UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Tamara Đurić

Rubni problemi
i
ortogonalne funkcije

- master teza -

Novi Sad, *2011*.

Sadržaj

Predgovor

Ovaj rad sadrži tri glave. U prvoj glavi prelazimo put od apstaktnih Hilbertovih prostora, u kojima se definišu Fourierovi koeficijenti, do konkretne realizacije trigonometrijskih redova Fouriera. U drugoj glavi definišu se rubni problemi, sopstvene vrednosti, sopstvene funkcije i daju se njihove karakteristične osobine. Treća glava sadrži neke poznate ortogonalne polinome i funkcije.

Ovom prilikom se zahvaljujem svom mentoru Prof. Dr Mirko Budinčeviću na podršci, poverenju, savetima i lepim rečima.

Novi Sad, *septembar 2011.* *Tamara Đurić*

1. **Fourierova[1] analiza**

1.1. Uvod

Neka je X vektorski prostor funkcija nad poljem komleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Preslikavanje $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ se naziva **skalarni proizvod**, ako zadovoljava sledeće uslove:

a) $\langle f + g|h\rangle = \langle f|h\rangle + \langle g|h\rangle \quad (linearnost),$
b) $\langle \alpha f|g\rangle = \alpha\langle f|g\rangle \quad (homogenost),$
c) $\langle f|g\rangle = \overline{\langle g|f\rangle} \quad (hermitska\ simetrija),$
d) $\langle f|f\rangle \geq 0, \langle f|f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ (pozitivna\ definitnost),$

za sve $f, g, h \in X$ i sve kompleksne skalare α. Prostor X u koji je uveden skalarni proizvod naziva se **unitaran**.

1.1.1. **Definicija:** *Podskup elemenata u unitarnom prostoru X se naziva* ***ortonormirani skup****, ako su svi njegovi vektori jedinični i međusobno ortogonalni. Ako je to npr.* $A = \{a_i | i \in I\}$, *onda* $\|a_i\| = 1$ *i* $\langle a_i|a_j\rangle = 0,\ i \neq j,\ i, j \in I.$ *(Ako važi* $\alpha_1 a_{i_1} + \alpha_2 a_{i_2} + \cdots + \alpha_s a_{i_s} = 0,$ *tada je* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0$ *tj. vektori iz A su linearno nezavisni.)*

1.1.2. **Teorema:** *Neka je* $\mathcal{F}$ *skup svih ortonormiranih skupova u unitarnom prostoru* X, *tada* $\mathcal{F}$ *nije prazan.(* $\mathcal{F}$ *nazivamo i skup ortonormiranih sistema)*

Dokaz: Neka je $a \in X$ proizvoljno i $a \neq 0$. Tada važi da je $\left\{\frac{a}{\|a\|}\right\}$ ortonormirani sistem. ■

1.1.3. **Definicija:** *Neka su* $A, B \in \mathcal{F}$ *, tada* $A \preccurlyeq B$, *ako je* $A \subseteq B$ *(što je relacija parcijalnog uređenja).*

1.1.4. **Teorema:** *Postoji maksimalan totalno uređen podskup od* $\mathcal{F}$, *označimo ga sa E.*
(tj. ako E$\subseteq \mathcal{F}$ *i E*$\subseteq E' \subseteq \mathcal{F}$ *i* E' *totalno uređen,sledi* $E = E'$*)*

Dokaz: Stavimo da je $E_1 = \bigcup_{A \in \mathcal{E}} A$. E_1 je ortonormirani skup vektora, jer ako su npr. $a_1, a_2 \in E_1$, tj. postoje A_1, A_2, takvi da su $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$, tada, pošto $A_1 \subseteq A_2$ ili $A_2 \subseteq A_1$, oba se nalaze u „većem“, a tamo su ortogonalni. Takođe važi da $E = E_1$, jer inače E nije maksimalan totalno uređen skup, jer bi od njega bio veći $E^* = E_1 \cup E$, što je kontradikcija. ■

[1] Jean Baptiste Joseph Fourier(1768-1830)  francuski matematičar

1.1.5. **Teorema:** *E je maksimalan ortonormiran sistem.*

Dokaz: Pretpostavimo da postoji veći E_1- ortonormirani sistem, tj. $E \subset E_1$. Pošto važi $E \preccurlyeq E_1$ i familija $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \cup E_1$ daje „veću" totalno uređenu familiju od $\mathcal{F}$, dolazimo do kintradikcije, pa mora biti $E = E_1$. ■

1.1.6. **Definicija:** *Maksimalan ortonormirani sistem se naziva* ***kompletan ortonormirani sistem*** *(naziva se* ***baza****, ako je sistem prebrojiv), i označavamo ga sa* ***(cos).***

1.1.7. **Teorema:** *Potreban i dovoljan uslov da je E (cos) jeste da za svako $x \in X$, tako da je $\langle x|e \rangle = 0$, za svako $e \in E$, važi $x = 0$.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Neka je $E = \{e_\alpha | \alpha \in I\}$. Pretpostavimo suprotno tj. da postoji $x_0 \in X$, tako da je $\langle x_0|e_\alpha \rangle = 0$, za svako $\alpha \in I$, ali $x_0 \neq 0$. Tada $E_1 = E \cup \left\{\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\} \supset E$, znači E nije maksimalan, što je kontradikcija.

($\Leftarrow$) Neka važi da za svako $x \in X$, tako da je $\langle x|e \rangle = 0$, za svako $e \in E$, važi $x = 0$. Dokažimo da E jeste (cos). Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji E_1 oronormirani sistem, koji $E_1 \supset E$. Neka je $z \in E_1 \backslash E, z \neq 0$ (jer ortonormirani sistem nema nulu, jer su svi vektori jedinični), tada važi $\langle z|e_\alpha \rangle = 0$, za svako $\alpha \in I$, ali to je kontradikcija sa našom pretpostavkom da za svako $x \in X$, tako da je $\langle x|e \rangle = 0$, za svako $e \in E$, važi $x = 0$, pa E jeste (cos). ■

1.2. Fourierovi koeficijenti

1.2.1. **Definicija:** *Neka je $x \in X$ i neka je E (cos) u unitarnom vektorskom prostoru X. Definišemo $x_\alpha = \langle x|e_\alpha \rangle, \alpha \in I$. Kompleksni brojevi x_α, $\alpha \in I$ se nazivaju* ***Fourierovi koeficijenti za x.***

1.2.2. **Teorema: (Beselova[2] nejednakost)** *Neka su $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_s}$ Fourierovi koeficijenti za $x \in X$. Važi*

$$\sum_{i=1}^{s} \left|x_{\alpha_i}\right|^2 \leq \|x\|^2.$$

Dokaz: Na osnovu pozitivne definitnosti skalarnog proizvoda:

$$\langle x - \sum_{i=1}^{s} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} | \, x - \sum_{i=1}^{s} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \rangle \geq 0.$$

Iskoristimo definiciju Fourierovih koeficijenata i ortogonalnost (tj. da ostaju samo članovi sa istim koeficijentima), pa dobijamo:

---

[2] Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)  nemački matematičar

$$\langle x|x\rangle - \sum_{i=1}^{s} \bar{x}_{\alpha_i} x_{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{s} x_{\alpha_i} \bar{x}_{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{s} x_{\alpha_i} \bar{x}_{\alpha_i} \geq 0,$$

što daje:

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{s} \left|x_{\alpha_i}\right|^2 . \blacksquare$$

1.2.3. **Teorema:** *Neka je $E = \{e_\alpha | \in I\}$ (cos). E je prebrojiv, ako je X separabilan.*

Dokaz: Važi za $\alpha \neq \beta$ da je $\left\|e_\alpha - e_\beta\right\|^2 = \langle e_\alpha - e_\beta | e_\alpha - e_\beta\rangle \geq 1 - 0 - 0 + 1 = 2$.

Posmatrajmo lopte $L\left(e_\alpha, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left\{t \in X;\ \|t - e_\alpha\| < \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, koje su disjunktne. Iz separabilnosti X sledi da postoji prebrojiv, svuda gust skup $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, tako da se u proizvoljnoj lopti u X nalazi bar jedna tačka iz A, dakle kardinalan broj lopti ne može biti veći od kardinalnog broja skupa A, koji jeste prebrojiv. ■

1.2.4. **Teorema:** *Neka je $x \in X$ i $J \subset I$ podskup onih indeksa za koje su odgovarajući Fourierovi koeficijenti različiti od nule. Skup J je najviše prebrojiv.*

Dokaz: Neka je $A_n = \left\{i \in I :\ |x_i| \geq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$, vidimo $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, jer $j \in J$, ako je $x_j \neq 0$ tj. postoji n_0, tako da važi $\left|x_j\right| \geq \frac{1}{n_0}$, pa $j \in A_{n_0}$. Obrnuto, ako $j = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, znači postoji n_0, tako da važi $j \in A_{n_0}$, pa $a_j \neq 0$ tj. $j \in J$. Znamo, ako $j_1, j_2, \dots\ , j_r \in A_n$, tada na osnovu Besselove nejednakosti:

$$\sum_{k=1}^{r} \left|x_{j_k}\right|^2 \leq \|x\|^2,$$

a znamo da:

$$r \cdot \frac{1}{n^2} \leq \sum_{k=1}^{r} \left|x_{j_k}\right|^2,$$

pa je $r \leq n^2\|x\|^2$, ali pošto je $n^2\|x\|^2$ fiksno, r ne može biti beskonačno, znači svaki A_n je konačan, pa je J prebrojiv. ■

1.2.5. **Teorema:** *Neka je $x \in X$ i J skup indeksa za koje su Fourierovi koeficijenti različiti od nule. Znamo $|J| \leq \aleph_0$. Neka su poređani u niz $j_1, j_2, j_3 \dots$. Tada je:*

a) $\sum_{i=1}^{\infty} \left|x_{j_i}\right|^2 \leq \|x\|^2$

b) *Niz* $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_{j_i} e_{j_i}$ *je Cauchyjev,* $n \in \mathbb{N}$

Dokaz:

a) Kako $\sum_{i=1}^{k} \left|x_{j_i}\right|^2 \leq \|x\|^2$ važi za svako k, sledi tvrđenje.

b) Neka je $n > m, n, m \in \mathbb{N}$

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\|\sum_{i=m+1}^{n} x_{j_i} e_{j_i}\right\|^2 = \langle \sum_{i=m+1}^{n} x_{j_i} e_{j_i} \mid \sum_{i=m+1}^{n} x_{j_i} e_{j_i}\rangle = \sum_{i=m+1}^{n} \left|x_{j_i}\right|^2,$$

a pod a) smo pokazali da je red pozitivnih brojeva konvergentan, pa onda i ostatak konvergira, tj. važi da je $\|S_n - S_m\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} \left|x_{j_i}\right|^2 < \varepsilon$, za $n, m > n_0(\varepsilon)$, što smo i hteli. ■

1.2.6. **Teorema:** *Neka je X Hilbertov prostor, tada važi* $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_{j_i} e_{j_i}$, *gde je* $\lambda = \{j_i : i \in \mathbb{N}\}$ *skup indeksa za koje su Fourierovi koeficijenti različiti od nule i važi* $\sum_{i=1}^{\infty} |x_{j_i}|^2 = \|x\|^2$.

Dokaz: Znamo $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_{j_i} e_{j_i}$ je Cauchyjev, $n \in \mathbb{N}$, na osnovu Teoreme 1.2.5. b). Kako je X kompletan, postoji $y \in X$, tako da $S_n \to y$, tj. $y = \sum_{i=1}^{\infty} x_{j_i} e_{j_i}$. Pokažimo $x = y$ tj. pokazaćemo $\langle y - x \,| e_\alpha \rangle = 0$, za svako $\alpha \in I$. (naravno, znamo da je $\{e_\alpha \mid \alpha \in I\}$ (cos)). Imamo:

$$\langle y - x \,| e_\alpha \rangle = \langle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_{j_i} e_{j_i} - \mathrm{x} \mid e_\alpha \rangle$$

, pa pošto je skalarni proizvod neprekidan, „pustimo limes van”, tj. imamo

$$\langle y - x \,| e_\alpha \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \sum_{i=1}^{n} x_{j_i} e_{j_i} - \mathrm{x} | \, e_\alpha \rangle,$$

ako $\alpha \notin \lambda$, tada $x_\alpha = 0$, pa je:

$$\langle \sum_{i=1}^{n} x_{j_i} e_{j_i} \mid e_\alpha \rangle - \langle x | e_\alpha \rangle = x_\alpha - x_\alpha = 0.$$

A, ako je $\alpha \in \lambda$, recimo $\alpha = j_{i_0}$, tada:

$$\langle \sum_{i=1}^{n} x_{j_i} e_{j_i} \mid e_{j_{i_0}} \rangle - \langle x | e_{j_{i_0}} \rangle = 0,$$

jer za takvo n umanjenik će biti $x_{j_{i_0}}$, kao i umanjilac, pa je razlika 0. Znači, pokazali smo da važi

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_{j_i} e_{j_i},$$

još da pokažemo:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{j_i}|^2 = \|x\|^2.$$

Iz:

$$\langle x \mid x \rangle = \langle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_{j_i} e_{j_i} \mid \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_{j_i} e_{j_i} \rangle$$
$$= \lim_{n\to\infty} \langle \sum_{i=1}^{n} x_{j_i} e_{j_i} \mid \sum_{i=1}^{n} x_{j_i} e_{j_i} \rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_{j_i} \bar{x}_{j_i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |x_{j_i}|^2,$$

i na osnovu Teoreme 1.2.5. :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |x_{j_i}|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_{j_i}|^2,$$

pa:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_{j_i}|^2,$$

što smo i hteli pokazati.■

1.2.7. **Teorema:** *Neka je X Hilbertov i* $x = \sum_{j\in\Lambda_x} x_j e_j \in X,\ y = \sum_{j\in\Lambda_y} x_j e_j \in X$. *Označimo sa* $\Lambda = \Lambda_x \cup \Lambda_y$ *i zapišimo* $x = \sum_{k\in\Lambda} x_k e_k\ ,\ y = \sum_{k\in\Lambda} x_k e_k$. *Tada je:*

$$\langle x \mid y\rangle = \sum_{k\in\Lambda} x_k \bar{y}_k$$

Dokaz: Znamo:

$$\langle x \mid y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mid \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\rangle,$$

gde je $\Lambda = \mathbb{N}$ (što je moguće, jer smo u teoremi 1.2.4. pokazali da su Λ_x , Λ_y prebrojivi). Dalje:

$$\lim_{n\to\infty} \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mid \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \,.$$

Da bi „pustili limes unutra", moramo imati konvergenciju, pa da pokažemo. Na osnovu nejednakosti trougla i Cauchy-Schwarzove nejednakosti :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i \bar{y}_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2} \le \|x\|_X \cdot \|y\|_X \,.$$

Pošto smo pokazali konvergenciju, imamo:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i,$$

tj. pokazali smo $\langle x \mid y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$, što smo i hteli. ■

1.2.8. **Primer:** $C([-\pi\,,\pi])$ sa normom $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(t)\big)^2\, dt}$, nije kompletan. Navedena norma zadovoljava relaciju paralelograma $2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 = \|f-g\|^2 + \|f+g\|^2$, pa postoji skalarni proizvod koji je definiše:

$$\langle f | g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt.$$

Kompletiranje ovog prostora se označava sa $L^2\big((-\pi,\pi)\big)$.
Ovaj prostor je separabilan pa je svaki (cos) prebrojiv. Ako posmatramo $L^2\big((-\pi,\pi)\big)$ nad poljem realnih brojeva, tada je maksimalan ortonormiran sistem

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, n \in \mathbb{N},$$

i svaki element $u \in L^2\big((-\pi,\pi)\big)$ se može prikazati u formi

$$u(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\ nt + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n sin\ nt, t \in [-\pi,\pi]\,. ■$$

1.3. Fourierov red

U ovom delu ćemo dati konkretnu realizaciju teorije iz prethodog dela na primeru trigonometrijskih redova Fouriera. S obzirom da su sinusne i kosinusne funkcije koje čine ortonormiran sistem u $L^2\big((-\pi,\pi)\big)$ periodične funkcije sa periodom 2π, prvo ćemo analizirati funkcije koje su 2π periodične, a potom i one koje su proizvoljnog perioda.

Funkcije sa periodom 2π

Neka je data funkcija sa osnovnom periodom 2π, tj. $f(x)=f(x+2k\pi), x\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}$. Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da je f definisana na $[-\pi,\pi]$. Želimo takve funkcije razložiti na proste periodične funkcije oblika $Asin\ (\omega x+B)$ tj. acos $\omega x+bsin\ \omega x$.
Period prostih periodičnih funkcija je $\frac{2\pi}{\omega}$. Pri razlaganju funkcije sa periodom 2π na proste periodične funkcije, treba odrediti ω tako da svaki od tih prostih periodičnih funkcija bude 2π, tj. da važi $\frac{2k\pi}{\omega}=2\pi, k\in\mathbb{Z}$, odakle sledi da je $\omega=k$. Dakle, za datu funkciju čiji je osnovni period 2π, potrebno je odrediti konstante $a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots\ ,a_n,b_n,\ldots$ tako da:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\cdots,$$

tj.

$$f(x)=\ \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Pretpostavimo da se funkcija može rastaviti na uniformno konvergentan red:

$$f(x)=\ \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{1.1}$$

Uniformna konvergencija dozvoljava razmenu graničnih procesa, odnosno, red na desnoj strani jednakosti možemo integraliti sabirak po sabirak, pa se dobija:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right)=\pi a_0.$$

Množeći (1.1) sa $\cos kx$, integraljenjem sabirak po sabirak od $-\pi$ do π, dobijamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\text{coskxcos}\,nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}coskx\sin nx\,dx\right),$$

što daje

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=\pi a_k.$$

Analogno, množeći (1.1) sa $\sin kx$, integraljenjem sabirak po sabirak od $-\pi$ do π, dobijamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\text{sinkxcos}\,nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi} sinkx\sin nx\,dx\right),$$

što daje

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \pi b_k.$$

Sad možemo definisati trigonometrijski red Fouriera.

1.3.1. **Definicija:** *Neka je $f(x)$ periodična funkcija sa periodom 2π, koja na intervalu $[-\pi,\pi]$ ima konačan broj tačaka prekida prve vrste.* ***Trigonometrijski red Fouriera funkcije*** *f je dat sa*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

pri čemu su koeficijenti definisani sa

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\,, n\in\mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\,, n\in\mathbb{N}. \blacksquare$$

Nadalje ćemo koristiti zapis

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

a trigonometrijski red Fouriera ćemo skraćeno zvati **Fourierov red**.

Funkcije sa proizvoljnim periodom

Neka je $f(x)$ funkcija sa proizvoljnim periodom $2l$, gde je l poluperiod. Smenom $x = at$, dobija se funkcija $f(at)$ perioda $\frac{2l}{a}$. Ako je $\frac{2l}{a} = 2\pi$, tj. $a = \frac{l}{\pi}$, smenom $x = \frac{lt}{\pi}$ dobije se funkcija $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ perioda 2π, pa se analiza funkcija koje su 2l periodidične svodi na analizu 2π periodičnih funkcija.

Pretpostavimo da je f apsolutno integrabilna na $[-l,l]$ i da na tom intervalu f ima konačno mnogo tačaka prekida prve vrste. Ako se f može razviti u uniformno konvergentan red, i ako pretpostavimo da za dato $t\in\mathbb{R}$ važi jednakost:

$$f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

onda je:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lt}{\pi}\right)dt,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos nt\,dt,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\sin nt\,dt\,,n\in\mathbb{N}.$$

$t=\frac{\pi x}{l}, dt=\frac{\pi}{l}dx$, pa:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}), \tag{1.2}$$

gde je:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,,n\in\mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Red (1.2) sa koeficijentima (1.3), naziva se Fourierov red funkcije f sa periodom $2l$.

1.3.2. **Napomena:** Ako je data funkcija f definisana na poluotvorenom intervalu dužine $2l$ oblika $[a,a+2l)$ ili $(a,a+2l]$, za neko $a\in\mathbb{R}$, tada se ona može na jedinstven način produžiti na celu brojevnu osu, tako da se dobije funkcija sa periodom $2l$:

$$f(x)=f(x+2kl),\ \ k\in\mathbb{Z},x\in\mathbb{R},$$

pa se analiza funkcija definisanih na proizvoljnom intervalu I, svodi na analizu periodičnih funkcija, pri čemu važi

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}),x\in I,$$

a koeficijenti su određeni formulama (1.3).

Kosinusni i sinusni redovi

Ukoliko je na intervalu$[0, l]$ definisana neka funkcija, tada se ona može na jedinstven način produžiti na celu brojevnu osu tako da se dobije **parna funkcija sa periodom $2l$**. U stvari, za $x \in [-l, 0]$ definiše $f(x) = f(-x)$, čime se dobija parna funkcija na $[-l, l]$. Zatim se sa $f(x + 2kl) = f(x), x \in [-l, l], k \in \mathbb{Z}$, definiše parna funkcija na $\mathbb{R}$, sa periodom $2l$. Restrikcija ovako dobijene funkcije na $[0, l]$ jednaka je polaznoj funkciji. Odavde sledi da je **Fourierov red po kosinusima** funkcije f na intervalu $[0, l]$ dat sa

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

gde je:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Ukoliko je na intervalu$[0, l]$ definisana neka funkcija, tada se ona može na jedinstven način produžiti na celu brojnu osu tako da se dobije **neparna funkcija sa periodom $2l$**. Postupak je analogan kao i pri periodičnom produženju u slučaju parnih funkcija, s tim što se za $x \in [-l, 0]$ definiše $f(x) = -f(-x)$, čime se dobija neparna funkcija na $[-l, l]$. Tako se dobija **Fourierov red po sinusima:**

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, n \in \mathbb{N},$$

gde je:

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n \in \mathbb{N}.$$

1.4. Konvergencija Fourierovih redova

Fourierov red svake funkcije $f \in X$ konvergira ka f u normi prostora X, gde je X pred -Hilbertov prostor funkcija, koje su deo po deo neprekidne na $[-\pi, \pi]$ i za svako $x \in (-\pi, \pi)$ postoji konačan levi i desni limes. Drugim rečima, ako su a_n i b_n Fourierovi koeficijenti funkcije f, tada:

$$\lim_{m\to\infty}\left\|f(x)-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right)\right\|$$
$$=\lim_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right)\right|^2 dx=0.$$

Ova konvergencija nije jednaka tačkastoj. Ispitaćemo uslove koji garantuju važnu osobinu tačkaste konvergencije Fourierovog reda funkcije f ka f, tj. uslove pod kojima važi:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

za svako $x \in [-\pi, \pi]$. Ova jednakost neće važiti za sve $x \in [-\pi, \pi]$, već samo u nekim „dobrim tačkama”.

Dirichletovi[3] uslovi i tačkasta konvergencija

Posmatraćemo podklasu X' klase X:
$f \in X'\ akko\ f \in X$ i u svakoj tački $x \in [-\pi, \pi]$ postoje odgovarajući desni, odnosno levi izvodi. Tj. :

$$\exists \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x_+)}{h}, \forall x \in [-\pi, \pi],$$

gde je $f(x_+) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(x+\varepsilon)$ desna granična vrednost funkcije f u x.

$$\exists \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x-h)-f(x_-)}{h}, \forall x \in [-\pi, \pi],$$

gde je $f(x_-) = \lim_{\varepsilon\to 0^-} f(x-\varepsilon)$ leva granična vrednost funkcije f u x.
Dakle:

$$X' = \{f \in X | f\ ima\ odgovarajuće\ jednostrane\ izvode\ na\ [-\pi, \pi]\}.$$

---

[3] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet(1805-1859)  nemački matematičar

1.4.1. **Teorema(Dirichletov dovoljan uslov):** *Neka je* $f \in X'$. *Tada za svako* $x \in (-\pi, \pi)$ *Fourierov red funkcije f konvergira ka vrednosti:*

$$\frac{f(x_-) + f(x_+)}{2},$$

a u tačkama $x = \pm\pi$ konvergira ka:

$$\frac{f(\pi_-) + f(-\pi_+)}{2}.$$

1.4.2. **Napomene:**

1) Krajnje tačke $x = \pm\pi$ nisu specijalan slučaj. Ako pretpostavimo da je funkcija f definisana na celom skupu $\mathbb{R}$ i ako je 2π periodična, tada iz neprekidnosti imamo $f(\pi_+) = f(-\pi_+)$, pa prema tome:

$$\frac{f(\pi_-) + f(\pi_+)}{2} = \frac{f(\pi_-) + f(-\pi_+)}{2}.$$

Slično za $x = -\pi$.

2) Ako je f neprekidna u tački x, tada je $f(x_-) = f(x_+)$, pa prema tome važi:

$$\frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} = f(x).$$

Dakle, Fourierov red funkcije f konvergira ka $f(x)$ u ovoj tački. Sledi da, ako je f neprekidna na intervalu $[-\pi, \pi]$ i važi $f(-\pi) = f(\pi)$, tada Fourierov red funkcije f konvergira ka $f(x)$ u svakoj tački $x \in [-\pi, \pi]$.

Za dokaz Dirichletove teoreme trebaju nam neka pomoćna tvrđenja.

Možemo pretpostaviti da se funkcije $f \in X'$ periodično produžuju na čitav skup $\mathbb{R}$, tj.

$$f(x + 2k\pi) = f(x).$$

Za svaki prirodan broj m:

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

je m-ta parcijalna suma Fourierovog reda funkcije f.

1.4.3. **Teorema:** *Za dato* $f \in X'$ *važi:*

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m} \cos nt \right) dt.$$

Dokaz: Iz definicije koeficijenata a_n i b_n imamo:

$$\begin{aligned} S_m(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds + \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ns \, ds \cdot \cos nx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ns \, ds \cdot \sin nx \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m} [\cos ns \cos nx + \sin ns \sin nx] \right] ds$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m} \cos n(s-x) \right] ds.$$

Uvođenjem smene $t = s - x$ dobijamo:

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m} \cos nt \right] dt.$$

Znamo da za svaku 2π periodičnu funkciju g i bilo koji realan broj a važi:

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} g(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt.$$

Prema tome, dokazali smo da važi:

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m} \cos nt \right] dt\,. \blacksquare$$

1.4.4. **Teorema:** *Za svaki prirodan broj m važi:*

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos mt = \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}, t \neq 2k\pi$$

Dokaz: Leva strana jednakosti je definisana za svaki realan broj t, a desna za $t \neq 2k\pi$, gde je k ceo broj. Može se pokazati da je $t = 2k\pi$ tačka otklonjivog prekida funkcije:

$$\frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}.$$

Neka je $t \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$. Na osnovu trigonometrijskog identiteta:

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$$

imamo:

$$\cos kt \cdot \sin\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\left[\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)t\right], k = 1,2,3,\dots,m$$

pa je:

$$\sin\frac{1}{2}t\left[\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos mt\right]$$
$$= \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\left[\sin\frac{3}{2}t - \sin\frac{1}{2}t + \sin\frac{5}{2}t - \sin\frac{3}{2}t + \cdots + \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t - \sin\left(m - \frac{1}{2}\right)t\right]$$
$$= \frac{1}{2}\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Deljenjem obe strane sa $\sin\frac{1}{2}t$, dobijamo tvrđenje.■

1.4.5. **Definicija:** *Funkcije*

$$D_m(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \cos kx, x \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi\}, k \in \mathbb{Z},$$

za dati prirodan broj m, nazivamo ***Dirichletovo jezgro reda m.***

1.4.6. **Teorema:** *Za svaki prirodan broj* m *važi:*

$$\int_0^{\pi} D_m(x)\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Dokaz:

$$\int_0^{\pi} D_m(x)\,dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos mx\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} dx + \int_0^{\pi} \cos x\,dx + \int_0^{\pi} \cos 2x\,dx + \cdots + \int_0^{\pi} \cos mx\,dx$$
$$= \frac{\pi}{2} + \sin x|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\sin 2x|_0^{\pi} + \cdots + \frac{1}{m}\sin mx|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}. \blacksquare$$

1.4.7. **Teorema**(specijalan slučaj Besselove nejednakosti)**:** *Neka je* $f \in X$ *i neka su* a_0, a_n, b_n *Fourierovi koeficijenti funkcije* f **,** $n \in \mathbb{N}$. Tada je:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \|f\|^2.$$

1.4.8. **Teorema(Riemann[4]-Lebesgueova[5] lema):** *Ako je* $f \in X$ *i ako su* a_0, a_n, b_n *Fourierovi koeficijenti funkcije* f **,** $n \in \mathbb{N}$, tada važi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ \ i \ \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \ \ tj.$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 \ i \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0.$$

Dokaz: Posledica prethodne nejednakosti, jer iz te nejednakosti sledi konvergencija brojnog reda:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2),$$

pa odavde imamo da opšti član teži nuli tj.

$$\lim_{n\leftarrow\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\leftarrow\infty}|a_n|^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\leftarrow\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\leftarrow\infty}|b_n|^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\leftarrow\infty} b_n = 0\,. \blacksquare$$

1.4.9. **Teorema:** *Za svaku deo po deo neprekidnu funkciju* $g(x),\ x \in [0,\pi]$ *:*

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^{\pi} g(t)\sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t\,dt = 0.$$

Dokaz: Definišimo dve funkcije:

$$h_1(t) = g(t)\cos\frac{t}{2}, t \in [0,\pi]; \qquad h_1(t) = 0, t \in [-\pi, 0),$$

$$h_2(t) = g(t)\sin\frac{t}{2}, t \in [0,\pi]; \qquad h_2(t) = 0, t \in [-\pi, 0).$$

Kako je $g(x)$ deo po deo neprekidna na intervalu $[0,\pi]$,sledi da su obe funkcije h_1 i h_2 isto deo po deo neprekidne na intervalu $[0,\pi]$. Dalje:

$$\int_0^{\pi} g(t)\sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t\,dt = \int_0^{\pi} g(t)\cos\frac{t}{2}\sin mt\,dt + \int_0^{\pi} g(t)\sin\frac{t}{2}\cos mt\,dt,$$

gde je prvi sabirak u stvari b_m za funkciju $h_1(t)$, a drugi sabirak a_m za funkciju $h_2(t)$.
Primenimo kako smo definisali funkcije $h_1(t)$ i $h_2(t)$, pa:

$$\int_0^{\pi} g(t)\sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} h_1(t)\ \sin mt\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} h_2(t)\cos mt\,dt.$$

Na osnovu teoreme 1.4.8. sledi:

$$\lim_{m\to\infty} a_m(h_2) = 0, \lim_{m\to\infty} b_m(h_1) = 0 \Rightarrow \lim_{m\to\infty}\int_0^{\pi} g(t)\sin(m + \frac{1}{2})t\,dt = 0. \blacksquare$$

---

[4] Bernhard Riemann(1826-1866)  nemački matematičar

[5] Henri Léon Lebesgue(1875-1941)  francuski matematičar

Dokaz Dirichletove teoreme: Želimo pokazati da :

$$\lim_{m\to\infty} S_m(x) = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2}, \forall x \in (-\pi, \pi).$$

Za $x = \pm\pi$ dokazuje se analogno, tačnije posmatranjem produženja funkcije f.

Neka je $x \in (-\pi, \pi)$ fiksiran proizvoljan broj. Uvodimo pomoćnu funkciju:

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x_+)}{2\sin\frac{t}{2}}, t \in (0, \pi].$$

Dakle, g je deo po deo neprekidna na intervalu $(0, \pi]$, pošto je f deo po deo neprekidna. Treba pokazati da $\lim_{t\to 0^+} g(t)$ postoji.

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x_+)}{t} \cdot \frac{t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

gde je prvi razlomak u stvari desni izvod funkcije f u x, a drugi razlomak teži jedinici, pa pošto $f \in X'$, sledi da traženi limes postoji. Znači funkcija g jeste deo po deo neprekidna na celom intervalu $[0, \pi]$.
Iz Teoreme 1.4.9. znamo:

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^\pi g(t) \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t \, dt = 0,$$

odnosno:

$$\lim_{m\to\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t}{2\sin\frac{t}{2}} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_+) \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t}{2\sin\frac{t}{2}} dt \right] = 0.$$

Iz Teoreme 1.4.6. imamo:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_+) \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t}{2\sin\frac{t}{2}} dt = f(x_+) \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t}{2\sin\frac{t}{2}} dt = f(x_+) \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_m(t)\, dt = \frac{f(x_+)}{2}$$

iz čega sledi da je:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t}{2\sin\frac{t}{2}} dt = \frac{f(x_+)}{2}.$$

Slično, za $t \in [-\pi, 0)$ definišemo:

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x_-)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Koristimo da f ima levi izvod u x_- . Ponovimo prethodno izvođenje na $[-\pi, 0]$ i dobijamo:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x+t)\cdot\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\frac{f(x_-)}{2}.$$

Konačno:

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}S_m(x) &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cdot D_m(t)dt\\ &= \lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x+t)\cdot D_m(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+t)\cdot D_m(t)dt\right]\\ &= \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Sada znamo da, ako funkcija zadovoljava pretpostavke Dirichletove teoreme, tada Fourierov red te funkcije konvergira u svakoj tački skupa $\mathbb{R}$. Za neko $x\in\mathbb{R}$, red konvergira ka vrednosti funkcije $f(x)$, ako je funkcija f neprekidna u tački x. U tačkama prekida red konvergira ka najboljoj vrednosti koju bismo mogli očekivati, odnosno ka srednjoj vrednosti jednostranih limesa funkcije f u toj tački.

Uniformna konvergencija

Pretpostavimo da je $f \in X'$ i neka su sa a_n i b_n označeni Fourierovi koeficijenti za funkciju f. Na osnovu Dirichletove teoreme, za svako x važi:

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]\right]=\frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}.$$

Ovo je tačkasta konvergencija.

1.4.10. **Definicija tačkaste konvergencije:** *Neka je $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ niz funkcija definisanih na intervalu $[a,b]$ i neka je funkcija f definisana na $[a,b]$. Kažemo da niz $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ konvergira tačkasto ka f na intervalu $[a,b]$, ako za svako x iz intervala $[a,b]$ važi:*

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x)=f(x),$$

tj. za svako x iz intervala $[a,b]$ i $\varepsilon>0$, postoji prirodan broj $n(\varepsilon,x)$ takav da je

$$|f_m(x)-f(x)|<\varepsilon$$

za svako $m\ge n(\varepsilon,x)$.

1.4.11.**Definicija uniformne konvergencije:** *Neka je $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ niz funkcija definisanih na intervalu $[a,b]$ i neka je funkcija f definisana na $[a,b]$. Kažemo da niz $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ konvergira uniformno ka f na intervalu $[a,b]$, ako za svako $\varepsilon>0$, postoji prirodan broj $n(\varepsilon)$ takav da važi:*

$$\max_{x\in[a,b]}|f_m(x)-f(x)|<\varepsilon$$

za svako $m\ge n(\varepsilon)$i za svako x iz intervala $[a,b]$.

Ove dve konvergancije izgledaju slično, ali postoji značajna razlika. Uniformna konvergencija je strožija od tačkaste konvergencije, ako niz funkcija uniformno konvergira ka funkciji f, tada konvergira i tačkasto ka toj funkciji, ali obrnuto ne mora da važi. Ova dva pojma konvergencije opisuju dva različita načina kojima se niz funkcija $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ približava funkciji f. U slučaju tačkaste konvergencije, za svako x iz intervala $[a,b]$ i svako $\varepsilon>0$, postoji određeno $n(\varepsilon,x)$, koje takođe zavisi od x. Moguće je da određeno $n(\varepsilon,x)$ nije pogodno za ostale tačke x. U slučaju uniformne konvergencije za svako $\varepsilon>0$ postoji broj $n(\varepsilon)$ koji je dobar za sve x iz intervala $[a,b]$.

Sada da vidimo uslove pod kojima Fourierov red funkcije f konvergira uniformno ka f.

Posmatrajmo niz parcijalnih suma:

$$S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

Fourierovog reda funkcije f.

Ovo je konačna suma neprekidnih funkcija, prema tome S_m je neprekidna funkcija za svaki prirodan broj m. Dalje, znamo da je S_m 2π periodična funkcija, pa važi $S_m(-\pi) = S_m(\pi)$ za svako $m \in \mathbb{N}$. Prema tome, potreban uslov za konvergenciju Fourierovog reda funkcije f na intervalu $[-\pi, \pi]$ je da f mora biti neprekidna na $[-\pi, \pi]$ i mora da važi $f(-\pi) = f(\pi)$.

1.4.11. **Teorema o uniformnoj konvergenciji:** *Ako je funkcija f neprekidna na intervalu $[-\pi, \pi]$ i važi $f(-\pi) = f(\pi)$ i ako je f' deo po deo neprekidna, tj. $f' \in X$, tada Fourierov red funkcije f konvergira uniformno ka f na $[-\pi, \pi]$.*

Dokaz: Neka je $f' \in X$ i neka je

$$f'(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx],$$

a

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

Odredimo sada vezu između $\alpha_n, \beta_n, a_n, b_n$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0,$$

jer znamo da je $f(-\pi) = f(\pi)$.

Za $n \geq 1$:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[f(x) \cos nx \,|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) n \sin nx \, dx \right]$$

$$= \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = n b_n \quad ,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[f(x) \sin nx \,|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) n \cos nx \, dx \right]$$

$$= \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = -n a_n.$$

Za dokaz će nam trebati sledeća teorema:

1.4.12. **Weierstrassov[6] kriterijum uniformne konvergencije:** *Ako postoji brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n, c_n > 0$, koji konvergira i pri tome je za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako x iz nekog intervala I $|f_n(x)| \leq c_n$, onda funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno i uniformno konvergira na I.*

[6] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass(1818-1897)  nemački matematičar

Znamo da važe sledeće nejednakosti:

$$|a_n \cos nx| \leq |a_n| \leq \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2},$$

$$|b_n\ sinnx| \leq |b_n| \leq \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}, n \in \mathbb{N}.$$

Dokažimo konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$. Imamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left|\frac{\alpha_n}{n}\right|^2 + \left|\frac{\beta_n}{n}\right|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2}.$$

Koristeći Cauchy[7]-Schwarzovu[8] nejednakost, dobijamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2)}.$$

Znamo da je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$, pa je $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$.

Na osnovu Besselove nejednakosti, dobijamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2) \leq \|f'\|^2 < \infty,$$

pa je i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2} < \infty$, odnosno red $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$ konvergira.

Sada, sledi, da brojni redovi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ i $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergiraju, a iz Weierstrassove teoreme sledi da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ uniformno konvergiraju, pa i Fourierov red funkcije f uniformno konvergira.

Treba još pokazati da red konvergira baš ka funkciji f.

Iz $f' \in X$ sledi da f ispunjava uslove Dirichletove teoreme, pa imamo tačkastu konvergenciju ka $f(x)$ u svakoj tački $x \in [-\pi, \pi]$. To znači da konvergira uniformno ka f na celom intervalu. ■

---

7 Augustin Louis Cauchy(1789-1857)  francuski matematičar

8 Laurent Schwartz (1915-2002)  francuski matematičar

1.4.13. **Napomena:** Iz dokaza teoreme sledi da glatkost funkcije utiče na brzinu kojom a_n i b_n teže ka nuli. Dalje, iz dokaza sledi da ako su $f, f', \dots, f^{(k-1)}$ neprekidne, 2π periodične funkcije i ako $f^{(k)} \in X$, onda je:

$$\lim_{n\to\infty} n^k a_n = 0 \qquad i \qquad \lim_{n\to\infty} n^k b_n = 0.$$

1.4.14. **Teorema:** *Neka je data funkcija f takva da $f, f' \in X$. Pretpostavimo da važi $-\pi < d_1 < d_2 < \cdots < d_n \leq \pi$, gde su $d_1, d_2, \dots, d_n$ tačke prekida funkcije f na intervalu $[-\pi, \pi]$. Ako je $[a, b]$ podinterval od $[-\pi, \pi]$ koji ne sadrži ni jednu tačku prekida d_k, tada Fourierov red funkcije f konvergira uniformno ka f na $[a, b]$.*

1.5 Parsevalova[9] jednakost

U dosadašnjem izlaganju smo prešli put od apstraktnih Hilbertovih prostora u kojima smo definisali Fourierove koeficijente do konkretne realizacije trigonometrijskih redova Fouriera u prostoru X. U ovom delu ćemo pokazati da je ortonormirani sistem trigonometrijskih funkcija kompletan, čime se zaokružuje konkretna realizacija apstraktne teorije primenjena na prostor X.

Ključnu ulogu u dokazu kompletnosti igra Parsevalova jednakost.

1.5.1. **Teorema:** *Ako za ortonormiran sistem vektora $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ važi $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x|e_k\rangle|^2 = \|x\|^2$, onda je taj sistem kompletan.*
Dokaz: Koristićemo Teoremu 1.1.7. Neka važi $\langle x|e_k\rangle = 0$, odnosno $|\langle x|e_k\rangle|^2 = 0$, za sve $k \in \mathbb{N}$. Tada je $c_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} |\langle x|e_k\rangle|^2 = 0$, pa je $\|x\|^2 = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$ tj. $\|x\| = 0$, iz čega sledi da je $x = 0$, tj. na osnovu spomenute teoreme imamo da je ortonormiran sistem $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ kompletan. ■

Jednakost iz Teoreme 1.5.1. se naziva **Parsevalova jednakost.**

1.5.2. **Teorema:** *Potreban i dovoljan uslov da važi Parsevalova jednakost je:*

$$\lim_{m\to\infty} \|x - S_m\| = 0,$$

gde je S_m projekcija vektora x na potprostor $L(e_1, e_2, \dots, e_m)$.
Dokaz: U dokazu koristimo činjenice da je $\langle x - S_m, S_m\rangle = 0$, za svaki prirodan broj m, što je posledica teoreme o reprezentaciji, kao i $\|S_m\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\langle x|e_k\rangle|^2$, što važi jer je sistem $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ortonormiran. Na osnovu ovih činjenica imamo:

$$\|x\|^2 = \|x - S_m + S_m\|^2 = \|x - S_m\|^2 + \|S_m\|^2,$$

odakle važi $\|x - S_m\|^2 = \|x\|^2 - \|S_m\|^2$, pa je navedeni potreban i dovoljan uslov očigledno ispunjen. ■

[9] Marc Antoine Parseval(1755-1836) francuski matematičar

Dakle, za dokaz kompletnosti trigonometrijskog sistema dovoljno je pokazati sledeću teoremu:

1.5.3. **Teorema(Parsevalova jednakost):** *Za svaku* $f \in X$ *važi:*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2),$$

gde su a_n *i* b_n *Fourierovi koeficijenti od* f.

Pre dokaza ove teoreme da izvedemo dve pomoćne teoreme.

1.5.4. **Teorema:** *Ako je* f *neprekidna na intervalu* $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ *i* $f' \in X$, *tada:*

$$\lim_{m\to\infty}\|f - S_m\| = 0,$$

gde je S_m *m-ta parcijalna suma za Fourierov red od* f.

Dokaz: Fourierov red od f uniformno konvergira u f na intervalu $[-\pi,\pi]$. Stoga za svako dato $\varepsilon > 0$ postoji $n(\varepsilon)$, tako da za svako $x \in [-\pi,\pi]$ i za svako $m \geq n(\varepsilon)$ važi:

$$|f(x) - S_m| < \varepsilon.$$

Odakle za svako $m \geq n(\varepsilon)$ važi:

$$\|f - S_m\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - S_m|^2\,dx \leq 2\varepsilon^2,$$

tj.

$$\lim_{m\to\infty}\|f - S_m\| = 0. \blacksquare$$

1.5.5. **Teorema:** *Neka je* $f \in E$ *i* $\varepsilon > 0$. *Postoji funkcija* g *koja je neprekidna na intervalu* $[-\pi,\pi]$, $g(-\pi) = g(\pi)$, $g' \in E$ *i* $\|f - g\| < \varepsilon$.

Dokaz teoreme 1.5.3. : Neka je $f \in E$ i $\varepsilon > 0$. Prema Teoremi 1.5.4. postoji funkcija g koja zadovoljava uslove Teoreme 1.5.4. tako da je $\|f - g\| < \varepsilon$, pa postoji $n(\varepsilon)$, tako da za svako $m \geq n(\varepsilon)$ važi: $\|g - T_m\| < \varepsilon$, gde je T_m m-ta parcijalna suma Fourierovog reda za funkciju g. Prema tome za $m \geq n(\varepsilon)$ imamo: $\|f - T_m\| \leq \|f - g\| + \|g - T_m\| < 2\varepsilon$. Prema teoremi o projekciji tačke na vektorski potprostor: $\|f - S_m\| \leq \|f - T_m\|$. Prema tome za svako $m \geq n(\varepsilon)$ imamo $\|f - S_m\| \leq 2\varepsilon$, tj.

$$\lim_{m\to\infty}\|f - S_m\| = 0. \blacksquare$$

Završavamo ovu glavu pokazujući da ako dve funkcije u X imaju jednake Fourierove redove, onda su one u stvari jednake.

1.5.6. **Teorema:** *Ako su* $f, g \in X$ *i ako su Fourierovi redovi od* f *i* g *jednaki, tada je* $f(x) = g(x)$, *osim u konačno mnogo tačaka.*

Dokaz: Koeficijenti Fourierovog reda $f - g \in E$ su svi jednaki nuli. Iz Parsevalove jednakosti imamo: $\|f - g\| = 0$, pa iz svojstva norme u posmatranom prostoru sledi $f = g$, osim u konačno mnogo tačaka.

2.Rubni problemi

2.1. Uvod

U prirodnim naukama, prvenstveno pri proučavanju raznovrsnih oscilacja, prirodno se javljaju problemi za koje se traže rešenja koja zadovoljavaju dopunske uslove u više tačaka. Ti se problemi nazivaju **granični** ili **rubni problemi**. U ovoj glavi proučavaćemo granični problem za linearne jednačine drugog reda, kod kojih se mogu uočiti sve bitne karakteristike ovakvih problema. Cilj nam je da proučimo rešenja $y(x)$ homogene linearne jednačine drugog reda oblika:

$$(P(x)y')' + Q(x)y = 0,\ a \leq x \leq b, \tag{2.1}$$

koja zadovoljavaju homogene granične uslove:

$$hy(a) + h'y'(a) = 0, \quad ky(b) + k'y'(b) = 0\ , \tag{2.1'}$$

gde je $P(x)$, na razmaku $[a, b]$, neprekidno diferencijabilna, pozitivna funkcija, a $Q(x)$ neprekidna funkcija i h, h', k, k' proizvoljni realni brojevi takvi da h i h' , odnosno k i k' nisu istovremeno jednaki nuli.

Sledeći primer dobro ilustruje opštu situaciju.

2.1.1. **Primer** Naći netrivijalno rešenje graničnog problema:

$$y'' + \lambda y = 0, \tag{2.2}$$

$$y(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0. \tag{2.2'}$$

Posmatraćemo tri posebna slučaja:

1° $\lambda = 0$

Tada se jednačina (2.2) svodi na $y'' = 0$, pa u ovom slučaju opšte rešenje jednačine (2.2) je

$$y(x) = c_1x + c_2\ ,$$

odakle iz prvog uslova $(2.2')$ sledi: $c_2 = 0$, a iz drugog: $c_1\pi = 0$ tj. $c_1 = 0$.
Stoga je jedino rešenje problema $(2.2) - (2.2')$, trivijalno rešenje $y(x) = 0$.

2° $\lambda < 0$

U ovom slučaju koreni karakteristične jednačine su realni i različiti, pa je opšte rešenje dato sa

$$y(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}.$$

Ponovo, iz graničnih uslova se dobija:

$$c_1 + c_2 = 0,\ \ c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi} = 0,$$

i ovaj sistem imaće netrivijalnih rešenja po c_1 i c_2 , ako je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\,x} & e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \end{vmatrix} = 0,$$

tj. ako je $e^{2\sqrt{-\lambda}\,\pi} = 1$, što je nemoguće, jer je $\lambda \neq 0$. Znači, i u ovom slučaju, nema netrivijalnih rešenja.

3° $\lambda > 0$

Koreni karakteristične jednačine su konjugovani kompleksni brojevi, pa je opšte rešenje jednačine (2.2) dato sa

$$y(x) = c_1 \cos\,(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2 \sin\,(\sqrt{\lambda}\,x). \tag{2.3}$$

Koristeći granične uslove kao i malopre, dobijamo sledeće dve jednačine za nalaženje konstanti c_1 i c_2:

$$c_1 = 0,\ \ c_2 \sin\,(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0$$

Ako pretpostavimo da je $c_2 \neq 0$, jer bismo inače dobili trivijalno rešenje, sledi da je $\sin\,(\sqrt{\lambda}\,x) = 0$, odakle je $\lambda = n^2$, $n = 1,2,3 \ldots$. ■

Dakle, da bi granični zadatak $(2.2) - (2.2')$imao netrivijalna rešenja, parametar λ ne može biti proizvoljan, već mora biti oblika n^2, tj. član niza $1,4,9, \ldots$. Odgovarajuća (netrivijalna) rešenja su prema (2.3)

$$y_n(x) = c\ sin\ nx,\ \ n = 1,2,3, \ldots \tag{2.4}$$

gde je c proizvoljna konstanta različita od nule.

Na ovom primeru se dobro vidi duboka razlika između početnih i rubnih problema. Dok je egzistencija prvih obezbeđena pod vrlo opštim uslovima, kao što to pokazuje Peanova[10] teorema, dotle kod drugih, rešenje ne mora postojati čak ni u slučaju najprostije jednačine sa konstantnim koeficijentima (2.2), osim za specijalne vrednosti parametra λ, koji ona sadrži.

*2.1.2.***Peanova teorema o egzistenciji.** *Neka je funkcija f(x,y) neprekidna na zatvorenoj oblasti*

$$\text{G:}\ \ |x - x_0| \leq a,\ \ |y - y_0| \leq b,$$

Tada početni problem

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

ima bar jedno rešenje y(x) definisano u razmaku $|x - x_0| \leq min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, *gde je*

$$M = \max_G\ |f(x,y)|.$$

[10] Giuseppe Peano (1858-1932)  italijanski matematičar

Vrednosti parametra $\lambda\ (\lambda_n = n^2, n = 1,2,3,\dots)$, za koje rubni problem $(2.2) - (2.2')$ ima rešenja, nazivaju se **sopstvene** (**svojstvene**) **vrednosti**, a odgovarajuća rešenja (2.4), **sopstvene** (**svojstvene**) **funkcije** tog problema.

2.2. Sturmove[11] teoreme

Za dalja izlaganja su nam potrebni Sturmovi rezultati o nekim osobinama rešenja jednačine (2.1), koji su u drugoj polovini devetnaestog veka, kada su objavljeni, otvorili zajedno sa rezultatima Liouvillea, novi pravac istraživanja u diferencijalnim jednačinama, gde efektivno nalaženje rešenja više nije u prvom planu.

2.2.1. **Sturmova teorema o upoređivanju:** *Neka su u razmaku* $[a, b]$ *funkcije* $P(x)$, $P'(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ *neprekidne* , $P(x) > 0$ *i* $Q_2(x) \geq Q_1(x)$. *Tada se između dve uzastopne nule netrivijalnog rešenja* $y(x)$ *jednačine*

$$(P(x)y')' + Q_1(x)y = 0, \tag{2.5}$$

nalazi bar jedna nula svakog rešenja $z(x)$ *jednačine*

$$(P(x)z')' + Q_2(x)z = 0\,. \tag{2.5'}$$

Dokaz: Neka su x_1 i x_2 dve uzastopne nule proizvoljnog rešenja $y(x)$ jednačine (2.5) i pretpostavimo da postoji neko rešenje $z(x)$ jednačine $(2.5')$ koje nema nula u razmaku $[x_1, x_2]$. Pokazaćemo da ova pretpostavka dovodi do kontradikcije.
Kako se $y(x)$ i $z(x)$ mogu pomnožiti sa konstantama a da to ne utiče na njihove nule, to se, ne ograničavajući opštostu sme pretpostaviti da su $y(x)$ i $z(x)$ pozitivne funkcije u (x_1, x_2). Ako se sada jednačina (2.5) pomnoži sa $z(x)$, a jednačina $(2.5')$ sa $y(x)$, druga oduzme od prve i iskoristimo očevidni identitet:

$$z(P(x)y')' - y(P(x)z')' = \big(P(x)(y'z - yz')\big)',$$

dobija se:

$$\big(P(x)(y'z - yz')\big)' = \big(Q_2(x) - Q_1(x)\big)yz\,.$$

Odatle, integracijom u razmaku (x_1, x_2) , sledi:

---

[11] Charles-François Sturm (1803-1855)  francuski matematičar

$$P2(x_2)y'(x_2)z(x_2) - P(x_1)y'(x_1)z(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \big(Q_2(x) - Q_1(x)\big)yzdx\,.$$

Desna strana gornje jednačine je pozitivna zbog uslova teoreme i pozitiviteta posmatranih rešenja. Leva strana je međutim, negativna, jer je očigledno $y'(x_2) < 0$ i $y'(x_1) > 0$. U tim tačkama $y'(x) \neq 0$, pošto bi inače $y(x)$, zbog jedinstvenosti, bilo trivijalno rešenje. Iz te kontradikcije sledi tvrđenje teoreme. ■

Kao neposredna posledica sledi sledeća teorema.

2.2.2. **Sturmova teorema o razdvajanju:** *Nule dva linearno nezavisna rešenja jednačine* (2.5) *međusobno se razdvajaju tj. između svake dve uzastopne nule prvog rešenja postoji jedna i samo jedna nula drugog rešenja.*
Dokaz: Neka su $y_1(x), y_2(x)$ dva takva rešenja i neka su x_1, x_2 dve uzastopne nule od $y_1(x)$. Tada se između njih nalazi, po Teoremi 2.2.2. , bar jedna nula od $y_2(x)$. Primetimo da se ona ne poklapa sa rubnim tačkama toga intervala, jer je to u kontradikciji sa pretpostavkom o linearnoj nezavisnosti rešenja. Da je to i jedina takva nula, zaključuje se ako se promene uloge od $y_1(x)$ i $y_2(x)$ u gornjem rezonovanju. ■

2.2.3. **Piconeovo[12] uopštenje Sturmove teoreme o upoređivanju:** *Neka su u razmaku* $[a, b]$ *funkcije* $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_1{}'(x)$, $P_2{}'(x)$ $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ *neprekidne.*
$P_1(x) \geq P_2(x) > 0$ *i* $Q_2(x) \geq Q_1(x)$. *Tada:*
između dve uzastopne nule netrivijalnog rešenja $y(x)$ *jednačine* $(P_1(x)y')' + Q_1(x)y = 0$, *nalazi bar jedna nula svakog rešenja* $z(x)$ *jednačine* $(P_2(x)z')' + Q_2(x)z = 0$.
Dokaz: Neka su x_1, x_2 dve uzastopne nule rešenja prve jednačine. Pretpostavimo da je $z(x) \neq 0$ na $x \in [x_1, x_2]$. Krenimo od Piconeovog identiteta tj.

$$\begin{aligned}
\left(y \cdot \frac{P_1 y' z - P_2 y z'}{z}\right)' &= \left(yP_1 y' - \frac{y^2}{z} \cdot P_2 z'\right)' \\
&= P_1 y' y' + y(P_1 y')' - \frac{2yy'z - y^2 z'}{z^2} \cdot P_2 z' - (P_2 z')' \cdot \frac{y^2}{z} \\
&= P_1 y'^2 - Q_1 y^2 - \frac{2yy'z - y^2 z'}{z^2} \cdot P_2 z' + Q_2 z \cdot \frac{y^2}{z} \\
&= y^2(Q_2 - Q_1) + P_1 y'^2 + P_2 \cdot \frac{y^2 z'^2 - 2yy'zz' + (y'z)^2 - (y'z)^2}{z^2} \\
&= y^2(Q_2 - Q_1) + P_1 y'^2 + P_2 \left(\frac{yz' - y'z}{z}\right)^2 - P_2 y'^2 \\
&= y^2(Q_2 - Q_1) + y'^2(P_1 - P_2) + P_2 \left(\frac{yz' - y'z}{z}\right)^2 .
\end{aligned}$$

Integralimo ovaj identitet od x_1 do x_2 , primetimo da je leva strana tada nula, jer $y(x_1) = y(x_2) = 0$, pa imamo sledeće:

---

[12] Mauro Picone (1885-1977)  italijanski matematičar

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \left(y^2(Q_2 - Q_1) + y'^2(P_1 - P_2) + P_2 \left(\frac{yz' - y'z}{z} \right)^2 \right) dx$$

Pošto su svi sabirci nenegativni da bi njihov integral bio nula na (x_1, x_2), moraju svi biti jednaki nuli, tj. $Q_1 \equiv Q_2$ i $P_1 \equiv P_2$ i $yz' = y'z$, ali ova zadnja jednakost nam daje $\frac{y\prime}{y} = \frac{z\prime}{z}$, tj. $y = cz$, što znači da je $z(x) = 0$ kad je i $y(x) = 0$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $z(x) \neq 0$ na $[x_1, x_2]$. ■

2.2.4. **Definicija:** Rešenje diferencijalne jednačine je **oscilatorno**, ako ima beskonačno mnogo nula (i pri tom nije identički jednaka sa nulom).

2.2.5. **Primer:** Sva netrivijalna rešenja diferencijalne jednačine $\mathrm{y}'' + \mathrm{q(x)y} = 0$, gde je q nepozitivna i neprekidna, imaju najviše jednu nulu.

Primetimo da uvek možemo namestiti početni problem tako da $y(t_0) = 0$ i $y' \neq 0$ tj. ima nulu, ali tvrdimo da ih nema više (jedinstvenost rešenja je naravno zagarantovana za linearnu jednačinu). Za $q = 0$ je trivijalno tvrđenje, pa posmatramo samo u slučaju $q < 0$.
Pretpostavimo suprotno tj. da $y(t_1) = y(t_2) = 0$ i t_1 i t_2 su uzastopne nule.Pretpostavimo, bez umanjenja opštosti da je $y > 0$ na (t_1, t_2) , tada y sigurno ima maximum (možda i više) u t^* na (t_1, t_2), ali pošto je $y'' = -q(t)y$, a $y > 0, q < 0$, sledi da je i $y''(t^*) > 0$, a to je kontradikcija da y ima maximum u t^*, znači, nema dve nule.■

Čak ni pozitivnost od q ne garantuje više od jedne nule netrivijalnog rešenja, što pokazuje sledeći primer:

2.2.6. **Primer:** Posmatrajmo reper jednačinu

$$y'' + \frac{c}{t^2} y = 0.$$

Rešimo jednačinu smenom $t = e^s, y = z(s), y' = z'e^{-s}, y'' = (z'' - z')e^{-2s}$, pa prethodna jednačina postaje

$$z'' - z' + cz = 0,$$

za koju rešenja karakteristične jednačine $r^2 - r + cz = 0$ su:

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2},$$

pa posmatramo tri slučaja:

1° $c < \frac{1}{4}$

Karakteristični koreni realni i različiti, pa je rešenje oblika:

$$z = e^{\frac{1}{2}s}\left(c_1 e^{s\sqrt{1-4c}} + c_2 e^{-s\sqrt{1-4c}}\right).$$

Tj.

$$y = t^{\frac{1}{2}}\left(c_1 t^{\sqrt{1-4c}} + c_2 t^{-\sqrt{1-4c}}\right),$$

što nije oscilatorno, jer ako uzmemo $c_2 = 0$, tada je $y_1 = c_1 t^{\sqrt{1-4c}}$, što nije oscilatorno, pa nije ni kombinacija od y_1 , y_2 (posledica druge Sturmove teoreme).

2° $c = \frac{1}{4}$

Karakteristični koreni realni i jednaki, pa je rešenje oblika:

$$z = c_1 e^{\frac{1}{2}s} + c_2 s e^{\frac{1}{2}s}.$$

Tj.

$$y = c_1\, t^{\frac{1}{2}} + c_2\, s\, lnt\, t^{\frac{1}{2}},$$

što opet nije oscilatorno, jer ako uzmemo $c_2 = 0$, dobijamo $y_2 = c_1\, t^{\frac{1}{2}}$, pa zaključak kao iz slučaja 1°.

3° $c > \frac{1}{4}$

Karakteristični koreni konjugovano kompleksni brojevi, pa je rešenje oblika:

$$z = e^{\frac{1}{2}s}\left(c_1 \cos s\frac{\sqrt{4c-1}}{2} + c_2 \sin s\frac{\sqrt{4c-1}}{2}\right).$$

Tj.

$$y = t^{\frac{1}{2}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4c-1}}{2} lnt\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4c-1}}{2} lnt\right)\right),$$

pa za $c_2 = 0$ imamo $y_1 = c_1\, t^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{4c-1}}{2} lnt\right)$, što jeste oscilatorno, jer kad $t \to \infty, lnt \to \infty$, tj. argument kosinusa je rastuća funkcija, pa cos rastuće funkcije ima beskonačno mnogo nula. Pošto je y_1 oscilatorno, oscilatorna je i kombinacija od y_1 i y_2 tj. y. ■

2.3. Prüferove[13] smene

U ovom delu izložićemo jednu metodu, veoma korisnu za proučavanje rešenja rubnog problema $(2.1) - (2.1')$, koju ćemo kasnije u tu svrhu i iskoristiti. Metodu je uveo Prü!fer i ona se sastoji u tome da se jednačina (2.1) piše u obliku odgovarajućeg sistema u normalnoj formi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{P(x)} z, \qquad \frac{dz}{dx} = -Q(x)y \tag{2.6}$$

[13] Ernst Paul Heinz Prüfer (1896.-1934.)  nemački matematičar

i zatim se uvedu polarne kordinate:

$$y(x) = \rho(x)\sin\theta(x)\,,\;\; z(x) = \rho(x)\cos\theta(x), \tag{2.7}$$

gde su sada $\rho(x)$ i $\theta(x)$ nove nepoznate funkcije.

Ako se obe strane jednačine (2.7) diferenciraju po x , zatim y' i z' eliminišu koristeći (2.6) i konačno, tako dobijen sistem, rešimo po $\rho'(x)$ i $\theta'(x)$, dobija se sistem koji zamenjuje jednačinu (2.1) (**asocirani Prüferov sistem**)

$$\rho' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P(x)} - Q(x)\right)\rho\sin 2\theta, \tag{2.8}$$

$$\theta' = \frac{1}{P(x)}cos^2\theta + Q(x)sin^2\theta\,. \tag{2.9}$$

U tom postupku se obe strane jednačine (2.8) dele sa ρ, pa se rešenje $\rho(x) = 0$ isključuje iz posmatranja. To je međutim bez značaja, jer je za netrivijalna rešenja koja se jedino i posmatraju uvek $\rho(x) > 0$. Naime, pošto važi

$$\rho^2 sin^2\theta + \rho^2 cos^2\theta = \rho^2 \quad i \quad \frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta} = tg\theta$$

na osnovu (2.7) i (2.6) sledi

$$\rho^2 = y^2 + (P(x)y')^2 \quad i \quad \theta = arctg\frac{y}{P(x)y'}\,.$$

Iz prve od gornjih jednačina se vidi da ne može biti $\rho(x) = 0$ ni za jedno x_0, jer zbog jedinstvenosti rešenja početnog problema ne može za netrivijalno rešenje $y(x)$ biti:
$y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Stoga, svakom netrivijalnom rešenju sistma (2.6) odgovara jedno rešenje sistema (2.8) - (2.9) i obratno.
Značaj Prüferovih smena je u tome što jednačina (2.9) sadrži samo nepoznatu funkciju $\theta(x)$ a ne i $\rho(x)$. Sa time je problem u suštini sveden na jednačinu prvog reda, jer kada je $\theta(x)$ poznato, jednačina (2.8) razdvaja promenljive.

Na osnovu sledeće teoreme:

2.3.1. **Teorema:** *Neka je f(x) neprekidna u (konačnom ili beskonačnom) razmaku* $a < x < b$, *a g(y) neprekidna i različita od nule u (konačnom ili beskonačnom) razmaku* $\alpha < y < \beta$. *Neka je* $x_0 \in (a,b), y_0 \in (\alpha,\beta)$, *tada postoji jedinstveno rešenje jednačine*

$$y' = f(x)g(y)$$

koje zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0$, *koje je definisano u nekoj okolini od* x_0. *To rešenje je dato obrascem*

$$y(x) = G^{-1}(G(y_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)dt),$$

gde je $G(u)$ *primitivna funkcija funkcije* $\frac{1}{g(u)}$ *u razmaku* (α,β), *a* $G^{-1}(u)$ *je njena inverzna funkcija.*

Kako su funkcije $P(x)$ i $Q(x)$ neprekidne u razmaku (a,b) i $P(x) > 0$, to rešenje $\theta(x)$ jednačine (2.9) postoji, šta više jedinstveno je (uz dati početni uslov), jer je parcijalni izvod desne strane jednačine (2.9) po θ ograničen u svakom zatvorenom razmaku u (a,b).

Granični uslovi $(2.1')$se zbog $\rho(x) > 0$ i (2.6), (2.7) svode na

$$h\sin\theta(a) + \frac{h'}{P(a)}\cos\theta(a) = 0,$$
$$k\sin\theta(b) + \frac{k'}{P(b)}\cos\theta(b) = 0. \quad (2.10)$$

Stavimo dalje:

$$h = H\cos\alpha, \qquad -\frac{h'}{P(a)} = H\sin\alpha, \qquad k = K\cos\beta, \qquad -\frac{k'}{P(b)} = K\sin\beta,$$

gde je

$$0 \le \alpha < \pi,\ \ 0 < \beta \le \pi,\ \ H = \sqrt{h^2 + \left(\frac{h'}{P(a)}\right)^2},\ \ K = \sqrt{k^2 + \left(\frac{k'}{P(b)}\right)^2}.$$

Sa ovim oznakama uslovi (2.10), posle deobe sa H odnosno K, postaju:

$$\cos\alpha\sin\theta(a) - \sin\alpha\cos\theta(a) = 0\,,$$
$$\cos\beta\sin\theta(b) - sin\beta\cos\theta(b) = 0.$$

Tj.

$$\sin(\theta(a) - \alpha) = 0, \quad \sin(\theta(b) - \beta) = 0.$$

Odatle se granični uslovi $(2.1')$ definitivno svode na

$$\theta(a) = \alpha,\ \ \theta(b) = \beta \pm k\pi, k = 0,1,2,\dots\ . \quad (2.11)$$

Rešenja dve jednačine oblika (2.9) mogu se upoređivati (što će nam kasnije biti potrebno), tj. važi sledeća teorema:

2.3.2. **Teorema:** *Neka su funkcije $P'_i(x)$, $Q'_i(x)$, $i = 1,2$, neprekidne u razmaku $[a,b]$ i neka je u tom razmaku*

$$P_1(x) \ge P_2(x) > 0 \ i\ Q_2(x) \ge Q_1(x). \quad (2.12)$$

Ako za rešenja $\theta_i(x)$, $i = 1,2$ jednačina

$$\theta'_i(x) = \frac{1}{P_i(x)}cos^2\theta_i(x) + Q_i(x)sin^2\theta_i(x), \quad i = 1,2 \quad (2.13)$$

važi $\theta_2(a) \ge \theta_1(a)$, tada je

$$\theta_2(x) \ge \theta_1(x), za\ x \in [a,b]. \quad (2.14)$$

Ako umesto drugog uslova (2.12) u razmaku (a,b) važi $Q_2(x) > Q_1(x)$, tada je

$$\theta_2(x) > \theta_1(x), \quad x \in (a,b]. \quad (2.15)$$

koja sledi na osnovu sledeće:

2.3.3. **Teorema:** *Neka su funkcije $f(x,y)$ i $g(x,y)$ neprekidne u zatvorenoj oblasti*

$$G: |x-x_0| \le a, \quad |y-y_0| \le b$$

i neka su $y(x)$i $z(x)$ rešenja (ne neophodno jedinstvena) početnih problema

$$y' = f(x,y), \quad z' = g(x,y)\,, \quad y(x_0) = z(x_0) = y_0 \tag{2.16}$$

u nekom razmaku $[x_0, x_0+\alpha]$, gde je $\alpha \in (0,a]$.
Ako je $f(x,y) < g(x,y)$, za sve $(x,y) \in G$, tada je $y(x) < z(x)$ za $x \in (x_0, x_0+\alpha]$.

Dokaz: Formirajmo funkciju $u(x) = z(x) - y(x)$. Kako je $u(x_0) = z(x_0) - y(x_0) = 0$ i $u'(x_0) = z'(x_0) - y'(x_0) = g\big(x_0, z(x_0)\big) - f\big(x_0, y(x_0)\big) = g(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) > 0,$ to funkcija $u(x)$ raste u okolini tačke x_0 i pozitivna je u nekoj desnoj okolini te tačke. Pretpostavimo da to nije ispunjeno za svako x intervala $[x_0, x_0+\alpha]$, odnosno da postoji tačka x_1 iz tog intervala za koju je $u(x_1) = z(x_1) - y(x_1) = 0$. U toj tački, prema (2.16), bi bilo $u'(x_1) = z'(x_1) - y'(x_1) = g\big(x_1, z(x_1)\big) - f\big(x_1, y(x_1)\big) > 0$, što je nemoguće jer je $u(x) > 0$ za $x \in (x_0, x_1)$. ■
Da bi umesto < imali ≤ , moramo imati dodatne uslove: jedna od funkcija f ili g zadovoljava Lipschitzov uslov po y, ili da u oblasti G jedna od jednačina (2.16) ima jedinstveno rešenje.

2.4. Sturm-Liouvilleovi[14] sistemi

Stavimo u jednačinu (2.1) $P(x) = p(x),\ Q(x) = \lambda r(x) - q(x)$, gde je λ parametar. Ako u zatvorenom konačnom intervalu $[a,b]$ važi da je $p(x)$ neprekidno diferencijabilna funkcija i da su $r(x)$ i q(x) neprekidne funkcije i $p(x) > 0,\ \ r(x) > 0$, granični problem

$$(p(x)y')' + \big(\lambda r(x) - q(x)\big)y = 0 \tag{2.17}$$
$$h\,y(a) + h'y'(a) = 0, \quad k\,y(b) + k'y'(b) = 0 \tag{2.17'}$$

se naziva **regularan Sturm-Liouvilleov sistem.**
Ako je međutim posmatrani razmak beskonačan ili je konačan ali se funkcija $p(x)$ ili $r(x)$ anulira bar u jednoj krajnjoj tački posmatranog intervala ili jedna od funkcija p, q, r tu postaje prekidna, tada se govori o **singularnom Sturm-Liouvilleovom sistemu.**

2.4.1. **Napomena:** U slučaju singularnog Sturm-Liouvilleovog sistema, granični uslovi ne mogu uvek opisati uslovima $(2.17')$. Umesto toga se može zahtevati da rešenja imaju neku drugu, često sasvim opštu osobinu, npr. da budu ograničena u posmatranom intervalu. Takvi se uslovi često javljaju u primenama.

[14] Joseph Liouville (1809-1882)  francuski matematičar

Primer 2.1.1. je specijalan slučaj, sa $p(x) = 1,\ r(x) = 1,\ q(x) = 0,\ a = 0,\ b = \pi,\ h' = k' = 0$, koji ima rešenje samo za specijalane vrednosti parametra λ. Pokazaće se da je situacija ista i u slučaju opšteg sistema $(2.17) - (2.17')$. Stoga se uvodi sledeća definicija:

2.4.2. **Definicija:** *Vrednosti parametra λ za koje Sturm-Liouvilleov sistem $(2.17) - (2.17')$ ima netrivijalnih rešenja nazivaju se* ***sopstvene vrednosti****, a odgovarajuća rešenja,* ***sopstvene funkcije*** *tog sistema. Skup svih sopstvenih vrednosti nazivamo* ***spektar sistema.***

2.5. Teorema o oscilaciji; Egzistencija sopstvenih vrednosti i sopstvenih funkcija

Metod koji smo razradili u delu 2.3., ovde ćemo primeniti za dokaz tvrdnje da postoje sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije graničnog zadatka $(2.17) - (2.17')$. Ključni momenat u dokazu predstavlja ovaj rezultat:

2.5.1. **Teorema:** *Rešenje $\theta(x;\lambda)$ jednačine*

$$\theta' = (\lambda\, r(x) - q(x))\, sin^2\theta + \frac{1}{p(x)} cos^2\theta, \tag{2.18}$$

Gde je $p(x) > 0,\ r(x) > 0,\ a \le x \le b$, koje za svako λ zadovoljava početni uslov $\theta(a,\lambda) = \gamma\ (0 \le \gamma < \pi)$, posmatrano kao funkcija od λ, ima ove osobine:

- *i.* *neprekidna je*
- *ii.* *monotono raste*
- *iii.* $\lim_{\lambda\to\infty}\theta(x_0,\lambda) = \infty,\ \ \lim_{\lambda\to-\infty}\theta(x_0,\lambda) = 0$ *, za svako (fiksno) x_0 iz intervala $(a,b]$.*

Dokaz:

i. Neprekidnost $\theta(x,\lambda)$ po obe promenljive sledi neposrednom primenom sledeće teoreme:

> 2.5.2. **Teorema:** *Neka su funkcije $y_1(x), y_2(x) \in C^1(I), I \in [a,b]$, neka je $f(x,y) \in C\big([a,b] \times (J_1 \cup J_2)\big)$ i Lipšicove klase po drugoj promenljivi na spomenutoj oblasti i neka važi $|y_i(x) - f(x, y_i(x))| \le \varepsilon_i$, $i = 1,2$, $|y_1(a) - y_2(a)| \le \delta$, tada važi sledeće: $|y_1(x) - y_2(x)| \le \delta e^{L(x-a)} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{L(x-a)} - 1)$, gde je $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.*
>
> Za dokaz ove teoreme koristićemo sledeću lemu:

2.5.3. **Bellmanova**[15] **Lema:** *Posmatrajmo integralnu nejednačinu:*

$$y(x) \leq c(x) + \int_{x_0}^{x} k(t)y(t)dt,$$

gde su funkcije $y, c, k \in C(I)$, $I = [x_0, x_0 + h]$, $h > 0, k \geq 0$. *Tvrdimo:*

$$y(x) \leq c(x) + \int_{x_0}^{x} c(t)k(t)e^{\int_t^x k(s)ds}\, dt.$$

Dokaz: Pomnožimo posmatranu integralnu nejednačinu sa k i uvedemo oznaku

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} k(t)y(t)dt,$$

tada:

$$u'(x) \leq c(x) \cdot k(x) + k(x) \cdot u(x).$$

Pomnožimo prethodnu nejednakost sa $e^{-\int_{x_0}^{x} k(t)dt}$, što jeste pozitivno, pa ne menja smer, tj. dobijamo:

$$u'(x) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} k(t)dt} - k(x) \cdot u(x) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} k(t)dt} \leq c(x) \cdot k(x) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} k(t)dt}.$$

Uvedemo oznaku:

$$w(x) = u(x)e^{-\int_{x_0}^{x} k(t)dt},$$

dobijamo:

$$w'(x) \leq c(x)k(x)e^{-\int_{x_0}^{x} k(t)dt}.$$

Integralimo od x_0 do x:

$$w(x) - w(x_0) \leq \int_{x_0}^{x} c(t)k(t)e^{-\int_{x_0}^{t} k(s)ds} dt,$$

pa pošto važi $w(x_0) = u(x_0) = 0$, imamo:

$$w(x) \leq \int_{x_0}^{x} c(t)k(t)e^{-\int_{x_0}^{t} k(s)ds} dt.$$

Pomnožimo sa $e^{\int_{x_0}^{x} k(t)dt}$, što jeste pozitivno, pa ne menja smer nejednakosti. Obratimo pažnju da je to funkcija po x, a podinegralna funkcija sa desne strane nejednakosti je funkcija po t, stoga $e^{\int_{x_0}^{x} k(t)dt}$ ulazi pod integral kao konstanta. Znamo:

$$e^{-\int_{x_0}^{t} k(s)ds} \cdot e^{\int_{x_0}^{x} k(t)dt} = e^{\int_t^{x_0} k(s)ds + \int_{x_0}^{x} k(s)ds} = e^{\int_t^x k(s)ds},$$

pa:

[15] Richard Ernest Bellman(1920-1984)  američki matematičar

$$u(x) \leq \int_{x_0}^{x} c(t)k(t)e^{\int_t^x k(s)ds}dt.$$

Dodamo c(x):

$$u(x) + c(x) \leq c(x) + \int_{x_0}^{x} c(t)k(t)e^{\int_t^x k(s)ds}dt.$$

Na osnovu početne integralne nejednačine imamo:

$$y(x) \leq c(x) + \int_{x_0}^{x} c(t)k(t)e^{\int_t^x k(s)ds}dt,$$

što smo i hteli. ■

Dokaz Teoreme 2.5.2.: Neka je $u(x) = y_1(x) - y_2(x)$, tada $u'(x) = {y'}_1(x) - {y'}_2(x)$. Dodamo i oduzmemo funkcije $f(x, y_1(x))$ i $f(x, y_2(x))$, primenimo nejednakost trougla i uslove teoreme, tada je:
$| u'(x) | \leq \left| {y'}_1(x) - f\big(x, y_1(x)\big) \right| + \left| {y'}_2(x) - f\big(x, y_2(x)\big) \right| + \left| f\big(x, y_1(x)\big) - f\big(x, y_2(x)\big) \right| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + L \mid y_1(x) - y_2(x) \mid = \varepsilon + L \mid u(x) \mid$.
Znamo: $+u'(x) \leq |\, u'(x)|$ i $-u'(x) \leq |\, u'(x)|$, pa na osnovu ovog i prethodne nejednakosti, imamo $u'(x) \leq \varepsilon + L \,|\, u(x)|$ i $-u'(x) \leq \varepsilon + L \,|\, u(x)|$. Integralimo ove nejednakosti od a do x, pa dobijamo sledeće:

$$+u(x) - u(a) \leq \varepsilon(x - a) + L \int_a^x |\, u(t)| dt,$$

$$-u(x) + u(a) \leq \varepsilon(x - a) + L \int_a^x |\, u(t)| dt.$$

Pošto je $|\, u(a)| = |\, y_1(a) - y_2(a)| < \delta$, sledi:

$$|\, u(x)| \leq \delta + \varepsilon(x - a) + L \int_a^x |\, u(t)| dt.$$

Primenom Bellmanove Leme sledi:

$$|\, u(x)| \leq \delta + \varepsilon(x - a) + \int_a^x \big(\delta + \varepsilon(t - a)\big) L e^{\int_t^x L ds} dt.$$

Izvršimo integraciju u eksponentu:

$$|\, u(x)| \leq \delta + \varepsilon(x - a) + \int_a^x \big(\delta + \varepsilon(t - a)\big) L e^{L(x-t)} dt.$$

Izvučemo konstante ispred integrala:

$$|\, u(x)| \leq \delta + \varepsilon(x - a) + L e^{Lx} \int_a^x \big(\delta + \varepsilon(t - a)\big) L e^{-Lt} dt\,.$$

Odradimo parcijalnu integraciju:

$$| u(x)| \le \delta + \varepsilon(x-a) + Le^{Lx}\left[\left(\delta + \varepsilon(t-a)\right) \cdot \frac{e^{-Lt}}{-L} |_a^x - \int_a^x \varepsilon \frac{e^{-Lt}}{-L} dt\right].$$

Skratimo L i integralimo:

$$| u(x)| \le \delta + \varepsilon(x-a) - e^{Lx}\left[\left(\delta + \varepsilon(x-a)\right)e^{-Lx} - \delta e^{-La} - \varepsilon \frac{e^{-Lt}}{-L} |_a^x\right].$$

Izmnožimo desnu stranu:

$$| u(x)| \le \delta + \varepsilon(x-a) - \delta - \varepsilon(x-a) + \delta e^{L(x-a)} - \varepsilon \frac{e^{Lx}}{-L}(-e^{Lx} - e^{-La}).$$

Posle potiranja dobijamo:

$$| u(x)| \le \delta e^{L(x-a)} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L(x-a)} - 1\right),$$

što smo i hteli.■

ii. Da $\theta(x_0, \lambda)$ monotono raste, sledi primenom teoreme 2.3.2.

iii. Dokazaćemo prvo da je

$$\lim_{\lambda\to\infty} \theta(x_0, \lambda) = \infty \tag{2.19}$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\lim_{\lambda\to\infty} \theta(x_0, \lambda) = M < \infty$$

Primetimo, prvo da je za λ dovoljno veliko, $\lambda > \lambda_0$, $\theta'(x) > 0$, pa je $\theta(x, \lambda)$ monotono rastuća po x.

Stavimo $I = (a, x_0]$, $k_0 = \left[\frac{M}{\pi}\right]$ (tj. najveći ceo broj koji nije veći od $\frac{M}{\pi}$) i izaberimo δ tako da je $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Za $k = 0,1,2, \dots\ , k_0 + 1$ definišimo zatvorene intervale:

$$I_k(\lambda) = \{x \in I: |\theta(x, \lambda) - k\pi| \le \delta\} = [x_k, x'_k],$$

čije krajnje tačke x_k i x'_k , takođe zavise od λ.

Primetimo, da su I_0 i I_{k_0+1} prazni, ukoliko je $\gamma \ge \delta$ i $(k_0 + 1)\pi - M \ge \delta$.

Stavimo dalje:

$$I^1(\lambda) = \bigcup_{k=0}^{k_0+1} I_k(\lambda), \qquad I^2(\lambda) = I \backslash I^1(\lambda).$$

Sada na osnovu (2.18), važe sledeće ocene:

$$\begin{aligned} \theta'(x, \lambda) &\ge \frac{cos^2\delta}{p(x)} \ge M_1 > 0, \quad x \in I^1(\lambda) \\ \theta'(x, \lambda) &\ge M_2(\lambda)\, sin^2\delta, \qquad x \in I^2(\lambda) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Primenjujući teoremu o srednjoj vrednosti na intervale I_k i njihove komlemente, dobijamo:

$$\theta(x_0,\lambda)-\gamma=\sum_{k=0}^{k_0+1}\theta'(\xi_k,\lambda)(x'_k-x_k)+\sum_{k=0}^{k_0}\theta'(\eta_k,\lambda)(x_{k+1}-x'_k), \qquad (2.21)$$

gde ξ_k i η_k pripadaju odgovarajućim otvorenim intervalima.
Obeležimo sumu dužina intervala $I_k(\lambda)$ sa $d\big(I^1(\lambda)\big)$, tada je

$$d\big(I^2(\lambda)\big)=x_0-a-d\big(I^1(\lambda)\big). \qquad (2.22)$$

Sada, jednakost (2.21) i ocene (2.20) daju

$$\theta(x_0,\lambda)\geq M_1\, d\big(I^1(\lambda)\big)+M_2(\lambda)\, d\big(I^2(\lambda)\big)sin^2\delta. \qquad (2.23)$$

Primenjujući teoremu o srednjoj vednosti nad svakim od intervala $I_k(\lambda)$, na osnovu (2.20), dobijamo:

$$d\big(I^1(\lambda)\big)=\sum_{k=0}^{k_0+1}d(I_k(\lambda))\leq 2\delta\sum_{k=0}^{k_0+1}\frac{1}{\theta'(\xi_k)}\leq\frac{2\delta(k_0+2)}{M_1}.$$

Odavde, za pogodno izabrano δ, (2.22) povlači

$$d\big(I^2(\lambda)\big)\geq x_0-a-\frac{2\delta(k_0+2)}{M_1}\geq M_3>0.$$

Kako $\theta(x_{0,}\lambda)\to M$, a $M_2(\lambda)\to\infty$, dok $\lambda\to\infty$, to iz obrasca (5.23) dobijamo kontradikciju.
Preostaje još da pokažemo

$$\lim_{\lambda\to\infty}\theta\big(x_{0,}\lambda\big)=0 \qquad (2.24)$$

Posmatraćemo dva slučaja:

1° $\gamma>0$

Neka je $\delta\in(0,\gamma)\cap(0,\pi-\gamma)$, a $-\lambda>\lambda_0$ dovoljno veliko da je $\theta'(a,\lambda)<0$ i da za $\delta\leq\theta(x)\leq\gamma$, važi sledeća ocena:

$$\theta'(x)\leq\frac{1}{p(x)}+(\lambda\, r(x)-q(x))sin^2\delta\leq\frac{\gamma-\delta}{a-x_0}$$

, tada će $\theta(x)$ preseći pravu $\theta(x)=\delta$ u nekoj tački x_1, gde je $a<x_1\leq x_0$. Jasno je za $x\geq x_1$ to rešenje ostaje između pravih $\theta(x)=\delta$ i $\theta(x)=0$. Zaista, na osnovu (2.18), $\theta'(x)<0$ u tačkama u kojima je $\theta(x)=\delta$, do je $\theta'(x)>0$ u tačkama u kojima je $\theta(x)=0$. Kako δ možemo da biramo proizvoljno malo, time je dokaz završen.

2° $\gamma = 0$

Primetimo da je $\theta'(a,\lambda) = \frac{1}{p(a)} > 0$, pa stoga $\theta(x)$ raste u nekoj okolini tačke $x = a$. Neka je $\delta > 0$, a $-\lambda > \lambda_0$ dovoljno veliko da je za

$$\theta(x) = \delta, \;\; \theta'(x) = \frac{cos^2\delta}{p(x)} + \big(\lambda\, r(x) - q(x)\big)sin^2\delta < 0.$$

Znači, $\theta(x)$ ostaje u traci $0 \le \theta(x) < \delta$, pa je kao i u slučaju 1° dokaz završen.■

Sada se može dokazati osnovni rezultat ove glave, koji garantuje egzistenciju sopstvenih vrednosti i sopstvenih funkcija Sturm-Liouvilleovog sistema (graničnog problema (2.17)-(2.17′)).

2.5.4. **Teorema:** *Postoji beskonačno mnogo sopstvenih vrednosti graničnog problema* $(2.17) - (2.17')$. *One čine niz* $\{\lambda_n\}$ *koji monotono raste i* $\lambda_n \to \infty, n \to \infty$. *Sopstvena funkcija* $y_n(x)$, *koja pripada sopstvenoj vrednosti* λ_n *ima u intervalu* (a,b) *tačno* n *nula i određena je jednoznačno do na konstantan faktor.*

Dokaz: Prema opisanom u delu 2.3, granični problem$(2.17) - (2.17')$ ekvivalentan je sa problemom

$$\begin{aligned} \theta' &= (\lambda\, r(x) - q(x))\, sin^2\theta + \frac{1}{p(x)} cos^2\theta \\ \rho' &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P(x)} - Q(x)\right)\rho \sin 2\theta \\ \theta(a,\lambda) = \gamma, &\qquad \theta(b,\lambda) = \delta + n\pi, \qquad n = 0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{2.25}$$

, gde je $0 \le \gamma < \pi, \;\; 0 < \delta \le \pi$. Pritomsu brojevi $h, h', k, k', \gamma, \delta$ koji se javljaju u graničnim uslovima vezani relacijama:

$p(a)\; tg\gamma = -\frac{h\prime}{h}$, za $h \neq 0$
$\gamma = 0,$ za $h = 0$
$p(b)\; tg\gamma = -\frac{k\prime}{k}$, za $k \neq 0$
$\delta = \frac{\pi}{2}$, za $k = 0$.

Treba, dakle, pokazati da postoji niz vrednosti λ_n parametra λ sa osobinom navedenom u teoremi, takav da funkcije $\theta(x,\lambda)$, koje po pretpostavci zadovoljavaju prvi rubni uslov (2.25), takođe zadovoljavaju i drugi. Kako je $\delta > 0$ i $\theta(b,\lambda)$ monotono raste po λ, i kako prema (2.24) $\theta(b,\lambda) \to 0, \; \lambda \to -\infty$, to sledi da postoji prva vrednost od λ, označimo je sa λ_0, za koju je $\theta(b,\lambda_0) = \delta$. Kako je $0 \le \gamma < \pi$ i $\delta \le \pi$, to je u intervalu $(a,b), 0 < \theta(x,\lambda_0) < \pi$. Budući da je prema (2.7), $y(x) = 0$ samo u tačkama u kojima je $\sin\theta = 0$ tj. u tačakama u kojima je $\theta = k\pi, \; k = 0, \pm 1, \ldots$, sledi da sopstvena funkcija

$$y_0(x) = \rho_0(x) \sin\theta_0(x) = \rho(x,\lambda_0)\sin\theta(x,\lambda_0),$$

koja odgovara sopstvenoj vrednosti λ_0, nema nula u razmaku (a,b).

Ponavljanjem gornjeg rezonovanja zaključuje se da postoji broj $\lambda_1 > \lambda_0$, takav da za $\theta(x,\lambda)$ važi $\theta(b,\lambda_1) = \delta + \pi$, kao i da odgovarajuća sopstvena funkcija $y_1(x) = \rho(x,\lambda_1)\sin\theta(x,\lambda_1)$ ima tačno jednu nulu u razmaku (a,b), jer je $\theta(x,\lambda_1) < 2\pi$ i θ preseca pravu π rastući.

Nastavljajući tako, može se odrediti n-ta sopstvena vrednost iz uslova $\theta(b, \lambda_n) = \delta + n\pi$.
Tako je pokazano da postoji niz $\{\lambda_n\}$ sa osobinom iz teoreme, kao i da odgovarajuće sopstvene funkcije imaju tačno n nula u intervalu (a, b).
Poslednje tvđenje teoreme sledi iz činjenice da su dva rešenja $y(x), \tilde{y}(x)$ koja oba zadovoljavaju npr. prvi od uslova $(2.17')$, linearno zavisna, jer je $W(y, \tilde{y})(a) = 0$ (tj. Wronskijeva[16] determinanta rešenja $y(x), \tilde{y}(x)$ u tački a je jednaka nuli). ■

2.6. Neke osobine sopstvenih vrednosti i sopstvenih funkcija

U ovom delu ćemo ispitati ponašanje niza sopstvenih vrednosti $\{\lambda_n\}$ i niza sopstvenih funkcija kad $n \to \infty$, jednačine

$$y'' + \big(\lambda\, r(x) - q(x)\big)y = 0, \tag{2.26}$$

uz uslove $(2.17')$.
Primetimo da se jednačina (2.1) može smenom

$$u = \int_a^x \frac{dt}{P(t)}, \qquad y(x) = z(u),$$

svesti na oblik $z'' + R(u)z = 0$, gde je $R(u) = P(x)Q(x)$ neprekidno u razmaku $\left[0, \int_a^b \frac{dt}{P(t)}\right]$.
Stoga se i (2.18), kao specijalan slučaj od (2.1) može svesti na oblik (2.26) (sa drugim funkcijama r i q).

2.6.1. **Teorema:** *Neka su funkcije $r(x)$ i $q(x)$ neprekidne u $[a, b]$, i neka je u tom intervalu*

$$0 < r_m \le r(x) \le r_M, \quad q_m \le q(x) \le q_M.$$

Neka je dalje za $\lambda > \lambda'$

$$m^2 = \lambda\, r_m - q_M, \quad M^2 = \lambda\, r_M - q_m.$$

Tada proizvoljno rešenje jednačine (2.26) ima u razmaku $[a, b]$ najmanje onoliko nula koliko i rešenje sa istim početnim uslovima jednačine

$$y'' + m^2 y = 0, \tag{2.27}$$

a najviše onoliko nula koliko i rešenje sa istim početnim uslovima jednačine

$$y'' + M^2 y = 0. \tag{2.28}$$

Dokaz: Neka su $y(x)$ i $y_1(x)$ rešenja jednačine (2.26) odnosno (2.27) koja zadovoljavaju iste početne uslove $y(a) = y_1(a) = A$, $y'(a) = {y'}_1(a) = B$. Neka su dalje $\theta(x), \theta_1(x)$ odgovarajuća rešenja asociranih Prüferovih sistema, za koje prema (2.10) i gornjim početnim uslovima za određeno α važi $\theta(a) = \theta_1(a) = \alpha$.

---

[16] Józef Maria Hoene-Wroński (1776-1853)  poljski matematičar

Neka $y_1(x)$ ima u intervalu $[a,b]$ n nula. To su tačke u kojima je $\theta_1(x)$ jednako sa n uzastopnih umnožaka od π. Kako je prema uslovima teoreme $\lambda\, r(x) - q(x) \geq m^2$, to je na osnovu teoreme 2.3.2. $\theta(x) \geq \theta_1(x)$ za $x \in [a,b]$. Stoga i $\theta(x)$ uzima pomenute vrednosti (umnoške od π) u tom intervalu. Odatle sledi prvo tvrđenje teoreme, a drugo se pokazuje analogno. ■

2.6.2. **Teorema:** *Neka funkcije* $r(x), q(x)$ *zadovoljavaju uslove prethodne teoreme. Tada za sopstvene vrednosti* $\lambda_n \geq \lambda'$ *graničnog problema* $(2.26) - (2.17')$ *važe procene:*

$$\left(\frac{\pi^2(n-1)^2}{(b-a)^2} + q_m\right) r_M^{-1} \leq \lambda_n \leq \left(\frac{\pi^2(n+1)^2}{(b-a)^2} + q_M\right) r_m^{-1}\,. \qquad (2.29)$$

Dokaz: Funkcije

$$y_1^*(x) = m \sin\alpha \cos m(x-a) + \cos\alpha \sin m(x-a),$$

$$y_2^*(x) = M \sin\alpha \cos M(x-a) + \cos\alpha \sin M(x-a),$$

su respektivno rešenja jednačina (2.27), (2.28), koja zadovoljavaju prvi od modifikovanih uslova (2.10) sa $P(x) = 1$, što je lako neposredno proveriti.
Ta rešenja se mogu pisati u obliku

$$y_1^* = K_1 \sin m(x - a + \omega_1),$$

$$y_2^* = K_2 \sin M(x - a + \omega_2),$$

gde se $K_i\,, \omega_i,\ i = 1{,}2$ mogu izračunati.

Nule $x_k^{(i)}$ rešenja $y_i^*(x), i = 1{,}2$ date su obrascima

$$x_k^{(1)} = a - \omega_1 + \frac{k\pi}{m}\,,\ \ x_k^{(2)} = a - \omega_2 + \frac{k\pi}{M}\,,\ \ k = 0, \pm 1, \ldots\ .$$

Stoga rastojanje dve uzastopne nule rešenja $y_1^*(x)$ iznosi $\frac{\pi}{m}$, a rešenja $y_2^*(x)$ je $\frac{\pi}{M}$. Prema tome, broj nula n_2 rešenja $y_2^*(x)$ u intervalu $[a,b]$ nije veći od $\left[\frac{b-a}{\pi}M\right] + 1$, a broj nula n_1 rešenja $y_1^*(x)$ nije manji od $\left[\frac{b-a}{\pi}m\right]$. (Napomena: ovde $[x]$ označava najveći ceo broj koji nije veći od x)

Ako sa n obeležimo broj nula sopstvene funkcije $y_n(x)$ problema $(2.26) - (2.17')$, tada na osnovu teoreme 2.6.1. sledi da je $n_1 \leq n \leq n_2$, odnosno eksplicitno pisano da je za $\lambda_n > \lambda'$

$$\frac{b-a}{\pi}\sqrt{\lambda_n r_m - q_M} - 1 \leq n \leq \frac{b-a}{\pi}\sqrt{\lambda_n r_M - q_m} + 1,$$

jer je $x - 1 \leq [x] \leq x$. Rešavajući gornje jednačine po λ_n dobijaju se procene (2.27). ■

2.6.2.1. **Primer:** Ocenimo broj nula na [2,10] za jednačinu $y'' - 2e^x y' + e^{2x} y = 0$.
Uvedimo smenu $y = u \cdot f$ za pogodan izbor funkcije f, tada početna jednačina glasi:

$$u'' + u'\left(2\frac{f'}{f} - 2e^x\right) + u\left(\frac{f''}{f} - \frac{2e^x f'}{f} + e^{2x}\right) = 0.$$

Zagradu uz u' izjednačimo sa nulom, tada dobijemo traženu funkciju $f = e^{e^x}$, pa je $y = u \cdot e^{e^x}$. Očigledno je da što je nula funkcije u to je nula i funkcije y, jer je $e^{e^x} > 0$, za svako x. Pošto važi

$$\frac{f''}{f} = \left(\frac{f'}{f}\right)' + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 = e^x + e^{2x},$$

gornja jednačina se svodi na sledeću:

$$u'' + ue^x = 0.$$

Ako je n broj nula, tada važi:

$$\left[\frac{10-2}{\pi} \cdot m\right] \leq n \leq \left[\frac{10-2}{\pi} \cdot M\right] + 1,$$

gde je

$$m = \min_{x \in [2,10]} e^x = e^2, \quad M = \max_{x \in [2,10]} e^x = e^5 . \blacksquare$$

2.6.2.2. **Primer:** Ispitajmo oscilatornost jednačine

$$y'' + \frac{y}{t^4} = 0.$$

Posmatraćemo tri slučaja:

1° $t \in [2, \infty)$,

tada je $\frac{1}{t^4} \leq \frac{1}{4t^4}$, pa ako posmatramo reper jednačinu $y'' + \frac{y}{4t^2} = 0$, koja nije

oscilatorna na osnovu primedbe 2.5.5., tada na osnovu prve Sturmove teoreme zaključujemo da nije oscilatorna ni data.

2° $t \in (1,2)$,

tada posmatrajmo reper jednačinu $y'' + y = 0$. Rešenje ove jednačine je

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t = c_1{}^* \sin(t - c_2{}^*),$$

(gde smo koristili grupisanje isto kao i u teoremi 2.6.2.), pa vidimo da je rastojanje nula π, pa najviše samo jedna nula upada u posmatrani interval, tj. nije oscilatorno, pa na osnovu prve Sturmove teoreme, nisje ni polazna oscilatorna, jer na posmatranom intervalu važi $\frac{1}{16} < \frac{1}{t^4} < 1$.

Znači, dosad imamo da rešenje polazne jednačine nije oscilatorno na $(1, \infty)$.

3° $t \in (0,1]$,

posmatrajmo interval $t \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$, tada važi $n^4 \geq \frac{1}{t^4} \geq \frac{n^4}{16}$, pa posmatramo reper jednačine $y'' + n^4 = 0$ i $y'' + \frac{n^4}{16} = 0$, čija rešenja su redom:

$y = c_1 \cos n^2 t + c_2 \sin n^2 t$,

$y = c_1 \cos \frac{n^2}{4} t + c_2 \sin \frac{n^2}{4} t$.

Rastojanje nula za prvu je $d_1 = \frac{\pi}{n^2}$, a za drugu $d_2 = \frac{4\pi}{n^2}$. Broj nula N_1 i N_2 respektivno: $\left[\frac{n}{\pi}\right] \leq N_1 \leq \left[\frac{n}{\pi}\right] + 1$ i $\left[\frac{n}{4\pi}\right] \leq N_2 \leq \left[\frac{n}{4\pi}\right] + 1$. Pošto važi (na osnovu Sturmove Teoreme) da je $d_2 \leq d \leq d_1$, pa iz $N_2 \leq N \leq N_1$ imamo da kad $n \to \infty$, tada $N_1, N_2 \to \infty$, pa i $N \to \infty$, tj. što smo bliži nuli imamo sve više i više nula, a to znači da u posmatranom intervalu jednačina $y'' + \frac{y}{t^4} = 0$ jeste oscilatorna.■

2.6.3. **Posledica:** *Red* $\sum_{n=1}^{\infty} {\lambda_n}^{-1}$ *konvergira.*

Dokaz: Iz (2.29) sledi da je za $n > n_0$, ${\lambda_n}^{-1} < c\, n^{-2}$, gde je c pozitivna konstanta. ■

2.6.4. **Posledica:** *Ako je u jednačini* (2. *26*) $r(x) = r$, $r > 0$, *tada je*

$$\lambda_n \sim \frac{\pi^2}{r(b-a)^2}\, n^2, n \to \infty.$$

Dokaz: Deobom jednačine (2.29) sa n^2 i prelaskom na granicu $n \to \infty$ sledi gornji obrazac. ■

2.6.5. **Teorema:** *Za svake dve sopstvene funkcije* $y_i(x), y_j(x)$ *koje odgovaraju sopstvenim vrednostima* $\lambda_i, \lambda_j, i \neq j$ *graničnog zadatka* (2.17) − (2.17′) *važi*

$$\int_a^b r(x) y_i(x) y_j(x) dx = 0. \tag{2.30}$$

Dokaz: Ako se posmatrane sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije uvrste u jednačinu (2.17), prva od tako dobijenih jednačina (koja sadrži λ_i i y_i) pomnoži sa y_j, a druga sa y_i i oduzme druga od prve, dobija se

$$\left(p(x)\left(y_j y_i' - y_i {y_j}'\right)\right)' + \left(\lambda_i - \lambda_j\right) r(x) y_i y_j = 0.$$

Integracijom u razmaku (a, b) sledi dalje da je

$$\left(\lambda_i - \lambda_j\right) \int\limits_a^b r(x) y_i(x) y_j(x) dx = p(b)W(b) - p(a)W(a), \tag{2.31}$$

gde je W determinanta Wronskog sopstvenih funkcija y_i , y_j. Te funkcije međutim, zadovoljavaju granične uslove $(2.17')$ tj. važi:

$$h\, y_i(a) + h'\, y'_i(a) = 0, \quad k\, y_i(b) + k'\, y'_i(b) = 0$$

$$h\, y_j(a) + h'\, y'_j(a) = 0, \quad k\, y_j(b) + k'\, y'_j(b) = 0$$

Da bi svaki od gornjih sistema imao netrivijalnih rešenja po h, h', odnosno k, k' moraju njihove determinanate, a to su baš $W(a), W(b)$ biti jednake nuli.
Kako je $\lambda_i \neq \lambda_j$, to iz (2.31) sledi (2.30). ■

2.6.6. **Definicija:** *Za funkcije $y_n(x), n = 0,1,2, \ldots$ za koje važi* (2.30) *kaže se da su* ***ortogonalne u razmaku*** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$***s obzirom na funkciju težine*** $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$. *Ako je pored toga*

$$\int\limits_a^b r(x) y_i^2\,(x) = 1,$$

kaže se da su te funkcije ***ortonormirane.***

2.6.7. **Napomena:** Očevidno se od svakog niza ortogonalnih funkcija $\{y_n(x)\}$ može napraviti niz ortonormiranih funkcija $\{z_n(x)\}$ uzimajući da je

$$z_n(x) = y_n(x) \frac{y_n(x)}{\sqrt{\int_a^b r(x) {y_n}^2(x) dx}}.$$

2.6.8. **Teorema:** *Neka je funkcija $q(x)$ neprekidna u razmaku $[a, b]$, $r(x) = 1$, $h', k' \neq 0$, tada za niz normiranih sopstvenih funkcija graničnog problema* $(2.26) - (2.17')$ *važi*

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos \frac{n\pi(x-a)}{b-a} + \frac{O(1)}{n}, n \to \infty,$$

gde $O(1)$ *označava funkcije koje su ograničene za* $n > n_0$.

2.6.9. **Napomena:** Jednačina (2.26) se daljim smenama može svesti na oblik posmatran u gornjoj teoremi, gde je $r(x) = 1$.

U ovoj glavi smo pokazali egzistenciju sopstvenih vrednosti i sopstvenih funkcija regularnog Sturm-Liouvilleovog sistema.

Drugi veliki problem, pitanje pod kojim se uslovima data funkcija $f(x)$ može razviti po takvim sopstvenim funkcijama, koji će konvergirati ka f u posmatranom razmaku, smo razmatrali u glavi jedan.

Pretpostavimo da se data funkcija $f(x)$ može razviti u uniformno konvergentan red po ortonormiranim sopstvenim funkcijama $y_n(x)$ regularnog Sturm-Liouvilleovog sistema, tj. da je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x), \qquad x \in [a, b]. \tag{2.31}$$

Postupajući kao u slučaju Fourierovog reda, tj. množeći (2.31) sa $y_k(x)r(x)$ i integrišući u razmaku (a, b) dobija se zbog ortonormiranosti sopstvenih funkcija da je

$$\int_a^b y_n(x)y_k(x)r(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k \end{cases}.$$

Tako se dobijaju obrasci za koeficijente c_n:

$$c_n = \int_a^b f(x)y_n(x)r(x)dx, \;\; n = 0,1,2, \dots \; .$$

Stoga se c_n mogu smatrati uopštenim Fourierovim koeficijentima, a (2.31) uopštenim Fourierovim redom na koji se može preneti teorija takvih redova.

3. Ortogonalne funkcije

Jako bitna klasa ortogonalnih funkcija se dobija iz diferencijalnih jednačina oblika

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x) = 0. \tag{3.1}$$

Napomena: Diferencijalne jednačine gornjeg oblika za koje je $B(x) \neq A'(x)$, mogu se svesti na samoadjungovani oblik (kao što je to i jednačina (2.17)), množenjem jednačine (3.1) sa

$$H(x) = \frac{1}{A(x)} e^{\int \frac{B(x)}{A(x)} dx}.$$

3.1. Jednačina Čebiševa[17]

To je jednačina oblika:

$$(\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})\boldsymbol{y}'' - \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}. \tag{3.2}$$

Na ovu jednačinu možemo primeniti transformaciju iz gornje napomene, tj. množimo je sa:

$$H(x) = \frac{1}{1-x^2} e^{\int \frac{-x}{1-x^2} dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Jednačina (3.2) postaje:

$$\left(\sqrt{1-x^2}y'\right)' + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}} y = 0.$$

Smenom:

$$t(x) = \arccos x, \quad x = cost, \quad z(t) = y(\cos t)$$

dobijamo:

$$z'' + n^2 z = 0.$$

Opšte rešenje ove jednačine je:

$$z(t) = c_1 \cos nt + c_2 \sin nt,$$

tj.

$$y(x) = c_1 \cos\,(n \arccos x) + c_2 \sin(\arccos nx).$$

---

[17] Čebišev Pafnutij Ljvovič(1821-1894)  ruski matematičar

Potražimo rešenje jednačine (3.2) u obliku stepenog reda u okolini tačke x=0. Kako je ta tačka regularna, to rešenje je oblika:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{3.3}$$

Zamenimo y, y', y'' u (3.2), pa dobijamo:

$$(1 - x^2) \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) x^{k-2} - x \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} + n^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0,$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} n^2 c_k x^k = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_k k(k-1) - c_k k + n^2 c_k) x^k = 0,$$

odakle sledi da je:

$$c_{k+2} = c_k \frac{k^2 - n^2}{(k+2)(k+1)}.$$

Pošto se parni koeficijenti mogu izraziti preko c_0, a neparni preko c_1, imamo opšte rešenje u sledećem obliku:

$$y(x) = c_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \prod_{p=0}^{k-1} (4p^2 - n^2) \right) + a_1 x \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \prod_{p=0}^{k-1} ((2p+1)^2 - n^2) \right).$$

Redovi koji figurišu u opštem rešenju konvergiraju za $|x| < 1$. Primetimo da kad je n ceo broj, jedno partikularno rešenje je polinom. Ti polonomi se nazivaju **polinomi Čebiševa** i sledećeg su oblika:

$$T_0(x) = 1,\ \ T_1(x) = x,\ \ T_2(x) = 2x^2 - 1,\ \ T_3(x) = 4x^3 - 3x, \dots\ .$$

Oni su određeni sa:

$$T_n(x) = 2^{1-n} \cos(n \arccos x)$$

i za njih važe rekurzivni obrasci:

$$T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2,3,4, \dots\ .$$

Kad uporedimo samoadjungovani oblik jednačine Čebiševa sa (2.17), dobijamo da je:

$$p(x) = \sqrt{1-x^2},\ \ q(x) = 0,\ \ r(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ \lambda = n^2.$$

Za $x = \pm 1$ imamo da je $p(x) = 0$, pa na intervalu $[-1,1]$ imamo singularan Sturm-Liouvilleov sistem. Za $n = 0,1,2,\dots$ sopstvene vrednosti su $\lambda = n^2$, a odgovarajuće sopstvene funkcije su polinomi Čebiševa $T_n(x)$. Oni čine ortogonalni skup na intervalu $[-1,1]$ sa funkcijom težine $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0,\quad m \neq n.$$

Kad je $m = n \neq 0$ stavimo $x = cos\theta$ i tada gornji integral postaje:

$$\int_{0}^{\pi} cos^2\, n\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\pi.$$

Za $m = n = 0$ dobijamo:

$$\int_{0}^{\pi} cos^2 n\theta\, d\theta = \pi.$$

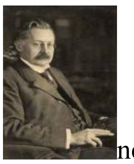
Primena:

Polinomi Čebiševa imaju veliku primenu kod aproksimacija. Korene polinoma Čebiševa nazivamo još i **čvorovi Čebiševa**, i koriste se kao čvorovi pri polinomnoj interpolaciji. Interpolacija sa čvorovima Čebiševa minimizira problem Rungeovog fenomena.

Rungeov fenomen je problem oscilacije pri rubu intervala, koji nastaje pri polinomnoj interpolaciji viših stepena. Problem je primetio Carl David Tolmé Runge[18] kada je ispitivao ponašanje greške pri polinomnoj interpolaciji određenih funkcija. Ovaj problem je jako bitan, jer pokazuje da povećavanjem stepena pri polinomnoj interpolaciji ne postižemo uvek i veću tačnost.

Prisutnost polinoma Čebiševa najbolje ilustruje sledeća rečenica: „Čebiševi polinomi su svugde gusti u numeričkoj analizi.” (J.C. Mason, D. Handscomb: Chebyshev Polynomials)

---

[18] Carl David Tolmé Runge(1856-1927)  nemački matematičar

3.2. Legendreova[19] jednačina

To je jednačina oblika:

$$\boldsymbol{(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0.} \qquad \mathbf{(3.4)}$$

Množenjem (3.4) sa :

$$H(x)=\frac{1}{1-x^2}e^{\int\frac{-2x}{1-x^2}dx}=1,$$

dobijamo:

$$\left((1-x^2)y'\right)'+n(n+1)y=0.$$

Potražimo rešenje i ove jednačine u obliku stepenog reda u okolini tačke $x=0$. Kako je ta tačka regularna , rešenje tražimo u obliku (3.3). Zamenimo y, y', y'' u (3.4) i dobijamo:

$$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty}c_k k(k-1)x^{k-2}-2x\sum_{k=1}^{\infty}c_k k x^{k-1}+k(k+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k=0,$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}c_k k(k-1)x^{k-2}-\sum_{k=2}^{\infty}c_k k(k-1)x^k-\sum_{k=1}^{\infty}2c_k k x^k+\sum_{k=0}^{\infty}n(n+1)c_k x^k=0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(c_{k+2}(k+2)(k+1)-c_k k(k-1)-2c_k k+n(n+1)c_k)x^k=0.$$

Odatle sledi:

$$c_{k+2}=c_k\frac{(k-n)(k+n+1)}{(k+2)(k+1)},$$

pa se opet koeficijenti sa parnim indeksima mogu izraziti preko c_0, a koeficijenti sa neparnim indeksima preko c_1, pa opšte rešenje jednačine (3.4) je oblika:

[19] Adrien-Marie Legendre(1752-1833)  francuski matematičar

$$y(x,n) = c_0\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\prod_{p=0}^{k-1}(2p-n)(2p+n+1)\right)$$
$$+c_1x\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\prod_{p=0}^{k-1}(2p+1-n)(2p+n+2)\right).$$

Primetimo, da ako je n ceo broj, tada jedno partikularno rešenje je polinom, koje nazivamo **Legendreovim polinomima** i sledećeg su oblika:

$$P_0(x) = 1,\ \ P_1(x) = x,\ \ P_2(x) = 1-3x^2,\ \ P_3(x) = x-\frac{5}{3}x^3, \dots \ .$$

Oni su određeni sa:

$$P_{2m}(x) = y(x,2m) = y(x,-2m+1), za\ c_1 = 0, m = 0,1,2, \dots \ ,$$

$$P_{2m+1}(x) = y(x,-2m) = y(x,2m+1), za\ c_0 = 0, m = 0,1,2 \dots \ .$$

Za Legendereove polinome važe rekurzivni obrasci:

$$(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x),\ \ k = 1,2,3, \dots \ .$$

Kad uporedimo samoadjungovani oblik Legendreove jednačine sa (2.17), dobijamo da je:

$$p(x) = 1-x^2,\ \ q(x) = 0,\ \ r(x) = 1,\ \ \lambda = n(n+1).$$

Za $x = \pm 1$ imamo da je $p(x) = 0$, pa na intervalu $[-1,1]$ imamo singularan Sturm-Liouvilleov sistem. Ograničenost rešenja ćemo imati za $\lambda = n(n+1), n = 0,1,2, \dots$. $\lambda = n(n+1)$ su sopstvene vrednosti, a odgovarajuće sopstvene funkcije su Legendreovi polinomi $P_n(x)$. Kako je $r(x) = 1$, oni čine ortogonalni skup na intervalu $[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x) = 0,\ \ m \neq n.$$

Kad je $m = n$, dobijamo:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x) = \frac{2}{2n+1}.$$

Znači, funkcije $\sqrt{n+\frac{1}{2}}P_n(x)$ formiraju ortonormirani skup na $[-1,1]$.

Zahvaljujući osobini ortogonalnosti, moguće je lako dobiti koeficijente u razvoju neke funkcije $f(x)$ u beskonačan red Legendreovih polinoma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x).$$

Zaista, množeći obe strane sa $P_m(x)$ i integracijom u intervalu $[-1,1]$, dobijamo:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, P_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx.$$

Zbog ortogonalnosti, svi članovi na desnoj strani se anuliraju, osim onog za kog je $m = n$. Tako dobijamo formulu za izračunavanje koeficijenata u razvoju:

$$c_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) dx, \quad m = 0,1,2 \ldots \quad .$$

Primena

Pri rešavanju nekih parcijalnih diferencijalnih jednačina koje opisuju fenomene prenosa toplote i mase, pojavljuje se diferencijalna jednačina poznata pod imenom Legendreova jednačina.

3.3. Laguerreova[20] jednačina

To je jednačina oblika:

$$\boldsymbol{xy'' + (1 - x)y' + ny = 0}. \qquad \mathbf{(3.5)}$$

Množenjem (3.5) sa:

$$H(x) = \frac{1}{x} e^{\int \frac{1-x}{x} dx} = \frac{1}{e^x},$$

dobijamo:

$$\left(\frac{x}{e^x} y'\right)' + \frac{n}{e^x} y = 0.$$

Potražimo rešenje jednačine (3.5) u obliku stepenog reda u okolini tačke $x = 0$. Kako je ta tačka regularno-singularna, to rešenje je oblika:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r}. \qquad (3.6)$$

Zamenimo y, y', y'' u (3.5) i dobijamo:

$$x \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2} + (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r) x^{k+r-1} + n \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r) x^{k+r-1} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r) x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} n c_k x^{k+r} = 0,$$

$$x^{r-1} c_0 r^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k (k+r)(k+r-1) + c_k (k+r) - c_{k-1}(k+r-1) + n c_{k-1}) x^{k+r-1} = 0.$$

Znači, indeksna jednačina je $r^2 = 0$, pa su eksponenti $r_1 = r_2 = 0$, a rekurzivni obrasci za nalaženje koeficijenata su:

---

[20] Edmond Laguerre(1834-1886)  francuski matematičar

$$c_k = c_{k-1}\frac{k+r-1-n}{(k+r)^2},$$

pa je rešenje oblika:

$$y(x,r) = c_0 x^r\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} x^k \prod_{p=1}^{k}\frac{p+r-n-1}{(p+r)^2}\right).$$

Jedno partikularno rešenje dobijamo za $r = 0$ tj. $y_1 = y(x,0)$, a drugo nezavisno partikularno rešenje dobijamo kada potražimo $\frac{\partial y(x,r)}{\partial r}$ i uvrstimo $r = 0$ i $c_0 = 0$:

$$y_2 = y_1 \ln|x| + (1+2n)x + \frac{1+n-3n^2}{4}x^2 + \cdots \ .$$

Poluprečnici konvergencije za oba reda su $R = \infty$, pa je opšte rešenje:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

za svako $0 < |x| < \infty$.

Ako je n prirodan broj y_1 postaje polinom, koje nazivamo **Laguerreovi polinomi**, koji su oblika:

$$L_0(x) = 1,\ \ L_1(x) = -x+1,\ \ L_2(x) = x^2-4x+2,\ \ L_3(x) = -x^3+9x^2-18x+6, \dots \ .$$

Laguerreovi polinomi su određeni sa:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{x^k}{k!} = e^x\frac{d(x^n e^{-x})}{dx^n}.$$

Kad uporedimo samoadjungovani oblik Laguerreove jednačine sa (2.17), dobijamo da je:

$$p(x) = \frac{x}{e^x},\ \ q(x) = 0,\ \ r(x) = \frac{1}{e^x},\ \ \lambda = n.$$

Za $x = 0$ i $x = \infty$ imamo da je $p(x) = 0$. Sopstvene vrednosti za polinomna rešenja su $\lambda = n, n = 0,1,2 \dots$, a odgovarajuće sopstvene funkcije su Laguerrreovi polinomi $L_n(x)$. Na osnovu Teoreme 2.6.5. oni čine ortogonalni skup na intervalu $0 \leq x < \infty$, tj. :

$$\int_0^{\infty}\frac{L_m(x)L_n(x)}{e^x}dx = 0.$$

Može se pokazati da je ovaj skup i normiran [1], tj. :

$$\int_0^{\infty}\frac{(L_n(x))^2}{e^x}dx = 1.$$

Primena

Laguerreovi polinomi se koriste u kvantnoj mehanici pri rešavanju Schrödingerove[21] jednačine.

Schrödingerova jednačina je formulisana 1926. godine. Koristi se u fizici, specijalno u kvantnoj mehanici. Radi se o jednačini, koja opisuje promenu kvantnog stanja fizičkih sistema kroz vreme.

---

[21] Erwin Schrödinger(1887-1961)  austrijski fizičar

3.4. Hermiteova[22] jednačina

To je jednačina oblika:

$$\boldsymbol{y'' - 2xy' + 2ny = 0}. \qquad (\mathbf{3.7})$$

Množenjem jednačine (3.7) sa

$$H(x) = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2},$$

dobijamo:

$$\left(e^{-x^2} y'\right)' + 2ne^{-x^2} y = 0.$$

Potražimo rešenje u obliku stepenog reda u okolini tačke $x = 0$. Kako je ta tačka regularna, to rešenje tražimo u obliku (3.3). Zamenom y, y', y'' u (3.7) dobijamo:

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} - 2x \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} + 2n \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0,$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} 2c_k k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2nc_k x^k = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(c_{k+2}(k+2)(k+1) - 2c_k k + 2nc_k\right)x^k = 0,$$

pa sledi da je:

$$c_{k+2} = c_k \frac{2k - 2n}{(k+2)(k+1)}.$$

Znači, parni koeficijenti se izražavaju preko c_0, a neparni preko c_1, pa opšte rešenje jednačine (3.7) je :

$$y(x) = c_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \prod_{p=0}^{k-1} 2(2p - n) \right) + c_1 x \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \prod_{p=0}^{k-1} 2(2p + 1 - n) \right).$$

Redovi koji figurišu u opštem rešenju, konvergiraju za svako x. Primetimo da, ako je n ceo broj, jedno partikularno rešenje je polinom, te polinome nazivamo **Hermiteovim polinomima** i oni su oblika:

$$H_0(x) = 1,\ \ H_1(x) = 2x,\ \ H_2(x) = 4x^2 - 2,\ \ H_3(x) = 8x^3 - 12x, \dots\ .$$

Hermiteovi polinomi su određeni sa:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n\left(e^{-x^2}\right)}{dx^n}.$$

Za Hermiteove polinome važe rekurzivni obrasci:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x),\ \ n = 1,2,3, \dots\ .$$

---

[22] Charles Hermite(1822-1901)  francuski matematičar

Kad uporedimo samoadjungovani oblik Hermitove jednačine sa (2.17), dobijamo da je:

$$p(x) = \frac{1}{e^{x^2}}, \;\; q(x) = 0, \;\; r(x) = \frac{1}{e^{x^2}}, \;\; \lambda = 2n.$$

Za $x = \pm\infty$ imamo da je $p(x) = 0$. $\lambda = 2n, n = 0,1,2, \dots$ su sopstvene vrednosti za polinomna rešenja, a odgovarajuće sopstvene funkcije su Hermiteovi polinomi $H_n(x)$. Teorema 2.6.5. pokazuje da su ove funkcije ortogonalne na $-\infty < x < \infty$ sa funkcijom težine $r(x) = \frac{1}{e^{x^2}}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_m(x)H_n(x)}{e^{x^2}} dx = 0, m \neq n.$$

Hermiteovi polinomi ne čine ortonormirani sistem, jer za $m = n$ imamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{{H_n}^2(x)}{e^{x^2}} dx = 2^n \, n! \, \sqrt{\pi}. \quad [1]$$

Funkcije:

$$\psi_n(x) = \left(2^n \, n! \, \sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x),$$

nazivamo **Hermiteovim funkcijama**, i oni čine ortonormirani sistem, jer na osnovu njihove konstrukcije očigledno važi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\psi_n(x)\, dx = 0, \qquad m \neq n,$$

a za $m = n$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\psi_n(x)\, dx = 1.$$

Primena

Hermiteovi polinomi imaju široku primenu u fizici. Na primer kod kvantno mehaničkog harmonijskog oscilatora.

3.5 Besselova jednačina

To je jednačina oblika:

$$\boldsymbol{x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0}. \qquad \mathbf{(3.8)}$$

Množenjem jednačine (3.8) sa:

$$H(x) = \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x},$$

dobijamo:

$$(xy')' + \left(x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0.$$

Potražimo rešenje jednačine (3.8) u obliku stepenog reda u okolini tačke $x = 0$. Kako je ta tačka regularno-singularna, to rešenje tražimo u obliku (3.6). Zamenom y, y', y'' u (3.8) dobijamo:

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2} + x \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r) x^{k+r-1} + (x^2 - n^2) \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r) x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r+2} - \sum_{k=0}^{\infty} n^2 c_k x^{k+r} = 0,$$

$$x^r c_0 (r^2 - n^2) + x^{r+1} c_1 (r^2 + 2r + 1 - n^2) + \sum_{k=2}^{\infty} (c_k((k+r)^2 - n^2) + c_{k-2}) x^{k+r} = 0.$$

Indeksna jednačina je $r^2 - n^2 = 0$, pa su eksponenti $r_1 = n,\ r_2 = -n$, a rekurzivni obrazac za koeficijente je:

$$c_k = -\frac{1}{(k+r)^2 - n^2} c_{k-2}.$$

Posmatramo tri slučaja:

1° $n \neq 0\ i\ 2n \notin \mathbb{Z}$

Izvešćemo rešenje koje se dobija za $r = n$. Tada koeficijenti sa parnim indeksima postaju:

$$c_{2k} = -\frac{1}{4} \frac{c_{2k-2}}{k(k+n)}, \quad k = 1,2,3, \dots \ .$$

$$k = 1: \ c_2 = -\frac{1}{4} \frac{c_0}{1+n},$$

$$k = 2: \ c_4 = -\frac{1}{4} \frac{c_2}{2(2+n)} = -\left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{c_0}{2 \cdot 1 \cdot (2+n) \cdot (1+n)},$$

$$k = 3: \ c_6 = -\frac{1}{4} \frac{c_4}{3(3+n)} = -\left(\frac{1}{4}\right)^3 \frac{c_0}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (3+n) \cdot (2+n) \cdot (1+n)}.$$

Dakle formula za koeficijente uz parne stepene je:

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{c_0}{4^k k!\,(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)}, \quad k = 1,2,\dots \ .$$

Odaberemo koeficijent c_0 na sledeći način:

$$c_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(\mathrm{n}+1)}.$$

Iskoristimo osobinu Gama-funkcije:

$$\Gamma(\mathrm{x}+1) = \mathrm{x}\Gamma(\mathrm{x}),$$

što daje:

$$\Gamma(\mathrm{n}+\mathrm{k}+1) = (\mathrm{n}+\mathrm{k})(\mathrm{n}+\mathrm{k}-1)\dots(\mathrm{n}+1)\Gamma(\mathrm{n}+1).$$

Dobijamo:

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+n} k!\,\Gamma(\mathrm{k}+\mathrm{n}+1)}, \qquad k = 1,2,3,\dots \ .$$

Prvo partikularno rešenje je:

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\mathrm{k}+\mathrm{n}+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = J_n(x).$$

Dakle jedno rešenje Besselove jednačine u posmatranom slučaju je specijalna funkcija, poznata pod imenom **Besselova funkcija prve vrste reda n.**
Drugo partikularno rešenje za $r = -n$ je Besselova funkcija prve vrste reda –n, $J_{-n}(x)$. Tako opšte rešenje Besselove jednačine u razmatranom slučaju je:

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x).$$

2° $n = 0$

Prvo partikularno rešenje Besselove jednačine $y_1(x)$ dobija se smenom $n = 0$ u $J_n(x)$, dakle kao Besselova funkcija nultog reda:

$$y_1(x) = J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Drugo partikularno rešenje se dobija kao kod Laguerrea:

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}\right)}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

3° $2n \in \mathbb{Z}$

Imamo opet dve mogućnosti:

3a) $n \in \mathbb{Z}$

Prvo partikularno rešenje za $r = n$ je Besselova funkcija prve vrste reda n, a drugo se traži u obliku:

$$y_2(x) = c_1 J_n(x) \ln x + x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

I to je Besselova funkcija druge vrste istog reda Y_n, pa je opšte rešenje:

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x).$$

3.5.1. **Napomena:** Besselova funkcija drugog reda naziva se još i Neumannova[23] funkcija i ona je data sa sledećim formulama:

$$n \notin \mathbb{Z} \quad Y_n(x) = \frac{\cos n\pi \, J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin nx},$$
$$n \in \mathbb{Z} \quad Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_v(x)}{\partial v} - (-1)^n \frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v}\right]_{v=n}. \quad [1]$$

3b) $n = \frac{1}{2}(2k+1), \;\; k = 0,1,2, \ldots$

U ovom slučaju su partikularna rešenja $J_n(x)$ i $J_{-n}(x)$ i opšte rešenje je analogno za slučaj različitih korena:

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x),$$

s tim da se u ovom slučaju funkcije $J_n(x)$ i $J_{-n}(x)$ mogu svesti na elementarne.

Na primer za:

$$x^2 y'' + xy + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0,$$

rešenje je:

$$y(x) = c_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + c_2 J_{-\frac{1}{2}(x)} = c_1 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x + c_2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

3.5.2. **Napomena:** U prethodnom primeru smenom $y(x) = \frac{z(x)}{\sqrt{x}}$ jednačina se svodi na $z'' + z = 0$, pa dobijamo:

$$z(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x,$$

tj.

$$y(x) = c_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

[23] Neumann János(1903-1957)  mađarsko-američki matematičar

Kad uporedimo samoadjungovani oblik Besselove jednačine sa (2.17), dobijamo da je:

$$p(x) = x,\ \ q(x) = \frac{n^2}{x},\ \ r(x) = x.$$

Za $0 < a \leq x \leq b, a, b \in \mathbb{R}$ samoadjungovani oblik Besselove jednačine i granični uslovi (2.17'), gde $(h, h') \neq 0, (k, k') \neq 0$, čine regularan Sturm-Liouvilleov sistem.
Na intervalu $[0, b]$, Sturm-Liouvilleov sistem, koji čine samoadjungovani oblik Besselove jednačine i granični uslov $y(\lambda b) = 0$, je singularan; za $x = 0$ $p(x) = 0$, a $q(x) = \infty$. Pokazali smo da Besselova jednačina u okolini tačke $x = 0$ ima neprekidno rešenje $y = J_n(\lambda x), n \geq 0$. Sada granični uslov se svodi na $J_n(\lambda b) = 0$, a pošto ova jednačina ima konačan broj pozitivnih korena $x_1, x_2, \ldots$, stoga su nule od $J_n(\lambda b)$: $\lambda_1 = \frac{x_1}{b}, \lambda_2 = \frac{x_2}{b}, \ldots$. Kako je $p(0) = 0$ i $W(b) = 0$ imamo singularan Sturm-Liouvilleov sistem. Sopstvene vrednosti su ${\lambda_i}^2$, a odgovarajuće sopstvene funkcije su $J_n(\lambda_i x)$. Na osnovu Teoreme 2.6.5. funkcije $J_n(\lambda_i x)$ čine ortogonalni skup na intervalu $[0, b]$ u odnosu na funkciju težine $r(x) = x$:

$$\int_0^b x J_m(\lambda_i x) J_n(\lambda_i x) dx = 0,\quad m \neq n.$$

Primena

Besselove funkcije su veoma bitne kod rešavanja problema širenja talasa. U cilindričnim objektima, koristimo Besselove funkcije reda $n,\ \ n \in \mathbb{N}$, a kod sfernih problema reda $n + \frac{1}{2},\ \ n \in \mathbb{N}$. Besselove funkcije imaju korisnu primenu i pri obradi signala.

Literatura

[1] Brand,Louis: Differential and difference equations,New York,1966.

[2] B.M.Mohan, Sanjeeb Kumar Kar: Orthogonal functions approach to optimal control of delay systems with reverse time terms, Kharagpur, 2010.

[3] G. Sansone: Orthogonal functions, New York, 1959.

[4] Gerald B. Folland: Fourier Analysis and its applications, Pacific Grove, 1992.

[5] Harry F. Davis: Fourier series and orthogonal functions, New York, 1963.

[6] Javier Duoandikoetxea: Fourier analysis, Madrid, 1995.

[7] M. J. Lighthill: Introduction to Fourier analysis and generalised functions, Cambridge Universitz Press, 1958.

[8] Manuel D. de la Iglesia: Some examples of matrix-valued orthogonal functions having a differential and integral operator as eigenfunctions, New York, 2010.

[9] Nenad Teofanov: Primenjena analiza, Novi Sad 2000.

[10] Salih Suljagić: Matematika III., Zagreb, 2001.

[11] Stevan Pilipović: Funkcionalna analiza, Novi Sad, 2000.

[12] V. Lakshmikantham, Donatao Trigiante: Theory of difference equations: Numerical methods and applications, New York,1988.

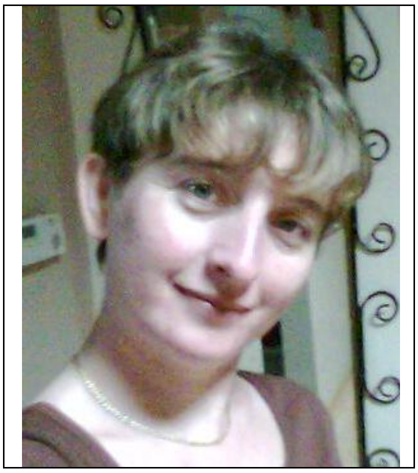
[13] V. Lakshmikantham, S. Leela: Differential and integral inequalities,New York and London, 1969.

[14] Vojislav Marić , Mirko Budinčević: Diferencijalne i diferencne jednačine,Novi Sad,2005..

[15] William E. Boyce, Richard C. DiPrima: Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, New York, 1986.

[16] www.wikipedia.org

Biografija



Tamara Đurić, rođena 01.02.1976 u Bečeju. Osnovnu školu " Petefi Šandor" završila u Bečeju sa diplomom Mihajlo Petrovič-Alas. Gimnaziju Bečej , prirodno-matematički smer, završila u Bečeju sa Vukovom diplomom. Upisala Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu 1999. godine, kad je i zamrzla studije, zbog porodičnih obaveza. 2006. godine se upisuje ponovo, kao redovan student i 2010. godine završava osnovne studije prosekom 9.61. Iste godine upisuje master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu, koje 2011.godine završava prosekom 9.47. Od januara 2011. redovan profesor matematike u Gimnaziji Bečej.

Novi Sad, *septembar 2011.*

Ime i prezime
Tamara Đurić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Tamara Đurić

AU

Mentor: Prof. dr Mirko Budinčević

MN

Naslov rada: Rubni problemi i ortogonalne funkcije

MR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: *srpski/engleski*

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2011.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4.

MA

3/68/1/0/24/0/0

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Analiza

ND

Ključne reči: rubni problemi, ortogonalne funkcije, Fourierova analiza, sopstvene vrednosti, sopstvene funkcije

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena: nema

VN

Izvod:

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 11. Jul 2011.

DP

Datum odbrane: septembar 2011.

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: Prof. dr LjiljanaGajić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Novi Sad

Mentor: Prof. dr Mirko Budinčević, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Novi Sad

Član: Prof. dr Dušanka Perišić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Novi Sad

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE KEY
WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification umber:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master’s thesis

CC

Author: Tamara Đurić

AU

Mentor: Prof. dr Mirko Budinčević

MN

Title: Boundary values problems and orthogonal functions

XI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2011.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4.

PP

Physical description: 3/68/1/0/24/0/0

PD

Scientific field: Mathemathics

SF

Scientific discipline: Analysis

Key words: boundary problems, orthogonal funkctions, Fourier analysis,

eigenvalues, eigenfunctions

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD Note:

Abstract:

AB

Accepted by the Scientific Board on: 11. July 2011.

Defended: September 2011.

Thesis defend board:

President: Prof. dr Ljiljana Gajić, full professor, Faculty of Science and

Mathematics, University of Novi Sad

Mentor: Prof. dr Mirko Budinčević, full professor, Faculty of

Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Prof. dr Dušanka Perišić, full professor, Faculty of

Science and Mathematics, University of Novi Sad