



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU



Teodora Savić Popović

Prostiranje talasa u viskoelastičnim sredinama

- master rad -

Novi Sad, 2019.

Predgovor

U ovom radu su predstavljene talasne jednačine kojima se opisuje prostiranje poremećaja u viskoelastičnim sredinama, kao i postupak kojim se dolazi do tih jednačina. U prvom poglavlju uvodimo potreban matematički alat za razumevanje rada, koji obuhvata integralne transformacije i frakcione izvode i integrale. U drugom poglavlju opisujemo tri jednačine (konstitutivnu, geometrijsku i dinamičku*) u cilju dobijanja talasne jednačine. Posebnu pažnju posvećujemo konstitutivnoj jednačini, kojom se opisuje svojstvo materijala i kojom se modelira viskoelastičnost. U trećem poglavlju prikazujemo klasične modele viskoelastičnosti, poput Vojtovog ili Maksvelovog, i opisujemo frakcioni Zenerov model. U četvrtom poglavlju predstavimo izvođenje talasnih jednačina u klasičnim modelima i frakcionog Zenerovom modelu.

Ovde bih iskoristila priliku da se zahvalim dr Ljubici Oparnici, što me je inspirisala frakcionim računom i time podstakla da odaberem ovu temu za master rad.

Veliku zahvalnost dugujem dr Dušanu Zorici, koji mi je dao dosta korisnih saveta i predloga, kao i smernica oko literature.

Takođe, zahvalila bih se svom mentoru, dr Sanji Konjik, na ogromnom strpljenju i pomoći.

*Dinamička jednačina se još naziva i jednačinom kretanja.

Sadržaj

1 Matematički alati	1
1.1 Prostori distribucija	1
1.2 Konvolucija	2
1.3 Frakcioni integrali i izvodi	6
1.4 Laplasova transformacija	13
1.5 Furijeova transformacija	16
2 Elementi mehanike kontinuuma	17
2.1 Geometrijska jednačina i tenzor deformacije	17
2.2 Jednačina kretanja i tenzor napona	18
2.3 Konstitutivna jednačina	22
2.3.1 Puzanje	23
2.3.2 Relaksacija napona	24
2.4 Matematička postavka konstitutivne jednačine	24
2.5 Diferencijalna forma konstitutivne jednačine	27
3 Viskoelastični modeli i konstitutivne jednačine	33
3.1 Klasični modeli	33
3.1.1 Hukov model	33
3.1.2 Njutnov model	33
3.1.3 Vojtov model	34
3.1.4 Maksvelov model	35
3.1.5 Zenerov model	35
3.2 Frakcioni modeli	36
4 Prostiranje talasa	38
4.1 Slučaj klasičnih modela	39
4.2 Frakcioni Zenerov model	41
Zaključak	45
Literatura	46
Biografija	47

1 Matematički alati

U ovom poglavlju, u cilju dobijanja talasnih jednačina viskoelastičnih materijala, uvodimo osnovne pojmove teorije distribucija, integralnih operatora (konvolucija, Laplasova i Furijeova transformacija) i frakcionih izvoda i integrala.

Napominjeno da sa $C^n(\Omega)$ označavamo klasu n -puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na otvorenom skupu $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}$. Ako je funkcija f glatka (beskonačno diferencijabilna) na Ω , pišemo $f \in C^\infty(\Omega)$. U slučaju da glatka funkcija f ima kompaktan nosač[†] na $\Omega \subset \mathbb{R}$, pišemo $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Takođe, za operator L definisan na normiranom vektorskom prostoru V , kažemo da je neprekidna linearna funkcionala, ako važi:

$$L : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ i } L(ax + by) = aL(x) + bL(y), \text{ za svako } x, y \in V \text{ i za svako } a, b \in \mathbb{R}.$$

Uvedimo sada pojam prostora distribucija tj. uopštenih funkcija.

1.1 Prostori distribucija

Kako ćemo u ovom poglavlju, a i kasnije u radu, dolaziti u dodir sa uopštenim funkcijama, navešćemo samo osnovne definicije test funkcija, distribucije i slabog izvoda, a za detaljnije objašnjenje tih pojmova upućujemo čitaoca na [PIL].

Definicija 1.1. (Prostor test funkcija) *Neka je Ω otvoren i neprazan podskup skupa realnih brojeva, tada skup:*

$$D(\Omega) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega) : \text{supp } \varphi \text{ je kompaktan}\}$$

nazivamo prostorom test funkcija na Ω .

Ubuduće ćemo sa Ω uvek označavati otvoren i neprazan podskup skupa realnih brojeva. Sada možemo uvesti pojam distribucije ili uopštene funkcije.

Definicija 1.2. (Prostor ditribucija) *Neprekidna linearna funkcionala nad prostorom $D(\Omega)$ naziva se distribucija, u oznaci $D'(\Omega)$. Dakle, distribucije preslikavaju $D(\Omega)$ u \mathbb{R} , što označavamo sa*

$$f : \phi \mapsto \langle f, \phi \rangle, \quad \phi \in D(\Omega).$$

Da bismo naveli jedan od osnovnih primera distribucija, *regularnu distribuciju*, treba da definišemo prostor lokalno integrabilnih funkcija:

$$L_{loc}^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_K |f| dx < \infty, \text{ za svaki kompaktan skup } K \subset \mathbb{R} \right\}.$$

Primer 1.1. (Regularna distribucija) *Neka je $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$. Funkcionala definisana sa*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x) dx$$

je element iz $D'(\mathbb{R})$ i nazivamo je regularnom distribucijom.

Javlja se prirodno pitanje, da li se može definisati izvod distribucije? Umesto odgovora uvodimo pojam *slabog izvoda* ili *izvoda distribucije*.

Definicija 1.3. (Izvod distribucije) *Neka je $f \in D'(\Omega)$. Distribucionni izvod n -tog reda funkcionele f definišemo na sledeći način:*

$$\left\langle \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x), \phi(x) \right\rangle := (-1)^n \left\langle f(x), \frac{\partial^n}{\partial x^n} \phi(x) \right\rangle, \quad \phi \in D(\Omega).$$

[†]Nosač funkcije f na Ω definišemo kao zatvaranje skupa $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ i označavamo sa $\text{supp } f$. Primitimo da je nosač funkcije kompaktan u Ω ako i samo ako je ograničen u Ω .

Primer 1.2. Neka je f diferencijabilna funkcija i neka $\varphi \in D(\Omega)$. Izvod regularne distribucije definisanom funkcijom f ima sledeći oblik:

$$-\int_R f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} dx = -f(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_R \frac{\partial f(x)}{\partial x} \varphi(x) dx = \left\langle \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \varphi \right\rangle.$$

Uvedimo sada pojmove Hevisajd funkcije i Dirakove δ -distribucije.

Definicija 1.4. (Hevisajd funkcija i Dirakova δ -distribucija) Sa H označavamo Hevisajd funkciju:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ 1, & x \in [0, \infty). \end{cases}$$

Izvod (u slabom smislu) Hevisajd funkcije nazivamo Dirakovom δ -distribucijom i označavamo sa δ . Delovanje δ na test funkciju φ definišemo na sledeći način: $\langle \delta(x - x_0), \varphi(x) \rangle = \varphi(x_0)$.

Da je prethodna definicija Dirakove δ -distribucije tačna, pokazujemo sledećim primerom.

Primer 1.3. (Izvod Hevisajd funkcije) Izvod distribucije koju definiše Hevisajd funkcije je Dirakova δ -distribucija. Primetimo da za svako $\phi \in D(\Omega)$ važi

$$\langle h'(x), \phi(x) \rangle = -\langle h(x), \phi'(x) \rangle = \int_0^{\infty} \phi'(x) dx = \phi(0) = \langle \delta(x), \phi(x) \rangle$$

Primer 1.4. (Izvod δ -distribucije) Ako primenimo distribicioni izvod n -tog reda na δ -distribuciju, dobijamo:

$$\left\langle \frac{\partial^n \delta(x - x_0)}{\partial x^n}, \phi(x) \right\rangle = (-1)^n \left\langle \delta(x - x_0), \frac{\partial^n \phi(x)}{\partial x^n} \right\rangle = (-1)^n \frac{\partial^n \phi(x_0)}{\partial x^n},$$

gde je $\phi \in D(\Omega)$.

U daljem radu ćemo delovanje δ -distribucije na test funkciju ϕ označavati: $\delta(x - x_0) \cdot \phi(x) = \phi(x_0)$.

1.2 Konvolucija

Da bismo definisali konstitutivnu jednačinu viskoelastičnih materijala potrebno je da uvedemo operator konvolucije, ali pre toga objasnimo pojam Riman-Stiltjesovog integrala.

Definicija 1.5. (Riman-Stiltjesova suma) Neka su f i g realne funkcije definisane na segmentu $[a, b]$, a neka je $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ particija tog segmenta. Tada sumu:

$$S(P, f, g) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta g_k,$$

gde je $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, a $\Delta g_k = g(x_k) - g(x_{k-1})$, nazivamo Riman-Stiltjesovom sumom funkcije f u odnosu na funkciju g .

Sada kada smo uveli pojam Riman-Stiltjesove sume, definišimo Riman-Stiltjesov integral.

Definicija 1.6. (Riman-Stiltjesov integral) Ako postoji A takvo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji particija P_ε segmenta $[a, b]$ takva da za proizvoljno $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ važi:

$$|S(P_\varepsilon, f, g) - A| < \varepsilon,$$

kažemo da je f Riman integrabilna u odnosu na g na segmentu $[a, b]$ i pišemo $f \in R(g)$ na $[a, b]$. Broj A nazivamo Riman-Stiltjesovim integralom i označavamo sa $\int_a^b f(x) dg$.

Ako je funkcija g neprekidno diferencijalna na $[a, b]$ Riman-Stiltjesov integral možemo izraziti preko Rimanovog integrala.

Teorema 1.1. (Veza između Rimanovog i Riman-Stiltjesovog integrala) *Neka je $f \in R(g)$ na skupu $[a, b]$ i neka $g \in C^1([a, b])$, tada*

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \int_a^b f(t) \dot{g}(t) dt.$$

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [APO], teorema 7.8, str. 146.

Pre nego što definišemo *Stiltjesovu konvoluciju* preko Riman-Stiltjesovog integrala, dajemo definiciju *Rimanove konvolucije*.

Definicija 1.7. (Rimanova konvolucija) *Neka su φ i ψ funkcije definisane na poluintervalu $[0, \infty)$ i neka Rimanov integral*

$$\kappa(t) = \int_0^t \varphi(t - \tau) \psi(\tau) d\tau \quad (1)$$

postoji za svako $t \in [0, \infty)$. Tada se funkcija κ , definisana na $[0, \infty)$, naziva Rimanovom konvolucijom funkcija φ i ψ . Takođe, koristimo i sledeću notaciju

$$\kappa = \varphi * \psi.$$

Teorema 1.2. (Osobine Rimanove konvolucije) *Neka funkcije φ, ψ i ω pripadaju klasi $C^0[0, \infty)$. Tada:*

- (a) $\varphi * \psi \in C^0[0, \infty)$;
- (b) $\varphi * \psi = \psi * \varphi$ (komutativnost);
- (c) $\varphi * (\psi * \omega) = (\varphi * \psi) * \omega$ (asocijativnost);
- (d) $\varphi * (\psi + \omega) = \varphi * \psi + \varphi * \omega$ (distributivnost);
- (e) $\varphi * \psi \equiv 0$ implicira da $\varphi \equiv 0$ ili $\psi \equiv 0$.

Dokaz. a) Kako su φ i ψ neprekidne funkcije na domenu $[0, +\infty)$, onda je i $\varphi * \psi(t)$ neprekidna funkcija za svako $t \geq 0$.

b) Po definiciji, imamo da:

$$\varphi * \psi(t) = \int_0^t \varphi(t - \tau) \psi(\tau) d\tau,$$

smenom $s = t - \tau$ dobijamo:

$$- \int_t^0 \varphi(s) \psi(t - s) ds = \int_0^t \psi(t - s) \varphi(s) ds = \psi * \varphi.$$

c) Po definiciji imamo:

$$\begin{aligned} \varphi * (\psi * \omega)(t) &= \int_0^t \varphi(t - \tau) \int_0^\tau \psi(\tau - s) \omega(s) ds d\tau \\ &= \int_{s=0}^{s=t} \int_0^\tau \varphi(t - \tau) \psi(\tau - s) \omega(s) ds d\tau, \end{aligned}$$

ako promenimo redosled integracije dobijamo:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\tau=s}^{\tau=t} \varphi(t - \tau) \psi(\tau - s) \omega(s) d\tau ds &= \int_0^t \int_0^{t-s} \varphi(t - y - s) \psi(y) \omega(s) dy ds \\ &= (\varphi * \psi) * \omega(t). \end{aligned}$$

d) i e) slede iz osnovnih osobina Rimanovog integrala. □

Definicija 1.8. (Stiltjesova konvolucija) *Neka su φ i ψ funkcije definisane na $[0, \infty)$ i $(-\infty, \infty)$, redom, i neka Riman-Stiltjesov integral*

$$\kappa(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(t - \tau) d\psi(\tau) \quad (2)$$

postoji za sve $t \in (-\infty, \infty)$. Tada se funkcija κ , definisana na $(-\infty, \infty)$, naziva Riman-Stiltjesovom konvolucijom funkcija φ i ψ . Takođe, koristimo i sledeću notaciju:

$$\kappa = \varphi * d\psi.$$

Da bismo dokazali neke od osnovnih osobina Stiltjesove konvolucije, korišćićemo sledeću teoremu:

Teorema 1.3. (Integracija po step funkciji) *Neka je $a < c < b$. Neka je funkcija g definisana na $[a, b]$ tako da*

$$g(t) = \begin{cases} g(a), & t \in (a, c), \\ g(b), & t \in (c, b). \end{cases}$$

Neka je $f \in R(g)$ na $[a, b]$ i neka važi da je bar jedna od funkcija, f ili g , neprekidna na $[a, c]$ i neka je bar jedna od funkcija neprekidna na $(c, b]$. Tada

$$\int_a^b f(t) dg(t) = f(c)(g(c^+) - g(c^-)). \quad \ddagger$$

U slučaju da je $c = a$ umesto $g(c^-)$ pišemo $g(c)$, slično, ako je $c = b$ umesto $g(c^+)$ pišemo $g(c)$.

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [APO], teorema 7.9, str. 147.

Pre nego što navedemo osobine Riman-Stiltjesove konvolucije, definisaćemo klasu *Hevisajd funkcija*.

Definicija 1.9. (Funkcije u klasi Hevisajda H^n) *Za funkciju f kažemo da pripada Hevisajdovoj klasi n -tog reda, u oznaci H^n , ako je definisana na $(-\infty, \infty)$ i važi:*

(a) $f(t) = 0$ za svako $t \in (-\infty, 0)$,

(b) $f \in C^n[0, \infty)$.

Navedimo sada osnovne osobine Riman-Stiltjesove konvolucije.

Teorema 1.4. (Osobine Riman-Stiltjesove konvolucije) *Neka $\varphi \in H^0$ i $\psi, \omega \in H^1$. Tada:*

a) $\varphi * d\psi \in H^0$ i $\psi * d\omega \in H^1$;

b) $\varphi * d\psi = \psi * d\varphi$ (komutativnost);

c) $\varphi * (d\psi * d\omega) = (\varphi * d\psi) * d\omega = \varphi * d\psi * d\omega$ (asocijativnost);

d) $\varphi * d(\psi + \omega) = \varphi * d\psi + \varphi * d\omega$ (distributivnost);

e) $\varphi * d\psi \equiv 0$ implicira da $\varphi \equiv 0$ ili $\psi \equiv 0$;

f) $\varphi * dH = \varphi$;

g) $\varphi * d\psi = \psi(0^+)\varphi + \varphi * \dot{\psi}$ na $[0, \infty)$.

[‡]Gde je $c^+ := \lim_{n \rightarrow \infty} (c + \frac{1}{n})$ tj. $c^- := \lim_{n \rightarrow \infty} (c - \frac{1}{n})$.

Dokaz. Dokazi tvrđenja a), b), c), d) i e) mogu se naći u [GUR], teorema 1.2.

f) Primitimo da na osnovu b) važi

$$\varphi * dH = H * d\varphi = \int_{-\infty}^t H(t - \tau) d\varphi(\tau),$$

pa primenjujući parcijalnu integraciju i koristeći osobine funkcija φ i H dobijamo

$$\varphi * dH = \varphi(\tau)H(t - \tau) \Big|_{-\infty}^t - \int_{-\infty}^t \varphi(\tau) dH(t - \tau) \quad (3)$$

$$= \varphi(t) - \int_0^t \varphi(\tau) dH(t - \tau). \quad (4)$$

Označimo sa $h(s) = H(t - s)$. Koristeći teoremu (1.3) imamo

$$\int_0^t \varphi(\tau) dH(t - \tau) = \varphi(t)(h(t) - h(t^-)) = \varphi(t)(1 - 1) = 0. \quad (5)$$

Iz (3) i (5) sledi

$$\varphi * dH = \varphi.$$

g) Definišimo funkciju Ψ na $(-\infty, \infty)$ na sledeći način

$$\Psi = \psi - \psi(0^+)H.$$

Funkcija Ψ je neprekidna na $(-\infty, \infty)$, a neprekidno diferencijabilna na $[0, \infty)$. Na osnovu distributivnosti Stiltjesove konvolucije važi

$$\varphi * d\psi = \psi(0^+)\varphi * dH + \varphi * d\Psi \quad \text{na } (-\infty, \infty).$$

Koristeći prethodno tvrđenje pod (f) i teoremu (1.1) dobijamo

$$\varphi * d\psi = \psi(0^+)\varphi + \varphi * \dot{\Psi} \quad \text{na } [0, \infty).$$

Kako je $\dot{\Psi} = \dot{\psi}$ na $[0, \infty)$ sledi tražena jednakost

$$\varphi * d\psi = \psi(0^+)\varphi + \varphi * \dot{\psi} \quad \text{na } [0, \infty).$$

□

Postavlja se pitanje postojanja i jedinstvenosti Stiltjesovog inverza tj. da li za φ postoji jedinstveno ψ takvo da $\varphi * d\psi = H$. Odgovor na to pitanje dobijamo iz sledećih teorema:

Teorema 1.5. (Stiltjesov inverz) *Neka je $\varphi \in H^1$. Tada postoji najviše jedna funkcija u H^1 takva da:*

$$\varphi * d\psi = H \quad \text{na } (-\infty, \infty).$$

Ako takvo ψ postoji, nazivamo ga Stiltjesovim inverzom funkcije φ i pišemo $\psi = \varphi^{-1}$. Šta više, ako su α, β funkcije iz H^0 , onda:

$$\alpha * d\varphi = \beta \quad \text{implicira} \quad \alpha = \beta * d\varphi^{-1}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da postoje $\psi, \omega \in H^1$ tako da:

$$\varphi * d\psi = H \quad \text{i} \quad \varphi * d\omega = H,$$

na osnovu teoreme 1.4 (d) dobijamo:

$$\varphi * d\psi - \varphi * d\omega = \varphi * d(\psi - \omega) = 0.$$

Koristeći prethodnu jednakost i teoremu 1.4 (e) sledi da $\varphi \equiv 0$ ili $\psi - \omega \equiv 0$. Kako je φ proizvoljna funkcija iz H^1 , sledi da $\psi = \omega$. Dalje, neka su $\alpha, \beta \in H^0$ i neka važi $\alpha * d\phi = \beta$. Primenjujući tvrđenja (c) i (f) teoreme 1.4, dobijamo:

$$\beta * d\varphi^{-1} = (\alpha * d\varphi) * d\varphi^{-1} = \alpha * d(\varphi * d\varphi^{-1}) = \alpha * dH = \alpha.$$

□

Teorema 1.6. (Postojanje Stiltjesovog inverza) *Ako je $\varphi \in H^2$, onda je potreban i dovoljan uslov da postoji φ^{-1} da $\varphi(0^+) \neq 0$.*

Dokaz se može pronaći u [GUR], teorema 1.4.

1.3 Frakcioni integrali i izvodi

U poglavlju 4.2 model prostiranja talasa u viskoelastičnim sredinama zasniva se na frakcionom računu, kako bismo ga razumeli, u ovom poglavlju uvodimo pojmove frakcionih izvoda i integrala, i *Gamma funkcije* koja je potrebna za njihovo definisanje.

Definicija 1.10. (Gamma funkcija) *Gamma funkciju, u oznaci $\Gamma(z)$, definišemo na sledeći način:*

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

gde je $z \in \mathbb{C}$ i $\operatorname{Re}\{z\} > 0$.

Sledećom teoremom prikazaćemo vezu između $\Gamma(z)$ i $\Gamma(z+1)$.

Teorema 1.7. *Za svako $z \in \mathbb{C}$ takvo da $\operatorname{Re}\{z\} > 0$ važi:*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Dokaz. Po definiciji imamo da:

$$\Gamma(z+1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-t} t^z dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-e^{-t} t^z \Big|_0^x + z \int_0^x e^{-t} t^{z-1} dt \right) = z\Gamma(z).$$

□

Posledica 1.1. *Za $n \in \mathbb{N}$ važi $\Gamma(n) = (n-1)!$.*

Dokaz. Dokaz sledi direktno iz teoreme 1.7. □

U cilju lakšeg dokazivanja određenih osobina gamma funkcije, definišemo *beta funkciju*.

Definicija 1.11. (Beta funkcija) *Beta funkciju, u oznaci $B(p, q)$, definišemo na sledeći način:*

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt,$$

gde su $p, q \in \mathbb{C}$ i $\operatorname{Re}\{p\} > 0$, $\operatorname{Re}\{q\} > 0$.

Teorema 1.8. (Veza između B i Γ funkcije) Za funkcije B i Γ važi sledeća relacija:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p, q \in \mathbb{C}.$$

Dokaz. Po definiciji imamo da:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t} dt \int_0^\infty s^{q-1}e^{-s} ds = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}s^{q-1}e^{-s} dt ds.$$

Ako uvedemo smenu $t = u^2$, $s = v^2$, $dt ds = 4uv dudv$, dobijamo:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty u^{2p-1}v^{2q-1}e^{-(u^2+v^2)} du dv.$$

Neka $u = r \cos \varphi$, $v = r \sin \varphi$, $dudv = r dr d\varphi$, tada:

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} \cos \varphi^{2p-1} \sin \varphi^{2q-1} dr d\varphi \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi^{2p-1} \sin \varphi^{2q-1} d\varphi 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr. \end{aligned}$$

Ako primenimo smene $s = \cos^2 \varphi$, $ds = -2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi$ i $r^2 = t$, $2r dr = dt$, dobijamo:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^1 s^{p-1}(1-s)^{q-1} ds \int_0^\infty e^{-t} t^{p+q-1} dt = B(p, q)\Gamma(p+q).$$

□

Definišimo sada Riman-Liuvilov frakcioni integral.

Definicija 1.12. (Riman-Liuvilov frakcioni integral) Delovanje Riman-Liuvilovog frakcionog integrala reda $\alpha \in \mathbb{R}^+$, u oznaci ${}_0I_t^\alpha$, na realnu funkciju f sa nosačem u \mathbb{R}^+ , definišemo na sledeći način:

$${}_0I_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0.$$

Operator ${}_0I_t^0$ definišemo kao operator indentiteta, tj. ${}_0I_t^0 f(t) = f(t)$.

Pre nego predstavimo osnovne osobine Riman-Liuvilovog frakcionog integrala, definišimo karakterističnu funkciju:

$$\chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a, b], \\ 0, & t \notin [a, b]. \end{cases}$$

Teorema 1.9. Neka su α , β i γ nenegativni realni brojevi, tada važi:

(a) ${}_0I_t^\alpha \circ {}_0I_t^\beta$ je frakcioni Riman-Liuvilov integral reda $\alpha + \beta$ (zatvorenost);

(b) ${}_0I_t^\alpha \circ ({}_0I_t^\beta \circ {}_0I_t^\gamma) = ({}_0I_t^\alpha \circ {}_0I_t^\beta) \circ {}_0I_t^\gamma$ (asocijativnost);

(c) ${}_0I_t^\alpha \circ {}_0I_t^\beta = {}_0I_t^\beta \circ {}_0I_t^\alpha$ (komutativnost);

gde sa \circ označavamo kompoziciju ili slaganje operatora.

Dokaz. a) Po definiciji imamo da:

$$\begin{aligned} ({}_0I_\alpha^t \circ {}_0I_\beta^t)\varphi(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{(1-\alpha)}} \left(\int_0^\tau \frac{1}{(\tau-x)^{(1-\beta)}} \varphi(x) dx \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \int_0^\tau \frac{1}{(t-\tau)^{(1-\alpha)}} \frac{1}{(\tau-x)^{(1-\beta)}} \varphi(x) dx d\tau. \end{aligned}$$

Kako je $0 \leq \tau \leq t$ važi:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \int_0^\tau \frac{1}{(t-\tau)^{(1-\alpha)}} \frac{1}{(\tau-x)^{(1-\beta)}} \varphi(x) \chi_{[0,\tau]}(x) dx d\tau.$$

Primetimo da je $\chi_{[0,\tau]}(x) = \chi_{[x,t]}(\tau)$, ako obrnemo redosled integracije dobijamo:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \varphi(x) \left(\int_x^t \frac{1}{(t-\tau)^{(1-\alpha)}} \frac{1}{(\tau-x)^{(1-\beta)}} d\tau \right) dx$$

Smenom $\tau = x + (t-x)r$ dobijamo:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \varphi(x) \left(\int_0^1 \frac{1}{(t-x)^{1-(\alpha+\beta)}} (1-r)^{\alpha-1} r^{\beta-1} dr \right) dx$$

Koristeći definiciju 1.11, sledi da:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\beta, \alpha) \int_0^t \varphi(x) \frac{1}{(t-x)^{1-(\alpha+\beta)}} dx.$$

Primenom teoreme 1.8 sledi željeno tvrđenje:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t \varphi(x) \frac{1}{(t-x)^{1-(\alpha+\beta)}} dx = {}_0I_t^{\alpha+\beta} \varphi.$$

Tvrđenja b) i c) slede iz a). □

Iz prethodnog tvrđenja zaključujemo da je $(\{{}_0I_t^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}^+}, \circ, {}_0I_t^0)$ komutativna polugrupa.

Uvedimo sada jednu od osnovnih teorema matematičke analize koju ćemo često koristiti pri dokazivanju drugih teorema.

Teorema 1.10. (Lajbnicovo pravilo) *Ako su $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ diferencijabilne funkcije i ako je $\frac{d}{dt}f(\tau, t)$ integrabilna funkcija, onda važi sledeća jednakost:*

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(\tau, t) d\tau = f(\beta(t), t) \beta'(t) - f(\alpha(t), t) \alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{d}{dt} f(\tau, t) d\tau.$$

Dokaz se može pronaći u [PER], posledica 3.3.2.2. str. 98.

Pre nego što definišemo frakcioni izvod, u sledećoj teoremi predstaviceo kompoziciju (u smislu slaganja operatora) klasičnog izvoda i frakcionog integrala.

Teorema 1.11. *Ako sa D_t^n definišemo klasičan operator diferenciranja po promenljivoj t , tj. $D_t^n := \frac{d^n}{dt^n}$, $n \in \mathbb{N}$, važi:*

(a)

$$D_t^n \circ {}_0I_t^n f(t) = f(t);$$

(b)

$${}_0I_t^n \circ D_t^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!}.$$

Dokaz. a) Koristeći Lajbnicovo pravilo dobijamo sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned} D_t^n \circ {}_0I_t^n f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{n-1} d\tau \right) \\ &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f(\tau)(n-1)(t-\tau)^{n-2} d\tau \right). \end{aligned}$$

Ponavljajući postupak diferenciranja još $n-2$ puta dobijamo:

$$D_t^n \circ {}_0I_t^n f(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f(\tau)(n-1)! d\tau \right).$$

Uzimajući u obzir da je $\Gamma(n) = (n-1)!$ i ponovnom primenom Lajbnicovog pravila na prethodnu jednačinu dobijamo željenu jednakost:

$$D_t^n \circ {}_0I_t^n f(t) = f(t).$$

b) Dokaz pokazujemo indukcijom. Za $k=1$ lako se proverava da tvrđenje važi. Pretpostavimo da važi za $k=n$, pokažimo da onda tvrđenje važi i za $k=n+1$:

$${}_0I_t^{n+1} \circ D_t^{n+1} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^t f(\tau)^{(n+1)}(t-\tau)^n d\tau.$$

Primenom parcijalne integracije na prethodnu jednačinu i koristeći induksijsku hipotezu dobijamo:

$$\begin{aligned} {}_0I_t^{n+1} \circ D_t^{n+1} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(f^{(n)}(\tau)(t-\tau)^n \Big|_0^t + \int_0^t f^{(n)}(\tau)n(t-\tau)^{n-1} d\tau \right) \\ &= -f^{(n)}(0) \frac{t^n}{n!} + f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \\ &= f(t) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}. \end{aligned}$$

□

Definicija 1.13. (Riman-Liuvilov frakcioni izvod) *Delovanje Riman-Liuvilovog frakcionog izvoda reda $\alpha \in \mathbb{R}^+$, u oznaci ${}_0D_t^\alpha$, na realnu funkciju f sa nosačem u \mathbb{R}^+ , definišemo na sledeći način:*

$${}_0D_t^\alpha f(t) := D_t^m \circ {}_0I_t^{m-\alpha} f(t), \quad m-1 \leq \alpha \leq m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

tj.

$${}_0D_t^\alpha := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau, & m-1 \leq \alpha < m, \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m. \end{cases}$$

Operator ${}_0D_t^0$ definišemo kao identički operator, tj. ${}_0D_t^0 f(t) = f(t)$. Uбудуće ćemo identički operator označavati sa I .

Teorema 1.12. *Neka je $m-1 \leq \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, tada važe sledeće jednakosti:*

(a)

$${}_0D_t^\alpha \circ {}_0I_t^\alpha = D_t^m \circ {}_0I_t^{m-\alpha} \circ {}_0I_t^\alpha = D_t^m \circ {}_0I_t^m = I$$

(b)

$${}_0D_t^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} t^{\gamma-\alpha}, \quad \gamma > -1, \quad t > 0.$$

Dokaz. a) Tvrdjenje direktno sledi iz definicije, teorema 1.9 a) i 1.11 a).

b) Neka je $m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$. Ako je $\alpha = m$ sledi da:

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m} t^\gamma &= \gamma \cdot (\gamma-1) \cdot \dots \cdot (\gamma-m+1) t^{\gamma-m} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma)} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-1)} \cdot \dots \cdot \frac{\Gamma(\gamma-m+2)}{\Gamma(\gamma-m+1)} t^{\gamma-m} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-m+1)} t^{\gamma-m}. \end{aligned}$$

Neka je sada $m-1 < \alpha < m$. Po definiciji imamo:

$${}_0D_t^\alpha t^\gamma = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \tau^\gamma (t-\tau)^{m-1-\alpha} d\tau.$$

Ako uvedemo smenu $\xi = \frac{\tau}{t}$, dobijamo:

$${}_0D_t^\alpha t^\gamma = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^1 t^{\gamma+m-\alpha} \xi^\gamma (1-\xi)^{m-1-\alpha} d\xi.$$

Primetimo da je $\int_0^1 \xi^\gamma (1-\xi)^{m-1-\alpha} d\xi = B(\gamma+1, m-\alpha)$, dakle:

$${}_0D_t^\alpha t^\gamma = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} B(\gamma+1, m-\alpha) \frac{d^m}{dt^m} t^{\gamma+m-\alpha}.$$

Koristeći teoremu 1.8 dobijamo:

$${}_0D_t^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+m-\alpha)} (\gamma+m-\alpha)(\gamma+m-\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\gamma-\alpha+1) t^{\gamma-\alpha}.$$

Na osnovu teoreme 1.7, sledi željeno tvrdjenje:

$${}_0D_t^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} t^{\gamma-\alpha}.$$

□

Posledica 1.2. (Riman-Liuvilov frakcioni izvod jedinice) *Ako zapišemo jedinicu kao $1 = t^0$, na osnovu tvrdjenja pod b) prethodne teoreme sledi da:*

$${}_0D_t^\alpha 1 = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \alpha \geq 0, \quad t > 0.$$

Iskoristimo ovde priliku da spomenemo *Kaputov frakcioni izvod*.

Definicija 1.14. (Kaputov frakcioni izvod) *Delovanje Kaputovog frakcionog izvoda reda $\alpha \in \mathbb{R}^+$, u oznaci ${}_0^*D_\alpha^t$, na realnu funkciju f čiji je m -ti izvod integrabilan, definišemo na sledeći način*

$${}_0^*D_\alpha^t f(t) := {}_0I_t^{m-\alpha} \circ D_t^m f(t), \quad m-1 < \alpha \leq m,$$

preciznije

$${}^*D_t^\alpha := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}, & m-1 < \alpha < m, \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m. \end{cases}$$

Primetimo da se kod Kaputovog izvoda, za razliku od Riman-Liuvilovog, operator diferenciranja nalazi unutar integrala. Zbog sličnosti u definisanju, postavlja se pitanje koliko se razlikuju ta dva operatora i da li postoje funkcije na koje ti operatori imaju jednako dejstvo?

Teorema 1.13. (Veza između Kaputovog i Riman-Liuvilovog izvoda) *Neka je $m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, tada:*

$${}^*D_t^\alpha f(t) = {}_0D_t^\alpha \left[f(\tau) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tau^k \right] (t).$$

Dokaz. Koristeći definiciju Riman-Liuvilovog frakcionog izvoda, desnu stranu prethodne jednačine možemo zapisati na sledeći način:

$$\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tau^k \right) d\tau.$$

Primenom parcijalne integracije dobijamo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \left(-\frac{1}{m-\alpha} (t-\tau)^{m-\alpha} \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tau^k \right) \right) \Big|_{\tau=0}^t \\ & + \int_0^t \frac{1}{(m-\alpha)} (t-\tau)^{m-\alpha} \left(f^{(1)}(\tau) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!} \tau^{k-1} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Imajući u vidu da je prvi sabirak u prethodnoj jednačini jednak nuli, ponovnim diferenciranjem dobijamo:

$$\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tau^k \right) d\tau.$$

Ponovnom primenom Lajbnicovog pravila dobijamo:

$$\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \int_0^t \frac{1}{(m-\alpha)} (t-\tau)^{m-\alpha} \left(f^{(1)}(\tau) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!} \tau^{k-1} \right) d\tau.$$

Ponavljajući ta dva postupka $m-2$ puta dobijamo:

$$\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{1}{(m-\alpha)} (t-\tau)^{m-\alpha} \left(f^{(m-1)}(\tau) - f^{(m-1)}(0) \right) d\tau.$$

Konačno, još jednim diferenciranjem dobijamo traženu jednakost:

$$\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t f^{(m)}(t-\tau)^{m-\alpha-1} d = {}^*D_t^\alpha f(t) \tau.$$

□

Posledica 1.3. *Na osnovu prethodne teoreme 1.13 i posledice 1.2, za $0 < \alpha < 1$ važi sledeća jednakost:*

$${}^*D_t^\alpha f(t) = {}_0D_t^\alpha f(t) - f(0^+) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = {}_0D_t^\alpha [f(t) - f(0^+)].$$

Posledica 1.4. (Kaputov frakcioni izvod jedinice) *Koristeći teoremu 1.13 dobijamo sledeću jednakost:*

$${}_0^*D_t^\alpha 1 = 0, \quad \alpha > 0.$$

Teorema 1.14. (Jednakost frakcionih izvoda dve funkcije) *Neka su $c_j, 0 \leq j \leq m$, proizvoljne konstante i $m - 1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}$, tada*

(a)

$${}_0^*D_t^\alpha f(t) = {}_0^*D_t^\alpha g(t) \iff f(t) = g(t) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j t^j;$$

(b)

$${}_0D_t^\alpha f(t) = {}_0D_t^\alpha g(t) \iff f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^m c_j t^{\alpha-j}.$$

Dokaz. (a) (\implies) Pretpostavimo da važi ${}_0^*D_t^\alpha f(t) = {}_0^*D_t^\alpha g(t)$, tada na osnovu definicije Kaputovog frakcionog izvoda, važi sledeća jednakost:

$$\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau) - g^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau = 0.$$

Kako su f i g proizvoljne funkcije sledi:

$$f^{(m)}(t) - g^{(m)}(t) = 0 \implies f(t) = g(t) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j t^j.$$

(\impliedby) Pretpostavimo da važi $f(t) = g(t) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j t^j$. Tada $f^{(m)}(t) = g^{(m)}(t)$ iz čega sledi: ${}_0^*D_t^\alpha f(t) = {}_0^*D_t^\alpha g(t)$.

(b) Pogledati [MAI], str. 8. □

Definicija 1.15. *Definišimo kauzalnu distribuciju[§], u oznaci $\Phi_\alpha, \alpha > 0$, na sledeći način:*

$$\Phi_\alpha(t) := \begin{cases} H(t) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \alpha > 0 \\ \frac{d^m}{dt^m} \Phi_{\alpha+m}(t), & \alpha \leq 0, \quad \alpha + m > 0, \quad \alpha + m - 1 \leq 0, \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Teorema 1.15. *Delovanje Riman-Liuvilovog frakcionog integrala na funkciju f , možemo zapisati i na sledeći način:*

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \Phi_\alpha(t) * f(t), \quad \alpha > 0.$$

Dokaz. Po definiciji imamo da:

$$\Phi_\alpha(t) * f(t) = \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)} H(t-\tau) (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = {}_0I_t^\alpha f(t).$$

□

Teorema 1.16. *Delovanje Riman-Liuvilovog frakcionog izvoda na funkciju f , možemo zapisati na sledeći način:*

$${}_0D_t^\alpha f(t) = \Phi_{-\alpha}(t) * f(t), \quad \alpha > 0.$$

[§]U literaturi se može naići i na naziv *kauzalna funkcija*, što nije najkorektniji termin, pošto je u pitanju distribucija, a ne funkcija.

Dokaz. Po definiciji imamo da:

$$\begin{aligned}\Phi_{-\alpha}(t) * f(t) &= \frac{d^m}{dt^m} \Phi_{-\alpha+m}(t) * f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(\alpha+1-m)} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \circ {}_0I_t^{m-\alpha} f(t) = D_t^m \circ {}_0I_t^{m-\alpha} f(t) = {}_0D_t^\alpha f(t).\end{aligned}$$

□

1.4 Laplasova transformacija

U ovom delu navodimo samo one definicije i osobine Laplasove transformacije koje će nam biti potrebne u daljem radu.

Definicija 1.16. (Laplasova transformacija) *Neka je $f \in L_{loc}^1$, $f(t) = 0$, za $t < 0$ i neka*

$$|f(t)| \leq Ae^{\gamma t}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Definišemo Laplasovu transformaciju za funkciju f :

$$\mathcal{L}\{f(t); s\} := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt =: \tilde{f}(s), \quad s \in \mathbb{C}.$$

Definicija 1.17. *Par funkcije i njene Laplasove transformacije označavamo na sledeći način:*

$$f(t) \div \tilde{f}(s).$$

Teorema 1.17. (Osobine Laplasove transformacije) *Direktnom primenom definicije Laplasove transformacije dolazimo do sledećih formula:*

(a) *Laplasova transformacija konvolucije*

$$f(t) * g(t) \div \tilde{f}(s)\tilde{g}(s);$$

(b) *Laplasova transformacija stepene funkcije*

$$t^\alpha \div \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1;$$

(c) *Laplasova transformacija standardnog izvoda*

$$\begin{aligned}D_t^m f(t) \div s^m \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) s^{m-1-k}, \\ f^{(k)}(0^+) := \lim_{t \rightarrow 0^+} D_t^k f(t); \end{aligned}$$

(d) *Laplasova transformacija funkcije Φ_α*

$$\Phi_\alpha(t) \div \frac{1}{s^\alpha}, \quad \alpha > 0;$$

(e) *Laplasova transformacija Riman-Liuvilovog integrala*

$${}_0I_t^\alpha f(t) \div \frac{\tilde{f}(s)}{s^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

(f) Laplasova transformacija Riman-Liuvilovog frakcionog izvoda

$${}_0D_t^\alpha f(t) \div s^\alpha \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} g^{(k)}(0^+),$$

$$g^{(k)}(0^+) := \lim_{t \rightarrow 0^+} D_t^k g(t), \quad g(t) := {}_0I_t^{m-\alpha} f(t), \quad m-1 < \alpha \leq m.$$

Ako je $m-1 < \alpha < m$ dobijamo:

$${}_0D_t^\alpha f(t) \div s^\alpha \tilde{f}(s);$$

(g) Laplasova transformacija Kaputovog frakcionog izvoda

$${}^*D_t^\alpha f(t) \div s^\alpha \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-1-k} f^{(k)}(0^+),$$

$$f^{(k)}(0^+) := \lim_{t \rightarrow 0^+} D_t^k f(t), \quad m-1 < \alpha \leq m;$$

(h) Laplasova transformacija eksponencijalne funkcije

$$e^{at} \div \frac{1}{s-a};$$

(i) Laplasova transformacija Dirakove δ -distribucije

$$\delta \div 1.$$

Dokaz. Dokaze tvrđenja (a), (b), (c), (h) i (i) pogledati u knjizi [MUR]. Dokaz tvrđenja pod (d) sledi iz definicije kauzalne funkcije i stavke pod (b), dok se (e) dokazuje pomoću teoreme 1.15, stavki (a) i (c). Tvrđenje pod (f) sledi iz teoreme 1.16 i stavke pod (a). Konačno, (g) sledi iz teoreme 1.13 i tvrđenja pod (f).

Teorema 1.18. (Inverzna Laplasova transformacija) *Ako je $\tilde{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ tada funkciju $f(t)$ možemo izračunati pomoću inverzne Laplasove transformacije*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s); t\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \tilde{f}(s) ds,$$

gde se $\gamma \in \mathbb{R}$ bira tako da kompleksna poluravan $S := \{z : z \in \mathbb{C} \text{ i } \operatorname{Re}\{z\} < \gamma\}$ sadrži sve singularitete funkcije $e^{st} \tilde{f}(s)$.

Dokaz. Pogledati u knjizi [KIL], str. 18.

Prethodna teorema se još naziva i *Bromovičevom integracionom formulom*, a prava $p := \{z : z \in \mathbb{C} \text{ i } \operatorname{Re}\{z\} = \gamma\}$ *Bromovičevom putanjom*. U praksi, da bismo izračunali inverznu Laplasovu transformaciju koristimo pomoćnu konturu C_1 i Košijevu integralnu formulu $\oint_C f(z) dz = 0$, ukoliko $\tilde{f}(s)e^{st}$ nema singulariteta (ni polova ni tačaka grananja), važi:

$$f(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} e^{st} \tilde{f}(s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{C_2} e^{st} \tilde{f}(s) ds \right),$$

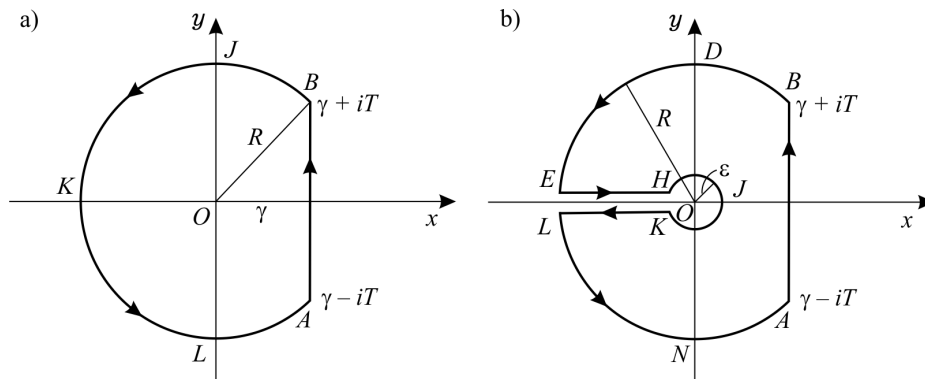
gde sa C_1 označavamo zatvorenu konturu $B - J - K - L - A - B$, a sa C_2 otvorenu konturu $B - J - K - L - A$, slika 1, a).

U slučaju egzistencije tačaka grananja i ukoliko podintegralna funkcija nema polova, koristimo konturu koja zaobilazi te tačke. Pretpostavimo da funkcija $e^{st} \tilde{f}(s)$ ima tačku grananja u 0, slika 1, b). Uvedimo sledeće oznake: C_{R_1} za $B - D - E$; C_{R_2} za $L - N - A$; C_{L_1} za $E - H$; C_{L_2} za

$L - K$; C_ε za $H - J - K$ i C za $B - D - E - H - J - K - L - N - A$. Funkciju $f(t)$ dobijamo na sledeći način:

$$f(t) = \oint_C - \left[\int_{C_{R_1}} + \int_{C_{R_2}} + \int_{C_{L_1}} + \int_{C_{L_2}} + \int_{C_\varepsilon} \right].$$

Napomenimo da $R \rightarrow \infty$, dakle C_{R_1} i C_{R_2} su orijentisani lukovi kružnice čiji poluprečnik teži beskonačnosti. Vektori EH i KL su paralelni sa apcisolom i teže da se preklape sa njom. C_ε je orijentisani luk kružnice sa poluprečnikom $\varepsilon > 0$, slika 1. b).



Slika 1. a) Kontura korišćenja pri računanju inverzne Laplasove transformacije. b) Kontura pri računanju inverzne Laplasove transformacije u slučaju kada podintegralna funkcija ima singularitet u tački nula.

Prilikom računanja $\oint_C e^{st} \tilde{f}(s) ds$ korišćemo sledeću teoremu:

Teorema 1.19. (Košijeva teorema o reziduumu) *Neka je C prosta, zatvorena, pozitivno orijentisana kontura u kompleksnoj ravni i neka funkcija f ima singularitete u tačkama z_0, z_1, \dots, z_n unutar te konture. Tada:*

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=0}^n \text{Res}(f, z_k),$$

gde $\text{Res}(f, z_k)$ računamo u zavisnosti od vrste singulariteta koju funkcija f ima u tački z_k :

- (i) ako je z_k otklonljiv singularitet, tada $\text{Res}(f, z_k) = 0$;
- (ii) ako je z_k pol prvog reda, tada $\text{Res}(f, z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) f(z)$;
- (iii) ako je z_k pol m -tog reda, tada

$$\text{Res}(f, z_k) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^m}{dz^m} ((z - z_k)^m f(z)).$$

Dokaz. Pogledati u knjizi [BAK], str. 115.

1.5 Furijeova transformacija

U ovom delu navodimo samo one definicije i osobine Furijeove transformacije koje će nam biti potrebne u daljem radu.

Definicija 1.18. (Furijeova transformacija) *Neka je f integrabilna na \mathbb{R} . Tada Furijeovu transformaciju funkcije f definišemo na sledeći način:*

$$\mathcal{F}\{f(t); s\} = \hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1.20. *Neka je funkcija f integrabilna na \mathbb{R} , tada važe sledeće formule:*

(a) *Furijeova transformacija standardnog izvoda*

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t); s\right\} = (is)^n \hat{f}(s);$$

(b) *diferenciranje Furijeove transformacije*

$$\frac{d^n}{ds^n} \hat{f}(s) = \mathcal{F}\{(it)^n f(t); s\};$$

(c) *Furijeova transformacija konvolucije*

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t); s\} = \hat{f} \cdot \hat{g};$$

(d) *ako je $\hat{f}(s) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, tada funkciju $f(t)$ možemo izračunati pomoću inverzne Furijeove transformacije:*

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(s); t\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ist} \hat{f}(s) ds.$$

Dokaz. Dokazi prethodnih tvrđenja se mogu pronaći u knjizi [TEO].

2 Elementi mehanike kontinuuma

Da bismo napravili matematički model koji opisuje mehaniku deformacije, npr. kako opisati skraćanje viskoelastičnog štapa prilikom konstantnog sabijanja ili izduženje viskoelastične opruge usled tereta okačenog na jedan njen kraj, uvodimo sledeće fizičke veličine:

- **napon** – opisuje delovanje sile po zamišljenoj površi unutar tela;
- **deformacija** – opisuje promenu oblika i veličine tela usled delovanja sile;
- **pomeraj** – opisuje promenu položaja čestica u telu.

Povezanost između ovih veličina izražavamo preko sledećih jednačina:

- **jednačina kretanja** – veza između napona i pomeraja: opisuje kako sila utiče na kretanje materijalnih tačaka unutar tela;
- **geometrijska jednačina** – opisuje vezu između deformacije i pomeraja;
- **konstitutivna jednačina** – opisuje reakciju materijala na dejstvo sile: povezuje napon i deformaciju.

U narednim poglavljima rešavaćemo navedene jednačine, a da bismo imali potpunu sliku o njima, uvodimo početne i granične uslove:

- **početni uslovi** – ponašanje napona, izduženja i ostalih parametara pre deformacije i dejstva sile na telo;
- **granični uslovi** – ponašanje napona, izduženja i ostalih parametara na rubu tela.

U našim sistemima početni i granični uslovi biće unapred zadati. Može biti od interesa i asimptotsko ponašanje sistema (jednačine ravnoteže): ponašanje napona, deformacije i drugih parametara kada $t \rightarrow \infty$.

2.1 Geometrijska jednačina i tenzor deformacije

Prilikom dejstva sile dovoljno velikog inteziteta na čvrsto telo dolazi do promene zapremine i oblika tog tela, što opisujemo položajem materijalnih tačkaka tog tela u referentnoj konfiguraciji (početnom trenutku) i trenutnoj konfiguraciji. Jezikom matematike rečeno:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}, \quad \text{¶}$$

gde je \mathbf{x} radijus vektor materijalne tačke krutog tela pre dejstva sile, a \mathbf{x}' radijus vektor položaja materijalne tačke pod dejstvom sile, dok veličinu \mathbf{u} nazivamo pomerajem. Ako nam je poznata funkcija pomeraja \mathbf{u} , znamo kako se telo deformiše prilikom dejstva sile.

U cilju opisivanja deformacije, posmatrajmo kako se menja rastojanje između dve bliske tačke, označimo ih sa $P(x_1, x_2, x_3)$ i $Q(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$, i pretpostavljamo da se one nalaze u referentnoj konfiguraciji. Ako sa dl označimo rastojanje između P i Q , tada je $dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$. Dalje, neka radijus vektori tačkaka P i Q u trenutnoj konfiguraciji imaju $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$ i $Q'(x'_1 + dx'_1, x'_2 + dx'_2, x'_3 + dx'_3)$, redom. Označimo sa dl' rastojanje između tačkaka P' i Q' , tada je $dl'^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2$. Nas zanima promena kvadrata rastojanja između tačkaka P i Q : $dl'^2 - dl^2$.

¶Podsećamo da vektore označavamo podebljanim slovom, dok njegove komponente pišemo istim (nepodebljanim) slovom i indeksiramo prema koordinatama, npr. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Primetimo da vektor pomeraja \mathbf{u} možemo posmatrati kao funkciju od \mathbf{x} , tj. $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), u_3(\mathbf{x}))$. Uočimo da važi:

$$x'_i = u_i(\mathbf{x}) + x_i \quad \text{i} \quad du_i = \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j,$$

iz čega sledi:

$$dx'_i = \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j + dx_i \quad \text{i} \quad dx'^2_i = \sum_k \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j dx_k + 2 \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j dx_i + dx^2_i.$$

Tada je:

$$dl'^2 - dl^2 = \sum_i (dx'^2_i - dx^2_i) = \sum_i \sum_k \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j dx_k + 2 \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j dx_i.$$

Ako kod drugog sabirka u prethodnoj jednačini indeks i zamenimo sa k , dobijamo:

$$\begin{aligned} dl'^2 - dl^2 &= \sum_i \sum_k \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j dx_k + 2 \sum_k \sum_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx_j dx_k \\ &= \sum_i \sum_k \sum_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) dx_j dx_k \\ &= \sum_k \sum_j \sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k. \end{aligned}$$

Ako označimo $\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$, onda imamo:

$$dl'^2 - dl^2 = 2 \sum_k \sum_j \varepsilon_{jk} dx_j dx_k.$$

Tenzor ε_{jk} nazivamo *tenzorom deformacije*. Primetimo da je tenzor deformacije simetričan, i ako su u pitanju veoma male deformacije poslednji sabirak se može zanemariti, pošto je za red veličine manji od prva dva:

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (6)$$

Primer 2.1. Ako modeliramo naš sistem u jednoj dimenziji, jednačina (6) postaje:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (7)$$

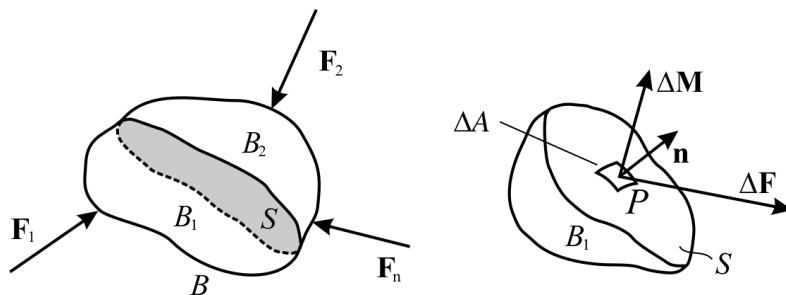
U narednim poglavljima opisivaćemo deformacije u jednoj dimenziji, pa ćemo za geometrijsku jednačinu koristiti (7).

2.2 Jednačina kretanja i tenzor napona

Unutrašnje sile i spregove koji „drže oblik tela” nazivamo *unutrašnjim naponom* ili samo *naponom* tela. Kada na telo ne deluju nikakve sile, njegovi molekuli se nalaze u termodinamičkoj ravnoteži, što znači da ne postoji razmena energije između njih. Prilikom delovanja spoljašnje sile na telo, dolazi do deformacije i promene napona u njemu: stanje ravnoteže se narušava i međumolekulske sile teže da vrata telo u stanje ravnoteže (pogledati [LAN]). U teoriji linearno viskoelastičnih sredina međumolekulske sile su kratkog dometa i zanemarljive u odnosu spoljašnje sile, pa ih nećemo uzimati u obzir u našim modelima. Prethodni stav omogućuje upotrebu Košijeve i Ojlerove leme (pogledati [ATA]):

Lema 2.1. Na svakoj zamišljenoj, presečnoj površi unutar tela, međusobno dejstvo presekom razdvojenih delova može se izraziti neprekidno raspoređenim silama i momentima po presečnoj površi.

Neka je dato telo B . U cilju opisivanja unutrašnjeg napona u telu, zamislimo da smo ga po površi S presekli na dva dela, B_1 i B_2 (slika 2).



Slika 2. Rezultantna sila $\Delta \mathbf{F}$ i površinskih momenata $\Delta \mathbf{M}$ koji deluju na površ S u tački A . Granični slučaj $\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}$ predstavlja silu napona u tački P na površ S . Pri tome smo uzeli da $\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta A} = 0$.

Potom uklonimo jedan deo, npr. B_2 . Ako sa P označimo proizvoljnu tačku na površ S , onda napon u toj tački, koji je posledica delovanja dela B_2 na deo B_1 , označavamo sa σ_n i definišemo na sledeći način:

$$\sigma_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}, \quad (8)$$

gde sa ΔA označavamo delić površine koji sadrži tačku P , a sa $\Delta \mathbf{F}^{\parallel}$ označavamo rezultantu vektora svih sila kojim deo B_2 deluje na deo B_1 . Primetimo da, ako bismo posmatrali napon u istoj tački P , ali u slučaju kad deo B_1 deluje na deo B_2 , na osnovu trećeg Njutnovog zakona** dobili bismo jednačinu (8) ali suprotnog znaka, tj.

$$\sigma_n = - \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}.$$

Telo B u tački P možemo preseći na beskonačno mnogo načina. Na osnovu prethodne konstatacije, zaključujemo da zavisno od izabrane površ, u tački P postoji beskonačno mnogo naponskih stanja; zbog toga koristimo oznaku σ_n , gde indeks n označava jedinični vektor normale na površ u odnosu na koju se posmatra napon.

Pokazaćemo da svi vektori nisu međusobno nezavisni, tj. da vektori napona za tri međusobno normalne ravni u potpunosti određuju naponsko stanje u nekoj tački. Jedinične vektore koordinatnih osa označavamo sa: \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$. Sa σ_i označavamo napon koji deluje na površinu određenom vektorom \mathbf{e}_i . Vektor σ_i možemo razložiti na bazne vektore:

$$\sigma_i = \sum_j \sigma_{ij} \mathbf{e}_j \quad (9)$$

Pošto su vektori \mathbf{e}_i ortonormirani, ako jednačinu (9) skalarno pomnožimo sa \mathbf{e}_k dobijamo

$$\sigma_i \cdot \mathbf{e}_k = \sigma_{ik}.$$

^{||}Na osnovu leme Košija i Ojlera F je neprekidna funkcija.

**Zakon akcije i reakcije: sila kojom jedno telo deluje na drugo telo, jednaka je po intenzitetu i pravcu sili kojom drugo telo deluje na prvo telo, ali je suprotnog smera.

Matricu $[\sigma_{ij}]$ nazivamo *tenzorom napona*. Primitimo da je prvi indeks određen površinom na koju napon deluje, a drugi projekcijom tog napona na koordinatnu osu, slika 3.

Pokazaćemo da matrica $[\sigma_{ij}]$ u potpunosti određuje stanje napona σ_n za bilo koji jedinični vektor \mathbf{n} . Neka je:

$$\sigma_n = \sum_i \sigma_n^i e_i$$

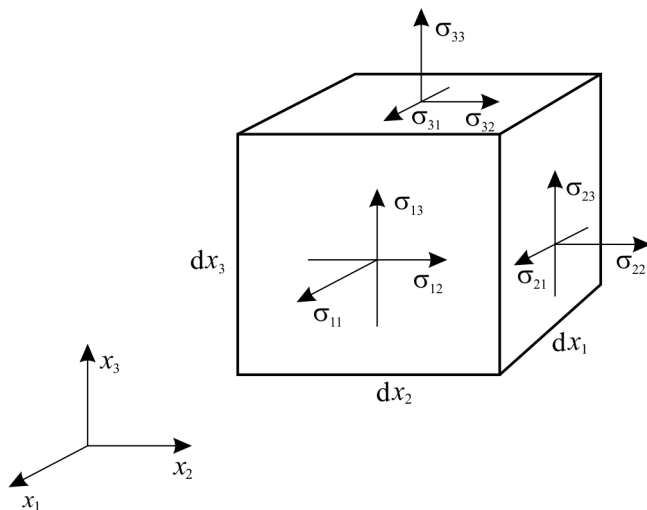
opisuje naponsko stanje u tački P u pravcu jediničnog vektora \mathbf{n} . Konstruišimo tetraedar $PKMN$, tako da tačke M, N, K pripadaju koordinatnim osama x_1, x_2, x_3 , redom, i da je stranica MNK normalna na vektor n , slika 4.

Ako $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$ tada $n_i = \cos \angle(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i)$ i važi $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Ako sa dA_i označimo stranicu tetraedra koja je normalna na koordinatu x_i tada

$$dA_i = n_i dA, \quad (10)$$

gde sa dA označavamo stranicu KMN . Na tetraedar deluju zapreminske sile $\mathbf{f}dV$ i površinske sile $\sigma_n dA - \sigma_1 dA_1 - \sigma_2 dA_2 - \sigma_3 dA_3$. Ako pretpostavimo da se tetraedar nalazi u stanju ravnoteže dobijamo sledeću jednačinu

$$\sigma_n dA - \sigma_1 dA_1 - \sigma_2 dA_2 - \sigma_3 dA_3 + \mathbf{f}dV = 0. \quad (11)$$



Slika 3. Komponente tenzora napona.

Ako sa h označimo visinu tetraedra onda je $dV = \frac{h}{3} dA$. Ako jednačinu (11) podelimo sa dA dobijamo:

$$\sigma_n - \sigma_1 \frac{dA_1}{dA} - \sigma_2 \frac{dA_2}{dA} - \sigma_3 \frac{dA_3}{dA} + \mathbf{f} \frac{h}{3} = 0.$$

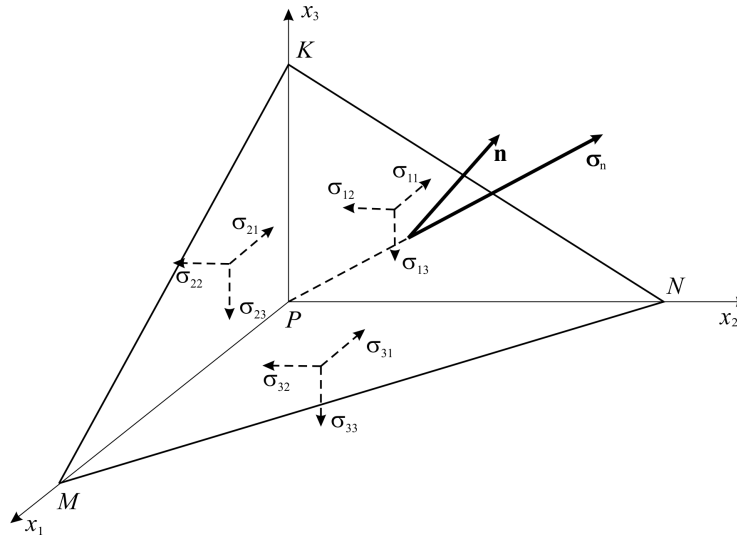
Koristeći (10) i posmatrajući granični slučaj kad $h \rightarrow 0$ dobijamo

$$\sigma_n - \sigma_1 n_1 - \sigma_2 n_2 - \sigma_3 n_3 = 0.$$

Ako prethodnu jednačinu pomnožimo skalarno sa e_i dobijamo

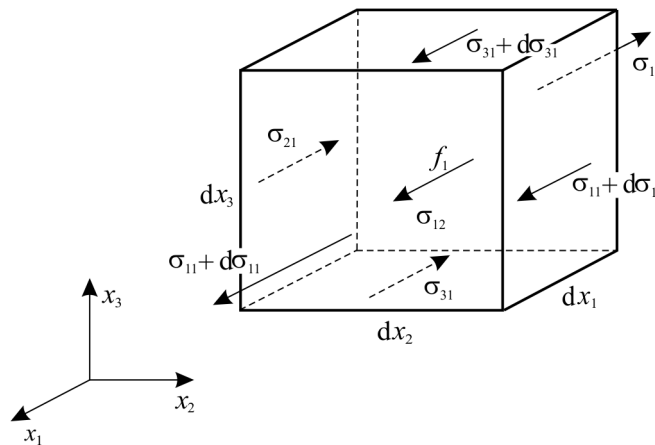
$$\sigma_n^i = \sigma_{1i} n_1 + \sigma_{2i} n_2 + \sigma_{3i} n_3.$$

Dakle, izrazili smo σ_n preko tenzora napona $[\sigma_{ij}]$.



Slika 4. Komponente napona „koordinatnog tetraedra” nad ravni MNK koja je određena normalom \mathbf{n} u tački P

Tokom deformacije dolazi do promene naponskog stanja u telu. Promenu napona možemo razložiti po koordinatnim osama. Na primer, da bismo opisali promenu naponskog stanja po koordinati x_1 , posmatračemo komponente tenzora napona $d\sigma_{i1}$, jer one opisuju promenu napona u pravcu x_1 , na stranici upravnoj na vektor i , slika 5.



Slika 5. Promena napona po koordinati x_1 .

Dakle, $d\sigma_{21}$ možemo zapisati na sledeći način:

$$d\sigma_{21} = \sigma_{21}(x_1, x_2 + dx_2, x_3) - \sigma_{21}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2.$$

Označimo sa f_1 komponentu zapremenske sile koja deluje u pravcu x_1 koordinate. Tada dejstvo svih sila u pravcu x_1 ose možemo izraziti jednačinom

$$\begin{aligned} & \left[\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 - \sigma_{11} \right] dx_2 dx_3 + \left[\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 - \sigma_{21} \right] dx_1 dx_3 \\ & + \left[\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 - \sigma_{31} \right] dx_1 dx_2 + f_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0. \end{aligned}$$

Deljenjem prethodne jednačine zapreminskim elementom $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ dobijamo

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 = 0.$$

Primenjujući sličan rezon na sume svih sila po pravcima x_1 i x_2 , dobijamo sistem jednačina

$$\sum_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_j = 0. \quad (12)$$

Ako zanemarimo zapreminske sile, a dejstvo spoljašnje sile zapišemo kao $\rho \ddot{u}_j dV$ gde ρ predstavlja gustinu tela ^{††}, jednačina (12) postaje

$$\sum_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}. \quad (13)$$

Prethodnu jednačinu (13) nazivamo *jednačinom kretanja*.

Primer 2.2. *Ako modeliramo naš sistem u jednoj dimenziji, jednačina (13) postaje*

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (14)$$

2.3 Konstitutivna jednačina

Konstitutivna jednačina prikazuje vezu između napona i deformacije, ona zavisi od svojstva samog materijala i opisuje kako se telo deformiše tokom vremena prilikom dejstva sile i nakon njenog prestanka. Čvrste materijale na osnovu načina na koji se deformišu prilikom delovanja konstantne sile na njih, slika 6, možemo grubo svrstati u dva granična slučaja:

- **elastične** – tokom dejstva sile javlja se deformacija koja je proporcijalna naponu i nezavisna od vremena, odmah nakon prestanka dejstva sile telo se vraća u početan oblik.
- **plastične** – nakon prestanka dejstva sile javlja se trajna deformacija; kod mnogih plastičnih materijala na početku dejstva sile dolazi do povećanja deformacije, ali nakon nekog vremena ona postaje konstantna.

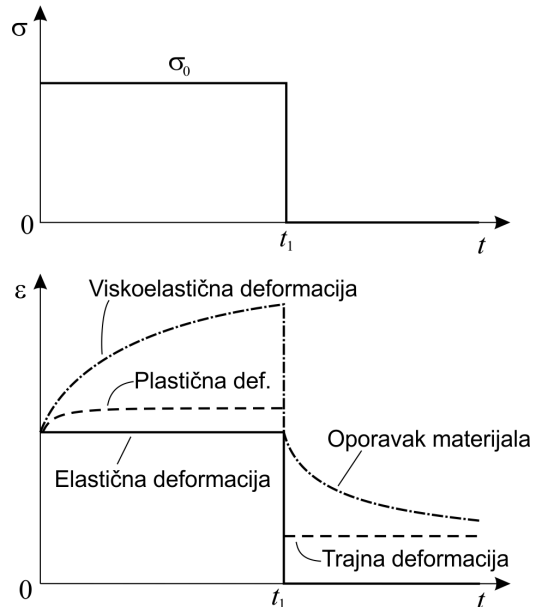
Većina materijala nije potpuno elastična, a nije ni potpuno plastična. Neretko nailazimo na materijale koji na početku dejstva sile pokazuju elastična svojstva, ali ako se ono nastavi, dolazi do sporog i postepenog povećanja deformacije, a nakon prestanka dejstva sile deformisano telo teži da se vrati u početan oblik, slika 6. Takve materijale nazivamo **viskoelastičnim materijalima**. Primitimo da, u njihovom slučaju, deformacija vremenski zavisna promenljiva.

Na osnovu prethodne konstatacije, možemo zapisati $\sigma(t) = F[\varepsilon(t)]$, gde je F transformacija koja zavisi od napona, ali i vremena. U ovom radu ćemo se fokusirati na talase koji se prostiru u viskoelastičnim materijalima, čije konstitutivne relacije zadovoljavaju sledeću jednačinu:

$$F[c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon_2] = c_1 F[\varepsilon_1] + c_2 F[\varepsilon_2]. \quad (15)$$

^{††}Ovde smo koristili Drugi Njutnov zakon: ubrzanje tela srazmerno je sili koja deluje na njega, a obrnuto srazmerno masi tela.

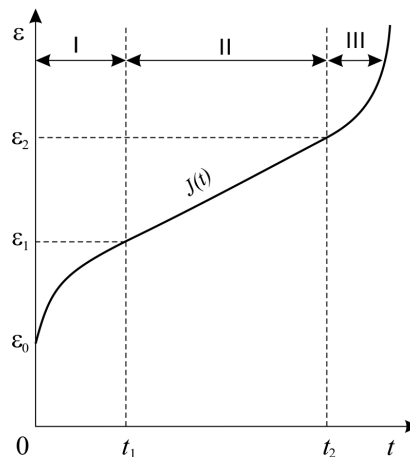
Takve materijala nazivamo **linearno viskoelastičnim** materijalima, dok jednačinu (15) nazivamo *Bolcmanovim principom superpozicije*. Da bismo opisali linearno viskoelastične materijale, potrebni su nam pojmovi poput *puzanja* i *relaksacije*.



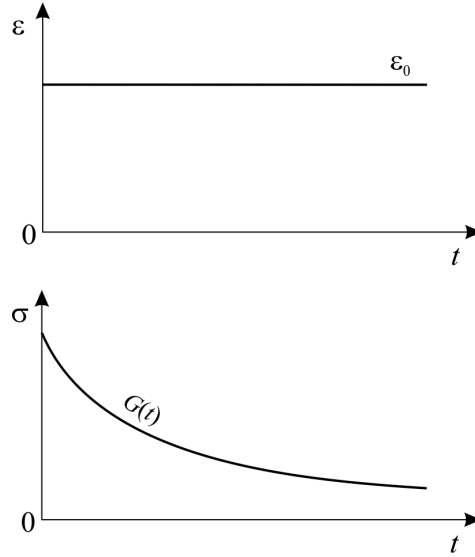
Slika 6. Različiti odzivi materijala tokom delovanja konstatnog napona i tokom njegovog prestanka (adaptirano prema [FIN]).

2.3.1 Puzanje

Puzanje opisuje sporu i neprekidnu deformaciju materijala tokom vremena usled dejstva konstantne sile. Postoje tri osnovna stadijuma puzanja: prvi, nastanak deformacije materijala; drugi, konstantno povećavanje deformacije; treći, naglo povećanje deformacije koja dovodi do frakture materijala, slika 7. Puzanje matematički opisujemo *funkcijom puzanja*, a označamo sa $J(t)$. Posmatrajuću sliku 7, možemo zaključiti da je J neopadajuća funkcija za $t > 0$. Takođe, kako na telo ne deluju nikakve sile pre početka merenja $J \equiv 0$ za $t < 0$.



Slika 7. Faze puzanja.



Slika 8. Funkcija relaksacije $G(t)$.

2.3.2 Relaksacija napona

Relaksacija napona opisuje napon u viskoelastičnom materijalu tokom vremena kao odgovor na iznenadnu, a potom i konstantnu deformaciju. Usled konstantne deformacije dolazi do relaksacije materijala, tj. do opadanja napona, slika 8.

Relaksaciju napona matematički opisujemo *funkcijom relaksacije*, a označamo sa $G(t)$. Kao što je pokazano na slici 8, G je nerastuća funkcija za $t > 0$. Slično kao i kod funkcije puzanja, uvodimo sledeću restrikciju: $G \equiv 0$ za $t < 0$.

2.4 Matematička postavka konstitutivne jednačine

Kao i u prethodnim poglavljima, napon označavamo sa $\sigma(x, t)$, a deformaciju sa $\varepsilon(x, t)$, gde je x prostorna*, a t vremenska koordinata. Zbog jednostavnosti zapisa pišaćemo $\sigma(t)$ i $\varepsilon(t)$. Od funkcija napona, deformacije, puzanja i relaksacije, zahtevaćemo da ispunjavaju najmanje sledeće osobine (pogledati [BOR]):

- (i) $\sigma \in H^0$;
- (ii) $\varepsilon \in H^0$;
- (iii) $J \in R(\sigma)$ na $[0, \infty)^\dagger$;
- (iv) $J \in H^0$;
- (v) $J(0^+) \leq J(t_1) \leq J(t_2) \leq \dots \leq J(+\infty)$, gde je $0^+ \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \dots$
- (vi) $G \in R(\varepsilon)$ na $[0, \infty)$;
- (vii) $G(0^+) \geq G(t_1) \geq G(t_2) \geq \dots \geq G(+\infty)$, gde je $0^+ \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \dots$
- (viii) $G \in H^0$.

*U ovom i u narednim poglavljima, opisujemo ponašanje materijala u jednoj dimenziji.

†Videti definiciju 1.6.

Definicija 2.1 (Integral relaksacije). U teoriji linearno viskoelastičnih sredina napon definišemo na sledeći način:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - \tau) d\varepsilon(\tau). \quad (16)$$

Integral (16) nazivamo reprezentacijom relaksacije.

Definicija 2.2. (Integral puzanja) U teoriji linearno viskoelastičnih sredina deformaciju definišemo na sledeći način:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} J(t - \tau) d\sigma(\tau). \quad (17)$$

Integral (17) nazivamo reprezentacijom puzanja.

Teorema 2.1. Integral reprezentacije relaksacije (16) možemo zapisati preko Rimanove konvolucije

$$\sigma = G * d\varepsilon.$$

Dokaz. Kako ε i G pripadaju prostoru H^0 važi:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - \tau) d\varepsilon(\tau) = \int_0^t G(t - \tau) d\varepsilon(\tau) = G * d\varepsilon. \quad (18)$$

□

Teorema 2.2. Integral reprezentacije puzanja (17) možemo zapisati preko Rimanove konvolucije

$$\varepsilon = J * d\sigma.$$

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu prethodne teoreme. □

Teorema 2.3. Napon i izduženje definisani preko jednačina (16) i (17) zadovoljavaju Bolcmanov princip superpozicije (15).

Dokaz. Dokazaćemo samo da linearna superpozicija deformacije odgovora linearnoj superpoziciji napona (analogno se dokazuje i obrnuto, da linearna superpozicija napona odgovara linearnoj superpoziciji deformacije). Definišimo ukupnu deformaciju sa

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n b_i \varepsilon_i, \quad (19)$$

gde su b_i proizvoljne konstante nezavisne od vremena. Neka je $\sigma_i = G * \varepsilon_i$ i $\sigma = \sum b_i \sigma_i$, treba da pokažemo da važi $\sigma = G * \varepsilon$.

Koristeći osnovne osobine operatora Rimanove konvolucije[‡], imamo da:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n b_i \sigma_i = \sum_{i=1}^n b_i (G * d\varepsilon_i) = G * d\left(\sum_{i=1}^n b_i \varepsilon_i\right) = G * d\varepsilon,$$

□

Uvodimo sledeće oznake:

- (i) $\overset{\circ}{J} := J(0^+)$ početno puzanje;

[‡]Pogledati teoremu 1.4.

- (ii) $J_e := J(+\infty)$ ravnotežno puzanje;
- (iii) $\mathring{G} := G(0^+)$ početna relaksacija;
- (iv) $G_e := G(+\infty)$ ravnotežna relaksacija;
- (v) $\mathring{\sigma} = \sigma(0^+)$ početni napon;
- (vi) $\mathring{\varepsilon} = \varepsilon(0^+)$ početna deformacija.

Teorema 2.4. Ako $\sigma(t), \varepsilon(t) \in H^1$ tada:

- (a) $\varepsilon(t) = \mathring{\sigma}J(t) + \int_0^t J(t-\tau)\dot{\sigma}(\tau) d\tau;$
- (b) $\sigma(t) = \mathring{\varepsilon}G(t) + \int_0^t G(t-\tau)\dot{\varepsilon}(\tau) d\tau;$
- (c) $G(t) \in H^1;$
- (d) $J(t) \in H^1;$
- (e) $\sigma(t) = \mathring{G}\varepsilon(t) + \int_0^t \dot{G}(t-\tau)\varepsilon(\tau) d\tau;$
- (f) $\varepsilon(t) = \mathring{J}\sigma(t) + \int_0^t \dot{J}(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau.$

Dokaz. Tvrdjenja (a) i (b) su posledica teorema 2.1, 2.2 i teoreme 1.4 pod (g). Tvrdjenja (c) i (d) slede iz tvrdjenja (b) i (a), redom. Tvrdjenja (e) i (f) se dobijaju primenom parcijalne integracije na tvrdjenja (c) i (d), redom. \square

Funkcije \mathring{G} i \mathring{J} se nazivaju *stopom relaksacije* i *stopom puzanja*, redom.

Primer 2.3. Ako za funkciju puzanja izabaremo Hevisajdovu funkciju, $J \equiv H$, veza između napona i izduženja postaje:

$$\varepsilon(t) = \mathring{J}\sigma(t).$$

Primer 2.4. Ako definišemo funkciju puzanja sa $J(t) = t$, veza između napona i izduženja postaje:

$$\varepsilon(t) = \mathring{J}\sigma(t) + \int_0^t \sigma(\tau) d\tau \implies \dot{\varepsilon}(t) = \mathring{J}\dot{\sigma}(t) + \sigma(t).$$

Teorema 2.5. Neka je $G \in H^2$ i neka $\mathring{G} \neq 0$. Tada G ima Stiltjesov inverz G^{-1} . Dalje, ako stavimo $J = G^{-1}$, dobijamo:

- (a) za svako $\sigma \in H^0$ postoji jedinstveno $\varepsilon \in H^0$ tako da $\sigma = \varepsilon * dG$;
- (b) $\varepsilon \in H^0$ i $\sigma = \varepsilon * dG$ implicira $\varepsilon = \sigma * dJ$;
- (c) J zadovoljava jednačinu

$$J * dG = H,$$

tako da za sve $t \in [0, \infty)$ važi

$$\mathring{G}J(t) + \int_0^t \dot{G}(t-\tau)J(\tau) d\tau = 1; \tag{20}$$

- (d) ako su $G(t), J(t) \in O(e^{s_0 t})$ kada $t \rightarrow \infty$ za neko $s_0 > 0$, tada

$$\tilde{G}(s)\tilde{J}(s) = \frac{1}{s^2},$$

za sve $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) > s_0$.

Dokaz. Postojanje G^{-1} sledi iz direktno iz teoreme 1.6, dok tvrđenje (b) sledi iz teoreme 1.5. Da bismo dokazali (a), definišimo ε na sledeći način: $\varepsilon = \sigma * dG^{-1}$. Tada zbog dela (a) teoreme 1.4 $\varepsilon \in H^0$, a zbog teoreme 1.5 $\sigma = \varepsilon * dG$. Tvrđenje (c) sledi iz teoreme 1.5 i dela pod (g) teoreme 1.4. Na kraju, tvrđenje (d) dobijamo primenom Laplasove transformacije na jednačinu 20:

$$\mathring{G}\tilde{J}(s) + \tilde{J}(s)(s - \tilde{G}(s) - \mathring{G}) = \frac{1}{s},$$

□

2.5 Diferencijalna forma konstitutivne jednačine

Definicija 2.3. Definišimo operatore $P(D)$ i $Q(D)$ na sledeći način:

$$P(D) = \sum_{k=0}^N p_k D^k \quad i \quad Q(D) = \sum_{k=0}^N q_k D^k, \quad (21)$$

gde sa D označavamo operator diferenciranja po vremenu, tj. $D^k f = f^{(k)}$.

Teorema 2.6. Neka su $\varphi, \psi \in H^N$, $N \geq 1$ i definišimo ξ kao

$$\xi = \varphi * d\psi \quad na \quad (-\infty, \infty).$$

Tada je $\xi \in H^N$ i važi

$$\xi^{(N)} = \mathring{\psi}\varphi^{(N)} + \sum_{n=1}^N \mathring{\varphi}^{(N-n)}\psi^{(n)} + \varphi^{(N)} * \psi^{(1)} \quad na \quad [0, \infty).$$

Dokaz. Neka $N = 1$. Na osnovu teoreme 1.4 pod (a) sledi da $\xi \in H^1$, a iz (g) sledi da

$$\xi = \mathring{\psi}\varphi + \varphi * \psi^{(1)} \quad na \quad [0, \infty).$$

Primenjujući operator diferenciranja na prethodnu jednačinu dobijamo

$$\xi = \mathring{\psi}\varphi^{(1)} + \mathring{\psi}^{(1)}\varphi + \varphi^{(1)} * \psi^{(1)} \quad na \quad [0, \infty).$$

Indukcijom se tvrđenje dokazuje za $N > 1$. □

Lema 2.2. Neka su a_r, b_{r-1}, c_{r-1} , $r = 1, 2, \dots, N$, konstante. Tada

$$\sum_{r=k}^N b_{r-k} \sum_{n=r}^N a_n c_{n-r} = \sum_{r=k}^N a_r \sum_{m=0}^{r-k} c_{r-k-m} b_m, \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Dokaz. Kako tvrđenje važi za $N = 1$, za $N > 1$ dokaz se pokazuje indukcijom. □

Lema 2.3. Neka je $G \in H^N$ ($N \geq 1$) i neka su p_r, q_r realne konstante, tako da $p_N \neq 0$. Tada:

(a)

$$q_r = \sum_{n=r}^N p_n \mathring{G}^{(n-r)} \quad (r = 1, \dots, N) \quad (22)$$

ekvivalentno je sa:

$$\begin{aligned} \mathring{G} &= \frac{q_1}{p_1} \quad za \quad N = 1, \\ \mathring{G} &= \frac{q_N}{p_N}, \quad \mathring{G}^{(r)} = \frac{1}{p_N} \left[q_{N-r} - \sum_{k=0}^{r-1} p_{N-r+k} \mathring{G}^{(k)} \right] \\ &(r = 1, 2, \dots, N) \quad za \quad N > 1; \end{aligned} \quad (23)$$

(b) ako $\sigma, \varepsilon \in H^N$ i $\sigma = \varepsilon * dG$, imamo da

$$\overset{\circ}{\sigma}^{(k)} = \sum_{r=0}^k \overset{\circ}{G}^{(k-r)} \overset{\circ}{\varepsilon}^{(r)} \quad (k = 0, 1, \dots, N); \quad (24)$$

(c) (23) i (24) implicira

$$\sum_{r=k}^N p_r \overset{\circ}{\sigma}^{(r-k)} = \sum_{r=k}^N q_r \overset{\circ}{\varepsilon}^{(r-k)} \quad (k = 1, 2, \dots, N); \quad (25)$$

(d) (25) i (23) implicira (24).

Dokaz.

(a) Za $N = 1$ tvrđenje očigledno važi. Definišimo $r = N - k$ i uvrstimo u jednačinu (22), tada dobijamo

$$q_{N-k} = \sum_{n=N-k}^N p_n \overset{\circ}{G}^{(n-N+k)} = \sum_{n=0}^k p_{n+N-k} \overset{\circ}{G}^{(n)}$$

iz čega sledi (23). Slično se dokazuje i obrnuta implikacija.

(b) Na osnovu tvrđenja 2.6 imamo da

$$\sigma^{(k)} = \overset{\circ}{G} \varepsilon^{(k)} + \sum_{r=1}^k \varepsilon^{(k-r)} G^{(r)} + \varepsilon^{(k)} * G^{(1)},$$

imajući u vidu da je $a * b|_{t=0} = 0$, dobijamo:

$$\overset{\circ}{\sigma}^{(k)} = \sum_{r=0}^k \overset{\circ}{G}^{(k-r)} \overset{\circ}{\varepsilon}^{(r)} \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

(c) Na osnovu dela pod (a) imamo:

$$\sum_{r=k}^N q_r \overset{\circ}{\varepsilon}^{(r-k)} = \sum_{r=k}^N \left(\sum_{n=r}^N p_n \overset{\circ}{G}^{(n-r)} \right) \overset{\circ}{\varepsilon}^{(r-k)},$$

koristeći (24) i lemu 2.2 dobijamo (25).

(d) Za $N = 1$ tvrđenje važi. Dokažimo za $N > 1$. Na osnovu dela pod (a) i (25) imamo da:

$$\sum_{r=k}^N p_r \overset{\circ}{\sigma}^{(r-k)} = \sum_{r=k}^N \overset{\circ}{\varepsilon}^{(r-k)} \sum_{n=r}^N p_n \overset{\circ}{G}^{(n-r)} \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Primenjujući lemu 2.2 na prethodnu jednačinu dobijamo:

$$\sum_{r=k}^N p_r \overset{\circ}{\sigma}^{(r-k)} = \sum_{r=k}^N p_r \sum_{m=0}^{r-k} \overset{\circ}{G}^{(r-k-m)} \overset{\circ}{\varepsilon}^{(m)}, \quad (26)$$

gde $k = 1, \dots, N$ i $n = 0, \dots, N - 1$. Kako su ε, σ, G proizvoljne funkcije iz klase H^N , da bi jednakost (26) važila, treba da:

$$\sigma^{(r-k)} = \sum_{m=0}^{r-k} \mathring{G}^{(r-k-m)} \varepsilon^{(m)},$$

za $n := r - k$ dobijamo željenu jednakost. \square

Lema 2.4. Neka $G, \varepsilon \in H^N$, $N \geq 1$, tako da važi $P(D)G = q_0$ na $(0, \infty)$. Neka

$$\sigma = \varepsilon * dG \quad \text{na} \quad (-\infty, \infty).$$

Tada je $\sigma \in H^N$ i važi

$$P(D)\sigma = q_0\varepsilon + \sum_{r=1}^N \varepsilon^{(r)} \sum_{n=r}^N p_n \mathring{G}^{(n-r)}.$$

Dokaz. Da σ pripada klasi H^N sledi iz tvrđenja 2.6. Na osnovu istog tvrđenja i dela (b) i (g) teoreme 1.4, dobijamo:

$$P(D)\sigma = \sum_{k=0}^N p_k (G^{(k)} \mathring{\varepsilon} + G^{(k)} * \varepsilon^{(1)}) + \sum_{k=1}^N p_k \sum_{r=1}^k \mathring{G}^{(k-r)} \varepsilon^{(r)} \quad \text{na} \quad (0, \infty).$$

Koristići osobinu distributivnosti Rimanove konvolucije, teoremu 1.2 pod (d), dobijamo:

$$P(D)\sigma = \mathring{\varepsilon} \sum_{k=0}^N p_k G^{(k)} + \left(\sum_{k=0}^N p_k G^{(k)} \right) * \varepsilon^{(1)} + \sum_{k=1}^N p_k \sum_{r=1}^k \mathring{G}^{(k-r)} \varepsilon^{(r)} \quad \text{na} \quad (0, \infty).$$

Kako je iz uslova leme $P(D)G = q_0$, imamo da:

$$P(D)\sigma = \mathring{\varepsilon} q_0 + q_0 * \varepsilon^{(1)} + \sum_{k=1}^N p_k \sum_{r=1}^k \mathring{G}^{(k-r)} \varepsilon^{(r)} \quad \text{na} \quad (0, \infty).$$

Kako je $\mathring{\varepsilon} q_0 + q_0 * \varepsilon^{(1)} = q_0 \varepsilon$ i koristeći lemu 2.2, dobijamo:

$$P(D)\sigma = q_0 \varepsilon + \sum_{r=1}^N \varepsilon^{(r)} \sum_{n=r}^N p_n \mathring{G}^{(n-r)}.$$

\square

Teorema 2.7. Neka su $\sigma, \varepsilon \in H^N$ ($N \geq 1$) i neka važi $\sigma = \varepsilon * dG$. Dalje, neka funkcija G ima sledeće osobine: $G \in H^N$ i postoje realne konstante q_0, p_0, \dots, p_N tako da $P(D)G = q_0$ na $(0, \infty)$. Tada:

(a) σ i ε zadovoljavaju sledeću diferencijalnu jednačinu

$$P(D)\sigma = Q(D)\varepsilon \quad \text{na} \quad (0, \infty),$$

gde je

$$q_r = \sum_{n=r}^N p_n \mathring{G}^{(n-r)} \quad (r = 1, 2, \dots, N);$$

(b) σ i ε zadovoljavaju sledeće početne uslove

$$\sum_{r=k}^N p_r \mathring{\sigma}^{(r-k)} = \sum_{r=k}^N q_r \mathring{\varepsilon}^{(r-k)} \quad (r = 1, 2, \dots, N).$$

Dokaz.

- (a) Kako uslovi ove teoreme zadovoljavaju i uslove prethodne leme 2.4, za $q_r = \sum_{n=r}^N p_n \mathring{G}^{(n-r)}$ važi $P(D)\sigma = Q(D)\varepsilon$.
- (b) Tvrdjenje sledi iz leme 2.3. □

Definicija 2.4. (Parovi diferencijalnih operatora reda N) *Ako u (21) važi*

$$p_N \neq 0 \quad \text{ili} \quad q_N \neq 0,$$

tada se za par diferencijalnih operatora $[P(D), Q(D)]$ kaže da je reda N . Ako je $p_N \neq 0$ kažemo da $[P(D), Q(D)]$ pripada tipu relaksacije, a ako je $q_N \neq 0$ kažemo da pripada tipu pužanja.

Definicija 2.5. *Neka je $[P(D), Q(D)]$ par diferencijalnih operatora reda $N \geq 1$ i neka $G, \sigma, \varepsilon \in H^N$.*

- (a) *Kažemo da $[P(D), Q(D)]$ pripada funkciji relaksacije G ako*

$$\sigma = \varepsilon * dG \quad \text{na} \quad (-\infty, \infty) \quad (27)$$

implicitira

$$P(D)\sigma = Q(D)\varepsilon \quad \text{na} \quad (0, \infty) \quad \text{i} \quad \sum_{r=k}^N p_r \mathring{\sigma}^{(r-k)} = \sum_{r=k}^N q_r \mathring{\varepsilon}^{(r-k)}, \quad (28)$$

gde $k = 1, 2, \dots, N$.

- (b) *Kažemo da funkcija G pripada paru diferencijalnih operatora $[P(D), Q(D)]$ ako (28) implicitira (27).*

Teorema 2.8. *Neka je $[P(D), Q(D)]$ par diferencijalnih operatora reda $N \geq 1$ i neka $\sigma, \varepsilon \in H^N$. Ako $[P(D), Q(D)]$ pripada funkciji relaksacije G , tada:*

- (a) *za funkciju G važi:*

1. $P(D)G = q_0$ na $(0, \infty)$,
2. $P(D)\sigma = Q(D)\varepsilon$ na $(0, \infty)$, gde je $q_r = \sum_{n=r}^N p_n \mathring{G}^{(n-r)}$;

- (b) $[P(D), Q(D)]$ je tip relaksacije.

Dokaz.

- (a) Neka $\varepsilon = h$ i $\sigma = G$. Kako je h neutralni element za Riman-Stiltjesovu konvoluciju[§] sledi da $\sigma = G * d\varepsilon$, a na osnovu komutativnosti[¶] dobijamo: $\sigma = \varepsilon * dG$. Pošto ovako definisani σ, ε pripadaju prostoru H^N i kako $[P(D), Q(D)]$ pripada funkciji relaksacije G , važi:

$$P(D)G = Q(D)h = q_0.$$

Kako su sa prethodnom jednačinom zadovoljeni svi uslovi teoreme 2.7, važi:

$$P(D)\sigma = Q(D)\varepsilon \quad \text{na} \quad (0, \infty), \quad \text{gde je} \quad q_r = \sum_{n=r}^N p_n \mathring{G}^{(n-r)}.$$

- (b) Treba pokazati da $p_N \neq 0$. Kako je $[P(D), Q(D)]$ par diferencijalnih operatora reda N , tada $p_n \neq 0$ ili $q_n \neq 0$. Primitimo da je slučaj $p_n = 0$ i $q_n \neq 0$ nemoguć zbog $q_n = p_n \mathring{G}$. □

[§]Videti teoremu 1.4, (f).

[¶]Videti teoremu 1.4, (b).

Teorema 2.9. Neka je $[P(D), Q(D)]$ par diferencijalnih operatora reda $N \geq 1$. Tada postoji funkcija relaksacije $G \in H^N$ koja pripada $[P(D), Q(D)]$ ako i samo ako je $[P(D), Q(D)]$ tip relaksacije. Šta više, ako takva funkcija G postoji, ona je jedinstvena i pripada prostoru H^∞ , i predstavlja rešenje diferencijalne jednačine

$$P(D)G = q_0, \quad \text{na } (0, \infty),$$

date sa početnim uslovima

$$\begin{aligned} \mathring{G} &= \frac{q_1}{p_1} \quad \text{za } N = 1, \\ \mathring{G} &= \frac{q_N}{p_N}, \quad \mathring{G}^{(r)} = \frac{1}{p_N} \left[q_{N-r} - \sum_{k=0}^{r-1} p_{k-r+N} \mathring{G}^{(k)} \right] \\ &(r = 1, 2, \dots, N-1) \quad \text{za } N > 1. \end{aligned}$$

Dokaz. Videti u [GUR], teorema 4.4.

Teorema 2.10. Neka je $[P(D), Q(D)]$ par diferencijalnih operatora reda $N \geq 1$. Ako je u pitanju par relaksacije ($p_n \neq 0$), onda za svako $\varepsilon \in H^N$ odgovara tačno jedno $\sigma \in H^N$ tako da važi:

1. $P(D)\sigma = Q(D)\varepsilon$ na $(0, \infty)$,
2. $\sum_{r=k}^N p_r \mathring{\sigma}^{(r-k)} = \sum_{r=k}^N q_r \mathring{\varepsilon}^{(r-k)}$ ($k = 1, 2, \dots, N$).

Dokaz. Videti u [GUR], teorema 4.6.

Teorema 2.11. Neka je $P(D), Q(D)$ par diferencijalnih operatora reda $N \geq 1$. Neka su $\varepsilon, \sigma \in H^N$ i neka zadovoljavaju

1. diferencijalnu jednačinu: $P(D)\sigma = Q(D)\varepsilon$ na $(0, \infty)$,
2. početne uslove: $\sum_{r=k}^N p_r \mathring{\sigma}^{(r-k)} = \sum_{r=k}^N q_r \mathring{\varepsilon}^{(r-k)}$ za $k = 1, 2, \dots, N$.

Dalje, neka su $\sigma(t)$ i $\varepsilon(t)$ reda $O(e^{s_0 t})$ kad $t \rightarrow \infty$ za neku konstantu s_0 . Tada

$$P(s)\tilde{\sigma}(s) = Q(s)\tilde{\varepsilon}(s),$$

za sve $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(s) > s_0$.

Dokaz. Primenjujući Laplasovu transformaciju na $P(D)\sigma = Q(D)\varepsilon$, dobijamo

$$P(s)\tilde{\sigma}(s) - \frac{1}{s} \sum_{k=1}^N p_k \sum_{r=1}^k s^r \mathring{\sigma}^{(k-r)} = Q(s)\tilde{\varepsilon}(s) - \frac{1}{s} \sum_{k=1}^N q_k \sum_{r=1}^k s^r \mathring{\varepsilon}^{(k-r)}.$$

Koristići lemu (2.2) dobijamo

$$P(s)\tilde{\sigma}(s) - \frac{1}{s} \sum_{n=1}^N s^n \sum_{r=k}^N p^r \mathring{\sigma}^{(r-n)} = Q(s)\tilde{\varepsilon}(s) - \frac{1}{s} \sum_{n=1}^N s^n \sum_{r=k}^N q_r \mathring{\varepsilon}^{(r-n)}.$$

Na osnovu uslova (2) teoreme, sledi tražena jednakost:

$$P(s)\tilde{\sigma}(s) = Q(s)\tilde{\varepsilon}(s).$$

□

Teorema 2.12. *Neka su $[P(D), Q(D)]$ reda $N \geq 1$ i neka $G \in H^N$. Dalje, neka par $[P(D), Q(D)]$ pripada funkciji relaksacije G . Tada postoji realan broj s_0 tako da*

$$\tilde{G}(s) = \frac{Q(s)}{sP(s)},$$

za sve $R(s) > s_0$.

Dokaz. Videti u [GUR], teorema 4.8.

Prethodne teoreme, definicije i tvrđenja imaju svoju dualnu reprezentaciju u vidu puzanja J .

3 Viskoelastični modeli i konstitutivne jednačine

U ovom poglavlju pokazaćemo kako se dolazi do konstitutivne jednačine. Prvo ćemo prikazati pet klasičnih modela: Hukov, Njutnov, Vojtov, Maksvelov i Zenerov. Klasični modeli imaju svoja ograničenja i ne mogu najpreciznije opisati viskoelastična svojstva materijala. Zbog toga su uvedeni frakcioni modeli koji se baziraju na frakcionim izvodima, koje ćemo takođe prikazati.

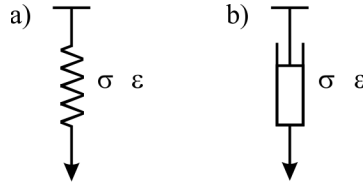
3.1 Klasični modeli

Zajednička osobina ovih modela je što se dobijaju kombinacijom *elastičnih* i *viskoznih* elemenata u rednoj ili paralelnoj vezi. Elastični element nam govori da je napon proporcijalan izduženju^{||}, a viskozni element da je napon proporcijalan promeni izduženja^{**}. Pri izvođenju ovih modela, pretpostavljamo da za početne uslove važi: $\sigma(0) = \varepsilon(0) = \dot{\sigma}(0) = \dot{\varepsilon}(0) = 0$.

3.1.1 Hukov model

Hukov model (videti sliku 9 pod a)), predstavlja samo elastični element, granični slučaj viskoelastičnih modela:

$$\sigma(x, t) = q_0 \varepsilon(x, t).$$



Slika 9. Hukov model i Njutnov model.

Koristeći teoremu 2.12 imamo da:

$$\tilde{G}(s) = \frac{q_0}{s}.$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije na prethodnu jednačinu, dobijamo:

$$G(t) = q_0.$$

Sličnim postupkom dobijamo:

$$J(t) = \frac{1}{q_0}. \tag{29}$$

3.1.2 Njutnov model

Njutnov model predstavlja samo viskozni element (videti sliku 9 pod b)):

$$\sigma(x, t) = q_1 \dot{\varepsilon}(x, t).$$

Primenom teoreme 2.12 i inverzne Laplasove transformacije^{††} za funkcije puzanja i relaksacije dobijamo sledeći par funkcija:

^{||} $\sigma = q_0 \varepsilon$

^{**} $\sigma = q_0 \dot{\varepsilon}$

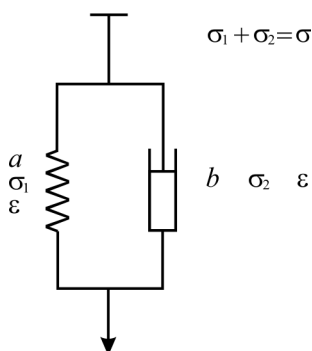
^{††} U svim klasičnim modelima primenjivaćemo ovaj postupak za izračunavanje funkcije relaksacije i puzanja.

$$\begin{cases} J(t) = \frac{t}{q_1} \\ G(t) = q_1 \delta(t) \end{cases}$$

3.1.3 Vojtov model

Posmatrajmo Vojtov model^{‡‡} (slika 10): vidimo da su elastični i viskozni element u paralelnoj vezi. Takav šematski prikaz tumačimo na sledeći način: elastični i viskozni element će imati podjednako izduženje ε , dok se ukupan napon σ može predstaviti kao zbir napona koji deluje na elastični element σ_1 i napona σ_2 koji deluje na viskozni element. Tada dobijamo sledeće jednačine:

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= \sigma_1(x, t) + \sigma_2(x, t) \\ \sigma_1(x, t) &= a\varepsilon(x, t) \\ \sigma_2(x, t) &= b\dot{\varepsilon}(x, t) \end{aligned}$$



Slika 10. Vojtov model.

Uvrštavanjem druge i treće jednačine u prvu jednačinu dobijamo:

$$\sigma(x, t) = a\varepsilon(x, t) + b\dot{\varepsilon}(x, t)$$

gde je a koeficijent elastičnosti, a b koeficijent viskoznosti, elastičnog i viskoznog elementa, redom. Generalno ćemo, osim ako ne naglasimo drugačije, koeficijente elastičnosti označavati sa a , a koeficijente viskoznosti sa b . Ipak, zbog koherentnosti izlaganja, na kraju ćemo konstitutivnu jednačinu zapisivati u obliku $P(D)\sigma = Q(D)\varepsilon$ ^{§§}, gde je $p_0 = 0$. Dakle, imamo:

$$\sigma(x, t) = q_0\varepsilon(x, t) + q_1\dot{\varepsilon}(x, t).$$

Za puzanje i relaksaciju dobijamo sledeći par funkcija:

$$\begin{cases} J(t) = J_1(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}}), & J_1 = \frac{1}{q_0}, \tau_\varepsilon = \frac{q_1}{q_0} \\ G(t) = \dot{G} + G_- \delta(t), & \dot{G} = q_0, G_- = q_1 \end{cases}$$

^{‡‡}Ovaj model se još naziva i Kelvinov ili Kelvin-Vojtov model.

^{§§}Videti definiciju 2.3.

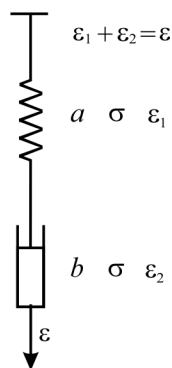
3.1.4 Maksvelov model

Posmatrajmo sada Maksvelov model (slika 11): imamo serijsku vezu elastičnog i viskoznog elementa, oni su pod istim naponom, ali njihovo izduženje će biti različito. Označimo sa ε ukupno izduženje, a sa ε_1 i ε_2 izduženje elastičnog i viskoznog elementa, redom. Tada dobijamo sledeće jednačine:

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon_1(x, t) + \varepsilon_2(x, t)$$

$$\sigma(x, t) = a\varepsilon_1(x, t)$$

$$\sigma(x, t) = b\dot{\varepsilon}_2(x, t)$$



Slika 11. Maksvelov model.

Diferenciranjem prve i druge jednačine, možemo prethodni sistem jednačina svesti na sledeći oblik:

$$\frac{1}{b}\sigma(x, t) + \frac{1}{a}\dot{\sigma}(x, t) = \dot{\varepsilon}(x, t),$$

tj.

$$\sigma(x, t) + p_1\dot{\sigma}(x, t) = q_1\dot{\varepsilon}(x, t).$$

Za funkcije puzanja i relaksacije, dobijamo sledeći par funkcija:

$$\begin{cases} J(t) = \dot{J} + J_+t, & \dot{J} = \frac{p_1}{q_1}, J_+ = \frac{1}{q_1}, \\ G(t) = G_1 e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}}, & G_1 = \frac{q_1}{p_1}, \tau_\sigma = p_1 \end{cases}$$

3.1.5 Zenerov model

Na slici 12 je prikazan klasičan Zenerov model, gde imamo Vojtov element u serijskoj vezi sa elastičnim elementom. Sličnom analizom kao kod Maksvelovog modela, elastičnom elementu pridružujemo izduženje ε_1 , a Vojtovom ε_2 , dok je ukupno izduženje ε , a napon σ isti za oba elementa. Vojtov element posmatramo kao i Vojtov model, sa ukupnim naponom σ i ukupnim izduženjem ε_2 . Dobijamo sledeći sistem jednačina:

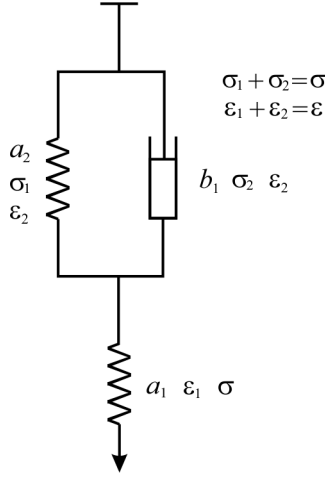
$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon_1(x, t) + \varepsilon_2(x, t)$$

$$\sigma(x, t) = a_1\varepsilon_1(x, t)$$

$$\sigma(x, t) = \sigma_1(x, t) + \sigma_2(x, t)$$

$$\sigma_1(x, t) = a_2\varepsilon_2(x, t)$$

$$\sigma_2(x, t) = b_1\dot{\varepsilon}_2(x, t).$$



Slika 12. Zenerov model.

Da bismo dobili konstitutivnu jednačinu iz prethodnog sistema jednačina, primenjujemo Laplasovu transformaciju po vremenu i dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}(x, s) &= \tilde{\varepsilon}_1(s, t) + \tilde{\varepsilon}_2(s, t) \\ \tilde{\sigma}(s, t) &= a_1 \tilde{\varepsilon}_1(s, t) \\ \tilde{\sigma}(s, t) &= \tilde{\sigma}_1(s, t) + \tilde{\sigma}_2(s, t) \\ \tilde{\sigma}_1(s, t) &= a_2 \tilde{\varepsilon}_2(s, t) \\ \tilde{\sigma}_2(s, t) &= b_1 s \tilde{\varepsilon}_2(s, t).\end{aligned}$$

Sređivanjem tog sistema dobijamo:

$$\left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right) \tilde{\sigma}(x, s) + \frac{b_1}{a_1} s \tilde{\sigma}(x, s) = a_2 \tilde{\varepsilon}(x, s) + b_1 s \tilde{\varepsilon}(x, s)$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije dobijamo:

$$\left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right) \sigma(x, t) + \frac{b_1}{a_1} \dot{\sigma}(x, t) = a_2 \varepsilon(x, t) + b_1 \dot{\varepsilon}(x, t),$$

tj.

$$\sigma(x, t) + p_1 \dot{\sigma}(x, t) = q_0 \varepsilon(x, t) + q_1 \dot{\varepsilon}(x, t),$$

Za puzanje i relaksaciju, dobijamo sledeći par funkcija:

$$\begin{cases} J(t) = \mathring{J} + J_1(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}}), & \mathring{J} = \frac{p_1}{q_1}, J_1 = \frac{1}{q_0} - \frac{p_1}{q_1}, \tau_\varepsilon = \frac{q_1}{q_0} \\ G(t) = \mathring{G} + G_1 e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}}, & \mathring{G} = q_0, G_1 = \frac{q_1}{p_1} - q_0, \tau_\sigma = p_1 \end{cases}$$

3.2 Frakcioni modeli

Frakcioni modeli u linearnoj viskoelastičnosti uopštavaju klasične modele, tako što se umesto Njutnovog viskoznog elementa uvodi *viskozno-elastični element*, gde se prvi izvod u jednačini $\sigma = \dot{\varepsilon}$ zamenjuje frakcionim izvodom:

$$\sigma = {}_0 D_t^\nu \varepsilon,$$

gde je $0 < \nu < 1$. Da bismo opravdali korišćenje frakcionog izvoda u prethodnoj jednačini, posmatrajmo sledeću funkciju puzanja:

$$J(t) = \frac{a}{\Gamma(1+\nu)} t^\nu, \quad a > 0, \quad 0 < \nu < 1.$$

Ovakva funkcija puzanja rezultat je brojnih eksperimenata vršenim na linearno viskoelastičnim materijalima. Koristeći teoremu 2.2, deformaciju možemo izraziti na sledeći način:

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{a}{\Gamma(1+\nu)} t^\nu \right) * d\sigma = \frac{a}{\Gamma(1+\nu)} \int_0^t (t-\tau)^\nu d\sigma.$$

Ako pretpostavimo da $\sigma \in H^1$, možemo zapisati $d\sigma$ kao $\dot{\sigma} dt$, pa korišćenjem parcijalne integracije dobijamo:

$$\varepsilon(t) = \frac{a\nu}{\Gamma(1+\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} \sigma(\tau) d\tau.$$

Kako na osnovu teoreme 1.7 važi:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \text{za } \mathcal{R}e\{z\} > 0,$$

sledi da:

$$\varepsilon(t) = \frac{a}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} \sigma(\tau) d\tau. \quad (30)$$

Primetimo da, imajući u vidu definiciju Riman-Liuvilovog frakcionog integrala:

$${}_0I_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0,$$

jednačinu (30) možemo zapisati u obliku:

$$\varepsilon(t) = a {}_0I_t^\nu \sigma(t). \quad (31)$$

Ako na prethodnu jednačinu sa leve strane primenimo Riman-Liuvilov frakcioni izvod (videti definiciju 1.13), koristeći deo pod (d) teoreme 1.12, dobijamo:

$$\sigma(t) = q_1 {}_0D_t^\nu \varepsilon(t), \quad (32)$$

gde je $q_1 = a^{-1}$.

Primetimo da jednačine (31) i (32) možemo zapisati i preko operatora Φ_α na sledeći način:

$$\varepsilon(t) = a\Phi_\nu(t) * \sigma(t) \quad \text{i} \quad \sigma(t) = q_1\Phi_{-\nu}(t) * \varepsilon(t).$$

^{¶¶}Delovanje operatora Φ_α na funkciju f definišemo u vidu konvolucije Φ_α i f , tj. $\Phi_\alpha * f$.

4 Prostiranje talasa

U zavisnosti od konstitutivnog modela imamo različite talasne jednačine. Prvo ćemo opisati prostiranje talasa ne definišući eksplicitno vezu između napona i deformacije, a potom prikazati talasne jednačine klasičnih modela i frakcionog Zenerovog modela.

Za viskoelastičnu sredinu uzećemo homogeni viskoelastični štap gustine ρ , koji geometrijski modeliramo polupravom: poprečni presek štapa je zanemarljiv, a u pozitivnom smeru x -ose proteže se do beskonačnosti. Pretpostavljamo da se pre početka merenja ($t < 0$), štap nalazi u ravnoteži, i da na njega ne deluju nikakve sile. U nekom trenutku na jedan kraj štapa počinje da deluje spoljašnja sila koja dovodi do poremećaja $r_0(t) = r(0, t)$ ($t \geq 0$). Potom se poremećaj $r(x, t)$ prostire duž štapa. Poremećaj r možemo opisati kao promenu položaja čestica u štapu, tj. preko pomeraja u .

Promenu pomeraja u izrazićemo pomoću jednačine kretanja, geometrijske jednačine i konstitutivne jednačine, kao i početnih i graničnih uslova koji će nam biti unapred poznati. Dakle, problem „nalaženja” u se svodi na sledeći sistem jednačina:

(i)

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma(x, t) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) \quad (\text{jednačina kretanja});$$

(ii)

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \quad (\text{geometrijska jednačina})$$

(iii)

$$F[\sigma(x, t), \varepsilon(x, t)] = 0 \quad (\text{konstitutivna jednačina});$$

(iv)

$$u(0, t) = u_0(t), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0, \quad (\text{granični uslovi});$$

(v)

$$u(x, 0^+) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \Big|_{t=0^+} = 0, \quad x > 0 \quad (\text{početni uslovi}).$$

Veza između napona σ i deformacije ε data je preko jednačina:

$$\varepsilon(t) = \sigma(0^+)J(t) + \int_0^t J(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad \text{i} \quad \sigma(t) = \varepsilon(0^+)G(t) + \int_0^t G(t - \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau,$$

gde G i J , kao u prethodnom poglavlju, predstavljaju funkcije relaksacije i puzanja, redom. Već smo videli da primenom Laplasove transformacije vezu između σ i ε možemo izraziti na sledeći način:

$$\tilde{\varepsilon}(x, s) = s\tilde{J}(s)\tilde{\sigma}(x, s) \quad \text{i} \quad \tilde{\sigma}(x, s) = s\tilde{G}(s)\tilde{\varepsilon}(x, s). \quad (33)$$

Primenjući Laplasovu transformaciju na jednačinu kretanja i na geometrijsku jednačinu, dobijamo jednačine:

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\sigma}(x, s) = \rho s^2 \tilde{u}(x, s) \quad \text{i} \quad \tilde{\varepsilon}(x, s) = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}(x, s).$$

Kombinujući prethodne dve jednačine i jednu od jednačina iz (33) dobijamo:

*** Zbog početnih uslova važi: $s \cdot u(x, 0)' - u(x, 0) = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \tilde{u}(x, s) - [\mu(s)]^2 \tilde{u}(x, s) = 0, \quad (34)$$

gde je funkcija μ data sa

$$\mu(s) = \sqrt{\rho s} [s\tilde{G}(s)]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\rho s} [s\tilde{J}(s)]^{\frac{1}{2}}. \quad (35)$$

Primetimo da je $\mu(s) \geq 0$ za $s \geq 0$. Tada je rešenje obične linearne diferencijalne jednačine (34) dato sa

$$\tilde{u}(x, s) = \tilde{u}_0(s) e^{-\mu(s)x}.$$

Primenjujući inverznu Laplasovu transformaciju dobijamo

$$u(x, t) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \tilde{u}_0(s) e^{st-\mu(s)x} ds. \dagger\dagger \quad (36)$$

Definicija 4.1. (Grinova funkcija) Označimo sa \mathcal{G} sledeću funkciju:

$$\mathcal{G}(x, t) \doteq \tilde{\mathcal{G}}(x, s) := e^{-\mu(s)x}.$$

Funkciju \mathcal{G} nazivamo Grinovom funkcijom ili impulsnom reakcijom.

Primetimo da jednačinu (36) možemo zapisati u sledećem obliku:

$$u(x, t) = \int_0^t \mathcal{G}(x, t - \tau) u_0(\tau) d\tau = \mathcal{G}(x, t) * u_0(t). \quad (37)$$

4.1 Slučaj klasičnih modela

U ovom delu prikazujemo talasne jednačine u Hukovom, Njutnovom, Vojotovom, Maksvelovom i Zenerovom modelu. Da bismo došli do talasnih jednačina pomenutih modela, koristićemo jednakosti (34), (35) i inverznu Laplasovu transformaciju i pretpostavićemo da je $u(x, 0) = u'(x, 0) = 0$.

• Hukov model

U ovom modelu za funkciju puzanja imamo: $J = q_0$ ($\tilde{J} = s^{-1}q_0$), primenom jednačine (35) dobijamo:

$$[\tilde{\mu}(s)]^2 = \rho q_0 s^2.$$

Na osnovu jednačine (34) sledi da:

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \tilde{u}(x, s) - \rho q_0 s^2 \tilde{u}(x, s) = 0,$$

primenom inverzne Laplasove transformacije dobijamo klasičnu talasnu jednačinu:

$$\frac{\partial}{\partial x^2} u(x, t) - c^2 \frac{\partial}{\partial t^2} u(x, t) = 0, \quad c = \sqrt{\rho q_0}.$$

• Njutnov model

Kod Njutnovog modela za funkciju puzanja imamo $J = q_1^{-1}$ ($\tilde{J} = q_1 s^{-1}$), koristeći jednačinu (35) dobijamo:

$$[\tilde{\mu}(s)]^2 = \rho q_1 s.$$

^{†††}Gde je γ broj iz teoreme 1.18.

Na osnovu jednačine (34) sledi da:

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \tilde{u}(x, s) - \rho q_1 s \tilde{u}(x, s) = 0,$$

primenom inverzne Laplasove transformacije dobijamo klasičnu difuznu jednačinu:

$$\frac{\partial}{\partial x^2} u(x, t) - c \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = 0, \quad c = \rho q_1.$$

- **Vojtov model**

Za funkciju relaksacije imamo $G = \overset{\circ}{G} + G_- \delta(t)$ ($\tilde{G}(s) = s^{-1} \overset{\circ}{G} + G_-$). Za kvadrat funkcije μ dobijamo:

$$[\mu(s)]^2 = \rho \frac{s^2}{\overset{\circ}{G} + G_- s},$$

dok se za jednačinu (34) dobija:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u}(x, s) - \rho \frac{s^2}{\overset{\circ}{G} + G_- s} \tilde{u}(x, s) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u}(x, s) - \frac{k_1}{k_2 + s} s^2 \tilde{u}(x, s) = 0,$$

gde smo radi preglednosti uveli smene: $k_1 = \rho G_-^{-1}$ i $k_2 = \overset{\circ}{G} G_-^{-1}$. Primenjujući inverznu Laplasovu transformaciju dobijamo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - k_1 e^{-k_2 t} *_t \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = 0.$$

Napominjemo da u slučaju funkcija više promenljivih operator konvolucije označamo sa $*_t$ gde je t promenljiva po kojoj operator deluje, tj. $g(x, t) *_t f(x, t) = \int_0^t g(x, t - \tau) f(x, \tau) d\tau$. Slično definišemo i $*_x$.

- **Maksvelov model**

Za funkciju relaksacije imamo $G = G_1 e^{-t\tau_\sigma^{-1}}$ ($\tilde{G}(s) = G_1 (s + \tau_\sigma^{-1})^{-1}$). Za kvadrat funkcije μ dobijamo:

$$[\mu(s)]^2 = \frac{\rho}{G_1} \left(1 + \frac{1}{\tau_\sigma s} \right),$$

dok se za jednačinu (34) dobija:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u}(x, s) - \frac{\rho}{G_1} \left(1 + \frac{1}{\tau_\sigma s} \right) \tilde{u}(x, s) = 0.$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije imamo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \frac{\rho}{G_1} u(x, t) - \frac{\rho}{G_1 \tau_\sigma} *_t u(x, t) = 0.$$

- **Zenerov model**

Funkcija relaksacije u ovom slučaju ima oblik:

$$G = G_1 e^{-t\tau_\sigma^{-1}} + \overset{\circ}{G} \quad (\tilde{G}(s) = G_1 (s + \tau_\sigma^{-1})^{-1} + s^{-1} \overset{\circ}{G}),$$

dok za μ imamo:

$$[\mu(s)]^2 = \rho \frac{s + \tau_\sigma}{s G_1 + (s + \tau_\sigma) \overset{\circ}{G}},$$

pa se za jednačinu (34) dobija:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u}(x, s) - \rho \frac{s + \tau_\sigma}{sG_1 + (s + \tau_\sigma)\overset{\circ}{G}} \tilde{u}(x, s) = 0.$$

Sređivanjem prethodne jednačine i uvođenjem smena: $k_1 = \frac{\rho}{G_1 + \overset{\circ}{G}}$ i $k_2 = \frac{\tau_\sigma \overset{\circ}{G}}{G_1 + \overset{\circ}{G}}$ dobijamo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u}(x, t) - k_1 \frac{s}{s + k_2} \tilde{u}(x, s) + \frac{\tau_\sigma}{s + k_2} \tilde{u}(x, s) = 0.$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije na prethodnu jednačinu dobijamo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - k_1 e^{-tk_2} *_t \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \tau_\sigma e^{-tk_2} *_t u(x, t) = 0.$$

Postupak rešavanja prethodnih talasnih jednačina može se naći u [VLA].

4.2 Frakcioni Zenerov model

U ovom odeljku, služeći se radom [KON], prikazujemo frakcioni Zenerov model prostiranja talasa u viskoelastičnoj sredini i rešavamo $\tilde{u}(s)$ ^{†††}.

Posmatrajmo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma(x, t) &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) \\ \sigma(x, t) + \tau_0 D_t^\alpha \sigma(x, t) &= \varepsilon(x, t) + {}_0 D_t^\alpha \varepsilon(x, t) \\ \varepsilon(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} u(x, t), \end{aligned} \quad (38)$$

gde $0 \leq \alpha < 1$, $1 < \tau < 0$ i $t \geq 0$. Podsetimo se da prva jednačina sistema (38) predstavlja jednačinu kretanja, dok treća predstavlja geometrijsku jednačinu. Druga jednačina datog sistema je konstitutivna jednačina data u frakcionom obliku ^{§§§}.

Za početne uslove postavljamo sledeće jednačine:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = v_0(x), \quad \sigma(x, 0) = 0, \quad \varepsilon(x, 0) = 0; \quad (39)$$

dok za granične uslove biramo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(x, t) = 0.$$

Primenom Laplasove transformacije u odnosu na promenljivu t na (38), dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\sigma}(x, s) &= s^2 \tilde{u}(x, s) - s u_0(x) - v_0(x) \\ \tilde{\sigma}(x, s) + \tau s^\alpha \tilde{\sigma}(x, s) &= \tilde{\varepsilon}(x, s) + s^\alpha \tilde{\varepsilon}(x, s) \\ \tilde{\varepsilon}(x, s) &= \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}(x, s). \end{aligned} \quad (40)$$

^{†††}Egzaktno rešenje, $u(t)$, može se pronaći u [KON].

^{§§§}Primetimo da ako bismo frakcioni izvod zamenili sa klasičnim izvodom prvog reda, dobili bismo klasičnu Zenerovu konstitutivnu jednačinu.

Iz druge jednačine sistema (40) dobijamo sledeću vezu između Laplasovih transformacija napona i deformacije:

$$\tilde{\sigma}(x, s) = \frac{1 + s^\alpha}{1 + \tau s^\alpha} \tilde{\varepsilon}(x, s).$$

Ako prethodnu jednačinu diferenciramo po promenljivoj x dobijamo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\sigma}(x, s) = \frac{1 + s^\alpha}{1 + \tau s^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varepsilon}(x, s). \quad (41)$$

Kombinujući prvu i drugu jednačinu iz sistema (40) i jednačinu (41) dobijamo:

$$s^2 \tilde{u}(x, s) - s u_0(x) - v_0(x) = \frac{1 + s^\alpha}{1 + \tau s^\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u}(x, s). \quad (42)$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije na prethodnu jednačinu dobijamo:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - u_0(x) \delta'(t) - v_0(x) \delta(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1 + s^\alpha}{1 + \tau s^\alpha} \right) *_t \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t). \quad (43)$$

Definišimo sledeći linearno-diferencijalni operator:

$$P := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1 + s^\alpha}{1 + \tau s^\alpha} \right) *_t \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

tada frakcionu talasnu jednačinu (43) možemo zapisati na sledeći način:

$$Pu = u_0(x) \delta'(t) + v_0(x) \delta(t).$$

Definišimo sada prostor *brzo opadajućih funkcija*:

$$S'(\mathbb{R}) := \{ \varphi \mid \forall p, \alpha \in \mathbb{N}_0 \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (1 + |t|^2)^{\frac{p}{2}} |D_t^\alpha \varphi(t)| = 0 \}.$$

Za detaljniju definiciju S' pogledati [PIL].

Da bismo izračunali \tilde{u} koristićemo sledeću lemu:

Lema 4.1. *Neka $f \in S'(\mathbb{R})$ tada jednačina:*

$$v'' - \omega v = -f, \quad (44)$$

ima rešenje $v \in S'(\mathbb{R})$ za sve $\omega \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ oblika:

$$v = \frac{e^{-\sqrt{\omega}|x|}}{2\omega} * f,$$

gde je $\sqrt{\omega}$ glavna grana višeznačne funkcije $z \rightarrow \sqrt{z}$, tj. $\arg \omega \in (-\pi, \pi]$.

Dokaz. Primenom Furijeove transformacije na (44) dobijamo:

$$-s^2 \hat{v}(s) - \omega \hat{v} = -\hat{f}(s) \quad \text{tj.} \quad \hat{v}(s) = \frac{\hat{f}(s)}{s^2 + \omega},$$

iz čega sledi:

$$v(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega}; t \right\} * f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ist}}{s^2 + \omega} ds * f(t).$$

Da bismo izračunali integral:

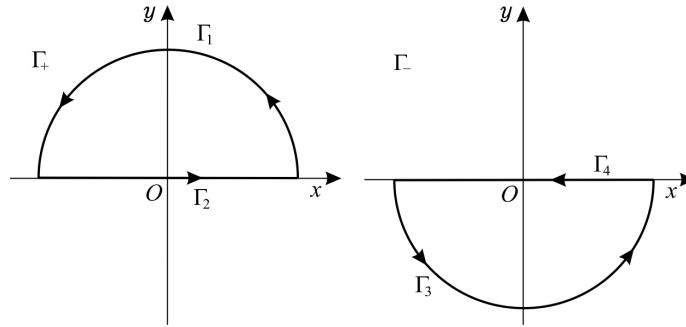
$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ist}}{s^2 + \omega} ds,$$

integralićemo kompleksnu funkciju $z \rightarrow \frac{e^{itz}}{z^2 + \omega}$ po sledećim konturama:

(i) ako je $t \geq 0$:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{e^{itz}}{z^2 + \omega} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{e^{itz}}{z^2 + \omega} dz = \oint_{\Gamma_+} \frac{e^{itz}}{z^2 + \omega} dz,$$

gde je: $\Gamma_+ = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 = \{z = Re^{i\varphi} \mid R > 0, 0 < \varphi < \pi\}$,
 $\Gamma_2 = \{z = s \mid -R < s < R\}$ (slika 13);



Slika 13. Kontura pri računanju inverzne Furijeove transformacije.

(ii) ako je $t < 0$:

$$\int_{\Gamma_3} \frac{e^{itz}}{z^2 + \omega} dz + \int_{\Gamma_4} \frac{e^{itz}}{z^2 + \omega} dz = \oint_{\Gamma_-} \frac{e^{itz}}{z^2 + \omega} dz,$$

gde je: $\Gamma_- = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, $\Gamma_3 = \{z = Re^{i\varphi} \mid R > 0, -\pi < \varphi < 0\}$,
 $\Gamma_4 = \{z = -s \mid -R < s < R\}$.

Primitimo da integrali na konturama Γ_1 i Γ_3 teže ka nuli kada $R \rightarrow \infty$. Neka je $t \geq 0$, koristeći Košijevu teoremu o reziduumu 1.19, dobijamo:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ist}}{s^2 + \omega} ds = \oint_{\Gamma_+} \frac{e^{itz}}{z^2 + \omega} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^k \text{Res}\left(\frac{e^{itz}}{z^2 + \omega}; z_i\right),$$

gde z_i predstavljaju singularitete funkcije $z \rightarrow \frac{e^{itz}}{z^2 + \omega}$ unutar konture Γ_+ . Kako je $\omega \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ jedini singularitet imamo u tački $z_1 = i\sqrt{\omega}$, pa dobijamo:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itz}}{z^2 + \omega} dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{itz}}{2z} \Big|_{z=z_1} = \pi \frac{e^{-t\sqrt{\omega}}}{\sqrt{\omega}}.$$

Dakle, za $t \geq 0$ imamo:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \omega}; t\right\} = \frac{e^{-t\sqrt{\omega}}}{2\sqrt{\omega}},$$

sličnim postupkom za $t < 0$ imamo:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \omega}; t\right\} = \frac{e^{t\sqrt{\omega}}}{2\sqrt{\omega}},$$

iz čega sledi tvrđenje leme:

$$v = \frac{e^{-\sqrt{\omega}|x|}}{2\omega} * f, \quad \omega \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

□

Teorema 4.1. Neka $u_0, v_0 \in S'(\mathbb{R})$, tada je rešenje jednačine (42) dato sa:

$$\tilde{u}(x, s) = \frac{\sqrt{\omega(s)}e^{-\sqrt{\omega(s)}|x|}}{2s^2} *_x (su_0(x) + v_0(x)),$$

gde je $\omega(s)$ dato sa:

$$\omega(s) = s^2 \frac{1 + \tau s^\alpha}{1 + s^\alpha}.$$

Dokaz. Primitimo da jednačinu (42) možemo zapisati u sledećem obliku:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u}(x, s) - s^2 \frac{1 + \tau s^\alpha}{1 + s^\alpha} \tilde{u}(x, s) = -\frac{1 + \tau s^\alpha}{1 + s^\alpha} (su_0(x) + v_0(x)). \quad (45)$$

Da bismo u dokazu iskoristili lemu 4.1 treba da pokažemo:

- (i) $-\frac{1+\tau s^\alpha}{1+s^\alpha} (su_0(x) + v_0(x)) \in S'(\mathbb{R})$;
- (ii) za svako $s \in \mathbb{C}_+$ važi $\omega(s) \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Stavka (i) sledi iz pretpostavke da $u_0, v_0 \in S'(\mathbb{R})$. Da bismo dokazali stavku (ii), zapišimo kompleksan broj u obliku $s = \rho e^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\rho > 0$, tada:

$$\omega(s) = \rho^2 e^{2i\varphi} \frac{1 + \tau \rho^{i\alpha\varphi}}{1 + \rho^{i\alpha\varphi}}.$$

Direktnim računom dobijamo:

$$\operatorname{Re}\{\omega(s)\} = \frac{\rho^2}{A} \left((1 + \rho^\alpha(1 + \tau) \cos(\alpha\varphi) + \tau\rho^{2\alpha}) \cos(2\varphi) + \rho^\alpha(1 - \tau) \sin(\alpha\varphi) \sin(2\varphi) \right), \quad (46)$$

$$\operatorname{Im}\{\omega(s)\} = \frac{\rho^2}{A} \left((1 + \rho^\alpha(1 + \tau) \cos(\alpha\varphi) + \tau\rho^{2\alpha}) \sin(2\varphi) - \rho^\alpha(1 - \tau) \sin(\alpha\varphi) \cos(2\varphi) \right), \quad (47)$$

gde je $A = (1 + \rho^\alpha \cos(\alpha\varphi))^2 + \rho^{2\alpha} \sin^2(\alpha\varphi) > 0$. Pretpostavimo da je $\omega \in (-\infty, 0]$. Tada je $\operatorname{Im}\{\omega(s)\} = 0$, na osnovu (47) sledi:

$$1 + \rho^\alpha(1 + \tau) \cos(\alpha\varphi) + \tau\rho^{2\alpha} = \rho^\alpha(1 - \tau) \sin(\alpha\varphi) \frac{\cos(2\varphi)}{\sin(2\varphi)}, \quad (48)$$

dok iz (46) dobijamo:

$$(1 + \rho^\alpha(1 + \tau) \cos(\alpha\varphi) + \tau\rho^{2\alpha}) \cos(2\varphi) + \rho^\alpha(1 - \tau) \sin(\alpha\varphi) \sin(2\varphi) \leq 0. \quad (49)$$

Kombinujući (48) i (49) imamo:

$$(1 - \tau) \sin(\alpha\varphi) \sin(2\varphi) \left(\frac{\cos^2(2\varphi)}{\sin^2(2\varphi)} + 1 \right) \leq 0.$$

Podsetimo se: $0 < \tau < 1$, $0 \leq \alpha < 1$ i $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$; imajući to u vidu, iz prethodne nejednakosti dobijamo $\sin(2\varphi) \leq 0$, ali tada $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \cup [-\frac{\pi}{2}, 0]$. Zaključujemo: $\omega(s) \notin (-\infty, 0]$.

Dakle, lemu 4.1 možemo primeniti na jednačinu (45) iz čega sledi tvrđenje teoreme. \square

Zaključak

Prikazali smo različite oblike talasnih jednačina u zavisnosti od konstitutivnih jednačina kojima se modelira viskoelastičnost materijala. Konstitutivne jednačine podelili smo u dve grupe: klasične i frakcione. Klasične smo dobili kombinacijom rednih i paralelnih veza, elastičnih i viskoznih elemenata. U tim jednačinama pojavljuju se samo izvodi celog reda. Za prikaz frakcionog Zenerovog modela:

$$\sigma(x, t) + \tau {}_0D_t^\alpha \sigma(x, t) = \varepsilon(x, t) + {}_0D_t^\alpha \varepsilon(x, t),$$

korišćen je Riman-Liovilov izvod ${}_0D_t^\alpha$. Primetili smo da za $\alpha = 0$ dobijamo Hukov zakon, dok za $\alpha = 1$ dobijamo klasičnu Zenerovu konstitutivnu jednačinu.

U nastavku rada bilo bi zanimljivo, u zavisnosti od parametra α , ispitati:

$$\sup |u_{fz} - u_{kz}| \quad \text{i} \quad \sup |u_{fz} - u_h|,$$

gde u_{fz} , u_{kz} i u_h predstavljaju rešenja talasnih jednačina određenim frakcionih Zenerovim, klasičnim Zenerovim i Hukovim modelom, redom. Takođe, bilo bi interesantno, isto u zavisnosti od α , videti:

$$\sup |\tilde{u}_{fz} - \tilde{u}_{kz}| \quad \text{i} \quad \sup |\tilde{u}_{fz} - \tilde{u}_h|.$$

Nakon opisivanja tenzora napona i tenzora deformacije, spustili smo se u jednu dimenziju, i došli do talasne jednačine koja opisuje prostiranje poremećaja kod viskoelastičnog štapa. Bilo bi zanimljivo konstruisati trodimenzionalne modele u zavisnosti od oblika viskoelastičnog tela.

Literatura

- [APO] Apostol T. M. *Mathematical Calculus Second Edition*. Addison Wesley, 1974.
- [ATA] Atanacković T. M. *Teorija elastičnosti*. Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1993.
- [BAK] Bak J., Newman D. *Complex Analysis, Second Edition*. Springer, 2010.
- [BOR] Borchardt R. D. *Viscoelastic Waves in Layered Media*. Cambridge University Press, 2009.
- [FIN] Findley W., Lai J., Onaran K. *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials with an Introduction to Linear Viscoelasticity*. North-Holland Publishing Company - Amsterdam - New York - Oxford, 1976.
- [GUR] Gurtin M. E., Sternberg E. *On the Linear Theory of Viscoelasticity*. Archive of Rational Mechanics and Analysis, Vol. 11. (1962) 291-354.
- [KIL] Kilbas A., Srivastava M., Trujillo J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, 2006.
- [LAN] Landau L. D., Lifshitz E. M. *Vol. 7 of Course of Theoretical Physics, Theory of Elasticity*. Pergamon Press, 1970.
- [MAI] Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity. An Introduction to Mathematical Models*. Imperial College Press, 2010.
- [MUR] Murray S. *Theory and Problems of Laplace Transform*. Schaum's Outline Series – McGraw Hill, 1965.
- [KON] Konjik S., Oparnica Lj., Zorica D. *Waves in fractional Zener type viscoelastic media*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 365 (2010) 259-268.
- [PER] Perišić D., Pilipović S., Stojanović M. *Funkcije više promenljivih diferencijalni i integralni račun*. Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1997.
- [PIL] Pilipović S., Stanković B. *Prostori distribucija*. Srpska akademija nauka i umetnosti, ogranak u Novom Sadu, 2000.
- [TEO] Teofanov N. *Predavanja iz primenjene analize*. Zavod za udžbenike, Beograd, 2011.
- [VLA] Vladimirov V. S. *Equations of Mathematical Physics*. Marcel Dekker, INC., New York 1971.

Biografija

Teodora Savić Popović rođena je 23.12.1992. u Subotici, gde je završila i osnovnu školu. Gimnaziju završava u Bačkoj Topoli, a osnovne studije matematike upisuje 2012. Nakon osnovnih studija, u oktobru 2016, upisuje master studije teorijske matematike na Prirodnom-matematičkom fakultetu, univerziteta u Novom Sadu. Položila je sve ispite predviđene planom i programom, i time stekla pravo na odbranu ovog master rada. Pored matematike, voli biciklizam, prirodu i klasičnu muziku.

Novi Sad, 2019.

Teodora Savić Popović

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Teodora Savić Popović

AU

Mentor: Dr Sanja Konjik, vanr. prof.

MN

Naslov rada: Prostiranje talasa u viskoelastičnim sredinama

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / e

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2019.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

MA

Fizički opis rada: (4, 52, 16, 0, 13, 0, 0)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Matematička analiza/Mehanika

ND

Ključne reči: talasna jednačina, viskoelastičnost, konstitutivna jednačina, frakcioni izvod, frakcioni integral, Zener, klasični modeli, Laplasova transformacija.

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

Prostiranje talasa u viskoelastičnim sredinama. Izvođenje dinamičke, geometrijske i konstitutivne jednačine. Prikaz osnovnih deficinija i teorema integralnih transformacija (kovolucije, Furijeove i Laplasove transformacije), frakcionog izvoda i integrala. Izvođenje talasnih jednačina zasnovanih na klasičnim i frakcionim modelima konstitutivnih jednačina.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: Dr Srbolju Simić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Dr Dušan Zorica, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Dr Sanja Konjik, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Dr Nebojša Dedović, docent, Poljoprivredni fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monographic type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master thesis

CC

Author: Teodora Savić Popović

AU

Mentor: Sanja Konjik, PhD

MN

Title: Wave Propagation in Viscoelastic Media

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: Serbian/English

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2019.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

PP

Physical description: (4, 52, 16, 0, 13, 0, 0)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Mathematical analysis/Mechanics

SD

Key words: wave equation, viscoelasticity, constitutive equation, fractional derivative, fractional integral, Zener, classical models, Laplace transform.

SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract:

AB

Wave propagation in viscoelastic media. Derivation of equation of motion, constitutive and geometric equation. Basic definitions and theorems of integral transforms (convolution, Laplace and Furie transform), fractional derivative and fractional integral. Derivation of wave equation based on classical models and fractional Zener model.

Accepted by the Scientific Board on:

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: Dr. Srboljub Simić, Full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Dr. Dušan Zorica, Associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,

Member: Dr. Sanja Konjik, Associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Dr. Nebojša Dedović, Assistant professor, Faculty of Agriculture, University of Novi Sad