UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Vojin Tomić

ELEMENTI VEROVATNOĆE U SREDNJOJ ŠKOLI

-master rad-

Mentor: dr Dragoslav Herceg

Novi Sad, 2011.

PREDGOVOR

U ovom master radu načinio sam sopstveni pristup tematici predavanja verovatnoće đacima četvrtog razreda opšteg smera gimnazije. S obzirom da je to oblast s kojom se učenici tog uzrasta prvi put susreću, pokušao sam da im na većem broju raznovrsnih primera što više približim ovu oblast matematike, kao i da novostečena znanja povežu sa gradivom koje su savladali u prethodnom školovanju.

Kroz detaljnu obradu časova, predviđenih nastavnim programom za ovu celinu, izložio sam najvažnije teorijske postavke i dao predlog zadataka koje treba obraditi na času, kao i kroz domaći zadatak i samostalno vežbanje učenika.

Na početku rada prikazao sam kratak istorijski pregled, koji treba da zainteresuje učenike za predstojeće gradivo. Pored udžbenika i zbirke zadataka, u pisanju rada sam koristio i stručne časopise, kao i informacije dobijene sa interneta.

Novi Sad, avgust 2011. Vojin Tomić

SADRŽAJ

1. UVOD

Master rad koji je pred Vama urađen je iz predmeta Metodika matematike. Nastavnim programom za četvrti razred gimnazije opšteg smera predviđeno je da se tema „Verovatnoća“ realizuje sa 15 nastavnih jedinica. U radu su obrađeni svi časovi ove teme, prema sledećoj strukturi:

1. Slučajni događaji (obrada)
2. Klasična definicija verovatnoće događaja (obrada)
3. Geometrijska definicija verovatnoće događaja (kombinovan čas)
4. Verovatnoća unije događaja (obrada)
5. Uslovna verovatnoća. Nezavisnost događaja (obrada)
6. Totalna verovatnoća. Bajesova formula (obrada)
7. Verovatnoća događaja (utvrđivanje)
8. Diskretna i neprekidna slučajna promenljiva. Zakon raspodele slučajne promenljive (obrada)
9. Funkcija raspodele i gustina slučajne promenljive (obrada)
10. Matematičko očekivanje i disperzija (obrada)
11. Funkcija raspodele, gustina, numeričke karakteristike slučajne promenljive (utvrđivanje)
12. Binomna raspodela (obrada)
13. Normalna raspodela (obrada)
14. Binomna i normalna raspodela (utvrđivanje)
15. Elementi verovatnoće (sistematizacija).

Kroz obradu časova izložene su najvažnije definicije i teoreme iz verovatnoće predviđene nastavnim programom. Dat je i predlog većeg broja zadataka koje treba obraditi na času, kao i kroz domaći zadatak i samostalno vežbanje učenika.

1.1. ISTORIJSKI OSVRT

Glavni motiv za početak proučavanja verovatnoće bio je dobitak u igrama na sreću. Želja za brzom i lakom zaradom navela je mnoge strastvene kockare na razmišljanje kako treba da igraju i ulože novac, te kolika je njihova šansa da pobede. Naučni karakter u izlaganju verovatnoća postupno dobija od 17-og veka.

Slika 1. Kockice za igru

Jedan od poznatih matematičara-kockara bio je Đirolamo Kardano (1501-1576). Smišljajući strategije za osvajanje novca, formulisao je neka elementarna pravila verovatnoće. Napisao je „ *Knjigu o igrama na sreću* “ (1526) u kojoj navodi rezultate do kojih je došao, kao i savete za uspešno varanje.

Za razvoj teorije verovatnoće značajna je prepiska između Pjera Ferme (1601-1665) i Bleza Paskala (1623-1662) iz 1654-te. Oni su rešavali problem poznat kao *podela uloga*.

Igra se sastoji iz više rundi, učestvuju 2 takmičara sa jednakim šansama za pobedu u svakoj od njih. Takmičari ulože istu sumu novca i unapred se dogovore da prvi igrač koji pobedi u određenom broju rundi osvaja sav novac. Pretpostavimo da je igra prekinuta usled nepredviđenih spoljnih okolnosti, pre nego što je bilo koji igrač pobedio. Problem je: Kako pošteno podeliti uloženi novac? (Podrazumeva se da podela treba da uzme u obzir broj rundi koje su igrači osvojili, kao i koliko im još treba do ukupne pobede, tako da igrač koji je bliži pobedi dobije više novca.) Razmatranje ovog pitanja dovelo ih je do pojma matematičkog očekivanja.

Tri godine kasnije, 1657-me, nakon što ga je Paskal uputio u materiju, Kristijan Hajgens (1629-1695) izdaje prvu knjigu koja izlaganju verovatnoće daje naučni karakter, „ *Rasuđivanje u igrama na sreću* “.

Osam godina nakon smrti Jakoba Bernulija (1654-1705) objavljeno je njegovo delo „ *Umetnost pogađanja* “. Pored toga što sistematično izlaže već poznate rezultate, Bernuli prvi daje dokaze za neke teoreme i pominje specijalan slučaj tvrđenja danas poznatog kao Zakon velikih brojeva.

Abraham de Moavr (1667-1754) je 1718-te objavio knjigu „ *Doktrina slučajnosti* " u kojoj uvodi pojam slučajnog događaja i gotovo dolazi do formule za normalnu raspodelu. Pjer Simon Laplas (1749-1827) u delu „ Analitička teorija verovatnoće " uvodi pojam matematičkog očekivanja i dokazuje niz tvrđenja u obliku u kome ih i danas koristimo.

Osnove za modernu teoriju verovatnoće, zasnovanu na teoriji mere, postavio je Andrej Kolmogorov (1903-1987). Izdao je knjigu „ *Osnove teorije verovatnoće* "(1933), u kojoj aksiomatski zasniva ovu oblast matematike.

2. PRVI ČAS: SLUČAJNI DOGAĐAJI (OBRADA)

2.1. UVODNI DEO ČASA

Navođenje primera primene verovatnoće iz svakodnevnog života i zanimljivih istorijskih činjenica, kako bi se učenici zainteresovali za izučavanje novog gradiva.

2.2. GLAVNI DEO ČASA

Teorija verovatnoće izučava slučajne događaje i zakonitosti u sferi slučajnosti, tj. zakonitosti koje nastaju pri istovremenom uticaju velikog broja slučajnih faktora.

Definicija 1. *Slučajni eksperiment (**opit**) je svaka potpuno precizirana operacija (radnja) koja se u nepromenjenim zadatim uslovima može ponoviti proizvoljan broj puta i čiji se rezultat (**ishod**) ne može unapred predvideti. Opit je potpuno određen ako je jasno navedeno šta se u tom opitu posmatra, tj. šta se registruje kao ishod opita.*

Primer 1. Neka se opit sastoji u bacanju ispravne kockice za igru numerisane brojevima od 1 do 6 na ravnu podlogu. Posmatra se broj koji padne na gornjoj strani kockice. Označimo sa A događaj: „ Pao je broj 3 “. Događaj A je primer slučajnog događaja. Ovaj događaj se u navedenom eksperimentu može ali i ne mora ostvariti, jer istu mogućnost (šansu) imaju i preostalih 5 brojeva.

Primer 2. Eksperiment se sastoji u posmatranju saobraćajne raskrsnice u gradu u vremenu od 12 do 13h i registrovanju broja automobila marke „Fiat Punto“ koji za to vreme prođu. Ishodi su brojevi automobila navedene marke koji prođu kroz raskrsnicu za vreme posmatranja i oni mogu značajno varirati u različitim danima, godišnjim dobima ili vremenskim prilikama.

Definicija 2. *Ishod opita naziva se **elementarni događaj**.*

***Definicija 3. Skup S**=$\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n, \ldots\}$ **elementarnih događaja** je skup svih mogućih ishoda posmatranog opita. (Kaže se i **prostor elementarnih događaja**).*

Osnovni zadatak je da se za dati opit odrede svi elementi skupa S. U odnosu na broj elemenata, skup S može biti konačan, prebrojiv ili beskonačan, ali se u srednjoj školi radi samo sa onim opitima koji imaju konačan skup elementarnih događaja.

U primeru 1 je S={1,2,3,4,5,6}, a u primeru 2 je S={0,1,2,3,…,M}, gde je broj M kapacitet raskrsnice.

Definicija 4. *Slučajan događaj A nekog opita je svaki podskup skupa S elementarnih događaja za taj opit.*

Na osnovu definicije konstatujemo da se događaj A realizuje ako je rezultat posmatranog eksperimenta jedan od elementarnih ishoda koji pripadaju skupu A. U primeru 1 ako je događaj A={1,3,4}, taj događaj se ostvaruje ako pri bacanju kockice padne broj 1 ili broj 3 ili broj 4.

Definicija 5. *Skup S svih ishoda datog opita je takođe događaj i naziva se* ***siguran*** *(izvestan, pouzdan)* ***događaj*** *i on se pri posmatranom opitu uvek realizuje.*

Definicija 6. *Događaj koji se nikada ne realizuje naziva se* ***nemoguć događaj****, u oznaci* ∅.

U primeru 1, S={1,2,3,4,5,6} je siguran događaj, jer će sigurno pasti neki od šest brojeva. Nemoguć događaj u istom primeru bio bi recimo: „ Pao je broj 7 “.

Za događaje važe operacije i relacije koje važe i u teoriji skupova, samo ih tumačimo kao događaje.

Definicija 7. *Događaj A je* ***podskup*** *događaja B ako se u posmatranom eksperimentu realizacijom događaja A uvek realizuje i događaj B. Kažemo još i da događaj A povlači* ***(implicira)*** *događaj B.*

Definicija 8. *Ako za posmatrani opit važi da je događaj A podskup događaja B i da je događaj B podskup događaja A, kažemo da su događaji A i B* ***ekvivalentni*** *ili* ***jednaki*** *i pišemo A=B.*

Definicija 9. *Događaj $\bar{A}$ koji se realizuje ako i samo ako se događaj A ne realizuje naziva se* ***komplement*** *događaja A u odnosu na S.*

Tako u primeru 1 za događaj A={2,3,5} je $\bar{A}$={1,4,6}.

Definicija 10. *Ako se događaj C realizuje ukoliko se realizuju i događaj A i događaj B, tada se događaj C naziva* ***presek*** *(kaže se i* ***proizvod****) događaja A i B, u oznaci $C=A\cap B$ (ili C=AB). Ako je $A\cap B=\emptyset$, tj. događaji A i B se ne mogu ostvariti istovremeno, onda kažemo da su A i B* ***disjunktni*** *događaji.*

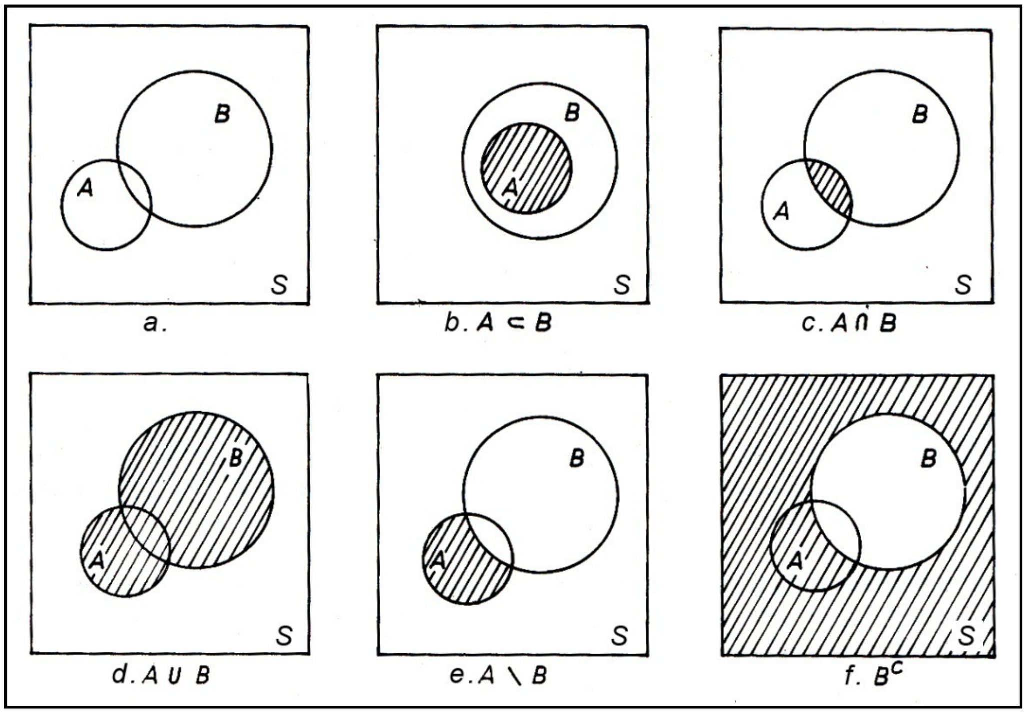
Pojam preseka može se proširiti i na bilo koji konačan skup događaja A_1, A_2, A_3, ..., A_n (n>2). Događaj C, jednak preseku događaja A_1, A_2, A_3, ..., A_k , ostvaruje se kada se ostvare svi događaji A_k , $1\leq k\leq n$.

Definicija 11. *Ako se događaj C realizuje ukoliko se realizuje bar jedan od događaja A i B, tada se događaj C naziva* ***unija*** *događaja A i B. Ukoliko je $A\cap B=\emptyset$, onda se za uniju događaja koristi i oznaka A+B.*

I pojam unije se može proširiti na bilo koji konačan skup događaja A_1, A_2, A_3, ..., A_n (n>2). Događaj C, jednak uniji događaja A_1, A_2, A_3, ..., A_k , ostvaruje se ako se ostvari bar jedan od događaja A_k , $1\leq k\leq n$.

Definicija 12. *Ako se događaj C realizuje ukoliko se realizuje događaj A i ne realizuje događaj B, tada se događaj C naziva* **razlika** *događaja A i B, u oznaci A \ B.*

Sve navedene relacije među slučajnim događajima mogu se prikazati Veneovim dijagramima. Neka je skup svih mogućih ishoda skup tačaka u kvadratu kao na slici 2a. Neka je događaj A-izabrana tačka leži u manjem krugu, a događaj B-izabrana tačka leži u većem krugu. Tada su, redom na slici 2 pod b,c,d,e,f, prikazane implikacija, presek, unija, razlika i komplement.



Slika 2.

Definicija 13. *Ako su događaji A_1, A_2, A_3, ..., A_n neprazni, po parovima disjunktni i ako je njihova unija siguran događaj, tada oni čine* ***potpun sistem događaja****.*

Kako su događaji podskupovi skupa S, odgovarajući skupovni identiteti važe i za događaje. Evo nekih važnijih identiteta, koji su učenicima poznati iz prvog razreda:

(1) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
(2) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
(3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(5) $A \cup \bar{A} = S$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$
(6) $A \cup S = S$, $A \cap S = A$.

Primer 3. Za opit bacanja kockice skup elementarnih događaja S={1,2,3,4,5,6} ima partitivni skup od $2^6 = 64$ elementa, tj. događaja vezana za ovaj opit. Posmatrajmo neke od njih:

Događaj A: „ Pao je paran broj “ (A={2,4,6}),

Događaj B: „ Pao je neparan broj “ (B={1,3,5}),

Događaj C: „ Pao je prost broj “ (C={1,2,3,5}),

Događaj D: „ Pao je složen broj “ (D={4,6}),

Događaj E: „Pao je broj deljiv sa 3 “ (E={3,6}).

Tada je $A\cup B=S$, $C\cup D=S$, $A\cap B=\emptyset$, $C\cap D=\emptyset$, potpun sistem događaja čine A i B, odnosno C i D, $A\cap C=\{2\}$, $D\cap E=\{6\}$, $D\subset A$, $B\subset C$, nema ekvivalentnih događaja, $\overline{C}=D$, $E \setminus A = \{3\}$ itd.

2.3. DOMAĆI ZADATAK

1.Zadatak. *Opit se sastoji u bacanju tri novčića i registruje se niz sastavljen od palih znakova, pisma ili glave (npr. PGP znači da je na prvom novčiću palo pismo, na drugom glava i na trećem pismo). Odrediti skup ishoda opita.*

2.Zadatak. *Prevedi na skupovni jezik sledeće rečenice:*

a. Ostvarila su se sva tri događaja A,B i C

b. Ostvario se bar jedan od događaja A,B,C

c. Ostvarila su se bar dva od događaja A,B,C

d. Od događaja A,B,C, ostvarili su se samo A i B

e. Ostvario se samo jedan od događaja A i B

f. Ostvarila su se dva od događaja A,B,C

g. Nije se ostvario nijedan od događaja A,B,C

h. Ostvarilo se najviše dva od događaja A,B,C.

3. DRUGI ČAS: KLASIČNA DEFINICIJA VEROVATNOĆE DOGAĐAJA (OBRADA)

3.1. UVODNI DEO ČASA

Komentar domaćeg zadatka.

3.2. GLAVNI DEO ČASA

Pri definisanju verovatnoće događaja koristićemo aksiome ruskog matematičara Kolmogorova.

Definicija 14. *Neka je $S=\{e_1,e_2,e_3,\ldots,e_n\}$ skup elementarnih događaja nekog opita, PS skup svih podskupova skupa S.* ***Verovatnoća događaja*** *$A\in PS$ je broj P(A), gde je P funkcija na skupu PS koja zadovoljava sledeće aksiome:*

Aksioma 1. Za $\forall A\in PS$, $P(A)\geq 0$ (nenegativnost)

Aksioma 2. $P(S)=1$ (normiranost)

Aksioma 3. Za događaje $A_1,A_2,\ldots,A_n$ koji pripadaju PS i $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i\neq j$, važi da je:

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \quad \text{(aditivnost).}$$

Na osnovu definicije zaključujemo da je za određivanje verovatnoće bilo kog događaja dovoljno zadati verovatnoće svih elementarnih događaja posmatranog opita, $P(e_i)=p_i\geq 0$, $1\leq i\leq n$, pri čemu je po aksiomama 2 i 3 zadovoljeno: $p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=1$.

Ako je $A=\{e_1,\ldots,e_n\}$, tada je $P(A)=\sum_{k=1}^{n} P(e_k)$. Poseban slučaj je kada su svi ishodi opita jednako verovatni, odnosno $p_i = \frac{1}{n}$, $1\leq i\leq n$. Tada se verovatnoća događaja A definiše na sledeći način:

Definicija 15(Klasična ili Laplasova definicija verovatnoće) *Verovatnoća događaja A jednaka je količniku između m-broja elementarnih događaja sadržanih u A (povoljnih za A) i n-broja svih mogućih ishoda opita: $P(A)=\frac{m}{n}$.*

3.Zadatak. *Kolika je verovatnoća da pri bacanju kockice za igru padne:*

a. paran broj

b. broj manji od 3?

Rešenje. Skup elementarnih događaja je S={1,2,3,4,5,6}, pa je n=6.

a. Za događaj A: „ Pao je paran broj “ je A={2,4,6}, pa je m=3. Zato je P(A)= $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

b. Za događaj B: „ Pao je broj manji od 3 “ je B={1,2}, pa je m=2. Zato je P(B)= $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

4.Zadatak. *U kutiji se nalaze 4 bele i 6 crnih kuglica. Proizvoljno biramo dve kuglice. Kolika je verovatnoća da:*

a. obe izvučene kuglice budu bele

b. kuglice budu različite boje?

Rešenje. Broj svih ishoda opita je n= $C_2^{10}=\frac{10\cdot 9}{2}=45$.

a. Za događaj A: „ Izabrane su obe bele kuglice “ je m= $C_2^4=\frac{4\cdot 3}{2}$=6. Stoga je P(A)= $\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$.

b. Za događaj B: „ Izabrane su kuglice različite boje “ je m= $C_1^4\cdot C_1^6$= 4·6 =24. Na osnovu toga je P(B)= $\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$.

Na osnovu aksioma 1, 2 i 3 možemo dokazati sledeće važne osobine funkcije P.

Teorema 1. *Ako je P(A) verovatnoća događaja A, tada je $P(\bar{A})=1-P(A)$.*

Dokaz. Kako je A+Ā=S, to je P(A+Ā)=P(S). Na osnovu aksioma 2 i 3 je dalje P(A)+P(Ā)=1, a odatle sledi tvrđenje. ■

Posledica ovog tvrđenja je da je P(∅)=0.

Teorema 2. *Ako je $A\subset B$, tada je $P(A)\leq P(B)$.*

Dokaz. Kako je $A\subset B$, to je B=A+ĀB, gde su događaji A i ĀB međusobno isključivi, pa na osnovu aksiome 3 je P(B)=P(A)+P(ĀB). Koristeći osobinu P(ĀB) ≥ 0 (Aksioma 1), zaključujemo da je P(B)≥P(A). ■

Ova teorema ima važnu posledicu u činjenici da je $\forall A\in PS$, $0\leq P(A)\leq 1$. Drugim rečima P: PS→[0,1], odnosno funkcija P je nenegativna, rastuća i ograničena na PS.

5.Zadatak. *Izračunati verovatnoću da pri bacanju dve kockice za igru zbir brojeva na gornjim stranama kockica bude manji od 10.*

Rešenje. Broj mogućih ishoda je n=6·6=36. Neka je događaj A: „ Na gornjim stranama dve kockice pao je zbir manji od 10 “. Za događaj A suprotan događaj jeĀ: „ Na gornjim stranama dve kockice pao je zbir veći ili jednak 10 “, pa je $\bar{A}$={(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)}, gde brojevi u zagradama označavaju broj koji je pao na prvoj i drugoj kockici redom. Zato je $P(\bar{A})=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, pa je $P(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

3.3. DOMAĆI ZADATAK

6.Zadatak. *Kolika je verovatnoća da ćemo izvlačenjem 5 brojeva na lutriji koja ukupno ima 50 brojeva izvući brojeve 7,13 i 33?*

7.Zadatak. *U prostoriji se nalaze 2 crnca i 4 belca. Na slučajan način, jedan po jedan, svi izlaze iz prostorije. Kolika je verovatnoća da je zadnji iz prostorije izašao belac?*

8.Zadatak. *Obojena kocka podeljena je na 1000 jednakih manjih kockica. Ako na slučajan način biramo jednu od tih novodobijenih kockica, kolika je verovatnoća da kod izabrane kockice:*

a. bude obojena jedna strana
b. budu obojene dve strane
c. budu obojene tri strane
d. ne bude obojena nijedna strana?

4. TREĆI ČAS: GEOMETRIJSKA DEFINICIJA VEROVATNOĆE DOGAĐAJA (KOMBINOVAN ČAS)

4.1. UVODNI DEO ČASA

Komentar domaćeg zadatka, ponavljanje klasične definicije verovatnoće.

4.2. GLAVNI DEO ČASA

Primer 4. *Data je duž AB i tačke C i D koje pripadaju toj duži. Na slučajan način se bira jedna tačka duži AB. Pitamo se: Kolika je verovatnoća da izabrana tačka pripada i duži CD?*

Prema klasičnoj definiciji verovatnoće, tražena verovatnoća bi bila: $\frac{\text{„Broj svih tačaka duži CD“}}{\text{„Broj svih tačaka duži AB“}}$. Kako su ovo beskonačni skupovi, ne možemo govoriti o broju elemenata u njima, ali nameće se zaključak da navedenom količniku odgovara količnik *mera duži*, tj. njihovih dužina: $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$.

U opštem slučaju, neka je skup S skup tačaka u prostoru R^n, n=1,2,3, odnosno u jednodimenzionalnom, dvodimenzionalnom ili trodimenzionalnom prostoru, te neka je događaj A neka oblast tog prostora. Svaki $A \subset S$ sa konačnom merom je jedan događaj.

U jednodimenzionalnom realnom prostoru mera je dužina duži, u dvodimenzionalnom površina ravnog lika, a u trodimenzionalnom prostoru mera je zapremina tela.

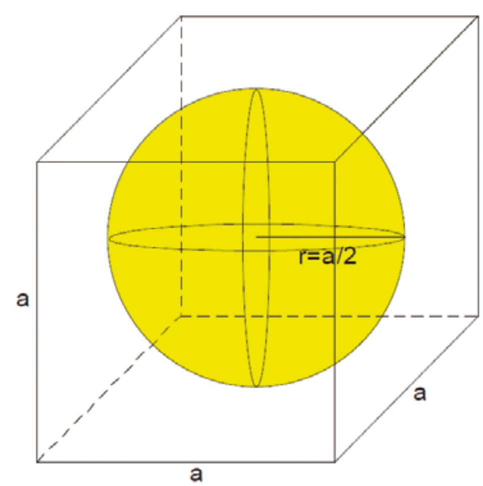
Definicija 16.(Geometrijska definicija verovatnoće) *Verovatnoća događaja A je P(A)=*$\frac{m(A)}{m(S)}$*, gde je m oznaka za (geometrijsku) meru.*

U primeru 4 izbor neke tačke duži AB je elementarni događaj. Svi elementarni događaji su jednako verovatni. Verovatnoća izbora jedne tačke jednaka je nuli, u bilo kom od navedenih prostora. Ovde je elementarni ishod *skoro nemoguć događaj* - verovatnoća da se desi jednaka je $\emptyset$, jer je po navedenoj definiciji P(A)=$\frac{1}{\infty}$=0.

9.Zadatak. *Kolika je verovatnoća da se prilikom slučajnog izbora jedne tačke iz kvadrata stranice a ta tačka nalazi i u krugu upisanom u taj kvadrat?*

Rešenje. Skup S je skup tačaka kvadrata, a za događaj A to je skup tačaka kruga upisanog u kvadrat. Geometrijske mere su površine ovih skupova, pa je P(A)= $\frac{m(A)}{m(S)} = \frac{\frac{a^2\pi}{4}}{a^2} = \frac{\pi}{4}$.

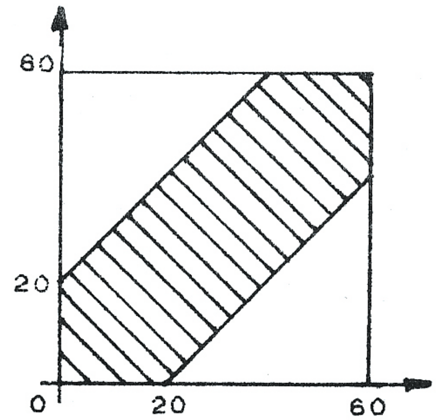
10.Zadatak. *U datu kocku upisana je lopta. Odrediti verovatnoću da slučajno izabrana tačka pripada unutrašnjosti lopte.*



Slika 3.

Rešenje. Neka je događaj A: „ Slučajno izabrana tačka je u unutrašnjosti lopte “. Poluprečnik lopte je $\frac{a}{2}$. Tražimo odnose zapremina: P(A)= $\frac{V_L}{V_K} = \frac{\frac{4}{3}\frac{a^3}{8}\pi}{a^3} = \frac{\pi}{6}$.

11.Zadatak. *Osobe A i B dogovorile su se da se nađu na određenom mestu između 7 i 8 sati uveče. Kako nisu mogli tačno da preciziraju vreme susreta, odlučili su da osoba koja prva stigne čeka 20 min i zatim ode. Kolika je verovatnoća da će se sresti?*



Slika 4.

Rešenje. Neka je osoba A stigla na mesto sastanka u 7 sati i x minuta, a osoba B u 7 sati i y minuta. Ako se osobe precizno drže dogovora imamo: $0 \leq x \leq 60$ i $0 \leq y \leq 60$. (*) Skup svih mogućih događaja sačinjavaju svi parovi (x,y) za koje važi (*), a to su sve tačke kvadrata K.

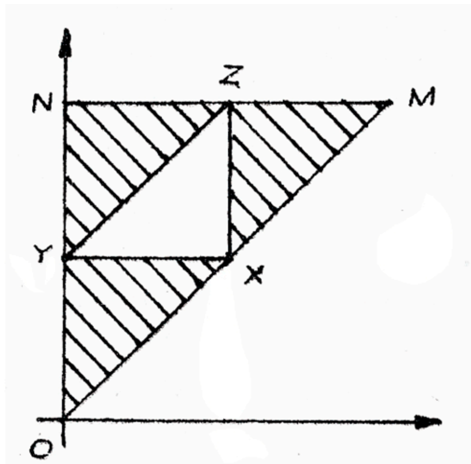
Osobe A i B će se sresti pod uslovom $| x-y | < 20$. Znači, povoljan događaj nastupa kada tačka iz (x,y) pripada oblasti D šrafiranoj na slici, pa je tražena verovatnoća

$$\frac{m(D)}{m(K)} = \frac{60^2-40^2}{60^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} .$$

12. Zadatak. *Dat je metalni štap AB dužine 1m. Na štapu se slučajno biraju dve tačke P i Q i u njima se štap preseče, odnosno tako se podeli na 3 dela. Kolika je verovatnoća da se od ta tri dela može napraviti trougao?*

Rešenje. Ako su P i Q slučajno izabrane tačke na štapu AB, označimo sa x odnosno sa y njihova rastojanja od tačke A. Sada je uređenim parom (x,y) potpuno opisan događaj biranja tačaka P i Q. Kako je $0<x<y<1$, možemo reći da je bilo koji mogući događaj određen uređenim parom uz navedeni uslov. U ravni Oxy ovaj uslov određuje trougaonu oblast T=OMN šrafiranu na slici.

Da bi se od duži AP, PQ i QB mogao obrazovati trougao, dužina svake od njih mora biti manja od zbira dužina ostalih. Ako je dužina jedne od njih manja od $\frac{1}{2}$, onda je zbir dužina ostalih dveju veći od $\frac{1}{2}$. Prema tome, zaključujemo da će duži AP, PQ i QB obrazovati trougao ako svaka od njih ima dužinu manju od $\frac{1}{2}$, odnosno: $x < \frac{1}{2}$, $y - x < \frac{1}{2}$ i $1 - y < \frac{1}{2}$. Iz ovih i gornjeg uslova dobija se $0 < x < \frac{1}{2} < y < 1$ i $y - x < \frac{1}{2}$. Povoljan događaj opisan je poslednjim nejednakostima. U ravni Oxy one određuju trougaonu oblast T1=XYZ, slika. Tražena verovatnoća je $p = \frac{m(T1)}{m(T)} = \frac{1}{4}$.



Slika 5.

4.3. DOMAĆI ZADATAK

13.Zadatak. *Kolika je verovatnoća da slučajno izabrana tačka koja pripada jednakostraničnom trouglu stranice a pripada i krugu upisanom u taj trougao?*

14.Zadatak. *Slučajno se biraju dve tačke x,y iz intervala [0,1], ali tako da $x \in [0, \frac{1}{2})$, $y \in (\frac{1}{2}, 1]$. Odrediti verovatnoću da bude ispunjeno $| y - x | < \frac{1}{3}$.*

15.Zadatak. *U pravilnoj četvorostranoj piramidi osnovne ivice a=10 cm i visine H=12 cm upisana je lopta. Izračunati verovatnoću da slučajno izabrana tačka piramide pripada lopti.*

5. ČETVRTI ČAS: VEROVATNOĆA UNIJE DOGAĐAJA (OBRADA)

5.1. UVODNI DEO ČASA

Ponavljanje ukratko dosadašnjeg gradiva iz verovatnoće.

5.2. GLAVNI DEO ČASA

Ako su događaji $A_1, A_2, ..., A_n$ takvi da su ma koja dva uzajamno isključiva, tj. $A_iA_j = \emptyset$, za $i\neq j$, $i,j=1,2,...,n$, tada na osnovu aksiome 3 verovatnoća njihove unije (zbira) je jednaka zbiru verovatnoća tih događaja: $P(A_1+A_2+A_3+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...+P(A_n)$.

16.Zadatak. *Iz skupa od 10 osoba (6 žena i 4 muškarca) na slučajan način biramo 3 osobe. Kolika je verovatnoća da među izabranim osobama bude bar jedna žena?*

Rešenje. Među tri izabrane osobe može biti jedna žena (događaj A), dve žene (događaj B) ili sve tri žene (događaj C). Traženi događaj je $A\cup B\cup C$, tj. A+B+C. Kako su događaji isključivi, to je: $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{C_1^6\cdot C_2^4}{C_3^{10}}+\frac{C_2^6\cdot C_1^4}{C_3^{10}}+\frac{C_3^6}{C_3^{10}}=\frac{6\cdot 6+15\cdot 4+20}{120}=\frac{116}{120}=\frac{29}{30}$.

Teorema 3. *Neka su A i B bilo koji događaji iz PS takvi da je $A\cap B\neq\emptyset$, tada je $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.*

Dokaz. Koristićemo osobine da je $A\cup B= A+\bar{A}B$, $B=AB+\bar{A}B$. Događaji A i $\bar{A}B$, kao i događaji AB $\bar{A}B$ su međusobno isključivi, pa je zato: $P(A\cup B)=P(A)+P(\bar{A}B)$, $P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$. Oduzimanjem ovih jednakosti dobija se: $P(A\cup B)-P(B)=P(A)-P(AB)$, odnosno $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$, što je i trebalo dokazati. ■

Primetimo da se analogno dobija verovatnoća da se od tri događaja A,B,C realizuje bar jedan:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

17.Zadatak. *Odrediti verovatnoću da slučajno izabran dvocifreni broj bude deljiv sa 5 ili 7.*

Rešenje. Označimo sa A događaj da je broj deljiv sa 5, sa B događaj da je broj deljiv sa 7 i sa AB događaj da je broj deljiv i sa 5 i sa 7. Ukupno ima 90 dvocifrenih brojeva, od kojih su 18 deljivi sa 5, 13 deljivi sa 7 i 2 broja deljiva i sa 5 i sa 7 (brojevi 35 i 70), pa je na osnovu prethodne teoreme $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{18}{90}+\frac{13}{90}-\frac{2}{90}=\frac{29}{90}$.

18.Zadatak. *Iz špila od 32 karte za igru na slučajan način biramo jednu kartu. Kolika je verovatnoća da izabrana karta bude pik ili dama?*

Rešenje. Za događaj A: „ Izbran je pik " je P(A)= $\frac{8}{32}$, za događaj B: „ Izabrana je dama" je P(B)=$\frac{4}{32}$, a P(AB)=$\frac{1}{32}$, jer imamo jednu damu pik, pa je P(A∪B)= $\frac{8}{32}+\frac{4}{32}-\frac{1}{32}=\frac{11}{32}$.

19.Zadatak. *Kolika je verovatnoća da pri bacanju dve kockice za jamb jedna od njih pokaže broj deljiv sa 3 ili broj deljiv sa 4?*

Rešenje. Skup svih ishoda ovog opita je skup uređenih parova (i,j), gde i,j∈{1,2,3,4,5,6}, a njih ima n=6·6=36. Neka je događaj A da se na jednoj od kockica pojavi broj deljiv sa 3, događaj B da se na jednoj od kockica pojavi broj deljiv sa 4, a događaj AB da se na jednoj od kockica pojavi broj deljiv sa 3 a na drugoj broj deljiv sa 4.

Tada:
A={(1,3),(1,6),(2,3),(2,6),(3,3),(3,6),(4,3),(4,6),(5,3),(5,6),(6,3),(6,6),(3,1),(6,1),(3,2),(6,2),(3,4),(6,4),(3,5),(6,5)}, odnosno $m_A = 20$.

B={ (1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6)}, pa je $m_B = 11$.

AB= { (3,4),(4,3),(4,6),(6,4)}, odakle je $m_{AB} = 4$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{20}{36}+\frac{11}{36}-\frac{4}{36}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}.$$

20.Zadatak. *U kutiji se nalazi 8 belih i 2 crne kuglice. Koliko kuglica treba odjednom izabrati, pa da verovatnoća da se među njima nalazi bar jedna crna kuglica bude veća od* $\frac{2}{3}$ *?*

Rešenje. Razlikujemo 2 slučaja: događaj A da je među izabranim kuglicama jedna crna i događaj B da su među izabranim kuglicama obe crne. Ovi događaji su međusobno isključivi, pa je ispunjeno P(A+B)=P(A)+P(B). Uslov zadatka je P(A)+P(B) > $\frac{2}{3}$.

Neka je n broj kuglica koje treba odjednom izvući. Važi da je:

$$P(A)=\frac{\binom{2}{1}\binom{8}{n-1}}{\binom{10}{n}}=\frac{n\,(10-n\,)}{45}\,,\ P(B)=\frac{\binom{2}{2}\binom{8}{n-1}}{\binom{10}{n}}=\frac{n\,(10-n\,)}{90}\,.$$

$$\text{Imamo}:\frac{n\,(10-n\,)}{45}+\frac{n\,(10-n\,)}{90}\ >\ \frac{2}{3}\,.$$

Posle sređivanja dobija se $n^2-19n+60<0$. Rešavanjem ove nejednačine dobijamo 4<n<15. Ali kako je broj kuglica 10, rešenje će biti 4<n≤10. Znači treba odjednom izabrati 5 ili više

kuglica, pa da verovatnoća da se među njima nalazi bar jedna crna kuglica bude veća od $\frac{2}{3}$ (za n=4, verovatnoća je tačno $\frac{2}{3}$).

5.3. DOMAĆI ZADATAK

21.Zadatak. *Kolika je verovatnoća da iz špila od 32 karte za igru izvlačenjem dve karte odjednom, izvučene karte budu iste boje ili budu dva keca?*

22.Zadatak. *Kolika je verovatnoća da dve bačene kockice za igru neće pokazati brojeve čiji je zbir deljiv sa 2 ili sa 3?*

23.Zadatak. *Iz serije od 6 sijalica, od kojih su dve neispravne, na slučajan način biramo 4 sijalice. Kolika je verovatnoća da među izabranim sijalicama bude najviše jedna neispravna?*

6. PETI ČAS: USLOVNA VEROVATNOĆA. NEZAVISNOST DOGAĐAJA (OBRADA)

6.1. UVODNI DEO ČASA

Komentar domaćeg zadatka.

6.2. GLAVNI DEO ČASA

Najpre ćemo uvesti pojmove *zavisni*, odnosno *nezavisni* događaji, koji imaju veliku važnost u teoriji verovatnoće.

Definicija 17. *Neka su A i B dva događaja nekog eksperimenta. Ako ostvarivanje jednog od njih ne utiče na verovatnoću ostvarivanja drugog događaja, kažemo da su ti događaji* ***nezavisni****. Obrnuto, ako ostvarivanje jednog od događaja utiče na verovatnoću ostvarivanja drugog događaja, onda kažemo da su ti događaji* ***zavisni****.*

Primer 5. *U kutiji se nalaze 3 plave i 5 crvenih kuglica istog oblika i veličine. Slučajno izvlačimo dve kuglice, jednu za drugom, bez vraćanja i pitamo se kolika je verovatnoća da su obe plave?*

Posmatrajmo sledeće događaje:

Događaj A: „ Prva izvučena kuglica je plava “ ,

Događaj B: „ Druga izvučena kuglica je plava “.

Imamo da je P(A)= $\frac{3}{8}$. Kada računamo verovatnoću događaja B, primećujemo da ona zavisi od toga da li se događaj A ostvario ili ne. Ako se A ostvario, onda je P(B)=$\frac{2}{7}$, jer su nakon što smo izvukli plavu kuglicu u kutiji ostale 2 plave i 5 crvenih. Ako se A nije ostvario, onda je P(B)=$\frac{3}{7}$, jer smo prvo izvukli crvenu kuglicu, pa pre drugog izvlačenja u kutiji imamo 3 plave i 4 crvene. Znači, ostvarivanje događaja A utiče na verovatnoću ostvarivanja događaja B, pa su A i B zavisni događaji.

Primer 6. *Opit se sastoji u bacanju dve kockice za igru. Posmatrajmo događaj A: „ Na prvoj kockici pao je broj 2“ i događaj B: „ Na drugoj kockici pao je neparan broj“ . P(A)=*$\frac{6}{36}$*, bez obzira da li se B ostvario ili ne; P(B)=*$\frac{18}{36}$*, bez obzira da li se A ostvario ili ne. Dakle, događaji A i B su nezavisni.*

Definicija 18. *Verovatnoća događaja B, pod uslovom da se ostvario događaj A, označava se sa P(B|A) i zove* ***uslovna verovatnoća****.*

Razmotrimo način određivanja uslovne verovatnoće. Neka je S={e_1,e_2,…,e_n} skup elementarnih događaja nekog opita i neka su A i B zavisni događaji vezani za isti opit. Neka je k≠0 elementarnih događaja povoljno za događaj A i neka je r od tih k elementarnih događaja (r≤k) povoljno za događaj B. Tada je P(B|A) = $\frac{r}{k}=\frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}}=\frac{P(AB)}{P(A)}$. Odavde je P(B|A)= $\frac{P(AB)}{P(A)}$, P(A)>0 (*), analogno je P(A|B)= $\frac{P(AB)}{P(B)}$, P(B)>0. Iz poslednje dve relacije dobijamo formule za presek ili proizvod događaja: P(AB)=P(A) P(B|A) ili P(AB)=P(B) P(A|B).(**) Napomenimo da ako je u uslovu (*) P(A)=0, tj. A=∅, onda se uslovna verovatnoća P(B|A) ne definiše. U slučaju tri zavisna događaja važi: P(ABC)=P(A) P(B|A) P(C|AB).

Ako su A i B nezavisni, onda je P(A|B)=P(A), odnosno P(B|A)=P(B), pa zamenom u (**) dobijamo P(AB)=P(A)P(B), analogno za tri nezavisna događaja je P(ABC)=P(A)P(B)P(C).

24.Zadatak. *Eksperiment se sastoji u bacanju dve kockice za igru. Ako su kockice pokazale zbir 10, kolika je verovatnoća da na jednoj od njih bude broj 6?*

Rešenje. Neka je događaj A: „ Na jednoj od kockica je pao broj 6“ , događaj B: „ Zbir brojeva na obe kockice je 10“ . Traži se P(A|B), po formuli je P(A|B)= $\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{3}{36}}=\frac{2}{3}$.

25.Zadatak. *U kutiji se nalazi 10 ceduljica na kojima su ispisani brojevi od 1 do 10. Izvlačimo na slučajan način tri ceduljice, jednu za drugom, bez vraćanja. Kolika je verovatnoća da na sve tri izvučene ceduljice budu parni brojevi?*

Rešenje. Neka je događaj A: „ Na prvoj ceduljici je izvučen paran broj " , događaj B: „Na drugoj ceduljici je izvučen paran broj", događaj C: „Na trećoj ceduljici je izvučen paran broj". Kako su događaji zavisni, biće P(ABC)=P(A) P(B|A) P(C|AB) = $\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{12}$.

Dalje navodimo dve teoreme o nezavisnosti događaja bez dokaza.

Teorema 4. *Ako su događaji A i B nezavisni, onda su nezavisni i događaji A i* $\overline{B}$.

Teorema 5. *Ako su događaji A i B nezavisni, onda su nezavisni i događaji* $\bar{A}$ *i* $\overline{B}$.

26.Zadatak. *Dva strelca gađaju, jedan za drugim, u istu metu. Verovatnoća da prvi strelac pogodi metu je 0,7, a verovatnoća da drugi strelac pogodi metu je 0,9. Izračunati verovatnoću:*

a. da oba strelca pogode metu

b. da prvi pogodi i drugi promaši

c. da bar jedan pogodi metu

d. da tačno jedan pogodi metu.

Rešenje. Neka je događaj A: „ Prvi strelac pogodio je metu ", događaj B: „ Drugi strelac pogodio je metu ". Očigledno su događaji A i B nezavisni.

a. P(AB)=P(A)P(B)=0,7·0,9=0,63
b. P(A$\overline{B}$)=P(A)P($\overline{B}$)= 0,7·0,1=0,07
c. P(A∪B)=P(A)+P(B)−P(AB)=0,7+0,9−0,63=0,97, jer događaji nisu isključivi
d. P(A$\overline{B}$+$\bar{A}$B)=P(A$\overline{B}$)+P($\bar{A}$B), jer su događaji A$\overline{B}$ i $\bar{A}$B isključivi. Dalje imamo:
P(A$\overline{B}$)+P($\bar{A}$B)= P(A)P($\overline{B}$)+P($\bar{A}$)P(B)=0,7·0,1+0,3·0,9=0,07+0,27=0,34

27.Zadatak. *Kolika je verovatnoća da će se od slova A,A,A,V,V,R,Š sastaviti ime glavnog grada Poljske?*

Rešenje. Da bismo sastavili reč Varšava, najpre od 7 slova koja imamo na raspolaganju biramo slovo V. Verovatnoća tog događaja je $\frac{2}{7}$, jer imamo 2 slova V. Pod uslovom da smo prvo odabrali slovo V, biramo slovo A sa verovatnoćom $\frac{3}{6}$, jer imamo 3 slova A od preostalih 6. Pod uslovom da smo izabrali slova V i A, biramo slovo R sa verovatnoćom $\frac{1}{5}$ (imamo jedno R od preostalih 5 slova). Jedino Š od ostala 4 slova biramo sa verovatnoćom $\frac{1}{4}$. Od preostala 3 slova dva su A, pa je verovatnoća izbora drugog slova A u reči jednaka $\frac{2}{3}$. Od poslednja dva slova jedino V biramo sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$, pa poslednje slovo A biramo sa verovatnoćom 1. Dakle, ako je događaj A: „ Sastavljeno je ime glavnog grada Poljske “, onda je:

P(A)= $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{420}$, odnosno približno 0,24%.

6.3. DOMAĆI ZADATAK

28.Zadatak. *Deo D1 jednog tipa automobila se posle određene pređene kilometraže zamenjuje u 25% slučajeva, a drugi deo D2 istog tipa automobila se zamenjuje u 80% slučajeva, ako se zameni prvi deo. Kolika je verovatnoća da će oba dela biti zamenjena ako je zamenjen prvi deo?*

29.Zadatak. *Radnik kontroliše rad tri mašine. Verovatnoća da će u toku dana biti potrebe da popravlja mašine iznosi 0,1 za prvu, 0,2 za drugu i 0,25 za treću mašinu. Odrediti kolika je verovatnoća da će u toku jednog dana biti potrebe da se poprave:*

a. sve tri mašine
b. dve mašine
c. jedna mašina
d. nijedna mašina.

30.Zadatak. *U studiu se nalaze dve kamere. Verovatnoća da u datom momentu bude uključena prva je 0,8, a druga kamera 0,6. Kolika je verovatnoća da u datom momentu bude snimljen aktuelni događaj?*

7. ŠESTI ČAS: TOTALNA VEROVATNOĆA. BAJESOVA FORMULA (OBRADA)

7.1. UVODNI DEO ČASA

Komentar domaćeg zadatka, ponavljanje pojma potpun sistem događaja i formula za uslovnu verovatnoću.

7.2. GLAVNI DEO ČASA

Neka je S skup elementarnih događaja nekog eksperimenta i neka su $H_1, H_2,...,H_n$ slučajni događaji koji čine potpun sistem događaja tog eksperimenta, $S=H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup ... \cup H_n$ i važi da je $H_i \cap H_j = \emptyset$, za $i \neq j$, $i,j=1,2,...,n$. Neka je A neki događaj takav da je $A \subset S$, tada je $A=S \cap A$, odnosno $A= (H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup ... \cup H_n) \cap A$. Koristeći distributivnost preseka prema uniji imamo:

$$A=(H_1 \cap A) \cup (H_2 \cap A) \cup ... \cup (H_n \cap A) \quad (1).$$

Kako su događaji $H_1, H_2,...,H_n$ po pretpostavci međusobno isključivi, to su i događaji $H_1 \cap A$, $H_2 \cap A$,..., $H_n \cap A$ međusobno isključivi, pa je iz (1):

$$P(A)=P(H_1A)+P(H_2A)+...+P(H_nA) \quad (2).$$

Međutim, za svako k ($1 \leq k \leq n$) važi da je $P(H_kA)=P(H_k)P(A|H_k)$. (3)

Iz (2) i (3) dobijamo:

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n} P(H_k)\, P(A|H_k). \quad (*)$$

Slučajni događaji $H_1, H_2,...,H_n$ nazivaju se **hipoteze**, a formula (*) naziva se **formula totalne (potpune) verovatnoće**.

Događaj AH_k znači: događaj A se realizovao preko uslova H_k, $k=1,2,...,n$.

Događaj A se može ostvariti preko bilo kog događaja $H_1, H_2,...,H_n$, tj. samo preko jednog od njih.

Ako se zna da se ostvario događaj A, možemo odrediti verovatnoće $P(H_k|A)$, za svako $k=1,2,...,n$. Kako je $P(AH_k)=P(A)P(H_k|A)=P(H_k)P(A|H_k)$, to je:

$$P(H_k|A)=\frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)}, \forall k=1,2,...,n. \quad (**)$$

Jednakost (**) poznata je kao **Bajesova formula.**

31.Zadatak. *Prodavnica dobija hleb iz dve pekare, iz prve 6 gajbi, a iz druge 4 gajbe hleba. Prva pekara proizvodi 2% nepečenog hleba, a druga 5%.*

a. Odrediti verovatnoću da kupljeni hleb u toj pekari bude nepečen.

b. Odrediti verovatnoću da ako je kupljen nepečen hleb on potiče iz prve pekare.

Pretpostaviti da su hlebovi istog oblika i veličine.

Rešenje. Neka su hipoteze: H_1-Hleb potiče iz prve pekare i H_2-Hleb potiče iz druge pekare, a događaj A- Kupljen je nepečen hleb. Na osnovu formule potpune verovatnoće je:

a. $P(A)=P(H_1)\,P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2) = \frac{6}{10}\cdot\frac{2}{100}+\frac{4}{10}\cdot\frac{5}{100}=\frac{32}{1000}=\frac{4}{125}$

b. Traži se verovatnoća uslovnog događaja $H_1|A$. Na osnovu Bajesove formule je:

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{6}{10}\cdot\frac{2}{100}}{\frac{4}{125}}=\frac{3}{8}.$$

32.Zadatak. *Od tri istovetne puške slučajno se bira jedna i njome gađa meta jednim hicem.*

a. Kolika je verovatnoća da je meta pogođena ako je verovatnoća da je meta pogođena prvom puškom 0,75, drugom puškom 0,8, a trećom puškom 0,9?

b. Ako je meta pogođena, kolika je verovatnoća da je pogođena iz druge puške?

Rešenje. Neka su hipoteze H_i -Izabrana je i-ta puška, i=1,2,3. Tada je $P(H_i)=\frac{1}{3}$. Događaj A je da je meta pogođena.

a. $P(A)=P(H_1)\,P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{9}{10}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{49}{20}=\frac{49}{60}$

b. $P(H_2|A)=\frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{49}{60}}=\frac{16}{49}.$

33.Zadatak. *U tri istovetne kutije nalaze se kuglice jednakih dimenzija, u prvoj 6 belih i 2 crne, u drugoj 9 belih i 4 crne, a u trećoj 4 bele i 3 crne. Na slučajan način odabere se jedna kuglica iz prve kutije i prebaci u drugu kutiju. Od svih kuglica koje se sada nalaze u drugoj kutiji na slučajan način se izabere jedna kuglica i prebaci u treću kutiju, a zatim se iz treće kutije na slučajan način biraju 2 kuglice. Kolika je verovatnoća da su obe bele boje?*

Rešenje. Događaj A: „ Iz treće kutije izvučene su dve bele kuglice"

H_1: „Iz druge u treću kutiju prebačena je kuglica bele boje"

H_2: „Iz druge u treću kutiju prebačena je kuglica crne boje"

Tada je po formuli totalne verovatnoće:

$$P(A)=P(H_1)\,P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=P(H_1)\cdot\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}+P(H_2)\cdot\frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{5}{14}P(H_1)+\frac{3}{14}P(H_2).$$

Treba odrediti $P(H_1)$ i $P(H_2)$. Sada posmatramo potpun sistem događaja B_1 i B_2 :

B_1: „ Iz prve u drugu kutiju prebačena je bela kuglica“

B_2: „Iz prve u drugu kutiju prebačena je crna kuglica“.

$$P(H_1)=P(B_1)\,P(H_1|B_1)+P(B_2)P(H_1|B_2)=\frac{6}{8}\cdot\frac{10}{14}+\frac{2}{8}\cdot\frac{9}{14}=\frac{39}{56}$$

$$P(H_2)=P(B_1)\,P(H_2|B_1)+P(B_2)P(H_2|B_2)=\frac{6}{8}\cdot\frac{4}{14}+\frac{2}{8}\cdot\frac{5}{14}=\frac{17}{56}$$

Konačno je $P(A)=\frac{5}{14}\cdot\frac{39}{56}+\frac{3}{14}\cdot\frac{17}{56}=\frac{123}{392}$.

7.3. DOMAĆI ZADATAK

34.Zadatak. *U školi imamo dva odeljenja četvrtog razreda gimnazije, IV_1 i IV_2 . U IV_1 je 20 učenika, od kojih je 6 odličnih, a u IV_2 je 25 učenika, od kojih je 5 odličnih. Na slučajan način se bira razred i iz njega učenik.*

a. Kolika je verovatnoća da je izabrani učenik odličan?

b. Ako je izabran odličan učenik, kolika je verovatnoća da je iz IV_1, odnosno IV_2 ?

35.Zadatak. *U gradu se nalaze tri diskoteke. Verovatnoća da petkom uveče bude veče disko muzike je 0,2 za prvu, 0,3 za drugu i 0,4 za treću diskoteku. Grupa devojaka u petak uveče slučajno odlazi u jednu od te tri diskoteke.*

a. Kolika je verovatnoća da će prisustvovati večeri disko muzike?

b. Ako devojke prisustvuju večeri disko muzike, kolika je verovatnoća da su otišle u prvu diskoteku?

8. SEDMI ČAS: VEROVATNOĆA DOGAĐAJA (UTVRĐIVANJE)

8.1. UVODNI DEO ČASA

Ponavljanje osnovnih definicija i formula iz dosada obrađenog gradiva.

8.2. GLAVNI DEO ČASA

36.Zadatak. *Šest porodica su se našle zajedno na izletu. Svaku porodicu čine: otac, majka i troje dece. Na slučajan način izabrani su jedan otac, jedna majka i jedno dete. Kolika je verovatnoća da svi troje pripadaju istoj porodici?*

Rešenje. Neka je A događaj čija se verovatnoća traži. Ukupan broj mogućih izbora jednog oca, jedne majke i jednog deteta je n=6·6·18. Broj povoljnih slučajeva za događaj A je m=6·3 (otac i majka se mogu izabrati na 6 načina i njihovo dete na 3 načina). Zato je P(A)=$\frac{6\cdot 3}{6\cdot 6\cdot 18}$ = $\frac{1}{36}$.

37.Zadatak. *Šest strelaca gađa u 10 meta. Ako svaki strelac nasumično bira metu, kolika je verovatnoća da će svi strelci gađati različite mete?*

Rešenje. Ako mete označimo redom sa prvih 10 slova abecede, onda je broj mogućih izbora meta šest strelaca svaka reč dužine 6 od 10 slova, gde se slova mogu ponavljati, pa je po formuli varijacija sa ponavljanjem n=10^6 .

Neka je događaj A: „ Svi strelci gađaju različite mete“. Tada je broj povoljnih slučajeva za događaj A svaka reč dužine 6 u kojoj su slova različita, a takvih reči ima m= V_6^{10} = 6!· $\binom{10}{6}$.

$$P(A)= \frac{m}{n} = 0{,}1512.$$

38.Zadatak. *Na raspisani konkurs za 3 radna mesta prijavilo se 14 muškaraca i 6 žena i svi ispunjavaju uslove konkursa. Odredi verovatnoću da će, ukoliko se izbor kandidata vrši na slučajan način, biti izabrani:*

a. bar jedan muškarac

b. 2 muškarca i jedna žena.

Rešenje. Broj mogućih izbora je n=C_3^{20}= 1140.

a. Ako je događaj A: „ Izabran je bar jedan muškarac“, onda je njemu suprotan događaj Ā: „ Među izabranima nema nijedan muškarac (odnosno svi izabrani su žene)“. Dalje je:

$$P(\bar{A})= \frac{C_3^6}{1140} = \frac{20}{1140} = \frac{1}{57}, \text{ pa je } P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{1}{57} = \frac{56}{57}.$$

b. Neka je događaj C: „ Izabrana su 2 muškarca i jedna žena“. Ovde je m=$C_2^{14} \cdot C_1^6 = \frac{14\cdot 13}{2} \cdot 6 = 91\cdot 6 = 546$, pa je zbog toga P(C)=$\frac{546}{1140} = \frac{91}{190}$.

39.Zadatak. *a. Na koliko načina se na polici mogu složiti knjige iz matematike, fizike i hemije (u navedenom redosledu), ako ima 10 različitih knjiga iz matematike, 5 različitih knjiga iz fizike i 4 različite knjige iz hemije?*

b. Neka su knjige složene na slučajan način u okviru iste oblasti, a u datom redosledu, što se tiče različitih oblasti. Odrediti verovatnoću da 4 određene knjige iz matematike, 3 određene knjige iz fizike i 2 određene knjige iz hemije budu, u okviru svojih oblasti, složene jedna do druge i to: 1° bez obzira na redosled, 2° u određenom redosledu.

Rešenje. a. Koristeći permutacije bez ponavljanja, imamo da se knjige iz matematike mogu složiti na 10! načina, knjige iz fizike na 5! načina i knjige iz hemije na 4! načina, pa je ukupan broj rasporeda knjiga u navedenom redosledu jednak 10!· 5!· 4! .

b. Pri slučajnom rasporedu knjiga, smatra se da su svi rasporedi koji se mogu dobiti na taj način jednako verovatni. Kako je broj rasporeda konačan, primenićemo klasičnu definiciju verovatnoće. Odredimo broj rasporeda koji su povoljni za slučajne događaje 1° i 2° .Te 4 knjige iz matematike sada smatramo za celinu, pa „ različitih knjiga“ iz matematike imamo 7 i njih možemo rasporediti na 7! načina. Za svaki takav raspored ima 4! rasporeda za 4 knjige u okviru posmatrane celine, pa se knjige iz matematike mogu rasporediti na 7!· 4! načina. Analogno je 3!· 3! broj načina da se poređaju knjige iz fizike, a 3!· 2! broj načina da se poređaju knjige iz hemije. Ukupan broj različitih rasporeda povoljnih za događaj iz 1° je 7!· 4!· 3!· 3!· 3!· 2! , pa je verovatnoća tog događaja $P_1 = \frac{7!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 2!}{10!\cdot 5!\cdot 4!} = 0{,}005$.

Verovatnoća događaja iz 2°, zaokruženo na 5 decimala je $P_2 = \frac{7!\cdot 3!\cdot 3!}{10!\cdot 5!\cdot 4!} = 0{,}00002$.

40.Zadatak. *Pravilan tetraedar ima obojene strane: jednu u crveno, drugu u plavo, treću u žuto, a na četvrtoj su sve tri boje. Tetraedar bacamo i registrujemo boje strane na koju padne. Neka su događaji A-strana na koju je pao tetraedar ima plave boje, B-ima crvene boje, C-ima žute boje. Ispitati da li su događaji A,B,C nezavisni.*

Rešenje. Imamo da je P(A)=P(B)=P(C)=$\frac{2}{4}$, P(AB)=P(AC)=P(BC)=$\frac{1}{4}$ i P(ABC)=$\frac{1}{4}$. Tako je:

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{4}$$

$$P(AC)=P(A)P(C)=\frac{1}{4}$$

$$P(BC)=P(B)P(C)=\frac{1}{4},$$

ali

$$P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C).$$

Dakle, događaji A,B,C nisu nezavisni, iako su svaka dva po parovima nezavisni.

41.Zadatak. *Imamo tri novčića, od kojih su dva ispravna, a treći sa obe strane ima grb. Slučajno je izabran jedan novčić i bačen 4 puta. Ako je sva četiri puta pao grb, kolika je verovatnoća da je izabran ispravan, odnosno neispravan novčić?*

Rešenje. Obeležimo događaje A_1-izabran je ispravan novčić, A_2-izabran je neispravan novčić, B-4 puta je pao grb. Traže se verovatnoće $P(A_1|B)$ i $P(A_2|B)$ koje možemo odrediti pomoću Bajesove formule. Imamo da je $P(A_1)=\frac{2}{3}$, $P(A_2)=\frac{1}{3}$,a ako je izabran ispravan novčić, verovatnoća da 4 puta padne grb je $(\frac{1}{2})^4$, odnosno $P(B|A_1)= (\frac{1}{2})^4$.

Za novčić, koji sa obe strane ima grb, sigurno je da će sva 4 puta pasti grb, dakle $P(B|A_2)=1$.

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot(\frac{1}{2})^4}{\frac{2}{3}\cdot(\frac{1}{2})^4+1\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{9}$$

$$P(A_2|B)=1-P(A_1|B)=\frac{8}{9}$$

Zaključujemo da je mnogo verovatnije da je izabran neispravan novčić.

8.3. DOMAĆI ZADATAK

42.Zadatak. *Opit se sastoji od bacanja kockice i novčića. Posmatraju se događaj A- da na kockici padne paran broj i događaj B- da na novčiću padne pismo. Dokazati da su događaji A i B nezavisni.*

43.Zadatak. *Na 9 jednakih listića ispisane su cifre 1,2,3,...,9. Nasumično se izvlače tri listića, jedan po jedan i slažu sleva na desno. Odrediti verovatnoću da će tako dobijeni trocifreni broj biti veći od 200, a manji od 700.*

9. OSMI ČAS: DISKRETNA I NEPREKIDNA SLUČAJNA PROMENLJIVA. ZAKON RASPODELE SLUČAJNE PROMENLJIVE (OBRADA)

9.1. UVODNI DEO ČASA

Komentar domaćeg zadatka.

9.2. GLAVNI DEO ČASA

Često srećemo situacije u kojima se svakom elementarnom ishodu jednog opita pridružuje neki realan broj, tj. meri neka njegova numerička karakteristika. Na takvo pridruživanje nailazimo, na primer, u igrama na sreću, gde se svakom ishodu pripisuje određeni novčani dobitak ili gubitak za igrača.

Dodeljujući svakom ishodu opita realan broj, mi ustvari zadajemo funkciju na skupu $S=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ elementarnih događaja sa vrednostima u skupu R. Označimo tu funkciju sa X. Kako ishod opita ne možemo predvideti, tako i vrednost funkcije X za dati ishod ne znamo unapred. Zato se ova funkcija i zove *slučajna promenjiva*.

Evo još nekih primera slučajnih promenjivih: veličina greške pri merenju neke fizičke veličine, broj ostvarivanja događaja A u n izvođenja opita za koji je A vezan, broj devojčica među stotinu novorođenčadi, porast cene nafte izražen u dolarima, vek trajanja nekog proizvoda, težina zrna pšenice uzgajane na nekoj parceli itd. Na vrednosti ovih veličina utiče veći broj međusobno nezavisnih okolnosti, tzv. slučajnih faktora, koje se ne mogu unapred predvideti i oceniti.

Definicija 19. *Svako preslikavanje X prostora elementarnih događaja S u skup realnih brojeva, takvo da za svaki interval I na realnoj pravoj skup svih elementarnih događaja na kojima X uzima vrednosti iz I predstavlja jedan slučajan događaj, naziva se* ***slučajna promenjiva****,*

$$X: S \to R.$$

Definicija 20. *Slučajna promenjiva X je* ***diskretnog tipa (diskretna slučajna promenjiva)*** *ako je njen skup vrednosti X(S) konačan ili beskonačan niz realnih brojeva. Slučajna promenjiva X je* ***neprekidnog tipa (neprekidna slučajna promenjiva)*** *ako je skup svih vrednosti koje ona uzima jedan interval na realnoj pravoj (ovaj interval može biti i ceo skup R).*

Za potpunu ocenu slučajne promenjive X i praktično korišćenje njenih karakteristika, potrebno je i dovoljno poznavati:

a. Skup X(S) svih vrednosti koje slučajna promenjiva X može uzeti, tj. vrednost slučajne promenjive za svaki ishod opita, odnosno svaki slučajni događaj.

b. Verovatnoće svake od tih vrednosti slučajne promenjive X.

Primer 7. *Opit se sastoji u bacanju tri novčića. Neka je karakteristika opita, tj. slučajna promenjiva X-Broj palih grbova. Odredićemo vrednosti slučajne promenjive X i verovatnoće sa kojima se te vrednosti ostvaruju.*

Skup elementarnih događaja je S={ PPP, PPG, PGP, GPP, PGG, GPG, GGP, GGG}, gde troslovna skraćenica označava redosled padanja pisma(P) i grba(G) na novčićima redom. Broj palih grbova može biti: 0,1,2 ili 3, pa je X(S)={0,1,2,3}- skup vrednosti slučajne promenjive X (konačan niz brojeva).

Dalje uvedimo događaje: A_0 = {PPP}, A_1={PPG,PGP,GPP}, A_2 ={PGG,GPG,GGP}, A_3 ={GGG}, koji sadrže ishode opita prema broju grbova. Označimo sa ($X=x_k$) događaj da slučajna promenjiva X uzme vrednost $x_k \in X(S)$, a sa $P(X=x_k)=p(k)=p_k$ verovatnoću tog događaja. U našem slučaju je:

$$p_1=P(X=0)=P(A_0)=\frac{1}{8}$$

$$p_2=P(X=1)=P(A_1)=\frac{3}{8}$$

$$p_3=P(X=2)=P(A_2)=\frac{3}{8}$$

$$p_4=P(X=3)=P(A_3)=\frac{1}{8}.$$

Za diskretnu slučajnu promenjivu X skup $\{p(x_k) \mid x_k \in X(S)\}$ određuje *raspodelu verovatnoća* slučajne promenjive X. Ova raspodela se pregledno prikazuje šemom:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix},$$

gde je $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n + \ldots = 1$, jer je $(X=x_1) \cup (X=x_2) \cup \ldots \cup (X=x_n) \cup \ldots$ siguran događaj.

Definicija 21. *Skup vrednosti diskretne slučajne promenjive $\{x_1,x_2,\ldots\}$ i odgovarajuće verovatnoće $p(x_i)$, $i=1,2,\ldots$, čine* **zakon raspodele** *slučajne promenjive X, ili kraće, raspodelu slučajne promenjive X.*

Za slučajnu promenjivu u primeru 7 zakon raspodele je:

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Primer 8. *Najjednostavnija slučajna promenjiva je tzv.* ***indikator događaja****. Ako je S prostor elementarnih događaja nekog opita i događaj $A \subset S$, tada se slučajna promenjiva $I_A : S \to R$, čiji je zakon raspodele*

$$I_A: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ P(\bar{A}) & P(A) \end{pmatrix},$$

zove indikator slučajnog događaja A.

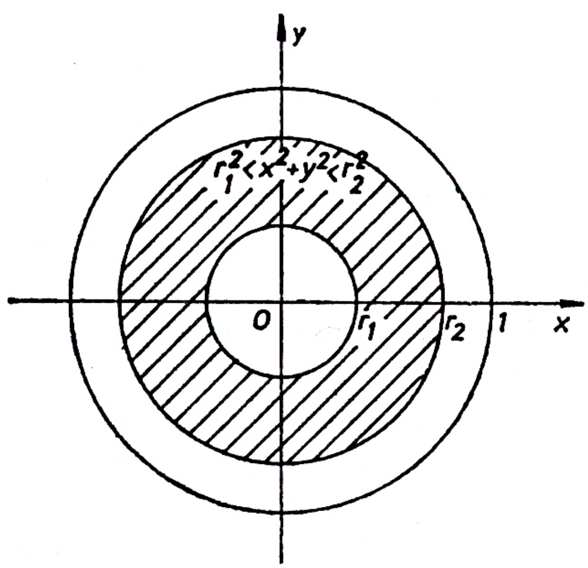
Primer 9. (Slučajna promenljiva X sa (prebrojivo) beskonačno mnogo vrednosti)

Zakon raspodele slučajne promenjive X dat je sa: $p(k)=P(X=x_k)=\frac{1}{2^k}$, $k=1,2,3,\ldots$, tj. pomoću šeme:

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \ldots & \frac{1}{2^k} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Lako se dokazuje da je $\sum_{k=1}^{\infty} p(x_k) = 1$, tj. da je $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k = 1$, kao zbir konvergentnog geometrijskog reda ($q=\frac{1}{2}$, $|q|<1$).

Primer 10. *Posmatrajmo sledeći opit: Slučajno se bira tačka M(x,y) na kružnoj površi $x^2 + y^2 \leq 1$ u ravni Oxy.*



Slika 6.

Verovatnoća da će biti izabrana tačka u nekoj određenoj podoblasti D date kružne površi K proporcionalna je površini te podoblasti, na primer, površini kružnog prstena na slici (šrafiran deo), što znači da je ta verovatnoća jednaka količniku površine podoblasti D i površine cele kružne površi K (geometrijska verovatnoća) .

Neka je slučajna promenjiva X rastojanje izabrane tačke M(x,y) od koordinatnog početka. Svakom elementarnom događaju (tački) M(x,y) preslikavanje X dodeliće realan broj :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ 0 \leq r \leq 1.$$

Događaj (X=r) sastoji se od izbora tačaka M(x,y) za koje je $x^2 + y^2 = r^2$, što je skup tačaka kružne linije poluprečnika r. Verovatnoća P(X=r) za svaku pojedinačnu vrednost slučajne promenjive X jednaka je nuli, jer je podoblast kružne površi kružna linija, a njena površina je 0. To ne znači da se konkretna tačka M(x,y) neće izabrati, već da je taj izbor skoro nemoguć događaj. Zato posmatramo vrednosti slučajne promenjive X koje pripadaju intervalu $I=(r_1, r_2)$ na odsečku [0,1] ($0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1$). Događaj $X \in I$ predstavlja kružni prsten D: $r_1^2 < x^2 + y^2 < r_2^2$, pa je :

$$P(X \in I) = \frac{Površina\ kružnog\ prstena\ D}{Površina\ cele\ kružne\ površi\ K}\ .$$

Odavde je konačno $P(X \in I) = \frac{r_2^2\pi - r_1^2\pi}{1^2 \cdot \pi} = r_2^2 - r_1^2$.

Primetimo da bi isti rezultat bio i da su intervali I oblika: $[r_1, r_2)$, $(r_1, r_2]$ ili $[r_1, r_2]$.

Ovo je primer slučajne promenljive intervalnog ili neprekidnog tipa. Primetimo da se i kod slučajne promenljive diskretnog tipa može lako preći na verovatnoće uzimanja vrednosti u pojedinim intervalima, tako što će se za svaki interval sabrati verovatnoće svih onih vrednosti slučajne promenljive koje pripadaju tom intervalu. Na primer, za slučajnu promenljivu X iz primera 7 ako je I=[0,2) imaćemo:

$P(X \in I) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$, ali je za I=(0,2), $P(X \in I) = P(X=1) = \frac{3}{8}$, što je ključna razlika u odnosu na slučajne promenljive neprekidnog tipa.

9.3. DOMAĆI ZADATAK

44.Zadatak. *Pri bacanju numerisane kockice slučajna veličina X je broj dinara koje igrač dobija ili gubi, u zavisnosti od broja k koji padne na gornjoj strani kockice. Neka su uslovi:*

$$X = \begin{cases} k,\ za\ k = 4\ ili\ k = 5 \\ -3k,\ za\ k = 1\ ili\ k = 2 \\ 0,\ za\ k = 3\ ili\ k = 6 \end{cases}$$

Odrediti raspodelu verovatnoća slučajne promenljive X.

45.Zadatak. *Novčić se slučajno baca toliko puta dok ne padne grb ili dok se ne izvedu 4 bacanja. Odrediti skup S i raspodele verovatnoća za sledeće slučajne promenljive:*

X: Broj bacanja novčića, Y: Broj palih pisama, Z: Broj palih grbova.

46.Zadatak. *Koje od sledećih slučajnih promenljivih su diskretnog, a koje neprekidnog tipa:*

a. broj ženske dece među 150 novorođenčadi

b. broj gađanja do prvog pogotka u metu

c. rastojanje od centra mete do tačke u koju je udarilo zrno

d. dužina pređenog puta projektila do mesta udara? Obrazložiti odgovor.

47.Zadatak. *Automobil se kreće u pravcu gde će naići na tri semafora. Svaki od njih dopušta dalje kretanje sa verovatnoćom* $\frac{2}{3}$*, a zabranjuje kretanje sa verovatnoćom* $\frac{1}{3}$*. Naći raspodelu verovatnoće prolaska automobila pored semafora do prvog zaustavljanja.*

10.DEVETI ČAS: FUNKCIJA RASPODELE I GUSTINA SLUČAJNE PROMENLJIVE (OBRADA)

10.1. UVODNI DEO ČASA

Ponavljanje pojma slučajne promenljive.

10.2. GLAVNI DEO ČASA

Neka je X slučajna promenljiva definisana nad prostorom S nekog opita i neka je x ma koji realan broj, tada je događaj

$$(X<x) = (X\in(-\infty,x)) = \{e \mid X(e)<x\}$$

skup svih elementarnih događaja iz S koje slučajna promenljiva X preslikava na realnu osu levo od fiksiranog broja (tačke) x.

Definicija 22*. Funkcija F, koja svakom realnom broju x dodeljuje verovatnoću*

$$P(X\in(-\infty,x)) = P(X<x),$$

odnosno za koju je F(x)=P(X<x), x∈R, naziva se **funkcija raspodele** *slučajne promenljive X.*

Primer 11. *Za slučajnu promenljivu iz primera 7 odredimo funkciju raspodele.*

Zakon raspodele date slučajne promenljive je X: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

1° Ako je x≤0, F(x)=P(X<x)=0

2° Ako je 0<x≤1, F(x)=P(X<x)=P(X=0)=$\frac{1}{8}$

3° Ako je 1<x≤2, F(x)=P(X<x)=P(X=0)+P(X=1)=$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$

4° Ako je 2<x≤3, F(x)=P(X<x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$

5° Ako je x>3, F(x)=P(X<x)=1.

Tražena funkcija raspodele F(x) je:

$$\begin{cases} 0, & za \;\; x \le 0 \\ \frac{1}{8}, & za \;\; 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{2}, & za \;\; 1 < x \le 2 \\ \frac{7}{8}, & za \;\; 2 < x \le 3 \\ 1, & za \;\; x > 3 \end{cases}$$

Kada se zna funkcija raspodele F neke slučajne promenljive X, onda se za svaki interval I=[a, b) može izračunati verovatnoća da X uzme vrednost u tom intervalu:

$$P(X \in I)=P(a \le X<b)=P(X<b)-P(X<a)=F(b)-F(a),$$

odnosno

$$P(a \le X<b)=F(b)-F(a).$$

Tako je u primeru 11: $P(\frac{1}{2} \le X<\frac{5}{2}) = F(\frac{5}{2})-F(\frac{1}{2}) = \frac{7}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$.

Kako je funkcija F(x) slučajne promenljive X verovatnoća događaja (X<x), prirodno je da ispunjava uslove date sledećom teoremom.

Teorema 6. *1° Funkcija F(x), ma koje slučajne promenljive X, je monotono neopadajuća funkcija*

2° $lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$ *(jer je događaj (X<$-\infty$) nemoguć)*

$lim_{x\to +\infty} F(x) = 1$ *(jer je događaj (X<$+\infty$) siguran)*

3° Funkcija F(x) je neprekidna sleva, u svakoj tački x_0 iz R: $lim_{x\to x_{0-}} F(x) = F(x_0)$.

Osobina 2° obično se zapisuje na sledeći način: F($-\infty$)=0, F(+∞)=1.

Iz osobina 1° i 3° zaključujemo da je $0\leq F(x)\leq 1$.

Definicija 23. *Za slučajnu promenljivu X kažemo da je* **apsolutno neprekidnog tipa** *ako postoji nenegativna integrabilna funkcija p(x) na intervalu ($-\infty$,x), x∈R, takva da je:*

$$P(X<x)=F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt \, .$$

Funkcija p naziva se **gustina raspodele** *slučajne promenljive X. Grafik funkcije p(x) naziva se kriva gustine raspodele ili kraće kriva raspodele verovatnoća.*

Geometrijski posmatrano, F(x), verovatnoća da slučajna promenljiva X uzme vrednost manju od x, jednaka površini figure omeđene krivom gustine (grafikom p(x)) i X-osom nad intervalom ($-\infty$,x).

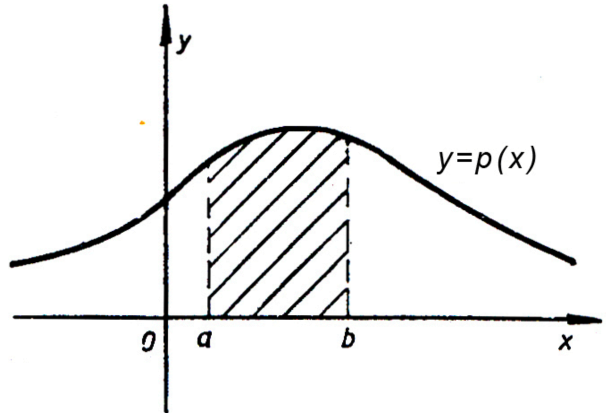
Kako je

$$P(a\leq X<b)=F(b)-F(a)=\int_{-\infty}^{b} p(x)dx - \int_{-\infty}^{a} p(x)dx = \int_{a}^{b} p(x)dx \, ,$$

to je

$$P(a\leq X<b)=\int_{a}^{b} p(x)dx.$$

Verovatnoća da slučajna promenljiva apsolutno neprekidnog tipa uzme vrednost u intervalu (a,b) jednaka je površini krivolinijskog trapeza ispod krive gustine (y=p(x)) nad odsečkom [a,b].



Slika 7.

Iz definicije 23 sledi za x=+∞ da je $F(+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$, što je značajna osobina funkcije y=p(x).

Treba istaći da kod slučajne promenljive apsolutno neprekidnog tipa važi P(X=x)=0, za svaki realan broj x, što je posledica neprekidnosti njene funkcije raspodele. Imajući u vidu ovu činjenicu, može se pisati:

$$P(a<X<b)=P(a<X\leq b)=P(a\leq X<b)=P(a\leq X\leq b)= \int_a^b f(x)dx= F(b)-F(a).$$

(na primer, $P(a<X\leq b)= P(a<X<b)+P(X=b)$ i $P(X=b)=0$ daje $P(a<X\leq b)=P(a<X<b)$)

Diferenciranjem integrala po promenljivoj gornjoj granici, iz definicije 23 dobija se:

$$F'(x) = p(x),$$

za svako $x\in R$ za koje je funkcija p(x) neprekidna.

Primer 12. *Za funkciju*

$$F(x)=\begin{cases} 0, & za\ x\leq 0 \\ x^2, & za\ 0<x\leq 1 \\ 1, & za\ x>1 \end{cases}$$

gustina raspodele je

$$p(x)=\begin{cases} 0, & za\ x<0 \\ 2x, & za\ 0\leq x\leq 1 \\ 0, & za\ x>1 \end{cases} .$$

Ovde je $F'(x) = p(x)$ za $x\neq 1$.

10.3. DOMAĆI ZADATAK

48.Zadatak. *Gustina raspodele slučajne promenljive X je funkcija* $p(x)=\frac{a}{1+x^2}$, $x \in R$.

a. Odrediti konstantu a.

b. Naći $P(X<\sqrt{3})$

c. Naći $P(X \in (-1,1))$

d. Naći $P(X>\sqrt{3})$.

49.Zadatak. *Funkcija raspodele slučajne promenljive X je* $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\, x$, $x \in R$.

a. Odrediti gustinu raspodele p(x)

b. Odrediti x_0*, za koje je* $P(X>x_0)=0{,}25$.

11.DESETI ČAS: MATEMATIČKO OČEKIVANJE I DISPERZIJA (OBRADA)

11.1. UVODNI DEO ČASA

Komentar domaćeg zadatka.

11.2. GLAVNI DEO ČASA

Na prethodnim časovima upoznali smo se sa slučajnim promenljivim pomoću njihovih zakona, funkcija i gustina raspodele. To su funkcionalne karakteristike slučajnih promenljivih i one jednoznačno određuju slučajnu promenljivu.

Polazeći od navedenih funkcionalnih karakteristika, možemo izračunati neke numeričke (brojčane) karakteristike slučajne promenljive, koje se koriste u velikoj meri i na osnovu njih donosimo izvesne zaključke o proučavanim slučajnim promenljivim (umesto cele raspodele praktično koristimo samo jedan broj). U najvažnije numeričke karakteristike slučajne promenljive spadaju *matematičko očekivanje* i *disperzija*.

Definicija 24. *Neka je X diskretna slučajna promenljiva data zakonom raspodele*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p(x_1) & p(x_2) & \end{pmatrix}.$$

Matematičko očekivanje *promenljive X, u oznaci E(X), definiše se kao*

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p(x_k),$$

pod uslovom da zbir $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot p(x_k)$ *postoji. U slučaju kad ovaj zbir ne postoji, smatramo da matematičko očekivanje nije definisano.*

Definicija 25. *Ako je X neprekidna slučajna promenljiva sa gustinom raspodele p, njeno matematičko očekivanje definisano je sa*

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)dx\,,$$

pod uslovom da integral $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, p(x)dx$ *postoji. U slučaju kad ovaj integral ne postoji, smatra se da matematičko očekivanje nije definisano.*

Matematičko očekivanje predstavlja prosečnu (srednju) očekivanu vrednost slučajne promenljive.

Primer 13. *Neka je X slučajna promenljiva definisana kao broj koji pokazuje gornja strana kockice prilikom bacanja. Treba izračunati njeno matematičko očekivanje.*

Raspodela verovatnoće ove slučajne promenljive data je sa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Njeno matematičko očekivanje je $E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$.

Primer 14. *Događaj A se ostvaruje sa verovatnoćom* $\frac{1}{4}$. *Neki čovek se kladi na taj događaj na sledeći način: ulaže 1 dinar, s tim što gubi svoj ulog ako se događaj A ne ostvari, a dobija 3 dinara (dakle, svoj ulog i još dva dinara) ako se događaj A ostvari. Pitamo se da li se ova opklada isplati.*

Neka je slučajna promenljiva X broj dobijenih dinara. Dobitak može da iznosi 2 dinara ili -1 dinar, pa X uzima vrednosti iz skupa $\{2,-1\}$ i ima raspodelu:

$$X: \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Očekivana vrednost dobitka je $E(X)= 2\cdot \frac{1}{4} + (-1)\cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$.

Zaključujemo da je ova opklada nepovoljna (ne isplati se), jer je E(X)<0.

Primer 15*. Slučajna promenljiva X ima gustinu raspodele verovatnoće definisanu sa:*

$$p(x)=\begin{cases} \frac{3}{8}\,(x^2-4x+5), & za\ \ 1\le x\le 3 \\ 0, & za\ ostale\ vrednosti\ x \end{cases}.$$

Pitamo se koliko je matematičko očekivanje slučajne promenljive X.

Koristeći definiciju 25, imamo: $E(X)= \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)dx= \frac{3}{8}\int_1^3 (x^3-4x^2+5x)dx = 2$.

U sledećoj teoremi navodimo, bez dokaza, neke značajne osobine matematičkog očekivanja.

Teorema 7. *Ako je E(X) matematičko očekivanje slučajne promenljive X, onda važi:*

a. E(c)=c, gde je c konstanta

b. E(cX)=cE(X)

c. E(X+Y)=E(X)+E(Y)

d. E(XY)=E(X)E(Y), ukoliko su X i Y međusobno nezavisne.

Na osnovu matematičkog očekivanja definiše se disperzija slučajne promenljive. Dok matematičko očekivanje predstavlja „prosečnu” vrednost slučajne promenljive, to disperzija predstavlja prosečno kvadratno odstupanje od matematičkog očekivanja.

Definicija 26*. Neka je data slučajna promenljiva X. Ako postoji* $E(X-E(X))^2$ *, tada kažemo da slučajna promenljiva X ima* **disperziju***:*

$$D(X)= E(X-E(X))^2 .$$

Za diskretnu slučajnu promenljivu X sa zakonom raspodele

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots \end{pmatrix}$$

i matematičkim očekivanjem E(X)=m je

$$D(X)=(x_1-m)^2\cdot p_1+(x_2-m)^2\cdot p_2+(x_3-m)^2\cdot p_3+\dots .$$

Za neprekidnu slučajnu promenljivu X sa gustinom raspodele p(x) disperzija je:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2\,p(x)\,dx .$$

Definicija 27. *Pozitivna vrednost kvadratnog korena disperzije naziva se* ***standardna devijacija*** *slučajne promenljive X, u oznaci σ(X), tj.* $\sigma(X)=+\sqrt{D(X)}$.

Primer 16. *Izračunajmo disperziju i standardnu devijaciju slučajne promenljive X sa raspodelom:*

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

$$D(X)=E((X-\frac{5}{8})^2)=(0-\frac{5}{8})^2\cdot\frac{1}{2}+(1-\frac{5}{8})^2\cdot\frac{3}{8}+(2-\frac{5}{8})^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{31}{64}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{31}{64}}=\frac{1}{8}\sqrt{31}\approx 0{,}701.$$

Primer 17. *Gustina raspodele slučajne promenljive X je :*

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+1\right), & za\ 0\le x\le 2\\ 0, & za\ ostale\ vrednosti\ x\end{cases}.$$

Odrediti E(X), D(X) i σ(X).

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,p(x)dx=\frac{1}{3}\int_0^2(\frac{1}{2}x^2+x)dx=\frac{10}{9}$$

$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\frac{10}{9})^2\,p(x)dx=\frac{1}{3}\int_0^2(x-\frac{10}{9})^2(\frac{1}{2}x+1)dx=\frac{26}{81}$, pa je $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{9}\sqrt{26}$.

Najvažnije osobine disperzije navodimo u sledećoj teoremi.

Teorema 8. *Ako je D(X) disperzija slučajne promenljive X, onda važi:*

a. *D(X)≥0, za X=c (konstanta) je D(c)=0*

b. *D(cX)=c^2 D(X)*

c. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$, ukoliko su X i Y međusobno nezavisne

d. $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$.

11.3. DOMAĆI ZADATAK

50.Zadatak. *Lovac pogađa zeca iz jednog gađanja sa verovatnoćom $\frac{1}{4}$. Na raspolaganju ima 4 metka i gađa zeca dok ga ne pogodi ili dok ne potroši sve metke. Odrediti očekivanu vrednost broja izvršenih gađanja na zeca.*

51.Zadatak. *U kutiji se nalazi 6 belih i 4 crne kuglice. Na slučajan način se uzimaju, jedna za drugom, tri kuglice. Neka je X slučajna promenljiva koja označava broj belih među izabranim kuglicama.*

Odrediti raspodelu verovatnoće slučajne promenljive X, E(X) i D(X):

a. ako se kuglice izvlače bez vraćanja
b. ako se kuglice izvlače sa vraćanjem.

52. Zadatak. *Prodavac sladoleda zarađuje 1200 dinara na sunčanom danu, a 400 dinara na oblačnom. Koliko on može da očekuje da će zaraditi na danu za koji verovatnoća da će biti oblačan iznosi 0,35?*

12. JEDANAESTI ČAS: FUNKCIJA RASPODELE, GUSTINA, NUMERIČKE KARAKTERISTIKE SLUČAJNE PROMENLJIVE (UTVRĐIVANJE)

12.1. UVODNI DEO ČASA

Ponavljanje definicija i formula zakona i funkcije raspodele, gustine verovatnoće, matematičkog očekivanja i disperzije slučajne promenljive.

12.2. GLAVNI DEO ČASA

53.Zadatak. *Za slučajne promenljive X i Y dati su zakoni raspodele:*

$$X: \begin{pmatrix} -0{,}1 & -0{,}01 & 0 & 0{,}01 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix},$$

$$Y: \begin{pmatrix} -20 & -10 & 0 & 10 & 20 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

a. Pokazati da je E(X)=E(Y).

b. Utvrditi kod koje od ovih slučajnih promenljivih je odstupanje njenih vrednosti od *matematičkog očekivanja veće.*

Rešenje. a. $E(X)= -0{,}1\cdot0{,}1-0{,}01\cdot0{,}2+0\cdot0{,}4+0{,}01\cdot0{,}2+0{,}1\cdot0{,}1=0$

$E(Y)= -20\cdot0{,}3-10\cdot0{,}1+0\cdot0{,}2+10\cdot0{,}1+20\cdot0{,}3=0$

b. $D(X)=(-0{,}1)^2\cdot 0{,}1+(-0{,}01)^2\cdot 0{,}2+0^2\cdot 0{,}4+0{,}01^2\cdot 0{,}2+0{,}1^2\cdot 0{,}1$

$= 0{,}001+0{,}00002+0{,}00002+0{,}001 = 0{,}00204$

$D(Y)=(-20)^2\cdot 0{,}3+(-10)^2\cdot 0{,}1+0^2\cdot 0{,}2+10^2\cdot 0{,}1+20^2\cdot 0{,}3$

$= 120+10+10+120 = 260$

Odstupanje je veće kod Y.

54.Zadatak. *Odrediti konstantu c tako da funkcija f(x), $x\in R$, predstavlja gustinu raspodele, a zatim odrediti odgovarajuću funkciju raspodele, ako je:*

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\in[-1,0] \\ c, & x\in[0,2] \\ 0, & x\notin[-1,2] \end{cases}.$$

Rešenje. Konstanta c se određuje iz uslova $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Imamo:

$$\int_{-1}^{0} (x+1)dx + \int_{0}^{2} c\,dx = 1, \text{ odakle je } c=\frac{1}{4}.$$

Zatim nalazimo funkciju raspodele. Dobijamo da, zavisno od realnog broja x, važi:

1° za $x\le -1$ je $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

2° za $-1<x\le0$ je $F(x)=\int_{-\infty}^{-1} 0dt+\int_{-1}^{x} (t+1)dt = \frac{(x+1)^2}{2}$

3° za $0<x\le2$ je $F(x)=\int_{-\infty}^{-1} 0dt+\int_{-1}^{0} (t+1)dt+\int_{0}^{x} \frac{1}{4}dt = \frac{1}{2}+\frac{x}{4}$

4° za $x>2$ je $F(x)=1$.

55.Zadatak. *Dato je 10 kuglica numerisanih brojevima 1,2,…,10. Slučajno se biraju odjednom 4 kuglice. Pretpostavimo da svaka 4-kombinacija brojeva 1,2,…,10 ima istu* *verovatnoću da bude izabrana. Neka je X broj izabranih kuglica koje su označene brojem deljivim sa 3. Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive X.*

Rešenje. Primetimo najpre da među brojevima 1,2,...,10 postoje 3 broja koji su deljivi sa 3 i 7 brojeva koji nisu deljivi sa 3. Slučajna promenljiva X uzima vrednosti 0,1,2 i 3 redom sa verovatnoćama

$$\frac{\binom{3}{0}\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}}, \quad \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{3}}{\binom{10}{4}}, \quad \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{2}}{\binom{10}{4}}, \quad \frac{\binom{3}{3}\binom{7}{1}}{\binom{10}{4}} \quad ,$$

pa dalje neposrednim izračunavanjem dobijamo:

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}.$$

56.Zadatak. *Neka je gustina raspodele slučajne promenljive X sledeća funkcija:*

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & za\ \ 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & za\ \ x < 0\ \ i\ \ x > 1. \end{cases}$$

Izračunati E(X), D(X) i σ(X).

Rešenje. $E(X)= \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)dx = \int_0^1 2x^2 dx = 2\,\frac{x^3}{3}\ \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

$D(X)= \int_0^1 (x-\frac{2}{3})^2\, 2x\, dx = \int_0^1 (x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{4}{9})\, 2x\, dx$

$$= \int_0^1 (2x^3 - \frac{8x^2}{3} + \frac{8x}{9})\, dx$$

$$= 2\cdot \frac{x^4}{4}\ \Big|_0^1 - \frac{8}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\ \Big|_0^1 + \frac{8}{9}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{8}{9} + \frac{4}{9}$$

$$= \frac{1}{18}$$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$

57.Zadatak. *Slučajna promenljiva X ima gustinu raspodele verovatnoće p definisanu sa*

$$p(x)=\begin{cases} a(4-2x), & za\ \ 0<x<2 \\ 0, & za\ \ ostale\ vrednosti\ x \end{cases} \quad \text{(a je konstanta)}$$

Odrediti vrednost konstante a, zatim izračunati verovatnoće sledećih događaja:

a. Slučajna promenljiva X je manja od 1

b. Slučajna promenljiva X je manja od 3

c. Slučajna promenljiva X je između $\frac{1}{2}$ i $\frac{7}{8}$

d. Slučajna promenljiva X je $\frac{1}{2}$

e. Slučajna promenljiva X je između 1 i 2, pod uslovom da je veća od $\frac{1}{2}$.

Rešenje. Iz uslova $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ je $\int_0^2 a(4-2x)dx = 1$, $a(4x-x^2)\,|_0^2$, pa je $a=\frac{1}{4}$

a. $P(X<1)= \int_{-\infty}^{1} p(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{4}(4-2x)dx = \frac{3}{4}$

b. $P(X<3)= \int_{-\infty}^{3} p(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{4}(4-2x)dx = 1$

c. $P(\frac{1}{2}<X<\frac{7}{8})= \int_{1/2}^{7/8} p(x)dx = \int_{1/2}^{7/8} \frac{1}{4}(4-2x)dx = \frac{63}{256}$

d. $P(X=\frac{1}{2})= \int_{1/2}^{1/2} p(x)dx = 0$

e. $P(\ (1<X<2)\ |\ (X>\frac{1}{2})\ ) = \frac{P(\ (1<X<2) \cap (X>\frac{1}{2})\ )}{P(X>\frac{1}{2})}$ (po formuli za uslovnu verovatnoću)

$$= \frac{P(1<X<2)}{P(X>\frac{1}{2})} \quad \text{(jer je } (1,2)\cap(\tfrac{1}{2},+\infty)=(1,2)\text{)}$$

$$= \frac{\int_1^2 \frac{1}{4}(4-2x)dx}{\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{4}(4-2x)dx}$$

$$= \frac{4}{9}.$$

13. DVANAESTI ČAS: BINOMNA RASPODELA (OBRADA)

13.1. UVODNI DEO ČASA

Ponavljanje ukratko pojmova zakon i funkcija raspodele slučajne promenljive.

13.2. GLAVNI DEO ČASA

Neka se pod istim uslovima i nezavisno jedan od drugog izvodi n opita i neka je verovatnoća realizacije događaja A u svakom od tih opita konstantna i jednaka p, odnosno

$$P(A)=p, \quad P(\bar{A})=1-p=q.$$

Ako je slučajna promenljiva S_n broj realizacija događaja A pri opisanim uslovima, tada kažemo da S_n ima **binomnu raspodelu** sa parametrima n i p i pišemo ***S_n : B(n,p).***

Slučajna promenljiva S_n može uzeti vrednosti 0,1,2,…,n. Odredimo verovatnoće p(k), tj. verovatnoću da promenljiva S_n uzme vrednost k (k=0,1,2,…,n) : $p(k)=P(S_n = k)$.

Ishodi n ponovljenih opita su sve uređene n-torke sastavljene od događaja A i događaja $\bar{A}$. Povoljne su one n-torke koje sadrže k događaja A i n−k događaja $\bar{A}$. Verovatnoća svake od ovih n-torki događaja je $p^k \cdot q^{n-k}$, jer su događaji u okviru n-torke uzajamno nezavisni. Takvih povoljnih n-torki ima $\binom{n}{k}$, pa je zato:

$$p(k)=P(S_n=k)=\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad (*).$$

Jednakošću (*) određen je zakon raspodele slučajne promenljive S_n :

$$S_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & k & \ldots & n \\ p(0) & p(1) & p(2) & \cdots & p(k) & \ldots & p(n) \end{pmatrix}.$$

Primetimo da je $p(0) + p(1) + p(2) + \ldots + p(n) = \sum_{k=0}^{n} p(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = (p+q)^n = 1$, što je važna osobina raspodele verovatnoće.

Primer 18. *U porodici ima sedmoro dece. Odrediti verovatnoću da je među njima:*

a. *četiri dečaka*
b. *više dečaka nego devojčica*
c. *bar tri, ali manje od pet dečaka.*

(Smatra se da je verovatnoća rađanja dečaka i devojčica jednaka).

Obeležimo sa S_7 broj dečaka u porodici. Tada S_7 ima $B(7,\frac{1}{2})$, pa je:

a. $P\{S_7=4\} = \binom{7}{4}\cdot(\frac{1}{2})^4 \cdot (\frac{1}{2})^3 = 0{,}27344$

b. $P\{S_7>4\} = P\{S_7=5\} + P\{S_7=6\} + P\{S_7=7\}$

$= \binom{7}{5}\cdot(\frac{1}{2})^5 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \binom{7}{6}\cdot(\frac{1}{2})^6 \cdot (\frac{1}{2})^1 + \binom{7}{7}\cdot(\frac{1}{2})^7 \cdot (\frac{1}{2})^0$

$= \frac{29}{128}$

c. $P\{3\leq S_7<5\} = P\{S_7=3\} + P\{S_7=4\} = 0{,}5469.$

Teorema 9. *Ako je S_n slučajna promenljiva sa binomnom raspodelom $S_n : B(n,p)$, tada je:*

$$E(S_n) = np, \quad D(S_n)=npq.$$

Dokaz. Dokaz se može izvesti po definiciji matematičkog očekivanja i disperzije, ali je lakše koristiti indikator slučajnog događaja A, tj. slučajnu promenljivu:

$$I_A: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ P(\bar{A}) & P(A) \end{pmatrix}, \text{ odnosno } I_A: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Neka I_1 predstavlja indicator događaja A u prvom opitu, I_2 u drugom opitu, …, I_n u n-tom opitu. Pritom su I_1 , I_2 , …, I_n nezavisne slučajne promenljive.

Za slučajnu promenljivu $S_n : B(n,p)$ važi da je $S_n = I_1 + I_2 + ... + I_n$.

Na osnovu osobina matematičkog očekivanja i disperzije i navedene jednakosti dobijamo:

$$E(S_n)= E(I_1 + I_2 + ... + I_n) = np$$

$$D(S_n) = D(I_1 + I_2 + ... + I_n) = np(1-p) = npq.$$

Standardna devijacija je $\sigma(S_n)=\sqrt{npq}$.

Ovo važi, jer je za svaku slučajnu promenljivu I_k , k=1,2,...,n, ispunjeno:

$$E(I_k) = 1\cdot p + 0\cdot q = p ,$$

$$D(I_k) = E(I_k^2)-(E(I_k))^2 = 1\cdot p + 0\cdot q - p^2 = p\cdot(1-p) = pq. \blacksquare$$

Primer 19. *Eksperiment se sastoji u bacanju kockice za igru. Posmatra se događaj A: „Pao je broj 6“. Ako se eksperiment ponovi 30 puta, pitamo se koliko puta možemo očekivati „šesticu“ , kao i koliko je prosečno odstupanje broja „šestica“ od očekivane vrednosti?*

Neka je S_{30} slučajna promenljiva koja predstavlja broj pojavljivanja „šestice“. Tada S_{30} ima binomnu raspodelu $B(30,\frac{1}{6})$, pa je zbog toga:

$$E(S_{30}) = np = 30\cdot \frac{1}{6} = 5 ,$$

$$D(S_{30}) = npq = 30\cdot \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{6} \approx 4{,}167, \text{ pa je } \sigma(S_{30}) \approx \sqrt{4{,}167} \approx 2{,}04.$$

Primer 20. *U kutiji se nalaze 2 plave i 6 crvenih kuglica. Izvlačimo pet puta po jednu kuglicu, sa vraćanjem. Neka je slučajna promenljiva S_5 broj pojavljivanja plave kuglice u tih pet izvlačenja. Odrediti verovatnoću da plava kuglica bude izvučena bar 3 puta.*

Pri jednom izvlačenju verovatnoća pojavljivanja plave kuglice je $p=\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, a verovatnoća da se ne pojavi (odnosno da smo izvukli crvenu kuglicu) je $q= 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Slučajna promenljiva S_5 ima binomnu raspodelu $B(5,\frac{1}{4})$, pa je:

$$P\{S_5\geq 3\} = P\{S_5 =3\} + P\{S_5 =4\} + P\{S_5 =5\}$$

$$= \binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$= \frac{53}{512} .$$

Primer 21. *Uređaj se sastoji od 8 delova. Verovatnoća da se jedan deo pokvari je 0,3. Delovi se kvare nezavisno jedan od drugog. Odrediti verovatnoće događaja:*

A: pokvarila su se tačno dva dela,

B: pokvarila su se najviše tri dela,

C: pokvarila su se bar dva dela.

Neka S_8 predstavlja slučajnu promenljivu : broj pokvarenih delova. Tada S_8 ima $B(8;0{,}3)$, pa je:

a. $P(A)=P\{S_8 =2\} = \binom{8}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^6 = 0{,}296$

b. $P(B) = P\{S_8\leq 3\} = P\{S_8 =0\} + P\{S_8 =1\} + P\{S_8 =2\} + P\{S_8 =3\}$

$$= \binom{8}{0}\cdot 0{,}3^0\cdot 0{,}7^8 + \binom{8}{1}\cdot 0{,}3^1\cdot 0{,}7^7 + \binom{8}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^6 + \binom{8}{3}\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^5$$

$$= 0{,}0576+0{,}19765+0{,}2965+0{,}2541$$

$$= 0{,}805$$

c. $P(C) = P\{S_8\geq 2\} = 1- P\{S_8<2\} = 1- (P\{S_8 =0\} + P\{S_8 =1\})$
$= 1- (0{,}0576+0{,}19765) = 0{,}728$

Primer 22. *Verovatnoća pogotka mete u jednom gađanju je 0,2. Koliko nezavisnih gađanja treba izvesti da bi sa verovatnoćom ne manjom od 0,9 meta bila pogođena najmanje jednom?*

Broj pogodaka mete je slučajna promenljiva S_n sa binomnom raspodelom $B(n;\, 0{,}2)$, gde treba odrediti n. Po uslovu zadatka je : $P\{S_n \geq 1\} \geq 0{,}9$. Koristeći suprotan događaj imamo:

$$1 - P\{S_n = 0\} \geq 0{,}9,$$

$$1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^n \geq 0{,}9 ,$$

$$1 - 0{,}8^n \geq 0{,}9 ,$$

$$0{,}8^n \leq 0{,}1.$$

Logaritmovanjem se dobija:

$$n \cdot \log 0{,}8 \leq \log 0{,}1$$

$$n \cdot (-0{,}0969) \leq -1$$

$$n \geq \frac{1}{0{,}0969} = 10,\, 3199 .$$

Zaključujemo da treba izvesti najmanje 11 gađanja.

13.3. DOMAĆI ZADATAK

58.Zadatak. *Serija proizvoda sadrži 1% škarta. Koliko najmanje treba izabrati proizvoda, pa da verovatnoća pojave bar jednog škarta u uzorku ne bude manja od 0,95?*

59.Zadatak. *Kolika je verovatnoća da će se kod 8 uzastopnih bacanja novčića grb pojaviti najmanje 2 a najviše 4 puta?*

14. TRINAESTI ČAS: NORMALNA RASPODELA (OBRADA)

14.1. UVODNI DEO ČASA

Komentar domaćeg zadatka.

14.2. GLAVNI DEO ČASA

Normalna ili *Gausova raspodela* zauzima centralno mesto u teoriji verovatnoće i matematičke statistike. Veliki broj pojava u prirodi (slučajnih promenljivih) se „raspoređuje“ po normalnoj raspodeli. Na primer, visina ljudi, srednja greška pri merenju nekim instrumentom, koeficijent inteligencije itd. Takođe, veliki broj slučajnih promenljivih može se aproksimirati normalnom raspodelom.

Definicija 28. *Za slučajnu promenljivu X neprekidnog tipa kažemo da ima* **normalnu raspodelu** *sa parametrima m i σ^2 , $m \in R$, $\sigma > 0$, u oznaci X: $N(m, \sigma^2)$, ako je njena gustina raspodele*

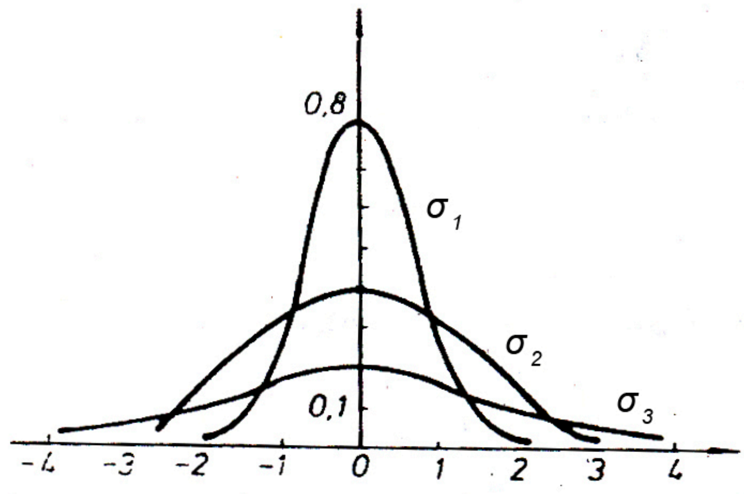
$$p(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R. \quad (*)$$

Teorema 10. *Ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu X: $N(m, \sigma^2)$, sa gustinom raspodele p(x) iz (*), tada je $E(X)=m$, $D(X)=\sigma^2$.*

Dokaz ostavljamo učenicima za vežbu.

Zavisno od vrednosti parametara m i σ , grafici funkcije p(x) (krive gustine) su različiti, ali se mogu uočiti zajednička svojstva:

1. $p(m-x)=p(m+x)$: sve krive gustine simetrične su u odnosu na pravu X=m
2. Tačka maksimuma je tačka $M\left(m, \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\right)$
3. Levo i desno od tačke maksimuma kriva gustine simetrično opada do nule, tj. $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = 0$
4. Promena vrednosti m dovodi do translacije krive gustine duž X-ose
5. Promena vrednosti σ dovodi do promene spljoštenosti (rasturanja oko tačke x=m) krive gustine. Ukoliko je σ veće, maksimalna vrednost krive je manja, ali je rasturanje oko x=m veće



Slika 8.

6. Sve krive gustine imaju oblik osnog preseka zvona, odnosno u okolini tačke maksimuma one su konveksne, a levo od tačke $x=m-\sigma$ i desno od tačke $x=m+\sigma$ postaju konkavne.

U slučaju kada je $m=0$ i $\sigma^2 = 1$, dobijamo takozvanu **standardizovanu normalnu raspodelu**:

$$X^*: N(0, 1)\ .$$

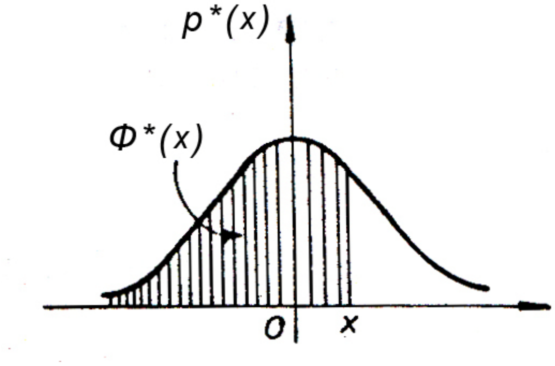
Gustina za $X^*: N(0, 1)$ je

$$p^*(x)= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\ ,\ x\in R\ ,$$

a odgovarajuća funkcija raspodele je

$$\Phi^*(x)= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Kriva gustine $p^*(x)$ data je na slici na sledećoj strani.



Slika 9.

Funkcija raspodele slučajne promenljive X: N(m, σ^2) je

$$\Phi(x)= \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\, dt\ , \ x\in R.$$

Verovatnoća da slučajna promenljiva X: N(m, σ^2) uzme vrednost iz intervala (a,b) jednaka je

$$P\{a<X<b\} = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{b} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \Phi(b)-\Phi(a). \quad (**)$$

Umesto promenljive X: N(m, σ^2) uvedimo standardizovanu slučajnu promenljivu:

$$X^* = \frac{X-m}{\sigma} \quad (***)$$

koja, lako se pokazuje, ima normalnu N(0,1) raspodelu.

Iz (**) i (***) imamo:

$$P(a<X<b) = P\left(\frac{a-m}{\sigma} < X^* < \frac{b-m}{\sigma}\right) = \Phi^*\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

Vrednost funkcije $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ čita se iz posebnih tablica. Ove vrednosti su izračunate približnim metodama, jer ne postoji primitivna funkcija za $e^{-\frac{x^2}{2}}$. U tablicama su date vrednosti funkcije $\Phi^*(x)$ samo za pozitivne realne brojeve.

Kako je kriva gustine standardizovane normalne raspodele simetrična u odnosu na Y-osu, lako se određuju vrednosti funkcije $\Phi^*(x)$ za negativne realne brojeve:

$$\Phi^*(-x) = 1- \Phi^*(x)\ .$$

Takođe, uzima se da je za $x>5$, $\Phi^*(x) = 1$.

Slučajne promenljive (pojave) imaju normalni zakon raspodele ako na njih utiče veliki broj uzajamno nezavisnih faktora, gde je uticaj svakog pojedinačnog faktora neznatan.

Primer 23. *Slučajna promenljiva X ima N(0,1) raspodelu. Odrediti verovatnoće:*

a. $P\{X<2\}$
b. $P\{0<X<1{,}42\}$
c. $P\{-0{,}73<X<0\}$
d. $P\{|X|<0{,}5\}$
e. $P\{|X|>2{,}5\}$
f. $P\{1{,}25<X<50\}$

Rešenje. a. $P\{X<2\} = \Phi^*(2) = 0{,}9772$

b. $P\{0<X<1{,}42\}= \Phi^*(1{,}42)- \Phi^*(0) = 0{,}9222-0{,}5 = 0{,}4222$

c. $P\{-0{,}73<X<0\}= \Phi^*(0)- \Phi^*(-0{,}73) = 0{,}5-(1-\Phi^*(0{,}73)) = -0{,}5+\Phi^*(0{,}73)$

$= -0{,}5+0{,}7673=0{,}2673$

d. $P\{|X|<0{,}5\}= P\{-0{,}5<X<0{,}5\}= \Phi^*(0{,}5)- \Phi^*(-0{,}5) = \Phi^*(0{,}5)-(1- \Phi^*(0{,}5)) = 2\Phi^*(0{,}5)-1 = 2\cdot 0{,}6915-1 = 1{,}383-1=0{,}383$

e. $P\{|X|>2{,}5\}= P\{X<-2{,}5 \cup X>2{,}5\}= P\{X<-2{,}5\}+P\{X>2{,}5\}= \Phi^*(-2{,}5)+$

$(1-P\{X<2{,}5\}) = 1-\Phi^*(2{,}5)+ 1-\Phi^*(2{,}5) = 2\cdot (1-\Phi^*(2{,}5))=2\cdot(1-0{,}9938)=0{,}0124$

f. $P\{1{,}25<X<50\}=\Phi^*(50)-\Phi^*(1{,}25)=1-0{,}8946=0{,}1054$.

Primer 24. *Otpor kidanju jednog metalnog konca je slučajna promenljiva X sa N(120,64). Uzorak koji se ispituje smatra se defektnim ako je X<110. Odredi verovatnoću da je uzorak defektan.*

$P(X<110) = P(\frac{X-120}{8} < \frac{110-120}{8})=P(X^*<-1{,}25) = \Phi^*(-1{,}25) = 1- \Phi^*(1{,}25) = 1-0{,}8946=0{,}1054$

Uzorak je defektan sa verovatnoćom 10,54%.

Primer 25. *Fabrika proizvodi kuglice nominalnog prečnika m=5 mm. Usled neprecizne izrade, prečnik kuglice je praktično slučajna promenljiva X, sa normalnim zakonom raspodele (m i σ=0,05 mm). Pri kontroli se odbacuju sve kuglice čiji prečnik ostupa od nominalnog za više od 0,1 mm. Koliki procenat kuglica će u proseku biti odbačen?*

Treba izračunati P(|X−5|>0,1). Računamo verovatnoću suprotnog događaja, odnosno:

$$P(|X-5|\leq 0{,}1) = P(-0{,}1\leq X-5\leq 0{,}1) = P\left(\frac{-0{,}1}{0{,}05}\leq\frac{X-5}{0{,}05}\leq\frac{0{,}1}{0{,}05}\right) = P(-2\leq X^*\leq 2)$$

$$= \Phi^*(2)-\Phi^*(-2) = 2\cdot\Phi^*(2)-1 = 2\cdot 0{,}9772-1=0{,}9544.$$

Na osnovu toga je P(|X−5|>0,1) = 1− 0,9544 = 0,046, tj. u proseku će biti odbačeno 4,6% kuglica.

Binomna raspodela može se dosta dobro aproksimirati normalnom raspodelom, u slučaju kada je n veliko, tj. np≥10, tj. važi:

$$P\{a\leq\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}\leq b\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx,\ n\to\infty\ .\ (*)$$

Primer 26. *Izračunati verovatnoću da u 10000 bacanja novčića broj palih grbova bude između 4950 i 5100.*

Neka slučajna promenljiva X označava broj palih grbova prilikom bacanja novčića.

Tada X: B(10000; 0,5). Kako je np=10000·0,5=5000, može se primeniti aproksimacija (*), pa je:

$$P(4950<X<5100) = P\left(\frac{4950-5000}{\sqrt{2500}}<\frac{X-5000}{\sqrt{2500}}<\frac{5100-5000}{\sqrt{2500}}\right)$$

$$= P(-1<X^*<2)$$

$$= \Phi^*(2)-\Phi^*(-1)$$

$$= 0{,}9772-(1-\Phi(1))$$

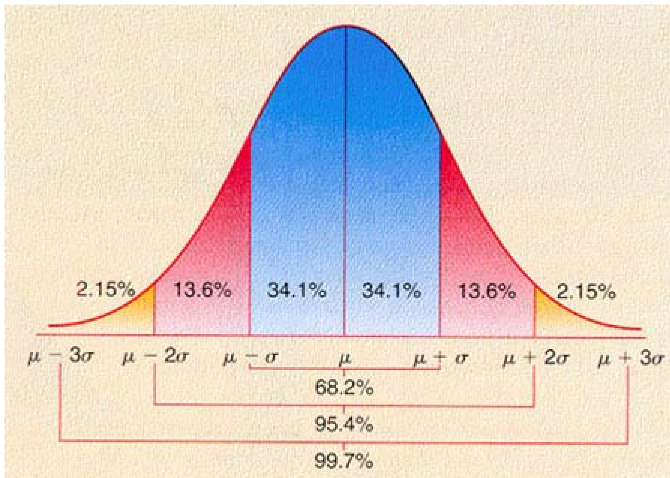
$$= 0{,}9772-1+0{,}8413$$

$$= 0{,}8185.$$

60.Zadatak. *Dokazati da za svaku slučajnu promenljivu X koja ima normalni zakon raspodele važi:*

a. $P\{m-\sigma<X<m+\sigma\}=0{,}682$
b. $P\{m-2\sigma<X<m+2\sigma\}=0{,}954$
c. $P\{m-3\sigma<X<m+3\sigma\}=0{,}997.$

Obrazložiti ove rezultate.



Slika 10.

61.Zadatak. *Debljina metalnih ploča, koje se proizvode u nekoj fabrici, je slučajna promenljiva sa normalnim zakonom raspodele, m=0,25 i σ =0,028cm. Odrediti procenat neispravnih ploča, ako se ploča smatra neispravnom kada je njena debljina manja od 0,2 cm ili veća od 0,28 cm.*

15. ČETRNAESTI ČAS: BINOMNA I NORMALNA RASPODELA (UTVRĐIVANJE)

15.1. UVODNI DEO ČASA

Ponavljanje definicija i osobina binomne i normalne raspodele.

15.2. GLAVNI DEO ČASA

62.Zadatak. *Procenat X određenog sastojka motornog ulja određuje cenu ulja po buretu na sledeći način:*

$$T=\begin{cases} 8, & ako\ je\ X < 19 \\ 10, & ako\ je\ 19 \le X \le 21 \\ 9, & ako\ je\ X > 21 \end{cases}.$$

X ima N(20,$\frac{1}{4}$) raspodelu. Kolika je očekivana vrednost cene za 1000 buradi?

Rešenje. Nađimo prvo očekivanu cenu za jedno bure. T ima raspodelu

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 & 9 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix},$$

gde je

$p_1 = P\{X<19\}=P\{\frac{X-20}{\frac{1}{2}} < \frac{19-20}{\frac{1}{2}}\} = \Phi^*(-2)=1-\Phi^*(2) = 1-0{,}9772=0{,}0228$

$p_2 = P\{19<X<21\}=P\{\frac{19-20}{\frac{1}{2}} < \frac{X-20}{\frac{1}{2}} < \frac{21-20}{\frac{1}{2}}\} = P\{|X^*|<2\}=2\Phi^*(2) - 1=2\cdot 0{,}9772-1 = 0{,}9544$

$p_3 = 1-(p_1 + p_2) = 0{,}0228.$

Očekivanje za T je $E(T)=8\cdot 0{,}0228 + 10\cdot 0{,}9544 + 9\cdot 0{,}0228 = 9{,}9316$.

Ako je cena prvog bureta T_1, drugog T_2, ..., 1000-og T_{1000}, slučajne promenljive $T_1,T_2, ...,T_{1000}$ imaju istu raspodelu i isto matematičko očekivanje $E(T)=9{,}9316$. Cena 1000 buradi biće

$$Y=T_1 + T_2 + ... + T_{1000},$$

a očekivana cena 1000 buradi motornog ulja će biti:

$E(Y)=E(T_1 + T_2 + ... + T_{1000}) = E(T_1) + E(T_2) + ... + E(T_{1000}) = 1000\cdot E(T) = 9931{,}6.$

63.Zadatak. *Vek trajanja (u časovima) X baterije ima normalnu raspodelu N(100,*5^2*).*

a. Odrediti verovatnoću da nova baterija istog tipa traje najmanje 105 časova?

b. Ako je jedna baterija već izdržala 90 časova, kolika je verovatnoća da će izdržati još 15 časova?

Rešenje. a. $P\{X\geq 105\}=P\{X^* \geq \frac{105-100}{5}\} = P\{X^* \geq 1\} = 1-P\{X^* < 1\} = 1-\Phi^*(1) = 1-0{,}8413=0{,}1587$

b. Neka je događaj $A=\{X\geq 105\}$ i događaj $B=\{X\geq 90\}$. Traži se verovatnoća uslovnog događaja $A|B$.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P\{X\geq 105\}}{P\{X\geq 90\}}.$$

Treba nam još verovatnoća:

$P\{X\geq 90\} = 1- P\{X<90\} = 1- P\{X^* < \frac{90-100}{5}\}= 1- P\{X^* < -2\} = 1-\Phi^*(-2) = \Phi^*(2) = 0{,}9772$. Zato je $P(A|B) = \frac{0{,}1587}{0{,}9772} = 0{,}1624$.

64.Zadatak. *Tri numerisane kockice za igru se bacaju i u svakom bacanju se beleži koji je najveći od palih brojeva. Neka je događaj A-najveći od dobijenih brojeva je 2. Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive* S_5*, koja je jednaka broju realizacija događaja A u 5 bacanja te tri kockice.*

Rešenje. Najpre treba odrediti verovatnoću događaja A, označimo je sa p, da će slučajna promenljiva S_5 imati binomnu raspodelu sa parametrima 5 i p. Događaj A da je najveći od dobijenih brojeva jednak 2 može se ostvariti ako se dobiju brojevi:

1,1,2; 1,2,1; 2,1,1; 1,2,2; 2,1,2; 2,2,1 ili 2,2,2.

Zato je verovatnoća $P(A)= p = \frac{7}{6^3} \approx 0{,}0324$. Zakon raspodele slučajne promenljive S_5 je

$$P\{S_5=k\} = \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k},\ k=0,1,2,3,4,5.$$

Kada sve verovatnoće izračunamo i zaokružimo na pet decimala, dobijamo:

$$S_5 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0{,}84816 & 0{,}14200 & 0{,}00951 & 0{,}00032 & 0{,}00001 & 0{,}00000 \end{pmatrix}.$$

Verovatnoća događaja ($S_5=5$) nije jednaka 0 već 0,000000036, ali zbog zaokruživanja imamo navedeni rezultat.

65.Zadatak. *Masa odlivka je slučajna promenljiva X sa N(375gr,* 25^2*gr) raspodelom. Naći verovatnoću da će masa slučajno odabranog odlivka biti*

a. od 300 do 425gr

b. veća od 300gr.

Rešenje. a. $P\{300<X<425\}=P\{\frac{300-375}{25} <X^*<\frac{425-375}{25}\} =P\{-3<X^*<2\}=\Phi^*(2) - \Phi^*(-3) = 0{,}9759$

b. $P\{300<X<\infty\}= P\{-3<X< \infty\}=\Phi^*(\infty) - \Phi^*(-3) = 0{,}9987$.

66.Zadatak. *5 lampi vezano je serijski u električno kolo. Odrediti verovatnoću da se kolo prekine pri povećanju napona, ako je verovatnoća da jedna lampa pregori 0,3 i ista je za sve lampe.*

Rešenje. Strujno kolo se, zbog serijske veze, prekida ako bar jedna lampa pregori.

Neka je S_5 : broj lampi koje pregore, tada S_5 : B(5;0,3).

$P\{S_5=1\} + P\{S_5=2\} + \ldots + P\{S_5=5\} = 1- P\{S_5=0\} = 1-\binom{5}{0}\cdot 0{,}3^0\cdot 0{,}7^5 = 1- 0{,}16807 = 0{,}83193$.

67.Zadatak. *Šta je verovatnije u igri ravnopravnih protivnika: dobiti 3 od 4 ili 6 od 8 partija?*

Rešenje. Verovatnoća dobitka 3 od 4 partije je $p_1 = \binom{4}{3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{4}$, a dobitka 6 od 8 partija je $p_2 = \binom{8}{6}(\frac{1}{2})^6(\frac{1}{2})^2 = \frac{7}{64}$. Kako je $p_1>p_2$, zaključujemo da je u igri ravnopravnih protivnika verovatnije dobiti 3 od 4 partije.

16. PETNAESTI ČAS: ELEMENTI VEROVATNOĆE (SISTEMATIZACIJA)

16.1. UVODNI DEO ČASA

Ponavljanje ukratko najvažnijih pojmova i osobina iz obrađenog gradiva o verovatnoći.

16.2. GLAVNI DEO ČASA

68.Zadatak. *Da bi izašao na ispit, student mora da prethodno položi bar jedan od tri nezavisna kolokvijuma. Za svaki od tih kolokvijuma, verovatnoća da će ga položiti iznosi 0,4. Ako položi jedan kolokvijum, verovatnoća da će položiti ispit je 0,3; ako položi dva kolokvijuma, verovatnoća da će položiti ispit je 0,7; ako položi sva tri kolokvijuma, verovatnoća da će položiti ispit je 0,9. Izračunati verovatnoću da će student položiti ispit.*

Rešenje. Neka je A događaj da student položi ispit, H_1 događaj da student položi jedan kolokvijum, H_2 događaj da student položi dva kolokvijuma, H_3 događaj da student položi sva tri kolokvijuma.

Događaj A se može ostvariti ako se ostvari bilo koji od događaja H_1, H_2 ili H_3, pa je:

$$A = AH_1 + AH_2 + AH_3 .$$

Dalje je

$$P(A)=P(AH_1)+P(AH_2)+P(AH_3)$$

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3)$$

$$P(H_1)=\binom{3}{1}\cdot 0{,}4^1\cdot 0{,}6^2 = 0{,}432$$

$$P(H_2)=\binom{3}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^1 = 0{,}288$$

$$P(H_3)=\binom{3}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^0 = 0{,}064.$$

Po uslovima zadatka je:

$$P(A|H_1)=0{,}3 \; ; \; P(A|H_2)=0{,}7 \; ; \; P(A|H_3)=0{,}9 \; .$$

Konačno, $P(A)=0{,}432\cdot0{,}3+0{,}288\cdot0{,}7+0{,}064\cdot0{,}9 = 0{,}3888$.

69.Zadatak. *U jednom soliteru stanuje 5 porodica sa po jednim detetom, 3 porodice sa po troje dece i 2 porodice sa po petoro dece. Radi anketiranja, na slučajan način se biraju 3 porodice. Kolika je verovatnoća da:*

a. bar 2 odabrane porodice imaju isti broj dece

b. sve 3 izabrane porodice imaju ukupno 7 dece?

Rešenje. a. Neka je A događaj da bar 2 odabrane porodice imaju isti broj dece, tada je $\bar{A}$ događaj da sve 3 izabrane porodice imaju različit broj dece.

$$P(A) = 1- P(\bar{A}) = 1- \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = 1- \frac{30}{120} = \frac{3}{4}$$

b. Neka je B događaj da sve 3 izabrane porodice imaju ukupno 7 dece, tada je:

$$P(B)= \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{2}+\binom{2}{1}\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{24} \, .$$

70.Zadatak. *U nekom gradu 40% stanovnika ima plavu kosu, 25% ima plave oči, a 15% ima i plavu kosu i plave oči. Nasumično biramo jednog stanovnika tog grada.*

a. Kolika je verovatnoća da će imati plave oči ako ima plavu kosu?

b. Kolika je verovatnoća da neće imati plavu kosu ako ima plave oči?

Rešenje. Neka je događaj O-Izabrani stanovnik ima plave oči, a događaj K-Izabrani stanovnik ima plavu kosu. Iz uslova zadatka je: $P(K)=\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$, $P(O)=\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, $P(OK) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$.

a. Treba izračunati $P(O|K)$. Imamo:

$$P(O|K) = \frac{P(OK)}{P(K)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{8} = 0{,}375.$$

Verovatnoća da će slučajno izabrani stanovnik imati plave oči ako ima plavu kosu je 37,5%.

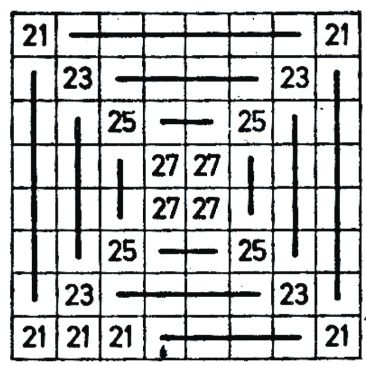
b. Treba odrediti $P(\overline{K}|O)$, a znamo $P(\overline{K}|O) = 1-P(K|O)$.

$$P(K|O) = \frac{P(OK)}{P(O)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{5} = 0{,}6,$$

pa je $P(\overline{K}|O) = 1-0{,}6 = 0{,}4$.

Verovatnoća da slučajno izabrani stanovnik neće imati plavu kosu ako ima plave oči je 40%.

71.Zadatak. *Na (praznu) šahovsku tablu nasumice stavimo dve kraljice. Kolika je verovatnoća da se kraljice ne napadaju?*



Slika 11.

Rešenje. Postavimo proizvoljno prvu kraljicu. Sa spoljašnjih 28 polja na tabli ona napada po 21 polje. Sa narednih 20 polja (u sledećem "kvadratnom prstenu") napada po 23 polja, sa sledećih 12 po 25 i sa centralna 4 polja po 27. Verovatnoća da se druga dama neće naći na napadnutim poljima je:

$$P = 1-\left(\frac{28}{64}\cdot\frac{21}{63}+\frac{20}{64}\cdot\frac{23}{63}+\frac{12}{64}\cdot\frac{25}{63}+\frac{4}{64}\cdot\frac{27}{63}\right) = 1-\frac{588+460+300+108}{64\cdot 63} = 1-\frac{1456}{4032} \approx 1-0{,}361 \approx 0{,}639.$$

72.Zadatak. *Na lutriji svaka od 1000 emitovanih srećki dobija, a dobici su raspoređeni na sledeći način: 500 dobitaka po 2€ , 300 dobitaka po 4€, 150 po 6€, 40 po 20€ i 10 po 200€. Koliki se prosečan dobitak može očekivati po jednoj srećki?*

Rešenje. Neka slučajna promenljiva X predstavlja vrednost dobitka. Po uslovima zadatka njen zakon raspodele je

$$X: \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 20 & 200 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}15 & 0{,}04 & 0{,}01 \end{pmatrix}.$$

Matematičko očekivanje slučajne promenljive X je:

$$E(X) = 2\cdot 0{,}5 + 4\cdot 0{,}3 + 6\cdot 0{,}15 + 20\cdot 0{,}04 + 200\cdot 0{,}01 = 5{,}9.$$

Dakle, prosečno se po jednoj srećki može očekivati oko 6€.

73.Zadatak. *(Paradoks rođendana) U prostoriji se nalaze 23 osobe. Odrediti kolika je verovatnoća da bar dve među njima imaju isti rođendan. (Pretpostaviti das u svi rođeni u prostoj godini).*

Rešenje. Zamislimo kalendar na kome svako ko ulazi u prostoriju zaokruži svoj rođendan. Kada druga osoba uđe u prostoriju, verovatnoća da se njen rođendan neće poklopiti sa rođendanom prve osobe iznosi $\frac{364}{365}$. Kada treća osoba uđe u prostoriju, postojaće 363 nezaokružena dana, pa će verovatnoća da se rođendan treće osobe neće poklopiti sa rođendanima prve dve iznositi $\frac{363}{365}$ itd. Dakle, za 23 osobe, verovatnoća da se rođendani nikome neće poklopiti iznosi $\prod_{i=343}^{364} \frac{i}{365} \approx 0{,}492703$ (izračunato u *Mathematica 8)*, pa verovatnoća da će se rođendani barem dve osobe poklopiti iznosi približno 1−0,492703=0,507297, dakle više od 50%!

Slika 12.

Napomena. Za 57 ili više osoba, ova verovatnoća je veća od 99%. Ovo nije paradoks koji podrazumeva logičku kontradikciju, već je paradoks zbog toga što matematička istina protivreči zdravorazumskoj proceni ljudi (većina bi u ovom slučaju pretpostavila da je tražena verovatnoća mnogo manja od 50%).

17.PREDLOG KONTROLNOG ZADATKA

1.Zadatak. *Iz skupa od 20 proizvoda, među kojima je 5 neispravnih, slučajno biramo 3 proizvoda. Odrediti verovatnoću da među izabranim proizvodima budu:*

a. tačno 2 neispravna

b. bar jedan neispravan.

2.Zadatak. *Dva studenta, nezavisno jedan od drugog, polažu ispit. Verovatnoća da prvi student položi je 0,7, a drugi 0,9. Kolika je verovatnoća da:*

a. bar jedan student položi ispit

b. samo jedan student položi ispit?

3.Zadatak. *Košarkaš je na liniji za slobodna bacanja. Iz jednog pokušaja pogađa koš sa verovatnoćom 0,8. Izračunati kolika je verovatnoća da će iz 5 bacanja postići:*

a. 2 poena

b. bar jedan poen.

4.Zadatak. *U prvoj posudi se nalaze 2 bele i 1 crna kuglica, a u drugoj 1 bela i 5 crnih kuglica. Premeštamo jednu kuglicu iz prve posude u drugu, a zatim izvlačimo iz druge posude na slučajan način jednu kuglicu. Ako je izvučena kuglica bela, odrediti verovatnoću da je kuglica, premeštena iz prve u drugu posudu, bila crna.*

5.Zadatak. *Slučajna promenljiva X ima gustinu verovatnoće*

$$p(x)=\begin{cases} c\ sinx, & za\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & inače \end{cases}.$$

a. Odrediti konstantu c.
b. Izračunati $P(X<\frac{\pi}{4})$

Rezervni zadatak. *Eksperiment se sastoji u bacanju dve kockice za igru. Odrediti verovatnoću da zbir brojeva na gornjim stranama kockica bude:*

a. 9
b. veći od 4.

1.Zadatak.

a. Neka je događaj A- među izabranim proizvodima su tačno 2 neispravna.

$$P(A) = \frac{C_2^5 \cdot C_1^{15}}{C_3^{20}} \quad \textbf{(1 poen)}$$

$$P(A) = \frac{\frac{5\cdot 4}{2}\cdot 15}{\frac{20\cdot 19\cdot 18}{6}} = \frac{10\cdot 15}{20\cdot 19\cdot 3} = \frac{5}{38} \quad \textbf{(1 poen)}$$

b.Neka je događaj B-bar jedan među izabranim proizvodima je neispravan. Tada je $\overline{B}$

događaj da su svi izabrani proizvodi ispravni.

$$P(B)= 1-P(\overline{B}),\quad P(B) = 1-\frac{C_3^{15}}{C_3^{20}} \quad \textbf{(1 poen)}$$

$$P(B) = 1-\frac{\frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}}{\frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3}} = 1-\frac{7\cdot 13}{2\cdot 19\cdot 6} = 1-\frac{91}{228} = \frac{137}{228} \quad \textbf{(1 poen)}$$

2.Zadatak. Neka je događaj A- prvi student je položio ispit, događaj B- drugi student je položio ispit.

a. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ **(1 poen)**

$P(A\cup B)= 0{,}7 + 0{,}9 - 0{,}63 = 0{,}97$ **(1 poen)**

b. $P(A\overline{B}\cup \bar{A}B)=P(A\overline{B})+P(\bar{A}B) = P(A)P(\overline{B})+P(\bar{A})P(B)$ **(1 poen)**

$P(A\overline{B}\cup \bar{A}B)= 0{,}7\cdot 0{,}1+ 0{,}3\cdot 0{,}9 = 0{,}07 + 0{,}27 = 0{,}34$ **(1 poen)**

3.Zadatak. $X: B(5, 0{,}8) \quad p=0{,}8 \quad q=0{,}2$

X_5 : broj pogodaka od 5 bacanja

a. $P(X_5 = 2) = \binom{5}{2} p^2 q^3$ **(1 poen)**

$P(X_5 = 2) = 10\cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0512$ **(1 poen)**

b. $P(X_5 \geq 1) = 1-\binom{5}{0} p^0 q^5$ **(1 poen)**

$P(X_5 \geq 1) = 1- 0{,}2^5 = 1- 0{,}00032 = 0{,}99968$ **(1 poen)**

4.Zadatak. Neka su događaji:

A_1 – premeštena je crna kuglica iz prve u drugu kutiju

A_2 – premeštena je bela kuglica iz prve u drugu kutiju

B – izvučena je bela kuglica

1° $P(B) = P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2)$ **(1 poen)**

$P(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7} = \frac{5}{21}$ **(1 poen)**

2° $P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}$ **(1 poen)**

$P(A_1|B) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}}{\frac{5}{21}} = \frac{1}{5}$ **(1 poen)**

5.Zadatak. a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} c\ sinx\ dx = 1$

$c = \frac{1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx\ dx}$ **(1 poen)**

$c = \frac{1}{-cos\frac{\pi}{2}+\cos 0} = \frac{1}{-0+1} = \frac{1}{1} = 1$ **(1 poen)**

b. $P(X<\frac{\pi}{4}) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\ dx$ **(1 poen)**

$P(X<\frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \approx -0{,}705 + 1 = 0{,}295$ **(1 poen)**

Rezervni zadatak.

a. Neka je događaj A- zbir brojeva na obe kockice je 9

$A = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$ **(1 poen)**

$m_A = 4$ $n=36$ $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ **(1 poen)**

b. Neka je događaj B- zbir brojeva na obe kockice je veći od 4, tada je $\overline{B}$

događaj da je zbir brojeva na obe kockice manji ili jednak od 4.

$\overline{B} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$ **(1 poen)**

$P(\overline{B}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, pa je $P(B) = \frac{5}{6}$ **(1 poen)**

Svaki potpuno tačno rešen zadatak donosi po 4 poena, dok se za delimično rešene zadatke dobijaju poeni kao što je označeno u rešenju.

Rezervni zadatak služi kao pomoć učenicima da dobiju pozitivnu ocenu,tj. ako učenik nema dovoljno poena za ocenu 2 na 5 redovnih zadataka, dodaju mu se poeni sa rezervnog zadatka pa ako tada ima dovoljno poena, dobija dvojku.

Skala za ocene je:

0,1,2,3,4,5 poena – nedovoljan (1)

6,7,8,9 poena- dovoljan(2)

10,11,12,13 poena- dobar(3)

14,15,16,17 poena- vrlo dobar (4)

18,19,20 poena- odličan(5)

18.ZAKLJUČAK-PRIMENA VEROVATNOĆE

Proučavanje verovatnoće danas je izuzetno značajno zbog njene široke primene u drugim naukama i praksi.

Teorija verovatnoće čini osnovu matematičke statistike. Statistika se bavi prikupljanjem i obradom podataka kako bi se izveli zaključci i donele odgovarajuće odluke. Predmet statističkog istraživanja su masovne pojave koje su po svojoj prirodi promenljive i obično nastaju pod uticajem više faktora, koji deluju na nepredvidljiv način, odnosno donose više neodređenosti, slučajnosti. Kada se ti slučajni događaji ispituju u statistici, potrebno je primeniti odgovarajući matematički model za njihovo opisivanje- a to je teorija verovatnoće.

U fizici se verovatnoća primenjuje u kvantnoj mehanici. Jedno od najvećih otkrića fizike 20-og veka je da se fenomeni na atomskom nivou odvijaju po zakonima verovatnoće. Statistička mehanika primenjuje verovatnoću za ispitivanje složenih sistema sastavljenih od velikog broja čestica.

U biologiji se verovatnoća koristi u zakonima nasleđivanja, npr. kod određivanja kombinacija gena, formacija gameta, verovatnoće prenosa genetskih oboljenja sa roditelja na potomstvo, verovatnoće mutacija i slično.

Demografija značajno koristi verovatnoću, npr. kod procene očekivane dužine trajanja života, stope nataliteta, fertiliteta i mortaliteta, kao i procene verovatnoće migracija na određenom području.

U meteorologiji se koristi verovatnoća kako bi se što preciznije prognoziralo vreme. U hidrologiji se vodoprivredni sistemi i hidrotehničke mere planiraju i projektuju za određene događaje u budućnosti za koje se ne zna kada će se ili da li će se uopšte desiti, pa se procenjuje i koristi verovatnoća da bi se sprečili neželjeni efekti (npr. verovatnoća da će se na prelivu brane javiti veći protok vode od onog na koji je brana projektovana da izdrži, verovatnoća da će nivo vode u reci toliko opasti da se ugrozi rad hidrocentrala, navodnjavanje ili život određene vrste ribe).

Važna primena verovatnoće je u proceni rizika (polise osiguranja). U zavisnosti od pretpostavljene verovatnoće nekog događaja, određuje se visina naknade koju je osiguravajuće društvo dužno da isplati, pa se tako iznosi značajno razlikuju kod životnog, zdravstvenog, imovinskog osiguranja i drugo.

U svakodnevnom životu značajna je primena verovatnoće u teoriji pouzdanosti. Ova teorija procenjuje verovatnoću da neki uređaj uspešno obavlja svoju funkciju tokom određenog vremenskog intervala, kako bi se obezbedilo optimalno funkcionisanje i smanjila verovatnoća kvara, što se primenjuje prilikom davanja garancija za kupljeni proizvod.

Verovatnoća ima važnu ulogu u ekonomiji. Dobar primer je uticaj očekivanja da će se desiti širi ratni konflikt na Bliskom Istoku na cenu nafte. Procena trgovaca da je rat manje ili više verovatan dovodi do podizanja, odnosno spuštanja cena. Takođe, procena potrošača o očekivanoj dobroj ili lošoj ekonomskoj situaciji u zemlji, utiče na njihovu veću ili manju zainteresovanost za određene proizvode, čija cena onda raste ili opada po principu ponude i potražnje.

19. LITERATURA

[1] Jovan D. Kečkić, *Matematika sa zbirkom zadataka za četvrti razred gimnazije*, Nauka, Beograd, 2000.

[2] Danijela Rajter-Ćirić, *Verovatnoća*, PMF, Novi Sad, 2008.

[3] Vesna Jevremović, *Verovatnoća i statistika*, Krug, Beograd, 1999.

[4] Dr Milutin Obradović, dr Dušan Georgijević, *Matematika sa zbirkom zadataka za četvrti razred srednje škole*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1990.

[5] Endre Pap, Zagorka Lozanov-Crvenković , *Matematika sa zbirkom zadataka za IV razred srednje škole*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2001.

[6] Grupa autora, *Matematičko- fizički list za učenike srednjih škola: izvanredni broj (D)*, Zagreb, 1987/88.

[7] Anon. http://en.wikipedia.org/wiki/Probability (10.7.2011.)

[8] Anon. http://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_points (10.7.2011.)

[9] Anon. http://en.wikipedia.org/wiki/Birthday_paradox (12.7.2011.)

[10] Anon. http://www.matematiranje.com (15.7.2011.)

[11] Anon. http://hikom.grf.bg.ac.rs/web_stranice/KatZaHidr/Predmeti/InzHidrol/predavanja2011/2011_07_statistika1.pdf (18.7.2011.)

20. KRATKA BIOGRAFIJA

Vojin Tomić je rođen 5. oktobra 1986. godine u Loznici, a odrastao je u Ljuboviji. Osnovnu školu „Petar Vragolić” završio je 2001-ve, zatim gimnaziju opšteg smera „Vuk Karadžić” 2005-te. Školske 2005/06. upisao se na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu. Diplomirao je 27.septembra 2010-te sa prosečnom ocenom 8,50, na smeru diplomirani matematičar-profesor matematike. Oktobra 2010-te upisuje postdiplomske master studije.

Tokom školovanja učestvovao je na takmičenjima iz matematike, fizike, srpskog i ruskog jezika. Bio je Đak generacije, dobitnik brojnih nagrada, nosilac Vukovih diploma za osnovnu i srednju školu, kao i specijalnih diploma za postignuća iz matematike i ruskog jezika.

Novi Sad, 2011. Vojin Tomić

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:
РБР
Идентификациони број:
ИБР
Тип документације: Монографска документација
ТД
Тип записа: Текстуални штампани материјал
ТЗ
Врста рада: Мастер рад
ВР
Аутор: Томић Војин
АУ
Ментор: др Драгослав Херцег
МН
Наслов рада: Елементи вероватноће у средњој школи
МР
Језик публикације: Српски (латиница)
ЈП
Језик извода: српски и енглески
ЈИ
Земља публиковања: Србија
ЗП
Уже географско подручје: Војводина
УГП
Година: 2011.
ГО
Издавач: Ауторски репринт
ИЗ
Место и адреса: Нови Сад, Департман за математику и информатику
Природно-математички факултет у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовића 3
МА
Физички опис рада: 20 поглавља/73 стране/0 фотографија/0 графикона/12 слика/11 литературе/
ФО
Научна област: Математика
НО
Научна дисциплина: Методика наставе математике
НД
Кључне речи: Вероватноћа, догађај, случајна променљива, расподела
КР
Предметна одредница: Вероватноћа
ПО
Чува се: у Библиотеци Департмана за математику и информатику
ЧУ
Важна напомена: /

ВН
Извод: У мастер раду је методички обрађена тема „ Вероватноћа “ кроз 15 наставних часова.
ИЗ
Датум прихватања теме од стране НН већа: Јун 2011.
ДП
Датум одбране: Октобар 2011.
ДО
Чланови комисије:
КО
Председник: др Зорана Лужанин,
редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду
Члан: др Дора Селеши,
доцент Природно-математичког факултета у Новом Саду
Члан: др Драгослав Херцег,
редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monographic publication
DT
Type of record: Textual printed material
TR
Contents Code: Master thesis
CC
Author: Tomić Vojin
AU
Mentor: dr Dragoslav Herceg
MN
Title: Elements of probability in the secondary school
XI
Language of text: Serbian (Latinic)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2011
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics,
Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3
PP
Physical description: 20 chapters/73 pages/0 photographs/0 charts/12 pictures/ 11 references
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Teaching Methods of Mathematics
SD
Key words: Probability, hazard, random variable, distribution
KW
Holding data: Library of Department of Mathematics and Informatics
HD
Note: /
N
Abstract: In master thesis is methodically elaborated theme "Probability" through 15 lessons.

AB

Accepted by the Scientific Board on: June 2011.
ASB
Defended: October 2011.
DE
Thesis defense board:
DB
President: Dr Zorana Lužanin,
Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: Dr Dora Seleši,
Assistant Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: Dr Dragoslav Herceg,
Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad