



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ  
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ  
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И  
ИНФОРМАТИКУ



Владимир Голуб

# СВЕТ БРОЈЕВА

- Мастер рад -

**Ментор:**

др Петар Ћапић

Нови Сад, 2017.

# Садржај

|                                                            |    |
|------------------------------------------------------------|----|
| ПРЕДГОВОР.....                                             | 5  |
| УВОД.....                                                  | 6  |
| КРАТАК ИСТОРИЈСКИ ПРЕГЛЕД.....                             | 8  |
| ГЛАВА 1. ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЈЕВИ.....                     | 10 |
| 1.1. О простим и сложеним бројевима.....                   | 10 |
| 1.2. Основна теорема аритметике.....                       | 13 |
| 1.3. Прости и сложени бројеви у основној школи.....        | 15 |
| 1.3.1. Предлог за редовну наставу.....                     | 15 |
| 1.3.2. Предлог за додатну наставу.....                     | 17 |
| 1.4. Фермаови и Мерсенови бројеви.....                     | 22 |
| 1.5. Емирпи, валовити и изопрости бројеви.....             | 24 |
| 1.6. Савршени бројеви.....                                 | 26 |
| 1.6.1. Особине савршених бројева.....                      | 31 |
| 1.7. Пријатељски бројеви.....                              | 32 |
| 1.8. Палиндроми.....                                       | 35 |
| 1.9. Палиндиони и хиперпалиндиони.....                     | 38 |
| 1.10. Каталанови бројеви.....                              | 39 |
| 1.11. Фибоначијеви бројеви.....                            | 42 |
| 1.11.1. Фибоначијеви бројеви свуда око нас.....            | 43 |
| 1.11.2. Паскалов троугао.....                              | 47 |
| 1.11.3. Примене Паскаловог троугла.....                    | 49 |
| 1.12. Лукасови бројеви.....                                | 51 |
| 1.13. Кармајклови бројеви.....                             | 52 |
| 1.14. Приморијали, факториони и циклички бројеви.....      | 55 |
| 1.15. Бројеви близанци.....                                | 56 |
| ГЛАВА 2. НАЈВЕЋИ БРОЈЕВИ У МАТЕМАТИЦИ.....                 | 57 |
| 2.1. О великим бројевима.....                              | 57 |
| 2.2. Кнутова нотација.....                                 | 60 |
| 2.3. Гугол и гуголплекс.....                               | 63 |
| 2.4. Грахамов број.....                                    | 64 |
| 2.4.1. Записивање Грахамовог броја.....                    | 66 |
| ГЛАВА 3. БРОЈЕВНИ СИСТЕМИ.....                             | 67 |
| 3.1. Подела бројевних система.....                         | 67 |
| 3.2. Декадни бројевни систем.....                          | 68 |
| 3.3. Бинарни бројевни систем.....                          | 69 |
| 3.3.1. Превођење бројева из декадног у бинарни систем..... | 69 |

|                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------|-----|
| 3.3.2. Превођење бројева из бинарног у декадни систем.....      | 70  |
| 3.4. Октални бројевни систем.....                               | 71  |
| 3.4.1. Превођење бројева из декадног у октални систем.....      | 71  |
| 3.4.2. Превођење бројева из окталног у декадни систем.....      | 72  |
| 3.5. Хексадекадни бројевни систем.....                          | 73  |
| 3.5.1. Превођење бројева из декадног у хексадекадни систем..... | 73  |
| 3.5.2. Превођење бројева из хексадекадног у декадни систем..... | 74  |
| <br>ГЛАВА 4. ТЕОРИЈА БРОЈЕВА У ДОДАТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ..... | 75  |
| 4.1. Пети разред.....                                           | 75  |
| 4.2. Шести разред.....                                          | 78  |
| 4.3. Седми разред.....                                          | 80  |
| 4.4. Осми разред.....                                           | 84  |
| <br>ГЛАВА 5. БРОЈЕВИ КАО ИНСПИРАЦИЈА.....                       | 87  |
| 5.1. Бројеви на такмичењима.....                                | 87  |
| 5.2. Бројеви кроз историју.....                                 | 93  |
| ЗАКЉУЧАК.....                                                   | 96  |
| ДОДАТАК.....                                                    | 97  |
| ЛИТЕРАТУРА.....                                                 | 99  |
| БИОГРАФИЈА.....                                                 | 100 |

# Предговор

У овом мастер раду је описан широк спектар бројева са специфичним особинама које се могу објаснити у вишим разредима основне школе. Почев од Фермаових и Мерсенових бројева преко савршених, пријатељских, палиндромних, Каталанових, Фибоначијевих, Лукасових, цикличких и Кармајклових бројева, па све до великих бројева као што је Грахамов број. Осим тога, дат је осврт на бројевне системе и прикупљен велики избор задатака са математичких такмичења, а у којима су бројевима са специфичним особинама дати интересантни називи. Прича о бројевима је такође илустрована сетом задатака за по један двочас додатне наставе у сваком разреду и избором задатака за самостални рад ученика.

У уводном делу рада је дат кратак историјски преглед теорије бројева, почев од радова Диофанта па све до данашњих дана. Рад је даље подељен на пет поглавља.

У првом поглављу је прича о простим и сложеним бројевима и предлог како ученике 5. разреда основне школе на редовној настави увести у свет ових бројева. Дат је и сет решених задатака за додатни рад који могу послужити као припрема за такмичења. Након тога се нижу горе наведене класе бројева. Истакнуте су значајне теореме и прича је илустрована бројним примерима и применама.

Друго поглавље је посвећено великим бројевима. Иако су тешки за дефинисање, неки од њих су релативно познати и имају своју примену у математици па су посебно истакнути. Дат је преглед назива свих бројева који се записују са 3, 6, 9, ..., 81 нула, и дефинисан је Скјуесов, Левијатанов, Тегмарков и Ердуш-Мосеров број, као и гугол и гуголплекс. Највећи број са именом који је икада коришћен за решавање неког математичког проблема је Грахамов број па је њему посвећена посебна пажња. У оквиру приче о Грахамовом броју објашњена је Кнутова нотација са стрелицама за представљање великих бројева.

У трећем поглављу дат је осврт на бројевне системе. Наведена је основна подела бројевних система на непозиционе и позиционе и размотрени су позициони системи у које спадају: декадни, бинарни, октални и хексадекадни систем. Описан је детаљан поступак превођења бројева из једног система у други.

Четврто поглавље је посвећено теорији бројева у додатној настави математике. Осим сета решених задатака за по један двочас у свим разредима, конципиран је и сет задатака за самостални рад ученика.

За разлику од бројева наведених у првом поглављу чији су називи интернационално препознати, много је назива који живе само локално – у поставци такмичарских задатака. Стога је на крају рада, у петом поглављу, прикупљен велики избор задатака са математичких такмичења у којима су бројевима са специфичним особинама дати интересантни називи. Почев од вампирских, недодирљивих, економичних, симпатичних и ружичастих бројева који су се појављивали на такмичењима у нижим разредима основне школе, па све до сложених задатака са Међународних математичких олимпијада, у којима смо, између осталог, упознали и јаке, лоше, добре, дупле и мирисне бројеве.

Рад се завршава причом о још неким интересантним бројевима који се појављују кроз историју, као што је ђаволски број 666.

Овом приликом бих се захвалио свом ментору на подршци и корисним саветима приликом израде овог мастер рада. Такође захвалност дугујем и др Маји Пех која је својим сугестијама допринела да рад овако изгледа.

На крају, овај мастер рад посвећујем свом оцу.

Владимир Голуб

# Увод

Бројеви су фасцинирали људе од најранијих почетака цивилизације. **Питагора** је открио да музичка хармонија зависи од односа целих бројева и закључио да је све у природи број. Према **Плутарху**, **Ксенократ** је израчунао да је број слогова који се могу формирати од слова грчке азбуке једнак 1 002 000 000 000. То је први забележен покушај решавања једног тешког комбинаторног проблема који се односи на бројеве. У једном проблему који је поставио **Архимед** (проблем о биковима) као решење појављује се број који се у децималној нотацији (која није била позната **Архимеду**) записује помоћу 206545 цифара. Да би се наштампао тај број потребна је књижица од 50 страница.

У теорији бројева има много дубоких и лепих теорема, а такође и мноштво тешких и до сада нерешених проблема који стотинама година одолевају настојањима највећих математичара. Многи делови савремене математике настали су као резултат решавања и уопштавања проблема из теорије бројева. Карл Фридрих **Гаус** (1777 – 1855) који је учинио многа важна открића у математици рекао је „Математика је краљица наука, теорија бројева је краљица математике“. Леополд **Кронекер** (1823 – 1891) је рекао да је Бог створио целе бројеве а све остало је дело човека. Овим је артикулисао идеју да цели бројеви заузимају посебно место у односу на све остале бројеве.

Управо на примеру теорије бројева најбоље се потврђује мисао да добра математика никад не застарева. Ниједна грана математике није толико омиљена код аматера као теорија бројева. У исто време, ниједна грана математике није постављала толико замке и проузроковала толико неуспеха и код највећих математичара. Данас је аритметика целих бројева важна у огромном кругу људских делатности и често је играла кључне улоге у развоју природних наука. Има велику примену у рачунарству, комуникацијама, криптографији, физици, биологији, уметности.

Прегледна подела бројева приказана је на слици 1.

*„Бројеви се попут мехурића пробијају океаном математике.  
Задатак математичара је да нас одведе на нова мора,  
продубљујући воде и проширујући хоризонте.“*



## *Кратак историјски преглед*

На значај проучавања историје једне науке указивао је још **Лајбниц**. Рани период развоја аритметике карактеристичан је по томе што се процес рачуна развија постепено и веома споро. У **Еуклидовим** радовима теоријско-бројчана истраживања заузимају релативно мало места, али ипак већ код њега срећемо низ основних појмова теорије дељења и, иако обичан, али веома важан резултат: бесконачност броја простих бројева. Грчким математичарима је био познат начин издвајања простих бројева из природног низа, који је према **Ератостену** добио назив Ератостеново сито (решето).

Међутим, теорију бројева као посебну област математике могуће је разматрати само ако се почне од радова **Диофанта** (време његовог живота није тачно познато, вероватно 3. век наше ере). **Диофант** је размотрио низ задатака о представљању бројева у одређеном облику и још општије проблеме решавања неодређених једначина са целим и позитивним рационалним бројевима. Управо ти проблеми касније су постали полазна тачка читаве теорије. У периоду слабљења античке културе Диофантови радови су били скоро сасвим заборављени. Својеврсна математичка култура настаје у 8. – 9. веку у арапским земљама. Неки арапски математичари су развијали Диофантову симболику али суштински ништа ново нису добили.

У Европи, почев од епохе крсташких похода па до 17. века, развој теорије бројева као и читаве математике био је веома спор. Од радова тог времена највећи траг за даљи развој теорије бројева оставили су, за ту епоху веома значајни, радови Леонарда **Пизанског** (умро 1250.) и радови **Региомонтануса** (умро 1476.) који је нашао Диофантове радове и по први пут у Европи почео да их систематски изучава.

Развој теорије бројева су у 17. и 18. веку значајно покренули француски математичар **Ферма** (1601-1655) и швајцарски математичар Леонард **Ојлер** (1707-1783). **Ферма** је дошао до основног резултата теорије дељивости за задати прост број и решио низ важних задатака теорије неодређених једначина. **Ојлер** је уопштио Фермаов основни резултат за случај дељивости сложеним бројем и добио веома велики број разноврсних резултата. После Ојлерових радова скоро сви већи математичари 18. и 19. века се у мањем или већем степену баве теоријом бројева.



Нарочито је велики траг у развоју теорије бројева оставио француски математичар **Лагранж** (1735-1813) који је даље развио Ојлерове методе. Он је доказао теорему представљања бројева у облику суме четири квадрата и извршио битна истраживања за теорију разломака. Велики утицај на даљи развој теорије бројева извршили су и радови **Лежандра** (1752-1833) који је нашао емпиријску формулу за број простих бројева у датим границама. Радови **Ојлера, Лагранжа и Лежандра** створили су базу за теорију која је код **Гауса** добила назив теорија конгруенција.

Сјајни радови немачког математичара **Гауса** (1777-1855) имали су посебно велики значај за теорију бројева. Он је започео изучавање комплексних бројева и након његових радова истраживања у теорији бројева добијају све веће замахе. Разноврсни проблеми бивају разрађени од стране великих математичара као што су **Јакоби, Дирихле, Кумер, Чебишев, Лиувил, Ермит, Кронекер, Риман** и други.

Двадесети век је донео суштинске промене, где је развој теорије бројева био везан за усавршавање већ познатих метода, а нарочито за стварање сасвим нових. Велики успеси су били постигнути у теорији трансцедентних бројева.

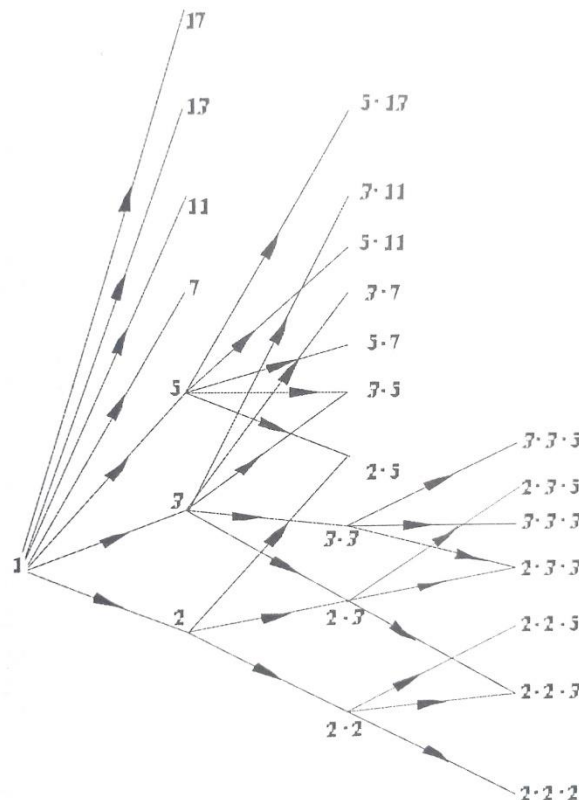
Могло би се рећи да се проблеми теорије бројева деле на две врсте. Првој врсти припадају они за које су познате методе решавања, а другој проблеми за које методе решавања нису познате. Неки математички проблеми су само постављени. Такав је нпр. проблем да ли има непарних савршених бројева, који стоји отворен још од **Еуклидовог** доба. Од почетка рачунарске ере, програмери тестирају своје способности и моћ рачунара решавајући проблеме из теорије бројева и откривајући разне куриозитете у тој области. У раној фази било је врло популарно израчунавање броја  $\pi$  са великом тачношћу и слични проблеми. Откривање простих бројева није никада изгубило популарност и вероватно ни неће.

Позната је чињеница да се код примитивних народа појам броја исцрпљује на схватању неколико почетних природних бројева, да би се већ код Старих Грка дубоко схватио смисао природних бројева и позитивних разломака. Затим је требало прећи скоро 2000 година да би негативни бројеви „добили право грађанства“ у математици, док је познавање реалног броја старо нешто више од стотинак година.

# 1. Прости и сложени бројеви

## 1. 1. О ПРОСТИМ И СЛОЖЕНИМ БРОЈЕВИМА

Полазну основу читавог развоја математике чини појам природног броја. Приликом разматрања природних бројева примећујемо да међу њима постоје бројеви са веома разноврсним особинама. Осим њиховог природног поретка по величини, релацијом  $\leq$ , који је потпун и бројеви се нижу линеарно  $1 \leq 2 \leq 3 \dots$  може се уочити и природни поредак по релацији дељивости. Тај поредак није потпун и њиме се скуп природних бројева преплиће у мрежу. На слици 2 је приказана мрежа за првих 25 природних бројева.[1]



Слика 2: Мрежа за првих 25 природних бројева

Дакле, непосредно после броја 1 долази читав низ следбеника и то су бројеви 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

У вези са овим, скуп целих бројева можемо поделити на 3 дела: просте бројеве, сложене бројеве и бројеве који нису ни прости ни сложени.

### Дефиниција 1.1.

- 1) Цео број  $p$  је прост ако не припада скупу  $\{-1, 0, 1\}$  и делитељи су му само  $-1, 1, p$  и  $-p$ .
- 2) Цео број који је различит од  $-1, 1$  и  $0$ , и није прост, јесте сложен.

3) Бројеви 0, 1 и -1 нису ни прости ни сложени.

Проблем добијања потпуне листе простих бројева мањих од датог броја  $n$  заокупљао је пажњу математичара вековима. Један поступак за утврђивање простоте датог броја и налажење свих простих бројева мањих од датог броја  $n$  дао је старогрчки математичар **Ератостен**.

Како смо видели, низ простих бројева почиње овако: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

Најлакши начин да се овај низ настави је метод познат као **Ератостеново сито** (решето): ако желимо да нађемо све просте бројеве мање од  $n$ , прво треба да испишемо све природне бројеве од 2 до  $n - 1$  и да редом из списка елиминишемо (прецртамо) све парне бројеве изузев броја 2, затим све бројеве дељиве са 3, изузев самог броја 3, затим слично са 5, 7 итд. све до последњег природног броја мањег од  $\sqrt{n}$ . Приметимо да после елиминације парних бројева није више потребно тражити бројеве дељиве са 4, 6, 8 итд. јер су сви ти бројеви парни. Слично, после елиминације бројева дељивих са 3 није више потребно тражити бројеве дељиве са 6, 9 итд. Дакле, да бисмо одредили просте бројеве мање од  $n$ , користимо просте бројеве мање од  $\sqrt{n}$ .

**Пример 1.2.** Да бисмо помоћу Ератостеновог сита одредили све просте бројеве мање од 100, треба редом да елиминишемо све бројеве дељиве са 2, 3, 5 и 7 ( $\sqrt{100} = 10$  а 7 је највећи прост број мањи од 10). На тај начин добијамо 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, укупно 25 простих бројева мањих од 100. Ератостенов алгоритам је у том случају приказан на слици 3. [1]

|               |               |               |               |               |               |               |               |               |                |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| <del>1</del>  | (2)           | (3)           | <del>4</del>  | (5)           | <del>6</del>  | (7)           | <del>8</del>  | <del>9</del>  | <del>10</del>  |
| (11)          | <del>12</del> | (13)          | <del>14</del> | <del>15</del> | <del>16</del> | (17)          | <del>18</del> | (19)          | <del>20</del>  |
| <del>21</del> | <del>22</del> | (23)          | <del>24</del> | <del>25</del> | <del>26</del> | <del>27</del> | <del>28</del> | (29)          | <del>30</del>  |
| (31)          | <del>32</del> | <del>33</del> | <del>34</del> | <del>35</del> | <del>36</del> | (37)          | <del>38</del> | <del>39</del> | <del>40</del>  |
| (41)          | <del>42</del> | (43)          | <del>44</del> | <del>45</del> | <del>46</del> | (47)          | <del>48</del> | <del>49</del> | <del>50</del>  |
| <del>51</del> | <del>52</del> | (53)          | <del>54</del> | <del>55</del> | <del>56</del> | <del>57</del> | <del>58</del> | (59)          | <del>60</del>  |
| (61)          | <del>62</del> | <del>63</del> | <del>64</del> | <del>65</del> | <del>66</del> | (67)          | <del>68</del> | <del>69</del> | <del>70</del>  |
| (71)          | <del>72</del> | (73)          | <del>74</del> | <del>75</del> | <del>76</del> | <del>77</del> | <del>78</del> | (79)          | <del>80</del>  |
| <del>81</del> | <del>82</del> | (83)          | <del>84</del> | <del>85</del> | <del>86</del> | <del>87</del> | <del>88</del> | (89)          | <del>90</del>  |
| <del>91</del> | <del>92</del> | <del>93</del> | <del>94</del> | <del>95</del> | <del>96</del> | (97)          | <del>98</del> | <del>99</del> | <del>100</del> |

Слика 3: Ератостеново сито

Није тешко закључити да, чим смо нашли први прост број који прелази  $\sqrt{n}$ , остали су нам непрецртани само прости бројеви. Ово тврдимо на основу следеће теореме:

### ***Теорема 1.3.***

Цео број  $n > 0$  је сложен ако и само ако је дељив простим бројем  $p$ , таквим да је  $p \leq \sqrt{n}$ .

#### ***Доказ:***

( $\Leftarrow$ ) Ако је  $n$  дељив простим бројем  $p \leq \sqrt{n}$ , онда је  $n$  очигледно сложен број.

( $\Rightarrow$ ) Ако је  $p$  најмањи прост делитељ сложеног броја  $n$ , тада је  $n = pk$ , за неки цео број  $k$ , и при томе је  $k \geq p$ . Тада је  $n \geq p \cdot p$ , односно  $p \leq \sqrt{n}$  ■

Закон контрапозиције нам омогућава да претходно тврђење формулишемо и на следећи начин:

### ***Последица 1.4.***

Цео број  $n > 1$  је прост ако и само ако није дељив простим бројем  $p \leq \sqrt{n}$

## 1. 2. ОСНОВНА ТЕОРЕМА АРИТМЕТИКЕ

У овом одељку доказаћемо да се сваки позитиван цео број може представити у облику производа простих фактора и да је такво представљање јединствено до на поредак фактора. [2]

### **Теорема 1.5.**

Ако је  $n$  цео број већи од 1, онда је  $n$  производ простих фактора.

#### **Доказ:**

Ако је  $n$  прост број, тврђење очигледно важи. Претпоставимо да тврђење важи за сваки сложен број мањи од  $n$ . Ако је  $n$  сложен број, тада постоји цео број  $d$  такав да је  $1 < d < n$  и  $d \mid n$ . Означимо са  $m$  најмањи такав број. Број  $m$  не може бити сложен, јер би у том случају постојао цео број  $k$  такав да је  $1 < k < m$  и  $k \mid m$ , што повлачи да  $k \mid n$ . То је, међутим, у контрадикцији са претпоставком да је  $m$  најмањи цео број већи од 1 који је делитељ од  $n$ . Дакле,  $m$  је прост број. Обележимо га са  $p_1$ . Следи да је  $n = p_1 n_1$ , где је  $1 < n_1 < n$ . По претпоставци индукције, број  $n_1$  се може представити у облику производа простих фактора; према томе, може и  $n$ . ■

Групишући једнаке просте факторе броја  $n$ , закључујемо да се сваки цео број већи од 1 може представити у облику

$$n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$$

где је  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  и  $\alpha_i > 0$ , за  $i = 1, 2, \dots, k$ . За такво представљање кажемо да је *канонски облик* броја  $n$ . Из практичних разлога, међутим, ми узимамо да је  $\alpha_i \geq 0$ , јер онда било који прост број може формално да фигурише у канонском представљању неког броја.

Следеће тврђење је познато под именом *Основна теорема аритметике*.

### **Теорема 1.6.**

Сваки цео број већи од 1 има јединствен канонски облик.

### *Доказ:*

Канонско представљање постоји на основу претходне теореме. Преостаје да се докаже да је то представљање јединствено.

Канонски облик простог броја је, очигледно, јединствен. Претпоставимо да постоји позитиван сложен број већи од 1 који се може на два различита начина представити у канонском облику. Нека је  $n$  најмањи такав број, са представљањима

$$n = p_1 p_2 \dots p_k = q_1 q_2 \dots q_m.$$

Не постоји прост број  $p$  који се појављује у обе канонске репрезентације броја  $n$ , јер би у том случају и број  $n' = \frac{n}{p}$ , који је мањи од  $n$ , имао две различите канонске репрезентације, што је у контрадикцији са претпоставком о минималности броја  $n$ . Можемо да претпоставимо да је

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k, \quad q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_m.$$

За просте факторе  $p_1$  и  $q_1$  важи да је  $p_1 \neq q_1$ , па можемо узети да је  $p_1 < q_1$ . Нека је  $N = p_1 q_2 \dots q_m$ . Како је  $p_1 \mid N$  и  $p_1 \mid n$ , следи да је  $p_1 \mid (n - N)$ , где је  $n - N = (q_1 - p_1) q_2 \dots q_m > 1$ . Следи да се број  $n - N$  може написати у облику  $n - N = p_1 t_1 \dots t_h$ , где су  $t_i$  прости бројеви, за  $i = 1, 2, \dots, h$ .

С друге стране, ако је  $q_1 - p_1 > 1$ , онда се  $q_1 - p_1$  може написати као производ простих фактора, рецимо  $q_1 - p_1 = r_1 r_2 \dots r_s$ , па добијамо, на други начин, број  $n - N$  у облику производа простих фактора:

$$n - N = r_1 r_2 \dots r_s q_2 \dots q_m.$$

Ова последња факторизација не садржи прост фактор  $p_1$ . Наиме, знамо да је  $p_1 \neq q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ; с друге стране  $p_1 \neq r_j$ , за  $j = 1, 2, \dots, s$ , јер  $p_1$  није делитељ од  $q_1 - p_1$ . Дакле, број  $n - N$  има две различите факторизације, јер само једна од њих садржи прост фактор  $p_1$ . То важи и у случају кад је  $q_1 - p_1 = 1$ . Међутим,  $1 < n - N < n$ , што је у контрадикцији са претпоставком о минималности броја  $n$ . Дакле, не постоји цео број већи од 1, који се може на два начина представити у канонском облику. ■

### 1. 3. ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЈЕВИ У ОСНОВНОЈ ШКОЛИ

Са појмом простог и сложеног броја ученици се први пут сусрећу у 5. разреду основне школе. У наставку дат је предлог – како ученике на редовној настави увести у свет ових бројева, као и избор решених задатака за додатну наставу.

#### 1.3.1. ПРЕДЛОГ ЗА РЕДОВНУ НАСТАВУ

Пре обраде простих и сложених бројева у петом разреду ученици су научили шта је делилац неког броја.

**Дефиниција 1.7.** Делилац неког природног броја је сваки број којим је тај број дељив, то јест којим се може поделити без остатка.

**Пример 1.8.** Број 12 је дељив бројевима 1, 2, 3, 4, 6, 12. То су делиоци броја 12. Записујемо:  $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ .

Имајући то у виду, можемо просте бројеве увести као бројеве који имају тачно два делиоца, а сложене бројеве као бројеве који имају више од два делиоца. При томе треба и нагласити да број 1 није ни прост ни сложен.

**Дефиниција 1.9.** Прости бројеви су они природни бројеви који имају тачно два делиоца – дељиви су само са самим собом и са 1. Сложени бројеви су природни бројеви који имају више од два делиоца. Број 1 није ни прост ни сложен.

**Пример 1.10.** Број 13 је прост јер је дељив само са 13 и са 1 (има тачно два делиоца). Број 15 је сложен јер је дељив са 15, 5, 3 и 1 (има више од два делиоца).

*Задаци за вежбу:*

**Задатак 1.** Наведи све просте бројеве мање од 30.

**Решење:** То су бројеви 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

**Задатак 2.** Дат је скуп  $A = \{7, 9, 20, 31, 47, 50, 56, 60, 71, 100, 121\}$ . Написати елементе скупова  $P$  и  $S$  ако је:  $P = \{x \mid x \in A \text{ и } x \text{ је прост број}\}$ ,  $S = \{x \mid x \in A \text{ и } x \text{ је сложен број}\}$ .

**Решење:**  $P = \{7, 31, 47, 71\}$ ,  $S = \{9, 20, 50, 56, 60, 100, 121\}$ .

Такође, важно је истаћи да је број 2 једини паран прост број јер та чињеница је основа за решавање многих задатака, нарочито на додатној настави.

Неизоставан део часа на ком се обрађују прости и сложени бројеви је и дефинисање узајамно простих бројева. При томе ученицима треба указати на разлику између простих и узајамно простих бројева (да два сложена броја могу бити узајамно проста). Обавезно наводити примере јер ученици то много лакше уоче кроз примере.

**Дефиниција 1.11.** За два броја кажемо да су узајамно прости ако је њихов највећи заједнички делилац једнак 1.

**Пример 1.12.** Узајамно прости бројеви су 3 и 5, 20 и 21 итд. Бројеви 3 и 5 су прости бројеви, а уједно и узајамно прости јер је  $\text{НЗД}(3, 5) = 1$ . Али, бројеви 20 и 21 нису прости, али јесу узајамно прости.

*Задаци за вежбу:*

**Задатак 3.** Од елемената скупа  $\{2, 3, 5, 7\}$  образуј све двоцифрене прости бројеве.

**Решење:** 23, 37, 53, 73.

**Задатак 4.** Нађи све а) прости б) сложене бројеве који су делиоци броја 210.

**Решење:** а) 2, 3, 5, 7 б) 6, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210.

**Задатак 5.** Нађи два сложена троцифрена броја који су узајамно прости.

**Решење:** 104 и 105

**Задатак 6.** Нађи по један прост и један сложен број, такве да су: а) њихов збир и разлика прости бројеви; б) њихов збир и разлика сложени бројеви.

**Решење:** а) 23 и 6 ( $23 + 6 = 29$ ,  $23 - 6 = 17$ ) б) 31 и 4 ( $31 + 4 = 35$ ,  $31 - 4 = 27$ )

Структура једног школског часа на ком се обрађује наставна јединица „Прости и сложени бројеви“ приказана је у додатку који се налази на крају овог рада (страница 97-98).



### 1.3.2. ПРЕДЛОГ ЗА ДОДАТНУ НАСТАВУ

Прости и сложени бројеви су неизоставна тема за додатни рад у свим вишим разредима основне школе. Следи избор решених задатака који се могу користити као припрема за такмичења. Предложени задаци илуструју неке од стандардних идеја за решавање проблема у основношколској настави математике. Неки од предложених задатака се могу пронаћи у [7].

**Задатак 7.** Одредити све просте бројеве  $p$  за које су и бројеви  $p + 3$ ,  $p^2 + 3$ ,  $p^3 + 3$  и  $p^4 + 3$  такође прости.

**Решење:** Разликујемо два случаја.

Ако је  $p = 2$  онда је  $p + 3 = 5$ ,  $p^2 + 3 = 7$ ,  $p^3 + 3 = 11$ ,  $p^4 + 3 = 19$  и све су то прости бројеви па је 2 једно решење.

Ако је  $p > 2$ , онда је  $p$  непаран број па је  $p^2$  такође непаран број. Тада је  $p^2 + 3$  паран, што значи и сложен.

Дакле  $p = 2$  је једино решење.

**Задатак 8.** Ако је  $p$  прост број већи од 3 доказати да је  $p^2 - 1$  дељив са 24.

**Решење:** С обзиром да је по претпоставци  $p$  прост број већи од 3, он је и непаран, па је  $p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1)$  производ два парна броја, који су и узастопни парни бројеви, па је један од њих дељив са 2, а други са 4. Зато је њихов производ  $(p + 1)(p - 1)$  дељив са 8.

Такође, пошто је  $p$  прост број он сигурно није дељив са 3, а  $p - 1$  и  $p + 1$  су му претходник и следбеник од којих је један сигурно дељив са 3. Пошто смо показали да је овај производ дељив и са 8 и са 3, следи да је он дељив и са 24 и тиме је доказ завршен.

**Задатак 9.** За који прост број  $p$  је и број  $8p^2 + 1$  такође прост?

**Решење:** Разликујемо 3 случаја.

Ако је  $p = 2$  тада је  $8 \cdot 2^2 + 1 = 33$  а ово је сложен број.

Ако је  $p = 3$  онда је  $8 \cdot 3^2 + 1 = 73$  прост број.

Нека је сада  $p$  прост број већи од 3. Он ће тада бити облика  $p = 3k + 1$  или  $p = 3k - 1$ . Сада је:  $8(3k \pm 1)^2 + 1 = 72k^2 \pm 48k + 9$  а овај број је сложен јер је дељив са 3.

Закључујемо да је  $8p^2 + 1$  прост број једино када је  $p = 3$ .

**Задатак 10.** Ако је  $p$  прост број доказати да је  $p^{2011} + p^{2013}$  сложен.

**Решење:** Разликујемо 2 случаја.

Ако је  $p = 2$  тада је  $2^{2011} + 2^{2013}$  збир два парна броја, који је паран број, па тиме и сложен.

Ако је  $p > 2$  тада је он и непаран. Али, и непаран степен непарног броја ће бити непаран, па је збир  $p^{2011} + p^{2013}$  збир два непарна броја, а то је паран број, па пошто је паран он је и сложен, што је и требало доказати.

**Задатак 11.** Ако су  $p$  и  $7p - 1$  прости бројеви онда је  $7p + 1$  сложен број. Доказати.

**Решење:** Разликујемо 2 случаја.

Ако је  $p = 2$  тада је  $7p - 1 = 7 \cdot 2 - 1 = 13$  такође прост број. А број  $7p + 1 = 7 \cdot 2 + 1 = 15$  је сложен, што је и требало доказати.

Ако је  $p > 2$  онда је он и непаран па је број  $7p - 1$  паран, што је у супротности са претпоставком задатка.

Овде завршавамо анализу проблема, утврдили смо да тврђење важи за  $p = 2$ .

**Задатак 12.** Постоји ли прост број  $p$  тако да и бројеви  $3p + 1$  и  $5p + 1$  буду прости?

**Решење:** Постоји. То је број  $p = 2$  јер су тада  $3 \cdot 2 + 1 = 7$  и  $5 \cdot 2 + 1 = 11$  прости. Више од овог не би било могуће јер би за било који други прост број  $p$  већи од 2, због његове непарности, бројеви  $3p + 1$  и  $5p + 1$  били парни па тиме и сложени.

**Задатак 13.** Доказати да остатак при дељењу простог броја са бројем 30 не може бити сложен број.

**Решење:** Ако би остатак при дељењу простог броја  $p$  са бројем 30 био, на пример, 14 тада би било  $p = 30 \cdot q + 14 = 2(15 \cdot q + 7)$ , па би  $p$  био дељив са 2, што је у супротности са претпоставком да је прост. На сличан начин

бисмо елиминисали све могућности да остатак буде сложен број и добили да важи тврђење задатка да тај остатак мора бити прост.

**Задатак 14.** Одредити све просте бројеве  $p$  за које је и број  $3^p + p^3$  прост.

**Решење:** За  $p = 2$  је и  $3^2 + 2^3 = 17$  прост, а за друге просте бројеве  $p$ , који су уз то и непарни, збир  $3^p + p^3$  је збир два непарна броја, па је он паран, а тиме и сложен. Дакле, број  $3^p + p^3$  је прост једино за  $p = 2$ .

**Задатак 15.** Одредити све просте бројеве  $p$  такве да је  $\frac{7}{6} > \frac{5}{p} > \frac{2}{5}$ .

**Решење:** Из датог односа међу разломцима следи да је и  $\frac{5}{2} > \frac{p}{5} > \frac{6}{7}$ . Да

бисмо олакшали посао приликом поређења, проширимо дате разломке да их доведемо на исте имениоце. Закључујемо да је одговарајући исти именилац 70, па ћемо имати:  $\frac{175}{70} > \frac{14p}{70} > \frac{60}{70}$ , односно  $175 > 14p > 60$ . Одавде је  $\frac{175}{14}$

$> p > \frac{60}{14}$ , па једноставно добијамо да  $p \in \{5, 7, 11\}$ .

**Задатак 16.** Доказати да ако је број  $p > 2$  прост, онда је број  $p^{2011} + (2p)^{2012} + 2013$  сложен.

**Решење:** Број  $p$  је по претпоставци прост број већи од 2 па је тиме и непаран. У збиру  $p^{2011} + (2p)^{2012} + 2013$  први сабирак је непаран, као непаран степен непарног броја. Други сабирак је паран број, јер је  $2p$  паран број, а трећи сабирак је непаран. Збир два непарна и једног парног броја је паран број, па је овај збир паран број, а тиме и сложен.

**Задатак 17.** Доказати да број  $2^{10} + 3^{12}$  није прост.

**Решење:** Можемо у датом запису извршити следећу трансформацију:

$2^{10} + 3^{12} = (2^5)^2 + (3^6)^2$  и пробати да направимо квадрат бинома у коме ће нам  $2^5$  и  $3^6$  бити чланови. То ћемо постићи додавањем и одузимањем члана  $2 \cdot 2^5 \cdot 3^6$ , па ћемо имати:

$2^{10} + 3^{12} = (2^5)^2 + (3^6)^2 = (2^5)^2 + 2 \cdot 2^5 \cdot 3^6 + (3^6)^2 - 2 \cdot 2^5 \cdot 3^6 = (2^5 + 3^6)^2 - 2^6 3^6 = (2^5 + 3^6)^2 - 6^6 = (2^5 + 3^6)^2 - (6^3)^2 = (2^5 + 3^6 + 6^3)(2^5 + 3^6 - 6^3)$ . Пошто су оба чиниоца већа од 1, то нам потврђује да је број  $2^{10} + 3^{12}$  сложен.

**Задатак 18.** Да ли постоји прост број који се може представити у облику збира кубова два природна броја?

**Решење:** Ако такав прост број  $p$  постоји, он би се могао представити као:  $p = a^3 + b^3$  где су  $a$  и  $b$  природни бројеви. Овде нам је неопходно познавање формуле за растав збира кубова:  $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$ , па кад њу искористимо имали бисмо да је:  $p = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$ . Пошто прост број  $p$  нема других чинилаца сем 1 и себе самог, и због чињенице да је  $a + b > 1$ , имаћемо да је  $a^2 - ab + b^2 = 1$ . Решимо ову једначину у скупу природних бројева. Она је еквивалентна са  $2a^2 - 2ab + 2b^2 = 2$ , односно  $a^2 + b^2 + (a - b)^2 = 2$ . Одавде добијамо да је једино решење, за нас интересно,  $a = 1$  и  $b = 1$  јер је услов да буду природни бројеви (када би тражили целобројна решења, имали би и парове  $(1,0)$  и  $(0,1)$ ). Из овога добијамо да постоји прост број  $p = 2$  за природне бројеве  $a = 1$  и  $b = 1$ , такав да је  $p = 2 = 1^3 + 1^3$ . Друге могућности не постоје.

**Задатак 19.** Да ли је број  $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$  прост или сложен?

**Решење:** Због могућности да се овај израз напише као производ

$$3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} = 3^n (1 + 3 + 3^2) = 3^n \cdot 13$$

једноставно закључујемо да је то сложен број.

**Задатак 20.** Сваки прост број већи од 3 је облика  $6k + 1$  или  $6k + 5$ , за неко  $k \in \mathbb{N}$ . Доказати.

**Решење:** На пример, за  $k = 1$  је  $6 \cdot 1 + 1 = 7$  и  $6 \cdot 1 + 5 = 11$ . Ова два броја су проста, евидентно већа од 3, и представили смо их на дате начине. Проверимо да ли су то једине могућности за представљање простих бројева већих од 3. Све природне бројеве можемо представити на један од следећих шест начина (за  $k \in \mathbb{N}_0$ ):  $6k + 1$ ,  $6k + 2$ ,  $6k + 3$ ,  $6k + 4$ ,  $6k + 5$ ,  $6k$ . Како су бројеви облика  $6k + 2$  дељиви са 2, то су они сложени. Исти закључци да су сложени се изводе и за бројеве облика  $6k + 4$  и  $6k$  јер су и једни и други парни. Заиста, остају само бројеви облика  $6k + 1$  и  $6k + 5$ , међу којима су сви прости бројеви. Наравно, имајмо у виду да нису сви овакви бројеви прости, већ да су сви прости бројеви овакви.

**Задатак 21.** Доказати да постоји бесконачно много простих ројева.

**Решење:** Претпоставимо да постоји само коначно много простих бројева и да се они могу поређати у низ  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . По томе би сви остали природни бројеви били сложени, па је и број  $p_1, p_2, \dots, p_n + 1$  сложен. Али како је сложен он мора бити дељив неким од простих бројева, но то није могуће јер са којим год од наведених да се подели он даје остатак 1, па смо овим конструисали још један прост број, и тако претходни поступак можемо понављати до бесконачности. Дакле, скуп простих бројева није коначан, већ бесконачан.

**Задатак 22.** За било који природан број  $n$  постоји  $n$  узастопних сложених природних бројева. Доказати.

**Решење:** Нека је  $n \in \mathbb{N}$ . Следећи низ садржи  $n$  узастопних природних бројева, и сви чланови су му сложени бројеви:

$$(n + 1) \cdot n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2$$

$$(n + 1) \cdot n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3$$

...

$$(n + 1) \cdot n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + n$$

$$(n + 1) \cdot n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + (n + 1)$$

Конструкцијом оваквог низа узастопних природних бројева показано је да важи тврђење задатка.

#### 1. 4. ФЕРМАОВИ И МЕРСЕНОВИ БРОЈЕВИ

У теорији бројева има много нерешених проблема који се односе на просте бројеве. Такође, много је безуспешних покушаја разних математичара да се нађе општа формула за просте бројеве. У вези са тим интересно је истаћи Фермаову и Мерсенову погрешну хипотезу.

**Дефиниција 1.13.** Бројеви облика  $F_n = 2^{2^n} + 1$ , где је  $n$  произвољан ненегативан цео број зову се Фермаови бројеви.

За првих 5 вредности од  $n$  он је добио редом бројеве:  $F_0 = 3$ ,  $F_1 = 5$ ,  $F_2 = 17$ ,  $F_3 = 257$ ,  $F_4 = 65537$ , и провером утврдио да су сви они прости. Ферма је изрекао хипотезу да је и за сваки природан број  $n \geq 5$  број  $F_n$  прост. Међутим, Ојлер је показао да је број  $F_5$  производ два проста броја, дакле сложен број.

$$F_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

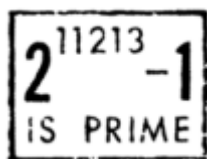
Од тада је много математичког труда, а последњих деценија и много рачунарског времена уложено у факторисање Фермаових бројева вишег реда. Мада се зна да Фермаова хипотеза није тачна, не зна се да ли је осим  $F_0, F_1, F_2, F_3, F_4$  још неки Фермаов број прост.

**Дефиниција 1.14.** Бројеви облика  $M_p = 2^p - 1$ , где је  $p$  прост број зову се Мерсенови бројеви.

Мерсен је тврдио да су 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 и 257 једини прости бројеви, не већи од 257, за које је број  $2^p - 1$  прост. Међутим, ова листа садржи грешке које су откривене много времена после смрти Мерсена. Наиме, два броја за која је Мерсен тврдио да су прости, уствари су сложени, а испуштена су три проста броја.

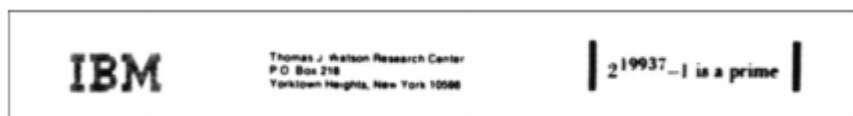
Первушин (1827-1900) је доказао да је  $M_{61}$  прост број. За бројеве  $M_{89}$  и  $M_{107}$  је такође утврђено да су прости. С друге стране, за бројеве  $M_{67}$  и  $M_{257}$  је показано да су сложени.

Уз трагање за Мерсеновим бројевима везан је низ интересантних детаља. 1963. године у Сједињеним Америчким Државама креиран је поштански печат на ком стоји запис да је број  $2^{11213} - 1$  прост број.



Слика 4: Поштански печат у САД из 1963. године

А на меморандуму великог произвођача рачунара IBM-а неко време је стајало записано да је број  $2^{19937} - 1$  прост.



Слика 5: Меморандум IBM-а

Провера да ли је неки број облика  $2^p - 1$  Мерсенов или није је компликована. Број  $2^p$  врло брзо расте па је неопходно у проверама користити рачунаре.

Но, неки старији резултати су импресивни. Француски математичар **Лукас** (Edouard Lucas, 1842-1891) доказао је 1876. године да је број

$$M_{127} = 170141183460469231731687303715884105727$$

прост број. При томе је развијао методе којима би се поступак провере што више поједноставио, па Лукаса данас сматрају пиониром модерног нумеричког рачуна.

Важан је резултат како број  $2^p - 1$  уопште може бити прост само ако је  $p$  прост. Laura Nickel и Curt Noll, двоје осамнаестогодишњих студената Калифорнијског универзитета открили су уз помоћ рачунара да је  $2^{21701} - 1$  прост број. Тај број се састоји од 6533 цифара. Деветнаестогодишњи Американац Ronald Clarkson је 1998. године на свом рачунару открио Мерсенов број  $M_{3021377}$  у чијем запису је 909526 цифара.

Данас је познато укупно 49 Мерсенових бројева. Потпун попис може се наћи на адреси <https://www.mersenne.org/>

Неколико последњих наведено је у наредној табели.

| $p$        | број цифара | година открића | открио                |
|------------|-------------|----------------|-----------------------|
| 37 156 667 | 11 185 272  | 2008.          | Hans-Michael Elvenich |
| 42 643 801 | 12 837 064  | 2009.          | Odd M. Strindmo       |
| 43 112 609 | 12 978 189  | 2008.          | Edson Smith           |
| 57 885 161 | 17 425 170  | 2013.          | Curtis Cooper         |
| 74 207 281 | 22 338 618  | 2016.          | Curtis Cooper         |

Табела 1: Неколико последњих Мерсенових бројева





У 17. веку математичари су показали да су следећи бројеви у троуглу прости:

$$\begin{array}{c} 3 \ 1 \\ 3 \ 3 \ 1 \\ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \\ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \\ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \\ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \\ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \end{array}$$

У то време владало је мишљење да су сви бројеви тог облика прости, међутим показало се да број 333333331 из те шеме није прост ( $333333331 = 17 \cdot 19\,607\,843$ ).

**Дефиниција 1.21.** Пи-прост број је прост број који садржи првих 38 цифара броја  $\pi$ . То је број 31 415 926 535 897 932 384 626 433 832 795 028 841.

Други пи-прости бројеви још нису пронађени, иако су математичари претражили велике бројеве у првих 3000 цифара од  $\pi$ .

У вези са простим бројевима интересантно је истаћи број 73 939 133. То је највећи познати прост број који остаје прост док му се здесна откидају цифре:

$$\begin{array}{c} 7 \ 3 \ 9 \ 3 \ 9 \ 1 \ 3 \ 3 \\ 7 \ 3 \ 9 \ 3 \ 9 \ 1 \ 3 \\ 7 \ 3 \ 9 \ 3 \ 9 \ 1 \\ 7 \ 3 \ 9 \ 3 \ 9 \\ 7 \ 3 \ 9 \ 3 \\ 7 \ 3 \ 9 \\ 7 \ 3 \\ 7 \end{array}$$

## 1. 6. САВРШЕНИ БРОЈЕВИ

**Дефиниција 1.22.** Савршен број је природан број који је једнак збиру својих позитивних делилаца, укључујући и број 1 али не рачунајући сам тај број.

Прва четири савршена броја позната су од давнина, проучавали су их питагорејци још у 6. веку пре нове ере, а најранији математички запис о савршеним бројевима појавио се у Еуклидовом делу „Елементи“, око 300. год. п.н.е. Прва четири савршена броја су:

$$1) 6 = 1 + 2 + 3$$

$$2) 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

$$3) 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$

$$4) 8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$$

Пети савршени број, који је откривен 1456. године, јесте број 33 550 336. До сада је откривено само 49 савршених бројева, а последњи од њих, који је пронађен 7. јануара 2016. године, у свом запису има 44 677 235 цифара.

Још није познато колико има савршених бројева – до сада није утврђено да ли их има бесконачно много или пак само коначан број.

Еуклид је у својој књизи показао да су до тада откривени савршени бројеви облика  $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ . При томе,  $2^p - 1$  мора бити прост број, а да би то био случај  $p$  мора бити прост број. На пример, првих пет савршених бројева се према тој формули добијају на следећи начин:

$$1) \text{ За } p = 2: 2^{2-1} \cdot (2^2 - 1) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$2) \text{ За } p = 3: 2^{3-1} \cdot (2^3 - 1) = 4 \cdot 7 = 28$$

$$3) \text{ За } p = 5: 2^{5-1} \cdot (2^5 - 1) = 16 \cdot 31 = 496$$

$$4) \text{ За } p = 7: 2^{7-1} \cdot (2^7 - 1) = 64 \cdot 127 = 8128$$

$$5) \text{ За } p = 13: 2^{13-1} \cdot (2^{13} - 1) = 4096 \cdot 8191 = 33550336$$

У данашњој формулацији тај поступак се може изрећи у облику наредне теореме:

### **Теорема 1.23.**

Ако је  $p = 2^{n+1} - 1$  прост број за неки  $n \in \mathbb{N}$ , онда је  $2^n \cdot p$  савршен број.

**Доказ:**

Нека је  $p = 2^{n+1} - 1$  прост број. Прави делиоци од  $2^n \cdot p$  су:

$$1, 2, 2^2, \dots, 2^n, p, p \cdot 2, p \cdot 2^2, \dots, p \cdot 2^{n-1}.$$

Нађимо збир  $S$  свих претходних делилаца:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + p + p \cdot 2 + p \cdot 2^2 + \dots + p \cdot 2^{n-1} \\ &= (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n) + p(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) \\ &= \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} + p \cdot \frac{(2^n - 1)}{2 - 1} \\ &= 2^{n+1} - 1 + p \cdot 2^n - p = p + p \cdot 2^n - p = p \cdot 2^n \end{aligned}$$

Дакле,  $S = p \cdot 2^n$ , што је и требало доказати ■

Када је реч о формули коју је дао Еуклид, треба поменути да је много година касније, тек у 18. веку, швајцарски математичар Леонард Ојлер доказао да су сви парни савршени бројеви баш тог облика. Сви до тада откривени савршени бројеви су управо парни, а није познато да ли постоји иједан непаран савршен број. До данас су, помоћу напредних компјутерских система, испитани сви бројеви до  $10^{1500}$ , али није пронађен ниједан непаран савршен број. Претпоставља се да таквих бројева нема, мада то још нико није успео да докаже.

Означимо са  $\sigma(n)$  збир свих (позитивних) делилаца броја  $n$ .

**Теорема 1.24.**

Сваки паран савршен број има облик  $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ , где је  $2^p - 1$  прост број.

**Доказ:**

Нека је  $n$  паран савршен број, тј. нека важи  $\sigma(n) = 2n$ .

Напишимо  $n$  у облику  $n = 2^m k$ , где  $m, k \in \mathbb{N}$ ,  $k$  - непаран број, тада су  $2^m$  и  $k$  узајамно прости бројеви па важи:

$$\sigma(n) = \sigma(2^m k) = \sigma(2^m) \sigma(k) = (1 + 2 + \dots + 2^m) \sigma(k) = (2^{m+1} - 1) \sigma(k)$$

На основу  $\sigma(n) = 2n$  следи

$$(2^{m+1} - 1) \sigma(k) = 2^{m+1} k.$$

Како  $2^{m+1} - 1$  дели  $2^{m+1} k$ , то  $2^{m+1} - 1$  дели  $k$ , тј.  $k = (2^{m+1} - 1)l$ , где  $l \in \mathbb{N}$ . Тада из горње једнакости следи да је

$$\sigma((2^{m+1} - 1)l) = 2^{m+1} l$$

Нека је  $m + 1 = p$ , тада је  $\sigma((2^p - 1)l) = 2^p l$ .

Претпоставимо да је  $l > 1$ .

Ако је  $l = 2^p - 1$ , тада је  $\sigma((2^p - 1)^2) = 2^p(2^p - 1)$ , одакле је

$$\sigma((2^p - 1)^2) > 1 + (2^p - 1) + (2^p - 1)^2 = 2^p(2^p - 1) + 1 > 2^p(2^p - 1),$$

што је контрадикција.

Ако је  $l \neq 2^p - 1$ , тада је  $\sigma((2^p - 1)l) \geq 1 + l + (2^p - 1) + (2^p - 1)l = 2^p l + 2^p > 2^p l$ . Поново је добијена контрадикција.

Тако је  $l = 1$ , па је тада  $\sigma(2^p - 1) = 2^p$ .

Претпоставимо да је  $2^p - 1$  сложен број. Тада постоји делилац броја  $2^p - 1$  такав да је  $1 < r < 2^p - 1$ , па важи

$$\sigma(2^p - 1) \geq 1 + r + (2^p - 1) > 2^p$$

Одавде се закључује да је  $2^p - 1$  прост број. На тај начин је

$$n = 2^m k = 2^m (2^{m+1} - 1)l = 2^m (2^{m+1} - 1) = 2^{p-1} (2^p - 1).$$

Тиме је теорема доказана ■

Фактички,  $2^p - 1$  је прост само у случају када је  $p$  прост.

Заиста, претпоставимо да је  $p$  сложен број, тј.  $p = ab$ , где  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $1 < a < p$ ,  $1 < b < p$ , тада је  $2^p - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)((2^a)^{b-1} + \dots + 2^a + 1)$  сложен број, што је немогуће.

Дакле,  $p$  је прост број.

### **Теорема 1.25.**

Квадрати непарних бројева нису савршени бројеви.

**Доказ:**

Нека је  $n = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$ , где су  $p_i$  различити прости бројеви,  $m_i \in \mathbb{N}$ .

Тада је  $n^2 = p_1^{2m_1} \dots p_k^{2m_k}$ .

Претпоставимо да је  $n^2$  савршен број. Тада је

$$\sigma(n^2) = 2n^2 \Leftrightarrow (1 + p_1 + \dots + p_1^{2m_1}) \dots (1 + p_k + \dots + p_k^{2m_k}) = 2 p_1^{2m_1} \dots p_k^{2m_k}.$$

Последња једнакост је немогућа јер је на левој страни непаран број, а на десној паран. Тиме је теорема доказана ■

### **Теорема 1.26.**

Број  $n = p^k$  није савршен, где је  $p$  прост број и  $k \in \mathbb{N}$ .

**Доказ:**

Претпоставимо да је  $n$  савршен број. Тада је

$$\sigma(n) = 2n \Leftrightarrow 1 + p + \dots + p^k = 2p^k.$$

Очигледно је  $k \neq 1$  јер је  $p > 1$ .

Ако је  $k > 1$ , тада је  $p(p^{k-1} - p^{k-2} - \dots - 1) = 1$ , одакле следи да  $p \mid 1$ , тј.  $p = 1$ , што је немогуће ■

Интересантна је и следећа теорема коју наводимо без доказа:

### **Теорема 1.27.**

Ако су  $p, q$  различити прости бројеви већи од 2,  $m, n \in \mathbb{N}$ , тада  $n = p^k q^m$  није савршен број.

Већ је речено да се прости бројеви облика  $2^p - 1$  називају Мерсенови прости бројеви, и да нису сви бројеви тог облика прости ако је  $p$  прост број. Може се рећи да парних савршених бројева има онолико колико има Мерсенових простих бројева. Међутим, није познато да ли Мерсенових има коначно или бесконачно много. Претпоставља се да их има бесконачно, а ако је то тачно, онда и парних савршених има бесконачно. Тренутно је познато онолико савршених колико и Мерсенових, дакле свега 49.

Премда се теорија бројева у редовној настави математике веома мало изучава, ученици нижих разреда основне школе се са савршеним бројевима упознају кроз часове додатне наставе и припреме за такмичења. Математички лист, који објављује Друштво математичара Србије, је у броју 2 из 2016. године [13] расписао наградни конкурс за ученике петих разреда. Тема конкурса су били савршени бројеви:

*Прави делиоци природног броја су сви његови делиоци различити од њега самог, укључујући 1. Каже се да је природан број савршен ако је једнак збиру свих својих правих делилаца.*

- *Одреди савршене бројеве у првој десетици природних бројева.*
- *Провери да у другој десетици природних бројева нема савршених бројева.*
- *Одреди савршене бројеве у трећој десетици природних бројева.*

### 1. 6. 1. ОСОБИНЕ САВРШЕНИХ БРОЈЕВА

Поред тога што представљају збир својих правих делилаца, савршени бројеви поседују и неке друге занимљиве особине.

**1)** Сви савршени бројеви представљају збир више узастопних природних бројева, почевши од броја 1 до  $2^p - 1$ . На пример:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

$$496 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \dots + 31$$

$$8128 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + \dots + 127$$

$$33550336 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + \dots + 8191$$

**2)** Збир реципрочних вредности свих делилаца савреног броја, укључујући и сам тај број, једнак је броју 2. На пример:

$$\text{За број 6: } \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 2$$

$$\text{За број 28: } \frac{1}{28} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 2$$

$$\text{За број 496: } \frac{1}{496} + \frac{1}{248} + \frac{1}{124} + \frac{1}{62} + \frac{1}{31} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 2$$

**3)** Осим броја 6, сви савршени бројеви имају особину да се могу приказати као збир првих  $2^{\frac{p-1}{2}}$  кубова непарних бројева. На пример:

$$28 = 1^3 + 2^3$$

$$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$$

$$8128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3$$

$$33550336 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3 + \dots + 127^3$$

**4)** Сви познати савршени бројеви се завршавају са 6 или 28.

## 1. 7. ПРИЈАТЕЉСКИ БРОЈЕВИ

**Дефиниција 1.28.** Природни бројеви  $a$  и  $b$  су пријатељски бројеви ако је збир правих делилаца броја  $a$  једнак броју  $b$ , и истовремено збир правих делилаца броја  $b$  једнак броју  $a$ .

**Пример 1.29.** Пријатељски бројеви познати су од давнина, а први (најмањи) пар пријатељских бројева чине 220 и 284. Прави делиоци броја 220 су: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 и 110. Њихов збир је 284. Прави делиоци броја 284 су: 1, 2, 4, 71 и 142. Њихов збир је 220.

Познати француски математичар **Пјер де Ферма** пронашао је 1636. године други пар пријатељских бројева (17296, 18416), а **Рене Декарт**, чувени француски математичар и филозоф, пронашао је 1638. године пар пријатељских бројева који чине 9363584 и 9437056. Откриће та два пара представљало је, у ствари, њихово поновно откриће јер су оба пара знатно раније већ била позната арапским математичарима. Ферма и Декарт су, заједно, открили формулу за формирање пријатељских бројева, али се она не може применити на све парове пријатељских бројева. Касније се, међутим, испоставило да је сличну формулу, много пре њих, још у 9. веку, пронашао **Tabit ibn Kora al-Harani**, арапски математичар и астроном. У 18. веку, швајцарски математичар **Леонард Ојлер** уопштио је Фермаову формулу (Ојлерова формула такође се не може применити на све парове пријатељских бројева) и објавио списак од 61 пар пријатељских бројева, међу којима су два пара била погрешна. Шеснаестогодишњи Италијан Николо **Паганини** пронашао је 1866. године други најмањи пар пријатељских бројева (1184, 1210), који су превидели ранији математичари и који је знатно мањи од Фермаовог пара.

Пријатељски бројеви били су познати још питагорејцима (математичарима који су живели у 6. веку пре нове ере), а иако се за њих знало и пре нове ере, до 1946. године је пронађено само 390 парова пријатељских бројева. Захваљујући појави компјутера и њиховом брзом развоју, до 16. августа 2016. године пронађено је чак 1 008 470 870 парова пријатељских бројева. Прво место на листи заузимају бројеви 220 и 284, иза њих је Паганинијев пар (1184, 1210), затим долазе 2620 и 2924, а Фермаов пар је тек на осмом месту. Данас су познати сви парови пријатељских бројева чији се мањи члан налази испод границе од  $10^{18}$ .

У свим познатим паровима пријатељских бројева оба члана су парна, или, што је много ређе, оба непарна. Није познато да ли постоји мешовити пар, састављен од једног парног и једног непарног броја. Такође није позната формула која би се могла применити на све парове пријатељских бројева, нити се зна да ли таквих парова има коначно или бесконачно много.



Начин налажења пријатељских бројева даје следећа теорема. Тај проблем је у 9. веку решио Sabit ibn Korra, арапски математичар који је живео од 836. до 901. године у Багдаду.

### **Теорема 1.30.**

Ако су сва три броја  $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ ,  $q = 3 \cdot 2^n - 1$  и  $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$  за природан број  $n > 1$  прости бројеви, онда су бројеви  $a = 2^n \cdot p \cdot q$  и  $b = 2^n \cdot r$  пријатељски бројеви.

#### **Доказ:**

Теорему доказујемо у два корака.

У првом кораку ћемо показати да је збир делилаца од  $b$ , тј.  $S_b$ , једнак броју  $a$ .

Прави делиоци броја  $b = 2^n \cdot r$  су:

$$1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, r, r \cdot 2, r \cdot 2^2, \dots, r \cdot 2^{n-1}$$

чији је збир

$$\begin{aligned} S_b &= (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) + r(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}) \\ &= \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} + r\left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right) = 2^{n+1} - 1 + r(2^n - 1). \end{aligned}$$

Заменимо у овај израз  $r$  из текста теореме. Тада имамо:

$$\begin{aligned} S_b &= (2^{n+1} - 1) + (9 \cdot 2^{2n-1} - 1)(2^n - 1) \\ &= 2^{n+1} - 1 + 9 \cdot 2^{3n-1} - 2^n - 9 \cdot 2^{2n-1} + 1 \\ &= 2^n(2 + 9 \cdot 2^{2n-1} - 1 - 9 \cdot 2^{n-1}) \\ &= 2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 9 \cdot 2^{n-1} + 1) \\ &= 2^n \cdot (9 \cdot 2^{2n-1} - 3(2 + 1) \cdot 2^{n-1} + 1) \\ &= 2^n \cdot (9 \cdot 2^{2n-1} - 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 2^{n-1} + 1) \\ &= 2^n(3 \cdot 2^{n-1} - 1)(3 \cdot 2^n - 1) \\ &= 2^n \cdot p \cdot q \\ &= a \end{aligned}$$

Преостаје да докажемо да је збир правих делилаца броја  $a$  тј.  $S_a$ , једнак броју  $b$ .

Прави делиоци броја  $a = 2^n \cdot p \cdot q$  су:

$$1, 2, 2^2, \dots, 2^n,$$

$$p, p \cdot 2, p \cdot 2^2, \dots, p \cdot 2^n; q, q \cdot 2, q \cdot 2^2, \dots, q \cdot 2^n,$$

$$p \cdot q, p \cdot q \cdot 2, \dots, p \cdot q \cdot 2^{n-1}.$$

Слично као малопре налазимо да је:

$$\begin{aligned} S_a &= (2^{n+1} - 1) + p(2^{n+1} - 1) + q(2^{n+1} - 1) + p \cdot q(2^n - 1) \\ &= (2^{n+1} - 1)(1 + p + q) + p \cdot q(2^n - 1) \\ &= ((2^n - 1) + 2^n)(1 + p + q) + p \cdot q(2^n - 1) \\ &= (2^n - 1)(1 + p + q + p \cdot q) + 2^n(1 + p + q) \\ &= (2^n - 1)(p + 1)(q + 1) + 2^n(1 + p + q) \end{aligned}$$

Заменом вредности за  $p, q$  и  $r$  из текста теореме добијамо:

$$\begin{aligned} S_a &= (2^n - 1)(3 \cdot 2^{n-1} - 1 + 1)(3 \cdot 2^{n-1} + 1) + 2^n \cdot (1 + (3 \cdot 2^{n-1} - 1) + (3 \cdot 2^n - 1)) \\ &= 9 \cdot 2^{2n-1}(2^n - 1) + 2^n(3 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^n - 1) \\ &= 9 \cdot 2^{3n-1} - 9 \cdot 2^{2n-1} + 3 \cdot 2^{2n-1} + 3 \cdot 2^{2n} - 2^n \\ &= 2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 9 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^n - 1) \\ &= 2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 6 \cdot 2^{n-1} + 6 \cdot 2^{n-1} - 1) \\ &= 2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 1) \\ &= 2^n \cdot r \\ &= b \blacksquare \end{aligned}$$

## 1. 8. ПАЛИНДРОМИ

**Дефиниција 1.31.** Нека су  $a$  и  $b$  природни бројеви код којих су прва и последња цифра различите од нуле. Ако су цифре броја  $b$  такве да чине цифре броја  $a$  исписане обрнутим редом, тада кажемо да је број  $b$  симетричан броју  $a$ .

**Пример 1.32.** Број  $b = 815$  је симетричан броју  $a = 518$ . Парови симетричних бројева су и 25 и 52, 173 и 371, 1405 и 5041 итд.

Постоје и природни бројеви коју су симетрични сами себи, односно који се не мењају када им се цифре испишу у обрнутом поретку.

**Дефиниција 1.33.** Бројеви који су симетрични сами себи, односно који се не мењају када им се цифре испишу у обрнутом поретку називају се палиндроми.

**Пример 1.34.** Палиндроми су 22, 313, 4334, 55555, ...

Палиндроми се често срећу у Математичком листу за ученике основних школа. У наставку следи неколико одабраних задатака предложених за припрему ученика различитих узраста за такмичења из математике. [10]

**Задатак 23:** *Одреди број четвороцифрених палиндрома.*

**Решење:** Четвороцифрени палиндроми су одређени са прве две цифре. Према томе, број четвороцифрених палиндрома једнак је броју двоцифрених природних бројева, тј. 90.

**Задатак 24:** *Нађи најмањи троцифрени палиндром чији је збир са најмањим двоцифреним палиндромом такође палиндром.*

**Решење:** Најмањи двоцифрени палиндром је 11. Тражени троцифрени палиндром тражићемо међу бројевима облика  $1a1$ . Ако је  $a < 9$ , збир ће бити облика  $1b2$ , где је  $b = a + 1$ , па тај збир неће бити палиндром. Преостаје да проверимо да је  $191 + 11 = 202$  палиндром. Дакле, тражени број је 191.

**Задатак 25:** *Нађи парове троцифрених палиндрома који се записују помоћу две различите цифре чија је разлика троцифрени број записан са три узастопне цифре.*

**Решење:** Нека  $aba = 100a + 10b + a$  и  $bab = 100b + 10a + b$  чине тражени пар, при чему је  $a > b$ . Њихова разлика је  $aba - bab = 91 \cdot (a - b)$ , где је  $1 \leq a - b \leq 8$ . Непосредном провером налазимо да је дати услов испуњен само за  $a - b = 6$ , одакле добијамо тражене парове: 717 и 171, 828 и 282, 939 и 393. Разлика сва три пара је  $91 \cdot 6 = 546$ .

**Задатак 26:** Одреди све четвороцифрене палиндроме са тачно 5 различитих простих делилаца.

**Решење:** Приметимо да палиндром не може да садржи истовремено просте чиниоце 2 и 5 (јер би се завршавао цифром 0). Исто тако, лако се види да је тражени број производ пет различитих простих бројева. Наиме, ако би се неки од тих простих фактора појављивао степенован неким бројем већим од 1, тај производ би био бар петоцифрен, јер је производ пет најмањих простих бројева различитих од 5 једнак  $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 6006$ . Тај производ је четвороцифрени палиндром. Још једно решење добијамо када 13 заменимо са 19. Тада је  $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 = 8778$ . Једноставном провером се лако закључује да су то једина решења.

**Задатак 27:** Дужине страница правоугаоника су троцифрени палиндроми  $aba$  и  $bab$ . Одреди обим тог правоугаоника ако је познато да је он такође троцифрени палиндром.

**Решење:** Тражени обим једнак је  $2 \cdot (aba + bab) = 2 \cdot 111 \cdot (a + b)$ , што је троцифрени број само за  $a + b = 3$  и  $a + b = 4$ . У првом случају је обим једнак 666 (странице 121 и 212), у другом 888 (странице 131 и 313).

Ако би било  $a + b = 2$ , односно  $a = b = 1$ , тада бисмо имали квадрат странице 111 чији је обим 444.

**Задатак 28:** Представи број 2017 у облику збира најмањег могућег броја палиндрома.

**Решење:** Представићемо број 2017 у облику збира два палиндрома. Бар један од та два палиндрома мора бити четвороцифрен, јер је највећи троцифрени палиндром 999, а  $999 + 999 < 2017$ . Четвороцифрени палиндром не већи од 2017 су: 1001, 1111, 1221, 1331, 1441, 1551, 1661, 1771, 1881, 1991 и 2002. Посматрајући разлику броја 2017 и сваког од тих бројева, налазимо да је само једна од тих разлика палиндром:  $2017 - 1331 = 686$ . Према томе, једино решење је  $2017 = 1331 + 686$ .

**Задатак 29:** Број 2017 представи као збир четири различита, бар троцифрена, палиндрома.

**Решење:** Нека од решења су  $1331 + 222 + 141 + 323 = 2017$ ,  $585 + 545 + 595 + 292 = 2017$ ,  $686 + 242 + 393 + 696 = 2017$  и тако даље.

Изаберемо ли неки природан број па му обрнемо цифре и оба броја саберемо, па наставимо са обртањем и сабирањем, резултат често постане палиндром. Код неких бројева то се догоди већ у првом кораку. На пример:  $18 + 81 = 99$ . Други бројеви захтевају више корака, на пример:  $19 + 91 = 110$ ,  $110 + 011 = 121$ . Од свих бројева мањих од 10000, само њих 249 не даје палиндром у 100 или мање корака.

**G. L. Honaker Jr.** је 1999. године саставио пирамиду палиндромних простих бројева. Та пирамида је јединствена по томе што је сваки палиндромни прост број повезан с претходним, јер је настао додавањем по две цифре на почетак и на крај претходног палиндромног простог броја.

2  
30203  
133020331  
1713302033171  
12171330203317121  
151217133020331712151  
1815121713302033171215181  
16181512171330203317121518161  
331618151217133020331712151816133  
9333161815121713302033171215181613339  
11933316181512171330203317121518161333911

## 1. 9. ПАЛИНДИОНИ И ХИПЕРПАЛИНДИОНИ

**Дефиниција 1.35.** Палиндиони су природни бројеви који имају више палиндромних делитеља него иједан мањи број. Другим речима, ако је природан број  $p$  палиндион, онда ниједан природан број  $n$  нема толико палиндромних делитеља као  $p$ , где је  $0 < n < p$ .

**Пример 1.36.** Године 2004. откривен је палиндион 2 666 664 који има палиндромних делитеља. Он задовољава дефиницију палиндиона будући да нема ниједног мањег броја са толико много палиндромних делитеља. Његови палиндромни делитељи укључују 80 808, 333 333, 888 888. Касније је откривено неколико већих палиндиона, укључујући 134 666 532 који има 80 палиндромних делитеља. Сви до сада откривени вишецифрени палиндиони су садржаоци броја 6. Разлог томе за сада је непознат.

**Дефиниција 1.37.** Хиперпалиндиони су палиндиони који су и сами палиндромични.

**Пример 1.38.** Највећи познат хиперпалиндион је 2772, са 16 палиндромних делитеља: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 22, 33, 44, 66, 77, 99, 252 и 2772.

Интересантно је поменути још неке специфичне палиндромне просте бројеве:

**Дефиниција 1.39.**  $\pi$ -палиндромни прост број је палиндромни прост број начињен од цифара броја  $\pi$ .

**Пример 1.40.** Најмањи  $\pi$ -палиндромни прост број је

31.415.926.535.897.932.384.626.433.833.462.648.323.979.853.562.951.413.  
Carlos B. Rivera је открио да наредна два  $\pi$ -палиндромна проста броја имају 301 и 921 цифру.

**Дефиниција 1.41.**  $\phi$ -палиндромни прост број је палиндромни прост број заснован на првих неколико цифара златног реза  $\phi$ . То је број

1618033988749894848204586834365638117720303027711836563438685402  
8484989478893308161.

## 1. 10. КАТАЛАНОВИ БРОЈЕВИ

Каталанови бројеви су вероватно једни од бројева које најчешће сусрећемо у математици. Они чине низ природних бројева значајних у комбинаторици - јављају се при пребројавању комбинаторних објеката. Име су добили по белгијском математичару Eugene Charles Catalanu (1814 – 1894) иако их није он први открио. На Каталанове бројеве су први наишли Leonard Euler (1703 – 1783) и Johanu Andreas Von Segner (1704 – 1777), готово читав век пре Catalanu. Ипак, у част Catalanu који је извео и доказао многе особине и идентитете ових бројева, они се данас зову његовим именом.

Каталанови бројеви се јављају у мноштву наизглед неповезаних комбинаторних проблема. Мало је познато да је ове бројеве потпуно независно открио кинески математичар Ming An-Tu (1692 – 1763) током 1730-их година, но његови радови су остали непознати западном свету све до 1839. године. [15]

Нека је  $A = \{ ( , ) \}$  алфабет са два слова, отворена заграда и затворена заграда.

**Дефиниција 1.42.** Балансирана реч над  $A$  је свака реч која се може конструисати применом следећих правила у коначно много корака:

- (1) празна реч је балансирана реч,
- (2)  $()$  је балансирана реч.
- (3) ако је  $w$  балансирана реч, онда је то и  $(w)$ ,
- (4) ако су  $w_1$  и  $w_2$  балансиране речи, онда је то и  $w_1w_2$ .

**Напомена 1.43.** Приметимо да се балансирана реч састоји од  $2n$  заграда,  $n \geq 0$ , и број отворених заграда једнак је броју затворених заграда. Свака непразна балансирана реч почиње отвореном заградом. Такође, за сваку непразну балансирану реч  $w$  постоје балансиране речи  $w_1$  и  $w_2$  (које могу бити и празне) такве да је  $w = (w_1)w_2$ .

**Пример 1.44.** Балансиране речи над  $A$  су  $()$ ,  $((()))()$ ,  $()((((()))())())()$ , док рецимо  $(, ), )($  и  $((()))()$  нису.

### **Теорема 1.45.**

Број  $C_n$  балансираних речи над  $A$  са  $n$  парова заграда задовољава следећу рекурентну релацију:

$$C_0 = 1$$

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}.$$

#### **Доказ:**

Јасно је да је  $C_0 = 1$  зато што је празна реч балансирана. Нека је  $W_n$ ,  $n \geq 1$ , скуп свих балансираних речи са  $n$  парова заграда, тако да је  $C_n = |W_n|$ . Као што смо раније приметили, за сваку непразну балансирану реч  $w$  постоје (евентуално празне) балансиране речи  $w_1$  и  $w_2$  такве да је  $w = (w_1)w_2$ . Нека је  $W_n(k)$  скуп свих речи  $w$  из скупа  $W_n$  са особином да у репрезентацији  $w = (w_1)w_2$  реч  $w_1$  има  $k$  парова заграда:

$$W_n(k) = \{ w \in W_n : w = (w_1)w_2, \text{ где су } w_1 \text{ и } w_2 \text{ балансиране речи и } w_1 \in W_k \}.$$

Лако се види да је  $|W_n| = |W_n(0)| + |W_n(1)| + \dots + |W_n(n-1)|$  зато што су скупови  $W_n(k)$  дисјунктни,  $0 \leq k \leq n-1$ . Штавише, ако је  $w \in W_n$  и  $w = (w_1)w_2$ , где је  $w_1 \in W_k$ , онда је  $w_2 \in W_{n-k-1}$ , одакле следи

$$|W_n(k)| = |W_k| \cdot |W_{n-k-1}| = C_k C_{n-k-1}.$$

Закључујемо да је

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_0.$$

Померањем индекса  $n$  за 1 добијамо рекурентну релацију из тврђења теореме. ■

**Дефиниција 1.46.** Бројеви  $C_n$  из претходне теореме зову се Каталанови бројеви.

**Пример 1.47.** Првих неколико Каталанових бројева су:

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = C_0 C_0 = 1$$

$$C_2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 2$$

$$C_3 = C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 5 \text{ и тако даље.}$$



Године 1838. Каталан је решио следећи проблем: на колико начина се у низ од  $n$  променљивих може уметнути  $n - 1$  парова заграда тако да унутар сваке заграде имамо или две променљиве, или израз у загради и променљиву, или два изрази у загради. Тај број одговара броју  $C_{n-1}$ . Решење се може наћи у [6].

Низ Каталанових бројева је први пут у 18. веку описао Leonard Euler, кога је занимао број различитих триангулација конвексног полигона.

**Дефиниција 1.48.** Триангулација конвексног полигона је скуп његових дијагонала које га секу на троуглове и при томе сваке две дијагонале из скупа су или дисјунктне или имају заједничку тачку која је теме полигона.

Leonard Euler је показао да број различитих триангулација конвексног полигона са  $n$  темена,  $n \geq 3$ , износи  $C_{n-2}$ . Решење се може наћи у [6].

## 1. 11. ФИБОНАЧИЈЕВИ БРОЈЕВИ

Фибоначијеви бројеви се појављују у многим физичким, хемијским и биолошким појавама.

**Дефиниција 1.49.** Фибоначијев низ бројева је низ у коме збир два претходна броја у низу даје вредност наредног члана низа. Индексирање чланова овог низа почиње од нуле а прва два члана су му 0 и 1.

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2$$

Дакле: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 85, 144, ...

Фибоначијеви бројеви су добили име по италијанском трговцу Leonardu Fibonassiju из Пизе, иако су и раније описани у Индији. Решавањем наведене рекурентне релације може се добити експлицитна формула за Фибоначијеве бројеве, која се зове Бинетова формула:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Више о томе може се наћи у [6].

Занимљиво је поменути да разломак  $\frac{1}{998999}$  садржи одређен број очигледних примера Фибоначијевих бројева, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... у којима је сваки узастопни број збир претходна два.

$$\frac{1}{998999} = 0, 00000\underline{1}00\underline{1}00\underline{2}00\underline{3}00\underline{5}00\underline{8}01\underline{3}02\underline{1}03\underline{4}05\underline{5}089 \dots$$

### 1. 11. 1. ФИБОНАЧИЈЕВИ БРОЈЕВИ СВУДА ОКО НАС

Истражујући све веће и веће Фибоначијеве бројеве,  $f_n$ , налазимо да се размера неког Фибоначијевог броја и њему претходног броја приближава тзв. златном пресеку  $\Phi = 1,61803 \dots$

Може се показати да за златни пресек важе следеће занимљиве једнакости:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

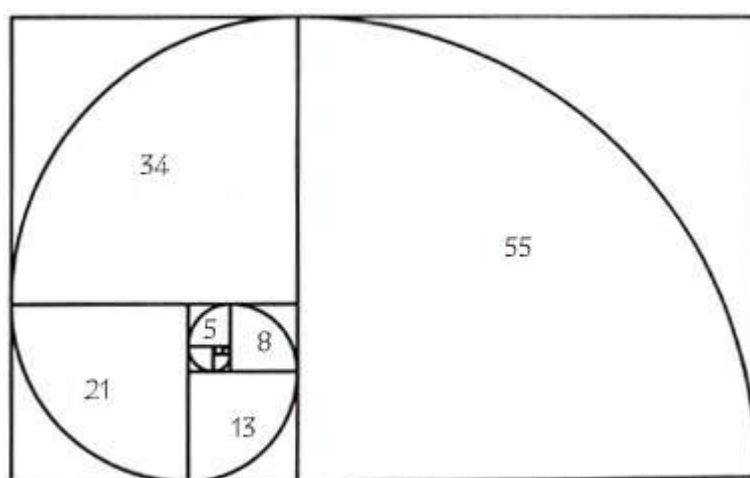
$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

И сам Фибоначи је закључио да се многе ствари у природи дешавају по одређеном обрасцу. Магичност броја  $\Phi$  се огледа у многобројности природних наука које га следе. Односи мера код биљака, животиња и људи се са запањујућом прецизношћу приближавају броју  $\Phi$ . Можемо да га нађемо свуда око себе. Биљни и животињски свет и људско тело, наш DNK, васиона, таласи, ветрови, облаци, музика, ... На крају и грађевине, почев још од оних из античког времена. Све у себи садржи златни пресек.

Интересовање за однос златног пресека појављује се још у античкој науци (Питагора, Платон, Еуклид). У делима античких вајара и архитеката широко је заступљено коришћење односа златног пресека. У време ренесансе однос златног пресека уздиже се на ниво главног естетског принципа. Леонардо да Винчи га назива *sectio aurea*, одакле и долази данашњи назив златни пресек. Лука Паћоли, под утицајем уметника Пјера де ла Франческа, 1509. године објављује своје дело *De divina proportione* (О божанској пропорцији), у целини посвећено златном пресеку. Књигу је илустровао Леонардо да Винчи. Јохан Кеплер је први уочио значај тог односа у ботаници (филотактис). Он за златни пресек користи термин *sectio divina* (божански пресек). Холандски композитор Јакоб Обрехт (1430 – 1505) обилато је користио однос златног пресека у својим композицијама.

Највећи број музичких композиција базираних на златном пресеку налази се код Бетовена (97%), Хајдна (97%), Моцарта (91%), Скрјабина (90%), Шопена (92%), Шуберта (91%). Руски композитор Себенев је свих 27 Шопенових етида проучавао до најситнијих детаља. У њима је открио 154 златна пресека који недостаје у свега 3 етиде.

Један начин презентације Фибоначијевог низа је цртањем квадрата одређене површине. Почињемо са два квадрата дужине странице 1, које нацртамо један до другог. Затим изнад та два квадрата нацртамо квадрат дужине странице 2 ( $1 + 1 = 2$ ). Затим поред тако добијеног правоугаоника нацртамо квадрат дужине странице 3 ( $1 + 2 = 3$ ). Ако наставимо са додавањем нових квадрата на слику, таквих да је страница новог квадрата једнака збиру дужина страница претходна два, добијамо квадрате чије су дужине страница једнаке бројевима Фибоначијевог низа. Ако у тако добијене квадрате уцртамо правоугаоне кружне лукове, добијамо спиралу која је веома добра апроксимација спирала које се појављују у природи код пужева, шкољки и у распореду семенки код биљака.



Слика 6: Фибоначијева спирала

Број латица већине цветова одговара Фибоначијевом низу. Шкољке пужева често имају облик Фибоначијеве спирале. Семенке у глави сунцокрета такође се повинују Фибоначијевом низу. Наиме, оне су распоређене тако да образују Фибоначијеве спирале које настају као лук унутар квадрата са страницама које одговарају елементима Фибоначијевог низа. Ако се преброје спирале добиће се Фибоначијев број. Такође, ако се поделе спирале које иду према лево са спиралама које иду према десно добиће се два Фибоначијева броја. [14]

У пчелињој заједници, кошници, увек је мањи број мужјака пчела него женки пчела. Када бисмо поделили број женки са бројем мужјака, увек бисмо добили број  $\Phi$ . Наутилус (главоножац) у својој конструкцији има спирале. Код њега је јасно изражен спирални принцип раста са фактором раста који је приближно једнак коефицијенту златног пресека.



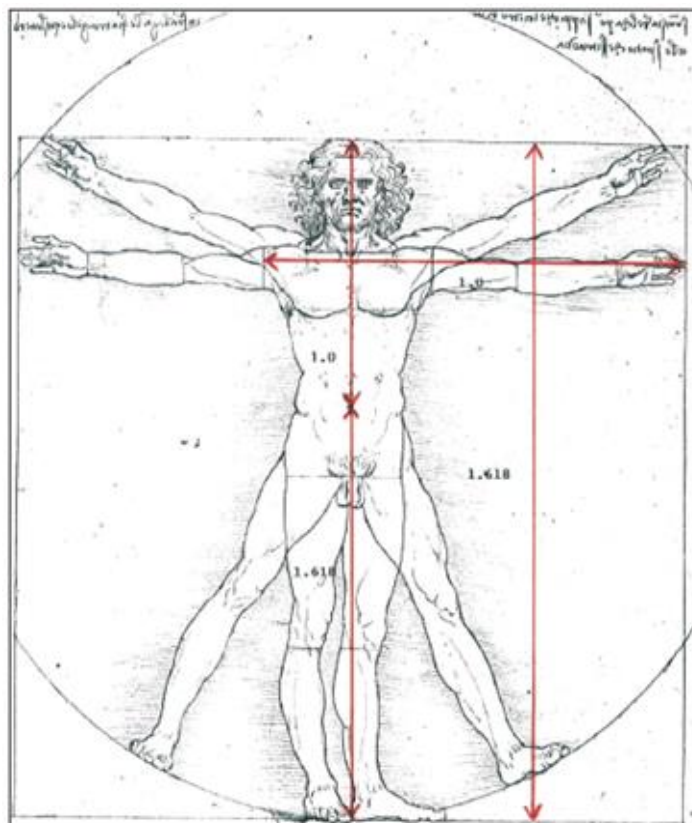
Слика 7: Наутилус



Слика 8: Галаксија

На крају крајева, када се погледамо у огледало видимо Фибоначијев низ. Наше тело се састоји од бројева 1, 2, 3 и 5. Имамо један нос, два ока, три сегмента сваког уда и пет прстију на свакој руци. Ако измеримо висину човека од врха главе до пода, па затим то поделимо са дужином од пупка до пода, добијамо број  $\Phi$

И овде посебно треба споменути Леонарда да Винчија који је детаљно проучавао пропорције људског тела и пронашао да су многи односи усклађени према златном пресеку (слика 10).



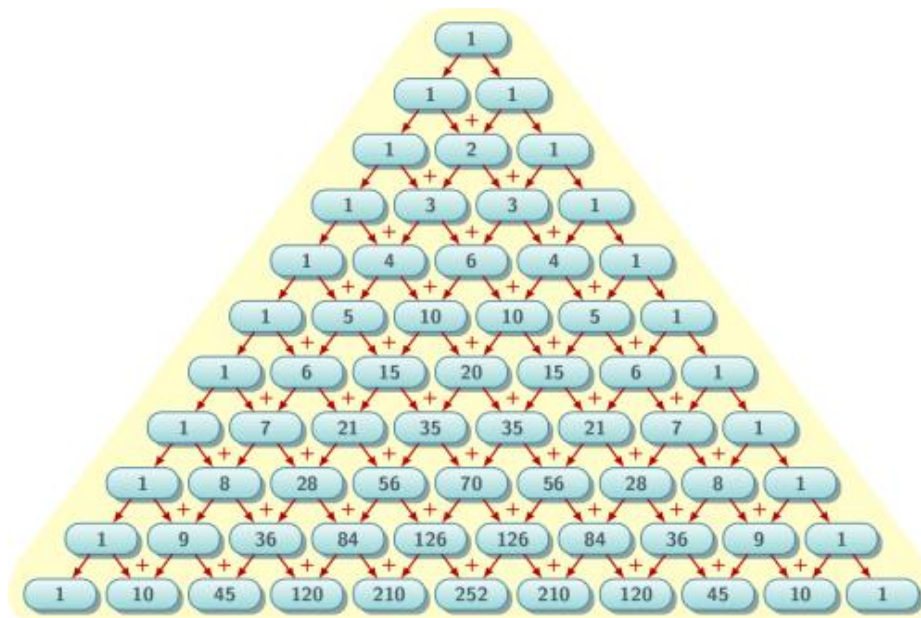
Слика 9: Да Винчи

Рецимо,

- Удаљеност између врха прста и лакта / удаљеност између ручног зглоба и лакта
- Удаљеност између „линије“ рамена и врха главе / дужина главе
- Удаљеност између пупка и врха главе / удаљеност између „линије“ рамена и врха главе
- Удаљеност између пупка и колена / удаљеност између колена и краја стопала

## 1. 11. 2. ПАСКАЛОВ ТРОУГАО

Од мноштва примера примене и реализације златног пресека на бази Фибоначијевих бројева, најелегантнији пример у математици је Паскалов троугао.



Слика 10: Паскалов троугао

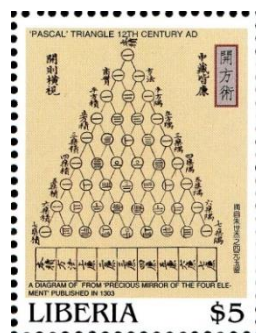
Паскалов троугао представља бесконачан низ природних бројева који је у облику пирамидалне шеме. Назив је добио по математичару Блезу Паскалу. Сваки број у једном реду представља збир два броја који су изнад њега. Крајњи бројеви шеме су увек јединице. Ови бројеви посматрани по врстама понашају се као биномни коефицијенти (које упознајемо у средњој школи), а дијагоналним сабирањем бројева добија се Фибоначијев низ.

**Поступак формирања Паскаловог троугла** је следећи: У почетну врсту уписује се 1. Претпостављајући да свака врста почиње и завршава се са по једном нулом (ове нуле се не пишу), свака врста се образује помоћу претходне сабирањем по два узастопна члана у претходној врсти и исписивањем сваког збира у средини размака између сабирака.

- Збир  $S_n$  бројева у  $n$ -тој врсти је удвостручен збир  $S_{n-1}$  бројева у претходној врсти. То је зато што се међу члановима  $n$ -те врсте који образују суму  $S_n$  по два пута јавља сваки од бројева из претходне врсте.
- У свакој врсти, два од крајева једнако удаљена члана међусобно су једнака. Код првих врста може се запазити симетрија у односу на вертикалну осу фигуре. Према правилу по ком формирамо врсте, ова симетрија прелази са сваке врсте на следећу и тако се бескрајно наставља.

- У свакој врсти, збир елемената парних редних бројева и збир елемената непарних редних бројева је једнак. Сваки од њих је збир у коме по једанпут фигурише сваки од елемената претходне врсте.
- Елеменат који настаје сабирањем узастопних елемената  $a$  и  $b$  претходне врсте ( $a$  се налази лево а  $b$  десно), једнак је збиру бројева на које се наилази пењући се било од  $a$  по паралели леве стране троугла, било од  $b$  по паралели десне стране. Могу се извршити нумеричка проверавања, на пример за број 15, који се налази у седмој врсти: ( $5+4+3+2+1$  и  $10+4+1$ )
- Може се приметити да у написаним врстама чланови расту уколико се приближавамо средишњој колони. Јасно је да, ако овај закон важи за једну врсту, важи и за следећу. Он је дакле, општи. Свака врста непарног редног броја има члан који је једнако удаљен од крајева, и већи је од свих осталих бројева.

Геометријски мотив троугла среће се још у неолиту и представља почетак математичке мисли. Постоје неки докази да је Паскалов бројни троугао пре њега познат као аритметички троугао, био близак и арапском астроному, песнику и математичару **Омару Хајаму** још у 11. веку. Кинески приказ биномних коефицијената, познат као Паскалов троугао, налази се у његовом постхумно објављеном раду 1665. године. Први пут га у Европи срећемо у једној **Апианусовој аритметици** 1527. године. Касније, у 17. веку овај аритметички троугао постаће кључна тачка у развоју три значајне математичке области: истраживања бесконачних редова, рачуна коначних диференција и теорије вероватноће.



Слика 11: Поштанска марка Либерије са мотивом Паскаловог троугла



### 1. 11. 3. ПРИМЕНЕ ПАСКАЛОВОГ ТРОУГЛА У РЕАЛНОМ СВЕТУ

Бројне су примене Паскаловог троугла у реалном свету. Познати геометријски низ деобе живе ћелије је у суштини Паскалов троугао. Жива ћелија се дели и умножава по основном бројном обрасцу у природи – Паскаловом или аритметичком троуглу а њена деоба се може повезати конкретније и са Фибоначијевим низом бројева. [16]

Наиме, ћелијска деоба је способност ћелије да се подели и на тај начин формира две ћерке ћелије. Један приступ тој деоби подразумева да мајка ћелија поделом даје две ћелије, једну ћелију своје генерације и једну ћелију наредне генерације.

У почетном (нултом) тренутку имамо само једну ћелију (мајку),  $C_0$ .

После првог циклуса деобе она се дели на две ћелије, једну своје ( $C_0$ ) и једну наредне генерације ( $C_1$ ). Имамо две ћелије различитих генерација  $C_0 + C_1$ .

После другог циклуса деобе, свака од ових ћелија се дели на ћелију своје и ћелију наредне генерације. Ћелија  $C_0$  даје по једну ћелију генерација  $C_0$  и  $C_1$ , ћелија  $C_1$  даје по једну ћелију генерација  $C_1$  и  $C_2$ , па укупно имамо по једну ћелију генерације  $C_0$  и  $C_2$  и две ћелије генерације  $C_1$ , односно  $C_0 + 2C_1 + C_2$ .

После трећег циклуса деобе свака од ових ћелија даје по једну ћелију своје и по једну наредне генерације, па добијамо  $C_0 + 3C_1 + 3C_2 + C_3$ .

После четвртог циклуса деобе на описан начин добијамо  $C_0 + 4C_1 + 6C_2 + 4C_3 + C_4$ .

После петог циклуса имамо  $C_0 + 5C_1 + 10C_2 + 10C_3 + 5C_4 + C_5$ , итд.

Након  $n$  циклуса деобе имаћемо  $2^n$  ћелија, што одговара геометријском низу са количником 2 (слика 13)

|                                                   |          |
|---------------------------------------------------|----------|
| $1 C_0$                                           | 1        |
| $1 C_0 + 1 C_1$                                   | 2        |
| $1 C_0 + 2 C_1 + 1 C_2$                           | 4        |
| $1 C_0 + 3 C_1 + 3 C_2 + 1 C_3$                   | 8        |
| $1 C_0 + 4 C_1 + 6 C_2 + 4 C_3 + 1 C_4$           | 16       |
| $1 C_0 + 5 C_1 + 10 C_2 + 10 C_3 + 5 C_4 + 1 C_5$ | 32       |
| $\vdots$                                          | $\vdots$ |

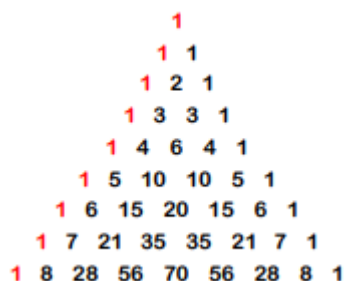
Слика 12.

Са низом деобе живе ћелије повезано је и савремено извођење **Тицијус Боденовог** правила за дефинисање удаљености планета нашег система од Сунца.

Паскалов троугао срећемо као општу законитост и код атомске структуре. Протонска и неутронска конфигурација у језгру атома и конфигурација у омотачу атома повезане су са бројевима фигуративних низова Паскаловог троугла. У енергетском омотачу атома налазе се електрони и попуњавају љуске. Прва љуска може имати највише 2 електрона, друга 8 и тако даље.

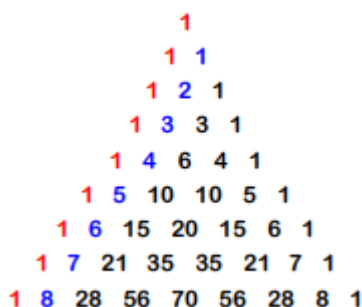
Помоћу Паскаловог троугла можемо изразити и збир природних бројева са фиксираним збиром цифара:

Укупан број свих природних бројева чији је збир цифара 1 чини прву колону Паскаловог троугла, јер има 1 једноцифрен број (1), 1 двоцифрен број (10), 1 троцифрен број (100), 1 четвороцифрен број (1000) итд. (Слика 14)



Слика 13.

Укупан број свих природних бројева чији је збир цифара 2 чини другу колону Паскаловог троугла, јер има 1 једноцифрен број (2), 2 двоцифрена броја (20, 11), 3 троцифрена броја (200, 110, 101) итд. (Слика 15)



Слика 14.

Настављајући овај поступак изводимо следећи закључак:

Укупан број свих једноцифрених, двоцифрених, троцифрених итд. бројева чији је збир цифара  $n$  чини  $n$ -ту колону у Паскаловом троуглу.

## 1. 12. ЛУКАСОВИ БРОЈЕВИ

Француски математичар Fransis Eduard Anatol Lucas (1842 – 1891) проучавао је Фибоначијев низ бројева, и њему придружио један други низ који је добио назив по њему. Лукас је најпознатији по својим резултатима у области теорије бројева. Доказао је да је број  $2^{127} - 1$  прост број.

Сликовитом комбинацијом Фибоначијевих бројева могу се добити такозвани Лукасови бројеви. Прецизније, сваки Лукасов број је збир претходна два Лукасова броја. Разлика у дефиницији је што Лукасов низ почиње са 2 и 1 уместо са 0 и 1.

**Дефиниција 1.50.** Лукасови бројеви су бројеви дати рекурзивном релацијом:  $L_{n+1} = L_{n-1} + L_n$ , под условом да је  $n > 1$  и  $L_0 = 2, L_1 = 1$ .

Лукасов низ изгледа овако:

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, ...

и његови чланови се добијају као збир одређених чланова Фибоначијевог низа.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & \dots & \\ & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & \dots & + \\ \hline 1 & 3 & 4 & 7 & 11 & 18 & 29 & 47 & 76 & \dots & \end{array}$$

односно

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

Овај низ има особину сличну особинама Фибоначијевог низа. Сваки нови члан Лукасовог низа бројева једнак је збиру два претходна члана. Такође, количник два узастопна Лукасова броја тежи вредности златног пресека.

## 1. 13. КАРМАЈКЛОВИ БРОЈЕВИ

Често се сусрећемо са следећим проблемом: како утврдити да ли је (велики) број прост?

За мале бројеве  $n$  као што су 8629, 8633 и 8641 једноставно проверавамо факторе до  $n$ . Ово би показало да су 8629 и 8641 прости, али  $8633 = 89 \cdot 97$ . За веће бројеве као што су

$$m = 113736947625310405231177973028344375862964001$$

$$n = 113736947625310405231177973028344375862953603$$

је већ тешко, чак и компјутером, наћи све факторе до квадратног корена.

У наставку приче ћемо користити релацију конгруенције која се дефинише на следећи начин:

**Дефиниција 1.51.** Два цела броја  $a$  и  $b$  су конгруентна по модулу  $n$  ако је њихова разлика  $(a - b)$  цео број који је умножак (садржалац) од  $n$ . То записујемо са  $a \equiv b \pmod{n}$ . (Више о томе у књизи [4]).

**Пример 1.52.**  $38 \equiv 14 \pmod{12}$  јер је  $38 - 14 = 24$ , што је садржалац броја 12.

Није много тешко (компјутером) дизати број на врло велике степене модуло велики број. На пример, за горње бројеве треба времена да се утврди да је

$$2^m \equiv 39241970815393499060120043692630615961790020 \pmod{m}$$

На први поглед ово изгледа потпуно бескорисно, али није тако. Мали Fermat каже да ако је  $p$  прост број, онда је  $a^p \equiv a \pmod{p}$ , за свако  $a$ . Према томе, чињеница да  $2^m$  није конгруентно 2 модуло  $m$  значи да  $m$  дефинитивно није прост број.

Доказали смо да  $m$  није прост број али немамо појма како га факторисати. Број  $m$  је производ следећих простих бројева:

$$40103836670582470495139653 \text{ и } 2836061511010998317.$$

Размотримо други број.

Ако урадимо сличан рачун, добијамо да је  $2^n \equiv 2 \pmod{n}$ . Пробамо још неколико бројева, рецимо до  $a = 100$  и видимо да је

$$3^n \equiv 3 \pmod{n}, 4^n \equiv 4 \pmod{n}, 5^n \equiv 5 \pmod{n}, \dots, 100^n \equiv 100 \pmod{n}.$$

Ово само сугерише да је  $n$  вероватно прост.

**Дефиниција 1.53.** Кажемо да је  $a$  СВЕДОК за  $n$  ако је  $a^n \not\equiv a \pmod{n}$

|           |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|           | 287  | 190  | 314  | 586  | 935  | 808  | 728  | 291  |
| # сведока | 278  | 150  | 310  | 582  | 908  | 804  | 720  | 282  |
| % сведока | 96,9 | 78,9 | 98,7 | 99,3 | 97,1 | 99,5 | 98,9 | 96,9 |

Табела 3.

Изгледа да ако је  $n$  сложен, онда већина вредности  $a$  служе као сведоци. На пример,  $n = 287$  па ако узмемо на случај било који  $a$ , онда постоји 96,9% шансе да ће  $a$  бити сведок да  $n$  није прост број.

Све показано, као и здрав разум, сугерише да сложени бројеви имају много сведока. Али, да ли је то тачно? Тужни случај је  $n = 561$ .

$561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ , али 561 нема ниједног сведока.

Једини начин да то покажемо је да израчунамо  $a^n \pmod{n}$  за свих 561 вредности  $a$ . Постоји и лакши начин. Да докажемо да је  $a^{561} \equiv a \pmod{561}$  довољно је да докажемо да је

$$a^{561} \equiv a \pmod{3}, a^{561} \equiv a \pmod{11} \text{ и } a^{561} \equiv a \pmod{17}.$$

Мали Fermat даје  $a^3 \equiv a \pmod{3}$ , па имамо

$$a^{561} \equiv a^{2 \cdot 280 + 1} = (a^2)^{280} \cdot a \equiv 1 \cdot a \pmod{3}$$

$$a^{11} \equiv a \pmod{11} \text{ па је } a^{561} \equiv a^{10 \cdot 56 + 1} = (a^{10})^{56} \cdot a \equiv 1 \cdot a \equiv a \pmod{11}$$

$$a^{17} \equiv a \pmod{17} \text{ па је } a^{561} \equiv a^{16 \cdot 35 + 1} = (a^{16})^{35} \cdot a \equiv 1 \cdot a \equiv a \pmod{17}$$

Ово је довољно да се уверимо да 561 нема сведока.

Овај пример, и 14 других бројева, приметио је R. D. Carmichael 1910. године.

**Дефиниција 1.54.** Carmichaelov број (Кармајклов број) је сложен број  $n$  са особином да је  $a^n \equiv a \pmod{n}$  за све  $1 \leq a \leq n$ .

Другим речима, Carmichaelovi бројеви се маскирају као прости бројеви јер немају сведока да су сложени.

**Пример 1.55.** Ево листе Carmichaelovih бројева до 10 000:

561, 1105, 1729, 2465, 2821, 6601, 8911

$$561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$$

$$1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$$

$$1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$$

$$2465 = 5 \cdot 17 \cdot 29$$

$$2821 = 7 \cdot 13 \cdot 31$$

$$6601 = 7 \cdot 23 \cdot 41$$

$$8911 = 7 \cdot 19 \cdot 67$$

## 1. 14. ПРИМОРИЈАЛИ, ФАКТОРИОНИ И ЦИКЛИЧКИ БРОЈЕВИ

**Дефиниција 1.56.** Приморијали су умношци првих  $N$  простих бројева.

**Пример 1.57.** Број 210 је приморијал јер је  $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ . Првих неколико приморијала су: 2, 6, 30, 210, 2310, 30030, 510510, 9699690, 223092870, 6469693230, 200560490130, 7420738134810 и 304250263527210.

**Дефиниција 1.58.** Факториони су бројеви који су збир вредности факторијела својих појединачних цифара.

**Пример 1.59.** Број 145 је факторион јер се може записати као  $145 = 1! + 4! + 5!$ . Јасно, два најмања факториона су  $1 = 1!$  и  $2 = 2!$ . Највећи познати факторион је 40585. Он се може написати као  $40585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!$ . Открио га је R. Dougherty 1964. године. Постављени су различити докази да је то уједно и највећи могући факторион и да се никад неће моћи пронаћи већи.

**Дефиниција 1.60.** Циклички број  $C$  је цео број који када је помножен с било којим бројем од 1 па до броја цифара од  $C$  – увек садржи исте цифре као и  $C$ . Такође, те ће се цифре појавити истим редом али с различитом почетном тачком. Пример ће то разјаснити:

**Пример 1.61.** Број 142.857 је циклички број због:

$$1 \cdot 142.857 = 142.857$$

$$2 \cdot 142.857 = 285.714$$

$$3 \cdot 142.857 = 428.571$$

$$4 \cdot 142.857 = 571.428$$

$$5 \cdot 142.857 = 714.285$$

$$6 \cdot 142.857 = \mathbf{857.142}$$

Циклички бројеви су и 588.235.294.117.647 и 52.631.578.947.368.421.

Може се уочити да се наведени циклички бројеви могу направити од одређених простих бројева на следећи начин:

$$\frac{1}{7} = 0,142857\dots, \frac{1}{17} = 0,0588235294117647\dots, \frac{1}{19} = 0,052631578947368421\dots$$

Претпоставља се, али није још доказано, да постоји бесконачно много цикличких бројева.

## 1. 15. БРОЈЕВИ БЛИЗАНЦИ

**Дефиниција 1.62.** Бројеви близанци-парови су парови простих бројева који се разликују за 2.

**Пример 1.63.** Парови близанаца су 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 8999 и 9001, 9719 и 9721, 9929 и 9931, 10005629 и 10005631, 10006427 и 10006429. Задњи број је по реду 663983. прости број. Не зна се да ли међу простим бројевима има бесконачно много близанаца-парова.

Осим близанаца-парова, тј. парова простих бројева облика  $p_1 = n - 1$  и  $p_2 = n + 1$  истражују се у природном низу и четворке простих бројева облика  $p_1 = n - 4$ ,  $p_2 = n - 2$ ,  $p_3 = n + 2$ ,  $p_4 = n + 4$ .

**Дефиниција 1.64.** Четворке простих бројева облика  $p_1 = n - 4$ ,  $p_2 = n - 2$ ,  $p_3 = n + 2$ ,  $p_4 = n + 4$  називају се **близанци-четворке**.

Две најређе (тј. са највећом разликом) аритметичке прогресије које садрже све близанце-парове (осим 3 и 5) су прогресије  $6n + 5$  и  $6n + 7$  са разликом једнаком 6. Аналогно, четири најређе аритметичке прогресије које садрже близанце четворке (осим 5, 7, 11, 13) јесу прогресије са разликом једнаком 30:  $30n + 11$ ,  $30n + 13$ ,  $30n + 17$ ,  $30n + 19$ .

Из последњих израза све прве четворке-близанци до 10000 (осим 5, 7, 11, 13) добијају се за  $n = 0, 3, 6, 27, 49, 108, 187, 314$ . Из тих израза се види да се прости бројеви (респективно у редоследу пораста) у произвољној четворки-близанаца увек завршавају цифрама 1, 3, 7 и 9.

Претпоставља се да четворка-близанаца као и парова-близанаца у природном низу има бесконачно много. Међутим, ни прву ни другу од ових претпоставки нико није ни доказао ни оповргао.

В.А.Голубов је 1959. године израчунао да од 1 до  $10^7$  у природном низу има 899 четворки-близанаца, а од 1 до  $15 \cdot 10^6$  1209 четворки-близанаца.

До 1969. године највећу познату четворку-близанаца навео је А. Фере. Она се састоји од следећа четири броја: 2863308731, 2863308733, 2863308737, 2863308739.



## 2. Највећи бројеви у математици

### 2. 1. О ВЕЛИКИМ БРОЈЕВИМА

Велики бројеви су тешки за дефинисање и још тежи за руковање. Савремени рачунари имају довољно меморије и брзине да могу баратати са прилично импресивним бројкама. Као резултат тога данас можемо приказивати бројеве о којима су ранији математичари могли само сањати.

Неки велики бројеви су релативно познати и имају своју примену у математици:

**Билион** –  $1.000.000.000.000 = 10^{12}$  (око седамдесет билиона износи бруто национални производ свих држава на земаљској кугли)

**Билијарда** –  $1.000.000.000.000.000 = 10^{15}$  (број који се користи за мерење производних линија глобалних компанија)

**Квинтилијарда** –  $10^{33}$  (то је највећи степен од 10 за кога се зна да се може представити као умножак два броја који сами не садрже цифру нула:

$$10^{33} = 2^{33} \cdot 5^{33} = 8.589.934.592 \cdot 116.415.321.826.934.814.453.125)$$

**Децилијарда** –  $10^{63}$  (број који се користи за одређивање броја звезда у видљивом свемиру)

**Центилион** –  $10^{303}$  (број са 303 нуле; сви бајтови на интернету, када се преброје, не би достигли ову цифру, још увек)

Број  $\Theta = 9^{9^9}$  је највећи број кога је могуће написати користећи само три цифре. Он има укупно 369.693.100 цифара. Одштампан на папиру захтевао би око 3000 km папирне траке. До раних 1900-их, научници су покушавали одредити неке од цифара тог броја. Fred Gruenberger недавно је израчунао последњих 1200 и првих 1000 цифара.

Познати немачки математичар Carl Friedrich Gauss је број  $\mathfrak{S} = 9^{9^{9^9}}$  назвао „мерљива бесконачност“. Тај број има  $10^{369693100}$  цифара и много је већи од броја атома у видљивом свемиру.

**Skewesov број** је један од највећих бројева који се појављује у неком математичком доказу. То је број  $S_1 = 10^{10^{10^{35}}}$ . Одредио га је Skewes 1933. године, а смањен је 1980-их на  $S_1 = e^{e^{27/4}} \approx 8185 \cdot 10^{370}$ . Skewes га је употребио као горњу границу за најмањи природан број  $x$  за који је  $\pi(x) > li(x)$ , где је  $\pi(x)$  функција која пребројава све просте бројеве мање од датог броја  $x$  а  $li(x)$  је логаритамска интегрална функција.

Са њиме повезан број, назван другим Skewesov-им бројем, још је већи:

$S_2 = 10^{10^{1000}}$ . Математичар G. H. Hardy назвао је Skewesov број „највећим бројем који је икад служио каквој коначној математичкој сврси у математици“. Међутим, бројеви које је открио Skewes данас имају само историјски значај пошто су, захваљујући рачунарским израчунавањима, добијене много прецизније процене које су представљене мањим бројевима. Према резултатима из 2007. године, најмањи  $x$  који задовољава постављене услове је близак  $1,397 \times 10^{316}$ .

**Leviatanov број** је број  $\varphi = (10^{666})!$ . Тај број је толико велики да човечанство никад неће бити у стању да израчуна све његове цифре. Познато је да је првих 6 његових цифара 134072.

**Tegmarkov број** је број  $\lambda = 10^{10^{29}}$ . Према астрофизичару Маху Tegmarkу то је број метара које морате пропутovati да бисте нашли тачну властиту копију, претпостављајући да је свемир хомоген и бесконачан.

**Erdos-Moserov број** је број  $1,485 \cdot 10^{9321155}$  и везан је за једначину  $\sum_{j=1}^{m-1} j^n = m^n$ .

Paul Erdos је претпоставио да нема других решења осим  $1^1 + 2^1 = 3^1$ . Још увек није познато да ли је то тачно или не, али знамо да нема решења за  $m < 1,485 \cdot 10^{9321155}$ . Управо та вредност за  $m$  је названа Erdos-Moserovим бројем, према првим истраживачима овог проблема.

Године 1987. А. Berezin је објавио „**Супер супер велике бројеве**“ у [20]. Тај чланак се бави математичким и филозофским импликацијама „суперфакторијелне“ функције дефинисане симболом  $\$$ , где је  $N\$ = N!^{N!}$  ... Члан  $N!$  понавља се  $N!$  пута. Другим речима, на десној страни је  $N!$  понављања од  $N!$ . Тај број расте веома брзо. Прве две вредности су 1 и 4, али затим расте толико брзо да већ  $3\$$  има велики број цифара.

$$3\$ = 3!^{3!^{3!^{3!}}} = 6^{6^{6^{6^6}}} \approx 10^{10^{10^{2,069197376410^{36305}}}}$$

Има превише цифара да би се тачно израчунао.

У табели 4 дат је преглед назива бројева који се записују помоћу 3, 6, ..., 81 нула.



## 2. 2. КНУТОВА НОТАЦИЈА

Године 1976., математичар Donald Knuth је објавио нотацију са стрелицама за представљање великих бројева. Тако је  $3 \uparrow 3$  једноставно  $3^3$ ,  $3 \uparrow (\uparrow 3)$  је  $3^{3^3} \dots$  Стрелица увек „удружује удесно“ тако да  $a \uparrow b \uparrow c \uparrow d \dots$  значи  $a \uparrow (b \uparrow (c \uparrow d)) \dots$

Идеја је заснована на поновљеном степеновању на сличан начин на који је степеновање поновљено множење, а множење је поновљено сабирање.

Наиме, множење природним бројем се може дефинисати као поновљено сабирање на следећи начин:

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ примерака } a}$$

а степеновање природним степеном  $b$  се може дефинисати као поновљено множење на следећи начин:

$$a^b = a \uparrow b = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ примерака } a}$$

То је инспирисало Кнута да дефинише оператор „двоструке стрелице“ за поновљено степеновање.

### Дефиниција 2.1.

$$a \uparrow \uparrow b = \underbrace{a^{a^{\dots^a}}}_{b \text{ примерака } a} = \underbrace{a \uparrow a \uparrow \dots \uparrow a}_{b \text{ примерака } a}$$

Овде и надаље израчунавање се спроводи здесна улево (као таква, операција је десно асоцијативна).

**Пример 2.2.** Према овој дефиницији имамо:

$$3 \uparrow \uparrow 2 = 3^3 = 27$$

$$3 \uparrow \uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7625597484987$$

$$3 \uparrow \uparrow 4 = 3^{3^{3^3}} = 3^{7625597484987}$$

$$3 \uparrow \uparrow 5 = 3^{3^{3^{3^3}}} = 3^{7625597484987^{7625597484987}}$$

и тако даље.

Очигледно, ово већ води до прилично великих бројева, али Кнут је проширио своју нотацију. Дефинисао је оператор „троструке стрелице“ за поновљену примену оператора „двоструке стрелице“.

### Дефиниција 2.3.

$$a \uparrow \uparrow \uparrow b = \underbrace{a \uparrow \uparrow a \uparrow \uparrow \dots \uparrow \uparrow a}_{b \text{ примерака } a}$$

Тако даље имамо и оператор „четири стрелице“.

### Дефиниција 2.4.

$$a \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow b = \underbrace{a \uparrow \uparrow \uparrow a \uparrow \uparrow \uparrow \dots \uparrow \uparrow \uparrow a}_{b \text{ примерака } a}$$

и тако даље. Опште правило је да се оператор  $n$  стрелица разлаже у серију оператора  $n - 1$  стрелица.

### Дефиниција 2.5.

$$a \underbrace{\uparrow \uparrow \dots \uparrow}_n b = \underbrace{a \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{n-1} a \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{n-1} a \dots a \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{n-1} a}_{b \text{ примерака } a}$$

### Пример 2.6.

$$3 \uparrow \uparrow \uparrow 2 = 3 \uparrow \uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7625597484987$$

$$3 \uparrow \uparrow \uparrow 3 = 3 \uparrow \uparrow 3 \uparrow \uparrow 3 = 3 \uparrow \uparrow (3 \uparrow \uparrow 3) = \underbrace{3 \uparrow \uparrow 3 \uparrow \dots \uparrow 3}_{3 \uparrow \uparrow 3 \text{ примерака } 3} = \underbrace{3 \uparrow \uparrow 3 \uparrow \dots \uparrow 3}_{7625597484987 \text{ примерака } 3}$$

У изразима као што је  $a^b$ , нотација за степеновање обично подразумева да се експонент  $b$  записује изнад са десне стране од базног броја  $a$ . Међутим, многа окружења, као што су програмски језици, не подржавају такав дводимензиони запис. Пошто наведена нотација није погодна за генерализацију, усвојена је линеарна нотација  $a \uparrow b$  за оваква окружења; стрелица на горе представља „дизање на степен“, што објашњава зашто је Кнут изабрао да ради на овај начин.

Међутим, неки бројеви су толико велики да чак и запис са вишеструким стрелицама на горе постаје прегломазан; тада је од користи оператор  $n$ -стрелица:  $\uparrow^n$  (као и за описе са променљивим бројем стрелица).

**Дефиниција 2.7.** Кнутава нотација се формално дефинише на следећи начин:

$$a \uparrow^n b = \begin{cases} a^b & , \text{ ако је } n = 1 \\ 1 & , \text{ ако је } b = 0 \\ a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n (b-1)), \text{ у супротном} \end{cases}$$

за све целе бројеве  $a, b, n, b \geq 0, n \geq 1$ .

Сви оператори стрелице на горе (укључујући класично степеновање  $a \uparrow b$ ) су десно асоцијативни, тј. израчунавање се спроводи здесна улево уколико израз садржи два или више таквих оператора. На пример,

$$a \uparrow b \uparrow c = a \uparrow (b \uparrow c) \text{ а не } (a \uparrow b) \uparrow c.$$

Рецимо,

$$3 \uparrow \uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7625597484987 \text{ а не } (3^3)^3 = 27^3 = 19683.$$

Постоји добар разлог зашто је изабран овакав редослед израчунавања.

Да је коришћено израчунавање слева удесно, тада би  $a \uparrow \uparrow b$  било једнако са

$$a \uparrow (a \uparrow (b-1)), \text{ па } \uparrow \uparrow \text{ суштински не би било нова операција.}$$

Десна асоцијативност је такође природна јер можемо да препишемо поновљени запис са стрелицама  $a \uparrow^n \dots \uparrow^n a$  који се понавља у развоју  $a \uparrow^{n+1} b$  као

$$a \uparrow^n \dots \uparrow^n a \uparrow^n 1, \text{ па је свако } a \text{ леви операнд оператора стрелице.}$$

Ово је значајно јер оператори стрелице нису комутативни.

Осим Кнутава нотације, за записивање великих бројева користе се и тзв. хипер оператори и Конвејева ланчана нотација, али се у овом раду нећемо тиме бавити.

$$a \uparrow^n b = \text{hyper}(a, n+2, b) = a \rightarrow b \rightarrow n$$

(Кнут)

(Конвеј)



## 2. 4. ГРАХАМОВ БРОЈ

**Грахамов број** (или *Грејемов број*) је највећи број са именом који има примену и највећи број икада коришћен за решавање неког математичког проблема. Овај број, назван по математичару Ronaldu Grahamu (1935), није трансцедентан, и иако је незамисливо велики има коначну вредност. Није га могуће записати (простор потребан за записивање Грахамовог броја превазилази капацитет видљивог свемира), његово директно израчунавање је немогуће, а чак је немогуће и записати како би прорачун овог броја требало да изгледа. Међутим, коришћењем конвергентних својстава *power towers* могуће је израчунавање цифара Грахамовог броја уназад – на пример, последњих 10 цифара овог броја су 2464195387.

Грахамов број се користи у области комбинаторике познатој као Ремзијева теорија (проучавање услова под којим се појављује неки ред), названој по британском математичару Френку П. Ремзију (1903 – 1930). Основно питање Ремзијеве теорије је: који је најмањи скуп који мора садржати дати подскуп? Најједноставнији пример би био: колико људи је неопходно да би најмање двоје од њих било истог пола? Одговор је да ће у групи од троје људи најмање двоје бити истог пола.

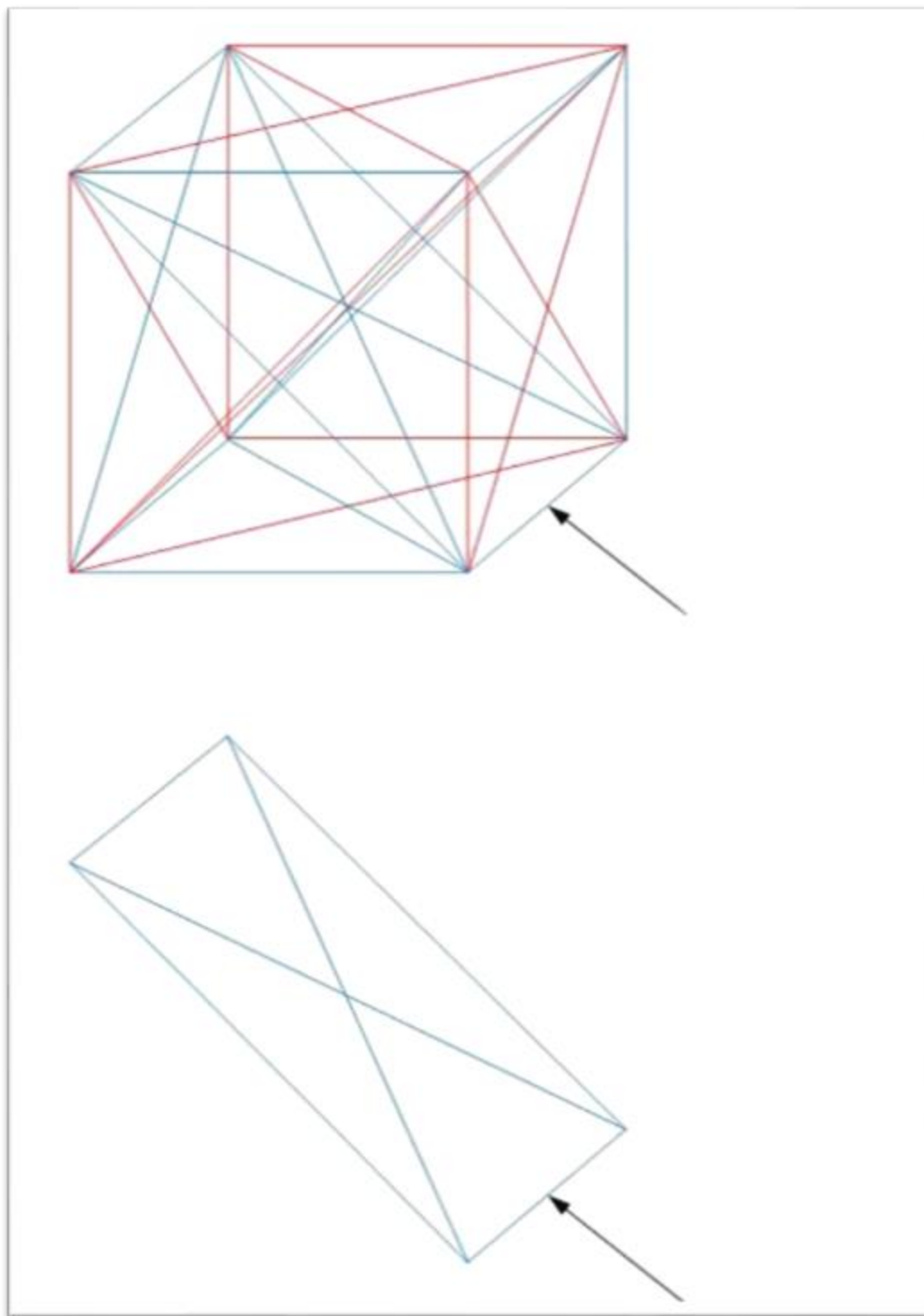
Грахамов број представља горњу границу решења математичког проблема који се односи на двобојне  $n$ -димензионалне хиперкоцке. Конкретно, сва геометријска темена  $n$ -димензионалне хиперкоцке треба спојити тако да се добије комплетан граф (у математичкој области теорије графова, комплетан граф представља једноставан графикон у којем је свака тачка спојена са другом тачком помоћу линије (ивице); ако је број тачака  $m$ , онда је број ивица  $m \cdot (m - 1) / 2$ ). Сваку ивицу овог графа треба обојити или црвеном или плавом бојом. Колика је најмања вредност  $n$  за коју свако такво бојење садржи најмање један једнобојни комплетан подграф са четири темена у истој равни? Другачије речено, колико мора бити  $n$  да се могу наћи четири тачке које леже у једној равни, а да је свих шест линија које их спајају исте боје?

Доња граница коју је Graham поставио је 6 димензија, док је горња граница Грахамов број. Нико, укључујући и Grahama, не верује да је одговор и приближно толико велики. Године 2008. доказано је да је доња граница 13, уз сугестије да је можда и већа. Graham је овај проблем решио 1971. године, а Грахамов број је привукао пажњу јавности у новембру 1977. године, кад је о њему писано у америчком научном часопису *Scientific American*.



### Пример одређивања доње границе:

На слици 15 приказана је двобојна тродимензионална коцка која садржи један једнобојни комплетан подграф са четири темена у једној равни које спајају плаве линије. Тај подграф је приказан испод коцке. Овде се може видети да ова коцка не би садржала ниједан такав подграф ако би се, на пример, доња десна плава ивица у датом подграфу заменила црвеном ивицом. Ово доказује да је доња граница за  $n$  сигурно већа од 3.



Слика 15

## 2. 4. 1. ЗАПИСИВАЊЕ ГРАХАМОВОГ БРОЈА

Грахамов број је несхватљиво велики и чак га је немогуће описати помоћу конвенционалних нумеричких техника. Међутим, постоји један релативно лак начин за његово представљање, а то је помоћу рекурзивне формуле која користи Кнотову нотацију (начин записивања великих бројева помоћу стрелица). Да би се овај број описао и записао потребна је специјална нотација коју је 1976. године смислио амерички математичар и професор Donald Knuth, а која је у овом раду већ помињана.

Грахамов број се помоћу Кнотове стреличне нотације изражава на следећи начин:

**1. корак:**  $3 \uparrow 3 = 3^3 = 27$

**2. корак:**  $3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow (3 \uparrow 3) = 3^{27} = 7625597484987$

**3. корак:**  $3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow 3) = 3 \uparrow\uparrow 7625597484987$   
 $= 3 \uparrow (7625597484987 \uparrow 7625597484987)$

(већ овај број је већи од укупног броја атома у свемиру)

**4. корак:**  $3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow\uparrow 3)$

Одавде почиње поступак израчунавања Грахамовог броја, који има 64 корака:

**$g_1$ :**  $3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$

**$g_2$ :**  $3 (g_1 \text{ стрелица}) 3$

**$g_3$ :**  $3 (g_2 \text{ стрелица}) 3$

•

•

•

**$g_{64}$ :**  $3 (g_{63} \text{ стрелица}) 3 = G$

И то је Грахамов број.

Или, записано помоћу *Conway chained arrow notation*:

$$3 \rightarrow 3 \rightarrow 64 \rightarrow 2 < G < 3 \rightarrow 3 \rightarrow 65 \rightarrow 2.$$

## 3. Бројевни системи

### 3. 1. ПОДЕЛА БРОЈЕВНИХ СИСТЕМА

Бројевни систем је формални математички систем за приказивање бројева. Он омогућава представљање бројева помоћу скупа симбола и правила њиховог комбиновања. Основна подела бројевних система је на:

- непозиционе
- позиционе

Непозициони бројевни систем се састоји од скупа симбола који се називају цифре. Код тог бројевног система вредност цифре не зависи од позиције на којој се она налази у запису броја, већ само од њене сопствене вредности. То значи да симбол који означава број увек има исту вредност, независно од тога где се налази у запису броја.

Пример непозиционог бројевног система су римски бројеви, који се записују помоћу седам симбола: I, V, X, L, C, D и M. Вредност записа броја рачуна се тако што се цифре једноставно саберу. Једини изузетак је када се мања цифра налази испред веће, и тада се она од те веће одузима, а уместо те две цифре у крајњи збир улази резултат тог одузимања. На пример:

$$- MCI = 1000 + 100 + 1 = 1101,$$

$$- MMCCII = 1000 + 1000 + 100 + 100 + 1 + 1 = 2202.$$

Независно до позиције, **M** је увек 1000, **C** је увек 100, а **I** је увек 1.

Позициони бројевни систем се састоји од базе и скупа симбола који се називају цифре. Укупан број симбола за записивање бројева у сваком позиционом бројевном систему једнак је вредности базе. Код тог бројевног система цифре имају различиту вредност у зависности од позиције на којој се налазе у запису броја (цифре су различите тежине, тј. имају различит удео у вредности самог броја). Вредност цифре у запису броја једнака је производу њене сопствене вредности и вредности позиције на којој се та цифра налази у запису броја. Вредност броја добија се тако што се саберу вредности свих цифара у његовом запису.

У позиционе бројевне системе спадају:

- декадни систем (база 10)
- бинарни систем (база 2)
- октални систем (база 8)
- хексадекадни систем (база 16)

### 3. 2. ДЕКАДНИ БРОЈЕВНИ СИСТЕМ

Декадни бројевни систем је позициони бројевни систем са базом 10 у којем се запис састоји од цифара 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Негативни бројеви се означавају предзнаком минус (–), док се предзнак плус (+) за позитивне бројеве обично изоставља. Бројеви могу да садрже нулу (0) као чувара места у свом запису, али она нема никакву вредност. Сваки број се може представити као збир експонената броја 10, на пример:

- $569 = 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 = 500 + 60 + 9 = 569,$
- $8724 = 8 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 = 8000 + 700 + 20 + 4 = 8724.$

Месна вредност је вредност цифре у зависности од њеног места у неком броју. То значи да се првобитна вредност цифре множи бројем 10 за сваку позицију лево од последње цифре у запису броја. На пример, за број 8724 месна вредност цифара је:

-цифра 4 се налази на првој позицији (на месту јединица), па је њена месна вредност 4.

-цифра 2 се налази на другој позицији (на месту десетица), због чега се њена вредност множи бројем 10, па је њена месна вредност 20.

-цифра 7 се налази на трећој позицији (на месту стотина), због чега се њена вредност множи бројем 100, па је њена месна вредност 700.

-цифра 8 се налази на четвртој позицији (на месту хиљада), због чега се њена вредност множи бројем 1000, па је њена месна вредност 8000.

Децимални зарез означава почетак разломљеног дела броја. У запису бројева без разломљеног дела, тј. целих бројева, децимални зарез се изоставља. Разломљени део се користи за записивање величина мањих од 1, а већих од 0. Десети део јединице пише се 0,1, стоти део 0,01, хиљадити део 0,001 итд. Дакле, за сваку позицију десно од децималног зареза номинална вредност цифре се дели бројем 10. Тако на пример, број 0,008 представља осам хиљадитих делова јединичне вредности.

Како се у свакодневном животу користи декадни бројевни систем, често се у информатици јавља потреба за претварањем бројева из декадног у неки други позициони бројевни систем и обрнуто. Превођење бројева из декадног у неки други бројевни систем врши се тако што се дати број дели бројем који представља базу бројевног система у који се преводи дати број. Дељење се врши све док количник не буде једнак нули (0), а затим се остаци дељења записују уназад, тј. супротним редоследом од оног којим су добијени. Тако се добија запис датог броја у одговарајућем бројевном систему.

Декадни бројевни систем развили су Индуси и Арапи, па се некад назива индо-арапски бројевни систем. Овај систем је најраспрострањенији систем за записивање бројева на свету.

### 3. 3. БИНАРНИ БРОЈЕВНИ СИСТЕМ

Бинарни бројевни систем је позициони бројевни систем са базом 2 у којем се запис састоји само од две цифре: 0 и 1. То значи да се сваки број може представити као збир експонената броја 2. Концепт овог бројевног система омогућен је тек са увођењем појма нуле у систему арапских цифара. Бинарни систем је, због једноставности примене у електронским колима, своју главну практичну употребу нашао у рачунарству. Готово сви модерни рачунари користе бинарну логику тј. податке записују и интерпретирају у облику нула и јединица.

#### 3. 3. 1. Превођење бројева из декадног у бинарни систем

Да би се број превео из декадног у бинарни систем потребно је извршити једноставан поступак дељења бројем 2. Остаци при дељењу се записују, а поступак се наставља све док количник не буде једнак нули.

Примери:

**а)** превођење броја 11

-прво се број 11 дели бројем 2:

$$11 : 2 = 5, \text{остатак } \mathbf{1}$$

-остатак се записује са стране (1), а количник (5) се дели бројем 2:

$$5 : 2 = 2, \text{остатак } \mathbf{1}$$

-остатак се записује са стране (1), а количник (2) се дели бројем 2:

$$2 : 2 = 1, \text{остатак } \mathbf{0}$$

-остатак се записује са стране (0), а количник (1) се дели бројем 2:

$$1 : 2 = 0, \text{остатак } \mathbf{1}$$

Затим треба записати све остатке, али супротним редоследом од оног којим су добијени (одоздо ка горе):  $\mathbf{1011}$ . И то је број 11 записан у бинарном систему.

**б)** превођење броја 53

-прво се број 53 дели бројем 2:

$$53 : 2 = 26, \text{остатак } \mathbf{1}$$

-остатак се записује са стране (1), а количник (26) се дели бројем 2:

$$26 : 2 = 13, \text{остатак } \mathbf{0}$$

-остатак се записује са стране (0), а количник (13) се дели бројем 2:

$$13 : 2 = 6, \text{остатак } \mathbf{1}$$

-остатак се записује са стране (1), а количник (6) се дели бројем 2:

$$6 : 2 = 3, \text{остатак } \mathbf{0}$$

-остатак се записује са стране (0), а количник (3) се дели бројем 2:

$3 : 2 = 1$ , остатак **1**

-остатак се записује са стране (1), а количник (1) се дели бројем 2:

$1 : 2 = 0$ , остатак **1**

Затим треба записати све остатке, али супротним редоследом од оног којим су добијени (одоздо ка горе): **110101**. И то је број 53 записан у бинарном систему.

Сваки број се претвара из декадног у бинарни систем на исти начин, тј. дељењем и записивањем остатака од крајњег ка почетном. Крајњи количник мора увек бити 0, а самим тим и крајњи остатак 1.

Бројеви се могу преводити и у друге позиционе бројевне системе (нпр. октални), такође дељењем оним бројем који одговара броју цифара у том систему (бинарни има две цифре па се зато бројеви деле бројем 2) и записивањем остатака.

### **3. 3. 2. Превोђење бројева из бинарног у декадни систем**

Приликом превођења неког броја из бинарног у декадни систем, последња цифра у бинарном запису тог броја се множи са  $2^0$ , претпоследња са  $2^1$ , следећа са  $2^2$  и тако редом. Затим се добијени производи саберу и тако се добија његов еквивалент у декадном систему.

Примери:

**а)** превођење броја 101

$$101 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 4 + 0 + 1 = 5$$

Број 5 у декадном систему је еквивалент броја 101 у бинарном систему.

**б)** превођење броја 10111

$$10111 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 0 + 4 + 2 + 1 = 23$$

Број 23 у декадном систему је еквивалент броја 10111 у бинарном систему.

**с)** превођење броја 1101110

$$1101110 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 64 + 32 + 0 + 8 + 4 + 2 + 0 = 110$$

Број 110 у декадном систему је еквивалент броја 1101110 у бинарном систему.

### 3. 4. ОКТАЛНИ БРОЈЕВНИ СИСТЕМ

Октални бројевни систем је позициони бројевни систем са базом 8 у којем се запис састоји од цифара 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. То значи да се сваки број може представити као збир експонената броја 8. Октални систем се често примењује у рачунарству и информатици.

#### 3. 4. 1. Превођење бројева из декадног у октални систем

Да би се број превео из декадног у октални систем потребно је извршити једноставан поступак дељења бројем 8. Остаци при дељењу се записују, а поступак се наставља све док количник не буде једнак нули.

Примери:

**а)** превођење броја 49

-прво се број 49 дели бројем 8:

$$49 : 8 = 6, \text{ остатак } \mathbf{1}$$

-остатак се записује са стране (1), а количник (6) се дели бројем 8:

$$6 : 8 = 0, \text{ остатак } \mathbf{6}$$

Затим треба записати све остатке, али супротним редоследом од оног којим су добијени (одоздо ка горе): **61**. И то је број 49 записан у окталном систему.

**б)** превођење броја 85

-прво се број 85 дели бројем 8:

$$85 : 8 = 10, \text{ остатак } \mathbf{5}$$

-остатак се записује са стране (5), а количник (10) се дели бројем 8:

$$10 : 8 = 1, \text{ остатак } \mathbf{2}$$

-остатак се записује са стране (2), а количник (1) се дели бројем 8:

$$1 : 8 = 0, \text{ остатак } \mathbf{1}$$

Затим треба записати све остатке, али супротним редоследом од оног којим су добијени (одоздо ка горе): **125**. И то је број 85 записан у окталном систему.

**с)** превођење броја 159

-прво се број 159 дели бројем 8:

$$159 : 8 = 19, \text{ остатак } \mathbf{7}$$

-остатак се записује са стране (7), а количник (19) се дели бројем 8:

$$19 : 8 = 2, \text{ остатак } \mathbf{3}$$

-остатак се записује са стране (3), а количник (2) се дели бројем 8:

$2 : 8 = 0$ , остатак **2**

Затим треба записати све остатке, али супротним редоследом од оног којим су добијени (одоздо ка горе): **237**. И то је број 159 записан у окталном систему.

Сваки број се претвара из декадног у октални систем на исти начин, тј. дељењем и записивањем остатака од крајњег ка почетном. Крајњи количник мора увек бити 0, а крајњи остатак може бити било који број од 1 до 7.

Бројеви се могу преводити и у друге позиционе бројевне системе (нпр. хексадекадни) такође дељењем оним бројем који одговара броју цифара у том систему (октални има осам цифара па се зато бројеви деле бројем 8) и записивањем остатака.

### **3. 4. 2. Превођење бројева из окталног у декадни систем**

Приликом превођења неког броја из окталног у декадни систем, последња цифра у окталном запису тог броја се множи са  $8^0$ , претпоследња са  $8^1$ , следећа са  $8^2$  и тако редом. Затим се добијени производи саберу и тако се добија његов еквивалент у декадном систему.

Примери:

**a)** превођење броја 16

$$16 = 1 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 8 + 6 = 14$$

Број 14 у декадном систему је еквивалент броја 16 у окталном систему.

**b)** превођење броја 512

$$512 = 5 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = 320 + 8 + 2 = 330$$

Број 330 у декадном систему је еквивалент броја 512 у окталном систему.

**c)** превођење броја 2003

$$2003 = 2 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 1024 + 0 + 0 + 3 = 1027$$

Број 1027 у декадном систему је еквивалент броја 2003 у окталном систему.



### 3. 5. ХЕКСАДЕКАДНИ БРОЈЕВНИ СИСТЕМ

Хексадекадни бројевни систем је позициони бројевни систем са базом 16 у којем се запис састоји од цифара 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и слова A, B, C, D, E, F. То значи да се сваки број може представити као збир експонената броја 16. Вредности наведених слова су следеће:

- A = 10
- B = 11
- C = 12
- D = 13
- E = 14
- F = 15

Дакле, цифре хексадекадног система су од 0 до F по хексадекадном означавању, тј. од 0 до 15 по декадном схватању њихових вредности. Овај бројевни систем користи се у комбинацији са бинарним системом у рачунарству јер се превођење бројева може лако обављати.

#### 3. 5. 1. Превођење бројева из декадног у хексадекадни систем

Да би се број превео из декадног у хексадекадни систем потребно је извршити једноставан поступак дељења бројем 16. Остаци при дељењу се записују, а поступак се наставља све док количник не буде једнак нули.

Примери:

**а)** превођење броја 37

-прво се број 37 дели бројем 16:

$$37 : 16 = 2, \text{остатак } \mathbf{5}$$

-остатак се записује са стране (5), а количник (2) се дели бројем 16:

$$2 : 16 = 0, \text{остатак } \mathbf{2}$$

Затим треба записати све остатке, али супротним редоследом од оног којим су добијени (одоздо ка горе): **25**. И то је број 37 записан у хексадекадном систему.

**б)** превођење броја 95

-прво се број 95 дели бројем 16:

$$95 : 16 = 5, \text{остатак } \mathbf{15} \text{ (15 = F)}$$

-остатак се записује са стране (F), а количник (5) се дели бројем 16:

$$5 : 16 = 0, \text{остатак } \mathbf{5}$$

Затим треба записати све остатке, али супротним редоследом од оног којим су добијени (одоздо ка горе): **5F**. И то је број 95 записан у хексадекадном систему.

**с) превођење броја 458**

-прво се број 458 дели бројем 16:

$$458 : 16 = 28, \text{ остатак } \mathbf{10} \text{ (10 = A)}$$

-остатак се записује са стране (A), а количник (28) се дели бројем 16:

$$28 : 16 = 1, \text{ остатак } \mathbf{12} \text{ (12 = C)}$$

-остатак се записује са стране (C), а количник (1) се дели бројем 16:

$$1 : 16 = 0, \text{ остатак } \mathbf{1}$$

Затим треба записати све остатке, али супротним редоследом од оног којим су добијени (одоздо ка горе): **1CA**. И то је број 458 записан у хексадекадном систему.

Сваки број се претвара из декадног у хексадекадни систем на исти начин, тј. дељењем и записивањем остатака од крајњег ка почетном. Крајњи количник мора увек бити 0, а крајњи остатак може бити било који број од 1 до 15.

Бројеви се могу преводити и у друге позиционе бројевне системе (нпр. бинарни) такође дељењем оним бројем који одговара броју цифара у том систему (хексадекадни има 16 цифара и слова па се зато бројеви деле бројем 16) и записивањем остатака.

### **3. 5. 2. Превођење бројева из хексадекадног у декадни систем**

Приликом превођења неког броја из хексадекадног у декадни систем, последња цифра у хексадекадном запису тог броја се множи са  $16^0$ , претпоследња са  $16^1$ , следећа са  $16^2$  и тако редом. Затим се добијени производи саберу и тако се добија његов еквивалент у декадном систему.

Примери:

**а) превођење броја 61**

$$61 = 6 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 = 96 + 1 = 97$$

Број 97 у декадном систему је еквивалент броја 61 у хексадекадном систему.

**б) превођење броја 2CE**

$$2CE = 2 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 14 \cdot 16^0 = 512 + 192 + 14 = 718$$

Број 718 у декадном систему је еквивалент броја 2CE у хексадекадном систему.

## 4. Теорија бројева у додатној настави математике

Познато је да постојеће збирке задатака и уџбеници не одговарају у потпуности потребама ученика за квалитетније припремање за такмичења, нарочито на нижим нивоима. На тржишту постоје публикације и збирке углавном већ виђених задатака на званичним такмичењима, које не обезбеђују фонд задатака са постепеним увођењем математичких вештина, од простог ка сложеном. У наставку овог рада дат је предлог сета задатака из теорије бројева за сваки разред, чије решавање би ефикасније преместило јаз између редовне и додатне наставе математике. Такође је дат и избор задатака за самосталан рад ученика. Највећи део ових задатака може се наћи на [19].

### 4. 1. ПЕТИ РАЗРЕД

Кад је у питању теорија бројева у петом разреду основне школе, акценат је на дељивости у скупу природних бројева.

- **Предлог задатака за један двочас**

**1)** Одреди најмањи петоцифрени број коме су све цифре различите а који је дељив и са 3 и са 4.

Решење: Најмањи петоцифрени број коме су све цифре различите је број 12345, он је дељив са 3 (збир његових цифара је дељив са 3 па је и он сам дељив са 3) али није дељив са 4 (јер његов двоцифрени завршетак тј. број 45 није дељив са 4). Следећи по величини је број 12346, али он није дељив ни са 3 ни са 4. Даљим разматрањем на овај начин долазимо до закључка да је тражени број 12348.

**2)** Одреди вредност цифре  $a$  тако да број  $\overline{734a}$  буде дељив са 18.

Решење: Број је дељив са 18 ако је дељив и са 2 и са 9. Да би наведени број био дељив са 2,  $a$  мора бити неки од бројева 0, 2, 4, 6, 8. Да би био дељив са 9, збир његових цифара мора бити дељив са 9, а то је задовољено само у случају кад за  $a$  узмемо 4. Дакле, вредност цифре  $a$  је 4.

**3)** Одреди цифру  $x$  тако да је број  $\overline{94x60}$  дељив са 56.

Решење: Број је дељив са 56 ако је дељив и са 8 и са 7. Да би наведени број био дељив са 8, његов троцифрени завршетак мора бити дељив са 8, а то је задовољено у случају кад је  $x$  нека од цифара 1, 3, 5, 7, 9. За дељење са 7 вршимо једноставну проверу, убацујемо наведене цифре на место  $x$  и проверавамо да ли је тако добијени број дељив са 7. Тако долазимо до закључка да је тражена цифра 3.

**4)** Звездице у шестоцифреном броју  $\overline{52*4*6}$  замени истим цифрама тако да добијени број буде дељив са 6.

Решење: Број је дељив са 6 ако је дељив и са 2 и са 3. Да би наведени број био дељив са 2 мора да се завршава парном цифром, а то је већ задовољено. Дакле потребно је испитати само дељивост са 3. Да би број био дељив са 3 мора збир његових цифара бити дељив са 3, а то важи само у случају кад звездице заменимо неком од цифара 2, 5, 8.

**5)** Одреди цифре  $x$  и  $y$  тако да број  $\overline{220xy4}$  буде дељив са 12.

Решење: Број је дељив са 12 ако је дељив и са 4 и са 3. Да би наведени број био дељив са 4, мора његов двоцифрени завршетак бити дељив са 4, а то важи у случајевима кад је  $y \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ . Да би наведени број био дељив са 3, мора збир његових цифара бити дељив са 3. Разматрамо све случајеве: Ако је  $y = 0$ , збир цифара је дељив са 3 ако  $x \in \{1, 4, 7\}$ . Ако је  $y = 2$ , збир цифара је дељив са 3 ако  $x \in \{5, 8\}$ . Ако је  $y = 4$ , збир цифара је дељив са 3 ако  $x \in \{3, 6, 9\}$ . Ако је  $y = 6$ , збир цифара је дељив са 3 ако  $x \in \{1, 4, 7\}$ . Ако је  $y = 8$ , збир цифара је дељив са 3 ако  $x \in \{2, 5\}$ .

**6)** Одреди све природне бројеве облика  $\overline{9a6b9}$  дељиве са 3 којима су цифре десетице и хиљаде прости бројеви.

Решење: Број је дељив са 3 ако је збир његових цифара дељив са 3, па је збир  $9 + a + 6 + b + 9 = 24 + a + b$  дељив са 3. Како су  $a$  и  $b$  прости бројеви, онда су  $a, b \in \{2, 3, 5, 7\}$ . За  $a = 2$  имамо да је  $26 + b$  дељив са 3 па је  $b = 7$ . За  $a = 3$  имамо да је  $27 + b$  дељив са 3 па је  $b = 3$ . За  $a = 5$  имамо да је  $29 + b$  дељив са 3 па је  $b = 7$ . За  $a = 7$  имамо да је  $31 + b$  дељив са 3 па је  $b \in \{2, 5\}$ . Тражени бројеви су 92679, 93639, 95679, 97629, 97659.

**7)** Одреди све осмоцифрене природне бројеве облика  $\overline{aaaaabbbb}$  дељиве са 15.

Решење: Ако је број дељив са 15 онда је дељив и са 5 и са 3. Због дељивости са 5 цифра  $b$  задатог броја може бити 0 или 5. Због дељивости са 3 збир цифара задатог броја мора бити дељив са 3.

Први случај: Нека је  $b = 0$ . Тада је задати осмоцифрени број облика  $\overline{aaaa0000}$ . Збир његових цифара је  $4a$ , па важи да је  $a \in \{3, 6, 9\}$ . Тражени бројеви су 33330000, 66660000 и 99990000.

Други случај: Нека је  $b = 5$ . Тада је задати осмоцифрени број облика  $\overline{aaaa5555}$ . Збир његових цифара је  $4a + 20$ , па важи да је  $a \in \{1, 4, 7\}$ . Тражени бројеви су 11115555, 44445555 и 77775555.

**8)** Одредити све цифре  $a$  тако да је производ  $\overline{17a} \cdot 520$  дељив са 12.

Решење: Број је дељив са 12 ако је дељив и са 4 и са 3. Разматрајући све могуће вредности за цифру  $a$  долазимо до закључка да  $a \in \{1, 4, 7\}$ .

**9)** Одредити цифре  $a$  и  $b$  тако да је  $\frac{\overline{199a1b}}{12}$  природан број.

Решење: Да би количник био природан број, број  $\overline{199a1b}$  мора бити дељив са 12, а то значи да мора бити дељив и са 4 и са 3. Да би био дељив са 4, његов двоцифрени завршетак  $\overline{1b}$  мора бити дељив са 4, па је  $b = 2$  или  $b = 6$ . Ако је  $b = 2$  онда је збир цифара датог броја једнак  $22 + a$ , па због дељивости са 3 следи да  $a$  може бити 2, 5 или 8. Ако је  $b = 6$  онда је збир цифара датог броја једнак  $26 + a$ , па у том случају  $a$  може бити 1, 4 или 7. Сви тражени бројеви су 199116, 199212, 199416, 199512, 199716, 199812.

**10)** Броју 2013 допиши са леве и са десне стране **а)** по једну исту цифру; **б)** по једну цифру тако да добијени шестоцифрени број буде дељив са 12. Одреди тај шестоцифрени број.

Решење: а) Нека је  $x$  тражена цифра. Број  $\overline{x2013x}$  је дељив са 12 ако је дељив и са 4 и са 3. Да би број  $\overline{x2013x}$  био дељив са 4 његов двоцифрени завршетак тј. број  $3x$  мора бити дељив са 4. Дакле,  $x \in \{2, 6\}$ . Да би број  $\overline{x2013x}$  био дељив са 3 збир његових цифара мора бити дељив са 3, тј.  $x + 2 + 0 + 1 + 3 + x = 2x + 6$  је дељиво са 3. Следи да је  $x \in \{3, 6, 9\}$ . С обзиром да број  $\overline{x2013x}$  треба да биде дељив и са 3 и са 4, то  $x \in \{2, 6\} \cap \{3, 6, 9\} = \{6\}$ . Дакле, тражени број је 620136. Задатак има једно решење.

б) У овом случају цифре могу бити и различите. Нека су тражене цифре  $x$  и  $y$ . За број  $\overline{x2013y}$  важе исти услови као у претходном делу задатка, односно број  $3y$  треба да је дељив са 4, а збир  $x + 2 + 0 + 1 + 3 + y = x + 6 + y$  треба да је дељив са 3. Следи да је  $y \in \{2, 6\}$  и  $x + y \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ . Ако је  $y = 2$ , тада је  $x \in \{1, 4, 7\}$ . Ако је  $y = 6$ , тада је  $x \in \{3, 6, 9\}$ . Дакле, у овом случају, тражени бројеви су: 120132, 420132, 720132, 320136, 620136, 920136. Задатак има 6 решења.

Сет задатака за домаћи:

- 1) Одреди најмањи четвороцифрени број дељив са 15.
- 2) У четвороцифреном броју  $\overline{32*4}$  замени звездицу одговарајућом цифром тако да добијени број буде дељив са 12.
- 3) Одредити цифре  $a$  и  $b$  у броју  $\overline{87a9b}$  тако да он буде дељив са 18.
- 4) Наћи све шестоцифрене бројеве облика  $\overline{x2016y}$  који су дељиви са 36.
- 5) Одреди најмањи седмоцифрен број  $\overline{3219abc}$  који је дељив са 90.
- 6) Одредити цифре  $a$  и  $b$  тако да је  $\frac{\overline{a2012b}}{36}$  природан број.
- 7) Броју 2014 допиши са леве и са десне стране **a)** по једну исту цифру; **б)** по једну цифру тако да добијени шестоцифрени број буде дељив са 36. Одреди тај шестоцифрени број.

#### 4. 2. ШЕСТИ РАЗРЕД

У шестом разреду се ученици упознају са целим и рационалним бројевима, те следи предлог једног двочаса додатне наставе на тему ових бројева.

- **Предлог задатака за један двочас**

- 1) Одреди све целе бројеве  $x$  за које је:  $-0,2 \leq \frac{1}{65} + \frac{x}{62} \leq -0,1$

Решење: *Сређивањем ове једначине добијамо:*

$$-0,2 \cdot 65 \cdot 62 \leq 62 + 65x \leq -0,1 \cdot 62 \cdot 65,$$

$$-806 \leq 62 + 65x \leq -403,$$

$$-868 \leq 65x \leq -465,$$

$$-\frac{868}{65} \leq x \leq -\frac{465}{65}$$

$$-13\frac{23}{65} \leq x \leq -7\frac{10}{65}$$

па је решење  $x \in \{-8, -9, -10, -11, -12, -13\}$ .

**2)** а) Израчунај све целобројне вредности броја  $a$  за које је вредност разломка  $\frac{8}{3a+1}$  цео број.

б) Израчунај све целобројне вредности разломка  $\frac{3a+9}{3a+1}$  ако је број  $a$  цео број.

Решење: а) Вредност разломка  $\frac{8}{3a+1}$  је цео број ако је 8 дељиво са  $3a+1$ .

Дакле,  $3a+1$  може узимати вредности 8, -8, 4, -4, 2, -2, 1, -1. Рачунамо број  $a$ .

$3a+1=8$ ,  $3a=7$ . Решење није цео број.

$3a+1=-8$ ,  $3a=-9$ . Решење је -3.

$3a+1=4$ ,  $3a=3$ . Решење је 1.

$3a+1=-4$ ,  $3a=-5$ . Решење није цео број.

$3a+1=2$ ,  $3a=1$ . Решење није цео број.

$3a+1=-2$ ,  $3a=-3$ . Решење је -1.

$3a+1=1$ ,  $3a=0$ . Решење је 0.

$3a+1=-1$ ,  $3a=-2$ . Решење није цео број.

Вредност разломка  $\frac{8}{3a+1}$  је цео број за  $a$  из скупа  $\{-3, -1, 0, 1\}$ .

б) Дати разломак је збир два разломка, тј.  $\frac{3a+9}{3a+1} = \frac{3a+1}{3a+1} + \frac{8}{3a+1}$ ,

односно  $\frac{3a+9}{3a+1} = 1 + \frac{8}{3a+1}$ . Користимо решење задатка под а). За  $a$ ,

редом, -3, -1, 0, 1 вредности  $3a+1$  су -8, -2, 1, 4, односно за  $\frac{8}{3a+1}$  су -1, -

4, 8, 2. Дакле, целобројне вредности разломка  $\frac{3a+9}{3a+1}$  су 0, -3, 9, 3.

**3)** За који прост број  $p$  је вредност разломка  $\frac{2p-24}{13-p}$  целобројна? Колика је та целобројна вредност разломка?

Решење: а)  $\frac{2p-24}{13-p} = \frac{2p-24}{-p+13} = \frac{-2 \cdot (-p+13)+2}{-p+13} = -2 + \frac{2}{-p+13}$ .

Да би разломак био целобројан, мора бити  $(-p+13) \in \{-2, -1, 1, 2\}$ , односно

$-p \in \{-15, -14, -12, -11\}$ , односно  $p \in \{11, 12, 14, 15\}$ .

Како је  $p$  прост број, из  $p = 11$  следи да је  $\frac{2p-24}{-p+13} = \frac{2 \cdot 11 - 24}{-11 + 13} = \frac{-2}{2} = -1$ .

**4)** Нека је  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{7}{2x+1} \in \mathbb{Z}\}$   $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid |3y + 1| \leq 10\}$ .

Одредити:

а) елементе скупова  $A$  и  $B$

б) максималну вредност броја  $w = x + y$ , при чему је  $x \in A$  и  $y \in B$ .

Решење: а) Да би разломак  $\frac{7}{2x+1}$  био цео број, његов бројилац мора бити дељив са имениоцем, а да би то важило параметар  $x$  мора да има следеће вредности:  $x \in \{-4, 0, 3\}$ . Дакле,  $A = \{-4, 0, 3\}$ .

Да би неједнакост  $|3y + 1| \leq 10$  била тачна, параметар  $y$  мора да има следеће вредности:  $y \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ . Дакле,  $B = \{-4, 0, 3\}$ .

а) Да би број  $w$  имао максималну вредност, параметри  $x$  и  $y$  морају имати максималне вредности из скупова којима припадају, односно  $x = 3$ ,  $y = 3$ , па је  $w_{\max} = 3 + 3 = 6$ .

**5)** За просте бројеве  $a, b, c$  важи:  $a + b + c = 49$  и  $a - b - c = 13$ . Ако је  $a > b > c$  израчунај  $a \cdot b \cdot c$ .

Решење: Сабирањем једнакости  $a + b + c = 49$  и  $a - b - c = 13$  добијамо да је  $2a = 62$ . Следи да је  $a = 31$  и  $b + c = 18$ . С обзиром да су по условима задатка  $b$  и  $c$  прости бројеви, и  $b > c$  утврђујемо да је  $b = 13$  и  $c = 5$  или  $b = 11$  и  $c = 7$ . Дакле,  $a \cdot b \cdot c = 31 \cdot 13 \cdot 5 = 2015$  или  $a \cdot b \cdot c = 31 \cdot 11 \cdot 7 = 2387$ .

**6)** Три рационална броја  $a, b, c$  су таква да је један позитиван, један негативан и један једнак нули. Ако за те бројеве важи  $\frac{a(c-b)}{b} > 0$ , који од тих бројева је позитиван, који негативан а који једнак нули?

Решење: Број  $b$  је именилац разломка па не може бити 0. Број  $a$  не може бити 0 јер би у супротном разломак био једнак 0. Дакле,  $c = 0$ . Даље је  $\frac{a \cdot (-b)}{b} > 0$ , односно  $-a > 0$ , па је  $a < 0$ . Следи да је  $b > 0$ .



Сет задатака за домаћи:

- 1)** Одреди све целе бројеве  $x$  за које је:  $-0,4 \leq \frac{1}{5} - \frac{x}{2} \leq -0,2$
- 2)** Израчунај све целобројне вредности броја  $a$  за које је вредност израза  $\frac{2a+8}{2a+3}$  цео број.
- 3)** За просте бројеве  $a, b, c$  важи:  $a + b + c = 78$  и  $a + b - c = 74$ . Ако је  $a > b > c$  израчунај  $a \cdot b \cdot c$
- 4)** Три рационална броја  $a, b, c$  су таква да је један позитиван, један негативан и један једнак нули. Ако за те бројеве важи  $\frac{(a+b)(c-b)}{b} < 0$ , који од тих бројева је позитиван, који негативан а који једнак нули?

#### 4. 3. СЕДМИ РАЗРЕД

У седмом разреду се ученици упознају са појмом ирационалног броја.

• **Предлог задатака за један двочас:**

- 1)** Да ли је број  $\sqrt{28} - \sqrt{(5-2\sqrt{7})^2}$  рационалан или ирационалан?

Решење:  $\sqrt{28} - \sqrt{(5-2\sqrt{7})^2} = 2\sqrt{7} - |5 - 2\sqrt{7}| = 2\sqrt{7} - (2\sqrt{7} - 5) = 5$  а то је рационалан број.

- 2)** Израчунај:  $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} =$

Решење:  $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = |1 - \sqrt{3}| - |1 + \sqrt{3}| = (\sqrt{3} - 1) - (1 + \sqrt{3}) = -2$

- 3)** Да ли је број  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - 1 + \sqrt{2}$  рационалан или ирационалан број?

Решење:  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - 1 + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} - 1 + \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} = 1$ ,  
дакле рационалан број.

**4)** Доказати да  $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})(\sqrt{4 - \sqrt{15}})$  није ирационалан број.

Решење:  $\sqrt{10} - \sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = 2 \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}}$  па следи да је

$$A = (4 + \sqrt{15}) \cdot 2 \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} = 2.$$

Дакле  $A$  није ирационалан број.

**5)** Доказати да број  $\sqrt{ababab}$  није рационалан.

Решење: Ако су  $a$  и  $n$  природни бројеви и  $n \geq 2$ , онда је  $\sqrt[n]{a}$  рационалан број ако и само ако је  $a$  потпун  $n$ -ти степен неког природног броја. Број  $\overline{ababab}$  може се написати у облику  $10101 \cdot \overline{ab}$  и ако је он потпун квадрат, онда је дељив са  $3^2$ ,  $7^2$ ,  $13^2$  и  $37^2$  (јер је  $10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$ ). То значи да је број  $\overline{ab}$  дељив са 3, 7, 13 и 37, што је немогуће. Дакле, број  $\overline{ababab}$  није потпун квадрат, према томе је број  $\sqrt{ababab}$  ирационалан.

**6)** Доказати да је бесконачни децимални разломак  $0,149162536496481100121\dots$  ирационалан број. (Иза децималне запете исписани су редом квадрати природних бројева)

Решење: Претпоставимо да је разломак  $a = 0,149162536496481100121\dots$  рационалан. Тада је он периодичан. Нека је дужина периоде  $k$ . Како се међу квадратима природних бројева налази и број  $100\dots 00 = 10^{4k}$  (број који се записује помоћу једне јединице и  $4k$  нула и који је квадрат броја  $10^{2k}$ ), следи да су све цифре периоде нуле. То значи да су у децималном запису броја  $a$  почев од неког места све цифре нуле, тј. да је разломак коначан. Међутим, то је немогуће јер је иза децималне запете исписано бесконачно много природних бројева. Добијена контрадикција показује да број  $a$  није рационалан.

**7)** Докажи да је  $\sqrt{7} - \sqrt{3}$  ирационалан број.

Решење: Претпоставимо да је рационалан,  $\sqrt{7} - \sqrt{3} = r$ . Квадрирањем обе стране једнакости добијамо  $7 - 2\sqrt{21} + 3 = r^2$ , а одатле  $\sqrt{21} = \frac{r^2 - 10}{2}$ , што је контрадикција (број на левој страни је ирационалан а на десној рационалан).

**8)** Докажи да је  $\sqrt{a^2 + b^2}$  ирационалан број ако су  $a$  и  $b$  непарни природни бројеви.

Решење: Нека је  $a = 2m - 1$  и  $b = 2n - 1$ , где су  $m$  и  $n$  природни бројеви. Тада је  $a^2 + b^2 = (2m - 1)^2 + (2n - 1)^2 = 4(m^2 + n^2 - m - n) + 2$ .

Дакле,  $a^2 + b^2$  је природан број облика  $4k + 2$ , што значи да није потпун квадрат (дељив је са 2 а није дељив са 4). Како је за природан број  $x$ ,  $\sqrt{x}$  рационалан број само ако је  $x$  потпун квадрат, следи да  $\sqrt{a^2 + b^2}$  није рационалан број. Користили смо следећу чињеницу: Ако је  $\sqrt{x} = \frac{p}{q}$ , где су  $p$  и  $q$

$q$  узајамно прости природни бројеви, тада је  $x = \frac{p^2}{q^2}$ , па је  $q = 1$ , односно  $x = p^2$ .

Сет задатака за домаћи:

**1)** Да ли је алгебарска вредност израза  $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \sqrt{(9-4\sqrt{5})^2}$  рационалан или ирационалан број?

**2)** Израчунај:  $3\sqrt{(2\sqrt{5}-5)^2} - 2\sqrt{(3\sqrt{5}-5)^2} =$

**3)** Докажи да је  $\sqrt{5} - \sqrt{2}$  ирационалан број.

**4)** Доказати да је  $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$  ирационалан број.

**5)** Доказати да је број  $\sqrt{abcabc}$  ирационалан.

#### 4. 4. ОСМИ РАЗРЕД

Додатна настава за ученике осмог разреда између осталог обухвата доказивање простоте/сложености бројева, те следи предлог сета задатака за један такав двочас.

- **Предлог задатака за један двочас**

**1)** Докажи да је број  $2016^{12} + 2^{10}$  сложен.

Решење: Број је сложен ако је једнак производу два броја већа од 1.

$$\begin{aligned} 2016^{12} + 2^{10} &= (2016^6 + 2^5)^2 - 2 \cdot 2^5 \cdot 2016^6 = (2016^6 + 2^5)^2 - 2^6 \cdot 2016^6 = \\ &= (2016^6 + 2^5)^2 - (2^3 \cdot 2016^3)^2 = (2016^6 + 2^5 - 2^3 \cdot 2016^3)(2016^6 + 2^5 + 2^3 \cdot 2016^3) \end{aligned}$$

Дакле, како су оба фактора већа од 1, дати број је сложен.

**2)** Да ли је број  $2009 \cdot 2011 - 48$  сложен?

$$\begin{aligned} \text{Решење: } 2009 \cdot 2011 - 48 &= (2010 - 1)(2010 + 1) - 48 = 2010^2 - 1^2 - 48 = \\ &= 2010^2 - 49 = 2010^2 - 7^2 = (2010 - 7)(2010 + 7) \end{aligned}$$

Пошто су оба фактора већа од 1, дати број јесте сложен.

**3)** Ако је  $a + \frac{1}{a}$  цео број већи од 2, докажи да је  $a^3 + \frac{1}{a^3}$  сложен број.

$$\text{Решење: Нека је } a + \frac{1}{a} = A, A > 2$$

$$A^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= A \cdot A^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}\right) = a^3 + 2a + \frac{1}{a} + a + \frac{2}{a} + \frac{1}{a^3} \\ &= a^3 + \frac{1}{a^3} + 3a + \frac{3}{a} \end{aligned}$$

Даље важи:

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = A^3 - \left(3a + \frac{3}{a}\right) = A^3 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right) = A^3 - 3A = A \cdot (A^2 - 3)$$

$$\text{Дакле } a^3 + \frac{1}{a^3} = A \cdot (A^2 - 3)$$

Први чинилац је по услову задатка већи од 2, а други је сигурно већи од 1, па је тако доказано да је дати број сложен.

**4)** Доказати да је за произвољне целе бројеве  $x$  и  $y$  број  $x^2y^2 + 4x^2 + 7y^2 + 28$  сложен.

Решење:  $x^2y^2 + 4x^2 + 7y^2 + 28 = x^2 \cdot (y^2 + 4) + 7 \cdot (y^2 + 4) = (x^2 + 7)(y^2 + 4)$

Оба фактора су већа од 1 па је наведени број сложен.

**5)** Ако је  $n$  цео број онда је  $n^4 + 12n^2 + 35$  сложен број.

Решење:  $n^4 + 12n^2 + 35 = n^4 + 12n^2 + 36 - 1 = (n^2 + 6)^2 - 1$

$$= (n^2 + 6)^2 - 1^2 = (n^2 + 6 - 1)(n^2 + 6 + 1) = (n^2 + 5)(n^2 + 7)$$

Оба фактора су већа од 1 па је наведени број сложен.

**6)** Докажи да је  $A = 3^{2013} + 4^{2013}$  сложен број.

Решење: Како је  $3^3 = 27 \equiv -1 \pmod{7}$ , то је  $3^{2013} = (3^3)^{671} \equiv (-1)^{671} \equiv -1 \pmod{7}$ . Слично је и  $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod{7}$ , па је  $4^{2013} = (4^3)^{671} \equiv 1^{671} \equiv 1 \pmod{7}$ . Следи да је  $3^{2013} + 4^{2013} \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ . То значи да је број  $A = 3^{2013} + 4^{2013}$  већи од 7 и дељив са 7, што значи да је  $A$  сложен број.

**7)** Ако је  $p$  прост број, онда је  $p^p + 1991$  сложен број. Доказати.

Решење: Разликујемо два случаја.

Ако је  $p = 2$ , онда је  $p^p + 1991 = 2^2 + 1991 = 1995$ , а то је сложен број јер је дељив са 5.

Ако је  $p > 2$ , онда је  $p$  непаран број, па је  $p^p$  такође непаран број. Тада је  $p^p + 1991$  паран што значи да је сложен.

**8)** Ако је  $p$  прост број, онда је  $p + (p + 1) + (p + 2) + \dots + (p + 1991)$  сложен број. Доказати.

Решење: Збир  $p + (p + 1) + (p + 2) + \dots + (p + 1991) = (p + p + \dots + p) + (1 + 2 + \dots + 1991) = 1992p + (995 \cdot 1991 + 1991) = 1992p + 996 \cdot 1991 = 996 \cdot (2p + 1991)$  је дељив са 996, па је сложен број.

**9)** Доказати да не постоји прост број  $p$  такав да су и бројеви  $p + 2$ ,  $p + 4$ ,  $p + 6$  и  $p + 8$  прости.

Решење: *Разликујемо три случаја.*

*Ако је  $p = 2$ , онда је  $p + 2 = 4$  што је сложен број, па за  $p = 2$  тврђење важи.*

*Ако је  $p = 3$ , онда је  $p + 6 = 9$  што је сложен број, па и за  $p = 3$  тврђење важи.*

*Ако је  $p > 3$ , онда је  $p$  облика  $6k - 1$  или  $6k + 1$ . У случају  $6k - 1$ , број  $p + 4 = 6k - 1 + 4 = 6k + 3$  је дељив са 3. Ако је  $p = 6k + 1$ , онда је  $p + 2 = 6k + 1 + 2 = 6k + 3$  такође дељиво са 3, па тврђење важи за све просте бројеве.*

Сет задатака за домаћи:

**1)** Докажи да је број  $2^{2002} + 5^{2004}$  сложен.

**2)** Доказати да је за сваки прост број  $p$  израз  $p^5 + 3$  сложен број.

**3)** Доказати да је за сваки прост број  $p$  израз  $p^{1991} - 3$  сложен број.

**4)** Доказати да не постоје четири узастопна проста непарна природна броја.

## 5. Бројеви као инспирација

За разлику од бројева наведених у првом поглављу чији су називи интернационално препознати, много је назива који живе само локално – у поставци такмичарских задатака. Није ретка појава да математичари, инспирисани бројевима и њиховим разноврсним особинама, формулишу задатке у којима бројевима дају интересантне називе. То се често среће на математичким такмичењима у основној и средњој школи. Неки од тих случајева следе у наставку.

### 5. 1. БРОЈЕВИ НА ТАКМИЧЕЊИМА

- **Економични бројеви** [11]

Сваки природан број се разлаже на просте чиниоце на јединствен начин до на поредак чинилаца. На пример:

$$2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53 ; \quad 2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 ; \quad 3072 = 2^{10} \cdot 3 ; \quad 1701 = 3^5 \cdot 7$$

У запису разлагања, број употребљених цифара може бити већи од броја цифара самог броја (на пример, за бројеве 2014 и 2016), може бити једнак (на пример, за број 3072) или мањи од броја цифара самог броја (на пример, за број 1701).

Ако је број цифара у разлагању на просте чиниоце мањи од броја цифара самог броја, кажемо да је тај број економичан.

На пример, бројеви 1701 и  $2197 = 13^3$  су економични.

Ученици основних школа су имали прилику да се упознају са „економичним“ бројевима у 5. броју Математичког листа, јуна 2014. године, када је Друштво математичара Србије организовало специјалан наградни конкурс на питање „Колико има економичних бројева мањих од 1000?“

*Решење:* Лако се види да међу једноцифреним и двоцифреним бројевима нема економичних бројева. Преостаје да испитамо троцифрене бројеве. Да би троцифрени број био економичан, његово разлагање на просте чиниоце треба да садржи највише две цифре. То значи да су тражени бројеви степени једноцифрених простих бројева, при чему су и изложници једноцифрени бројеви. Према томе, тражени бројеви су  $2^7 = 128$ ,  $2^8 = 256$ ,  $2^9 = 512$ ,  $3^5 = 243$ ,  $3^6 = 729$ ,  $5^3 = 125$ ,  $5^4 = 625$ ,  $7^3 = 343$ . [12]

- **Симпатични бројеви**

Задатак са „симпатичним“ бројевима се појавио на окружном такмичењу за ученике седмих разреда основне школе, 2008. године. Задатак гласи:

*„Природан број зовемо симпатичним ако је производ његових цифара паран. Колико има симпатичних шестоцифрених бројева?“*

*Решење:* Број је симпатичан ако је барем једна његова цифра парна. Шестоцифрени бројеви који нису симпатични у свом запису имају само непарне

цифре, а њих је укупно  $5^6 = 15625$ . Како шестоцифрених бројева има 900000, то симпатичних има  $900000 - 15625 = 884375$ .

- **Ружичасти бројеви** [9]

Слично симпатичним бројевима, задатак са „ружичастим“ бројевима се појавио на окружном такмичењу за ученике седмих разреда основне школе, 2005. године. Задатак гласи:

*„Број је ружичаст ако у свом запису има цифре 1 и 2 које су суседне. Колико има ружичастих четвороцифрених бројева којима су све цифре различите?“*

*Решење:* Тражених бројева са цифрама 1 и 2 „на почетку“ има  $2 \cdot 8 \cdot 7 = 112$ . Ако су цифре 1 и 2 „у средини“, таквих бројева има  $7 \cdot 2 \cdot 7 = 98$ , и са цифрама 1 и 2 „на крају“  $7 \cdot 7 \cdot 2 = 98$ . Дакле тражених бројева има укупно 308.

- **Занимљиви бројеви** [8]

„Занимљиви“ бројеви су се 2004. године појавили пред ученицима четвртих разреда основне школе, на општинском такмичењу из математике.

*„За неки природан број ћемо рећи да је занимљив ако је записан међусобно различитим цифрама чији је збир једнак 45. Наћи збир највећег и најмањег занимљивог броја“*

*Решење:* Најмањи занимљив број је 123456789, а највећи је 9876543210. Њихов збир је 9 999 999 999.

- **Јаки бројеви** [3]

Задатак са „јаким“ бројевима се појавио као предлог за Међународну Математичку Олимпијаду, 1983. године у Белгији.

*Нека је  $\sigma(n)$  збир свих позитивних делитеља природног броја  $n$ . Природан број  $m$  зовемо јаким ако за све  $1 \leq k < m$  важи:*

$$\frac{\sigma(k)}{k} < \frac{\sigma(m)}{m}$$

*Доказати да постоји бесконачно много јаких бројева.*

*Решење:* Обележимо  $a_m = \frac{\sigma(m)}{m}$ . Јасно, број  $m$  је јак ако и само ако је  $a_k < a_m$

за све  $k < m$ . Сада је довољно доказати да низ  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , нема највећи елемент, пошто је тада лако извести да постоји бесконачно много јаких бројева. Наиме, ако је број  $m$  јак, нађимо најмање  $m' > m$  тако да је  $a_m < a_{m'}$ . Тада је и број  $m'$  очигледно јак.

Дакле, нека је  $n$  произвољан природан број. За сваки његов делилац  $d$  важи да  $2d \mid 2n$ . Како, осим тога, тривијално важи да  $1 \mid 2n$ , добијамо неједнакост



$$\sigma(2n) \geq 2\sigma(n) + 1$$

Одавде дељењем са  $2n$  одмах следи  $a_{2n} > a_n$  па добијамо тражени резултат.

### • Дупли бројеви [3]

Предлог за Међународну Математичку Олимпијаду, 1988., Велика Британија:

*Природан број је дупли ако се његов декадни запис састоји од два идентична блока цифара. Доказати да међу дуплим бројевима постоји бесконачно много потпуних квадрата.*

*Решење:* Нека је  $2k$  број цифара дуплог броја који се састоји од два блока  $a$ . Тврђење задатка је сада еквивалентно томе да једначина

$$a(10^k + 1) = b^2$$

има бесконачно много решења  $(a, b, k)$  таквих да  $a$  има тачно  $k$  цифара, тј.

$$10^{k-1} \leq a < 10^k$$

План решења је следећи:

најпре ћемо за погодне вредности  $k$  (којих ће бити бесконачно много) наћи по једно решење  $(a_1, b_1, k)$  једначине  $a(10^k + 1) = b^2$  тако да  $a_1$  има не више од  $k$  цифара,  $a_1 < 10^k$ . Након тога, на основу примедбе да је тада решење и  $(n^2 a_1, nb_1, k)$  за све  $n \in \mathbb{N}$ , одабраћемо  $n_0 \in \mathbb{N}$  тако да за  $a = n_0^2 a_1$  важе тражена ограничења  $10^{k-1} \leq a < 10^k$ .

Наравно, ако посматрамо горњу једначину  $a(10^k + 1) = b^2$  без икаквих ограничења,  $a = 10^k + 1$  јесте једно очигледно решење. Како бисмо постигли први од постављених циљева (решење у коме је  $a < 10^k$ ), довољно је да пронађемо бесконачно много вредности  $k$  за које је број  $10^k + 1$  дељив потпуним квадратом  $d^2 > 1$ . Тада ће, наиме,

$$a_1 = \frac{10^k + 1}{d^2}, \quad b_1 = \frac{10^k + 1}{d}$$

представљати решење разматране једначине.

Најпре, уочавамо да је

$$10^3 + 1 = (10 + 1)(10^2 - 10 + 1) = 11 \cdot 91,$$

тј. важи да је  $10^3 = -1 + 11c$  (за  $c = 91$ ).

Сада је идеја да се на основу ове релације добије степен од 10 који даје остатак -1 при дељењу са  $11^2$ . То ћемо постићи ако степењујемо последњу једнакост са 11, јер тада из биномног обрасца имамо:

$$10^{33} = (-1 + 11c)^{11} = -1 + \binom{11}{1} 11c - \binom{11}{2} 11^2 c^2 + \dots = -1 + 11^2 c', \text{ за неко } c' \in \mathbb{N}.$$

Отуда је

$$10^{33(2m-1)} \equiv -1 \pmod{11^2},$$

за све  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{односно } 121 \mid (10^{66m-33} + 1).$$

То значи да је  $k = 66m - 33$  и  $d = 11$  погодан избор, па за сваку вредност  $m$  имамо по једно решење једначине  $a(10^k + 1) = b^2$  као у претходном пасусу.

Најзад, преостаје да се пронађе  $n_0 \in \mathbb{N}$  тако да важи

$$10^{k-1} \leq n_0^2 \frac{10^k + 1}{11^2} < 10^k$$

где је  $k$  облика  $66m - 33$ . Очигледно, горње неједнакости су еквивалентне са

$$\frac{10^{k-1}}{10^k + 1} \leq \left(\frac{n_0}{11}\right)^2 < \frac{10^k}{10^k + 1}$$

Ове неједнакости ће бити испуњене за све  $k \in \mathbb{N}$  уколико је

$$\frac{1}{10} \leq \left(\frac{n_0}{11}\right)^2 < \frac{10}{11},$$

што важи за све  $n_0 \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

Резимирајући, показали смо да је за све  $m \in \mathbb{N}$  дупли број који се састоји из два блока

$$a = \frac{16}{121}(10^{66m-33} + 1)$$

потпун квадрат (овде смо узели  $n_0 = 4$ ), па је задатак решен.

### • **Добри бројеви** [3]

Такмичење у САД, 1978.

*Број  $n$  је добар ако се може представити као збир (не обавезно различитих) природних бројева чији је збир реципрочних вредности једнак 1. Ако је познато да су бројеви 33, ..., 73 добри, доказати да су сви бројеви  $\geq 33$  добри.*

*Решење:* Нека је  $n$  добар број, при чему је за неке природне бројеве  $a_i$  испуњено:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = n, \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} = 1$$

Тада је

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \dots + \frac{1}{2a_k} = \frac{1}{2}$$

па због  $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$  низови

$(4, 4, 2a_1, \dots, 2a_k)$  и  $(3, 6, 2a_1, \dots, 2a_k)$

имају збир реципрочних вредности 1. Отуда добијамо да су бројеви  $2n + 8$  и  $2n + 9$  такође добри. Међутим,  $2 \cdot 33 + 8 = 74$  и  $2 \cdot 33 + 9 = 75$ , па једноставном применом индукције добијамо, на основу дате хипотезе, да су сви бројеви  $\geq 33$  добри.

### • Лоши бројеви [3]

Задатак на такмичењу у Чехословачкој, 1988.

Означимо са  $S(n)$  збир цифара природног броја  $n$  у декадном запису. Број  $m$  зовемо лошим ако се не може представити у облику

$$m = n + S(n).$$

Колико има лоших бројева – коначно или бесконачно много?

*Решење:* Доказаћемо да постоји бесконачно много лоших бројева. Идеја решења се састоји у томе да се конструише низ природних бројева  $a_n$ ,  $n \geq 1$ , повезаних погодном рекурентном релацијом која ће обезбедити да сви чланови низа буду лоши. С обзиром на формулацију задатка, биће веома погодно да сви чланови низа имају различит број цифара у декадном запису: тачније,  $a_n$  ће имати  $n + 1$  цифру.

Најпре, непосредно се проверава да је број 20 лош, па дефинишемо  $a_1 = 20$ .

Пођимо од претпоставке да смо успели да нађемо лоше бројеве  $a_1, \dots, a_{n-1}$  у складу са горњим условима. Наш циљ је да конструишемо  $(n + 1)$  – цифрени лош број  $a_n$ . Да бисмо то постигли, морамо да спречимо да једнакост  $a_n = k + S(k)$  буде испуњена за било које  $k \in \mathbb{N}$ . Размотрићемо посебно случајеве када  $k$  има не више  $n$  од цифара, односно када  $k$  има тачно  $n + 1$  цифру.

У првом случају је  $k \leq 10^n - 1$ . Тада је  $S(k) \leq 9n$ , па следи  $k + S(k) \leq 10^n + 9n - 1$ . Према томе, уколико (одговарајућом рекурентном релацијом) обезбедимо да важи

$$a_n > 10^n + 9n - 1,$$

тада ће разматрани случај бити немогућ.

Други случај наступа када је  $k \geq 10^n$ . Тада можемо писати  $k = c \cdot 10^n + \alpha$ , где је  $c$  прва цифра од  $k$  и  $\alpha \leq 10^n - 1$ . При томе је  $S(k) = S(\alpha) + c$  тј.

$$k + S(k) = c \cdot 10^n + \alpha + S(\alpha) + c$$

Горња једнакост сугерише да се (за неко фиксно  $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ ) за тражену рекурентну везу узме

$$a_n = a_{n-1} + c(10^n + 1),$$

јер тада из претпоставке да је  $a_n = k + S(k)$  следи да је  $a_{n-1} = \alpha + S(\alpha)$ , што омогућава да се заокружи индуктивни доказ.

Показаћемо да су за  $c = 1$  испуњени сви тражени услови. Дакле, разматрамо рекурентну релацију

$$a_n = a_{n-1} + 10^n + 1,$$

при чему је  $a_1 = 20$ . Индукцијом доказујемо да су сви чланови овако дефинисаног низа лоши.

Прво уочавамо да важи неједнакост  $a_n > 10^n + 9n - 1$ . Наиме, очигледно имамо:

$$a_r = a_{r-1} + 10^r + 1 > 10^r$$

због чега је (за  $n \geq 3$ ):

$$a_n = a_{n-1} + 10^n + 1 > 10^n + 10^{n-1} > 10^n + 9n - 1.$$

За  $n = 1, 2$  се поменута неједнакост проверава директно. Дакле, ако би било  $a_n = k + S(k)$  тада мора бити  $k \geq 10^n$  (штавише, за случај  $k = 10^n$  се лако види да је немогућ).

С друге стране, важи  $a_n < 2 \cdot 10^n$ , што добијамо непосредном применом индукције на  $a_n = a_{n-1} + 10^n + 1$ . Како из једнакости  $a_n = k + S(k)$  следи да је  $k < a_n$ , добијамо да је прва цифра броја  $k$  једнака 1. Сада из горњих разматрања имамо да је

$$k + S(k) = \alpha + S(\alpha) + 10^n + 1,$$

где је  $k = 10^n + \alpha$ , па претпоставка да је  $a_n = k + S(k)$  повлачи  $a_{n-1} = \alpha + S(\alpha)$ . Пошто је последња једнакост по индуктивној претпоставци немогућа, следи да се ни  $a_n$  не може представити у облику  $k + S(k)$ , тј.  $a_n$  је лош број.

### • Мирисни бројеви [18]

Задатак са Међународне математичке олимпијаде одржане у Кини 2016. године (8. разред основне школе):

*Скуп природних бројева зовемо мирисним ако садржи бар два елемента и сваки његов елемент има заједнички прост делилац са бар једним од преосталих. Означимо  $P(n) = n^2 + n + 1$ . Која је најмања могућа вредност природног броја  $b$  за коју постоји негативан цео број  $a$  такав да је скуп  $\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$  мирисан?*

*Решење:* За почетак, приметимо да је  $P(n)$  непарно за  $n \in \mathbb{N}$ .

Даље, ако прост број  $p > k$  дели  $P(n)$  и  $P(n + k)$ , онда дели и  $P(n + k) - P(n) = k \cdot (2n + k + 1)$ , па је  $2n \equiv -k - 1 \pmod{p}$  и одатле следи да је  $4P(n) \equiv (k + 1)^2 - 2(k + 1) + 4 = k^2 + 3 \pmod{p}$ , односно  $p \mid k^2 + 3$ .

Према томе:

- $(P(n), P(n + 1)) = 1$
- $(P(n), P(n + 2)) \in \{1, 7\}$ , и при томе  $(P(n), P(n + 2)) = 7 \Leftrightarrow n \equiv 2 \pmod{7}$
- $(P(n), P(n + 3)) \in \{1, 3\}$ , и при томе  $(P(n), P(n + 3)) = 3 \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{3}$
- $(P(n), P(n + 4)) \in \{1, 19\}$ , и при томе  $(P(n), P(n + 4)) = 19 \Leftrightarrow n \equiv 7 \pmod{19}$

Пример мирисног скупа за  $b = 6$  може да се добије узимањем броја  $a$  тако да је  $a \equiv 2 \pmod{3}$ ,  $a \equiv 6 \pmod{7}$  и  $a \equiv 5 \pmod{19}$  – што се своди на  $a \equiv 62 \pmod{399}$  – јер тада  $3 \mid P(a + 1), P(a + 4)$ ,  $7 \mid P(a + 3), P(a + 5)$  и  $19 \mid P(a + 2), P(a + 6)$ .

Претпоставимо сада да постоји мирисан скуп за  $b < 6$ .

Како је  $P(a + 2)$  узајамно просто са  $P(a + 1)$  и  $P(a + 3)$  следи да мора бити  $b \geq 4$ . Даље,  $P(a + 3)$  је узајамно просто са  $P(a + 2)$  и  $P(a + 4)$ , па мора бити и  $(P(a + 3), P(a + 1)) > 1$ .

Случај  $(P(a + 3), P(a + 5)) > 1$  је аналоган.

Дакле,  $a \equiv 1 \pmod{7}$ , али тада  $(P(a + 2), P(a + 4)) = 1$ .

Зато  $P(a + 2)$  и  $P(a + 4)$  могу да имају заједнички прост делилац само са  $P(a + 5)$  и  $P(a + 1)$  редом, али тада би морало да важи и да  $3 \mid a + 1, a + 2$  што је немогуће.

## 5.2. БРОЈЕВИ КРОЗ ИСТОРИЈУ

### • Вампирски бројеви

Вампирски бројеви су умношци два броја – предака, који након множења преживе помешани један с другим у вампирском броју. На пример:

$$\begin{array}{ll} 27 \cdot 81 = 2187 & 15 \cdot 93 = 1395 \\ 41 \cdot 35 = 1435 & 30 \cdot 51 = 1530 \\ 21 \cdot 60 = 1260 & 80 \cdot 86 = 6880 \end{array}$$

Наравно има и много већих вампирских бројева, рецимо

$$1234554321 \cdot 9162361086 = 11311432469283552606$$

- **Недодирљиви бројеви**

Недодирљив број је број који никада није збир фактора било ког другог броја. посебно, недодирљив број никада није збир правих делитеља било ког другог броја. Првих неколико недодирљивих бројева су:

$$2, 5, 52, 88, 96, 120, 124, 146, \dots$$

Чувени мађарски математичар Paul Erdos је доказао да постоји бесконачно много недодирљивих бројева.

- **Приступачни бројеви**

Приступачан број је цео број који се може начинити од целих бројева  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$  и множењем и сабирањем тако да је

$$\sum_{i=1}^k m_i = \prod_{i=1}^k m_i.$$

Ево неколико примера:

$$2 + 2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$1 + 1 + 2 + 4 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$$

Више информација о приступачним бројевима може се наћи у чланку „Problem 10454“ Harryja Tamvakisa у *The American Mathematical Monthly* 102 (1995): 463.

- **Супер-сложени бројеви**

Супер-сложен број дефинисао је Рамануџан – то је природан број који је рекордер по броју делилаца, тј. има више делилаца него било који природан број мањи од њега.

На пример, низ супер-сложених бројева почиње овако: 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 240, ... Познато је да супер-сложених бројева мањих од  $10^6$  има 37. Највећи супер-сложен број мањи од  $10^9$  је 735134400.

- **Ексцентрични бројеви**

Ексцентричан број је број који је мањи од збира својих правих делилаца. Најмањи ексцентричан број је 70. Мађарски математичар Пал Ердеш је 1971. године нудио новчану награду ономе ко нађе бар један непаран ексцентричан број

- **Аутоморфни бројеви**

Број  $a$  је аутоморфан ако се запис његовог квадрата завршава бројем  $a$ . Рецимо, бројеви 25 и 90625 су аутоморфни јер је  $25^2 = 625$  и  $90625^2 = 8212890625$ .

## • Ђаволски број 666

Michael Stifel (1486 – 1567) је био највећи немачки алгебриста шеснаестог века, најпознатији по свом делу *Arithmetica integra* (1544). Био је склон сензацијама. Између осталог је извео следећи низ мистичних закључивања:

1. Латинско име папе Lea X је Leo Decimus.

2. Ово се може написати као Leo De CIM Vs, где су велика слова L, D, C, I, M, V наглашена као цифре римског бројног система ( $M = 1000$ ,  $D = 500$ ,  $C = 100$ ,  $L = 50$ ,  $X = 10$ ,  $V = 5$ ,  $I = 1$ ).

3. Ова слова се могу преуредити у опадајућем низу: MDCLVI

4. Затим је Stifel додао X иза L (за Leo X) а изоставио M, јер оно означава Мистерију, и на тај начин добио DCLXVI (6 римских бројева у редоследу од највећег ка најмањем) што је римски запис броја 666.

Тако је Stifel добио „ђаволски број“ 666 из Књиге откровења (последња књига Новог Завета), „доказавши“ на тај начин да је Leo X ђаво. Отуда у народу назив за број 666999 – зло и наопако.

Stifel је сматрао да је његово откриће резултат надахнућа које је добио од Бога.

Ђаволски број има следеће интересантне карактеристике:

$$666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2$$

(збир квадрата првих 7 простих бројева)

$$666 = 6 + 6 + 6 + 6^3 + 6^3 + 6^3$$

$$666 = 1^6 - 2^6 + 3^6$$

$$666^2 = (6 \cdot 6 \cdot 6)^2 + (666 - 6 \cdot 6)^2$$

(Питагорина тројка (216, 630, 666) записана помоћу шестица)

$$666 = 1 + 2 + 3 + 4 + 567 + 89 = 123 + 456 + 78 + 9$$

(Убацивање знака „+“ у низ 123456789 даје 666)

$$666 + 666 + 666 + 6 + 6 + 6 = 2016$$

## Закључак

Неистражене особине природних бројева су одувек привлачиле математичаре, и не само њих. Интересантно је која све својства поседују природни бројеви, а у овом раду су наведена само нека од њих. Осим занимљивих назива који су давани тим бројевима, неки бројеви носе назив и према самим математичарима који су их открили.

Давно су прошла времена када се за теорију бројева сматрало да нема својих примена у пракси. Данас знамо да се она примењује практично у свим областима науке и уметности.

Теорија бројева представља и неисцрпан извор материјала за рад са даровитим ученицима. Осим разноврсних тема и интересантних задатака, пружа и велики избор занимљивости које могу привући и оне ученике који нису наклоњени математици.



# Додатак

Додатак уз страну 15.

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Уводни део часа:</b></p> | <p>Поновити шта је делилац неког броја.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <p><b>Главни део часа:</b></p> | <p>Како су ученици већ научили да одреде скуп делилаца неког природног броја, можемо захтевати од њих да одреде скупове делилаца бројева прве десетице. Не рачунајући скуп делиоца броја 1, неки скупови имају по два елемента, а неки више од два. На тај начин и уводимо просте и сложене бројеве (бројеви који имају тачно два делиоца и бројеви који имају више од два делиоца).</p> <p><i>Природан број који има тачно два делиоца: број 1 и сам тај број, назива се прост број. Природан број који има више од два делиоца назива се сложен број.</i></p> <p>Наглашавамо да број 1 није ни прост ни сложен, а да је број 2 једини паран прост број, што ће бити основа за решавање многих задатака, нарочито на додатној настави из математике.</p> <p><i>Примери:</i><br/> 1) Наведи све просте бројеве мање од 30.<br/> 2) Дат је скуп <math>A = \{7, 9, 20, 31, 47, 50, 56, 60, 71, 100, 121\}</math>. Написати елементе скупова <math>P</math> и <math>S</math> ако је:<br/> <math>P = \{x \mid x \in A \text{ и } x \text{ је прост број}\}</math>, <math>S = \{x \mid x \in A \text{ и } x \text{ је сложен број}\}</math>.</p> <p>Даље дефинишемо узајамно просте бројеве.</p> <p><i>За два броја кажемо да су узајамно прости ако је њихов највећи заједнички делилац једнак 1.</i><br/> <i>Пример:</i><br/> <i>Провери да ли су следећи бројеви узајамно прости:</i><br/> а) 5 и 7   б) 12 и 15   в) 17 и 19   г) 27 и 35   д) 25 и 50</p> <p>После дефинисања узајамно простих бројева ученицима треба указати на разлику између простих и узајамно простих бројева (да два сложена броја могу бити узајамно проста).</p> <p><i>Напомена: Треба разликовати појмове „прости бројеви“ и „узајамно прости бројеви“. Пример: Бројеви 11 и 13 су прости бројеви, а уједно и узајамно прости јер је <math>НЗД(11, 13) = 1</math>. Али, бројеви 15 и 16 нису прости, али јесу узајамно прости.</i></p> |

|                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                          | <p>Задаци за самосталан рад:</p> <p><b>1)</b> Од елемената скупа <math>\{2, 3, 5, 7\}</math> образуј све двоцифрене просте бројеве.</p> <p><b>2)</b> Нађи све а) просте б) сложене бројеве који су делиоци броја 210</p> <p><b>3)</b> Нађи два сложене троцифрена броја који су узајамно прости</p> <p><b>4)</b> Нађи по један прост и један сложен број, такве да су: а) њихов збир и разлика прости бројеви; б) њихов збир и разлика сложени бројеви.</p>                                                                                                          |
| <b>Завршни део часа:</b> | <p>Домаћи задаци:</p> <p><b>1)</b> Напиши све двоцифрене просте бројеве</p> <p><b>2)</b> У скупу првих 30 природних бројева нађи све бројеве који су сложени</p> <p><b>3)</b> Која реченица је тачна а која нетачна:</p> <p>а) Сви прости бројеви су непарни</p> <p>б) Сви парни бројеви су сложени</p> <p>в) Постоји паран прост број</p> <p>г) Постоји број који није ни прост ни сложен</p> <p><b>4)</b> Наведи 5 парова узајамно простих бројева</p> <p><b>5)</b> Нађи по један прост и један сложен број такве да је њихов збир прост а разлика сложен број</p> |

Табела 4: Структура једног школског часа

# *Литература*

- [1] М. Анђић, „Увод у теорију бројева – теорија и примјери“, Графо Црна Гора д.о.о., Подгорица, 2004.
- [2] Р. Тошић, В. Вукославчевић, „Елементи теорије бројева“, Алеф – Агенција за издавачку и образовну делатност, Нови Сад, 1995.
- [3] И. Долинка, „Елементарна теорија бројева - Моји омиљени задаци“, Друштво математичара Србије, Београд, 2007.
- [4] Б. Шешеља, А. Тепавчевић, „Алгебра 1“, Природно-математички факултет, Нови Сад, 2004.
- [5] Clifford A. Pickover, „Страст за математиком“, Извори, Загреб, 2012.
- [6] Д. Машуловић, „Одабране теме дискретне математике“, Природно-математички факултет, Нови Сад, 2007.
- [7] М. Станић, Н. Икодиновић, „Теорија бројева, збирка задатака“, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2004.
- [8] Републичко такмичење младих математичара, Друштво математичара Србије, Београд, 2004.
- [9] Републичко такмичење младих математичара, Друштво математичара Србије, Врњачка Бања, 2005.
- [10] Математички лист XLVII - 1, Друштво Математичара Србије, Београд, 2012.
- [11] Математички лист XLVIII - 5, Друштво Математичара Србије, Београд, 2014.
- [12] Математички лист XLIX - 1, Друштво Математичара Србије, Београд, 2014.
- [13] Математички лист LI - 2, Друштво Математичара Србије, Београд, 2016.
- [14] Ј. Милојковић, „Златни пресек“, Мастер рад, Математички факултет, Београд, 2009.
- [15] Ј. Бабић, „Catalanovi бројеви“, Дипломски рад, Свеучилиште у Загребу, Загреб, 2016.
- [16] Ђ. Такачи, Д. Пешић, Ј. Татар, „Процес математичког моделирања у настави математике“, Нови Сад, 2011.
- [17] <http://www.opsteobrazovanje.in.rs/matematika/>
- [18] <http://www.dmi.uns.ac.rs/>
- [19] <http://www.dms.org.rs/>
- [20] Journal of Recreational Math (19, бр. 2: 142-43)

## Биографија



Владимир Голуб рођен је у Новом Саду, 4. фебруара 1987. године. Основну школу „Браћа Новаков“ у Силбашу завршава 2002. године као носилац Вукове дипломе. Исте године уписује општи смер гимназије „Јан Колар“ у Бачком Петровцу. Године 2006. завршава гимназију као носилац Вукове дипломе и уписује основне академске студије на Природно-математичком факултету у Новом Саду, департман за математику и информатику, смер Дипломирани професор математике, а након тога и мастер академске студије на истом факултету, смер Мастер професор математике. На мастер студијама је положио све испите предвиђене планом и програмом, чиме је стекао услов за одбрану овог мастер рада.

Владимир Голуб

Нови Сад, јул 2017.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ  
ПРИРОДНО – МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ  
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:

**РБР**

Идентификациони број:

**ИБР**

Тип документације: Монографска документација

**ТД**

Тип записа: Текстуални штампани материјал

**ТЗ**

Врста рада: Мастер рад

**ВР**

Аутор: Владимир Голуб

**АУ**

Ментор: др Петар Ђапић

**МН**

Наслов рада: Свет бројева

**МР**

Језик публикације: Српски (ћирилица)

**ЈП**

Језик извода: српски/енглески

**ЈИ**

Земља публиковања: Република Србија

**ЗП**

Уже географско поглавље: Војводина

**УГП**

Година: 2017.

**ГО**

Издавач: Ауторски репринт

**ИЗ**

Место и адреса: Природно-математички факултет, Департман за математику и информатику, Трг Доситеја Обрадовића 4, Нови Сад

**МА**

Физички опис рада: 5 поглавља/104 стране/15 слика/4 табеле/20 литература

**ФО**

Научна област: Математика

**НО**

Научна дисциплина: Методика наставе математике

**НД**

Кључне речи: прости бројеви, математика, основна школа

**ПО**

**УДК**

Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду

**ЧУ**

Важна напомена:

**ВН**

Извод: У овом мастер раду је описан широк спектар бројева са специфичним особинама које се могу објаснити у вишим разредима основне школе. Почев од Фермаових и Мерсенових бројева преко савршених, пријатељских, палиндромних, Каталанових, Фибоначијевих, Лукасових, цикличких и Кармајклових бројева, па све до великих бројева као што је Грахамов број. Осим тога, дат је осврт на бројевне системе и прикупљен велики избор задатака са математичких такмичења, а у којима су бројевима са специфичним особинама дати интересантни називи. Прича о бројевима је такође илустрована сетом задатака за по један двочас додатне наставе у сваком разреду и избором задатака за самостални рад ученика.

**ИЗ**

Датум прихватања теме од НН већа: 08.06.2017

**ДП**

Датум одбране:

**ДО**

Чланови комисије:

**КО**

Председник: др Ивица Бошњак, ванредни професор Природно-математичког факултета, Универзитета у Новом Саду

Ментор: др Петар Ђапић, доцент Природно-математичког факултета, Универзитета у Новом Саду

Члан: др Синиша Црвенковић, редовни професор Природно-математичког факултета, Универзитета у Новом Саду

Члан: др Маја Пех, ванредни професор Природно-математичког факултета, Универзитета у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF SCIENCE  
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

**ANO**

Identification number:

**INO**

Document type: Monograph type

**DT**

Type of record: Printed text

**TR**

Contents Code: Master's thesis

**CC**

Author: Vladimir Golub

**AU**

Mentor: Petar Đapić, Ph. D.

**MN**

Title: The world of numbers

**TI**

Language of text: Serbian (Cyrilic)

**LT**

Language of abstract: English

**LA**

Country of publication: Republic of Serbia

**CP**

Locality of publication: Vojvodina

**LP**

Publication year: 2017.

**PY**

Publisher: Author's reprint

**PU**

Publ.place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, Trg  
Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

**PP**

Physical description: : 5 chapters/104 pages/15 pictures/4 tables/20 references

**PD**

Scientific field: Mathematics

**SF**

Scientific discipline: Teaching Methods in  
Mathematics  
**SD**

Key words: prime numbers, mathematics, elementary school  
**KW**

Holding data: Library of Department of Mathematics and Informatics, Faculty of  
Science, University of Novi Sad

**HD**

Note:  
**N**

Abstract: This master's paper describes a wide range of numbers with specific properties that can be explained in higher grades of Elementary School. Starting from Fermat and Mersenne numbers, through the perfect, friendly, palindromic, Catalan, Fibonacci, Lucas, Cyclic and Carmichael numbers, all the way to large numbers such as Graham's number. Besides that, there is also review on number systems and gathered big number of assignments from mathematic competitions in which numbers with specific properties were given interesting names. Story about numbers is also illustrated with set of assignment for two school classes for extra hours in every class and choice of assignments for independent student work.

**AB**

Accepted by the Scientific Board on: 08.06.2017  
**ASB**

Defended:  
**DE**

Thesis defend board:  
**DB**

President: Ivica Bošnjak PhD, associate professor, Faculty of Science,  
University of Novi Sad

Member: Petar Đapić PhD, docent, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Siniša Crvenković PhD, full professor, Faculty of Science, University  
of Novi Sad

Member: Maja Pech PhD, associate professor, Faculty of Science, University  
of Novi Sad