Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Tatjana Mršić

Eulerova teorema i druge teoreme teorije particija

- master rad -

Mentor:

Dr Boris Šobot

Novi Sad, 2018.

Predgovor

U ovom radu bavićemo se teorijom particija i nekim teoremama vezanim za iste. O teoriji particija pre ovog rada nisam mnogo znala. Međutim, što sam se više udubljivala u njenu teoriju, tako je moje uzbuđenje raslo. U njoj se otkrivaju neki jako lepi idenititeti koje su dokazali ili osmislili Euler, Ramanujan, Jacobi i mnogi drugi veliki matematičari. Takođe je bilo zanimljivo gledati kako se nešto tako jednostvano kao particija prirodnog broja može razviti u jednu ozbiljnu i složenu oblast teorije brojeva i kombinatorike. Particiju prirodnog broja grafički prikazujemo pomoću Ferrerovih dijagrama ili Youngovih dijagrama (tabloa). U ovom radu smo se ipak odlučili za Youngove dijagrame. Bavićemo se generativnim funkcijama pomoću kojih ćemo razvijati teoriju particija i dokazivati njene identitete. Rad će da se sastoji iz pet glava.

U Glavi 1 uvešćemo pojmove particije, definisati konjugovanu i samokonjugovanu particiju, definisati Youngov dijagram i neke njegove elemente (uglove, granice, kuke). Definisaćemo generativne funkcije za broj particija nekog prirodnog broja i time napraviti uvod za Eulerovu teoremu.

Glava 2 posvećena je prvobitno Eulerovoj teoremi. Prikazaćemo bijektivni dokaz ove teoreme, koji je dao engleski matematičar J. W. L. Glaisher, kao i tri različite definicije Sylvesterove bijekcije pomoću koje takođe može da se dokaže Eulerova teorema. Dokazaćemo i uopštenje Eulerove teoreme koje su dali F. Franklin (1883.) i H. S. Wilf (2000.), nezavisno jedan od drugog. Potom prelazimo na pentagonalne brojeve. Podsetićemo se pojma trougaonih i kvadratnih brojeva i po analogiji definisati pentagonalne brojeve. Pokazaćemo da je razlika između broja particija prirodnog broja n na paran broj međusobno različitih delova i broja particija od n na neparan broj međusobno različitih delova jednak ± 1 ukoliko je n pentagonalan broj, dok je inače jednaka nuli. Pomoću ovog tvrđenja dokazaćemo Eulerovu pentagonalnu teoremu, a iz nje ćemo izvesti rekurzivnu teoremu za broj particija. U nastavku ćemo dokazati još dva Eulerova identiteta kao pomoćne teoreme za dokaz identiteta koji se naziva Jacobijev trostruki proizvod, koji za posledicu, između ostalog, ima i Eulerovu pentagonalnu teoremu. Glavu ćemo završiti još jednom posledicom, koja se naziva Watson – Gordonov petostruki proizvod.

Glava 3 baviće se kongruencijama, konkretno onim po modulima 5, 7 i 11. Ove kongruencije su proizašle iz rada matematičkog genija Ramanujana. Pored teorema iz prethodne glave, koristićemo još jednu Jacobijevu teoremu za dokazivanje ove tri kongruencije. Definisaćemo i Dysonov rang (eng. *rank*) i Andrews – Garvanov *crank* i pokazati tvrđenje vezano za kongruencije na primeru, dok ćemo dokaz izostaviti. Navešćemo još neke jednakosti vezane za kongruencije većeg modula.

Glava 4 sastoji se iz Rogers – Ramanujanove teoreme i njenog dokaza. Odlučili smo se za kombinatorni dokaz koji su dali I. Pak i C. Boulet. Definisaćemo elemente Youngovog dijagrama koji se nazivaju Durfeeovi pravougaonici koji će nam biti potrebni u navedenom dokazu.

Glava 5 će da se sastoji iz opisa dve etape u razvoju teorije particija. Podela je na vremenski period pre i posle Ramanujana. Spomenućemo zasluge Eulera i Jacobija, a potom pisati o saradnji Littlewood – Hardy i Hardy – Ramanujan, kao i o životu i radu samog Ramanujana. Završićemo glavu rezultatima o asimptotskom ponašanju broja particija koje su napravili Hardy i Ramanujan, a usavršio ih je Rademacher.

⋆ ⋆ ⋆

Veliku zahvalnost dugujem svom mentoru dr Borisu Šobotu jer mi je otkrio jedan do tada nepoznat deo matematike koji je na mene ostavio poprilično jak i pozitivan utisak. Zahvaljujem mu se na razumevanju, mnogobrojim korisnim savetima, velikoj pomoći pri izradi rada i samom odabiru teme, ali i na predavanjima iz polja kombinatorike koja su i bila razlog za odabir baš ovakve teme. Želim da se zahvalim i članovima komisije, dr Petru Đapiću i dr Bojanu Bašiću na korisnim sugestijama i savetima, kao i na samom učešću u izradi i odbrani ovog rada, ali i na učešću u procesu mog školovanja kroz neke od najzanimljivijih kurseva koje sam imala čast da pohađam tokom studiranja.

Na kraju želim da se zahvalim mom ocu Dragomiru koji me je upoznao sa matematikom i podsticao moju ljubav prema istoj, mojoj majci Gordani koja mi je pružila puno razumevanja i ljubavi tokom dugog, ali predivnog puta školovanja, bratu Nemanji i konačno mom Milošu na ogromnoj podršci i veri u mene. Veliko hvala i svim mojim prijateljima i profesorima koji su me pratili tokom osnovnog, srednjeg i visokog obrazovanja.

Novi Sad, avgust 2018.

Tatjana Mršić

Sadržaj

Glava 1

Uvod

1.1 Particije i dijagrami

Definicija 1.1. ***Particiju*** *prirodnog broja n definišemo kao uređenu* l *-torku prirodnih brojeva* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l)$ *takvu da važi da je* $\sum_i \lambda_i = n$ *i* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_l$. *Da je* λ *particija broja n označavamo sa* $\lambda \vdash n$.

Član niza, λ_i nazivamo delom particije λ.

Uvodimo sledeće oznake vezane za particije:

- sa $\mathcal{P}_n$ ćemo označiti skup svih particija prirodnog broja *n*, a sa $p(n)$ broj tih particija tj. $p(n) = |\mathcal{P}_n|$; po dogovoru je $p(0) = 1$
- sa $\mathcal{P} = \bigcup_n \mathcal{P}_n$ ćemo označiti skup svih particija
- sa $l = l(\lambda)$ označićemo broj delova particije λ
- skup svih particija broja *n* sa najviše *k* delova označićemo sa $\mathcal{P}_{n,k} = \{\lambda \vdash n : l(\lambda) \leq k\}$
- sa $m_i = m_i(\lambda)$ označićemo broj delova particije λ jednakih broju *i*
- najveći deo particije λ označićemo sa $a(\lambda)$, a najmanji sa $s(\lambda)$

Uvođenje oznake $m_i(\lambda)$ nam omogućava definisanje alternativne notacije za particiju λ kao $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} ...)$. Tako particiju $(4,3,3,2,1,1,1)$ broja 15 možemo zapisati i kao $(1^3 2 3^2 4)$.

Definicija 1.2. *Particiju* $\lambda' = (\lambda_1', \lambda_2', ..., \lambda_{l'}')$ *definisanu sa* $\lambda_i' = |\{ j : \lambda_j \geq i\}| = m_i + m_{i+1} + ...$ *nazivamo* ***konjugovanom*** *particijom particije* λ.

Primer: Konjugovana particija particije $\lambda = (4,3,3,2,1,1,1) = (1^3 2 3^2 4)$ je particija

$$\lambda' = (3+1+2+1, 1+2+1, 2+1, 1) = (7,4,3,1).$$

□

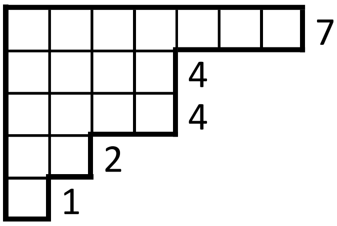
Definicija 1.3. *Za particiju λ kažemo da je* **samokonjugovana** *ako je jednaka svojoj konjugovanoj particiji λ'.*

Particije broja možemo predstaviti preko Youngovih ili preko Ferrerovih dijagrama. Naravno, ova dva načina predstavljanja su ekvivalentna. Mi ćemo definisati oba dijagrama i prikazati oba načina predstavljanja, ali ćemo se u glavnom delu rada služiti sa Youngovim dijagramima.

Definicija 1.4. *Svakom kvadratu celobrojne mreže $\mathbb{Z}^2$ pridružimo par (i, j) takav da je i broj vrste (od x ose nadole), a j broj kolone (od y ose nadesno).* ***Youngov dijagram*** *(u oznaci $[\lambda]$) particije $\lambda \vdash n$ je kolekcija od n kvadrata (i, j) dimenzije 1x1 u kvadratnoj mreži $\mathbb{Z}^2$ takvih da je*

$$1 \le i \le l(\lambda) \text{ i } 1 \le j \le \lambda_i .$$

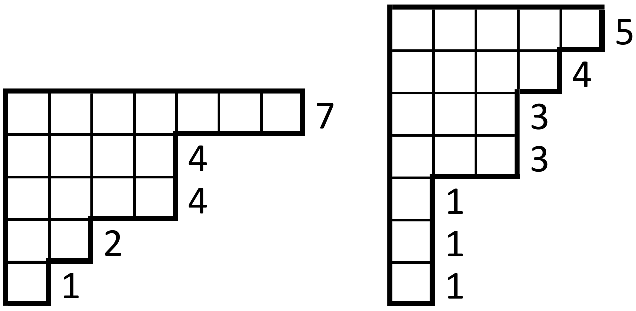
Primer: Youngov dijagram particije $\lambda = (7,4,4,2,1)$ broja $n = 18$.



Slika 1.1. *Youngov dijagram particije* $\lambda = (7,4,4,2,1)$

$\square$

Konjugovan Youngov dijagram $[\lambda']$ dobijamo preslikavanjem $[\lambda]$ preko prave $i = j$. Ovim preslikavanjem se menja broj vrsta Youngovog dijagrama za broj kolona i obrnuto, što ilustruje Slika 1.2.



Slika 1.2. *Youngovi dijagrami particije* $\lambda = (7,4,4,2,1) = (124^27)$ *i njoj konjugovane*

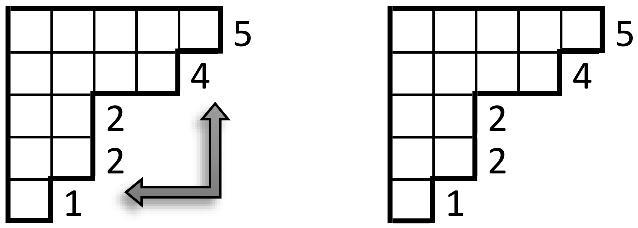
$\lambda' = (5,4,3,3,1,1,1) = (1^3 3^2 45)$

Kako se do Youngovog dijagrama konjugovane particije dolazi preslikavanjem preko prave $i = j$, a samokonjugovana particija je jednaka sa svojom konjugovanom particijom, onda zaključujemo da dijagram ovakve particije mora da bude simetričan u odnosu na pravu $i = j$.

Primer: Particiji $\lambda = (5,4,2,2,1) = (12^2 45)$ odgovara konjugovana particija

$$\lambda' = (1+2+1+1, 2+1+1, 1+1, 1+1, 1) = (5,4,2,2,1).$$

Dakle, particija $\lambda = (5,4,2,2,1)$ je samokonjugovana. Pogledajmo sada njen Youngov dijagram:



Slika 1.3. *Youngov dijagram samokonjugovane particije* $\lambda = \lambda' = (12^2 45)$

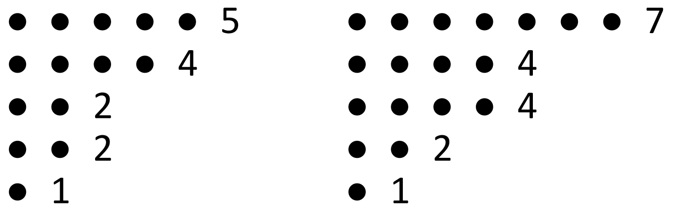
Zaista, dijagram ove particije je simetričan u odnosu na pravu $i = j$.

□

Youngovi dijagrami nisu jedini način za grafičku reprezentaciju particija broja *n*. Česta je upotreba i Ferrerovih dijagrama. Naravno, postoji korespondencija između ovakva dva predstavljanja. Razlika je što u Ferrerovim dijagramima koristimo tačke (a ne kvadrate).

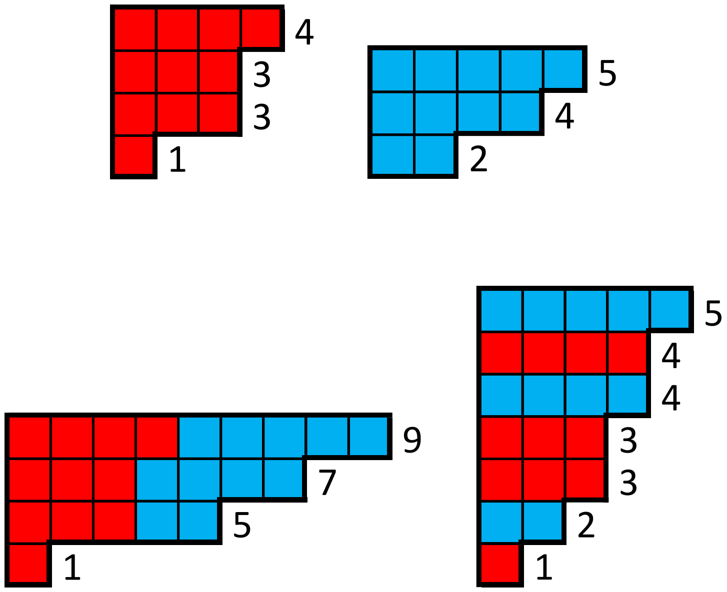
Dakle,

Ferrerov dijagram particije $\lambda \vdash n$ *je kolekcija od n tačaka, gde se položaj svake tačke definiše u analogiji sa položajem kvadrata u Youngovom dijagramu.*



Slika 1.4. *Ferrerovi dijagrami ranije navedenih particija* $(12^2 45)$ *i* $(124^2 7)$

Za particije $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ i $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ definišemo *sumu* particija $\lambda + \mu$ kao particiju $\lambda + \mu = (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \ldots)$, dok *uniju* ove dve particije definišemo kao particiju $\lambda \cup \mu$ sa delovima $\{\lambda_i, \mu_j\}$ poređanim u nerastućem nizu. Primetimo da u primeru predstavljenom Slikom 5 važi da je $(\lambda + \mu)' = \lambda' \cup \mu'$.



Slika 1.5. *Youngovi dijagrami particija* $\lambda = (4,3,3,1)$ *i* $\mu = (5,4,2)$ *i njihovog zbira* $\lambda + \mu = (9,7,5,1)$ *i unije* $\lambda \cup \mu = (5,4,4,3,3,2,1)$

Teorema 1.1. *Za svake dve particije važi sledeća jednakost*

$$(\lambda + \mu)' = \lambda' \cup \mu'.$$

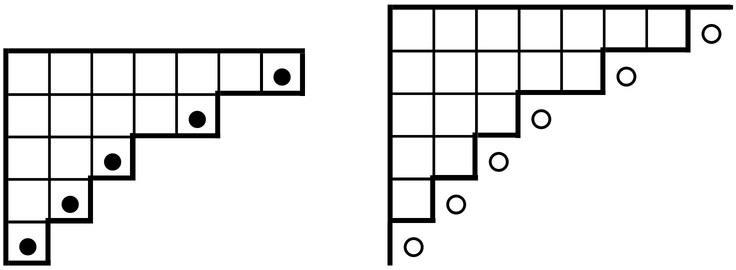
Dokaz.

Posmatrajmo vrste particije $\lambda + \mu$. Naime, i – ta vrsta će da sadrži element $\lambda_i + \mu_i$. Kako smo rekli da konjugovanjem menjamo vrste za kolone i obrnuto, i – ta kolona particije $(\lambda + \mu)'$ će biti visine $\lambda_i + \mu_i$ kvadratića. S druge strane, visina i – te kolone dijagrama $[\lambda']$ je λ_i, analogno visina i – te kolone dijagrama $[\mu']$ je μ_i. Kako unija dve particije jednostavno slaže delove obe particije po veličini, broj crvenih (dijagram $[\lambda']$) i broj plavih kvadratića (dijagram $[\mu']$) u svakoj koloni ostaje isti, pa se u i – toj koloni dijagrama particije $\lambda' \cup \mu'$ ukupno nalazi $\lambda_i + \mu_i$ kvadratića (plavih i crvenih), pa tražena jednakost važi.

■

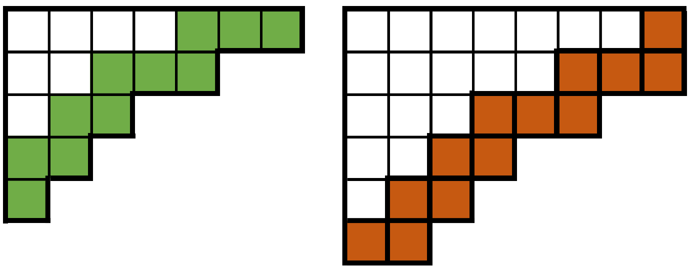
Definisaćemo neke elemente Youngovog dijagrama koji će nam biti zanimljivi u daljem radu.

Definicija 1.5. *U Youngovom dijagramu* $[\lambda]$ ***uglom*** *dijagrama nazivamo kvadrat* $(i,j)\in[\lambda]$ *takav da* $(i+1,j),(i,j+1)\notin[\lambda]$. *Slično, spoljašnjim uglom dijagrama nazivamo kvadrat* $(i,j)\notin[\lambda]$ *takav da* $(i,j-1)\in[\lambda]$, *ako* $j>1$ *i* $(i-1,j)\in[\lambda]$, *ako* $i>1$.



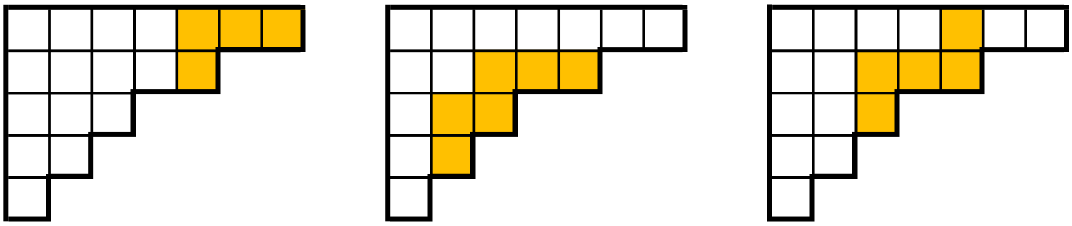
Slika 1.6. *Youngov dijagram particije* $\lambda=(7,5,3,2,1)$ *gde su sa* ● *označeni uglovi dijagrama* $[\lambda]$, *a sa* ○ *spoljašnji uglovi dijagrama* $[\lambda]$

Definicija 1.6. ***Granicom*** $\partial[\lambda]$ *Youngovog dijagrama* $[\lambda]$ *nazivamo kolekciju kvadrata* $(i,j)\in[\lambda]$ *takvu da* $(i+1,j+1)\notin[\lambda]$, *dok spoljašnom granicom* $\bar{\partial}[\lambda]$, *po analogiji sa uglovima dijagrama, nazivamo kolekciju kvadrata* $(i,j)\notin[\lambda]$ *takvih da ili* $(i,j-1)\in[\lambda]$ *ili* $(i-1,j)\in[\lambda]$ *ili* $(i-1,j-1)\in[\lambda]$.



Slika 1.7. *Youngovi dijagrami particije* $\lambda=(7,5,3,2,1)$ *gde je zelenom bojom označena granica dijagrama* $[\lambda]$, *a narandžastom spoljašnja granica istog dijagrama*

Definicija 1.7. ***Kuku*** R *Youngovog dijagrama* $[\lambda]$ *definišemo kao niz spojenih kvadrata* $R\subset\partial[\lambda]$ *(spojenih tako da svaka dva susedna kvadrata imaju zajedničku stranu)* takvih da *je* $[\lambda]-R$ *takođe Youngov dijagram neke particije. Spoljašnju kuku* R' *definišemo kao niz spojenih kvadrata* $R' \subset \bar{\partial}[\lambda]$ *takvih da je* $[\lambda] \cup R'$ *takođe Youngov dijagram neke particije. Visina i dužina kuke su dimenzije najmanjeg pravougaonika koji sadrži datu kuku.*



Kuka visine 2 i dužine 3 Kuka visine 3 i dužine 4 Nije kuka

Slika 1.8. *Youngovi dijagrami particije* $\lambda = (7,5,3,2,1)$ *sa dva naznačena podskupa granice* $\partial[\lambda]$ *koji jesu kuke i jednim podskupom koji nije kuka dijagrama* $[\lambda]$

1.2 Generativne funkcije

Ideja je da se nizu od beskonačno mnogo brojeva na prirodan način dodeli formalni stepeni red (koji je u ovom slučaju i funkcija) i tako omogući jednostavniji rad sa ovakvim nizovima. U teoriji particija, funkcije generatrise nam služe za rešavanje problema određivanja broja particija nekog broja.

Posmatrajmo beskonačan niz

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots . \tag{1}$$

Definicija 1.8.

- *Funkcija* $G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *se naziva funkcija generatrisa (ili generativna funkcija) niza (1).*
- *Funkcija* $H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ *se naziva eksponencijalna funkcija generatrisa niza (1).*

Ukoliko su nam poznate funkcije generatrise, tada članove niza određujemo na sledeći način:

$$a_n = \frac{G^{(n)}(0)}{n!},$$

odnosno kod eksponencijalne funkcije generatrise kao

$$a_n = H^{(n)}(0).$$

Izvedimo sada funkciju generatrisu za brojeve particija $p(n)$ nekog prirodnog broja n. Da bi prilagodili oznake notaciji definisanoj u Poglavlju 1.1., označićemo navedenu funkciju generatrisu sa $P(t)$.

Dakle,

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) t^n .$$

Posmatrajmo najpre particije broja *n* čiji su svi delovi manji ili jednaki *k*. Na primer jedna od njih je particija:

$$\lambda = \left(1^{m_1} 2^{m_2} \ldots k^{m_k}\right)$$

odnosno

$$n = m_1 \cdot 1 + m_2 \cdot 2 + \ldots + m_k \cdot k \qquad (*)$$

gde je $m_i \ \left(i = 1, \ldots, k\right)$ broj ponavljanja dela *i* u particiji.

Tada je

$$t^n = t^{m_1 \cdot 1 + m_2 \cdot 2 + \ldots + m_k \cdot k} = \left(t^1\right)^{m_1} \cdot \left(t^2\right)^{m_2} \cdot \ldots \cdot \left(t^k\right)^{m_k} \qquad (**)$$

Broj particija oblika (*) jednak je broju načina faktorizacije veličine t^n u formi (**). Kako je broj ovih faktorizacija jednak koeficijentu uz t^n funkcije generatrise

$$G(t) = \left(1 + t + t^2 + \ldots\right) \cdot \left(1 + t^2 + t^4 + \ldots\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + t^k + t^{2k} + \ldots\right)$$

onda je $G(t)$ upravo tražena funkcija generatrisa za ograničenu veličinu dela particije (označićemo je sa $P_k(t)$) i može se predstaviti u obliku

$$P_k(t) = \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1-t^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-t^k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-t^i} .$$

Ukoliko ne ograničavamo veličinu sabiraka, funkcija generatrisa dobija oblik

$$P(t) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^i} .$$

Ukoliko je uslov da svi delovi particije budu različiti, funkcija generatrisa ima sledeći oblik:

$$P(t) = (1+t) \cdot \left(1+t^2\right) \cdot \left(1+t^3\right) \cdot \ldots = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1+t^i\right),$$

a ako je uslov da su svi delovi particije neparni, funkcija generatrisa je:

$$P(t)=\left(1+t+t^2+t^3+t^4+\ldots\right)\cdot\left(1+t^3+t^6+t^9+t^{12}+\ldots\right)\cdot\ldots=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^{2i-1}}.$$

Posmatrajmo sada particije broja sa različitim delovima i particije broja sa neparnim delovima.

Primer: Posmatrajmo particije broja 6 sa različitim delovim i one sa neparnim delovima.

Svi delovi su različiti	**Svi delovi su neparni**
6	5+1
5+1	3+3
4+2	3+1+1+1
3+2+1	1+1+1+1+1+1
Ukupan broj particija: 4	**Ukupan broj particija: 4**

□

Primetimo da je isti broj particija sa svim neparnim delovima i sa svim različitim delovima. Ovo nije slučajnost. Naime, postoji teorema koja tvrdi da je broj particija sa svim neparnim delovima jednak broju particija sa svim različitim delovima. Ovu teoremu je prvobitno dokazao Euler i zato je i nazivamo Eulerovom teoremom.

Glava 2

Eulerova teorema, proširenja i posledice

2.1 Eulerova teorema

Označimo sa $\mathcal{O}_n$ skup particija broja *n* čiji su svi delovi neparni (eng. *odd*), a sa $\mathcal{D}_n$ skup particija broja *n* čiji su svi delovi različiti (eng. *distinct*). Neka je $p_o(n)$ broj particija sa neparnim delovima tj. $p_o(n) = |\mathcal{O}_n|$ i neka je $p_d(n)$ broj particija sa različitim delove tj. $p_d(n) = |\mathcal{D}_n|$.

Dokazaćemo da za svako *n* važi $|\mathcal{O}_n| = |\mathcal{D}_n|$ pomoću prethodno izvedenih funkcija generatrisa. Ovaj dokaz teoreme preko funkcija generatrise dao je sam Euler.

Teorema 2.1. (Euler): *Broj particija broja n na neparne delove jednak je broju particija na različite delove.*

Dokaz.

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+t^i) = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1-t^i}{1-t^i}\cdot(1+t^i) = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1-t^{2i}}{1-t^i} = \frac{1-t^2}{1-t}\cdot\frac{1-t^4}{1-t^2}\cdot\frac{1-t^6}{1-t^3}\cdot\ldots = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^{2i-1}}$$

Dakle, za svako *i*, koeficijent funkcije generatrise za broj particija sa različitim delovima jednak je odgovarajućem koeficijentu funkcije generatrise za broj particija sa neparnim delovima, pa za svaki prirodan broj *n* važi da postoji jednak broj particija tog broja na neparne i na različite delove.

■

Postoji nekoliko različitih dokaza Eulerove teoreme. Čisto bijektivni dokaz dao je 1883. godine J.W.L.Glaisher.

Dokaz Glaisherovom bijekcijom $\varphi : \mathcal{O}_n \to \mathcal{D}_n$.

Neka je $\lambda = (1^{m_1} 3^{m_3} \ldots) \in \mathcal{O}_n$ particija broja n sa neparnim delovima i neka je X skup dužina tih delova. Dakle,

$$n = 1 \cdot m_1 + 3 \cdot m_3 + \ldots = \sum_{i \in X} i \cdot m_i \, .$$

Predstavimo sada svako m_i, gde je i neparan broj iz X, na jedinstven način kao sumu različitih stepena broja 2. Dakle,

$$m_i = 2^{a_1(i)} + 2^{a_2(i)} + \ldots + 2^{a_j(i)}, \text{ gde je } a_1(i) > a_2(i) > \ldots > a_j(i) \, .$$

Tada dobijamo da je

$$n = \sum_{i \in X} i \cdot m_i = \sum_{i \in X} i \cdot \left(2^{a_1(i)} + 2^{a_2(i)} + \ldots + 2^{a_j(i)} \right)$$

Primetimo kakve sabirke smo dobili: najpre imamo proizvod broja 1 i različitih stepena broja 2, potom proizvod sledećeg neparnog broja, broja 3, i različitih stepena broja 2 itd. Dakle, dobijeni sabirci su međusobno različiti, tj. dobili smo particiju sa različitim delovima.

Obrnut smer ćemo konstruisati na sledeći način:

Neka je $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s$, gde su delovi particije λ_i međusobno različiti. Ukoliko zapišemo λ_i kao proizvod stepena broja 2, neka je to 2^{j_i}, i odgovarajućeg neparnog broja k_i, a potom zapišemo λ_i na sledeći način:

$$\lambda_i = \underbrace{k_i + k_i + \ldots + k_i}_{2^{j_i} \text{ puta}}$$

i ovo uradimo za svako i $(i = 1, \ldots, s)$, dobijamo novu particiju čiji su svi delovi neparni brojevi. Bitno je napomenuti da svaki broj možemo na jedinstven način zapisati kao proizvod stepena broja 2 i odgovarajućeg neparnog broja.

Pokažimo sada da su ova dva preslikavanja međusobno inverzna. Neka je $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_r$ particija broja n takva da su svi delovi λ_i, $i = 1, \ldots, r$ neparni i neka je Y skup dužina tih delova. Tada je

$$n = \sum_{i \in Y} i \cdot m_i = \sum_{i \in Y} i \cdot \left(2^{a_1(i)} + 2^{a_2(i)} + \ldots + 2^{a_j(i)} \right) = \sum_{i \in Y} i \cdot \sum_{k=1}^{j} 2^{a_k(i)}$$

$$= \underbrace{1 \cdot 2^{a_1(1)} + \ldots + 1 \cdot 2^{a_j(1)} + 3 \cdot 2^{a_1(3)} + \ldots + 3 \cdot 2^{a_j(3)} + \ldots}_{\text{svi sabirci su različiti}} = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{\sum_{k=1}^{j} 2^{a_k(1)}} + \underbrace{3 + \ldots + 3}_{\sum_{k=1}^{j} 2^{a_k(3)}} + \ldots = 1 \cdot m_1 + 3 \cdot m_3 + \ldots \, .$$

Dakle, $\varphi\left(\varphi^{-1}(\lambda)\right)=\lambda$. Analogno dokazujemo obrnut smer, pa je Glaisherova funkcija zaista bijekcija.

■

Demonstriraćemo Glaisherovu bijekciju na primeru.

Primer. Primenimo Glaisherovu bijekciju na slučaju $n=6$.

Smer $\varphi:\mathcal{O}_n\to\mathcal{D}_n$:

$5+1\to1\cdot5+1\cdot1\to5+1$

$3+3\to2\cdot3\to6$

$3+1+1+1\to1\cdot3+3\cdot1\to1\cdot3+(2+1)\cdot1\to3+2+1$

$1+1+1+1+1+1\to6\cdot1\to(4+2)\cdot1\to4+2$

Smer $\phi=\varphi^{-1}:\mathcal{D}_n\to\mathcal{O}_n$:

$6\to2\cdot3\to3+3$

$5+1\to1\cdot5+1\cdot1\to5+1$

$4+2\to4\cdot1+2\cdot1\to1+1+1+1+1+1$

$3+2+1\to1\cdot3+2\cdot1+1\cdot1\to3+1+1+1$

■

Teorema 2.2. (Glaisher): *Broj particija $\lambda\vdash n$ sa delovima koji nisu deljivi sa d jednak je broju particija $\mu\vdash n$ u kojima se nijedan deo ne ponavlja $\geq d$ puta.*

Dokaz.

Dokaz izvodimo pomoću funkcije generatrise za broj particija u kojima se nijedan deo ne ponavlja $\geq d$ puta:

$$P^d(t)=\prod_{i=1}^{\infty}(1+t^i+t^{2i}+\ldots+t^{(d-1)i})=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1-t^{di}}{1-t^i}$$

Ovaj rezultat smo dobili primenom formule za sumu konačnog geometrijskog reda koja glasi:

$$1+x+x^2+\ldots+x^r=\frac{1-x^{r+1}}{1-x}$$

Primetimo da ukoliko raspišemo poslednji dobijeni proizvod, faktori u brojiocu se skraćuju, dok u imeniocu ostaju samo faktori za koje *d* ne deli *i*, dakle

$$P^d(t)=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1-t^{di}}{1-t^i}=\prod_{\substack{i=1\\ d\text{ ne deli }i}}^{\infty}\frac{1}{1-t^i}$$

a ovo je baš funkcija generatrise za broj particija $\lambda \vdash n$ sa delovima koji nisu deljivi sa *d* čime je dokazano tvrđenje.

■

Primetimo da je upravo dokaz Teoreme 2.1. pomoću Glaisherove bijekcije specijalan slučaj Teoreme 2.2. (slučaj kada je $d = 2$).

Teorema 2.3. (Franklin, Wilf): *Broj particija broja n sa k parnih delova jednak je broju particija broja n sa k ponovljenih delova.*

Dokaz.

Primetimo da za $k = 0$ dobijamo Eulerovu teoremu.

Broj ponovljenih delova ustvari broji koliko parova istih delova imamo u particiji: ukoliko imamo 2*r* delova iste dužine, to je *r* parova i broj ponovljenih delova je *r*, a ako imamo $2r+1$ delova iste dužine, ponovo imamo *r* parova (jedan deo ostaje "neuparen").

Neka je $\mathcal{P}_n$ kao što smo ranije definisali skup svih particija prirodnog broja *n*. Definišemo proširenje Glaisherove bijekcije kao $\overline{\varphi}: \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$. Neka je λ neka particija broja *n* tj. $\lambda \in \mathcal{P}_n$. Rastavimo je na uniju particije na parne π i particije na neparne delove ν, dakle kao $\lambda = \pi \cup \nu$. Podelimo sada svaki deo particije π na dva jednaka dela i nazovimo ovu novu particiju sa $\pi/2$. Sada definišemo proširenje na sledeći način:

$$\overline{\varphi}(\lambda) = \varphi(\nu) \cup \pi/2 \cup \pi/2$$

Ranije definisano preslikavanje $\varphi(\nu)$ će da slika neparne delove particije u delove koji su međusobno različiti. Ove delove ne treba da prebrojavamo (nisu nam potrebni u ovom teoremi). Međutim, svi parni delovi se preslikavanjem razbijaju na njihove polovine dajući jedan par od po dva jednaka dela. Dakle, svakom parnom delu odgovara jedan par istih delova dobijenih polovljenjem tog parnog dela.

Inverzna funkcija će da rastavlja particiju λ na uniju dve particije tako da jedna sadrži sve različite delove particije λ , neka je to θ , a druga one delove koji se ponavljaju, neka je to ρ . Spojimo sada svaka dva jednaka dela iz ρ u jedan deo particije i nazovimo novu particiju sa 2ρ. Inverzna funkcija tada izgleda ovako:

$$\overline{\varphi^{-1}}(\lambda) = \varphi^{-1}(\theta) \cup 2\rho,$$

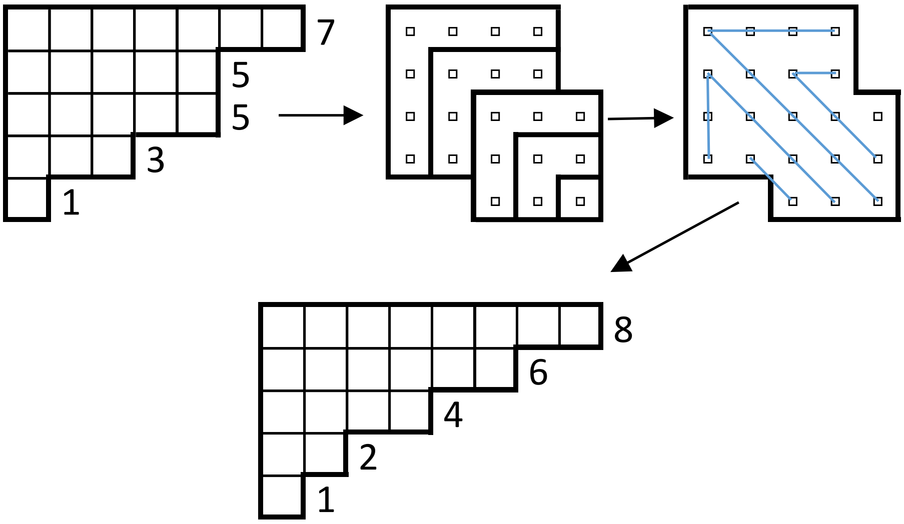
čime smo dokazali da je preslikavanje $\overline{\varphi}$ bijekcija.

■

Jedan od bijektivnih načina dokazivanja Eulerove teoreme je i Sylvesterova bijekcija. U nastavku ćemo dati tri različite verzije Sylvesterove bijekcije.

1.verzija

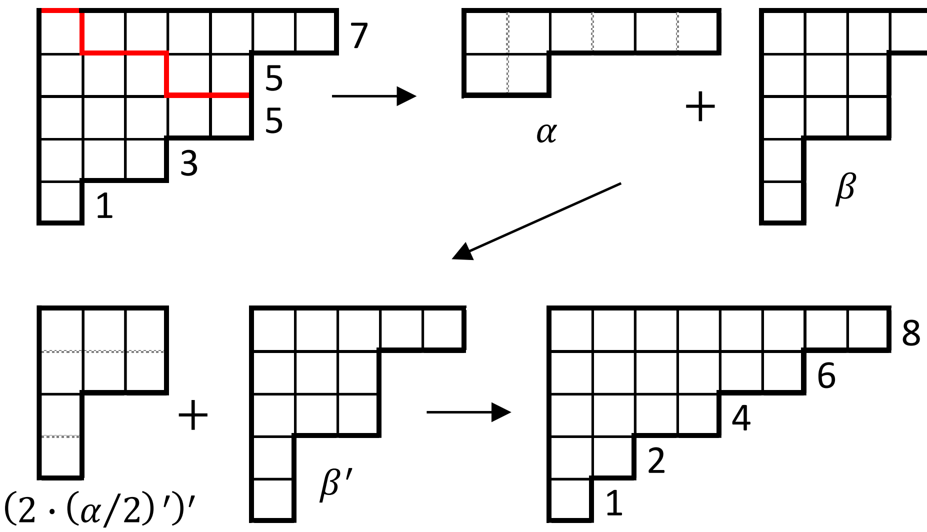
Definišemo bijekciju $\psi : \mathcal{O}_n \to \mathcal{D}_n$ grafički na sledeći način: svaki neparan deo λ_i particije λ transformišemo u kuku R_i čija je i dužina i visina jednaka $(\lambda_i + 1)/2$, a potom ovako dobijene kuke nanižemo. Nove delove particije brojimo počevši od poslednjeg kvadrata na glavnoj dijagonali (pratiti Sliku 2.1.). Kada prebrojimo sve kvadrate na glavnoj dijagonali i stignemo do kvadrata na poziciji $(1,1)$, nastavljamo brojanje kvadrata u prvoj vrsti (na desno). Na ovaj način smo dobili prvi deo nove particije. Drugi deo particije dobijamo sličnim postupkom, samo što sada brojanje krećemo od kvadrata koji se nalazi neposredno ispod glavne dijagonale. Brojimo kvadrate neposredno ispod glavne dijagonale i kada stignemo do kvadrata na poziciji $(2,1)$, nastavljamo brojanje kvadrata u prvoj koloni (uzimajući u obzir to da nećemo da prebrojavamo one kvadrate koji su već ranije prebrojani). Treći deo dobijamo brojanjem iznad glavne dijagonale sličnim postupkom itd.



Slika 2.1. *Sylvesterova bijekcija* $\psi : (7,5,5,3,1) \to (8,6,4,2,1)$

2. verzija

Podelimo dijagram $[\lambda]$ na dva dela duž prave $j = 2i + 1$. Nazovimo navedene delove α i β redom. Bijekciju definišemo kao $\zeta(\lambda) = \left(2 \cdot (\alpha/2)'\right)' + \beta'$. Tada se α sastoji samo iz parnih, a β samo iz neparnih delova. Takođe, svi delovi u α su različiti, pa će $\alpha/2$ sadržati svaki deo najviše po dva puta.

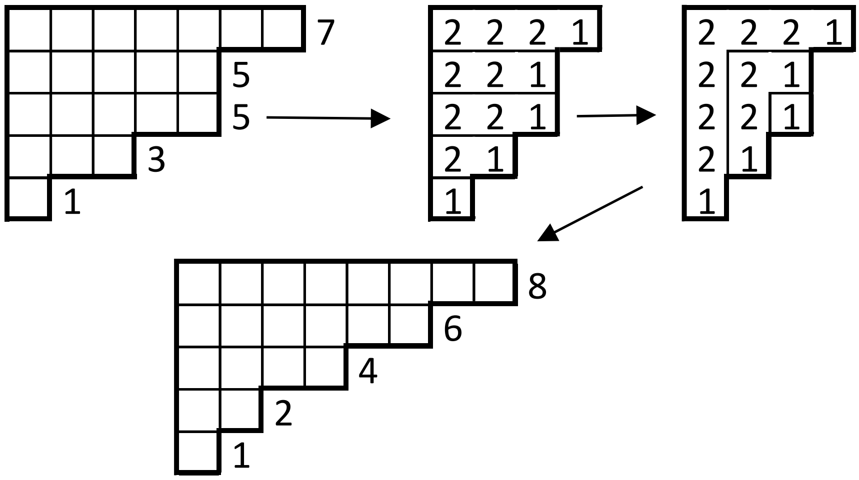


Slika 2.2. *Sylvesterova bijekcija* $\zeta:(7,5,5,3,1)\to(8,6,4,2,1)$

3. verzija

Za ovu verziju potreban nam je pojam *m*-modularnog dijagrama. *m*-modularan dijagram $[\lambda]_m$ je Youngov dijagram koji u svim svojim kvadratima, osim onih koji su poslednji u redu, ima upisan broj *m* (što je oznaka za *m* kvadratića i ovaj kvadrat zovemo *m*-kvadrat), dok se u onim kvadratima koji se nalaze poslednji u redu može da se upiše bilo koji broj i za koji važi da je $1\le i\le m$. Nama će biti potreban 2-modularni dijagram koji će u svim kvadratima imati upisane brojeve 1 ili 2, s tim da broj 1 može da stoji samo u poslednjem kvadratu nekog reda.

Nacrtajmo 2-modularni dijagram $[\lambda]_2$ koji odgovara početnom dijagramu $[\lambda]$, a zatim nacrtajmo kuke $H_1,H_2,\ldots$ takve da kuka H_i sadrži element na poziciji (i,i) i elemente u i-toj vrsti na desno i i-toj koloni na dole od datog dijagonalnog elementa. Definišemo bijekciju $\eta(\lambda)=\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\ldots)$, gde je μ_1 broj kvadrata koje sadrži kuka H_1, a μ_2 broj 2-kvadrata koje sadrži kuka H_1, zatim μ_3 broj kvadrata koje sadrži kuka H_2, a μ_4 broj 2-kvadrata koje sadrži kuka H_2 itd.

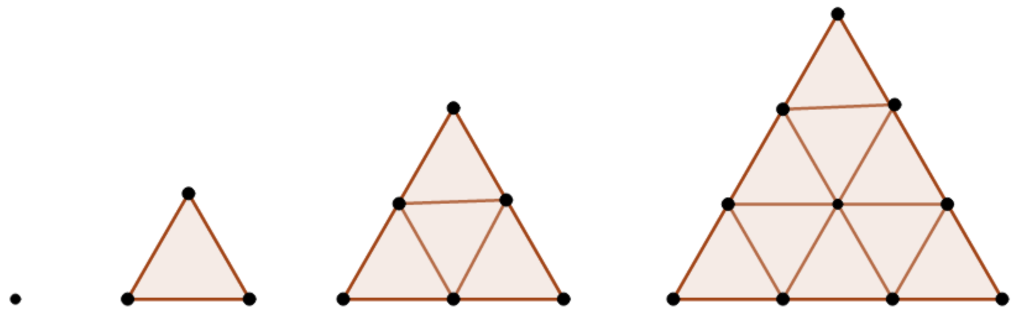


Slika 2.3. *Sylvesterova bijekcija* $\eta:(7,5,5,3,1)\rightarrow(8,6,4,2,1)$

2.2 Eulerova pentagonalna teorema

Pentagonalnim brojevima smatramo brojeve koji broje tačke sa kojima obrazujemo pravilan petougao. Princip je sličan principu triagonalnih (trougaonih), odnosno tetragonalnih (kvadratnih) brojeva. Podsetimo se najpre šta su to trougaoni, a šta kvadratni brojevi.

Trougaoni broj predstavlja broj tačaka koje formiraju jednakostranični trougao. Prvi trougaoni broj je 1, drugi trougaoni broj je 3, a *n*-ti trougaoni broj je broj tačaka koje formiraju jednakostranični trougao sa stranicom koja sadrži *n* tačaka.

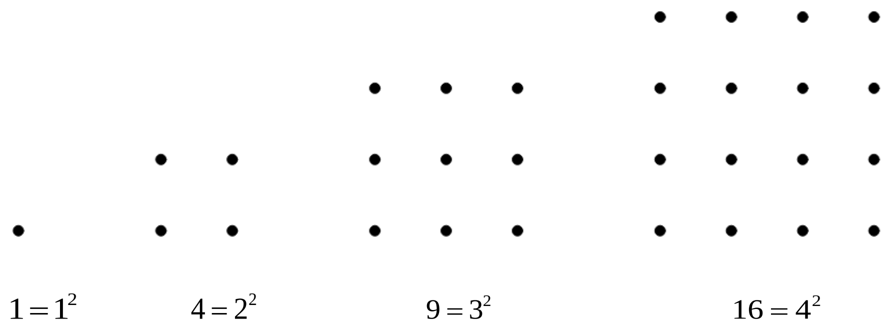


$T_1=1$ $T_2=3$ $T_3=6$ $T_4=10$

Slika 2.4. *Grafička reprezentacija prva četiri trougona broja (* T_i *je* i *-ti trougaoni broj)*

Dakle, trougaoni brojevi su brojevi $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}, \ldots$.

Kvadratni brojevi su brojevi koji su, kao što im sam naziv kaže, kvadrati prirodnih brojeva. Po analogiji sa trougaonim brojevima, *n*-ti kvadratni broj predstavljaja broj tačaka koje formiraju pravilan četvorougao (kvadrat), čija se stranica sastoji od *n* tačaka, na način prikazan na Slici 2.5.

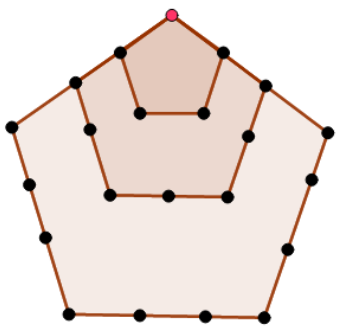


Slika 2.5. *Grafička reprezentacija prva četiri kvadratna broja*

Dakle, kvadratni brojevi su brojevi $1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots$.

Sada ćemo da proširimo ovaj koncept brojeva na pentagonalne za koje je Euler dokazao da važe neka jako lepa svojstva.

Za prvi pentagonalan broj uzimamo broj 1 (kao i kod trougaonih i kvadratnih brojeva). Drugi broj dobijamo tako što prebrojimo tačke koje formiraju petougao, označavajući tačkama samo njegova temena, pa je drugi pentagonalni broj baš broj 5. Treći pentagonalan broj dobijamo formirajući pravilan petougao koji ima jedno zajedničko teme sa prethodnim i dve njegove stranice sadrže dve stranice prethodnog petougla (brojimo i sva temena manjih petouglova - pogledaj Sliku broj 2.6.). Dakle, treći pentagonalni broj je broj 12. Postupak formiranja petouglova nastavljamo dalje.



Slika 2.6. *Grafička reprezentacija prva četiri pentagonalna broja*

Ako n – ti pentagonalan broj označimo sa P_n (onaj čiji petougao ima *n* tačaka na svakoj stranici), vidimo da važi sledeća rekurentna formula

$$P_n = P_{n-1} + 3n - 2\,,$$

odakle teleskopiranjem dobijamo opšti član niza pentagonalnih brojeva

$$P_n = \frac{n(3n-1)}{2}\,.$$

Dakle, pentagonalni brojevi su brojevi

$$1,5,12,22,35,51,\ldots,\frac{n(3n-1)}{2},\ldots$$

Ako n-tom pentagonalnom broju $\frac{n(3n-1)}{2}$ dodamo baš broj n dobijamo niz brojeva koje nazivamo refleksijama pentagonalnih brojeva.

Dakle, brojevi $2,7,15,26,40,\ldots,\frac{n(3n+1)}{2},\ldots$ su refleksije pentagonalnih brojeva.

Ukoliko u niz pentagonalnih brojeva uključimo i njihove refleksije, dobijamo novi niz čije članove nazivamo **generalizovanim pentagonalnim brojevima**. Baš ovaj niz brojeva će da nam bude zanimljiv u daljem radu. Naime, Eulerova pentagonalna teorema izražava upravo generalizovane pentagonalne brojeve.

Napomena: U daljem radu ćemo pod pojmom pentagonalnih brojeva podrazumevati generalizovane pentagonalne brojeve (ovakvu terminologiju koristio je i sam Euler).

U nastavku ćemo definisati bijekciju koju je definisao F. Franklin 1881. godine, koja će nam dati dokaz Eulerove teoreme pentagonalnih brojeva.

Teorema 2.4. *Neka je* $p_e(\mathcal{D},n)$ *(resp.* $p_o(\mathcal{D},n)$*) broj particija broja n na paran (resp. neparan) broj delova koji su međusobno različiti. Tada važi sledeće*

$$p_e(\mathcal{D},n) - p_o(\mathcal{D},n) = \begin{cases} (-1)^m, & \text{ako } n = \dfrac{m(3m\pm1)}{2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

gde je $m = 1,2,3,\ldots$.

Dokaz.

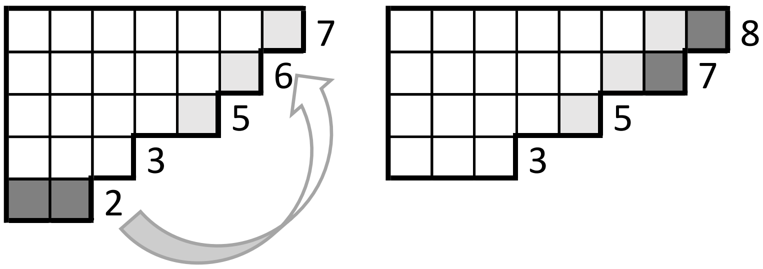
Cilj je da uspostavimo “$1-1$” korespondenciju između particija na paran broj različitih delova i particija na neparan broj različitih delova.

Označimo sa $s(\lambda)$ najmanji deo particije λ, a sa $\sigma(\lambda)$ broj elemenata na sporednoj dijagonali dijagrama (elementi na poziciji $(i, a(\lambda)+1-i)$).

Definišemo preslikavanje na sledeći način:

Slučaj 1. $s(\lambda) \leq \sigma(\lambda)$

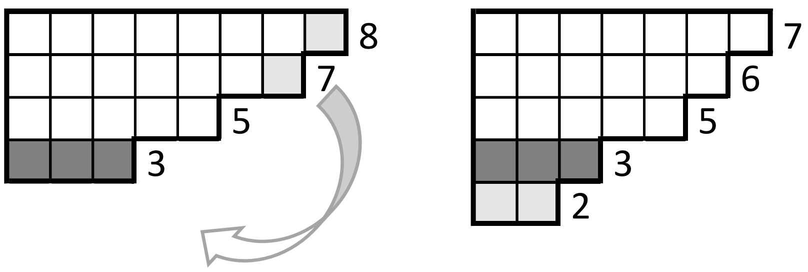
Elemente poslednjeg (najmanjeg) dela premeštamo na sledeći način: svaki od prvih $s(\lambda)$ delova uvećavamo za jedan (Slika 2.7.), a poslednji red izbrišemo. Na ovaj način nije promenjen ukupan broj kvadrata u Youngovom dijagramu, a broj delova je umanjen za jedan, čime se menja parnost broja $l(\lambda)$, što nam je cilj preslikavanja. Takođe, kako samo prvih $s(\lambda)$ delova uvećavamo, i to za po jedan, ne postoji mogućnost da neka dva dela postanu ista (i dalje su svi različiti).



Slika 2.7. *Preslikavanje* $(7,6,5,3,2) \to (8,7,5,3)$

Slučaj 2. $s(\lambda) > \sigma(\lambda)$

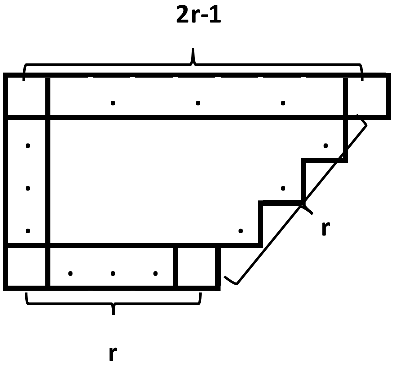
Elemente sporedne dijagonale premestimo ispod poslednjeg reda Youngovog dijagrama kreirajući novi deo particije. Ovim premeštanjem uvećali smo broj delova $l(\lambda)$ za jedan i time promenili njegovu parnost. Prvih $\sigma(\lambda)$ delova su nakon premeštanja manji za jedan. Grafički prikaz navedenog pomeranja dat je na Slici 2.8.



Slika 2.8. *Preslikavanje* $(8,7,5,3) \to (7,6,5,3,2)$

Međutim ovako definisano preslikavanje neće dobro "raditi" u svim situacijama, odnosno za sve particije. Problemi se javljaju i u Slučaju 1 i u Slučaju 2.

Slučaj 1. Ukoliko važi baš $s(\lambda)=\sigma(\lambda)=r$, tada dijagonala i red najmanje dužine imaju jedan zajednički element (ugao koji se nalazi u poslednjem redu dijagrama), pa "dijagram" dobijen nakon premeštanja, definisanog u Slučaju 1, nije uopšte Youngov dijagram.



Slika 2.9. *Youngov dijagram particije u kojoj je* $s(\lambda)=\sigma(\lambda)=r$

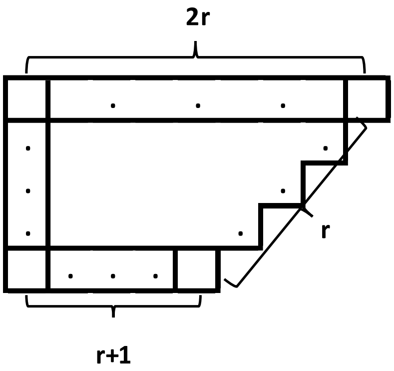
Ako posmatramo particiju u kojoj važi $s(\lambda)=\sigma(\lambda)=r$, primetićemo da broj čija je ovo particija možemo da zapišemo kao

$$r+(r+1)+...+(2r-1)=\underbrace{\frac{(2r-1)\cdot 2r}{2}}_{\substack{\text{suma prvih } 2r-1\\ \text{prirodnih brojeva}}}-\underbrace{\frac{(r-1)\cdot r}{2}}_{\substack{\text{suma prvih } r-1\\ \text{prirodnih brojeva}}}=\frac{4r^2-2r-r^2+r}{2}=\frac{3r^2-r}{2}=\frac{r\cdot(3r-1)}{2}.$$

Dakle, za svaki pentagonalan broj (ovde ne mislimo na generalizovane) postoji jedna particija takva da preslikavanje definisano u Slučaju 1 nije dobro definisano, odakle sledi da će razlika $p_e(\mathcal{D},n)-p_o(\mathcal{D},n)$ biti jednaka 1 ili -1.

Napomena: Analizirajući Sliku 2.9. možemo uvideti da se broj, čiju particiju predstavljamo dijagramom, može zapisati kao zbir jednog kvadratnog i jednog trougaonog broja, a ovo svojstvo upravo imaju pentagonalni brojevi.

Slučaj 2. Problem u slučaju $s(\lambda)>\sigma(\lambda)$ nastaje kada je $s(\lambda)$ veće od $\sigma(\lambda)$ za jedan i kada je počevši od najvećeg dela particije, svaki sledeći za jedan manji od prethodnog. U ovakvom slučaju premeštanjem dijagonale ispod poslednjeg reda dobijamo dva dela jednake dužine ("pokupili" smo i ugaoni kvadrat iz poslednjeg reda), pa dobijena particija ne pripada skupu $\mathcal{D}_n$.



Slika 2.10. *Youngov dijagram particije u kojoj je* $s(\lambda)=r+1$ *i* $\sigma(\lambda)=r$

Ako posmatramo dijagram particije u kojoj važi $s(\lambda)=r+1$ i $\sigma(\lambda)=r$, primetićemo da broj čija je ovo particija možemo da zapišemo kao

$$(r+1)+(r+2)+\ldots+2r=\underbrace{\frac{2r\cdot(2r+1)}{2}}_{\substack{\text{suma prvih } 2r \\ \text{prirodnih brojeva}}}-\underbrace{\frac{r\cdot(r+1)}{2}}_{\substack{\text{suma prvih } r \\ \text{prirodnih brojeva}}}=\frac{4r^2+2r-r^2-r}{2}=\frac{3r^2+r}{2}=\frac{r\cdot(3r+1)}{2},$$

dakle taj broj je refleksija pentagonalnog broja.

Konačno, zaključujemo da ukoliko se radi o particiji generalizovanog pentagonalnog broja, važi

$$p_e(\mathcal{D},n)-p_o(\mathcal{D},n)=\pm 1,$$

dok za svako drugo n važi $p_e(\mathcal{D},n)=p_o(\mathcal{D},n)$.

Preostalo je da pokažemo od čega zavisi predznak razlike $p_e(\mathcal{D},n)-p_o(\mathcal{D},n)$ kada je n pentagonalan broj. Za parno r, jednu particiju nećemo moći da preslikamo u particiju sa neparnim brojem delova, pa je broj $p_e(\mathcal{D},n)$ za jedan veći od $p_o(\mathcal{D},n)$, dok za neparno r važi obrnuto, $p_e(\mathcal{D},n)-p_o(\mathcal{D},n)=-1$, pa važi da je

$$p_e(\mathcal{D},n)-p_o(\mathcal{D},n)=(-1)^r.$$

■

Teorema 2.5. (Eulerova teorema o pentagonalnim brojevima):

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-t^n\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m t^{\frac{1}{2}m(3m-1)}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m t^{\frac{1}{2}m(3m-1)}&=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m t^{\frac{1}{2}m(3m-1)}+\sum_{m=-\infty}^{-1}(-1)^m t^{\frac{1}{2}m(3m-1)}\\&=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m t^{\frac{1}{2}m(3m-1)}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m t^{\frac{1}{2}m(3m+1)}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(p_e(\mathcal{D},n)-p_o(\mathcal{D},n)\right)t^n\end{aligned}$$

Ostaje još da pokažemo da je

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(p_e(\mathcal{D},n)-p_o(\mathcal{D},n)\right)t^n=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-t^n\right).$$

Raspišimo činioce proizvoda $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-t^n\right)$ i funkcije generatrise za broj particija sa različitim delovima $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+t^n\right)$:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-t^n\right)=(1-t)\cdot\left(1-t^2\right)\cdot\left(1-t^3\right)\cdot\ldots \tag{*}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+t^n\right)=(1+t)\cdot\left(1+t^2\right)\cdot\left(1+t^3\right)\cdot\ldots$$

Na prvi pogled primećujemo da su proizvodi slični (razlika je u znaku) i da se i u proizvodu (*) javljaju isključivo particije čiji su delovi različiti, osim što su koeficijenti uz t^n drugačiji. Koeficijent će imati jednu od vrednosti 1, -1 ili 0 (neki od sabiraka će se skratiti). Koeficijent -1 će odgovarati particijama sa neparnim brojem delova, a 1 onima sa parnim brojem delova. Npr.

$$\begin{aligned}(1-t)\cdot\left(1-t^2\right)\cdot\left(1-t^3\right)\cdot\left(1-t^4\right)\cdot\ldots&=1-t-t^2-t^3-t^4+t^{1+2}+t^{1+3}+t^{1+4}+t^{2+3}+t^{2+4}+t^{3+4}\\&\quad-t^{1+2+3}-t^{1+2+4}-t^{2+3+4}+t^{1+2+3+4}+\ldots\end{aligned}$$

Dakle, particije sa parnim brojem delova ćemo sabirati, a one sa neparnim brojem delova ćemo oduzimati. Možemo da zaključimo da će proizvod (*) poprimiti sledeći oblik:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-t^n\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(p_e(\mathcal{D},n)-p_o(\mathcal{D},n)\right)t^n,$$

što je i trebalo dokazati.

■

Prema Eulerovoj teoremi o pentagonalnim brojevima, u proizvodu $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-t^n\right)$ stepeni t-a su pentagonalni brojevi, tj. važi

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-t^n\right)=1-t-t^2+t^5+t^7-t^{12}-t^{15}+t^{22}+t^{26}-t^{35}-t^{40}+\dots.$$

Eulerova teorema o pentagonalnim brojevima daje nam jako lepu rekurentnu formulu za izračunavanje ukupnog broja particija $p(n)$ prirodnog broja *n*.

Teorema 2.6. (Euler): *Rekurentna formula za izračunavanje broja particija prirodnog broja* n *je*

$$p(n)=p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)$$
$$+\dots+(-1)^m p\left(n-\frac{1}{2}m(3m-1)\right)+(-1)^m p\left(n-\frac{1}{2}m(3m+1)\right)+\dots$$

Dokaz.

Prisetimo se generativne funkcije broja particija $p(n)$

$$P(t)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)t^n=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^n}$$

i primetimo da je njen inverz baš funkcija iz Eulerove teoreme.

Dakle, njihov prozvod je 1 :

$$1=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^n}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-t^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)t^n\cdot\left(1-t-t^2+t^5+t^7-\dots\right)$$

Sledeći korak je da izvršimo množenje i izjednačimo odgovarajuće koeficijente. Kako je jedino slobodan član jednak broju 1, a koeficijenti uz t^n, za svako $n\geq 1$ su jednaki nuli, dobijamo upravo traženu rekurentnu formulu:

$$\underbrace{p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)-p(n-12)-p(n-15)+\dots}_{\text{koeficijent uz } t^n}=0.$$

■

Primer: Primenom Eulerove rekurentne formule možemo da izračunamo broj particija broja 8.

$$p(8)=p(8-1)+p(8-2)-p(8-5)-p(8-7)=p(7)+p(6)-p(3)-p(1)=15+11-3-1=22$$

$\square$

Eulerova teorema, preciznije Franklinova bijekcija, daje nam još jednu jednakost među brojem particija na različite delove u zavisnosti od parnosti najvećeg elementa, koju navodimo bez dokaza kao direktnu posledicu Franklinove bijekcije.

Posledica 2.1. *Označimo sa* $p_{a(\lambda)^e}(\mathcal{D},n)$ *broj particija sa međusobno različitim delovima i parnim najvećim delom* $a(\lambda)$ *, a sa* $p_{a(\lambda)^o}(\mathcal{D},n)$ *broj particija sa međusobno različitim delovima i neparnim najvećim elementom. Tada važi sledeća jednakost*

$$p_{a(\lambda)^e}(\mathcal{D},n)-p_{a(\lambda)^o}(\mathcal{D},n)=\begin{cases}(-1)^m, & ako\ n=\dfrac{m(3m\pm1)}{2},\\ 0, & inače\end{cases}$$

gde je $m=1,2,3,\ldots$.

Dokaz.

Dokaz je sličan dokazu Teoreme 2.4. Naime, koristimo isto definisanu bijekciju koja će pri oba preslikavanja da menja parnost najvećem delu particije, što nam je i cilj.

$\blacksquare$

2.3 Jacobijev trostruki proizvod

U daljem radu dokazaćemo jedan jako značajan identitet koji ima brojne posledice, među kojima je i sama Eulerova teorema pentagonalnih brojeva. Radi se o Jacobijevom trostrukom proizvodu. Međutim, za dokaz ove teoreme potrebni su nam dva Eulerova identiteta, koja ćemo najpre dokazati.

Teorema 2.7. *Za svako* $a,t\in\mathbb{C}$ *važi sledeći identitet:*

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+at^{2n+1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n^2}a^n}{\left(1-t^2\right)\left(1-t^4\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-t^{2n}\right)}.$$

Dokaz.

Definišimo 2-parametarsku funkciju $K(a,t)$ na sledeći način:

$$K(a,t)=(1+at)\left(1+at^3\right)\left(1+at^5\right)\cdot\ldots$$

Posmatrajmo koeficijente uz stepene promenljive a. Neka je c_m koeficijent uz m-ti stepen promenljive a.

$$K(a,t)=1+c_1(t)a+c_2(t)a^2+\dots$$

Kako važi $K(a,t)=(1+at)K(at^2,t)$ i

$$(1+at)K(at^2,t)=(1+at)\left(1+c_1(t)at^2+c_2(t)a^2t^4+c_3(t)a^3t^6+\dots\right)$$

izjednačavanjem koeficijenata dobijamo

$$c_1=t+c_1t^2 \qquad c_2=c_1t^3+c_2t^4 \qquad c_3=c_2t^5+c_3t^6 \;\dots$$

pa možemo zaključiti da će za svako $m>0$ važiti

$$c_m=c_{m-1}t^{2m-1}+c_mt^{2m},$$

gde je $c_0=1$.

Preostaje nam još da matematičkom indukcijom dokažemo da je

$$c_m=\frac{t^{m^2}}{(1-t^2)(1-t^4)\cdot\ldots\cdot(1-t^{2m})}.$$

(B.I.) $m=1$

$$c_1=t+c_1t^2$$

$$c_1=\frac{t}{1-t^2}$$

(I.H.) Pretpostavimo da tvrđenje važi za $m-1$:

$$c_{m-1}=\frac{t^{(m-1)^2}}{(1-t^2)(1-t^4)\cdot\ldots\cdot(1-t^{2(m-1)})}$$

(I.K.) Dokazujemo tvrđenje za m.

Iz $c_m=c_{m-1}t^{2m-1}+c_mt^{2m}$ imamo da je

$$c_m=c_{m-1}\frac{t^{2m-1}}{1-t^{2m}}\underset{\text{(I.H.)}}{=}\frac{t^{m^2-2m+1+2m-1}}{(1-t^2)(1-t^4)\cdot\ldots\cdot(1-t^{2m-2})(1-t^{2m})}=\frac{t^{m^2}}{(1-t^2)(1-t^4)\cdot\ldots\cdot(1-t^{2m})}$$

što je i trebalo dokazati.

■

Preostaje nam dokaz još jednog Eulerovog tvrđenja da bi dokazali Jacobijev identitet.

Teorema 2.8. *Za svako* $a,t\in\mathbb{C}$ *važi sledeći identitet:*

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+at^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n a^n}{(1-t^2)(1-t^4)\cdot\ldots\cdot(1-t^{2n})}.$$

Dokaz.

Ovaj Eulerov identitet dokazuje se na sličan način kao i prethodni.

Označimo sa $R(a,t)$ levu stranu jednakosti.

$$R(a,t)=\frac{1}{(1+at)(1+at^3)(1+at^5)\cdot\ldots}$$

Iz poslednje jednakosti dobijamo da važi $(1+at)R(a,t)=R(at^2,t)$. Neka je c_m koeficijent uz *m*-ti stepen promenljive *a*. Ako izjednačimo koeficijente

$$(1+at)(1+c_1a+c_2a^2+c_3a^3+\ldots)=1+c_1at^2+c_2a^2t^4+c_3a^4t^6+\ldots$$

dobijamo

$$c_1=c_1t^2-t \qquad c_2=c_2t^4-c_1t \qquad c_3=c_3t^6-c_2t \ \ldots$$

odakle možemo zaključiti da će za svako $m>0$ važiti

$$c_m=c_mt^{2m}-c_{m-1}t,$$

gde uzimamo da je $c_0=1$.

Preostaje nam da matematičkom indukcijom dokažemo da važi da je

$$c_m=\frac{(-1)^m t^m}{(1-t^2)(1-t^4)\cdot\ldots\cdot(1-t^{2m})}.$$

(B.I.) $m=1$

$$c_1=c_1t^2-t$$

$$c_1=-\frac{t}{1-t^2}$$

(I.H.) Pretpostavimo da tvrđenje važi za $m-1$:

$$c_{m-1}=\frac{(-1)^{m-1}t^{m-1}}{(1-t^2)(1-t^4)\cdot\ldots\cdot(1-t^{2m-2})}$$

(I.K.) Dokazujemo tvrđenje za *m*.

Iz $c_m = c_m t^{2m} - c_{m-1} t$ imamo da je

$$c_m = -\frac{c_{m-1}t}{1-t^{2m}} \underset{\text{I.H.}}{=} -\frac{(-1)^{m-1} t^{m-1} t}{(1-t^2)(1-t^4)\cdot\ldots\cdot(1-t^{2m-2})(1-t^{2m})} = \frac{(-1)^m t^m}{(1-t^2)(1-t^4)\cdot\ldots\cdot(1-t^{2m})},$$

što je i trebalo pokazati.

■

Teorema 2.9. (Jacobijev trostruki proizvod): *Za* $|t|<1,\ t\in\mathbb{C}$ *i* $z\neq 0$ *važi*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[(1-t^{2n})(1+t^{2n-1}z)(1+t^{2n-1}z^{-1})\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n^2} z^n .$$

Dokaz.

Iz Teoreme 2.7. dobijamo da važi da je

$$K(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n^2} z^n \cdot (1-t^{2n+2})(1-t^{2n+4})\cdot\ldots}{(1-t^2)(1-t^4)\cdot\ldots\cdot(1-t^{2n})(1-t^{2n+2})(1-t^{2n+4})\cdot\ldots} = P(t^2)\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n^2} z^n \prod_{m=0}^{\infty}(1-t^{2n+2+2m})$$

$$\frac{K(z,t)}{P(t^2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n^2} z^n \prod_{m=0}^{\infty}\left(1+(-t^{2n+1})t^{2m+1}\right) \underset{\text{Teorema 2.7.}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n^2} z^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{m^2}(-t^{2n+1})^m}{(1-t^2)\cdot\ldots\cdot(1-t^{2m})}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n^2} z^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{m^2+2mn+m}}{(1-t^2)\cdot\ldots\cdot(1-t^{2m})} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^m z^{-m}}{(1-t^2)\cdot\ldots\cdot(1-t^{2m})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{(n+m)^2} z^{n+m}$$

$$\underset{\text{Teorema 2.8.}}{=} \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1+t^{2m+1}z^{-1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n^2} z^n = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1+t^{2m-1}z^{-1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n^2} z^n$$

Konačno, važi sledeća jednakost:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n^2} z^n = \frac{K(z,t)}{P(t^2)} \prod_{m=1}^{\infty}(1+t^{2m-1}z^{-1}) = \prod_{m=1}^{\infty}\left[(1-t^{2m})(1+t^{2m-1}z)(1+t^{2m-1}z^{-1})\right],$$

čime je Jacobijev identitet trostrukog proizvoda dokazan.

■

Jacobijev trostruki proizvod kao posledicu ima Eulerovu pentagonalnu teoremu. Pored nje, daje nam i generativne funkcije za triagonalne i kvadratne brojeve. U nastavku su navedene takve posledice.

Posledica 2.2. *Neka je* $z=1$ *u Jacobijevom trostrukom proizvodu. Tada dobijamo reprezentaciju generativne funkcije za kvadratne brojeve preko proizvoda:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-t^{2n}\right)\left(1+t^{2n-1}\right)^2\right].$$

Posledica 2.3. *Za* $z=-1$, *Jacobijev trostruki proizvod izgleda ovako:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n t^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-t^{2n}\right)\left(1-t^{2n-1}\right)^2\right].$$

Posledice 2.2 i 2.3. su bitne formule u teoriji eliptičnih funkcija.

Posledica 2.4. *Neka je* $z=t$ *i zamenimo t sa* $t^{1/2}$ *u Jacobijevom trostrukom proizvodu. Rezultat nam je generativna funkcija za trougaone brojeve:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n(n+1)/2} = 2\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+t^n\right)^2\left(1-t^n\right)\right].$$

Primetimo da su za $n=1,2,3,...$ brojevi $n(n+1)/2=1,3,6,...$ baš trougaoni brojevi.

Posledica 2.5. *Ako u Jacobijevom trostrukom proizvodu* t *zamenimo sa* $t^{3/2}$ *i neka je* $z=-t^{1/2}$ *, dobijamo Eulerovu teoremu o pentagonalnim brojevima.*

Dokaz.

Zapišimo obe strane jednakosti Jacobijevog trostrukog proizvoda sa gore navedenim izmenama:

(LS)

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-t^{\frac{3}{2}\cdot 2n}\right)\left(1+t^{\frac{3(2n-1)}{2}}\cdot\left(-t^{\frac{1}{2}}\right)\right)\left(1+t^{\frac{3(2n-1)}{2}}(-t)^{-\frac{1}{2}}\right)\right]=\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-t^{3n}\right)\left(1-t^{3n-1}\right)\left(1-t^{3n-2}\right)\right]=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-t^n\right)$$

(DS)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{\frac{3}{2}n^2}(-t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n t^{\frac{n(3n+1)}{2}}$$

Izjednačavanjem (LS) sa (DS) dobijamo identitet koji je dat Eulerovom teoremom o pentagonalnim brojevima.

■

Jedna od poznatijih posledica Jacobijevog trostrukog proizvoda je Watson – Gordonov petostruki proizvod. Dokaz teoreme je sličan dokazu Jacobijevog trostrukog proizvoda.

Teorema 2.10. (Watson-Gordonov petostruki proizvod): *Za* $z \neq 0$ *i* $|t| < 1$ *važi*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-t^{n}\right)\left(1-zt^{n}\right)\left(1-z^{-1}t^{n-1}\right)\left(1-z^{2}t^{2n-1}\right)\left(1-z^{-2}t^{2n-1}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{\frac{3n^{2}+n}{2}}\left(z^{3n}-z^{-3n-1}\right)$$

Dokaz.

Ako u proizvodu zamenimo *t* sa t^2 dobijamo ekvivalentnu verziju

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-t^{2n}\right)\left(1-zt^{2n}\right)\left(1-z^{-1}t^{2n-2}\right)\left(1-z^{2}t^{4n-2}\right)\left(1-z^{-2}t^{4n-2}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{3n^{2}+n}\left(z^{3n}-z^{-3n-1}\right) \qquad (*)$$

koju ćemo dokazati primenom Jacobijevog trostrukog proizvoda

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-t^{2n}\right)\left(1-zt^{2n-1}\right)\left(1-z^{-1}t^{2n-1}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n} t^{n^{2}} z^{n}. \qquad (**)$$

Definišimo dvoparametarsku funkciju $R(z,t)$ kao proizvod leve strane jednakosti (*) i $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-t^{4n}\right)$:

$$R(z,t)=\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-t^{2n}\right)\left(1-zt^{2n}\right)\left(1-z^{-1}t^{2n-2}\right)\left(1-t^{4n}\right)\left(1-z^{2}t^{4n-2}\right)\left(1-z^{-2}t^{4n-2}\right)\right]=$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-t^{2n}\right)\left(1-zt\cdot t^{2n-1}\right)\left(1-(zt)^{-1}\cdot t^{2n-1}\right)\left(1-\left(t^{2}\right)^{2n}\right)\left(1-z^{2}\left(t^{2}\right)^{2n-1}\right)\left(1-z^{-2}\left(t^{2}\right)^{2n-1}\right)\right]$$

$$\underset{(**)}{=}\sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^{i} z^{i} t^{i^{2}+i} \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^{j} z^{2j} t^{2j^{2}}=\sum_{i,j}(-1)^{i+j} z^{i+2j} t^{i^{2}+2j^{2}+i}$$

Označimo sada $i+2j=n$ i dobijamo

$$R(z,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n} z^{n} \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^{j} t^{(n-2j)^{2}+2j^{2}+n-2j}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n} z^{n} t^{n^{2}+n} \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^{j} t^{6j^{2}-4nj-2j}$$

Zamenimo sada j sa $-j-2k-1$ u izrazu $A=\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^{j} t^{6j^{2}+6j(2k+1)}$

i dobijamo

$$A=\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^{j} t^{6j^{2}+6j(2k+1)}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^{-j-2k-1} t^{6\left(j^{2}+4k^{2}+4kj+4k+2j+1\right)-6(j+2k+1)(2k+1)}$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{j+1} t^{6j^2+24k^2+24kj+24k+12j+6-12jk-24k^2-12k-6j-12k-6} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{j+1} t^{6j^2+12kj+6j}$$

$$= -\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{j} t^{6j^2+6j(2k+1)} = -A$$

pa za svaki celi broj k važi da je

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{j} t^{6j^2+6j(2k+1)} = 0 .$$

Da bi unutrašnja suma u $R(z,t)$ bila različita od nule, potrebno je da važi $4n+2 \not\equiv (\bmod 6)$, odnosno $2n+1 \not\equiv 0 (\bmod 3)$. Dakle, imamo dva moguća slučaja:

1. slučaj
   $2n+1 \equiv 1 (\bmod 3) \Rightarrow 2n \equiv 0 (\bmod 3) \Rightarrow n \equiv 0 (\bmod 3)$
   Neka nam je $R_1(z,t)$ onaj deo iz $R(z,t)$ u kom važi kongruentnost iznad. Tada važi da je
   $$R_1(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n z^{3n} t^{9n^2+3n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j t^{6j^2-12nj-2j} \qquad \text{(zamenili smo } n \text{ sa } 3n\text{)}$$
   Zamenimo u unutrašnjoj sumi j sa $m+n$.
   $$R_1(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n z^{3n} t^{9n^2+3n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m t^{6m^2+12mn+6n^2-12mn-12n^2-2m-2n}$$
   $$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n z^{3n} t^{3n^2+n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m t^{6m^2-2m} = Q \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{3n} t^{3n^2+n}$$
   Ovde nam je $Q = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m t^{6m^2-2m} = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1-t^{4m}\right)$ prema Eulerovoj pentagonalnoj

teoremi.

2. slučaj
   $2n+1 \equiv 2 (\bmod 3) \Rightarrow 2n \equiv 1 (\bmod 3) \Rightarrow 2n \equiv 4 (\bmod 3) \Rightarrow n \equiv 2 (\bmod 3) \Rightarrow n \equiv -1 (\bmod 3)$
   U $R(z,t)$ nam preostaje još
   $$R_2(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{3n-1} t^{(3n-1)^2+3n-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j t^{6j^2-4j(3n-1)-2j}$$
   $$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{3n-1} t^{9n^2-3n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j t^{6j^2-12jn+2j}$$
   U prethodnom koraku zamenili smo n sa $3n-1$.
   Zamenimo u unutrašnjoj sumi j sa $m+n$, kao u prethodnom slučaju.

$$R_2(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{3n-1} t^{9n^2-3n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m t^{6m^2+12mn+6n^2-12mn-12n^2+2m+2n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{3n-1} t^{3n^2-n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m t^{6m^2+2m} \underset{m\to -m}{=} Q \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{3n-1} t^{3n^2-n}$$

$$\underset{n\to -n}{=} Q \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{-3n-1} t^{3n^2+n}$$

Iz 1. i 2. imamo da sledi da je

$$R(z,t) = R_1(z,t) + R_2(z,t) = Q \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{3n} t^{3n^2+n} + Q \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{-3n-1} t^{3n^2+n} = Q \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{3n^2+n} \left(z^{3n} - z^{-3n-1}\right)$$

Podelimo obe strane sa Q i dobijamo (*), čime je dokaz završen.

■

Glava 3

Kongruencije

3.1 Ramanujanove kongruencije mod5, mod7 i mod11

Indijski matematičar Srinivasa Ramanujan dao je teoriji particija neke od najznačajnijih i najlepših identiteta. Između ostalog, bavio se ponašanjem broja particija $p(n)$. Gledajući u tabelu broja particija prvih 200 prirodnih brojeva, koje je pomoću Eulerove formule izveo engleski matematičar Percy MacMahon, Ramanujan je uočio neka jako lepa pravila.

Posmatrajmo tabelu broja particija prvih 40 prirodnih brojeva (Slika 3.1.). Počevši sa brojem particija broja 4 ($p(4)=5$), svaki peti broj particija je deljiv brojem 5. Takođe, ako počnemo od broja particija broja 5 ($p(5)=7$), svaki sedmi broj deljiv je brojem 7. Slično važi i za $p(6)=11$, počevši od broja particija broja 6, svaki jedanaesti broj je deljiv brojem 11.

n	$p(n)$	n	$p(n)$	n	$p(n)$	n	$p(n)$
1	1	**11**	56	**21**	792	**31**	6842
2	2	**12**	**77**	**22**	1002	**32**	8349
3	3	**13**	101	**23**	1255	**33**	**10143**
4	**5**	**14**	**135**	**24**	**1575**	**34**	**12310**
5	**7**	**15**	176	**25**	1958	**35**	14883
6	**11**	**16**	231	**26**	**2436**	**36**	17977
7	15	**17**	**297**	**27**	3010	**37**	21637
8	22	**18**	385	**28**	**3718**	**38**	26015
9	**30**	**19**	**490**	**29**	4565	**39**	**31185**
10	42	**20**	627	**30**	5604	**40**	**37338**

Slika 3.1. *Broj particija prvih 40 prirodnih brojeva (crvenom bojom su obojene kongruencije po modulu 5, plavom one po modulu 7, a zelenom po modulu 11)*

Ova pravila se nazivaju Ramanujanove kongruencije i date su sledećim jednakostima:

$$p(5n+4)\equiv 0(\bmod 5)$$

$$p(7n+5)\equiv 0(\bmod 7)$$

$$p(11n+6)\equiv 0(\bmod 11)$$

Videli smo da za svako $p(n),\ n\le 40$ ovo zaista važi iz tabele sa Slike 3.1. Da bi dokazali da važi i za veće *n* koristićemo Eulerovu teoremu o pentagonalnim brojevima, Jacobijev trostruki proizvod, kao i sledeći Jacobijev identitet:

Teorema 3.1. (Jacobi):

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-t^{n}\right)^{3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(2n+1)t^{\frac{1}{2}n(n+1)}.$$

Dokaz.

U Jacobijevom proizvodu $\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-t^{2n}\right)\left(1+t^{2n-1}z\right)\left(1+t^{2n-1}z^{-1}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^{n^2}z^{n}$ zamenimo *z* sa -*z*. Dobijamo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^{n^2}(-z)^{n}=\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-t^{2n}\right)\left(1-t^{2n-1}z\right)\left(1-t^{2n-1}z^{-1}\right)\right],$$

a kako je $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-zt^{2n-1}\right)=(1-zt)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-zt^{2n+1}\right)$, sledi da važi sledeće:

$$(1-zt)^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-z)^{n}t^{n^2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-t^{2n}\right)\left(1-t^{2n+1}z\right)\left(1-t^{2n-1}z^{-1}\right)\right] \qquad (*)$$

Raspišimo levu stranu jednakosti (*) na sledeći način:

$$(1-zt)^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-z)^{n}t^{n^2}=(1-zt)^{-1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left((-z)^{n}+(-z)^{-n}\right)t^{n^2}\right)$$

$$=\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}z^{m}t^{m}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left((-z)^{n}+(-z)^{-n}\right)t^{n^2}\right)$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}z^{m}t^{m}+\sum_{m=0}^{\infty}z^{m}\sum_{n=1}^{\infty}\left((-z)^{n}+(-z)^{-n}\right)t^{n^2+m}$$

Zapišimo $n^2+m=m'$, tako da eliminišemo *m* iz izraza. Tada je $m=m'-n^2\ge 0$, pa je $m'\ge n^2$, odakle sledi da je $n\le\left\lfloor\sqrt{m'}\right\rfloor=\mu_{m'}$. Takođe, važi da je $n\ge 1$ i $m\ge 0$, pa je $m'\ge 1$. Dakle, poslednju jednakost možemo zapisati na sledeći način:

$$(1-zt)^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-z)^{n}t^{n^2}=1+\sum_{m=1}^{\infty}z^{m}t^{m}+\sum_{m'}t^{m'}\sum_{n=1}^{\mu_{m'}}\left((-z)^{n}+(-z)^{-n}\right)z^{m'-n^2}=1+\sum_{m=1}^{\infty}t^{m}R_{m}$$

gde je $R_m=\sum_{n=1}^{\mu_m}\left(\left(-z\right)^n+\left(-z\right)^{-n}\right)z^{m-n^2}+z^m=\sum_{n=2}^{\mu_m}\left(-1\right)^n z^{m-n^2+n}+\sum_{n=1}^{\mu_m}\left(-1\right)^n z^{m-n^2-n}$

$$=\sum_{n=1}^{\mu_m-1}\left(-1\right)^{n+1} z^{m-n^2-2n-1+n+1}+\sum_{n=1}^{\mu_m}\left(-1\right)^n z^{m-n^2-n}=\sum_{n=1}^{\mu_m-1}\left(-1\right)^{n+1} z^{m-n^2-n}+\sum_{n=1}^{\mu_m}\left(-1\right)^n z^{m-n^2-n}=\left(-1\right)^{\mu_m} z^{m-\mu_m^2-\mu_m}$$

Dakle,

$$\left(1-zt\right)^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-z\right)^n t^{n^2}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(-1\right)^{\mu_m} z^{m-\mu_m^2-\mu_m}t^m$$

Zamenimo sada z sa t^{-1} u poslednjem izrazu i dobijamo

$$\left(1-zt\right)^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-z\right)^n t^{n^2}\Bigg|_{z=t^{-1}}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(-1\right)^{\mu_m} t^{\mu_m^2+\mu_m}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(-1\right)^m t^{m^2+m}\left|\left\{m=\left\lfloor\sqrt{i}\right\rfloor : i\geq 1\right\}\right|$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(-1\right)^m\left(2m+1\right)t^{m^2+m}$$

jer je $\left|\left\{i\geq 1 : m=\left\lfloor\sqrt{i}\right\rfloor\right\}\right|=\left|\left\{i\geq 1 : m\leq i\leq\left(m+1\right)^2-1\right\}\right|=2m+1$.

Preostaje nam da i u desnoj strani jednakosti (*) zamenimo z sa t^{-1}.

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-t^{2n}\right)\left(1-t^{2n+1}z\right)\left(1-t^{2n-1}z^{-1}\right)\right]=\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-t^{2n}\right)\left(1-t^{2n}\right)\left(1-t^{2n}\right)\right]=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-t^{2n}\right)^3$$

Dakle, $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-t^{2n}\right)^3=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(2n+1\right)t^{n^2+n}$, pa menjajući t sa $t^{1/2}$ dobijamo traženi identitet:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-t^n\right)^3=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(2n+1\right)t^{\frac{n^2+n}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(2n+1\right)t^{\frac{1}{2}n\left(n+1\right)}.$$

■

Radi lakšeg zapisa, uvedimo sledeće oznake:

$$E\left(t\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-t^n\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(-1\right)^m t^{\frac{1}{2}m\left(3m-1\right)} \text{ i}$$

$$J\left(t\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-t^n\right)^3=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(2n+1\right)t^{\frac{1}{2}n\left(n+1\right)},$$

odakle sledi da je $J\left(t\right)=E\left(t\right)^3$.

Dokažimo sada prethodno navedene Ramanujanove kongruencije.

Teorema 3.2. (Ramanujanova kongruencija mod 5):

$$p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$$

Dokaz.

Primetimo da su stepeni u proizvodu

$$E(t) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-t^n) = 1-t-t^2+t^5+t^7-t^{12}-t^{15}+t^{22}+t^{26}-t^{35}-\dots$$

kongruentni sa 0, 1 ili 2 po modulu 5. Stoga, možemo da zapišemo da je

$$E \equiv E_0 + E_1 + E_2,$$

gde $E_i,\ i=0,1,2$ sadrži one izraze iz E čiji su stepeni kongruentni sa $i \pmod 5$.

Stepeni *t*-a u proizvodu

$$J = \prod_{n=1}^{\infty}(1-t^n)^3 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)t^{\frac{1}{2}n(n+1)} = 1-3t+5t^3-7t^6+9t^{10}-11t^{15}+13t^{21}-15t^{28}+\dots$$

su kongruentni sa $0,\ 1$ ili $3 \pmod 5$,

Pokazaćemo da je $2n+1 \equiv 0 \pmod 5$ baš onda kada je $\frac{1}{2}n(n+1) \equiv 3 \pmod 5$ primenom osnovnih osobina kongruencija:

$$\begin{aligned}
&2n+1 \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow \\
&2n \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow \\
&\left.\begin{aligned} n &\equiv 2 \pmod 5 \\ n^2 &\equiv 4 \pmod 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow n^2+n \equiv 6 \pmod 5 \Rightarrow \frac{n^2+n}{2} \equiv 3 \pmod 5
\end{aligned}$$

Zaključujemo da su koeficijenti uz elemente sa stepenom t-a kongruentnim sa $3 \pmod 5$ jednaki nuli, pa preostaje da važi da je

$$J \equiv J_0 + J_1,$$

gde $J_i,\ i=0,1$ sadrži one izraze iz J čiji su stepeni kongruentni sa $i \pmod 5$.

Takođe važi da je

$$(1-t)^5 = 1-\binom{5}{1}t+\binom{5}{2}t^2-\binom{5}{3}t^3+\binom{5}{4}t^4-t^5 \equiv 1-0+0-0+0-t^5 \pmod 5,$$

$$\text{tj. } (1-t)^5 \equiv 1-t^5 \pmod 5.$$

Sada sledi da je $E(t)^5 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-t^n)^5 \equiv \prod_{n=1}^{\infty}(1-t^{5n}) = E(t^5)$. Na osnovu dokazanih jednakosti i kongruencija zaključujemo sledeće:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^i} = \frac{1}{E(t)} = \frac{E(t)^4}{E(t)^5} \equiv \frac{E(t)^4}{E(t^5)} \equiv \frac{E(t)J(t)}{E(t^5)} \equiv \frac{(E_0+E_1+E_2)(J_0+J_1)}{E(t^5)}$$
$$\equiv \frac{E_0J_0+E_0J_1+E_1J_0+E_1J_1+E_2J_0+E_2J_1}{E(t^5)}$$

pa je $E(t^5)\sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n \equiv E_0J_0+E_0J_1+E_1J_0+E_1J_1+E_2J_0+E_2J_1$,

odakle diretno sledi da je $\sum_{n=0}^{\infty} p(5n+4)t^{5n+4} \equiv 0$.

■

Napomena: Poslednja jednakost nam zapravo govori sledeće:

- u E_0J_0 se nalaze stepeni *t*-a kongruentni sa $0+0=0 \pmod 5$
- u E_0J_1 se nalaze stepeni *t*-a kongruentni sa $0+1=1 \pmod 5$ itd.

Dakle, postoje samo stepeni *t*-a kongruentni sa $0,1,2,3 \pmod 5$.

Teorema 3.3. (Ramanujanova kongruencija mod 7):

$$p(7n+5) \equiv 0 \pmod 7$$

Dokaz.

Dokaz je sličan dokazu za kongruencije po $\bmod 5$.

Posmatrajmo stepene u izrazu $E(t)$:

$$E(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m t^{\frac{1}{2}m(3m-1)} = 1-t-t^2+t^5+t^7-t^{12}-t^{15}+t^{22}+t^{26}-t^{35}-t^{40}\ldots.$$

Svaki stepen *t*-a kongruentan je sa $0,\ 1,\ 2$ ili 5 po modulu 7. Dakle, važi da je

$$E \equiv E_0+E_1+E_2+E_5,$$

gde $E_i,\ i=0,1,2,5$ sadrži one izraze iz E čiji su stepeni kongruentni sa $i \pmod 7$.

Takođe, posmatrajmo i stepene *t*-a u izrazu $J(t)$:

$$J(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)t^{\frac{1}{2}n(n+1)}=1-3t+5t^3-7t^6+9t^{10}-11t^{15}+13t^{21}-15t^{28}+17t^{36}-19t^{45}+\dots.$$

Pomenuti stepeni su kongruentni sa $0,\ 1,\ 3$ ili $6\ (\bmod 7)$. Preostaje nam još da vidimo šta se dešava sa stepenom *t*-a kada je $2n+1\equiv 0(\bmod 7)$.

$$\begin{aligned}
&2n+1\equiv 0(\bmod 7)\Rightarrow\\
&2n\equiv 6(\bmod 7)\Rightarrow\\
&\left.\begin{array}{l} n\equiv 3(\bmod 7)\\ n^2\equiv 2(\bmod 7)\end{array}\right\}\Rightarrow n^2+n\equiv 5(\bmod 7)\Rightarrow n^2+n\equiv 12(\bmod 7)\Rightarrow \frac{n^2+n}{2}\equiv 6(\bmod 7)
\end{aligned}$$

Dakle, stepeni kongruentni sa 6 će nestati, pa dobijamo da je

$$J\equiv J_0+J_1+J_3,$$

gde $J_i,\ i=0,1,3$ sadrži one izraze iz J čiji su stepeni kongruentni sa $i(\bmod 7)$.

Dalje, slično kao i u prethodnom dokazu, imamo sledeće

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(n)t^n=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^i}=\frac{1}{E(t)}=\frac{E(t)^6}{E(t)^7}\equiv\frac{\left(E(t)^3\right)^2}{E(t^7)}\equiv\frac{J(t)^2}{E(t^7)}\equiv\frac{(J_0+J_1+J_3)^2}{E(t^7)}$$

$$=\frac{J_0^2+2J_0J_1+J_1^2+2J_0J_3+2J_1J_3+J_3^2}{E(t^7)}.$$

Iz poslednje jednakosti dobijamo da su stepeni *t*-a kongruentni sa

$$0\cdot 2=\underline{0},\ 0+1=\underline{1},\ 1\cdot 2=\underline{2},\ 0+3=\underline{3},\ 1+3=\underline{4},\ 3\cdot 2=\underline{6}\ (\bmod 7).$$

Dakle, generativna funkcija ne sadrži stepene koji su kongruentni sa $5(\bmod 7)$, pa važi da je

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(7n+5)t^{7n+5}\equiv 0,$$

čime je dokaz završen.

■

Za Ramanujanovu kongruenciju po modulu 11, kao što Michael D. Hirschhorn u svom radu (u literaturi svrstan pod [13]) piše, dugo se verovalo da ne postoji dokaz sličan dokazima prethodne dve kongruencije. Međutim, dokaz uzet baš iz navedenog rada opovrgava ovo verovanje. Hardy je iz Ramanujanovih neobjavljenih radova izveo dokaz za kongruenciju po modulu 11 koristeći Eisensteinove nizove. Freeman Dyson je definišući rang particije i postavljajući hipotezu za crank funkciju, otvorio put Georgeu Andrewsu i Franku Garvanu za kombinatorni dokaz Ramanujanovih kongruencija. Andrews i Garvan su 1988. definisali crank funkciju pomoću koje su dokazali sve tri Ramanujanove kongruencije. Međutim, zbog jednostavnosti, u ovom radu ćemo prikazati dokaz analogan dokazima prethodne dve kongruencije, a Dyson-Andrews-Garvanovu podelu particija u klase prema rangu/cranku ćemo demonstrirati bez dokaza.

Teorema 3.4. (Ramanujanova kongruencija mod 11):

$$p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}$$

Dokaz.

Kao i u prethodna dva slučaja, posmatrajmo stepene u sledećem izrazu:

$$E(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m t^{\frac{1}{2}m(3m-1)} = 1 - t - t^2 + t^5 + t^7 - t^{12} - t^{15} + t^{22} + t^{26} - t^{35} - t^{40} + t^{51} + t^{57} - t^{70} - t^{77} \ldots$$

Oni su kongruentni sa $0,1,2,4,5,7 \pmod{11}$, pa važi da je

$$E \equiv E_0 + E_1 + E_2 + E_4 + E_5 + E_7,$$

gde $E_i,\ i = 0,1,2,4,5,7$ sadrži one izraze iz E čiji su stepeni kongruentni sa $i \pmod{11}$.

Takođe, posmatrajmo i stepene *t*-a u izrazu $J(t)$:

$$J(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) t^{\frac{1}{2}n(n+1)} = 1 - 3t + 5t^3 - 7t^6 + 9t^{10} - 11t^{15} + 13t^{21} - 15t^{28} + 17t^{36} - 19t^{45} + \ldots .$$

Stepeni *t*-a su kongruentni sa $0,1,3,4,6,10 \pmod{11}$. Treba još da proverimo šta se dešava sa stepenom *t*-a kada je $2n+1 \equiv 0 \pmod{11}$.

$$2n+1 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow$$
$$2n \equiv 10 \pmod{11} \Rightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l} n \equiv 5 \pmod{11} \\ n^2 \equiv 3 \pmod{11} \end{array}\right\} \Rightarrow n^2 + n \equiv 8 \pmod{11} \Rightarrow \frac{n^2+n}{2} \equiv 4 \pmod{11}$$

Dakle, stepeni kongruentni sa 4 će nestati, pa dobijamo da je

$$J \equiv J_0 + J_1 + J_3 + J_6 + J_{10},$$

gde $J_i,\ i = 0,1,3,6,10$ sadrži one izraze iz J čiji su stepeni kongruentni sa $i \pmod{11}$.

Primetimo da važi sledeće

$$J(t)^4 = E(t)^{12} = E(t)^{11} \cdot E(t) \equiv E(t^{11}) \cdot E(t) \text{ tj.}$$

$$\left(J_0+J_1+J_3+J_6+J_{10}\right)^4 \equiv E\left(t^{11}\right)\cdot\left(E_0+E_1+E_2+E_4+E_5+E_7\right).$$

Odavde možemo da zaključimo da stepenovanjem leve strane gubimo stepene kongruentne sa $3,6,8,9,10 \pmod{11}$. Tako će, na primer, za stepene kongruentne sa $3 \pmod{11}$ važiti sledeće:

$$J_0^3 J_3 + J_0 J_1^3 + 6J_0 J_1 J_3 J_{10} + 7J_1^2 J_6^2 + 3J_3 J_6^2 J_{10} + J_6 J_{10}^3 \equiv 0 \pmod{11} \qquad (*)$$

Slične kongruencijske jednakosti važe za stepene kongruentne sa $6,8,9,10 \pmod{11}$. Dalje, imamo da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n = \frac{1}{E(t)} = \frac{E(t)^{21}}{E(t)^{22}} = \frac{J(t)^7}{E\left(t^{11}\right)^2} = \frac{\left(J_0+J_1+J_3+J_6+J_{10}\right)^7}{E\left(t^{11}\right)^2}.$$

Sredimo li desnu stranu jednakosti i izdvojimo li izraze u kojima je stepen *t*-a kongruentan sa $6 \pmod{11}$, dobijamo da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(11n+6)t^{11n+6} = \frac{S}{E\left(t^{11}\right)^2},$$

gde je S suma onih sabiraka iz proširenog oblika polinoma $\left(J_0+J_1+J_3+J_6+J_{10}\right)^7$ čiji je stepen *t*-a kongruentan sa $6 \pmod{11}$.

Dobijeni polinom S transformacijama možemo predstaviti kao

$S=\sum_{i=1}^{5} A_i \cdot B_i$, gde je A_1 leva strana jednakosti (*), $A_2,\dots,A_5$ slične jednakosti koje važe za stepene kongruentne sa $6,8,9,10 \pmod{11}$, a $B_i, i=1,\dots,5$ odgovarajući polinomi koji obezbeđuju ovu jednakost. Kako je svaki od izraza $A_i \equiv 0 \pmod{11}$, zaključujemo da je i

$$S \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p(11n+6)t^{11n+6} \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}.$$

■

Napomena: U dokazu nisu prikazane sve transformacije polinoma zbog opširnosti njihovog ispisivanja. Npr. proširena verzija polinoma $\left(J_0+J_1+J_3+J_6+J_{10}\right)^4$ ima 70 sabiraka. Detaljniji dokaz nalazi se u [13] , gde možemo videti izglede izraza $S, A_i, B_i \ (i=1,\dots,5)$.

Iako možemo da kažemo da u ovom dokazu elegancija izostaje, ipak nam on daje jednostavan i podjednak pristup dokazivanju sve tri Ramanujanove kogruencije, sa čim se većina drugih dokaza ne može "pohvaliti".

3.2 Dysonov rank i crank

Definicija 3.1. ***Rang*** *particije λ definišemo kao razliku između najvećeg dela particije i ukupnog broja delova te particije:*

$$\operatorname{rank}(\lambda) := a(\lambda) - l(\lambda).$$

Uvodimo oznaku za:

- broj particija broja *n* čiji je rang jednak *m*: $N(m,n)$
- broj particija broja *n* čiji je rang kongruentan *m* po modulu *q*: $N(m,q,n)$

Na osnovu osobina kongruencija zaključujemo da važe sledeće jednakosti:

$$N(m,n) = N(-m,n)$$

$$N(m,q,n) = N(q-m,q,n)$$

$$N(m,q,n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} N(m+iq,n).$$

Prva osobina važi zbog konjugovane particije.

Ideju ranga uveo je Dyson 1944. godine sa ciljem da pokaže da važe tvrđenja

$$N(m,5,5k+4) = \frac{p(5k+4)}{5} \text{ za svako } m,\ 1 \le m \le 4 \text{ i}$$

$$N(m,7,7k+5) = \frac{p(7k+5)}{7} \text{ za svako } m,\ 1 \le m \le 6,$$

a dokaz su dali Atkin i Swinnerton-Dyer, 10 godina kasnije.

Primer: Demonstrirajmo prvo tvrđenje na primeru particija broja 4.

Particije broja 4	$a(\lambda)$	$l(\lambda)$	$\operatorname{rank}(\lambda)$ $\bmod 5$
4	4	1	3
3+1	3	2	1
2+2	2	2	0
2+1+1	2	3	$-1 \equiv 4$
1+1+1+1	1	4	$-3 \equiv 2$

Dakle, po jedna particija broja 4 pripada svakoj klasi kongruencije po $\bmod 5$.

□

Slično važi i za drugo tvrđenje.

Primer: Podelimo particije broja 5 u klase kongruencije po modulu 7.

Particije broja 5	$a(\lambda)$	$l(\lambda)$	$\operatorname{rank}(\lambda)$ $\bmod 7$
5	5	1	4
4+1	4	2	2
3+2	3	2	1
3+1+1	3	3	0
2+2+1	2	3	$-1 \equiv 6$
2+1+1+1	2	4	$-2 \equiv 5$
1+1+1+1+1	1	5	$-4 \equiv 3$

Svaka klasa sadrži jednak broj particija (po jednu). Ukoliko bi podelili po klasama particije broja 12, svaka klasa bi sadržala po 11 particija (ukupno ih ima 77 - videti tabelu na Slici 3.1).

$\square$

Uverićemo se da Dysonova podela particija u klase, tako da svaka klasa sadrži jednak broj particija, za $\bmod 11$ ne funkcioniše već za $k = 0$.

Primer: Napravimo tabelu za particije broja 6, kao u prethodna dva primera.

Particije broja 6	$a(\lambda)$	$l(\lambda)$	$\operatorname{rank}(\lambda)$ $\bmod 11$
6	6	1	5
5+1	5	2	3
4+2	4	2	2
3+3	3	2	$\underline{1}$
4+1+1	4	3	$\underline{1}$
3+2+1	3	3	0
2+2+2	2	3	$\underline{-1 \equiv 10}$
3+1+1+1	3	4	$\underline{-1 \equiv 10}$
2+2+1+1	2	4	$-2 \equiv 9$
2+1+1+1+1	2	5	$-3 \equiv 8$
1+1+1+1+1+1	1	6	$-5 \equiv 6$

Dakle, vidimo da se neke od klasa ponavljaju, dok se druge uopšte ne pojavljuju. Zaključujemo da na ovaj način ne možemo da dokažemo Ramanujanovu kongruenciju po modulu 11.

$\square$

Dyson je smatrao da za rešavanje kongruencije 11 mora da postoji nešto slično rangu particije, što se kasnije ispostavilo tačnim. Naime, Andrews i Garvan pronalaze i definišu takozvani ***crank*** particije. Naziv je proizišao iz njegove sličnosti sa rangom (eng. *rank*).

Definicija 3.2. *Neka je* $m_1(\lambda)$ *broj delova particije* λ *koji su jednaki broju* 1, *a* $\mu(\lambda)$ *broj delova particije većih od* $m_1(\lambda)$. ***Crank*** *particije* λ *je definisan na sledeći način:*

$$\operatorname{crank}(\lambda)=\begin{cases} a(\lambda), \text{ ako je } m_1(\lambda)=0 \\ \mu(\lambda)-m_1(\lambda), \text{ ako je } m_1(\lambda)>0 \end{cases}$$

Proverimo sada šta se dešava sa particijama brojeva 4, 5 i 6 ukoliko ih podelimo na klase kongruencije njihovih crank funkcija po modulima 5, 7 i 11 respektivno.

Primer: Particije broja 4 podeljene u klase kongruencije na osnovu cranka predstavljene su u tabeli:

Particije broja 4	$a(\lambda)$	$m_1(\lambda)$	$\mu(\lambda)$	$\operatorname{crank}(\lambda) \bmod 5$
4	4	0	4	4
3+1	3	1	1	0
2+2	2	0	2	2
2+1+1	2	2	0	$-2\equiv 3$
1+1+1+1	1	4	0	$-4\equiv 1$

Podela je dobra, svakoj klasi pripada po jedna particija.

□

Primer: Podelimo particije broja 5 na klase.

Particije broja 5	$a(\lambda)$	$m_1(\lambda)$	$\mu(\lambda)$	$\operatorname{crank}(\lambda) \bmod 7$
5	5	0	1	5
4+1	4	1	1	0
3+2	3	0	2	3
3+1+1	3	2	1	$-1\equiv 6$
2+2+1	2	1	2	1
2+1+1+1	2	3	0	$-3\equiv 4$
1+1+1+1+1	1	5	0	$-5\equiv 2$

Ponovo svaka klasa sadrži jednak broj particija.

□

Preostaje još da vidimo da li će navedeni način definisanja $\operatorname{crank}(\lambda)$ podeliti i particije broja 6 na klase sa jednakim brojem particija, što rang funkcija nije uspela da uradi.

Primer: Particije broja 6 po klasama:

Particije broja 6	$a(\lambda)$	$m_1(\lambda)$	$\mu(\lambda)$	$\operatorname{crank}(\lambda)$ mod11
6	6	0	1	6
5+1	5	1	1	0
4+2	4	0	2	4
3+3	3	0	2	3
4+1+1	4	2	1	$-1\equiv 10$
3+2+1	3	1	2	1
2+2+2	2	0	3	2
3+1+1+1	3	3	0	$-3\equiv 8$
2+2+1+1	2	2	0	$-2\equiv 9$
2+1+1+1+1	2	4	0	$-4\equiv 7$
1+1+1+1+1+1	1	6	0	$-6\equiv 5$

Iz tabele zaključujemo da crank funkcija "radi" za kongruencije po $\bmod 11$. Za razliku od ranga, ovde se javljaju sve klase i svakoj klasi pripada jednak broj particija.

□

Ukoliko posmatramo navedene tri kongruencije

$$p(5n+4)\equiv 0 \pmod 5$$

$$p(7n+5)\equiv 0 \pmod 7$$

$$p(11n+6)\equiv 0 \pmod{11}$$

prva pomisao bi bila da postoji određen patern i da bi sledeća konguencija mogla da izgleda kao

$$p(13n+7)\equiv 0 \pmod{13}.$$

Međutim, posmatrajući tabelu sa Slike 3.1 uviđamo da navedena zavisnost ne važi već za $n=0$:

$$p(7)=15\equiv 2 \pmod{13}.$$

Ramanujan je pokazao pravila koja važe za kongruencije po modulima 5, 7 i 11, ali matematičko istraživanje kongruencija po $\bmod n$, gde je n prost broj >11, nije prestalo smrću Ramanujana. 1960-ih godina, britanski matematičar A. O. L. Atkin pokazao je da postoji i zavisnost za kongruencije po $\bmod 13$, a kasnije tokom godina pronađene su kongruencije i za veće proste brojeve. Na primeru naredne tri kongruencije, uviđamo da one ne izgledaju baš "lepo" kao Ramanujanove kongruencije:

$$p(17303n+237)\equiv 0(\bmod 13)$$

$$p(206839n+2623)\equiv 0(\bmod 17)$$

$$p(1977147619n+815655)\equiv 0(\bmod 19).$$

Ken Ono je 2002. godine, zajedno sa Scottom Ahlgrenom, dokazao da ovakve kongruencije postoje za svaki prost broj.

Teorema 3.5. (K.Ono, S.Ahlgren): *Za svaki prost broj $\delta \geq 5$ postoji beskonačno mnogo kongruencija oblika*

$$p(An+B)\equiv 0(\bmod \delta).$$

Takođe, Ramanujan je pokazao da postoje slična pravila i za kongruencije po modulima 5^2, 7^2 i 11^2, kao na primer:

$$p(25n+24)\equiv 0(\bmod 5^2).$$

Ramanujan je u stvari tvrdio da važe sledeće uopštene pravila za konguencije po modulu δ, gde je $\delta = 5^a, 7^b, 11^c$:

ako važi da je $24n \equiv 1(\bmod \delta)$, onda je $p(n)\equiv 0(\bmod \delta)$. (*)

Nakon Ramanujanovog dokaza za 5^2, G. N. Watson je 1938. godine dokazao da tvrđenje (*) važi za $\delta = 5^a$. Međutim, za $\delta = 7^b$ tvrđenje ne važi. Ovo je uočio Hansraj Gupta, indijski matematičar, koji je MacMahonovu tablicu broja particija prvih 200 prirodnih brojeva proširio do $p(300)$. Naime, za broj 243 važi da je $24\cdot 243\equiv 1(\bmod 7^3)$, ali broj particija $p(243)=133978259344888$ nije deljiv sa $7^3 = 343$. Ali kako za 7^2 važi i opštije tvrđenje,

$$p(49n+19,33,40,47)\equiv 0(\bmod 7^2),$$

Watson je modifikovao tvrđenje (*) za 7^b i dokazao da važi da za

$$b>1 \text{ i } 24n\equiv 1(\bmod 7^{2b-2}) \text{ važi } p(n)\equiv 0(\bmod 7^b).$$

Slična istraživanja su nastavljena i za stepene većih prostih brojeva.

Glava 4

Rogers – Ramanujanovi identiteti

Identiteti koji će u ovom poglavlju biti prikazani su jedni od najbitnijih identiteta teorije particija, s obzirom da se pojavljuju i imaju široku primenu u različitim delovima matematike i fizike. Najpre ih je dokazao L. J. Rogers 1894. godine, potom pronašao Ramanujan oko 1913. godine, a onda i I. Schur 1917. godine, svi nezavisno jedan od drugog. Rogers, iako talentovan matematičar, nije bio naročito priznat, pa se za njegov dokaz saznalo tek dvadesetak godina kasnije, kada ga je Ramanujan pronašao u 20 godina starom časopisu Londonskog društva matematičara. Dokaz prikazan u ovom radu je relativno nov kombinatorni dokaz koji su dali I. Pak i C. Boulet u radu [23]. Dokaz se oslanja na proširenje Dysonovog ranga, čiju definiciju ćemo videti u nastavku.

Definišimo najpre neke pojmove koje ćemo koristiti u dokazu:

1. m – pravougaonik dijagrama $[\lambda]$ je bilo koji pravougaonik za koji važi da je razlika visine i širine jednaka m
2. Prvi m – Durfeeov pravougaonik je najveći m – pravougaonik koji staje u dijagram $[\lambda]$; označimo njegovu visinu sa $\mathrm{u}_m(\lambda)$
3. Drugi m – Durfeeov pravougaonik je najveći m – pravougaonik koji staje u dijagram $[\lambda]$ ispod prvog m – Durfeeovog pravougaonika; označimo njegovu visinu sa $\mathrm{v}_m(\lambda)$
4. Dogovor je da visina Durfeeovog pravougaonika ne može biti jednaka nuli, dok širina može
5. Neka je α particija koja se nalazi desno od Durfeeovih pravougaonika u dijagramu
6. Neka je β particija koja se nalazi ispod prvog, a desno od drugog Durfeeovog pravougaonika u dijagramu
7. Neka je γ particija koja se nalazi ispod Durfeeovih pravougaonika u dijagramu
8. $(2,m)$-*rank* particije definišemo kao particije čiji je rang

$$r_{2,m}(\lambda) := \beta_1 + \alpha_{\mathrm{u}_m(\lambda)-\mathrm{v}_m(\lambda)-\beta_1+1} - \gamma_1'$$

9. Sa $\mathcal{H}_{n,m,r}$ ćemo označiti skup particija broja n za koje je $r_{2,m}(\lambda)=r$, sa $\mathcal{H}_{n,m,\leq r}$ skup particija za koje je $r_{2,m}(\lambda)\leq r$ i sa $\mathcal{H}_{n,m,\geq r}$ skup particija za koje je $r_{2,m}(\lambda)\geq r$

Teorema 4.1. (Rogers – Ramanujan): *Broj particija broja n na delove koji se međusobno razlikuju bar za dva jednak je broju particija istog broja na delove koji su kongruentni sa* $\pm 1(\mathrm{mod}\,5)$*, odnosno važi*

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n^2}}{(1-t)(1-t^2)\cdot\ldots\cdot(1-t^n)}=\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(1-t^{5i+1})(1-t^{5i+4})}.$$

Slično, važi

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n(n+1)}}{(1-t)(1-t^2)\cdot\ldots\cdot(1-t^n)}=\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(1-t^{5i+2})(1-t^{5i+3})}.$$

Dokaz.

Prikazaćemo dokaz prvog identiteta.

Najpre ćemo pomoću Jacobijevog trostrukog proizvoda svesti Rogers – Ramanujanov identitet svesti na ekvivalentan identitet koji nazivamo Schurov identitet.

Prisetimo se Jacobijevog trostrukog proizvoda:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[(1-t^{2n})(1+t^{2n-1}z)(1+t^{2n-1}z^{-1})\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^{n^2}z^n.$$

Zapišimo z kao zt i dobijamo

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[(1-t^{2n})(1+t^{2n}z)(1+t^{2n-2}z^{-1})\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^{n^2+n}z^n,$$

zamenimo sada z sa $-t^{-2}$ i t sa $t^{\frac{5}{2}}$ i dobijamo

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[(1-t^{5n})(1-t^{5n}t^{-2})(1-t^{5n-5}t^{2})\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^{\frac{5(n^2+n)}{2}}(-t^{-2})^n \quad \text{tj.}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[(1-t^{5n})(1-t^{5n-2})(1-t^{5n-3})\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n t^{\frac{n(5n+1)}{2}}.$$

Desnu stranu Rogers – Ramanujanove jednakosti možemo zapisati kao

$$\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\left(1-t^{5i+1}\right)\left(1-t^{5i+4}\right)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-t^{5n}\right)\left(1-t^{5n-2}\right)\left(1-t^{5n-3}\right)\right]\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^{i}}=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n}t^{\frac{n(5n+1)}{2}}\right)\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^{i}}$$

odakle dobijamo ekvivalentan identitet koji nazivamo **Schurov identitet**:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n^2}}{(1-t)\left(1-t^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-t^n\right)}=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n}t^{\frac{n(5n+1)}{2}}\right)\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^{i}}.$$

Definišimo sada Rogers – Ramanujanovu particiju kao particiju λ za koju važi da je $s(\lambda)\geq l(\lambda)$ i označimo skup ovakvih particija broja *n* sa $\mathcal{Q}_n$ i analogno sa definisanjem oznaka za sve particije broja *n*, i za R – R particije uvodimo oznake na sledeći način:

- sa $\mathcal{Q}=\bigcup_{n}\mathcal{Q}_n$ označavamo skup svih R – R particija
- sa $q(n)=|\mathcal{Q}_n|$ označavamo broj R – R particija broja *n*
- sa $Q(t)$ odgovarajuću generativnu funkciju

Dakle, generativne funkcije su:

$$P(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p(n)t^n=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^n}\quad \text{i}\quad Q(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}q(n)t^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n^2}}{(1-t)\left(1-t^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-t^n\right)}.$$

Particije koje nisu R – R particije (one iz skupa $\mathcal{P}\setminus\mathcal{Q}$) nazivamo i $(2,0)$*-rank* particije, zbog specijalnog načina definisanja ranga. Taj rang označavamo sa $r_{2,0}(\lambda)$ i definisaćemo ga u dokazu sledeće teoreme. Slično, za $m>0$, posmatraćemo $(2,m)$*-rank* particije čiji rang označavamo sa $r_{2,m}(\lambda)$ i koje pripadaju skupu $\mathcal{P}$. Sa $h(n,m,r)$ ćemo označiti broj particija broja *n* za koje važi da je $r_{2,m}(\lambda)=r$, sa $h(n,m,\leq r)$ broj particija za koje je $r_{2,m}(\lambda)\leq r$. Analogno važi za $h(n,m,\geq r)$, $h(n,0,\leq r)$ i $h(n,0,\geq r)$.

Iz definicije važi da je

$$h(n,m,\leq r)+h(n,m,\geq r+1)=p(n)\quad m>0\quad \text{i}$$

$$h(n,0,\leq r)+h(n,0,\geq r+1)=p(n)-q(n). \qquad (*)$$

Pored dve jednakosti označene sa (*), glavni deo dokaza nam predstavljaju sledeća dva tvrđenja koja ćemo dokazati naknadno putem bijekcije:

(1. simetrija) $h(n,0,r)=h(n,0,-r)\quad(\forall r)$

(2. simetrija) $h(n,m,\leq -r)=h(n-r-2m,m+2,\geq -r)\quad (m,r>0)\vee(m=0\wedge r\geq 0)$

Neka je za svako $j \geq 0$

$$a_j = h\left(n - jr - 2jm - \frac{j(5j-1)}{2}, m+2j, \leq -r-j\right) \text{ i}$$

$$b_j = h\left(n - jr - 2jm - \frac{j(5j-1)}{2}, m+2j, \geq -r-j+1\right).$$

Lako zaključujemo da iz (*) važi

$$a_j + b_j = p\left(n - jr - 2jm - \frac{j(5j-1)}{2}\right) \quad (\forall r, j > 0). \tag{**}$$

Na osnovu 2. simetrije očigledno je da je $a_j = b_{j+1}$, pa na osnovu prethodno dobijenog važi

$$\begin{aligned} h(n,m,\leq -r) &= a_0 = b_1 = b_1 + \underbrace{(a_1 - b_2)}_{=0} - \underbrace{(a_2 - b_3)}_{=0} + \underbrace{(a_3 - b_4)}_{=0} - \ldots \\ &= (b_1 + a_1) - (b_2 + a_2) + (b_3 + a_3) - (b_4 + a_4) + \ldots \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} (a_j + b_j) \\ &\underset{(**)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} p\left(n - jr - 2jm - \frac{j(5j-1)}{2}\right) \end{aligned}$$

Zapišimo dobijeno preko jezika generativnih funkcija:

$$H_{m,\leq -r}(t) := \sum_{n=1}^{\infty} h(n,m,\leq -r) t^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^n} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} t^{jr+2jm+\frac{j(5j-1)}{2}} \qquad (m,r>0) \vee (m=0 \wedge r \geq 0)$$

Posebno važi da je

$$H_{0,\leq 0}(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^n} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} t^{\frac{j(5j-1)}{2}} \quad \text{i}$$

$$H_{0,\leq -1}(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^n} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} t^{j+\frac{j(5j-1)}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^n} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} t^{\frac{j(5j+1)}{2}},$$

a primenom 1. simetrije dobijamo da je

$$H_{0,\leq 0}(t) + H_{0,\leq -1}(t) = H_{0,\leq 0}(t) + H_{0,\geq 1}(t) \underset{(*)}{=} P(t) - Q(t)$$

što nam daje sve particije koje nisu Rogers – Ramanujanove particije.

Dakle,

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^n}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}t^{\frac{j(5j-1)}{2}}+\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^n}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}t^{\frac{j(5j+1)}{2}}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^n}-\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n^2}}{(1-t)(1-t^2)\cdot\ldots\cdot(1-t^n)}\right)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^n}\left(1-\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}t^{\frac{j(5j-1)}{2}}-\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}t^{\frac{j(5j+1)}{2}}\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n^2}}{(1-t)(1-t^2)\cdot\ldots\cdot(1-t^n)}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^n}\left(1+\sum_{j=-\infty}^{-1}(-1)^{j}t^{\frac{j(5j+1)}{2}}+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j}t^{\frac{j(5j+1)}{2}}\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n^2}}{(1-t)(1-t^2)\cdot\ldots\cdot(1-t^n)}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^n}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^{j}t^{\frac{j(5j+1)}{2}}\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n^2}}{(1-t)(1-t^2)\cdot\ldots\cdot(1-t^n)}$$

Dakle, dokazali smo Schurov identitet, a time i Rogers – Ramanujanov identitet.

■

Preostalo nam je da dokažemo dve simetrije koje smo koristili u dokazu Rogers – Ramanujanove jednakosti. Dokazaćemo ih kombinatorno.

Teorema:

(1. simetrija) $h(n,0,r)=h(n,0,-r) \quad (\forall r)$

(2. simetrija) $h(n,m,\leq -r)=h(n-r-2m,m+2,\geq -r) \quad (m,r>0)\vee(m=0\wedge r\geq 0)$

Dokaz.

1. simetrija

Definisaćemo preslikavanje φ na skupu $\mathcal{P}\setminus\mathcal{Q}$ koje će da bude involutivno, da očuvava veličinu particije i Durfeeove kvadrate te particije, ali će da menja znak ranga.

Neka je $\varphi:\mathcal{H}_{n,0,r}\to\mathcal{H}_{n,0,-r}$ i neka je λ particija koja sadrži dva Durfeeova kvadrata. Neka su α,β,γ particije definisane u tačkama 5.-7. iznad. Označimo sa $\mathrm{u}=\mathrm{u}_0(\lambda)$ i sa $\mathrm{v}=\mathrm{v}_0(\lambda)$ veličine Durfeeovih kvadrata.

Preslikavanje $\varphi:\lambda\mapsto\hat{\lambda}$ opisujemo kao preslikavanje trojke (α,β,γ) u petorku particija $(\mu,\nu,\pi,\rho,\sigma)$, a potom preslikavanje ove petorke u novu trojku particija $(\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma})$, koje će biti raspoređene u particiji $\hat{\lambda}$ kako je opisano u tačkama 5.-7. iznad, respektivno.

- Neka je $\mu=\beta$.

Uklonimo iz particije α delove $\alpha_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-\beta_j+j}$ za svako $j,\ 1\leq j\leq \mathrm{v}$.

- Neka je ν particija sastavljena iz delova izbačenih iz α.
- Neka particija π obuhvata onaj deo koji nije izbačen iz α.

Za $1 \le j \le \mathrm{v}$, neka je $k_j = \max\left\{k \le \mathrm{u} - \mathrm{v} \mid \gamma'_j - k \ge \pi_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k+1}\right\}$.

- Neka je ρ particija sa delovima $\rho_j = k_j$.
- Neka je σ particija sa delovima $\sigma_j = \gamma'_j - k_j$.

△ Neka je $\hat{\gamma}' = \nu + \mu$, $\hat{\alpha} = \sigma \cup \pi$ i $\hat{\beta} = \rho$.

Dokazaćemo sledeće osobine preslikavanja φ :

1) ρ je particija
2) σ je particija
3) $\hat{\lambda} = \varphi(\lambda)$ je particija
4) φ^2 je identičko preslikavanje
5) $r_{2,0}\left(\hat{\lambda}\right) = -r_{2,0}(\lambda)$

Pre nego što počnemo sa dokazivanjem, primetimo da je k_j definisano za svako j, $1 \le j \le \mathrm{v}$ (uzimajući u obzir i slučaj $k = 0$). Takođe, može se pokazati da je k_j jedinstven broj k za koji važi

$$\pi_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k+1} \le \gamma'_j - k \le \pi_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k}. \qquad (*)$$

Za $k = \mathrm{u} - \mathrm{v}$ ne uzimamo u obzir gornje ograničenje.

1) Ako je $k_j \le k_{j+1}$ onda važi

$$\pi_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k_j+1} + k_j \le \pi_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k_{j+1}+1} + k_{j+1} \le \gamma'_{j+1} \le \gamma'_j \underset{(*)}{\le} \pi_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k_j} + k_j,$$

odakle je

$$\pi_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k_j+1} \le \gamma'_{j+1} - k_j \le \pi_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k_j},$$

pa je zbog jedinstvenosti $k_j = k_{j+1}$. Dakle, zaključujemo da je $k_j \ge k_{j+1}$, pa je ρ particija.

2) Ako je $k_j > k_{j+1}$, onda je $\mathrm{u} - \mathrm{v} - k_j + 1 \le \mathrm{u} - \mathrm{v} - k_{j+1}$, pa je i

$$\pi_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k_{j+1}} \le \pi_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k_j+1}.$$

Iz (*) zaključujemo da je

$$\gamma'_j - k_j \ge \gamma'_{j+1} - k_{j+1}.$$

Za $k_j = k_{j+1}$, primenimo činjenicu da je γ' particija, pa i ovde važi

$$\gamma'_j - k_j \ge \gamma'_{j+1} - k_{j+1},$$

pa je σ, sa delovima $\sigma_j = \gamma'_j - k_j$, particija.

3) Zbog načina definisanja μ, ν, π su particije, a zbog 1) i 2) važi da su ρ i σ takođe particije. Kako smo $\hat{\alpha}, \hat{\gamma}$ i $\hat{\beta}$ formirali kao uniju dve particije (što je takođe particija)

ili kao zbir dve particije (što je takođe particija) ili jednostavno izjednačili sa određenom particijom, respektivno, zaključujemo da su $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ i $\hat{\gamma}$ particije. Takođe, iz definicija vidimo da μ, ν i σ imaju najviše v delova, π najviše $\mathrm{u}-\mathrm{v}$ delova, a ρ najviše v delova, od kojih je svaki $\leq \mathrm{u}-\mathrm{v}$. Dakle, $\hat{\alpha}$ ima najviše u delova, $\hat{\beta}$ najviše v delova, od kojih je svaki $\leq \mathrm{u}-\mathrm{v}$, a $\hat{\gamma}$ najviše v delova. Sa ovakvim "dimenzijama", $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ i $\hat{\gamma}$ mogu da se smeste desno, u sredinu i levo od Durfeeovih kvadrata veličine u i v respektivno. Dakle, $\varphi(\lambda) = \hat{\lambda}$ je particija.

4) Primenićemo sada funkciju φ dva puta na particije λ koje nisu R – R particije i koje imaju unutar sebe α, β i γ definisane u tačkama 5-7 na samom početku ovog dokaza. Neka su $\mu, \nu, \pi, \rho, \sigma$ particije koje se javljaju u srednjoj fazi preslikavanja (kao i do sada) i neka su $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ i $\hat{\gamma}$ particije desno, u sredini i levo od Durfeeovih kvadrata u dijagramu particije $\hat{\lambda} = \varphi(\lambda)$. Slično, neka su $\hat{\mu}, \hat{\nu}, \hat{\pi}, \hat{\rho}, \hat{\sigma}$ particije koje se javljaju u srednjoj fazi drugog preslikavanja φ i neka su α^*, β^* i γ^* particije desno, u sredini i levo od Durfeeovih kvadrata u dijagramu particije $\varphi^2(\lambda) = \varphi(\hat{\lambda})$. Treba da pokažemo da je φ^2 identičko preslikavanje.

- Znamo da važi da je $\underline{\rho = \hat{\beta} = \hat{\mu}}$ iz definicija.
- Iz definicije je $\sigma_j = \gamma'_j - k_j$, pa primenjujući (*) dobijamo nejednakost
$$\pi_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k_j+1} \leq \gamma'_j - k_j = \sigma_j \leq \pi_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k_j},$$
Kako je σ particija, važi da je $\hat{\alpha}_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k_j+j} = \sigma_j$, a kako je $\hat{\beta}_j = k_j$, dobijamo da je $\hat{\alpha}_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-\beta_j+j} = \sigma_j$. Znamo da φ uklanja baš ove redove iz $\hat{\alpha}$, a od uklonjenih redova iz $\hat{\alpha}$ dobijamo particiju $\hat{\nu}$, pa je $\underline{\hat{\nu} = \sigma}$. Iz $\hat{\alpha} = \sigma \cup \pi = \hat{\nu} \cup \pi$ i definicije koja kaže da iz preostalih delova particije $\hat{\alpha}$ formiramo $\hat{\pi}$, zaključujemo da je $\underline{\hat{\pi} = \pi}$.
- Definišemo
$$\hat{k}_j = \max\left\{\hat{k} \leq \mathrm{u}-\mathrm{v} \mid \gamma'_j - \hat{k} \geq \pi_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-\hat{k}+1}\right\}.$$
Ranije smo pomenuli da važi da je $\hat{k}_j$ jedinstven broj $\hat{k}$ za koji važi da je
$$\hat{\pi}_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-\hat{k}+1} \leq \hat{\gamma}'_j - \hat{k} \leq \hat{\pi}_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-\hat{k}}.$$
Iz definicija dobijamo sledeće
$$\left.\begin{aligned} \hat{\gamma}'_j &= \mu_j + \nu_j \\ \beta_j &= \mu_j \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{\gamma}'_j - \beta_j = \nu_j,$$
zatim $\nu_j = \alpha_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-\beta_j+j}$, a iz definicije za π imamo
$$\pi_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-\beta_j+1} \leq \alpha_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-\beta_j+j} = \nu_j = \gamma'_j - \beta_j \leq \pi_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-\beta_j}.$$
Kako je $\hat{\pi} = \pi$ i zbog već pomenute jedinstvenosti, važi

$$\hat{k}_j = \beta_j = \mu_j \Rightarrow \begin{cases} \hat{\rho}_j = \hat{k}_j = \mu_j \\ \hat{\sigma}_j = \hat{\gamma}'_j - \hat{k}_j = \hat{\gamma}'_j - \mu_j = \nu_j \end{cases}.$$

Dakle, $\underline{\hat{\rho} = \mu}$ i $\underline{\hat{\sigma} = \nu}$.

- Konačno

$$\alpha^* = \hat{\sigma} \bigcup \hat{\pi} = \nu \bigcup \pi = \alpha$$

$$\beta^* = \hat{\rho} = \mu = \beta \text{ i}$$

$$\left(\gamma^*\right)' = \hat{\nu} + \hat{\mu} = \sigma + \rho = \gamma',$$

pa je φ^2 identičko preslikavanje.

5) Iz 4) i definicija važi

$$\left.\begin{aligned} r_{2,0}\left(\lambda\right) &= \beta_1 + \alpha_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-\beta_1+1} - \gamma'_1 = \mu_1 + \nu_1 - \rho_1 - \sigma_1 \\ r_{2,0}\left(\hat{\lambda}\right) &= \hat{\beta}_1 + \hat{\alpha}_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-\hat{\beta}_1+1} - \hat{\gamma}'_1 = \rho_1 + \sigma_1 - \mu_1 - \nu_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -r_{2,0}\left(\lambda\right) = r_{2,0}\left(\hat{\lambda}\right).$$

2. simetrija

Za dokaz ove simetrije, definisaćemo bijektivnu funkciju

$$\psi_{m,r} : \mathcal{H}_{n,m,\le -r} \to \mathcal{H}_{n-r-2m-2,m+2,\ge -r}.$$

Preslikavanje je definisano za $m, r > 0$ i za $m > 0$ i $r \ge 0$ i u oba slučaja prvi i drugi $m-$ Durfeeovi pravougaonici imaju širinu različitu od nula. Ovo važi jer je za $m = 0$ $(2,0)-$rang definisan samo za ne R – R particije, koje po definiciji imaju dva Durfeeova kvadrata širine različite od nula. U slučaju $m > 0$, kada je i $r > 0$, za particiju $\lambda \in \mathcal{H}_{n,m,\le -r}$ mora da važi

$$r_{2,m}\left(\lambda\right) = \beta_1 + \alpha_{\mathrm{u}_m(\lambda)-\mathrm{v}_m(\lambda)-\beta_1+1} - \gamma'_1 \le -r < 0.$$

Dakle, $\gamma'_1 > 0$, pa je širina oba Durfeeova pravougaonika veća od nule.

Preslikavanje $\psi := \psi_{m,r}$ opisujemo kao određivanje veličine Durfeeovih pravougaonika u particiji $\hat{\lambda}$ i particija $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ i $\hat{\gamma}$ koje se, kao i do sada, nalaze desno, u sredini i ispod Durfeeovih pravougaonika u $\left[\hat{\lambda}\right]$. Definišemo kao na sledeći način:

- Ako $[\lambda]$ ima dva $m-$Durfeeova pravougaonika visina

$$\mathrm{u} := \mathrm{u}_m\left(\lambda\right) \text{ i } \mathrm{v} := \mathrm{v}_m\left(\lambda\right),$$

onda $\left[\hat{\lambda}\right]$ ima dva $(m+2)-$Durfeeova pravougaonika visina

$$\mathrm{u}' := \mathrm{u}_{m+2}\left(\hat{\lambda}\right) = \mathrm{u}+1 \text{ i } \mathrm{v}' := \mathrm{v}_{m+2}\left(\hat{\lambda}\right) = \mathrm{v}+1.$$

- Neka je

$$k_1 = \max\left\{k \le \mathrm{u}-\mathrm{v} \middle| \gamma'_1 - r - k \ge \alpha_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k+1}\right\}.$$

Particiju $\hat{\alpha}$ dobijamo tako što u α dodamo deo veličine $\gamma_1' - r - k_1$, $\hat{\beta}$ dobijamo tako što u β dodamo deo veličine k_1, a $\hat{\gamma}$ tako što particiji λ oduzmemo prvu kolonu.

Kao i kod prve simetrije, u slučaju $k = \beta_1$, k_1 je definisano i važi $k_1 \geq \beta_1$. Takođe, iz definicije važi da je k_1 jedinstveno k za koje važi da je

$$\alpha_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k+1} \leq \gamma_1' - r - k \leq \alpha_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k} . \tag{**}$$

Za $k = \mathrm{u} - \mathrm{v}$ ne uzimamo u obzir gornje ograničenje.

Dokazujemo: **Preslikavanje $\psi = \psi_{m,r}$ je bijekcija.**

Dokaz se sastoji iz dokazivanja sledećih tvrđenja:

1) $\hat{\lambda} = \psi(\lambda)$ je particija,
2) broj delova particije $\hat{\lambda}$ je $n - r - 2m - 2$,
3) $r_{2,m+2}\left(\hat{\lambda}\right) \geq -r$ i
4) definisaćemo inverznu funkciju ψ^{-1} čime ćemo dokazati da je ψ bijekcija.

1) Kako λ ima dva $m-$Durfeeova pravougaonika nenula širine, $\hat{\lambda}$ može da ima $(m+2)-$Durfeeove pravougaonike širine $\mathrm{u}-1$ i $\mathrm{v}-1$. Takođe, particije $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ imaju najviše $\mathrm{u}+1$ i $\mathrm{v}+1$ delova, dok particije $\hat{\beta}$ i $\hat{\gamma}$ imaju delove koji nisu veći od $\mathrm{u}-\mathrm{v}$ i $\mathrm{v}-1$, resp. To znači da ove tri particije mogu da stanu desno od, u sredini i ispod Durfeeovih pravougaonika u $\left[\hat{\lambda}\right]$. Dakle, $\hat{\lambda}$ je particija.
2) Kako smo iz α uklonili deo veličine $\gamma_1' - r - k_1$, na β dodali deo veličine k_1, iz γ uklonili prvu kolonu (γ_1' kvadrata) i kako oba nova $(m+2)-$Durfeeova pravougaonika imaju po $m+1$ kvadrat manje u dijagramu $\left[\hat{\lambda}\right]$, nego odgovarajući $m-$Durfeeovi pravougaonici u $[\lambda]$, nova particija $\hat{\lambda}$ ima ukupno
$$n - (\gamma_1' - r - k_1 + k_1 - \gamma_1') - 2(m+1) = n - r - 2m - 2$$
kvadrata u svom Youngovom dijagramu.
3) Deo koji smo dodali na particiju β biće najveći deo te nove particije, tj. $\hat{\beta}_1 = k_1$. Zbog (**) imamo
$$\alpha_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k_1+1} \leq \gamma_1' - r - k_1 \leq \alpha_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k_1},$$
pa mora da važi
$$\hat{\alpha}_{\mathrm{u}'-\mathrm{v}'-\hat{\beta}_1+1} = \hat{\alpha}_{\mathrm{u}-\mathrm{v}-k_1+1} = \gamma_1' - r - k_1 .$$
Dakle, izabrali smo k_1 na jedinstven način takvo da su redovi umetnuti u α i β redom $\hat{\alpha}_{\mathrm{u}'-\mathrm{v}'-\hat{\beta}_1+1}$ i $\hat{\beta}_1$, pa imamo sve što je potrebno za $(2, m+2)-$rang particije $\hat{\lambda}$:

$$r_{2,m+2}\left(\hat{\lambda}\right)=\hat{\beta}_1+\hat{\alpha}_{\mathrm{u}'-\mathrm{v}'-\hat{\beta}_1+1}-\hat{\gamma}_1'=k_1+\gamma_1'-r-k_1-\hat{\gamma}_1'\underset{\gamma'\geq\hat{\gamma}'}{\geq}-r\,.$$

4) Preslikavanje $\psi^{-1}:\hat{\lambda}\mapsto\lambda$ definišemo na sledeći način:

10. Iz $\hat{\alpha}$ izbacimo red $\hat{\alpha}_{\mathrm{u}'-\mathrm{v}'-\hat{\beta}_1+1}$ i dobijamo particiju α.
11. Iz $\hat{\beta}$ izbacimo prvi red ($\hat{\beta}_1$) i dobijamo particiju β.
12. Particiji $\hat{\gamma}$ dodamo kolonu visine $\hat{\alpha}_{\mathrm{u}'-\mathrm{v}'-\hat{\beta}_1+1}+\hat{\beta}_1+r$ i dobijamo γ.
13. $(m+2)-$Durfeeove pravougaonike iz $\left[\hat{\lambda}\right]$ vraćamo u $m-$Durfeeove pravougaonike iz $[\lambda]$, pri čemu obe visine umanjujemo za jedan.

Kako smo se sa funkcijom ψ^{-1} vratili u početno stanje, dokazali smo da je preslikavanje ψ bijekcija.

■

Glava 5

Istorijski razvoj teorije particija

5.1 Teorija particija pre Ramanujana

Naravno, od koga početi ovaj istorijski deo razvoja teorije particija nego od samog Eulera. Leonhard Euler je bio švajcarski matematičar, fizičar, astronom, logičar i inženjer koji je živeo od 1707. do 1783. godine. Pored ogromnog uticaja u skoro svim oblastima matematike (geometrija, trigonometrija, infinitezimalni račun, algebra, teorija brojeva, teorija grafova), bavio se i nekim oblastima fizike i astronomije. Njegova ostavština je ogromna, o čemu svedoče brojni matematički identiteti, formule, teoreme i brojevi nazvani po njemu. Euler je uveo jednu od najznačajnijih matematičkih konstanti, broj *e* koji i nazivamo Eulerovim brojem i pronašao način za njegovo precizno izračunavanje, što Jacobu Bernoulliu nije pošlo za rukom pedesetak godina ranije (kada je otkrio ovaj broj). Euler je pokazao da važi da je

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Takođe je dokazao Malu Fermaovu teoremu, pronašao je vezu između kompleksne eksponencijalne funkcije i trigonometrijskih funkcija čiji je specijalan slučaj predivan identitet koji nosi naziv Eulerov identitet i glasi

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Njegov doprinos u teoriji particija su svakako teoreme koje smo naveli u radu. S obzirom da je Euler prvi koji se ozbiljno bavio particijama, smatramo ga i začetnikom ove teorije. Pored centralne teoreme ovog rada i Pentagonalne teoreme koja u literaturi može da bude navedena i kao Eulerov identitet, Euler se bavio i q – Pochhamerovim simbolom definisanim kao

$$(a;q)_{\infty} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - aq^n\right).$$

Njegov specijalan slučaj je Eulerova funkcija i definisana je kao

$$\phi(q)=(q;q)_{\infty}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n}\right).$$

Primetimo da je $1/\phi(q)$ naša generativna funkcija $P(q)$ iz Poglavlja 1.2, pa je koeficijent $p(n)$ u razvoju u formalni stepeni red za $1/\phi(q)$ baš broj particija prirodnog broja *n*:

$$\frac{1}{\phi(q)}=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^{n}.$$

Razvoj Eulerove funkcije u stepeni red nam daje baš Eulerova pentagonalna teorema, pa je

$$\phi(q)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^{m}q^{\frac{1}{2}m(3m-1)}.$$

Eulerova funkcija povezana je i sa Dedekindovom eta funkcijom i to preko identiteta koji je otkrio Ramanujan:

$$\phi(q)=q^{-1/24}\eta(\tau). \tag{*}$$

Dedekindova eta funkcija je definisana na sledeći način: Neka je τ bilo koji kompleksni broj čiji je imaginaran deo pozitivan, tada definišemo funkciju

$$\eta(\tau)=e^{\frac{\pi i\tau}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2n\pi i\tau}\right),$$

pa za $q=e^{2\pi i\tau}$ dobijamo navedenu vezu (*).

Dedekindova eta funkcija i identiteti vezani za nju će kasnije biti jako značajni za konstrukciju formule za asimptotsko ponašanje broja particija nekog prirodnog broja, koja će da predstavlja prekretnicu u teoriji particije i možda najveće otkriće vezano za ovu oblast matematike.

Nakon Leonharda Eulera, veća otkrića u teoriji particija ostvario je nemački matematičar jevrejskog porekla Carl Gustav Jacob Jacobi. Živeo je od 1804. do 1851. godine. Tokom svog prekratkog života (1802. – 1829.), Abel je otkrio eliptične funkcije, a njihovu teoriju je razradio Jacobi. Eliptična funkcija je meromorfna funkcija na $\mathbb{C}$ (holomorfna funkcija na otvorenom nepraznom skupu $D\subseteq\mathbb{C}$ bez skupa izolovanih tačaka koje su polovi funkcije) koja je periodična u dva različita pravca u kompleksnoj ravni.

Unutar teorije eliptičnih krivih, Jacobi se bavio teta funkcijama, pa neke od njih nose i njegovo ime. Otkrio je mnoga svojstva teta funkcije, među kojima je i Jacobijev trostruki proizvod. Jacobijev trostruki proizvod nam zapravo daje vezu između Dedekindove eta funkcije i Jacobijeve teta funkcije. Dakle, generativne funkcije teorije particija možemo predstaviti preko q – Pochhammerovog simbola, Dedekindove eta fukcije, teta funkcija itd.

Upravo istraživanje ovih funkcija pomoći će kasnijim matematičarima da izvedu formulu za asimptotsko ponašanje broja particija nekog prirodnog broja.

5.2 Ramanujan i Hardy

Godfrey Harold Hardy (1877 – 1947) bio je engleski matematičar koji se bavio uglavnom analizom i teorijom brojeva. Pohađao je Trinity College, Cambridge, gde je diplomirao 1899. godine, nakon čega postaje saradnik, a kasnije i predavač na istom koledžu. Poznata je njegova saradnja sa Johnom Littlewoodom (1885 – 1977), sa kojim je objavljivao radove uglavnom iz oblasti analize i teorije brojeva, na teme kao što su Diofantova analiza, Fourierovi redovi, sume divergentnih redova, Riemann zeta funkcija, distribucija prostih brojeva. Međutim, najbitnije što je proizašlo iz ove saradnje, za teoriju particija, je verovatno Hardy – Littlewoodov kružni metod (eng. circle method) koji će Hardy i Ramanujan da primene u dokazivanju asimptotske formule za $p(n)$. Saradnja Hardyja i Littlewooda se smatra jednom od najznačajnijih matematičkih saradnji ikada u matematici. Postoji zanimljiva anegdota koja kaže da je danski matematičar Harald Bohr na jednom predavanju izjavio sledeće: “U današnje vreme postoje samo tri stvarno velika engleska matematičara, Hardy, Littlewood i Hardy – Littlewood.” Još jedna zanimljiva anegdota kaže da je Littlewood na jednoj konferenciji upoznao nemačkog matematičara koji je bio začuđen postojanjem Littlewooda, jer je oduvek smatrao da je to samo ime koje je Hardy koristio za radove na koje nije želeo da stavi svoje ime, na šta se Littlewood nasmejao.

Hardy je bio jedina osoba koja je dva puta bila predsednik Londonskog matematičkog društva. Pored mnogih zasluga i priznanja u matematici, najveće otkriće Hardyja je matematički genije Ramanujan.

Srinivasa Ramanujan rođen je 22. decembra 1887. godine u Indiji, u provinciji Madras koja je tada bila pod upravom Britanske Indije. Bio je izuzetno pobožan pripadnik hinduističke vere. Tvrdio je da sva njegova matematička otkrića dolaze od boginje Namagiri. Nije imao formalno matematičko obrazovanje. Bio je samouk. Često je sam otkrivao već dokazane teoreme i identitete drugih matematičara. Sa 13 godina je savladao trigonometriju i samostalno dokazao neke identitete. Dve godine kasnije razvio je vlastiti metod za rešavanje četverostepene funkcije. Samostalno je istraživao Beroullijeve brojeve i izračunao 15 decimala Euler – Mascheronijeve konstante. Nakon završene više škole 1904. godine, Ramanujan dobija stipendiju za studije na Goverment Arts College u gradu Kumbakonam. Međutim, zbog nezainteresovanosti za nematematičke kurseve, Ramanujan gubi stipendiju. U to vreme istraživao je hipergeometrijske redove i vezu između integrala i redova, odnosno eliptične funkcije. Kasnije pohađa Pachaiyappa College u Madrasu, koji takođe napušta iz istog razloga. Nastavlja sa svojim istraživanjima u teškom siromaštvu i na ivici gladi.

Između 1908. i 1913. godine Ramanujan se bavio verižnim razlomcima (eng. continued fractions) i divergentnim redovima. Sklopio je ranije ugovoren brak sa Janaki Ammal 1909. godine. Njegovo zdravlje već u ranom periodu života počinje da se urušava. Nakon upoznavanja sa osnivačem Indijskog društva matematičara, Ramanujanov matematički ugled u Indiji počinje da raste. Ramanujan je jedno vreme objavljivao članke u časopisu Indijskog društva matematičara, međutim njegove probleme često niko nije mogao da reši, a njegova rešenja teško su pratili i najbolji indijski matematičari. Nakon nekoliko poslova, Ramanujan počinje da radi kao računovodstveni službenik. Imao je sreće jer je na radnom mestu bio okružen matematičarima, koji su ga, kao i neki raniji poznanici matematičari, motivisali da sledi svoje snove. Uvidevši da je Ramanujan daleko iznad njihovih matematičkih shvatanja i mogućnosti, 1913. godine S. N. Iyer (šef računovodstva za Madras Port Trust gde je Ramanujan radio), E. W. Middlemast (profesor na Presidenty College) i R. R. Rao (sekretar Indijskog društva matematičara) kontaktiraju nekoliko britanskih matematičara vezano za matematičkog genija Ramanujana. Međutim, odgovori na njihova pisma i Ramanujanove radove su ili izostali ili su bili negativni. Napokon, iste godine, Ramanujan stupa u kontakt sa Hardyjem. Nekoliko rečenica koje je Bertrand Russel napisao u pismu svojoj ljubavnici najbolje svedoče o prvoj reakciji Hardyja i Littlewooda na Ramanujanovo pismo:

"U Hallu sam pronašao Hardyja i Littlewooda u stanju divljeg uzbuđenja, jer su verovali da su pronašli drugog Newtona... Hardy je pisao Indijskoj kancelariji i nada se da će odmah dovesti čoveka ovde. Ovaj drugi Newton bio je Srinivasa Ramanujan, koji je pisao Hardyju podnoseći svoja matematička otkrića o prostim brojevima, redovima i integralima."

Ramanujanovo prvo pismo Hardyju počinjalo je ovim paragrafom:

> *"Dragi gospodine,*
> *molim da se predstavim kao službenik Departmana računovodstva Port Trust Office u Madrasu sa platom od samo 20 funti godišnje. Sada imam 23 godine. Nisam imao univerzitetsko obrazovanje, ali sam završio uobičajen školski kurs. Nakon napuštanja škole, slobodno vreme koje sam imao na raspolaganju koristio sam za rad na matematici. Nisam prešao konvencijalni redovni kurs koji se prati na Univerzitetu, ali imam novi put za sebe. Uradio sam posebno uopšteno istraživanje divergentnih nizova i rezultati koje sam dobio su nazvani od strane lokalnih matematičara kao "zapanjujući".*

Pripreme za Ramanujanov odlazak u Cambridge trajaće godinu dana. Hardy je najpre pisao Sekretarijatu za indijske studente u Londonu, tražeći sredstva i način da se Ramanujan dovede u Englesku. Sekretarijat stupa u vezu sa Francisom Springom (predsednikom Madras Port Trust Officea) i S. N. Iyerom, koji će kasnije pokazati Ramanujanove radove i Hardyjevo pismo matematičarima Walkeru i Nevilleu. Njih dvojica, svako zasebno, šalju molbu Univerzitetu u Madrasu za pružanje finansijske pomoći Ramanujanu u vidu stipendije za nekoliko godina da bi se omogućio njegov odlazak i boravak u Cambridgeu. Ramanujan dobija dvogodišnju stipendiju, uz preporuku Nevillea i Walkera. Uspeo je da prevaziđe ubeđenja kaste u kojoj pripadnicima nije dozvoljeno ploviti preko mora, ošišao je svoju bramansku frizuru, obukao se kao zapadnjak i krenuo na put 17. marta 1914. godine. Nakon nešto manje od mesec dana Ramanujan je stigao u Englesku.

Hardy je nazvao susret i saradnju sa Ramanujanom jednim romantičnim incidentom u njegovom životu. Ramanujan se na početku teško uklapao. Pored neposedovanja formalnog obrazovanja koje je predstavljalo veliki problem većini profesora Trinity koledža u prihvatanju Ramanujana, poteškoće je imao i zbog toga što je bio vegetarijanac, ali i Indijac. Takođe, neposredno nakon njegovog dolaska u Englesku izbio je Prvi svetski rat. Ramanujan je pronašao prijatelja u indijskom studentu iz Kolkate, P. C. Mahalanobiusu koji mu je pomogao da se uklopi u novu sredinu. Što se tiče matematičkog rada, Ramanujan je prisiljen da menja pristup. Hardyjeva rigoroznost i potreba za dokazivanjem tvrđenja pre publikacije uzdrmali su Ramanujanov način bavljenja matematikom. Međutim, zajedničkim radom počinju da ostvaruju velike rezultate. Za pet godina boravka u Kembridžu Ramanujan je objavio 21 istraživački rad o određenom integralu, modularnim jednačinama, Riemann zeta funkciji, beskonačnim redovima, sumama redova, analitičkoj teoriji brojeva, modularnim funkcijama, particijama i kombinatornoj analizi. Ono što je najbitnije za teoriju particija i kao logičan nastavak ovog rada je svakako asimptotska formula.

Otkriće asimptotske formule predstavlja veliku prekretnicu u teoriji particija. Pre Ramanujana se smatralo da takva formula ne postoji. Međutim, Ramanujan je uz pomoć Hardyja uspeo i da dokaže svoje otkriće. Oni su pokazali da za $n \to \infty$ važi

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

Percy MacMahon (1854 – 1929) je ručno ispisao broj particija za sve prirodne brojeve ≤ 200 i uočeno je da je formula približno tačna. Ovo je samo ohrabrilo Hardyja i Ramanujana da poboljšaju svoju formulu. Koristili su tzv. Hardy – Littlewoodov kružni metod za dokazivanje. Nova asimptotska formula dobija sledeći oblik

$$p(n) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k} \left[\frac{d}{dx} \frac{\exp\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{24}\right)}\right)}{\sqrt{x - \frac{1}{24}}} \right]_{x=n},$$

gde je

$$A_k(n) = \sum_{\substack{h=1 \\ (h,k)=1}}^{k-1} e^{\pi i s(h,k) - 2\pi i n \frac{h}{k}} \quad \text{i} \quad s(h,k) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k}\left(\frac{hr}{k} - \left[\frac{hr}{k}\right] - \frac{1}{2}\right).$$

Ova formula se pokazala izvanrednom. Naime, za $n = 200$, greška je svega 0,004, što je veliki rezultat. Ovo otkriće je svakako uticalo, između ostalog, na izbor Ramanujana za člana Kraljevskog društva 1918. godine, čime je postao jedan od najmlađih članova ikada primljenih u ovo prestižno društvo. Iste godine je postao i član Trinity koledža. Zanimljivo je da su Ramanujana, pored predlagača Hardyja i MacMahona, zatim Littlewooda i drugih matematičara, podržali i E. W. Hobson i H. F. Baker, kojima je Ramanujan pisao iz Indije i od kojih nikada nije dobio odgovor.

Nažalost, baš u periodu kada doživljava veliku prekretnicu u životu i radu i konačno dobija priznanje kakvo zaslužuje, Ramanujan oboleva od tuberkuloze. Odlučuje da poslednju godinu života provede u Indiji sa svojom suprugom i kreće na put kući 27. februara 1919. godine. Preminuo je 26. aprila 1920. godine u Madrasu sa svega 32 godine života.

Postoji zanimljiva anegdota vezana za broj taksija kojim se Hardy vozio na putu da se poslednji put sastane i oprosti od svog prijatelja i saradnika. Naime, Hardy je rekao kako se vozio taksijem čiji je broj poprilično nezanimljiv. Kada ga je Ramanujan pitao o kom broju je reč, Hardy je odgovorio da je to broj 1729. Međutim, Ramanujan mu je odgovorio da ovaj broj nikako nije dosadan budući da je on najmanji broj koji može da se prikaže kao zbir dva kuba na dva različita načina

$$1729 = 12^3 + 1^3 \quad \text{i} \quad 1729 = 10^3 + 9^3 .$$

Hardy mu je potom postavio pitanje da li može da mu kaže najmanji broj koji može da se izrazi kao zbir dva broja stepena 4 na dva različita načina. Ramanujan nije mogao odmah da uvidi takav broj, ali je bio siguran da on postoji i da je velik broj. Zaista, bio je u pravu, taj broj je:

$$635318657 = 133^4 + 134^4 = 59^4 + 158^4 .$$

Znanje o ovim brojevima Ramanujan je imao iz razloga što je pokušavao da reši Fermaovu poslednju teoremu u poslednjoj godini života.

Ramanujan ni u izuzetno teškom zdravstvenom stanju nije prestajao da radi. Njegovi poslednji radovi na mock teta funkcijama inspirisali su fizičare u razvijanju teorije crnih rupa, teorije struna i kvantne gravitacije. Nakon smrti objavljeni su mnogi njegovi radovi od strane Univerziteta u Kembridžu i Univerziteta u Madrasu. Profesor George E. Andrews sa Državnog univerziteta Pensilvanije otkrio je 1976. godine Ramanujanove radove poznate pod nazivom Ramanujanova “izgubljena” sveska (eng. Lost notebook).

Istraživanje asimptotskog ponašanja broja particija nije završilo sa Ramanujanom. Nemačko – američki matematičar Hans Rademacher (1892 – 1969) poboljšao je Hardy – Ramanujanovu asimptotsku formulu. On je uspeo da je napiše kao konvergentan red (za razliku od H – R formule gde je red divergentan). Rademacher je takođe koristio kružni metod, ali ga je izbor konturne integracije (integracija duž kompleksne ravni) doveo do konvergentnog reda. Popravljenu formulu često nazivamo HRR formulom, ona je u potpunosti tačna i oblika je

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k} \left[\frac{d}{dx} \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{24} \right)} \right)}{\sqrt{x - \frac{1}{24}}} \right]_{x=n} .$$

Ramanujan je i nakon smrti nastavio da oduševljava svojim teoremama i identitetima, za koje se smatra da dostižu broj od 4000. Inspirisao je ogroman broj matematičara, kako da dokazuju njegove tvrdnje i teoreme, tako i da osmišljavaju vlastite. Zanimljiv je uticaj Ramanujana na rad Freemana Dysona (1923 -) na kongruencijama, čiji rad su nastavili Andrews i Garvan. Ramanujanov dan rođenja se u Indiji obeležava kao Dan matematike. Njegovu ogromnu ljubav prema brojevima opisao je Littlewood rečima: “Svaki pozitivan broj je bio jedan od njegovih ličnih prijatelja.”

Za kraj želim da preporučim, po rečima Ken Onoa, jednu od najboljih naučnih biografija ikad napisanih, biografiju o Ramanujanu Roberta Kanigela pod nazivom “The man who knew infinity” po kojoj je snimljen i istoimeni film. Takođe, preporučujem dokumentarac o Ramanujanu iz 1987. snimljen za naučni serijal “Equinox” Channela 4 koji je producirao Karl Sabbagh, a režirao Christopher Sykes. Postoji i veliki broj zanimljivih intervjua i predavanja poznatih matematičara poput Andrewsa, Dysona, Raymond Flooda i Ken Onoa koji pričaju o velikom uticaju Ramanujana na njihov rad i na matematiku uopšte.

Literatura

[1] Alder H. L. (1969). Partition Identities – From Euler to the Present. *The American Mathematical Monthly*. Vol. 76, No. 7, str. 733-746.

[2] Andrews G. E. (1976). *The Theory of Partitions*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications,Vol. 2. Reading, Massachusetts: Addison – Wesley Publishing Company.

[3] Andrews G. E. (1965). A simple proof of Jacobi's triple product identity. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 16, str. 333-334.

[4] Andrews G. E. (1983). Euler's Pentagonal Number Theorem. *Mathematics Magazine, Mathematical Association of America*. Vol. 56, No. 5, str. 279-284.

[5] Andrews G. E. i Garvan F. G. (1988). Dyson's crank of a partition. *Bulletin of the American Mathematical Society.* Vol. 18, str. 167-171.

[6] Andrews G. E. i Ono K. (2005) Ramanujan's congruences and Dyson's crank. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, USA, 102, No. 43, str. 15277.

[7] Carlitz L. i Subbarao M. V. (1972). A simple proof of the quintuple product identity. *Proceedings of the American Mathematical Society*. Vol. 32, No. 1.

[8] Govindarajan S. (2015). *A Hardy – Ramanujan – Rademacher type formula for plane partitions.* Madras: Department of Physics, Indian Institute of Technology Madras, arXiv:1311.7227.

[9] Gupta H. (1939). *Tables of partitions.* Madras: The Indian Mathematical Society, Presidenty College.

[10] Gupta H. (1970). Partitions – A Survey. *Journal of Research of the National Bureau of Standards – B. Mathematical Sciences.* Vol. 74B, No. 1.

[11] Hardy G. H. i Ramanujan S. (1918). Asymptotic formulae in combinatory analysis. *Proceedings of the London Mathematical Society 2*. No. 1, str. 75-115.

[12] Hardy G. H. i Wright E. M. (1960). *An Introduction To the Theory of Numbers.* (Fourth edition), Oxford: Clarendon Press. Poglavlje 19.

[13] Hirschhorn M. D. (2014). A short and simple proof of Ramanujan's mod 11 partition congruence. *Journal of Number Theory*, 139, str. 205-209.

[14] Kanigel R. (1991). *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan*. New York: Washington Square Press.

[15] Kim S. (2010). A bijective proof of the quintuple product identity. *International Journal of Number Theory*. Vol. 6, No. 2 , str. 247-256.

[16] Martinjak I. (2016). O Eulerovom teoremu o particijama. *Osječki matematički list*. 16(1), str. 1-14.

[17] Martinjak I. (2017). Eulerov pentagonalni teorem. *Matematičko-fizički list*. 268(4), str. 243-249.

[18] Ndlovu M. B. (2014). *Combinatorial Generalizations and Refinements of Euler's Partition Theorem*. Master Dissertation, Johannesburg: Faculty of Science, University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa.

[19] Ono K. i Ahlgren S. (2001). Addition and counting: The arithmetic of partitions. *Notices of the American Mathematical Society*, 48, str. 978-984.

[20] Ono K. i Ahlgren S. (2001). Congruence properties for the partition function. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, USA, 98, Issue 23, str. 12882-12884.

[21] Ono K. i Sarah Trebat-Lede. (2016) The 1729 K3 surface. *Research in Number Theory*, 2: 26.

[22] Pak I. (2006) Partition Bijections, a Survey. *Ramanujan Journal*. Vol. 12, str. 5-75.

[23] Pak I. i Boulet Cilanne. (2006). A combinatorial proof of the Rogers-Ramanujan identities. *Journal of Combinatorial Theory*. Ser. A, Vol. 113, str. 1019-1030.

[24] Rao A. S. R. S. i Juluru N. (2010). Mahlburg's work on Crank Functions. Ramanujan's partitions Revisited. *Resonance* (Academy and Springer), 15, 3, str. 232-243.

[25] Selberg A. (1996). Reflections Around the Ramanujan Centenary. *Resonance* (Springer). Vol. 1, 12, str. 81-91.

[26] Tošić R. (1999). *Kombinatorika*. Novi Sad: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet. Glava 8.

Biografija

Tatjana Mršić rođena je 10. juna 1993. godine u Prijedoru, Republika Srpska – Bosna i Hercegovina. Osnovnu školu "Dositej Obradović" u Prijedoru završava 2007. godine kao nosilac Vukove diplome i učenik generacije. Iste godine upisuje opšti smer Gimnazije "Sveti Sava" u Prijedoru koju završava odličnim uspehom. Nakon završene gimnazije, 2011. godine upisuje Prirodno – matematički fakultet u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike. Osnovne akademske studije završava u roku sa prosečnom ocenom od 7.87. Iste 2015. godine upisuje master akademske studije, smer Master profesor matematike. Sve ispite na master studijama predviđene planom i programom položila je sa prosečnom ocenom 8.22 zaključno sa oktobarskim rokom 2017. godine, čime je stekla uslov za odbranu ovog rada.

Novi Sad, avgust 2018.

Tatjana Mršić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Tatjana Mršić
AU

Mentor: Dr Boris Šobot
MN

Naslov rada: Eulerova teorema i druge teoreme teorije particija
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2018.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno – matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA

Fizički opis rada: 5/72/26/18/8/0/0
(broj poglavlja/strana/lit. citata/slika/tabela/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Diskretna matematika
ND

Ključne reči: particija, Youngov dijagram, generativne funkcije, Eulerova teorema, Eulerova pentagonalna teorema, Jacobijev trostruki proizvod, Ramanujanove kongruencije, Dysonov rank i crank, Rogers – Ramanujanovi identiteti, Durfeeovi pravougaonici, Ramanujan, Hardy
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U ovom radu bavimo se teorijom particija i nekim bitnijim teoremama iz ove oblasti. Rad se sastoji iz pet glava. U prvoj glavi uvedeni su osnovni pojmovi vezani za ovaj rad, kao što je particija, konjugovana i samokonjugovana particija, Youngov dijagram i njegovi elementi. Definisali smo generativne funkcije za broj particija nekog prirodnog broja. U Glavi 2 smo se bavili Eulerovom teoremom, dokazali Eulerovu pentagonalnu teoremu, identitet Jacobijevog trostrukog proizvoda i još nekoliko pomoćnih tvrđenja i posledica ovih teorema. U Glavi 3 bavili smo se Ramanujanovim kongruencijama. Glava 4 sastoji se iz Rogers – Ramanujanove teoreme i njenog dokaza. I konačno, poslednja glava sadrži istorijski razvoj teorije particija i rezultate koje su u ovoj oblasti postigli Euler, Jacobi, Hardy, Littlewood, Ramanujan i Rademacher.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 12.01.2018.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: dr Petar Đapić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: Dr Boris Šobot, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Bojan Bašić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monographic type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master thesis
CC

Author: Tatjana Mršić
AU

Mentor: Boris Šobot, PhD
MN

Title: Euler's theorem and other theorems of partitions theory
TI

Language of text: Serbian (latin)
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2018.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
PP

Physical description: 5/72/26/18/8/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Discrete mathematics
SD

Key words: partition, Young tableau, generating functions, Euler's theorem, Euler's pentagonal theorem, Jacobi's triple product identity, Ramanujan's partition congruences, Dyson's rank and crank, Rogers – Ramanujan identities, Durfee rectangles, Ramanujan, Hardy
SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: In this Master's thesis we deal with partition theory and some of the more important theorems in this theory. The paper consist five chapters. The first chapter introduces the basic concepts related to this paper, such as a partition, a conjugated and self-conjugated partition, Young tableau and its elements. We have defined generating functions for the number of partitions of a natural number. In Chapter 2 we dealt with Euler's theorem, proved Euler's pentagonal theorem, the Jacobi triple product identity, and several lemmas and corollaries of these theorems. In Chapter 3 we dealt with Ramanujan congruences. Chapter 4 consists of Rogers-Ramanujan's theorem and the proof of this theorem. Finally, the final chapter contains the historical development of the theory of partitions and the results achieved in this field by Euler, Jacobi, Hardy, Littlewood, Ramanujan and Rademacher.
AB

Accepted by the Scientific Board on: January 12, 2018.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Petar Đapić, PhD, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Mentor: Boris Šobot, PhD, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Bojan Bašić, PhD, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad