: Q \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f minimalna. Onda je H identički jednako nuli za svaku tačku površi f, pa je prema prethodnoj lemi $A'(0) = 0$, za bilo koje h.
Pretpostavimo sada da je $A'(0) = 0$ za bilo koju diferencijabilnu funkciju $h: Q \longrightarrow \mathbb{R}$. Pretpostavimo suprotno, da postoji $q \in Q$ da je $H(q) \neq 0$. Izaberimo $h: Q \longrightarrow \mathbb{R}$ takvo da je $h(q) = H(q)$ i h je različito od nule u dovoljno maloj okolini oko q (tj. van te okoline $h = 0$). Kako je $det(g_{ij}) = EG - F^2 > 0$ jer je površ regularna sledi da je $A'(0) < 0$ za ovako izabranu varijaciju određenu sa h, što je kontradikcija.

■

4.3 Minimalne rotacione površi

Katenoid je površ koja nastaje rotacijom lančanice (katemptote). Standardna parametrizacija katenoida je:

$$catenoid[c](u, v) = \left(c \cosh\left(\frac{v}{c}\right) \cos u\, , c \cosh\left(\frac{v}{c}\right) \sin u\, , v\right).$$

Lako proveravamo da su glavne krivine katenoida:

$$\kappa_1 = -\kappa_2 = \frac{1}{c\left(\cosh\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Gausova krivina je:

$$K = \kappa_1\kappa_2 = \frac{-1}{c^2\left(\cosh\frac{v}{c}\right)^4},$$

dok je srednja krivina $H = 0$. Odatle sledi da je katenoid minimalna površ.

Teorema 4.3.1. *Rotaciona površ $\mathcal{M}$ koja je minimalna je sadržana ili u ravni ili u katenoidu.*

Dokaz. Neka je $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizacija površi $\mathcal{M}$ i neka je $\alpha = (\varphi, \psi)$ profilna kriva. Kako je $\mathcal{M}$ rotaciona površ, f je data sa:

$$f(u, v) = \big(\varphi(v)\, cos\, u\, , \varphi(v)\, sin\, u\, , \psi(v)\big).$$

Imamo tri slučaja:

i) $\psi' \equiv 0$. Onda je $\psi = const.$, pa je $\alpha = (\varphi, const.)$, tj. α je horizontalna prava i $\mathcal{M}$ je deo ravni koja je normalna na osu rotacije.

ii) $\psi' \not\equiv 0$. Onda iz teoreme o inverznoj funkciji imamo da ψ ima inverznu funkciju ψ^{-1}. Definišemo

$$\tilde{\alpha}(t) \coloneqq \alpha\big(\psi^{-1}(t)\big) = (\alpha, \psi)\big(\psi^{-1}(t)\big) = \Big(\varphi\big(\psi^{-1}(t)\big), \psi\big(\psi^{-1}(t)\big)\Big) = (h(t), t),$$

gde smo sa $h(t)$ označili: $\varphi\big(\psi^{-1}(t)\big)$.
Definišemo novu površ y sa:

$$y(u, v) \coloneqq (h(v)\cos u\, , h(v)\sin u\, , v).$$

Pošto je $\tilde{\alpha}$ reparametrizacija krive α, sledi da preslikavanja f i y imaju istu sliku. Stoga, dovoljno je da pokažemo da je rotaciona površ y deo katenoida.

Iz Teoreme 3.1.5. imamo da su glavne krivine rotacione površi date sa:

$$\kappa_1 = \frac{-\psi'}{|\varphi|\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}\, , \qquad \kappa_2 = \frac{sign(\varphi)(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{\left(\varphi'^2 + \psi'^2\right)^{3/2}}\, .$$

Odatle imamo:

$$\kappa_1 = \frac{-1}{|h|\sqrt{h'^2 + 1}}\, , \qquad \kappa_2 = \frac{h''}{(h'^2 + 1)^{3/2}}\, .$$

Iz pretpostavke da je $H = 0$ i jednakosti dobijenih za glavne krivine sledi da h mora da zadovoljava diferencijalnu jednačinu:

$$h''h = h'^2 + 1.$$

Uvodeći smenu $z = h'$ dobijamo:

$$h'' = (h')' = \frac{dh'}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dh}\frac{dh}{dt} = z\frac{dz}{dh}\, .$$

Sada iz prethodne dve jednakosti imamo:

$$z\frac{dz}{dh} \cdot h = z^2 + 1,$$

tj.

$$\frac{z}{z^2 + 1}dz = \frac{dh}{h}\, .$$

Integraljenjem prethodne jednakosti i vraćanjem smene dobijamo:

$$\ln\left(1 + h'^2\right) = \ln\left(\frac{h}{c}\right)^2,$$

tj.

$$1 + h'^2 = \left(\frac{h}{c}\right)^2.$$

Ako dobijenu diferencijalnu jednačinu zapišemo u drugom obliku, imamo:

$$h' = \sqrt{\left(\frac{h}{c}\right)^2 - 1},$$

odnosno:

$$\frac{h'/c}{\sqrt{(h/c)^2 - 1}} = \frac{1}{c}.$$

Uvodeći smenu $\frac{h}{c} = p$ i integraleći obe strane dobijamo:

$$\operatorname{arccosh}\left(\frac{h}{c}\right) = \frac{v}{c} + b.$$

Prema tome, rešenje polazne diferencijalne jednačine je:

$$h(v) = c\cosh\left(\frac{v}{c} + b\right).$$

Sada imamo da je $y(u,v) = \left(c\cosh\left(\frac{v}{c} + b\right)\cos u\,, c\cosh\left(\frac{v}{c} + b\right)\sin u\,, v\right)$, čime smo dokazali da je y deo katenoida, pa je i f deo katenoida, a samim tim i $\mathcal{M}$.

iii) ψ' uzima vrednost nula u nekim tačkama, a u nekim ne. Ovaj slučaj je nemoguć. Pretpostavimo suprotno. Neka je $\psi'(v_0) = 0$, ali $\psi'(v) > 0$, za $v < v_0$. Iz slučaja ii) imamo da je profilna kriva katemptota za $v < v_0$, čiji je nagib dat sa φ'/ψ'. Onda $\psi'(v_0) = 0$ implicira da nagib postaje beskonačan u v_0. Ovo je nemoguće jer je profilna kriva grafik funkcije $cosh$.

■

4.4 Primeri minimalnih površi

Eneperova minimalna površ ima sledeću parametrizaciju:

$$enneper(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - vu^2, u^2 - v^2\right).$$

Radi jednostavnijeg zapisa nadalje ćemo ove parametrizacije označiti sa f.

Lako možemo direktno proveriti da je data površ minimalna tj. da ima srednju krivinu jednaku nuli. Računajući dobijamo:

$$f_u = (1 - u^2 + v^2, -2uv, 2u),$$

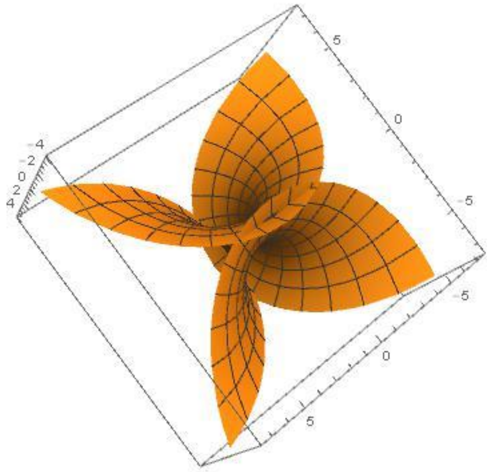
$$f_v = (2uv, -1 - u^2 + v^2, -2v),$$

pa je

$$E = (1 + u^2 + v^2)^2 = G, \qquad F = 0.$$

Međutim, ne moramo da računamo vektor normale jer anuliranje srednje krivine već sledi iz prethodne računice i činjenice da je

$$f_{uu} = -2(u, v, -1) = -f_{vv}.$$



Katalanova minimalna površ ima parametrizaciju:

$$catalan[a](u, v) = a\left(u - \sin u \cosh v\,, 1 - \cos u \cosh v\,, -4 \sin\frac{u}{2} \sinh\frac{v}{2}\right),$$

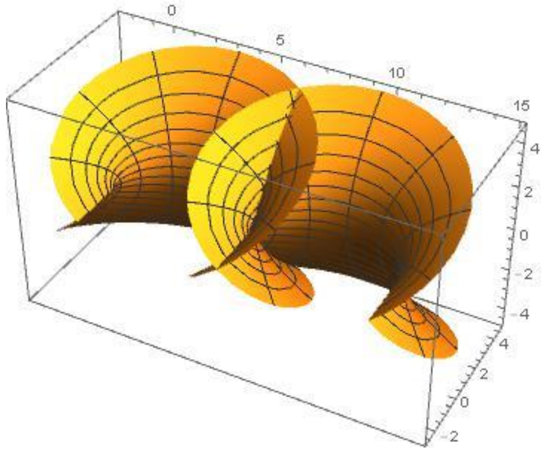
gde je a konstanta. Koeficijenti prve kvadratne forme su:

$$E = 2a^2 \cosh\left(\frac{v}{2}\right)^2 (-\cos u + \cosh v) = G, \qquad F = 0.$$

Kao i u prethodnom slučaju, iz prethodnih jednakosti i činjenice da je

$$f_{uu} = a\left(\sin u \cosh v\,, \cos u \cosh v\,, \sin\frac{u}{2} \sinh\frac{v}{2}\right) = -f_{vv}\,,$$

sledi da je srednja krivina Katalanove površi jednaka nuli, pa je ona minimalna površ.



Henebergova minimalna površ je zadata:

$$henneberg(u,v) = \Big(2\sinh u \cos v - \frac{2}{3}\sinh 3u \cos 3v\,,$$
$$2\sinh u \sin v + \frac{2}{3}\sinh 3u \sin 3v\,, 2\cosh 2u \cos 2v\Big).$$

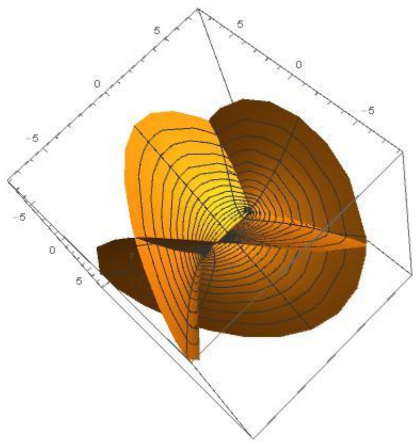
Koeficijenti prve kvadratne forme su:

$$E = 8\cosh^2 u \;\;(-\cos 4v + \cosh 4u) = G, \qquad F = 0.$$

Kako je

$$f_{uu} = (2\sinh u \cos v - 6\sinh 3u \cos 3v\,,$$
$$2\sinh u \sin v + 6\sinh 3u \sin 3v\,, 8\cosh 2u \cos 2v) = -f_{vv}\,,$$

sledi da je srednja krivina jednaka nuli pa je Henebergova površ minimalna.



Šerkova minimalna površ

Definicija 4.4.1. *Monžova površ je površ $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ oblika*

$$f(u,v) = \big(u, v, h(u,v)\big),$$

gde je U otvoren podskup od $\mathbb{R}^2$ i $h\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija.

Monžova površ je regularna površ jer je matrica Jakobijana ranga 2:

$$\mathcal{J}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ h_u & h_v \end{pmatrix}$$

Lema 4.4.2. *Za Monžovu površ* $(u, v) \longmapsto u, v$ *važi:*

$$E = 1 + h_u^2, \qquad F = h_u h_v, \qquad G = 1 + h_v^2,$$

$$L = \frac{h_{uu}}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{1/2}}, \qquad M = \frac{h_{uv}}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{1/2}}, \qquad N = \frac{h_{vv}}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{1/2}},$$

$$K = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^2}, \qquad H = \frac{(1 + h_v^2)h_{uu} - 2h_u h_v h_{uv} + (1 + h_u^2)h_{vv}}{2(1 + h_u^2 + h_v^2)^{3/2}}.$$

Lema 4.4.3. *Monžova površ* $(u, v) \longmapsto \big(u, v, h(u, v)\big)$ *je minimalna ako i samo ako je*

$$(1 + h_v^2)h_{uu} - 2h_u h_v h_{uv} + (1 + h_u^2)h_{vv} = 0.$$

Dokaz. Sledi neposredno iz prethodne leme.

Teorema 4.4.4. *Neka je data Monžova površ* $f\colon U \longrightarrow \mathcal{M}$ *sa* $h(u, v) = m(u) + n(v)$. *Ako je* $\mathcal{M}$ *minimalna površ onda je* $\mathcal{M}$ *deo ravni ili postoje konstante* a, c_1, c_2, c_3, c_4, *gde je* $a \neq 0$, *takve da:*

$$m(u) = -\frac{1}{a} log(cos(au + c_1)) + c_2$$

$$n(v) = \frac{1}{a} log(cos(au + c_3)) + c_4 .$$

Dokaz.
Pošto je $h(u, v) = m(u) + n(v)$, imamo:

$$h_{uu} = m''(u), \qquad h_{uv} = 0, \qquad h_{vv} = n''(v).$$

Zamenom u jednačinu iz prethodne leme dobijamo:

$$\frac{m''(u)}{1 + m'(u)^2} = \frac{-n''(v)}{1 + n'(v)^2}.$$

Kako su u i v nezavisne promenljive, zaključujemo da obe strane prethodne jednakosti moraju biti jednake nekoj konstanti a. Ako je $a = 0$ onda i m i n moraju biti linearne, pa je $\mathcal{M}$ deo ravni. U suprotnom, dve diferencijalne jednačine:

$$\frac{m''(u)}{1 + m'(u)^2} = a = \frac{-n''(v)}{1 + n'(v)^2}$$

su rešive integraljenjem dva puta. Sledi traženo. ■

Kao što je i predloženo u prethodnoj teoremi, definišemo Šerkovu površ:

$$scherk[a](u,v) = \left(u, v, \frac{1}{a}\log\left(\frac{\cos av}{\cos au}\right)\right).$$

Da bi izlaganje bilo prostije, bez gubljenja opštosti pretpostavljamo da je $a = 1$. Tada je Šerkova površ dobro definisana na skupu:

$$R = \{(u,v) \mid \cos u \cos v > 0\}.$$

Ovde R možemo zamisliti kao uniju crnih kvadrata na beskonačnoj šahovskoj tabli. Da bismo potvrdili ovo, stavimo da je kvadrat:

$$Q(m,n) = \left\{(x,y) \;\middle|\; m\pi - \frac{\pi}{2} < x < m\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi - \frac{\pi}{2} < y < n\pi + \frac{\pi}{2}\right\}.$$

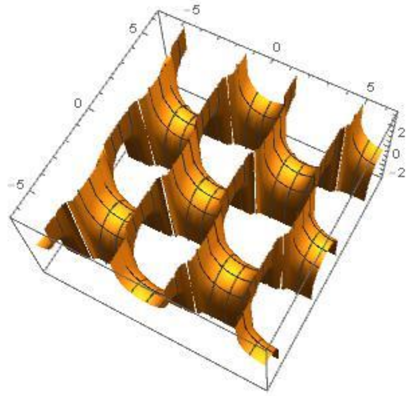
Obojimo kvadrate $Q(m,n)$ crno ako je $m+n$ paran broj, a belo ako je $m+n$ neparan broj.

Tada je:

$$R = \bigcup \{Q(m,n) \mid m,n \in \mathbb{Z}, m+n = 2k\}.$$

Znači, Šerkova površ je definisana u crnim kvadratima na beskonačnoj šahovskoj tabli. Lako je videti da je za $a = 1$,

$$x(u,v) = x(u + 2m\pi, v + 2n\pi).$$



Zaključak

U uvodnom delu dali smo kratak pregled bitnih pojmova i tvrđenja iz teorije krivih i površi koji su potrebni za dalji rad, kao npr. definicija krive, površi, tangentnog prostora, prva, druga i treća fundamentalna forma, krivine površi itd.

Praktični problemi u mnogim oblastima doveli su do otkrića raznih klasa minimalnih, rotacionih i pravolinijskih površi. U ovom radu su izučavane neke osobine datih površi, za neke od njih računate su prva i druga fundamentalna forma, Gausova i srednja krivina. Svi primeri su parametarski definisani i ilustrovani u *Mathematici*.

Posmatrali smo podklase pravolinijskih površi kao što su: tangentna razvojna površ, uopštena cilindrična i uopštena konusna površ i izveli obrasce koje bi trebalo da zadovoljavaju da bi bile regularne. Uveli smo još jednu klasu pravolinijskih površi, a to su necilindrične pravolinijske površi i pokazali jedan specijalan oblik njihove reparametrizacije pomoću strikcione krive. Kod rotacionih površi smo uveli specijalne krive na povši koje smo nazvali glavne krive. Pokazali smo i da su meridijani i paralele takav oblik krivih. Dali smo definiciju minimalne površi kao regularne parametrizovane površi čija je srednja krivina jednaka nuli u svakoj tački površi. Takođe, opisali smo motivaciju za uvođenje ovakvih klasa površi, kratak istorijski razvoj pojma minimalne površi i objasnili šta on danas predstavlja. Definisali smo pojam normalne varijacije površi u želji da pokažemo da se definicija minimalne površi poklapa s vise intuitivnim značenjem reči “minimalna”, odnosno da je ona površ najmanje površine iz familije površi koje imaju isti rub.

Literatura

[1] Bär C.: Elementary Differential Geometry, Cambridge University Press, 2010.

[2] Banchoff T., Lovett S.: Differential Geometry of Curves and Surfaces, A K Peters, Ltd., 2010.

[3] Cvetković M.: Analiza oblika površi i uopštenja, doktorska disertacija, PMF u Nišu, 2013.

[4] do Carmo M.P.: Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Inc., 1976.

[5] Gray A., Abbena E., Salamon S.: Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Third Edition, Chapman & Hall/CRC, 2006.

[6] Konjik S.: Predavanja iz analize 2, diferencijalni i integralni račun funkcija više promenljivih, PMF, 2014.

[7] Krstić N.: Rotacione površi i njihova vizuelizacija u programskom paketu *Mathematica*, PMF Niš, 2013.

[8] Presley A.: Elementary Differential Geometry, Second Edition, Springer, 2010.

[9] Velimirović Lj., Stanimirović P., Zlatanović M.: Geometrija krivih i površi uz korišćenje paketa Mathematica, PMF u Nišu, 2010.

[10] Wolfgang K.: Differential Geometry, Curves-Surfaces-Manifolds, Second Edition, AMS, 2006.

Biografija

Zagorka Nestorović je rođena 16.2.1994. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu “Aleksa Šantić” završava u Gajdobri, kao nosilac Vukove diplome. Nakon toga upisuje gimnaziju “Jovan Jovanović Zmaj”, u Novom Sadu, smer Obdareni učenici u matematičkoj gimnaziji, koju završava 2013. godine kao nosilac Vukove diplome. Iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet, smer Diplomirani profesor matematike. Osnovne studije završava 2017. godine sa prosečnom ocenom 9.64 i iste godine upisuje master studije, smer Master profesor matematike. Položila je sve ispite predviđene planom i programom i time stekla pravo na odbranu ovog master rada. Od oktobra 2018. godine zaposlena je na Fakultetu tehničkih nauka, pri katedri za matematiku, kao saradnik u nastavi.

Novi Sad, 2018 Zagorka Nestorović

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Zagorka Nestorović
AU

Mentor: Dr Sanja Konjik, vanr. prof.
MN

Naslov rada: O raznim klasama površi
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2018.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA

Fizički opis rada: (4, 50, 10, 0, 18, 0, 0)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Matematička analiza/Diferencijalna geometrija
ND

Ključne reči: pravolinijska površ, rotaciona površ, minimalna površ, glavna kriva, normalna varijacija
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ

Ovaj master rad sastoji se od četiri poglavlja. Uvodni deo je posvećen osnovnim pojmovima iz teorije krivih i površi, dok su u ostalim poglavljima obrađene različite klase površi kao što su: pravolinijske, rotacione i minimalne površi. Izučavane su neke osobine datih površi, za neke od njih računate su prva i druga fundamentalna forma, Gausova i srednja krivina. Svi primeri su parametarski definisani i ilustrovani u Mathematici.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 3.9.2018.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: Dr Milica Žigić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Dr Dušan Zorica, vanredni profesor, Prirodni-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Dr Sanja Konjik, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monographic type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master thesis
CC

Author: Zagorka Nestorović
AU

Mentor: Sanja Konjik, PhD
MN

Title: About various classes of surfaces
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2018.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
PP

Physical description: (4, 50, 10, 0, 18, 0, 0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Mathematical analysis/Diferential geometry
SD

Key words: ruled surfaces, surfaces of revolution, minimal surfaces, principal curve, normal variation
SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB

This master thesis consists of four chapters. The first chapter is dedicated to the study of the theory of curves and surfaces while the other chapters are dedicated to the various clases of surfaces such as ruled surfaces, surfaces of revolution and minimal surfaces. We studied some properties of the given surfaces such as first and the second fundamental form, Gaussian and mean curvature. All examples are parametrically defined and illustrated in Mathematics.

Accepted by the Scientific Board on: 3.9.2018.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Dr. Milica Žigić, Assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Dr. Dušan Zorica, Associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,

Member: Dr. Sanja Konjik, Associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad