UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Tamara Ćalić

Parcijalne reči - neka pitanja i osobine

- Master rad -

Novi Sad, 2019.

Predgovor

Glavna motivacija za uvođenje parcijalnih reči došla je iz molekularne biologije nukleinskih kiselina. Tamo se između ostalog proučavaju svojstva lanca DNK i RNK. Zavojnica DNK je sastavljena u okviru alfabeta $\{A, T, C, G\}$, a zavojnica RNK u okviru alfabeta $\{A, U, C, G\}$. Poznato je da je transkripcija proces pretvaranja DNK u iRNK. Do transkripcije dolazi tako što enzim Polimeraza rasplića zavojnicu DNK, gde jedan lanac služi kao kalup prema kome se ređaju komplementarni nukleotidi uvek istim pravilom A sa T (odnosno A sa U kod RNK) i C sa G. Ovako dobijena nit iRNK predstavlja šablon na osnovu kog će organizam sintetisati protein. Potom se na ovu nit iRNK veže ribozom koji čita kod u iRNK da bi se proizveo lanac aminokiselina. Sa iRNK se čita po tri baze istovremeno i svaki ovaj triplet odgovara jednoj od 20 aminokiselina koje nakon svakog očitavanja donosi tRNK i tako produžava niz sve dok se ne sintetiše željeni protein.

Prilikom transkripcije može doći do pogrešnog uparivanja nukleotida na primer U sa G, G sa U, kao što je i prikazano ispod:

$$\cdots \begin{matrix} A\,U\,G\,\mathbf{U}\,A\,C\,A\,G\,U\,G\,U\,\mathbf{U}\,A\,U\,C\,G \\ T\,A\,C\,\mathbf{G}\,T\,G\,T\,C\,A\,C\,A\,\mathbf{G}\,T\,A\,G\,C \end{matrix} \cdots$$

Pretpostavljanje savršenog uparivanja nukleotida je pretpostavljanje idealnog sveta. U stvarnosti komplement često nije potpuno savršen. Međutim i dalje želimo da osobine jednog takvog niza izrazimo što je više moguće konciznije. U tom cilju izgleda kao verovatan izbor da razmatramo pozicije kao nepoznate ili rupe.

U datom primeru mi bismo iRNK razmatrali kao reč sastavljenu od odelova $...AUG, ACAGUGU, AUCG...$ sa jednom rupom između svakog od delova. Stoga, intuitivno, parcijalana reč je veoma nalik konvencionalnoj reči, samo što na nekim pozicijama ne znamo koje slovo ona ima.

Dakle, molekularna biologija je stimulisala znatan interes za studije parcijalnih reči gde nizovi mogu sadržati izvestan broj ”ne znam” simbola odnosno ”rupa”.

Pregled rada

Neka je zadat skup Σ koji nazivamo alfabet, njegove elemente nazivamo slova, a konačne nizove slova nazivamo reči. Definicija reči može se proširiti i na beskonačne nizove slova i tada govorimo o beskonačnim rečima. Parcijalne reči definišemo kao reči koje umesto slova na nekim mestima mogu imati ”zamrljane” simbole, tj. pozicije na kojima slovo koje se tu nalazi nije poznato (formalnije, parcijalna reč se može definisati kao parcijalna funkcija koja preslikava skup pozicija, tj. $\{1, 2, ...n\}$ ako je reč dužine n u skup Σ), takve pozicije nazivamo rupama i u zapisu reči ih obeležavamo sa $\diamond$.

Rad će se sastojati od nekoliko odeljaka. Prvi odeljak biće uvodnog tipa: u njemu će biti definisane parcijalne reči i drugi pojmovi koji će biti nadalje potrebni i biće pokazana neka jednostavna uvodna tvrđenja.

U drugom odeljku biće razmatrano pitanje komutativnosti parcijalnih reči. Dva glavna rezultata ovog odeljka biće tri ekvivalentna uslova za komutiranje dve parcijalne reči sa ukupno najviše jednom rupom, kao i određeno proširenje ovog tvrđenja i na slučaj kada reči mogu imati više rupa.

U trećem odeljku biće razmatrano pitanje konjugovanosti parcijalnih reči i biće pokazane neke teoreme koje bliže određuju pod kojim uslovima su dve parcijalne reči međusobno konjugovane.

U četvrtom odeljku biće razmatrane kvadratno slobodne parcijalne reči. Biće dokazano da postoji beskonačno mnogo ternarnih beskonačnih parcijalnih reči koje ne sadrže nijedan kvadrat osim $\diamond a$ i $a\diamond$, zatim da postoji beskonačna reč nad osmoelementnim alfabetom koja ostaje netrivijalno kvadratno slobodna parcijalna reč čak i nakon ubacivanja proizvoljnog broja rupa i pokazaće se da je kardinalnost 8 minimalna moguća kardinalnost alfabeta potrebna za konstrukciju reči sa ovom osobinom. (Pritom prilikom ubacivanja rupa postavljamo restrikciju da između svake dve rupe moraju postojati bar dva poznata slova-tzv. 2-validna ubacivanja-jer u suprotnom problem nema smisla.)

U petom odeljku biće razmatrane parcijalne reči koje ne sadrže preklapanja. Biće pokazan niz tvrđenja na ovu temu, verovatno najkompleksnije od kojih je konstrukcija beskonačnih reči nad petoelementnim alfabetom koja ne sadrži preklapanja nakon proizvoljnog 2-validnog ubacivanja rupa (prethodno će se pokazati i da takva konstrukcija nije moguća nad četvoroelementnim alfabetom, tj. 5 je minimalna moguća kardinalnost).

Zahvalnosti

Veliku zahvalnost dugujem mom mentoru dr Bojanu Bašiću, kako za nesebičnu pomoć pri izboru teme i pisanja rada tako i za svo preneto znanje tokom mog studiranja. Takođe se zahvaljujem i članovima komisije, dr Borisu Šobotu i docentu Anni Slivkovoj na dragocenim predavanjima i učešću u izradi rada.

Najviše želim da se zahvalim mojim roditeljima Draganu i Duški, bratu Borislavu, mom Draganu, babi i dedi i svim mojim prijateljima koji su me podržavali i verovali u mene svih ovih godina.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

U ovom poglavlju uvodimo glavne definicije, pojmove i oznake koje ćemo koristiti u celom radu.

Kada govorimo o "reči" mislimo na niz slova uzetih iz konačnog nepraznog alfabeta Σ (alfabet reči w obeležavamo sa $alph(w)$). Skup svih nepraznih reči nad Σ obeležavamo sa Σ^+, a skup svih reči nad Σ konačne dužine obeležavamo sa Σ^*. Dužinu reči $w \in \Sigma^*$ tj. broj njenih slova obeležavamo sa $|w|$. Sa λ obeležavamo praznu reč odnosno reč dužine 0. Sama reč bez ikakvih dodatnih osobina, odnosiće se na potpunu reč.

Prvo ćemo dati definiciju parcijalne funkcije koja nam je potrebna za definisanje parcijalnih reči.

Definicija 1.0.1. Parcijalna funkcija $f : X \to Y$ je funkcija $f : X' \to Y$ gde je $X' \subset X$.

Sada dajemo definiciju parcijalne reči.

Definicija 1.0.2. Parcijalna reč w dužine n nad alfabetom Σ je parcijalna funkcija:

$$w : \{0, ..., n-1\} \to \Sigma.$$

Sa $D(w)$ označavaćemo domen reči w, $w[i]$ koristićemo kao oznaku za slovo reči w na poziciji i, a $w[i, ..., j]$ gde je $0 \leq i < j \leq |w| - 1$ kao oznaku za deo reči w od pozicije i do pozicije j.

Definicija 1.0.3. Pozicije na kojima $w[n]$ nije definisano za $n < |w|$ nazivaju se rupe (praznine) reči. Brojevi iz skupa $\{0, ..., |w| - 1\} \setminus D(w)$ čine skup rupa od w koji obeležavamo sa $Hole(w)$.

Definicija 1.0.4. Za parcijalnu reč w definišemo njenog pratioca kao potpunu reč $w_\diamond$ nad proširenim alfabetom $\Sigma \cup \{\diamond\}$ gde je:

$$w_\diamond = \begin{cases} w[i] & \text{ako } i \in D(w) \\ \diamond & \text{ako } i \notin D(w) \land 0 \leq i < |w|. \end{cases}$$

Mi ćemo umesto parcijalna reč sa pratiocem $\diamond a \diamond b$ govoriti samo parcijalna reč $\diamond a \diamond b$.

Primer 1.0.5. *Potpuna reč* $w_\diamond = ad\diamond\diamond\diamond acd$ *je parcijalna reč* w *dužine 8 sa skupom rupa* $\{2, 3, 4\}$.

Ako za neko $k < |w|$ važi da je $u = w[0, ..., k]$ tada kažemo da je u prefiks od w i pišemo $u \sqsubseteq_p w$. Prefiks je pravi ukoliko je $u \neq w$. u je faktor reči w, što zapisujemo $u \sqsubseteq w$, ako je za $i \leq j < |w|$, $u = w[i, ..., j]$. Faktor je pravi ako je $i \neq 0$ ili $j \neq |w| - 1$. Ako je $j = |w| - 1$ onda je u sufiks od w, što pišemo $u \sqsubseteq_s w$.

Neka je $w = w[0, 1, ..., |w| - 1]$, sa w^R označavamo njen preokret, tj. reč $w^R = w[|w| - 1, ..., 0]$. Ukoliko je $w = w^R$ reč zovemo palindrom. Na primer reči: oko, melem, neven su primeri palindroma.

Definicija 1.0.6. Faktorizacija reči w je niz reči $w_1, w_2, ..., w_n$ tako da je $w = w_1 w_2 ... w_n$. Ako su svi faktori uzeti iz skupa reči W, onda se takva faktorizacija zove $W-$faktorizacija.

Definicija 1.0.7. Kaže se da je potpuna reč w $k-$periodična ako za svako $i, j \in D(w)$ važi:

$$i \equiv j (\text{mod } k) \implies w[i] = w[j].$$

Sada dajemo definiciju k-periodičnosti parcijalnih reči.

Definicija 1.0.8. Kaže se da je parcijalna reč w $k-$periodična ako za svako $i, j \in D(w)$ važi:

$$i \equiv j (\text{mod } k) \implies w[i] = w[j].$$

Primer 1.0.9. *Parcijalna reč* w *sa pratiocem* $w_\diamond = cd\diamond c\diamond ecde$ *je* $3-$*periodična.*

Definicija 1.0.10. Parcijalna reč w je lokalno $k-$ periodična ako za svako $i \in D(w)$:

$$i, i + k \in D(w) \implies w[i] = w[i + k].$$

Primer 1.0.11. *Reč* $w = ceac\diamond acf$ *je lokalno* $3-$*periodična osim kada je na pozicijama 1 i 7 isto slovo u tom slučaju ta reč je* $3-$*periodična.*

Posmatrajmo parcijalnu reč $c\diamond d$ očigledno je da je ona lokalno $1-$periodična dok globalno ona ima period 3. Dakle, za parcijalne reči dva pojma lokalne i globalne periodičnosti se ne podudaraju.

Sa $p(w)$ označavamo minimalni period reči w, a sa $P(w)$ skup svih njenih perioda.

Definicija 1.0.12. Za dve parcijalne reči x i y koje su iste dužine, kažemo da se x sadrži u y što zapisujemo $x \subset y$, ako je $D(x) \subset D(y)$ i $x[k] = y[k]$ za svako $k \in D(x)$.

Definicija 1.0.13. Dve reči x i y su kompatibilne što pišemo $x \uparrow y$, ako postoji reč z koja sadrži i x i y.

Najmanju reč koja sadrži i x i y obeležavamo sa $x \vee y$, najmanja reč znači da je njen domen:

$$D(x \vee y) = D(x) \cup D(y).$$

Primer 1.0.14. *$u = \diamond cd\diamond a$ i $v = c\diamond\diamond ba$ su dve parcijalne reči koje su kompatibilne sa $w = ccdba$.*

Sledeća pravila su prilično očigledna i mogu biti data bez ikakvog dokaza:

1. $x \uparrow z, y \uparrow t \Rightarrow xy \uparrow zt$ (*množenje*)
2. $xy \uparrow zt, |x| = |z| \Rightarrow x \uparrow z$ i $y \uparrow t$ (*uprošćavanje*)
3. $x \uparrow y, z \subset x \Rightarrow z \uparrow y$ (*slabljenje*).

U nastavku ova pravila koristimo bez daljih napomena.

Često se dešava da zamenimo pojam jednakosti sa kompatibilnošću. Glavna razlika između jednakosti i kompatibilnosti je da kompatibilnost nije tranzitivna.

Posmatrajmo sada sistem jednačina:

$$u = v$$
$$v = w$$
$$u = w$$

i sistem kompatibilnosti:

$$u \uparrow v$$
$$v \uparrow w$$
$$u \uparrow w.$$

Jednakosti jasno nisu nezavisne zato što $u = v$ i $v = w$ uvek implicira $u = w$. Nasuprot tome $u \uparrow v$ i $v \uparrow w$ ne podrazumeva $u \uparrow w$. Pokažimo to primerom:

Primer 1.0.15. *Neka je $u = \diamond bc\diamond b$, $v = bbcb\diamond$ i $w = bbcba$. Vidimo da je $u \vee v = v$ i $v \vee w = w$, ali u i w su definisani različitim slovom na poslednjoj poziciji i stoga su inkompatibilni.*

1.1 Primitivnost parcijalnih reči

Primitivnost je jedna od najfundamentalnijih osobina reči koje su istraživane u kombinatorici na rečima. Igra centralnu ulogu u mnogim kombinatoričkim razmatranjima reči, posebno u algebarskoj teoriji kodova.

Definicija 1.1.1. Reč u je primitivna, ako ne postoji ni jedna reč v tako da je $u = v^n$ za neko $n \geq 2$.

Definicija 1.1.2. Parcijalna reč u je primitivna, ako ne postoji ni jedna reč v tako da je $u \subset v^n$ za neko $n \geq 2$.

Teorema 1.1.3. *([12])Za bilo koju nepraznu reč w postoji jedinstvena primitivna reč p i jedinstven prirodan broj n tako da je $w = p^n$.*

Teorema 1.1.4. *Ako je w neprazna parcijalna reč onda postoji primitivna reč p i prirodan broj n tako da je $w \subset p^n$.*

Dokaz. Ovu teoremu dokazujemo indukcijom po dužini reči w.

1. Baza indukcije. Za dužinu 1 sve reči zajedno sa $\diamond$ su primitivne, jer ne postoji reč v tako da je $w \subset v^n$, za $n \geq 2$.

2. Indukcijska hipoteza. Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za sve reči koje su kraće od w.

3. Indukcijski korak. Pokažimo da tvrđenje važi i za reč w. Razlikujemo dva slučaja:

   1^o Ako je w primitivna reč onda na primer postavka $p = w$ pokazuje istinitost teoreme.

   2^o Ako w nije primitivna reč tada na osnovu definicije primitivnosti postoji neka parcijalana reč u tako da je $w \subset u^k$ za $k > 1$. Kako je reč u kraća od reči w jer je $k \geq 2$ na osnovu induktivne hipoteze postoji primitivna reč q tako da je $u \subset q^l$ za neko l. Pa sledi da je $w \subset u^k \subset q^{kl}$ što je i trebalo da se pokaže.

□

Ovde primitivna reč p generalno nije jedinstvena.

Primer 1.1.5. *Reč bba⋄b⋄bba⋄b⋄ se sadrži i u $(bba)^4$ i $(bbaabb)^2$, a kako su i bbaabb i bba primitivne ovaj primer ilustruje da stepen nije jedinstven.*

Teorema 1.1.6. *([12])Za dve različite primitivne reči p i q i $m, n \geq 2$ sve reči oblika $p^m q^n$ su primitivne.*

Definicija 1.1.7. Punktiranje reči w je skup svih reči koje su sadržane u w ili skup svih reči koje možemo dobiti od w stavljanjem rupa u original tj.:

$$w^{\diamond} = \{u : u \subset w\}.$$

Jedna zanimljiva osobina primitivnih reči navedena je u sledećoj lemi i može se upotrebiti za testiranje date reči na primitivnost.

Lema 1.1.8. *([3]) Parcijalna reč w sa jednom rupom je primitivna ako i samo ako je $ww \uparrow uwv$ za neke parcijalne reči u i v za koje važi da je $u = \lambda$ ili $v = \lambda$.*

Lema 1.1.9. *([12])Za neku reč w za koju važi da je $|alph(w)| \geq 2$ i bilo koje slovo a bar jedno od w i wa je primitivno.*

Potpuna analogija važi za parcijalne reči koje sadrže najviše jednu rupu. Za parcijalne reči sa više rupa ni jedan rezultat nije poznat.

Lema 1.1.10. *([3])Za neku parcijalnu reč w sa jednom rupom za koju važi da je $|alph(w)| \geq 2$ i bilo koje slovo a najmanje jedno od w i wa je primitivno.*

Lema 1.1.11. *Za neku reč w i za neka dva slova a i b najmanje jedno od wa i wb je primitivno.*

Dokaz. Dokaz sledi direktno primenom leme 1.1.10. □

Lema 1.1.12. *([3])Za parcijalnu reč w sa jednom rupom, ali ne oblika $u\diamond u$ za bilo koju reč u, i za neka dva slova a i b najmanje jedno od wa i wb je primitivno.*

Koren reči w obeležavamo sa $\sqrt{w}$, to je primitivna reč p za koju važi da $w \in p^+$.
Stepen neprazne reči w je ceo broj n koji obeležavamo sa $degw$ i za njega važi da je $w = \sqrt{w}^n$.

Lema 1.1.13. *([12]) Ako za dve neprazne reči u i v važi da je $uv = vu$ onda su koreni od u i v jednaki.*

Teorema 1.1.14. *([11]) Neka su u i v neke reči. Onda je $u^k = v^l$ za neke prirodne brojeve k, l ako i samo ako postoji reč w, takva da je $u = w^m$ i $v = w^n$, za neke prirodne brojeve m i n.*

Teorema 1.1.15. *([11]) Neka su u i v neke reči. Onda je $uv = vu$ ako i samo ako postoji reč w, tako da je $u = w^m, v = w^n$, za neke prirodne brojeve m i n.*

Teorema 1.1.16. *([11]) Neka su u, v, z neke reči. Ako je $uz = zv$ onda postoje reči x i y tako da je $u = xy$, $v = yx$ i $z = (xy)^n x, n \geq 0$.*

1.2 Fajnova i Vilfova teorema

Najpoznatiji i u isto vreme fundamentalni rezultat koji se bavi periodičnošću je sledeća teorema koja za svoj originalni oblik duguje Fajnu i Vilfu.

Teorema 1.2.1. *([11])Ako reč w ima periode k i l i ima dužinu bar $k+l-NZD(k,l)$ onda je i $NZD(k,l)$ period reči w.*

Teorema 1.2.2. *(Fajnova i Vilfova teorema) Neka je w parcijalna reč sa jednom rupom. Ako je w lokalno $k-$periodična i lokalno $l-$periodična i ako je $|w| \geq k+l$ onda je w i $NZD(k,l)-$periodična.*

Dokaz. Razmotrićemo samo slučaj kada je $|w| = k + l$ zato što za duže w sledi da tvrđenje važi za svaki faktor dužine $k + l$ pa stoga i za celu reč w. Razlikujemo 2 slučaja:

1^o k i l su uzajamno prosti. Neka je $k < l$. Posmatraćemo funkciju f koja preslikava svako $n \in \{0, ..., k-1\}$ u ostatak broja $n+l$ pri deljenju sa k tj. $f(n) \equiv n + l(\text{mod } k)$. Tada je $f^2(n) \equiv f(n) + l \equiv n + l + l \equiv n + 2l(\text{mod } k)$. Očigledno je:

$$f^i(n) \equiv n + il(\text{mod } k) \text{ , za sve } n \in \{0, .., k-1\} \text{ i } i \geq 0.$$

Stoga je:

$$f^k(n) = n \text{ i } f^i(n) \neq f^j(n) \text{ za } 0 \leq i < j \leq k$$

i za svako $n \in \{0, .., k-1\}$ imamo:

$$\{n, f(n), f^2(n), ..., f^{k-1}(n)\} = \{0, ..., k-1\}.$$

Uvešćemo notaciju za skup koji je podskup skupa $\{0, ..., k+l-1\}$ koji definišemo kao:

$$P(n) := \{n, n+l, n+l-k, n+l-2k, ..., f(n)\}.$$

Do ovog dela je isti dokaz za potpune reči. Sada nam je potreban dodatni korak. Prisećamo se prvo da w ima samo jednu rupu. Neka pozicija te rupe bude $\sigma \geq 0$, tj. $w[\sigma]$ je nedefinisano. Ako σ nije u $P(n)$ onda je $w[n] = w[f(n)]$ zato što lokalna $k-$perodičnost implicira:

$$w[n+l] = w[n+l-k] = ... = w[f(n)].$$

Skupovi $P(n) \setminus \{n\}$ formiraju particiju skupa $\{0, ..., k + l - 1\}$. To znači da rupa u σ pripada tačno jednom od $P(n) \setminus \{n\}$ i stoga najviše dvoma $P(n)$. Ovde razlikujemo 2 slučaja:

1^* Ako je $0 \leq \sigma \leq k - 1$ onda je σ u $P(\sigma)$, a takođe i u $P(m)$, gde je $f(m) = \sigma$. Kako je $f^{k-1}(\sigma) = m$ imamo da je $w[f(\sigma)] = w[f^2(\sigma)] = w[f^{k-1}(\sigma)]$. To znači da je parcijalna reč $w[0, .., k - 1]$ $1-$periodična i označimo njeno slovo sa a. Dokažimo sada da je i cela reč w $1-$periodična, tj. dokažimo da se na svim pozicijama nalazi slovo a. Označimo sa $rest(i, k)$ ostatak pri deljenju i sa k. Razlikujemo 2 slučaja:

$i)$ $rest(i, k) = t \neq \sigma$, tada je jasno $w[i] = w[t]$.

$ii)$ $rest(i, k) = \sigma$, tada je $w[i] = w[m] = a$.

Dakle, reč w je $1-$ periodična sa slovom a.

2^* Ako je $k \leq \sigma \leq k + l - 1$ onda je σ u $P(j)$ gde $j + l \equiv \sigma (\text{mod } k)$. Ovde je $w[f(j)] = w[f^2(j)] = w[f^k(j)]$ pa sledi da je reč $w[0, .., k - 1]$ potpuna i stoga je cela reč w $1-$periodična.

2^o k i l nisu uzajamno prosti. Neka je $d = NZD(k, l) > 1$. Sa $n' = \frac{|u|}{d}$ definišemo d parcijalnih reči kao:

$$w^{(k)} = w[k]w[k + d]...w[k + (n' - 1)d]$$

za $k \in \{0, ..., d - 1\}$. Postavljajući $k' = \frac{k}{d}$ i $l' = \frac{l}{d}$, (oba su celi brojevi, zato što i d i l dele k) svako od $w^{(k)}$ je lokalno $k'-$periodično i lokalno $l'-$periodično. Svi imaju dužinu $n' = k' + l'$ i $1-$periodični su kao što je gore pokazano. Odatle sledi da je w $d-$periodično.

□

Primer 1.2.3. *Posmatrajmo parcijalnu reč* $bababab a\diamond a$. *Ona ima dužinu 10, periode 4 i 6, ima 1 rupu i još je* $2-$*periodična.*

Primer 1.2.4. *Prethodno tvrđenje ne važi za reči sa dve rupe. Posmatrajmo reč:*

$$babbab\diamond\diamond b$$

Ova reč ima dužinu 9, periode 3 i 5 i ima dve rupe, ali nije $1-$*periodična.*

Primer 1.2.5. *Posmatrajmo sada reč:*

$$x_{\diamond}^m = (ab)^m \diamond (ab)^m a \diamond (ba)^m$$

Ona je dužine $6m + 3$, *ima periode* $2m + 1$ *i* $2m + 3$, *ali nije* $1-$*periodična.*

Ovaj rezultat je proširen i na parcijalne reči sa 2 ili 3 rupe i konačno na oblik bez ograničenja broja rupa. Predstavljamo sve te rezultate bez dokaza.

Definicija 1.2.6. Neka parcijalna reč w je $(2, k, l)$ posebna za prirodne brojeve k i l gde je $k < l$, ako važi bar jedno od sledećeg:

(i) $l = 2k$ i postoji neko i tako da je $k \leq i < |w| - 2l$ i $i + k, i + l \in Hole(u)$.

(ii) Postoji neko i tako da je $0 \leq i \leq k$ i $i + k, i + l \in Hole(u)$.

(iii) Postoji neko i tako da je $|w| - k \leq i < |w|$ i $i - k, i - l \in Hole(u)$.

Uslovi za $(3, k, l)$ posebnost su još složeniji i sastoje se od 6 različitih slučajeva.

Teorema 1.2.7. *([5])Neka su k i l prirodni brojevi za koje važi da je $k < l$, tada je:*

(i) Parcijalna reč u sa dve rupe je $NZD(k, l)-$periodična ako je lokalno k i l periodična i nije $(2, k, l)$ posebna i za njenu dužinu važi da je $|u| \geq 2(k + l) - NZD(k, l)$.

(ii) Parcijalna reč u sa tri rupe je $NZD(k, l)-$periodična ako je lokalno k i l periodična i nije $(3, k, l)$ posebna, a za njenu dužinu važi $|u| \geq 2(k + l)$.

Sada dajemo uopštenu verziju prethodno navedene Fajn i Vilfove teoreme.

Teorema 1.2.8. *([2])Neka su k i l pozitivni celi brojevi tako da je $k < l$. Ako je w parcijalna reč koja nije $(|Hole(w)|, k, l)$ posebna, a lokalno je k i $l-$periodična i ako $|w| \geq l$ onda je w $NZD(k, l)-$periodična.*

1.3 Još neki rezultati

Lema 1.3.1. *Za bilo koje $u \in \Sigma^*$ reč uu^R je neprimitivni palindrom ako i samo ako je u ili palindrom ili ima period $2n$ i dužinu deljivu sa n za neko $n \leq |u|$ tako da je $u[1, 2, ..., 2n]$ palindrom.*

Dokaz. ($\Leftarrow$) Pretpostavimo prvo da je u ili palindrom ili ima period $2n$ i dužinu deljivu sa n za neko $n \leq |u|$, tako da je $u[1, 2, .., 2n]$ palindrom. Sada želimo da pokažemo da je reč uu^R neprimitivni palindrom.

1^o Ako je reč u palindrom tada je $u = u^R$ pa je $uu^R = uu = u^2$, dakle uu^R je neprimitivno.

2^o Neka sada reč u ima period $2n$ i dužinu deljivu sa n, za $n \leq |u|$, tako da je $u[1, 2, ..., 2n]$ palindrom. Želimo da pokažemo da je uu^R palindrom. Kako je $u[1, 2, ..., 2n]$ palindrom, tada je njegova druga polovina jednaka njegovoj okrenutoj prvoj polovini tj. $u[1, 2, ..., 2n] = u[1...n]u[1...n]^R$ pa je uu^R palindrom jer je $u[1, 2...2n]$ palindrom.

(⇒) Pretpostavimo sada da je uu^R neprimitivni palindrom. Razlikujemo opet dva slučaja:

1^o Stepen od uu^R je paran. Neka je $uu^R = t^{2k} = (t^k)^2 = t^k t^k$, pa je $u = t^k$ i $u^R = t^k$ dakle, $u = u^R$, pa je u palindrom.

2^o Stepen od uu^R je neparan. Stavimo da je $p = \sqrt{uu^R}$ i stavimo da je $p = xy$ tako da je $|x| = |y| = \frac{|p|}{2}$. S obzirom da se reč u završava sa x, a u^R počinje sa y dobijamo da je $x = y^R$ odnosno, $y = x^R$ pa je $p = xx^R$ odavde sledi da je p palindrom. Stavimo da je $n = \frac{|p|}{2}$ pa je tada $p = u[1, 2, ..., 2n]$ palindrom.

□

Drugа klasa reči koje su interesantne u kombinatorici reči su neograničene reči.

Definicija 1.3.2. Parcijalna reč u je ograničena ako postoje neprazne parcijalne reči r, s, t tako da je $u \subset rs$ i $u \subset tr$, u suprotnom reč je neograničena.

Teorema 1.3.3. *([9])Neprazna reč je neograničena ako i samo ako je njen minimalni period jednak njenoj dužini.*

Potpuno isto tvrđenje važi i za parcijalne reči.

Teorema 1.3.4. *([3])Neprazna parcijalna reč je neograničena ako i samo ako je njen minimalni period jednak njenoj dužini.*

Dokaz. (⇒) Neka je w neka neograničena parcijalna reč i $p(w) < |w|$. Ako je $|w|$ sadržalac od $p(w)$, onda prva i poslednja $p(w)$ slova od w su kompatibilna i formiraju preklapanje što je u kontradikciji sa neograničenosti od w. Inače ista kontradikcija pojavljuje se od prvih i poslednjih $|w| \text{mod} p(w)$ slova od w. Tako su ova dva slučaja nemoguća za neograničeno w. Dakle, $|w|$ mora biti jednako $p(w)$.

(⇐) Neka je u neprazna parcijalna reč i neka je minimalni period reči u jednak njenoj dužini. Pretpostavimo suprotno da je reč u ograničena, što znači da postoje neprazne parcijalne reči r, s, t tako da je $u \subset rs$ i $u \subset tr$. Tada je t jedan period reči u koji je manje dužine od reči u što je u kontradikciji sa tim da je minimalni period reči u jednak njenoj dužini.

□

Dokaz je skoro isti i za potpune reči samo na jednom mestu kompatibilnost treba da bude zamenjena jednakošću.

Poglavlje 2

Komutativnost parcijalnih reči

Definicija 2.0.1. Dve parcijalne reči u i v su komutativne, ako postoji reč w tako da je $u = w^m$ i $v = w^n$, za neke prirodne brojeve m, n.

Lema 2.0.2. *(Levijeva lema). Neka su x, y, z, t parcijalne reči. Ako je $xy \uparrow zt$ i $|x| \leq |z|$, onda postoji faktorizacija reči z, $z = ps$ tako da je $x \uparrow p$ i $y \uparrow st$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $xy \uparrow zt$ i $|x| \leq |z|$, gde su x, y, z, t parcijalne reči. Neka postoji faktorizacija reči z, $z = ps$ za $|x| = |p|$. Kako je $z = ps$ i $xy \uparrow zt$ tada je i $xy \uparrow pst$. S obzirom da je $|x| = |p|$ i $xy \uparrow pst$ tada na osnovu pravila uprošćavanja dobijamo da je $x \uparrow p$ i $y \uparrow st$ što je i trebalo dokazati. $\square$

Teorema 2.0.3. *Neka su x i y parcijalne reči tako da xy ima najviše jednu rupu, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1. $xy \uparrow yx$;
2. $x \subset z^n, y \subset z^m$ *za neku reč z i prirodne brojeve n, m;*
3. $x^k \uparrow y^l$ *za neke prirodne brojeve k, l.*

Dokažimo prvo sledeću lemu koja će nam biti potrebna u dokazivanju prethodne teoreme.

Lema 2.0.4. *Neka je x parcijalna reč i neka su u i v dve potpune reči. Ako x ima samo jednu rupu i ako je $x \subset uv$ i $x \subset vu$ onda je $uv = vu$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $|u| \leq |v|$ i neka je tada $v = u'v'$ za $|u'| = |u|$. Dalje, neka je $x = yz$ za $|y| = |u|$. Kako su u, v potpune reči i $v = u'v'$ tada su i u', v' potpune reči, a kako je x parcijalna reč tada je i yz parcijalna reč. S obzirom da je $x \subset uv$, tj. $yz \subset uv$ sledi da je $y \subset u$ i $z \subset v$. Sa druge strane kako je $x \subset vu$, tj. $yz \subset vu = u'v'u$ sledi da je $y \subset u'$ i $z \subset v'u$. Kako reč x, $x = yz$, ima samo jednu rupu tada razlikujemo dva slučaja:

1^o y nema rupu, a z ima jednu rupu. Kako je y potpuna reč i $y \subset u'$ i $y \subset u$ tada je $y = u, y = u'$. Sa druge strane znamo da je z parcijalna reč, tada ostaje da je $z \subset v = uv', z \subset v'u$. Dokaz dalje dajemo indukcijom po dužini reči x.

1. Baza indukcije. Za $|x| = 1$ tvrđenje trvijalno sledi.
2. Indukcijska hipoteza. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve reči kraće od reči x.
3. Indukcijski korak. Pokažimo da tvrđenje važi i za reč x.

Kako je $z \subset uv'$ i $z \subset v'u$ i reč z je kraća od reči x, na osnovu indukcijske hipoteze važi da je $uv' = v'u$, odakle je:

$$uv = uuv' = uv'u = vu.$$

2^o z nema rupu, y ima jednu rupu. Kako je z potpuna reč i $z \subset v$, $z \subset v'u$, sledi da je $z = v = u'v', z = v'u$. Sa druge strane kako je y parcijalna reč tada ostaje da je $y \subset u'$ i $y \subset u$. Pošto su u, u' i v' potpune reči i $u'v' = v'u$, onda po teoremi 1.1.16 postoje reči s i t tako da je $u = st$, $u' = ts$ i $v' = (ts)^n t$ za neko $n \geq 0$. Dokaz dalje nastavljamo indukcijom po dužini reči x.

1. Baza indukcije. Za $|x| = 1$ tvrđenje trivijalno sledi.
2. Indukcijska hipoteza. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve reči kraće od reči x.
3. Indukcijski korak. Pokažimo da tvrđenje važi i za reč x.

Kako je $y \subset u = st$ i $y \subset u' = ts$ i reč y je kraća od reči x, na osnovu indukcijske hipoteze dobijamo da je $st = ts$, odakle je:

$$uv = uu'v' = stts(ts)^n t = tsts(ts)^{n-2}tstst = (ts)^n tstst = v'uu = vu.$$

$\square$

Dokaz. (Dokaz teoreme 2.0.3.) (1. $\Rightarrow$ 2.) Pretpostavimo prvo da su x i y parcijalne reči, xy ima najviše jednu rupu i $xy \uparrow yx$. Razlikujemo 2 slučaja:

1^o Neka je $|x| = |y|$. Kako je $xy \uparrow yx$ i $|x| = |y|$ tada na osnovu pravila uprošćavanja važi da je $x \uparrow y$ i $y \uparrow x$ pa je $x \subset y$ i $y \subset x$, dakle $x = y$.

2^o Pretpostavimo sada bez umanjenja opštosti da je $|x| < |y|$. Sada na osnovu leme 2.0.2 postoji faktorizacija reči y, $y = ut$ za $|u| = |x|$, tako da je:

$$x \uparrow u \text{ i } ut \uparrow tx.$$

Kako je reč xy, $xy = xut$, parcijalna, tj. ima samo jednu rupu razlikujemo 3 slučaja :

1^* x ima rupu. Kako je $x \uparrow u$ i x je parcijalna reč sledi da je $x \subset u$ što dalje implicira da je $xt \subset ut$. Dalje, $xt \subset ut$ i $ut \uparrow tx$, tada na osnovu pravila slabljenja važi da je $xt \uparrow tx$ što dalje implicira da je $xt \subset tx$. S obzirom na to da je $x \subset u$ tada je i $tx \subset tu$ pa je $xt \subset tx \subset tu$, tj. $xt \subset tu$. Kako su u, t potpune reči, x parcijalna reč i $xt \subset tu, xt \subset ut$, na osnovu prethodne leme važi da je $ut = tu$. Tada postoji reč z tako da je $t = z^n$ i $u = z^m$ za neke prirodne brojeve m, n. Sada, $y = ut = z^n z^m = z^{n+m}$ i $x \subset u = z^m$.

2^* u ima rupu. Ovaj slučaj je analogan prethodnom.

3^* t ima rupu. Kako je t parcijalna reč tada su reči x i u potpune, pa nam $x \uparrow u$ daje da je $x = u$. Kako je $ut \uparrow tx$ i $x = u$ sledi da je $xt \uparrow tx$. Dokaz dalje nastavljamo indukcijom po dužini reči y.

1. Baza indukcije. Za $|y| = 1$ ovaj slučaj je trivijalan.
2. Indukcijska hipoteza. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve reči kraće od y.
3. Indukcijski korak. Pokažimo da tvrđenje važi i za reč y.

Kako je $xt \uparrow tx$, xt ima samo jednu rupu i reč t je kraća od reči y tada na osnovu indukcijske hipoteze postoji neko z tako da je $x \subset z^m$ i $t \subset z^n$, za neke prirodne brojeve m, n. Kako je $y = ut$ sledi da je $y = xt \subset z^{n+m}$.

$(2. \Rightarrow 1.)$ Kako važi 2. tada znamo da postoji neko z tako da je $x \subset z^n$ i $y \subset z^m$, za neke prirodne brojeve m i n, onda je $xy \subset z^{n+m}$, a $yx \subset z^{n+m}$. Stoga je na osnovu definicije kompatibilnosti $xy \uparrow yx$.

$(2. \Rightarrow 3.)$ Pretpostavimo da postoji reč z tako da je $x \subset z^m, y \subset z^n$, za neke prirodne brojeve m i n. Dalje, $x^n \subset z^{nm}$ i $y^m \subset z^{nm}$ pa je na osnovu definicije kompatibilnosti $x^n \uparrow y^m$, za neke prirodne brojeve m i n.

$(3. \Rightarrow 2.)$ Neka je $x^k \uparrow y^l$ za neke prirodne brojeve k, l. Neka je $p = |x|$ i $q = |y|$. Ovde razlikujemo dva slučaja:

1^o Pretpostavimo prvo da su p i q uzajamno prosti. Kako je $x^k \uparrow y^l$ tada je $kp = lq$, što implicira da p deli lq, ali kako su p i q uzajamno prosti onda p deli l, pa je $l = pl'$ za neki ceo broj l'. Slično dobijamo da je $k = qk'$ za neki ceo broj k'. Odavde lako možemo proveriti da je $x^q \uparrow y^p$. Neka $i \in D(x)$, kako je x dužine p tada svi brojevi $i, i+p, ..., i+(q-1)p$ pripadaju $D(x^q)$. Očigledno je da je na svim tim pozicijama isto slovo, recimo slovo a. Znamo da ti brojevi pri deljenju sa q daju ostatke $0, 1, ..., q-1$. Sada nam je cilj da pokažemo da su ti ostaci različiti i dobijamo da je $y \subset a^q$. Pa pretpostavimo da je:

$$i + \lambda p \equiv i + \mu p (\bmod q)$$

tada:

$$q \mid (i+\lambda p)-(i+\mu p)=i+\lambda p-i-\mu p=(\lambda-\mu)p$$

ali s obzirom na to da su p i q uzajamno prosti tada važi da q deli $\lambda-\mu$. Međutim kako je $\lambda-\mu<q$ sledi da je $\lambda-\mu=0$, tj. $\lambda=\mu$. Dobijamo da je $y\subset a^q$, odakle je $x\subset a^p$.

2^o Neka je sada $NZD(p,q)=d$ i $p=p'd$, $q=q'd$. Tada je $x^{q'}\uparrow y^{p'}$, a $|x^{q'}|=|y^{p'}|=p'q'd$. Definišimo za $0\leq h\leq d-1$:

$$x_h=x[h]x[h+d]...x[h+(p'-1)d]$$

$$y_h=y[h]y[h+d]...y[h+(q'-1)d].$$

Znamo da je $|x_h|=p', |y_h|=q', x_h^{q'}\uparrow y_h^{p'}$. Po prethodnom dokazu, dobijamo da postoji neko a_h tako da je $x_h\subset a_h^{p'}$ i $y_h\subset a_h^{q'}$, za neko slovo h, odakle je $x\subset(a_0...a_{d-1})^{p'}$ i $y\subset(a_0...a_{d-1})^{q'}$.

$\square$

Sada dajemo proširenje prethodne teoreme na parcijalne reči sa proizvoljnim brojem rupa. Prvo dajemo definiciju $(k,l)-$specijalnosti koja nam je neophodna za proširenje teoreme.

Definicija 2.0.5. Neka k,l označavaju dužine od x i y redom i $k\leq l$. Za $0\leq i<k+l$ definišemo niz od i u odnosu na k i l kao:

$$seq_{k,l}(i)=(i_0,i_1,...,i_n,i_{n+1})$$

gde je:

1. $i_0=i=i_{n+1}$
2. za $1\leq j\leq n, i_j\neq i$
3. za $1\leq j\leq n+1$, i_j definisan kao:

$$i_j=\begin{cases} i_{j-1}+k & \text{ako je } i_{j-1}<l \\ i_{j-1}-l & \text{inače.}\end{cases}$$

Definicija 2.0.6. Neka su k,l prirodni brojevi za koje važi da je $k\leq l$ i neka je w parcijalna reč dužine $k+l$. Kažemo da je reč w $(k,l)-$specijalna ako postoji i, $0\leq i<k$, tako da $seq_{k,l}(i)=(i_0,i_1,...,i_n,i_{n+1})$ sadrži bar dve pozicije koje su rupe od w dok $w[i_0]w[i_1]...w[i_{n+1}]$ nije $1-$periodično.

Primer 2.0.7. *Neka je $k = 3$ i $l = 9$, parcijalna reč $u = \diamond aba\diamond b\diamond bbb\diamond a$ je $(3, 9)-$specijalna, jer $seq_{3,9}(1) = (1, 4, 7, 10, 1)$ sadrži pozicije 4 i 10 koje su u $Hole(u) = \{0, 4, 6, 10\}$, a reč*

$$u[1]u[4]u[7]u[10]u[1] = a\diamond b\diamond a$$

nije $1-$periodična.

Primer 2.0.8. *Parcijalna reč $v = ab\diamond\diamond bc\diamond bc$ nije $(3, 6)-$specijalna.*

Napomena 2.0.9. Reč w je $\{k, l\}-$specijalna, ako postoji i, takvo da je $0 \leq i < k$ i $seq_{k,l}(i)$ zadovoljava uslov iz definicije 2.0.6. ili uslov da $w[i_0]...w[i_{n+1}]$ sadrži uzastopno dve pozicije koje su rupe od w. Ovaj uslov je potreban da bi se dokazalo sledeće svojstvo: ako je w parcijalna reč i u i v su potpune reči takve da je $w \subset uv$ i $w \subset vu$ i w nije $\{|u|, |v|\}-$specijalno onda je $uv = vu$.

Primer 2.0.10. *Ako je $k = 2$ i $l = 8$, onda je parcijalna reč $w = \diamond abba\diamond a\diamond bb$ $\{2, 8\}-$specijalna, jer niz $seq_{2,8}(1) = (1, 3, 5, 7, 9, 1)$ sadrži uzastopno pozicije 5 i 7 koje su u $Hole(w) = \{0, 5, 7\}$.*

Teorema 2.0.11. *Neka su u, v neprazne parcijalne reči tako da je $|u| \leq |v|$. Ako je $uv \uparrow vu$ i uv nije $(|u|, |v|)-$specijalno, onda postoji reč w tako da je $u \subset w^m$ i $v \subset w^n$, za neke prirodne brojeve m, n.*

Dokaz. Pošto je $uv \uparrow vu$ tada postoji reč x tako da je $uv \subset x$ i $vu \subset x$. Neka je $|u| = k, |v| = l$. Posmatraćemo proizvoljnu poziciju i u reči x i razmotriti 3 slučaja:

1^o $0 \leq i < k$,

2^o $k \leq i < l$

3^o $l \leq i < l+k$ (slučajevi 1^o i 3^o su simetrični kao što se vidi u postavkama $i = l+j$ gde $0 \leq j < k$).

Kako je $uv \subset x$ i $vu \subset x$ tada važi:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc}
(uv)_\diamond & u_\diamond(0) & ... & u_\diamond(k-1) & v_\diamond(0) & ... & v_\diamond(l-k-1) & v_\diamond(l-k) & ... & v_\diamond(l-1) \\
(vu)_\diamond & v_\diamond(0) & ... & v_\diamond(k-1) & v_\diamond(k) & ... & v_\diamond(l-1) & u_\diamond(0) & ... & u_\diamond(k-1) \\
(x) & x(0) & ... & x(k-1) & x(k) & ... & x(l-1) & x(l) & ... & x(l+k-1)
\end{array}$$

Neka je $l = mk + r$ gde je $0 \leq r < k$. Prvo pretpostavljamo da je $r = 0$, tj. $l = mk$.

1^o Pošto je $uv \subset x$ i $vu \subset x$ imamo:

$$
\begin{array}{ccc}
u_\diamond[i] \subset x[i] & \text{i} & v_\diamond[i] \subset x[i] \\
v_\diamond[i] \subset x[i+k] & \text{i} & v_\diamond[i+k] \subset x[i+k] \\
v_\diamond[i+k] \subset x[i+2] & \text{i} & v_\diamond[i+2k] \subset x[i+2k] \\
v_\diamond[i+2k] \subset x[i+3k] & \text{i} & v_\diamond[i+3k] \subset x[i+3k] \\
\ldots & \text{i} & \ldots \\
v_\diamond[i+(m-2)k] \subset x[i+(m-1)k] & \text{i} & v_\diamond[i+(m-1)k] \subset x[i+(m-1)k] \\
v_\diamond[i+(m-1)k] \subset x[i+mk] & \text{i} & u_\diamond[i] \subset x[i+mk]
\end{array}
$$

Neka je sada:

$$u_\diamond[i]v_\diamond[i]v_\diamond[i+k]...v_\diamond[i+(m-1)k]u_\diamond[i] = y_i.$$

Tvrdimo da je parcijalana reč y_i $1-$periodična i obeležićemo njeno slovo sa $a_i, a_i \neq \lambda$. Razlikujemo 3 slučaja:

- 1^* y_i nema rupu. Tada je jasno da je y_i $1-$periodično zbog gornje liste inkluzija.
- 2^* y_i ima jednu rupu. Neka je na primer $v_\diamond[i] = \diamond$, tada sva ostala slova moraju biti ista, jer y_i počinje i završava se sa $u_\diamond[i]$.
- 3^* y_i ima najmanje dve rupe. Tada tvrđenje opet sledi pošto uv nije $(k,l)-$specijalno.

Za $w = a_0a_1...a_{k-1}$ dobijamo da je $u \subset w$ $(|u| = k)$ i $v \subset w^m$ kao što se i želelo.

2^o Sada pretpostavljamo da je $r > 0$. Razmatramo slučajeve gde je $i < r$ i $i \geq r$.

Ako je $i < r$ onda:

$$\begin{array}{ccc}
u_\diamond[i] \subset x[i] & \text{i} & v_\diamond[i] \subset x[i] \\
v_\diamond[i] \subset x[i+k] & \text{i} & v_\diamond[i+k] \subset x[i+k] \\
v_\diamond[i+k] \subset x[i+2k] & \text{i} & v_\diamond[i+2] \subset x[i+2k] \\
v_\diamond[i+2k] \subset x[i+3k] & \text{i} & v_\diamond[i+3k] \subset x[i+3k] \\
... & \text{i} & ... \\
v_\diamond[i+(m-1)k] \subset x[i+mk] & \text{i} & v_\diamond[i+mk] \subset x[i+mk] \\
v_\diamond[i+mk] \subset x[i+(m+1)k] & \text{i} & u_\diamond[i+k-r] \subset x[i+(m+1)k] \\
u_\diamond[i+k-r] \subset x[i+k-r] & \text{i} & v_\diamond[i+k-r] \subset x[i+k-r] \\
v_\diamond[i+k-r] \subset x[i+2k-r] & \text{i} & v_\diamond[i+2k-r] \subset x[i+2k-r] \\
... & \text{i} & ...
\end{array}$$

Ako je $i \geq r$ onda:

$$\begin{array}{ccc}
u_\diamond[i] \subset x[i] & \text{i} & v_\diamond[i] \subset x[i] \\
v_\diamond[i] \subset x[i+k] & \text{i} & v_\diamond[i+k] \subset x[i+k] \\
v_\diamond[i+2k] \subset x[i+3k] & \text{i} & v_\diamond[i+3k] \subset x[i+3k] \\
v_\diamond[i] \subset x[i+k] & \text{i} & v_\diamond[i+k] \subset x[i+k] \\
... & \text{i} & ...
\end{array}$$

$$v_\diamond[i+(m-2)k] \subset x[i+(m-1)k] \quad \text{i} \quad v_\diamond[i+(m-1)k] \subset x[i+(m-1)k]$$

$$v_\diamond[i+(m-1)k] \subset x[i+mk] \quad \text{i} \quad u_\diamond[i-r] \subset x[i+mk]$$

$$u_\diamond[i-r] \subset x[i-r] \quad \text{i} \quad v_\diamond[i-r] \subset x[i-r]$$

$$v_\diamond[i-r] \subset x[i+k-r] \quad \text{i} \quad v_\diamond[i+k-r] \subset x[i+k-r]$$

$$... \quad \text{i} \quad ...$$

Ako je $i < r$ onda neka je:

$$u_\diamond[i]v_\diamond[i]v_\diamond[i+k]...v_\diamond[i+mk]u_\diamond[i+k-r]...u_\diamond[i] = y_i$$

i ako je $i \geq r$ onda neka je:

$$u_\diamond[i]v_\diamond[i]v_\diamond[i+k]...v_\diamond[i+(m-1)k]u_\diamond[i-r]...u_\diamond[i] = y_i.$$

U oba ova slučaja mi tvrdimo da je y_i $1-$periodično i obeležićemo njeno slovo sa $a_i, a_i \neq \lambda$. Razlikujemo 3 slučaja:

- 1^* y_i nema rupu. Tada je jasno da je y_i $1-$periodično zbog gornje liste inkluzija.
- 2^* y_i ima jednu rupu. Neka je $v_\diamond[i] = \diamond$, tada sva ostala slova moraju biti ista, jer y_i počinje i završava se sa $u_\diamond[i]$.
- 3^* y_i ima najmanje dve rupe. Tada tvrđenje opet sledi pošto uv nije $(k,l)-$specijalno.

Ispostavlja se da je:

$$a_j = a_{j+r} = ... \text{ za } 0 \leq j < r.$$

Neka je $w = a_0a_1...a_{r-1}$. Ako r podelimo sa k, onda $u \subset w^{k/r}$ i $v \subset w^{(mk/r)+1}$. Ako r ne podelimo sa k, onda je w $1-$periodična sa slovom a. U ovom slučaju je $u \subset a^k$ i $v \subset a^l$.

$\square$

Poglavlje 3

Konjugacija parcijalnih reči

Definicija 3.0.1. Dve parcijalne reči u i v su konjugovane, ako postoje parcijalne reči x i y tako da je $u \subset xy$ i $v \subset yx$.

Očigledno je da je konjugacija parcijalnih reči refleksivna i simetrična. Da je simetrična to je očigledno, a refleksivna je zato što uvek važi da je $u \subset \lambda u$ i $u \subset u\lambda$. Međutim sledeći primer pokazuje da konjugacija nije tranzitivna.

Primer 3.0.2. *Posmatrajmo reči $u_\diamond = a\diamond babb\diamond a, v_\diamond = \diamond b\diamond\diamond aa\diamond\diamond$ i $w_\diamond = ba\diamond bbbaa$. Stavljanjem $x_\diamond = a\diamond b$ i $y_\diamond = abb\diamond a$ dobijamo da je $u_\diamond \subset x_\diamond y_\diamond$, $v_\diamond \subset y_\diamond x_\diamond$ što pokazuje da su $u_\diamond$ i $v_\diamond$ konjugovani. Slično, stavljanjem $x'_\diamond = \diamond bbbaaa$ i $y'_\diamond = ba$ dobijamo da je $v_\diamond \subset x'_\diamond y'_\diamond$ i $w_\diamond \subset y'_\diamond x'_\diamond$ što pokazuje da su $v_\diamond$ i $w_\diamond$ konjugovani. Ali možemo da vidimo da $u_\diamond$ i $w_\diamond$ nisu konjugovani, jer počinju različitim slovima.*

Teorema 3.0.3. *Neka su u, v neprazne parcijalne reči.*

1. *Ako su u, v konjugovane, onda postoji parcijalna reč z tako da je $uz \uparrow zv$.*

2. *Neka postoji reč z tako da je $uz \uparrow zv$ i $uz \vee zv$ je $|u|-$periodično, tada postoje parcijalne reči x, y tako da je $u \subset xy, v \subset yx, z \subset x(yx)^n$ za neko $n \geq 0$.*

Dokaz. 1. Dokažimo prvo prvi deo teoreme. Znamo da su u i v konjugovane neprazne parcijalne reči tada postoje parcijalne reči x, y tako da je $u \subset xy$ i $v \subset yx$. Nas zanima da li postoji reč z tako da je $uz \uparrow zv$? Kako je $u \subset xy, v \subset yx$, tada važi da je $ux \subset xyx$ i $xv \subset xyx$. Ako stavimo da je $z = x$ pa dobijamo da je $uz \subset zyz$ i $zv \subset zyz$, odakle na osnovu definicije kompatibilnosti dobijamo da je $uz \uparrow zv$.

2. Sada dokažimo drugi deo teoreme. Neka postoji z tako da je $uz \uparrow zv$ i $uz \vee zv$ je $|u|-$periodično. Neka m bude takvo da je $m|u| > |z| \geq (m-1)|u|$.

Neka je:

$$u = x_1y_1 \text{ i } v = y_2x_2 \text{ gde } |x_1| = |x_2| = |z| - (m-1)|u| \text{ i}$$

$$|y_1| = |y_2| \text{ (ovde je } |u| = |v|).$$

Neka je:

$$z = x_1^{'} y_1^{'} x_2^{'} y_2^{'} ... x_{m-1}^{'} y_{m-1}^{'} x_m^{'} \text{ gde } |x_1^{'}| = ... = |x_{m-1}^{'}| = |x_m^{'}| = |x_1| = |x_2|$$

$$\text{i } |y_1^{'}| = ... = |y_{m-1}^{'}| = |y_1| = |y_2|.$$

Pošto je $uz \uparrow zv$ onda važi da je:

$$\uparrow \begin{array}{cccccccccccc} x_1 & y_1 & x_1' & y_1' & x_2' & y_2' & \cdots & x_{m-2}' & y_{m-2}' & x_{m-1}' & y_{m-1}' & x_m' \\ x_1' & y_1' & x_2' & y_2' & x_3' & y_3' & \cdots & x_{m-1}' & y_{m-1}' & x_m' & y_2 & x_2. \end{array}$$

Neka je $1 \leq i \leq |x_1|$. Kada iz svakog x-a izaberemo $i-$to slovo dobijamo reč:

$$\vee \begin{array}{ccccccc} x_1[i] & x_1'[i] & x_2'[i] & \cdots & x_{m-2}'[i] & x_{m-1}'[i] & x_m'[i] \\ x_1'[i] & x_2'[i] & x_3'[i] & \cdots & x_{m-1}'[i] & x_m'[i] & x_2[i]. \end{array}$$

Kako je $|x_1| = |x_1'|$ i $|x_1|+|y_1| = |u|$ tada je rastojanje između $x_1[i]$ i $x_1'[i]$ dužine $|u|$, što znači da su $x_1[i], x_1'[i]$ zapravo ista slova, jer je $uz \vee zv$ $|u|-$periodično, obeležimo to slovo sa a_i. Tada je očigledno da je ta reč $1-$periodična sa slovom a_i. Isto to uradimo i za reč y i dobijamo da je reč:

$$\vee \begin{array}{cccccc} y_1[i] & y_1'[i] & y_2'[i] & \cdots & y_{m-2}'[i] & y_{m-1}'[i] \\ y_1'[i] & y_2'[i] & y_3'[i] & \cdots & y_{m-1}'[i] & y_2[i] \end{array}$$

$1-$periodična recimo sa slovom b_i. Neka je $x = a_1 a_2 ... a_{|x_1|}$ i $y = b_1 b_2 ... b_{|y_1|}$. Zaključujemo da je $x_1 \subset x, x_2 \subset x, y_1 \subset y, y_2 \subset y$ i stoga je $u = x_1 y_1 \subset xy$ i $v = y_2 x_2 \subset yx$. Štaviše, $z = x_1^{'} y_1^{'} x_2^{'} y_2^{'} ... x_{m-1}^{'} y_{m-1}^{'} x_m^{'} \subset x(yx)^{m-1}$ i sledi tvrđenje.

□

Lema 3.0.4. *Neka su u, v neprazne parcijalne reči, a z neka potpuna reč. Ako je $uz \uparrow zv$ onda postoje reči x i y tako da je $u \subset xy$, $v \subset yx$ i $z \subset (xy)^n x$ za neko $n \geq 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $uz \uparrow zv$, gde su u, v neprazne parcijalne reči, a z neka potpuna reč. Razlikujemo 3 slučaja:

1^o $|u| = |z|$. Kako je $uz \uparrow zv$ i $|u| = |z|$ na osnovu pravila uprošćavanja, važi da je $u \uparrow z, z \uparrow v$, ali kako su u, v parcijalne reči sledi da je $u \subset z, v \subset z$. Ukoliko stavimo da je $x = z, y = \lambda, n = 0$ dobijamo da je $z = x = (xy)^0 x$, $u \subset z = x = x\lambda = xy, v \subset z = x = \lambda = yx$.

2^o $|u| > |z|$. Kako je $uz \uparrow zv$ i $|u| > |z|$ onda po lemi 2.0.2. postoji faktorizacija reči u, tj. postoje parcijalne reči w_1, w_2 tako da je $u = w_1 w_2, z \uparrow w_1, v \uparrow w_2 z$. S obzirom na to da je $v \uparrow w_2 z$ i z potpuna reč tada znamo da postoji reč w tako da je $v \subset wz$ i $w_2 z \subset wz$ (tj. $zw_2 \subset zw$). Ukoliko stavimo da je $x = z, y = w$ i $n = 0$ dobijamo da je $z = x = (xy)^0 x, v \subset wz = yx, u = w_1 w_2 \subset zw_2 \subset zw = xy$.

3^o $|u| < |z|$. Kako je $uz \uparrow zv$ i $|u| < |z|$ tada ponovo po lemi 2.0.2 postoji faktorizacija reči z, tj. postoje parcijalne reči w_1, w_2 tako da je $z = w_1w_2, u \uparrow w_1$ i $z \uparrow w_2v$. S obzirom na to da je z potpuna reč, tada su i w_1 i w_2 takođe potpune reči. Pošto je w_1 potpuna i $u \uparrow w_1$ dobijamo da je $u \subset w_1$. Kako je $z \uparrow w_2v$ i $z = w_1w_2$ tada je $w_1w_2 \uparrow w_2v$. S obzirom da je $uw_2 \subset w_1w_2$ primenom pravila slabljenja dobijamo da je $uw_2 \uparrow w_2v$. Kako je $u \uparrow w_1$, sledi da je $|u| = |w_1|$. Pošto je u neprazna reč i $z = w_1w_2$ imamo da je $|w_2| < |z|$. Dokaz završavamo indukcijom po $|z|$.

1. Baza indukcije. Inicijalni slučaj je trivijalan.
2. Indukcijska hipoteza. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve reči kraće od z.
3. Indukcijski korak. Dokažimo da tvrđenje važi i za reč z.

S obzirom da je $uw_2 \uparrow w_2v$ i w_2 je potpuna reč tada na osnovu indukcijske hipoteze postoje reči x i y tako da je $w_2 \subset (xy)^nx, u \subset xy, v \subset yx$ za $n \geq 0$. S obzirom da je w_2 potpuna reč onda je $w_2 = (xy)^nx$. Dalje, kako je $w_1w_2 \uparrow w_2v$ to implicira da je $w_1(xy)^nx \uparrow (xy)^nxv$. Sada razlikujemo dva slučaja:

1^* Ako je $n > 0$ onda pošto je w_1 potpuno važi da je $w_1 = xy$ pa je $z = w_1w_2 \subset (xy)^{n+1}x$, a za u i v znamo da je $u \subset xy, v \subset yx$.

2^* Ako je $n = 0$ onda kako je $w_1(xy)^nx \uparrow (xy)^nxv$ dobijamo da je $w_1x \uparrow xv$ pa postoji reč w tako da $w_1 \subset xw$ i $v \subset wx$. Zaključujemo da je $u \subset xy = w_1 \subset xw, v \subset wx$ i $z = w_1w_2 \subset (xw)w_2 = (xw)x = (xw)^1x$, iz razloga jer je $w_2 = (xy)^nx = (xy)^0x = x$.

□

Poglavlje 4

Kvadratno slobodne parcijalne reči

Definicija 4.0.1. Neka su $A^\star$ i $B^\star$ skupovi svih konačnih i beskonačnih parcijalnih reči. Morfizam je preslikavanje $\Phi : A^\star \to B^\star$ za koji važi da je:

$$\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$$

za svako $x, y \in A^\star$ gde su A i B neki alfabeti.

Pošto je $A^\star$ slobodni monoid, Φ je u potpunosti definisan sa $\Phi(a)$ za sve $a \in A$ i $\Phi(\lambda) = \lambda$. Kažemo da morfizam Φ produžava $a \in A$ ako je $\Phi(a) = aw$, gde je $w \in A^\star$. Najčešće korišćena metoda za definisanje beskonačnih reči je ona ponavljanjem morfizma. Tačnije, pretpostavimo da je $\Phi : A^\star \to A^\star$ morfizam koji produžava $a \in A$. Stoga je $\Phi^i(a)$ prefiks od $\Phi^{i+1}(a)$, a to dalje implicira da beskonačna reč $w = \lim\limits_{i\to\infty} \Phi^i(a)$ postoji. Sada dajemo primer morfizma, takvog da je beskonačna reč koja je definisana ponavljanjem tog morfizma fiksna tačka tog preslikavanja.

Primer 4.0.2. *(Tue-Morsova reč) Neka je $\Phi : \{a, b\}^\star \to \{a, b\}^\star$ morfizam definisan sa:*

$$\Phi(a) = ab, \Phi(b) = ba, \Phi^0(a) = a, \Phi^{i+1}(a) = \Phi(\Phi^i(a)), i \geq 1, \Phi^{i+1}(a) = \Phi^i(a)\overline{\Phi^i(a)}$$

gde je $\overline{x}$ reč dobijena od x zamenom svakog a sa b i svakog b sa a. Tue-Morsovu reč definišemo sa $\tau = \lim\limits_{i\to\infty} \Phi^i(a)$. Ta reč je fiksna tačka morfizma Φ jer je:

$$\Phi(\tau) = \Phi(\lim_{i\to\infty} \Phi^i(a)) = \lim_{i\to\infty} \Phi(\Phi^i(a)) = \lim_{i\to\infty} \Phi^{i+1}(a) = \tau.$$

Definicija 4.0.3. Kažemo da je konačna (beskonačna) reč w $k-$slobodna ako ne postoji neka reč x, takva da je x^k faktor reči w, $x \neq \lambda$.

Definicija 4.0.4. Reč w zovemo bez preklapanja, ako ne sadrži faktor oblika $ayaya$, $a \in A$, $y \in A^*$.

Parcijalnu reč w još nazivamo $k-$slobodna, ako za bilo koji faktor $x_0x_1...x_{k-1}$ reči w ne postoji parcijalna reč u takva da je $x_i \subset u$, za sve $0 \leq i < k$. A parcijalna reč w je reč bez preklapanja ako ne sadrži faktor oblika $a_0w_0a_1w_1a_2$, gde su a_0, a_1, a_2 međusobno kompatibilne, a takođe su i w_0, w_1 kompatibilne parcijalne reči.

Reč koja je $2-$slobodna nazivamo kvadratno-slobodna, a reč koja je $3-$slobodna nazivamo kubno-slobodna.

Definicija 4.0.5. Parcijalna reč $a_0 v_0 a_1 v_1 a_2$ gde je $v_0 \uparrow v_1$ je:

1. Jako preklapanje ako su a_0, a_1, a_2 kompatibilne po parovima.
2. Slabo preklapanje ako je $a_0 \uparrow a_1$ i $a_1 \uparrow a_2$.

Teorema 4.0.6. *(Tueova teorema([13], [14]))Tue-Morsova reč je reč koja ne sadrži preklapanja.*

Svaku parcijalnu reč u nazivamo kvadratom, ako postoji reč w tako da je $u \subset w^2$. Trivijalni kvadrat je jedan od oblika $a\diamond$, $\diamond a$ ili $\diamond ab\diamond$ za bilo koja slova a i b. Svaki drugi kvadrat nazivamo netrivijalnim. Reč nazivamo netrivijalnom kvadratno-slobodnom ako ne sadrži netrivijalni kvadrat.

Definicija 4.0.7. Ubacivanje praznine definisano je kao zamena slova sa prazninom na fiksnoj poziciji reči pri čemu dužina reči ostaje ista. Postavljamo ograničenje pri kom praznine treba da budu raspoređene tako da svake dve praznine moraju imati minimum dva simbola između dakle, praznina pa dva simbola pa ponovo praznina. Ovo ubacivanje praznina nazivamo 2-validno ubacivanje praznina i ubuduće ćemo, kada govorimo o ubacivanju praznina podrazumevati da je ono 2-validno.

Ako se ovo ograničenje ne bi primenilo uvek je moguće dobiti netrivijalne kvadrate oblika $\diamond^2$ i $\diamond a\diamond b\diamond c$ pri čemu a, b, c predstavljaju slova nekog alfabeta. U sledećoj teoremi nalazimo beskonačnu parcijalnu reč nad troelementnim alfabetom sa beskonačno mnogo praznina koja ne sadrži ni jedan kvadrat osim trivijalnih kvadrata oblika $\diamond a$ ili $a\diamond$, pronaći ćemo još i beskonačnu potpunu reč nad osmoelementnim alfabetom koja ostaje netrivijalna kvadratno-slobodna čak i nakon zamene proizvoljnog izbora pozicije prazninama.

Teorema 4.0.8. *Postoji beskonačno mnogo beskonačnih parcijalnih reči sa beskonačno mnogo praznina nad troelementnim alfabetom $\{a, b, c\}$ koje ne sadrži ni jedan kvadrat osim kvadrata oblika $\diamond a$, $a\diamond$.*

Dokaz. Prvo definišimo morfizam: $\Phi : \{a, b, c\}^\star \to \{a, b, c\}^\star$ na sledeći način:

$$\Phi(a) = abc, \Phi(b) = ac, \Phi(c) = b.$$

Neka je σ fiksna tačka tog morfizma i za nju znamo da je kvadratno-slobodna (pokazano u [11]). Željenu reč σ' koja je beskonačna, koja sadrži beskonačno mnogo praznina i koja sadrži samo kvadrate oblika $\diamond a$ i $a\diamond$, dobijamo primenom morfizma δ na reč σ koji zamenjuje: a sa $\Phi^4(a)'$, b sa $\Phi^4(b)$ i c sa $\Phi^4(c)$ gde je:

$$\Phi^4(a) = abcacbabcbacabcacbacabcb \text{ i } \Phi^4(a)' = abcacbabcbac\diamond bcacbacabcb$$

$$\Phi^4(b) = abcacbabcbacabcb$$

$$\Phi^4(c) = abcacbac$$

Reč $\Phi^4(a)'$ dobili smo od reči $\Phi^4(a)$, tako što smo trinaesti simbol od $\Phi^4(a)$ zamenili prazninom. Pokažimo prvo da reč σ' sadrži beskonačno puno praznina, tj. pokažimo da reč σ sadrži beskonačno mnogo a-ova. Dokažimo da za svako $n \geq 0$ postoji a koji se nalazi na poziciji većoj ili jednakoj n. Posmatrajmo slovo na $n-$toj poziciji. Razlikujemo 3 slučaja:

1^o Na $n-$toj poziciji nalazi se slovo a, onda znamo da σ sadrži beskonačno mnogo a-ova.

2^o Na $n-$toj poziciji nalazi se slovo b, onda kako morfizam Φ svako slovo "zamenjuje" sa jednim ili više slova, slovo b će biti zamenjeno blokom ac koji je na poziciji većoj ili jednakoj n.

3^o Na n-toj poziciji nalazi se slovo c, onda će slovo c primenom morfizma Φ biti "zamenjeno" slovom b, koje će biti "zamenjeno" blokom ac koji je na poziciji većoj ili jednakoj n.

Ostaje još da se pokaže da σ' ne sadrži ni jedan kvadrat osim kvadrata oblika $\diamond a$ i $a\diamond$. Neka je:

$$\sigma = a_0a_1...$$
$$\sigma' = b_0b_1...$$

Pošto je σ potpuna, kvadratno-slobodna reč, to znači da kvadrat u σ' mora sadržati prazninu. Pokažimo prvo da σ' ne sadrži kvadrat dužine manje ili jednake 4. U tom slučaju dovoljno je posmatrati faktor $bac\diamond bca$ jer znamo da kvadrat mora sadržati prazninu pa u slučaju da se praznina nalazi na početku ili na kraju kvadrata moramo imati jos tri simbola levo ili desno. Međutim, očigledno je da ta reč ne sadrži kvadrat. Sada pretpostavimo da σ' sadrži i netrivijalni kvadrat dužine veće ili jednake 5. Tada postoje celi brojevi $i \geq 0, k > 0$ tako da je:

$$b_ib_{i+1}...b_{i+k-1} \uparrow b_{i+k}b_{i+k+1}...b_{i+2k-1}.$$

Jasno je da je $k \geq 7$ jer ako je $k < 7$ tada kvadratni faktor od σ' mora biti i kvadratni faktor od $\Phi^4(a)'$, međutim očigledno je da $\Phi^4(a)'$ ne sadrži kvadratni faktor. Dalje želimo da pokažemo da ako je $b_{i+j} = \diamond$ onda $b_{i+k+j} \in \{\diamond, a\}$ i ako je $b_{i+k+j} = \diamond$ onda $b_{i+j} \in \{\diamond, a\}$. Tako ćemo pokazati da svaka rupa u σ' može biti zamenjena slovom a, a da se ne izgubi netrivijalni kvadratni faktor. Što znači, ako svaku rupu u σ' zamenimo slovom a, dobićemo reč σ koja u sebi sadrži netrivijalni kvadratni faktor i time dolazimo do kontradikcije.

1. Pretpostavimo sada da je $b_{i+j} = \diamond$ i pokazimo da $b_{i+k+j} \in \{\diamond, a\}$. Razmislimo o mogućnostima gde se praznine mogu javiti.

   Ako je $0 \leq j < k-2$ onda je $b_{i+j}...b_{i+j+2} = \diamond bc$. Lako možemo da proverimo da je jedini faktor od σ' kompatibilan sa $\diamond bc$ faktor abc. Sledi da $b_{i+k+j} \in \{\diamond, a\}$.

   Ako je $5 \leq j < k$ onda $b_{i+j-5}...b_{i+j} = bcbac\diamond$. Lako možemo da proverimo da je jedini faktor od σ' kompatibilan sa $bcbac\diamond$ faktor $bcbaca$. Dakle $b_{i+k+j} \in \{\diamond, a\}$.

   Ako je $k-2 \leq j < 5$ onda $b_{i+j-1}...b_{i+j+1} = c\diamond b$. Ovaj slučaj otpada jer je $k \geq 7$.

2. Drugi deo dokaza radi se analogno.

$\square$

Posledica 4.0.9. *Postoji beskonačno mnogo beskonačnih parcijalnih reči sa proizvoljnim brojem rupa nad troelementnim alfabetom koje ne sadrže ni jedan kvadrat osim kvadrata oblika $\diamond a$ i $a\diamond$.*

Dokaz. Ako prozvoljan broj a-ova zamenimo sa $\Phi^4(a)'$, a ostale a-ove zamenimo sa $\Phi^4(a)$ tada tražena rezultujuća parcijalna reč sadrži proizvoljan broj praznina. $\square$

4.1 Generalizacija

Sada ćemo skrenuti pažnju na reči koje ostaju netrivijalne kvadratno-slobodne čak i nakon zamene njihovih pozicija prazninama. Ovde dajemo primer beskonačne reči nad osmoelementnim alfabetom koja ostaje netrivijalna kvadratno-slobodna čak i nakon zamene pozicija prazninama.

Napomena 4.1.1. Neka su $t_0 = a_0a_1a_2, t_1 = b_0b_1b_2$ potpune reči. U t_0 i t_1 moguće je ubaciti praznine tako da parcijalne reči koje odatle proizilaze budu kompatibilne ako i samo ako postoji i takvo da je $a_i = b_i$

Primer 4.1.2. *Neka je $t_0 = bca, t_1 = dea$, ako stavimo da je $t_0^{'} = \diamond ca$ i $t_1^{'} = d\diamond a$, tada je očigledno da su te dve reči kompatibilne. Međutim ovo nije izvodljivo kada je $t_0 = cca$ i $t_1 = add$, tada te reči ne mogu biti kompatibilne zbog prethodne napomene.*

Lema 4.1.3. *Neka je t potpuna reč nad alfabetom A. Ako svaki faktor dužine n od t sadrži n različitih elemenata od A, onda je nemoguće ubaciti praznine u t tako da rezultujuća parcijalna reč sadrži netrivijalni kvadrat w_0w_1 za koji važi da je $w_0 \uparrow w_1$ i $|w_0| = |w_1| < n$.*

Dokaz. Kako svaki faktor dužine n od t sadrži n različitih slova, tada je neophodno da postoje dve praznine na razdaljini 1 ili 2 kako bi reči w_0 i w_1 bile kompatibilne, a to nas dovodi do kotradikcije zbog napomene 4.1.1. $\square$

Teorema 4.1.4. *Postoji beskonačna reč nad osmoelementnim alfabetom koja ostaje netrivijalna kvadratno-slobodna nakon što je proizvoljan izbor pozicija zamenjen prazinama.*

Dokaz. Prvo definišimo morfizam $\phi : \{a, b, c\}^\star \to \{a, b, c\}^\star$ na sledeći način:

$$\phi(a) = abc, \phi(b) = ac, \phi(c) = b.$$

Neka je σ fiksna tačka tog morfizma i za nju znamo da je kvadratno-slobodna. Na reč σ primenimo morfizam δ koji zamenjuje: a sa $defghijk$, b sa $deghfkij$ i c sa $dehfgjki$ i na taj način dobijamo reč t. Želimo da pokažemo da ako u reč t ubacimo praznine, tada rezultujuća parcijalna reč ne sadrži netrivijalan kvadrat. Pretpostavimo suprotno da ako u reč t ubacimo praznine, rezultujuća parcijalna reč sadrži netrivijalan kvadrat. Iz konstrukcije reči t vidimo da reč $t^{'}$ ne poseduje faktore oblika aa ili $abab$ za bilo koja slova $a, b \in \{d, e, f, g, h, i, j, k\}$. Dakle, posmatraćemo faktore oblika w_0w_1 za koje važi da je $w_0 \uparrow w_1$ i $|w_0| = |w_1| \geq 3$. Tako da ako je:

$$t = a_0a_1a_2...$$
$$t^{'} = b_0b_1b_2...$$

onda postoje $i \geq 0$ i $k \geq 3$ tako da je

$$b_ib_{i+1}b_{i+2}...b_{i+k-1} \uparrow b_{i+k}b_{i+k+1}b_{i+k+2}...b_{i+2k-1}.$$

Razmotrićemo dva slučaja:

1^o $k \equiv 0 \pmod 8$. Neka je tada $k = 8(m+1)$, jasno je da je $a_ia_{i+1}a_{i+2}...a_{i+k-1}$ oblika:

$$w_{00}\delta(c_0)\delta(c_1)...\delta(c_{m-1})w_{01}$$

i $a_{i+k}a_{i+k+1}a_{i+k+2}...a_{i+2k-1}$ je oblika:

$$w_{10}\delta(c_{m+1}))\delta(c_{m+2})...\delta(c_{2m})w_{11}$$

za $w_{01}w_{10} = \delta(c_m), |w_{pr}| = |w_{qr}|$ i $c_i \in \{a, b, c\}$ za sve $p, q, r \in \{0, 1\}$, $w_{pr}, w_{qr} \in \{d, e, f, g, h, i, j, k\}^*, i \in \{0, 1, ...2m\}$.

Ako je $c_p \neq c_{m+p+1}$ za bilo koji $0 \leq p < m$ tada ne možemo ubaciti rupe u $\delta(c_p)$ i $\delta(c_{m+p+1})$ tako da su rezultujuće parcijalne reči kompatibilne zbog napomene 4.1.1. Dakle, $c_p = c_{m+p+1}$ za sve $0 \leq p < m$.

1^* $|w_{10}| \geq 5$. Kako je:

$$b_ib_{i+1}b_{i+2}...b_{i+k-1} \uparrow b_{i+k}b_{i+k+1}b_{i+k+2}...b_{i+2k-1}$$

i $c_p = c_{m+p+1}$ tada su i reči $w_{00}\delta(c_0)\delta(c_1)...\delta(c_{m-1})w_{01}$ i $w_{10}\delta(c_{m+1})\delta(c_{m+2})...\delta(c_{2m})w_{11}$ kompatibilne. Još kako je $c_p = c_{m+p+1}$ za sve $0 \leq p < m$ tada je $w_{01} \uparrow w_{11}$, što znači da je w_{11} prefiks od $\delta(c_m)$. Dakle,

$$c_0c_1...c_mc_{m+1}c_{m+2}...c_{2m}c_m.$$

je kvadratni faktor od σ i time dolazimo do kontradikcije jer znamo da je σ kvadratno slobodna.

2^* $|w_{01}| < 5$. Tada je $|w_{00}| \geq 4$ i sledi da su w_{00}, w_{10} sufiksi od $\delta(c_m)$. Onda je

$$c_mc_0c_1...c_{m-1}c_mc_{m+1}c_{m+2}...c_{2m}$$

faktor od σ. Kako je σ kvadratno-slobodno to je kontradikcija.

2^o $k \not\equiv 0 \pmod 8$. Kako je $b_i b_{i+1} b_{i+2} ... b_{i+k-1} \uparrow b_{i+k} b_{i+k+1} b_{i+k+2} ... b_{i+2k-1}$ tada pretpostavimo da je $a_{i+l} = a_{i+k+l} = d$ za neko $0 \leq l < k-4$. Onda znamo da reči $a_{i+l+1} ... a_{i+l+4}$ i $a_{i+k+l+1} ... a_{i+k+l+4}$ mogu biti samo $efgh$, $eghf$ ili $ehfg$. Pošto $k \not\equiv 0 \pmod 8$, sledi da je $a_{i+l+1} ... a_{i+l+4}$ različito od $a_{i+k+l+1} ... a_{i+k+l+4}$. Neka je na primer $a_{i+l+1} ... a_{i+l+4} = efgh$ i $a_{i+k+l+1} ... a_{i+k+l+4} = eghf$, tada je očigledno da te dve reči ne mogu biti kompatibilne zbog napomene 4.1.1. Time dolazimo do kotradikcije sa:

$$b_i b_{i+1} b_{i+2} ... b_{i+k-1} \uparrow b_{i+k} b_{i+k+1} b_{i+k+2} ... b_{i+2k-1}.$$

Dakle, ne postoji l koje zadovoljava $0 \leq l < k-4$ tako da je $a_{i+l} = a_{i+k+l} = d$. Zapravo, ovo ne važi samo za slovo d nego za bilo koje slovo iz skupa $\{d, e, f, g, h, i, j, k\}$. Tako ne postoji l, $0 \leq l < k-4$ tako da je $a_{i+l} = a_{i+k+l}$. Prema napomeni 4.1.1 sledi da je $a_{i+l} = a_{i+k+l}$ za $0 \leq l < 3$. Ako pretpostavimo da je $k \geq 7$, to bi značilo da je $a_{i+l} = a_{i+k+l}$ za $0 \leq l < k-4$, a rekli smo da je to nemoguće. Odatle sledi da je $k < 7$. Iz konstrukcije reči t vidimo da svaki faktor dužine 6 od t sadrži sva različita slova. Na osnovu leme 4.1.3 znamo da, ako neki faktor dužine n reči t sadrži n različitih slova onda je nemoguće ubaciti praznine u t tako da rezultujuća parcijalna reč sadrži netrivijalni kvadrat $w_0 w_1$ za koji važi da je $|w_0| = |w_1| < n$. Dakle, zaključujemo da je $k = 6$. Svaki faktor dužine 12 od t je sadržan u $\delta(c_1)\delta(c_2)\delta(c_3)$ za $c_i \in \{a, b, c\}$. Koristili smo kompjuterski program da proverimo da je nemoguće ubaciti praznine u bilo koje od gore navedenih faktora da bi se dobio kvadrat. Pošto svi slučajevi vode u kontradiktornost, možemo zaključiti da t ispunjava željena svojstva.

□

Napomena 4.1.5. Reč t' konstruisana u teoremi 4.1.4 je kubno-slobodna.

Lema 4.1.6. *Neka je $t = v_0 a w a v_1$ potpuna reč nad alfabetom A, gde $a \in A$ i $v_1, v_0, w \in A^*$. Ako važi bilo koji od sledećih slučajeva onda je moguće ubaciti praznine u t tako da rezultujuća parcijalna reč sadrži netrivijalni kvadrat:*

1. $|w| = 2$ *i* $|t| \geq 6$
2. $|w| = 3, |t| \geq 8$ *i* $|v_i| \geq 1$
3. $|w| = 4$ *i* $|v_i| \geq 2$
4. $|w| = 5, |t| \geq 15, |v_i| \geq 4$ *i* $|A| \leq 7$.

Dokaz. Neka $b_i \in A$.

1. Ako t ima faktor oblika $ab_0b_1ab_2b_3$, $b_0ab_1b_2ab_3$ ili $b_0b_1ab_2b_3a$ tada možemo ubaciti praznine u t tako da rezultujuća parcijalna reč sadrži kvadratne faktore oblika $a\diamond b_1ab_2\diamond$, $\diamond ab_1b_2a\diamond$ ili $\diamond b_1ab_2\diamond a$.
2. Ako t ima faktor oblika $b_0ab_1b_2b_3ab_4b_5$ ili $b_0b_1ab_2b_3b_4ab_5$, tada možemo ubaciti prazine u t tako da rezultujuća parcijalna reč sadrži kvadratne faktore oblika $\diamond ab_1\diamond b_3a\diamond b_5$ ili $b_0\diamond ab_2\diamond b_4a\diamond$.

3. Ako t ima faktor oblika $b_0b_1ab_2b_3b_4b_5ab_6b_7$, tada možemo ubaciti prazine u t tako da rezultujuća parcijalna reč sadrži kvadratni faktor oblika $\diamond b_1a\diamond b_3b_4\diamond ab_6\diamond$.
4. Ako t ima faktor oblika $b_0b_1b_2b_3ab_4b_5b_6b_7b_8ab_9b_{10}b_{11}b_{12}$ onda je za $4 \leq i < 10$ svako $b_i \neq a$ jer ako je:

   $b_4 = a$ tada imamo kvadratni faktor aa

   $b_5 = a$ tada imamo kvadratni faktor $a\diamond ab_6$

   $b_6 = a$ tada imamo kvadratni faktor $a\diamond b_5ab_7\diamond$

   $b_7 = a$ tada imamo kvadratni faktor $a\diamond ab_9$

   $b_8 = a$ tada imamo kvadratni faktor aa

   $b_9 = a$ tada imamo kvadratni faktor aa.

   Takođe sva slova b_i za $4 \leq i < 10$ su međusobno različita. Ako je:

   $b_4 = b_5 = b$ tada imamo kvadratni faktor bb

   $b_4 = b_6 = b$ tada imamo kvadrani faktor $ab\diamond b$

   $b_4 = b_7 = b$ tada imamo kvadratni faktor $\diamond abb_5\diamond b$

   $b_4 = b_8 = b$ tada imamo kvadratni faktor $\diamond bb_5\diamond b_7b\diamond b_9$

   $b_4 = b_9 = b$ tada imamo kvadratni faktor $\diamond b_3ab_4\diamond b_6b_7\diamond ab_9b_{10}\diamond$

   $b_5 = b_6 = b$ tada imamo kvadratni faktor bb

   $b_5 = b_7 = b$ tada imamo kvadratni faktor $b\diamond bb_8$

   $b_5 = b_8 = b$ tada imamo kvadratni faktor $\diamond bb_6b_7b\diamond$

   $b_5 = b_9 = b$ tada imamo kvadratni faktor $\diamond b_4b\diamond b_7b_8\diamond bb_{10}\diamond$

   $b_6 = b_7 = b$ tada imamo kvadratni faktor bb

   $b_6 = b_8 = b$ tada imamo kvadratni faktor $\diamond bb_7b$

   $b_6 = b_9 = b$ tada imamo kvadratni faktor $\diamond bb_7\diamond ab\diamond b_{11}$

   $b_7 = b_8 = b$ tada imamo kvadratni faktor bb

   $b_7 = b_9 = b$ tada imamo kvadratni faktor $\diamond b_6bb_8\diamond b$

   $b_8 = b_9 = b$ tada imamo kvadratni faktor $bab\diamond$.

   Na sličan način dobijamo da su slova b_i za $3 \leq i < 9$ međusobno različita i različita od a. Kako je $|A| \leq 7$, slova b_i za $3 \leq i < 9$ su međusobno različita, ali su takođe i slova b_i za $4 \leq i < 10$ su međusobno različita pa tada mora biti $b_3 = b_9$. Znamo da su slova b_i za $4 \leq i < 10$ međusobno različita i različita od a, dakle b_{10} mora biti jednako nekom od njih.

Ako je:

$b_{10} = b_9 = b$ tada imamo kvadratni faktor bb

$b_{10} = a$ tada imamo kvadratni faktor $a\diamond ab_{11}$

$b_{10} = b_8 = b$ tada imamo kvadratni faktor $b\diamond b_9 bb_{11}\diamond$

$b_{10} = b_7 = b$ tada imamo kvadratni faktor $\diamond bb_8\diamond b_9 b\diamond b_{12}$

$b_{10} = b_6 = b$ tada imamo kvadratni faktor $\diamond b_5 b\diamond b_8 a\diamond bb_{11}\diamond$

$b_{10} = b_5 = b$ tada imamo kvadratni faktor $\diamond b_3 a\diamond b_5 b_6 b_7\diamond ab_9 b_{10}\diamond$.

Dakle, $b_{10} = b_4$. Slično dobijamo da je $b_2 = b_8$. Sada možemo ubaciti praznine u naš faktor tako da rezultujuća parcijalna reč sadrži netrivijalni kvadrat oblika:

$$\diamond b_2 b_3\diamond b_4 b_5\diamond b_7 b_8\diamond b_9 b_{10}\diamond b_{12}.$$

$\square$

Poglavlje 5

Parcijalne reči koje ne sadrže preklapanja

U ovom poglavlju govorimo o konstrukciji beskonačnih parcijalnih reči koje ne sadrže preklapanja. Ni jedna od ovih reči ne sadrži više od jedne praznine nad dvoelementnim alfabetom, a pokazaćemo i da postoji beskonačno mnogo parcijalnih reči sa proizvoljnim brojem praznina nad troelementnim alfabetom.

Lema 5.0.1. *Postoje beskonačne parcijalne reči nad dvoelementnim alfabetom koje ne sadrže preklapanja i sadrže samo jednu prazninu.*

Dokaz. Znamo da je Tue-Morsova reč τ potpuna beskonačna reč koja ne sadrži preklapanja. Želimo da pokažemo da beskonačna parcijalna reč $\diamond\tau$ koja sadrži samo jednu prazninu ne sadrži preklapanje. Kako je Tue-Morsova reč bez preklapanja tada svako preklapanje mora sadržati prazninu. Kako je $\tau = \lim_{i\to\infty} \Phi^i(a)$, da bismo pokazali da $\diamond\tau$ ne sadrži preklapanje dovoljno je pokazati da $\diamond\Phi^i(a)$ ne sadrži preklapanje. S obzirom da je $\Phi^{i+1}(a) = \Phi^i(a)\overline{\Phi^i(a)}$ tada je:

$$\Phi^{i+3}(a) = \Phi^i(a)\overline{\Phi^i(a)\Phi^i(a)}\Phi^i(a)\overline{\Phi^i(a)}\Phi^i(a)\Phi^i(a)\overline{\Phi^i(a)}$$

$\Phi^{i+3}(a)$ sadrži faktor $\overline{\Phi^i(a)}\Phi^i(a)$, pa ukoliko se $\Phi^i(a)$ završava slovom a tada $\Phi^{i+3}(a)$ sadrži u sebi faktor oblika $b\Phi^i(a)$, a ukoliko se završava slovom b tada sadrži faktor oblika $a\Phi^i(a)$. Znamo da $\Phi^{i+3}(a)$ ne sadrži preklapanja jer τ ne sadrži preklapanja, samim tim ni $a\Phi^i(a), b\Phi^i(a)$ ne sadrže preklapanja. Odavde sledi da $\diamond\Phi^i(a)$ ne sadrži preklapanje, dakle ni naša reč $\diamond\tau$ ne sadrži preklapanje. □

Napomena 5.0.2. Nad binarnim alfabetom, sve reči čija je dužina veća od 6 i sa prazninom na trećoj poziciji sadrže preklapanje. Da bismo videli ovo, imajmo na umu da ako parcijalna reč sadrži faktor oblika $a\diamond a, aa\diamond$ ili $\diamond aa$ onda očigledno sadrži u sebi i preklapanje. Stoga možemo pretpostaviti da svaka binarna reč bez preklapanja i koja ima prazninu na trećoj poziciji počinje prefiksom oblika $ab\diamond ab$. Ako je ovaj faktor praćen sa aa onda reč sadrži preklapanje $ab\diamond abaa$. Slično, ako je faktor praćen sa ab, ba ili bb, onda reč sadrži preklapanje $\diamond abab$, $ab\diamond abba$ ili bbb redom.

Lema 5.0.3. *Ne postoji beskonačna parcijalna reč nad dvoelementnim alfabetom koja ne sadrži preklapanje sa više od jedne praznine.*

Dokaz. Prema napomeni 5.0.2, ovakva reč ne može da sadrži prazninu posle druge pozicije. Međutim, ne može imati praznine ni na 1. i 2. poziciji istovremeno jer bismo tada imali faktor oblika $\diamond\diamond a$, a samim tim i preklapanje. Tako je dozvoljena samo jedna rupa. □

Lema 5.0.4. *Postoji beskonačno mnogo beskonačnih parcijalnih reči koje ne sadrže preklapanja sa proizvoljnim brojem praznina nad troelementnim alfabetom.*

Dokaz. U teoremi 4.0.8 definisali smo morfizam $\Phi : \{a, b, c\}^\star \to \{a, b, c\}^\star$ na sledeći način:

$$\Phi(a) = abc, \Phi(b) = ac, \Phi(c) = b.$$

Znamo da je reč σ koja je fiksna tačka tog preslikavanja kvadratno-slobodna reč. Pokazali smo da reč σ' koju smo dobili primenom morfizma δ na reč σ koji zamenjuje a sa $\Phi^4(a)'$, b sa $\Phi(b)$ i c sa $\Phi(c)$, ne sadrži ni jedan kvadrat osim kvadrata oblika $a\diamond$ i $\diamond a$. Kako je σ kvadratno slobodna reč onda ona ne sadrži preklapanje, što znači da svako preklapanje u σ' mora sadržati prazninu. Dakle, ostaje samo da se pokaže da $\sigma^{'}$ ne sadrži faktor oblika $a_0a_1a_2$ za $a_0, a_1, a_2 \subset b$ ili $a_0, a_1, a_2 \subset c$ ili $a_0, a_1, a_2 \subset a$ jer će u tom slučaju sadržati preklapanje. Međutim, posmatrajući konstrukciju od $\phi^4(a)^{'}$ očigledno je da $\phi^4(a)^{'}$ ne sadrži takav faktor preklapanja. □

5.1 Generalizacija

Lema 5.1.1. *Ne postoji beskonačna reč nad četvoroelementnim alfabetom koja ostaje bez preklapanja nakon što je proizvoljan izbor pozicija zamenjen prazninama.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je t neka beskonačna reč nad četvoroelementnim alfabetom koja ne sadrži preklapanje. Jasno je da ona ne sadrži faktore oblika bba ili bab jer u njih možemo da ubaciti praznine tako da dobijemo faktore oblika $bb\diamond$ i $b\diamond b$, a tada znamo da ta reč sadrži i preklapanje. Ako reč t ne sadrži faktor oblika ba_0a_1b gde $a_i \in A$ za $i \in \{0, 1\}$, to znači da u reči t nemamo faktor dužine 4 u kom se slova ponavljaju (jer t ne sadrži faktore oblika bba, bab, ba_0a_1b). To dalje implicira da je t oblika:

$$...a_0a_1a_2a_3a_0a_1a_2a_3a_0a_1a_2a_3...$$

a_0 mora biti posle a_3 kako ne bismo imali faktor dužine 4 gde se slova ponavljaju. Međutim, ako je t takvog oblika onda očigledno sadrži preklapanje. Dakle t sadrži faktor oblika:

$$...a_0a_1a_2ba_3a_4ba_5a_6...$$

gde je $b \neq a_i$ za sve $i > 0$.

Ako je:

$a_5 = a_4 = c$ tada imamo preklapanje oblika $\diamond cbca \diamond$

$a_5 = a_6 = c$ tada imamo preklapanje jer imamo faktor oblika $\diamond cc$

$a_6 = a_4 = c$ tada imamo preklapanje oblika $\diamond ba_3cb\diamond c$.

Dakle, slova b, a_4, a_5, a_6 su međusobno različita. Kako naš alfabet ima 4 slova a_3 mora biti jednako nekom od a_4, a_5, a_6. Ako je:

$a_3 = a_4 = c$ tada imamo preklapanje jer imamo faktor oblika $cc\diamond$

$a_3 = a_5 = c$ tada imamo preklapanje $\diamond bca_4bc\diamond$.

Dakle, $a_3 = a_6$. Slično, ako je:

$a_2 = a_4 = c$ imamo preklapanje $\diamond\ a_1cb\diamond cb$

$a_2 = a_3 = c$ imamo preklapanje $\diamond cbc\diamond$

$a_3 = a_4 = c$ imamo preklapanje jer imamo faktor oblika $cc\diamond$.

Dakle, slova b, a_2, a_3, a_4 su međusobno različita, pa ponovo iz razloga što naš alfabet ima 4 slova i slova b, a_2, a_3, a_4 su međusobno različiti a_1 mora biti jednako nekom od njih. Ako je:

$a_1 = a_2 = c$ imamo preklapanje jer imamo faktor oblika $cc\diamond$

$a_1 = a_3 = c$ imamo preklapanje $\diamond ca_2bc\diamond b$.

Dakle, $a_1 = a_4$. Kako je $a_1 = a_4$ i $a_3 = a_6$ do tražene kontradikcije dolazimo ubacivanjem praznina da bismo došli do sledećeg preklapanja:

$$\diamond a_1a_2\diamond a_3a_4\diamond a_5a_6.$$

□

Teorema 5.1.2. *Postoji beskonačna reč nad šestoelementnim alfabetom ostaje bez preklapanja nakon što je proizvoljan izbor pozicija zamenjen prazninama.*

Dokaz. Prvo definišimo morfizam $\Phi : \{a, b, c\}^\star \to \{a, b, c\}^\star$ na sledeći način:

$$\phi(a) = abc, \phi(b) = ac, \phi(c) = b.$$

Neka je σ fiksna tačka tog morfizma i za nju znamo da je kvadratno-slobodna. Sada na reč σ primenimo morfizam δ koji zamenjuje: a sa $defghi$, b sa $degifh$, c sa $dehfig$ i na taj način dobijamo reč t. Želimo da pokažemo da ako u reč t ubacimo praznine ona ostaje bez preklapanja. Pretpostavimo suprotno ako u reč t ubacimo praznine tada ona sadrži preklapanje, tj. ako je $t_0 = a_0a_1a_2...$ i $t^{'} = b_0b_1b_2...$ dobijena ubacivanjem praznina u t onda postoje celi brojevi $i \geq 0, k > 0$ takvi da:

$$b_ib_{i+1}b_{i+2}...b_{i+k-1} \uparrow b_{i+k+1}b_{i+k+1}b_{i+k+2}...b_{i+2k}$$

$b_{i-1}, b_{i+k}, b_{i+2k+1}$ su kompatibilni po parovima.
Razlikujemo 2 slučaja:

1^o $k \equiv 0(\text{mod } 6)$. Stavljanjem $k = 6(m+1)$ primetimo da je $a_i a_{i+1} a_{i+2} ... a_{i+k-1}$ oblika:

$$w_{00}\delta(c_0)\delta(c_1)...\delta(c_{m-1})w_{01}$$

i $a_{i+k}a_{i+k+1}a_{i+k+2}...a_{i+2k-1}$ je oblika:

$$w_{10}\delta(c_{m+1})\delta(c_{m+2})...\delta(c_{2m})w_{11}$$

za $w_{01}w_{10} = \delta(c_m), |w_{pr}| = |w_{qr}|$ i $c_l \in \{a, b, c\}$ za sve $p, q, r \in \{0, 1\}$ $w_{pr}, w_{qr} \in \{d, e, f, g, h, i, j, k\}^*, l \in \{0, 1, ...2m\}$.

Ako je $c_p \neq c_{m+p+1}$ za bilo koje $0 \leq p < m$ tada ne možemo ubaciti praznine u $\delta(c_p)$ i $\delta(c_{m+p+1})$ tako da su rezultujuće parcijalne reči kompatibilne zbog napomene 4.1.1, dakle $c_p = c_{m+p+1}$ za sve $0 \leq p < m$.

1^* $|w_{01}| \geq 5$. Kako je $b_i b_{i+1} b_{i+2}...b_{i+k-1} \uparrow b_{i+k}b_{i+k+1}b_{i+k+2}...b_{i+2k-1}$ i $c_p = c_{m+p+1}$ za sve $0 \leq p < m$ tada je $w_{01} \uparrow w_{11}$. Kako među rečima $defghi, degifh$ i $dehfig$ ne postoje dve reči koje ubacivanjem praznina postaju kompatibilne (videti napomenu 4.1.1) sledi da je w_{11} prefiks od $\delta(c_m)$. Dakle,

$$c_0c_1...c_mc_{m+1}c_{m+2}...c_{2m}c_m$$

je kvadratni faktor od σ. Time dolazimo do kontradikcije, jer je σ kvadratno-slobodna.

2^* $|w_{01}| \leq 3$. Tada je $|w_{00}| \geq 3$ i sledi da je w_{00} sufiks od $\delta(c_m)$, pa je

$$c_mc_0c_1...c_{m-1}c_mc_{m+1}c_{m+2}...c_{2m}$$

kvadratni faktor od σ, pa tako ponovo dolazimo do kotradikcije, jer je σ kvadratno slobodna.

Kako su slučajevi $|w_{01}| \geq 5$ i $|w_{01}| \leq 3$ nemogući, jedini slučaj koji nam preostaje je kada je $|w_{01}| = 4$. Neka je $a^{'}$ prvo slovo reči w_{10}. Jasno je da $w_{01}a^{'}$ i $w_{11}a_{i+2k}$ mogu biti kompatibilni uz pomoć ubacivanja praznina. Kako je $w_{01}a' \uparrow w_{11}a_{i+2k}$ tada je ponovo kao u prvom slučaju $w_{11}a_{i+2k}$ prefiks od $\delta(c_m)$ i vidimo da je:

$$c_0c_1...c_mc_{m+1}c_{m+2}...c_{2m}c_m$$

kvadratni faktor od σ što je ponovo kontradikcija.

2^o $k \not\equiv 0 (\bmod 6)$. U ovom slučaju pretpostavljamo da je $k \geq 5$, zato što je svako preklapanje za $k < 5$ sadržano u faktoru oblika $\delta(c_0)\delta(c_1)\delta(c_2)$, za $c_i \in \{a, b, c\}$, gde je $c_0c_1c_2$ faktor od σ. Može se proveriti da $t^{'}$ ne sadrži preklapanje za $k < 5$. Pretpostavimo da je $a_{i+l} = a_{i+l+k} = h$ za neko $0 \leq l < k-2$. Možemo da proverimo da

$$a_{i+l+1}...a_{i+l+3} \text{ i } a_{i+k+l+1}...a_{i+k+l+3}$$

mogu biti samo def, deh, ide, fig.

Pošto $k \not\equiv 0 (\bmod 6)$ tada je jasno da su $a_{i+l+1}...a_{i+l+3}$ i $a_{i+k+l+1}...a_{i+k+l+3}$ različiti. Neka je na primer $a_{i+l+1}...a_{i+l+3} = ide$, a $a_{i+k+l+1}...a_{i+k+l+3} = fig$ tada je jasno da oni ne mogu biti kompatibilni zbog napomene 4.1.1, a time dolazimo do kontradikcije sa:

$$b_ib_{i+1}b_{i+2}...b_{i+k-1} \uparrow b_{i+k}b_{i+k+1}b_{i+k+2}...b_{i+2k-1}.$$

Dakle, vidimo da ne postoji l koje zadovoljava $0 \leq l < k-2$ tako da je $a_{i+l} = a_{i+k+l} = h$. Ovo ne važi samo za slovo h nego za bilo koje slovo iz skupa $\{d, e, f, g, i\}$. Iz napomene 4.1.1. znamo da ako imamo dva faktora dužine 3 da bi bili kompatibilni putem 2-validnog ubacivanja praznina moraju imati bar jedno slovo isto. Dakle, mora da postoji l, $0 \leq l \leq 2$ koje zadovoljava $a_{i+l} = a_{i+k+l}$. Kako je $k \geq 5$ tada pošto je $k \geq 5$ i $0 \leq l \leq 2$ onda možemo zapisati kao $0 \leq l < k-2$, a pokazali smo da je to nemoguće. Pošto svi slučajevi vode u kontradikciju, možemo zaključiti da t ostaje bez preklapanja čak i nakon što proizvoljan izbor njegovih pozicija zamenimo prazninama.

□

5.2 Reč koja ne sadrži preklapanja nad petoelementnim alfabetom

Definišimo morfizam $\gamma : \{a, b, c, d\}^\star \rightarrow \{a, b, c, d\}^\star$ sa:

$$\gamma(a) = ad, \gamma(b) = ac, \gamma(c) = cb, \gamma(d) = ca.$$

Fiksnu tačku od γ definišemo kao $\Gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma^n(a)$. Sada ćemo razmotriti kakva svojstva poseduje Γ.

Napomena 5.2.1. I $\gamma^3(a) = adcacbad$ i $\gamma^4(a) = adcacbadcbacadca$ imaju samo ac, ad, ba, ca, cb, dc kao faktore dužine dva.

Lema 5.2.2. *Beskonačna potpuna reč Γ je kvadratno-slobodna.*

Dokaz. Neka je $\Gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma^n(a)$. Želimo da pokažemo da je Γ kvadratno-slobodna. Kako je $\Gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma^n(a)$ dovoljno je pokazati da je svako $\gamma^n(a)$ kvadratno-slobodno. Dokaz dajemo indukcijom po n.

1. Baza indukcije. Za $n = 0$ očigledno je da je $\gamma^0(a) = \lambda$ kvadratno-slobodna reč.
2. Indukcijska hipoteza. Pretpostavimo da je neko $\gamma^n(a)$ kvadratno-slobodno.
3. Indukcijski korak. Pokažimo da je γ^{n+1} kvadratno-slobodna reč.

Pretpostavimo suprotno da $\gamma^{n+1}(a)$ ima kvadratni faktor dužine $2p$ koji počinje na poziciji i pri čemu je p minimalno.

1^o p je neparno. Posmatrajući konstrukciju od γ vidimo da se b i d pojavljuju samo na neparnim pozicijama. Međutim pošto se slova b i d pojavljuju samo na neparnim pozicijama i p je neparno (neparna pozicija+neparan period=parna pozicija) tada kvadratni faktor pripada $\{a, c\}^*$. Posmatrajući ponovo konstrukciju od γ očigledno je da ne postoji ni jedan faktor u $\{a, c\}^*$ koji je dužine veće od 3, čak i da svi oni koji su dužine manje od 3 nisu kvadrati, dakle ovaj slučaj je nemoguć.

2^o p je parno.

- 1^* Pozicija i na kojoj kvadrat počinje je parna. Kako je p parno sledi da taj kvadrat predstavlja sliku reči xx putem γ. Dakle, iz $\gamma^{n+1}(a) = \gamma(\gamma^n(a))$ sledi da γ^n sadrži kvadratni faktor pa time dolazimo do kontradikcije.
- 2^* Pozicija i na kojoj kvadrat počinje je neparna. Posmatrajući konstrukciju od γ vidimo da se $\gamma(f)$ završava drugačijim slovom za svako $f \in \{a, b, c, d\}$, što znači ako se γ završava slovom d, ono mora početi slovom a pa imamo ponovo kvadrat koji počinje na parnoj poziciji pa se vraćamo na prethodni slučaj koji je nemoguć.

Dakle, γ^{n+1} ne sadrži kvadrat.

$\square$

Neka je $\delta : \{a, b, c, d\}^\star \to \{f, g, h, i, j\}^\star$ morfizam definisan sa:

$$\delta(a) = fgifh, \delta(b) = fghij, \delta(c) = jigjh, \delta(d) = jihgf.$$

Tvrdimo da $\delta(\Gamma)$ ne sadrži preklapanje posle 2-validnog ubacivanja praznina.

Lema 5.2.3. *([7])Ne postoje faktori od $\delta(\Gamma)$ dužine ≤ 17 koji se mogu transformisati u slabo preklapanje putem 2-validnog ubacivanja praznina.*

Lema 5.2.4. *U $\delta(\Gamma)$ možemo naći dva faktora dužine 7 koji počinju istim simbolom i ili su identični ili sadrže minimum 3 uzastopna nepodudaranja.*

Dokaz. Dokazaćemo da lema važi za faktor dužine 7 koji počinje slovom f, ostali slučajevi bi bili slični. Ako niz počinje sa f onda mora biti ili $fgifhji$, a to je prefiks od $\delta(ac)$i $\delta(ad)$ ili $fghijfg$, a to je prefiks od $\delta(ba)$ ili $fjigjhf$ što je prvi faktor koji počinje sa f u $\delta(dca)$ i $\delta(dcb)$ ili $fhjigjh$ i $fhjihgf$ a oni su sufiksi od $\delta(ac)$ i $\delta(ad)$ redom. Jasno je da ako uzmemo bilo koja dva od ovih faktora da oni sadrže tri uzastopna nepodudaranja. □

Lema 5.2.5. *Ni jedan faktor od $\delta(\Gamma)$ dužine $2p + 1 > 17$ ne može biti transformisan u slabo preklapanje uz pomoć 2-validnog ubacivanja praznina.*

Dokaz. Neka je $a_0v_0a_1v_1a_2$ faktor dužine $2p + 1 > 17$ koji može biti transformisan u slabo preklapanje putem 2-validnog ubacivanja praznina. Kako su a_0, a_1, a_2 slova, a ceo faktor je dužine $2p + 1$ znači da reči v_i moraju biti dužine $p - 1$. Ako su druga slova od a_0v_0 i a_1v_1 jednaka i $v_0, v_1 \geq 7$ onda po lemi 5.2.4 imaju tri uzastopna nepodudaranja pa je očigledno da tada faktor ne može biti transformisan u slabo preklapanje putem 2-validnog ubacivanja praznina. Kako napomena 4.1.1 kaže da u dva faktora od 3 slova, bar jedno slovo moraju imati isto, znači da 1. ili 3. pozicija moraju biti jednake. Do kontradikcije dolazimo koristeći istu logiku u oba slučaja. □

Teorema 5.2.6. *Beskonačna reč $\delta(\Gamma)$ nad petoelementnim alfabetom je slabo bez preklapanja posle 2-validnog ubacivanja praznina.*

Dokaz. Dokaz sledi direkto primenom lema 5.2.3 i 5.2.5. □

Posledica 5.2.7. *Beskonačna reč $\delta(\Gamma)$ nad petoelementnim alfabetom je jako bez preklapanja nakon 2-validnog ubacivanja praznina.*

Literatura

[1] Berstel, J., Boasson, L., *Partial words and a theorem of Fine and Wilf*, Theoretical Computer Science, 218, pp. 135–141, 1999.

[2] Blanchet-Sadri, F., *Periodicity on Partial Words,* Computers and Mathematics with Applications, 2004.

[3] Blanchet-Sadri, F., *Primitive partial words*, Discrete Applied Mathematics, 148, pp. 195–213, 2005.

[4] Blanchet-Sadri, F., Anavekar, A. R., *Testing primitivity on partial words*, Discrete Applied Mathematics, 155, pp. 279–287, 2007.

[5] Blanchet-Sadri, F., Hegstrom, A., *Partial words and a Theorem of Fine and Wilf Revisited,* Theoretical Computer Science, Vol. 270, No. 1/2, pp. 401-419, 2002.

[6] Blanchet-Sadri, F., Luhmann, D. K., *Conjugacy on partial words*, Theoretical Computer Science, 289, pp. 297–312, 2002.

[7] Blanchet-Sadri, F., Mercaş, R., Rashin, A., Willett, E., *Periodicity algorithms and a conjecture on overlaps in partial words*, Theoretical Computer Science, 443, pp. 35–45, 2012.

[8] Blanchet-Sadri, F., Mercaş, R., Scott, G., *A generalization of Thue freeness for partial words*, Theoretical Computer Science, 410, pp. 793–800, 2009.

[9] Choffrut, C., Karhumäki, J., *Combinatorics on Word.*, 1997.

[10] Leupold, P., *Partial words-results and perspectives*, beleške.

[11] Lothaire, M., *Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 1997.

[12] Shyr, H. J., *Free Monoids, Languages*, Hon Min Book Company, Taichung, 1991.

[13] Thue, A., *Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen* Universitetsforlaget, 1912.

[14] Thue, A., *Über unendliche zeichenreihen* (1906.), *Selected Mathematical Papers of Axel Thue*, Universitetsforlarget, 1977.

Biografija

Tamara Ćalić rođena je 6. jula 1994. godine u Beogradu. Osnovnu školu "Slobodan Bajić Paja" završava 2009. godine u Novim Karlovcima, kao đak generacije. Nakon toga upisuje gimnaziju u Inđiji, prirodno-matematički smer, koju takođe završava sa odličnim uspehom 2013. godine. Iste godine započinje osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu. Osnovne studije završila je 2017. godine sa prosečnom ocenom 8.92 i stekla zvanje "Diplomirani profesor matematike". Obrazovanje je nastavila upisavši master akademske studije smer Master profesor matematike na istom fakultetu. Položila je sve ispite predviđene planom i programom i time stekla pravo na odbranu ovog master rada. Od septembra 2018. godine zaposlena je u "Savremenoj gimnaziji" u Beogradu, kao profesor matematike.

Novi Sad, 2019. Tamara Ćalić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Tamara Ćalić
AU

Mentor: dr Bojan Bašić
MN

Naslov rada: Parcijalne reči-neka pitanja i osobine
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2019.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 5/46/14/0/0/0/0
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Kombinatorika na rečima
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: parcijalne reči, k-periodičnost, praznine, kompatibilnost, primitivnost, komutativnost, konjugacija, morfizam, k-slobodne parcijalne reči, reči bez preklapanja, 2-validno ubacivanje praznina
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ

U ovom master radu proučavamo komutativnost i konjugovanost parcijalnih reči, kvadratno slobodne parcijalne reči kao i reči koja ne sadrže preklapanja.

Rad se sastoji od pet poglavlja. U prvom poglavlju dajemo pregled pojmova i tvrđenja koji će biti potrebni u nastavku rada. U drugom poglavlju razmatramo komutativnost parcijalnih reči, dokazujemo tvrđenje tri ekvivalentna uslova za komutativnost parcijalnih reči, uvodimo pojam (k, l)-specijalnosti i dokazujemo tvrđenje za komutativnost kada reči mogu imati više praznina. U trećem poglavlju definišemo konjugovanost parcijalnih reči, pokazujemo koji uslovi moraju biti zadovoljeni da bi dve parcijalne reči bile konjugovane. Četvrto poglavlje posvećeno je kvadratno-slobodnim parcijalnim rečima, dokazivanju tvrđenja da postoji beskonačno mnogo beskonačnih parcijalnih reči sa beskonačno puno praznina nad troelementnim alfabetom koji ne sadrži ni jedan kvadrat osim kvadrata oblika $\diamond a$ i $a\diamond$, kao i dokazivanju tvrđenja da postoji beskonačna reč nad osmoelementnim alfabetom koja ostaje netrivijalna kvadratno-slobodna nakon ubacivanja proizvoljnog broja prazina. U petom poglavlju predstavljamo parcijalne reči koje ne sadrže preklapanja, pokazujemo da ne postoji beskonačna reč nad četvoroelementnim alfabetom koja ostaje bez preklapanja nakon proizvoljnog 2-validnog ubacivanja praznina, ali nad šestoelementnim alfabetom postoji beskonačna reč koja ostaje bez preklapanja nakon 2-validnog ubacivanja praznina.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 5.7.2019.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Boris Šobot, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu;
Mentor:	dr Bojan Bašić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor;
Član:	dr Anna Slivková, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Tamara Ćalić
AU

Mentor: Bojan Bašić, Ph.D.
MN

Title: Partial words-some questions and properties
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English/Serbian (latin)
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2019
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 5/46/14/0/0/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Combinatorics on words
SD

Subject/Key words: partial words, k-periodic, holes, compatibilities, primitivity, commutativity, conjugacy, a morphism, square-freeness, overlap-freeness, 2-valid insertion of holes.
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB
In this Master degree thesis we are analyzing commutativity and conjugacy of partial words, square-free partial words, as well as overlap - freeness. The thesis consists of five chapters. In the first chapter we are presenting concept review and statements that will be used further. The second chapter presents partial words commutativity and statement proofs of three-equivalent conditions for partial words commutativity. Also, in chapter two, we are taking the k, l specialties into consideration and giving proofs for the commutativity with words that contain more than one hole. Chapter three presents the conjugacy of partial words and the conditions that need to be met in order to have two partial words conjugated. The fourth chapter deals with square-free partial words and stating proofs for the existence of infinite number of infinite partial words with infinite amount of holes over three-letter alphabet that does not contain any square other than $\diamond a$ and $a\diamond$, as well as proving the statements of the existence of the infinite word over eight-letter alphabet which stays non-trivial and square-free after arbitrary insertion of holes. Chapter five displays partial words with the overlap-freeness, non-existence of the infinite word over four-letter alphabet that remains overlap-free after two-valid arbitrary insertion of holes, and the existence of infinite word over six-letter alphabet that remains overlap-free after two-valid insertion of holes.
Accepted by the Scientific Board on: 5.7.2019.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr. Boris Šobot, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad;
Member:	Dr. Bojan Bašić, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad;
Member:	Dr. Anna Slivková, assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad.