Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Srđan Trifunović

Linearni diferencijalni operatori

Master rad

Mentor:
dr Stevan Pilipović

2016, Novi Sad

Sadržaj

I Diferencijabilne funkcije sa vrednostima u Banahovim prostorima **7**

1 Uvod **9**
- 1.1 Oznake 9
- 1.2 Diferencijal prvog i višeg reda 10

2 Bitni rezultati diferencijalnog računa **18**
- 2.1 Holomorfne funkcije 18
- 2.2 Tejlorova teorema 20
- 2.3 Particija jedinice 23
- 2.4 Inverzne funckije, implicitne funkcije i teorema o rangu 25

3 Mera slika kritičnih tačaka **30**
- 3.1 Sardova teorema 30
- 3.2 Funkcionalna zavisnost 34

4 Aproksimacione teoreme **37**
- 4.1 Borelova teorema o Tejlorovom razvoju 37
- 4.2 Weierstrass i Whitney 39
- 4.3 Aproksimaciona teorema za holomorfne funkcije 44

II Linearni diferencijalni operatori **48**

5 Furijeova transformacija **50**
- 5.1 Furijeova transformacija na Schwartz-ovim prostorima 50
- 5.2 Furijeova transformacija na L^1 i L^2 prostorima 53

6 Linearni diferencijalni operatori **56**
- 6.1 Teorema Peetre-a o reprezentaciji linearnog diferencijalnog operatora . . 56
- 6.2 Slaba neprekidnost 60

7 Prostori Soboljeva **63**
- 7.1 Definicija i osobine 63
- 7.2 Konvolucija 67

8 Eliptični i uniformno eliptični operatori **72**
- 8.1 Karakteristični polinom i adjungovani operator 72
- 8.2 Nejednakost Gårding-a 74

8.3 Nejednakost Friedrichs-a i teorema o regularnosti 77

Predgovor

Neke od najosnovnijih ideja diferencijalnog računa se mogu naći kod starih Grka (tangente), ali za pravi početak su zaslužni Newton [1] i Leibniz[2]. Oni su nezavisno jedan od drugog postavili temelje diferencijalnog računa i povezali integrale i izvode fundamentalnom teoremom integralnog računa. Danas se diferencijalni račun pojavljuje svugde gde se pojavljuju matematika i promene - u traženju ekstrema bilo kakvih pojava opisanih diferencijabilnim funkcijama, u rešavanju diferencijalnih jednačina, u fizici itd.

U ovom radu ćemo se baviti teorijom koja obuhvata realne i kompleksne funkcije, operatore, topologiju i teoriju mere. Rad je podeljen na dva dela. U prvom su dati su neki osnovni rezultati diferencijalnog računa kao i neki složeniji koji su fundamentalni u izučavanju diferencijalne topologije. Drugi deo je posvećen linearnim diferencijalnim operatorima.

U glavi 1 ćemo početi sa pojmom diferencijala. Naime, za razliku od jednodimenzionalnih realnih funkcija na koje najčešće nailazimo, diferencijal je nešto što se koristi u opštem slučaju, tj. kod funkcija koje slikaju prostore proizvoljnih dimenzija, i zapravo je linearno preslikavanje koje predstavlja linearnu aproksimaciju u okolini neke tačke. Kasnije ćemo uopštiti i diferencijale višeg reda koji su n-dimenzionalne matrice (tenzori) i završiti sa rezultatom o parcijalnim izvodima koji će nam dozvoliti da poistovetimo parcijalne izvode i diferencijabilnost.

Glava 2 je posvećena nekim opštim rezultatima koji će nam biti potrebni u daljem radu. Pokazaćemo Tejlorovu teoremu koja nam služi za predstavljanje diferencijabilnih funkcija u obliku zbira polinoma i odstupanja. Lep oblik greške koju nam daje je našao svoju široku primenu svuda u matematici a pogotovo u numeričkoj analizi. Particija jedinice, koju ćemo takođe uvesti u ovoj glavi, je pojam koji na neki način podseća na dodeljivanje karakterističnih glatkih funkcija nekoj familiji otvorenih skupova, pomoću kojih ćemo funkcije da restrikujemo na domene najosnovnijim množenjem i pri tome očuvamo što više osobina.

Glava 3 sadrži neke rezulate o meri, glatkim funkcijama i kritičnim tačkama. Ono zbog čega je ovo poglavlje bitno je što je rezultat koji ćemo dati u njemu nezavisan od dimenzija domena i kodomena što svedoči o njegovoj univerzalnosti.

Glava 4 je posvećena rezultatima o aproksimacijama funkcija pomoću drugih funkcija koje će biti različitih oblika na različitim domenima. Na kraju ćemo dati rezultat koji

[1] Isaac Newton (1643–1727)
[2] Gottfried Leibniz (1646–1716)

će nam znatno pomoći u razumevanju struktura prostora holomorfnih funkcija pomoću ortonormiranih baza i gustih familija holomornih funkcija.

Glava 5 je posvećena Fourier-ovoj transformaciji koja ima svoju široku primenu kako u teoriji tako i u praksi. Posebno je bitno napomenuti da je njena osobina povezivanja polinoma sa linarnim diferncijalnim operatorom omogućila mnoge dokaze u ovom radu kroz nejednakosti.

U glavi 6 uvodimo pojam linearnog diferencijalnog operatora preko osobine očuvanja nosača i pokazujemo da se može predstaviti u ekvivalentom obliku sume izvoda pomnoženih sa funkcijama koje ne zavise od funkcije na koju primenjujemo operator. Značaj ovog pojma leži u rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina koje zapravo možemo predstaviti u obliku $\mathcal{L}(u) = f$, gde je $\mathcal{L}(u)$ zapravo jednačina a f nehomogeni deo jednačine.

Glava 7 je posvećena prostorima Soboljeva koji su generalizacija prostora diferencijabilnih funkcija, tj. njihovo kompletiranje. Funkcijama iz ovih prostora možemo da opišemo rešenja nekih parcijalnih diferencijalnih jednačina koja inače ne bismo mogli sa običnim diferencijabilnim funkcijama.

U glavi 8, koja je ujedno i poslednja, posmatramo jednu posebnu klasu operatora, a to su eliptični i uniformno eliptični operatori. Ono što njih posebno odvaja od ostalih klasa jeste pravilnost koju poseduju.

Deo I

Diferencijabilne funkcije sa vrednostima u Banahovim prostorima

Glava 1

Uvod

Na početku ovog rada ćemo prvo uvesti neke osnovne oznake koje ćemo koristiti. Kasnije ćemo detaljno obrazložiti pojam diferencijala prvog i višeg reda kroz linearna preslikavanja i multilinearne forme, pokazati neka bitna svojstva i završiti poglavlje sa pokazivanjem ekvivalentnosti osobine diferencijabilnosti nekog reda i postojanja svih neprekidnih parcijalnih izvoda istog reda.

1.1 Oznake

Sa $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ ćemo redom obeležavati polje realnih brojeva, polje kompleksnih brojeva, polje racionalnih brojeva i prsten celih brojeva. Za prva dva ćemo podrazumevati da su snabdevena sa njihovim uobičajenim topologijama. Sa $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, ...$ ćemo obeležavati Kartezijanski proizvod struktura $\mathbb{R}, \mathbb{C}, ...$ redom, tako da:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_j \in \mathbb{R}, j = 1, ..., n\}. \tag{1.1}$$

Sa $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$ i $\mathbb{Z}^+$ ćemo obeležavati skup nenegativnih elemenata skupova $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}$ redom. Uglavnom ćemo sa α, β obeležavati n-torke nenegativnih celih brojeva, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}^+$. Uvodimo i oznake

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!,$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, \quad \text{ako} \quad \beta_j \leq \alpha_j.$$

Pišemo $\alpha \leq \beta$ ako je $\alpha_j \leq \beta_j$ za sve j, i $\alpha < \beta$ ako je $\alpha \leq \beta$ i $\alpha \neq \beta$. Tačku u $\mathbb{R}^n(\mathbb{Z}^n)$ obeležavamo sa $x = (x_1, ..., x_n)(z = (z_1, ..., z_n))$. Norme tačaka definišemo na sledeći način:

$$|x| = \max_j |x_j|, \qquad |z| = \max_j |z_j|,$$

$$||x|| = (|x_1|^2 + ... + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad ||z|| = (|z_1|^2 + ... + |z_n|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$x^\alpha = x^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \qquad z^\alpha = z^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}.$$

Ako je X (Hauzdorfov) topološki prostor i $S \subseteq X$, sa $\mathring{S}$ označavamo unutrašnjost skupa S, tj. najveći otvoren skup sadržan u S, a sa $\overline{S}$ obeležavamo zatvorenje skupa S, tj. najmanji zatvoren skup koji sadrži S. Ako su S_1 i S_2 podskupovi skupa X, pisemo $S_1 \subset\subset S_2$ ako je S_1 relativno kompaktan u S_2, tj. ako je zatvorenje skupa S_1 kompaktno u S_2. Ako je f preslikavanje otvorenog skupa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^q$ i $\lambda \leq 0$ u Ω, pišemo

$$f(x) = O(\lambda(x)), \text{ (ili } f = O(\lambda))$$

ako postoji konstanta $C > 0$ takva da $|f(x)| \leq C\lambda(x)$ za sve $x \in \Omega$ (zovemo "veliko O"). Ako $a \in \Omega$, pišemo

$$f(x) = o(\lambda(x)), \quad \text{kada } a \to \infty,$$

("malo o") ako postoji preslikavanje $\epsilon : \Omega \to R^+$ takvo da $\epsilon(x) \to 0$ kada $x \to a$ i $|f(x)| \leq \epsilon(x)\lambda(x)$. Naravno, tačku a možemo zameniti sa beskonačno.

1.2 Diferencijal prvog i višeg reda

Prvo ćemo razmatrati funkcije sa jednom promenjivom ali sa vrednostima u Banahovim prostorima. Stoga, neka je I otvoren interval u $\mathbb{R}$ i neka je V Banahov prostor sa normom $||\cdot||$. Preslikavanje $f : I \mapsto V$ je diferencijabilno u tački $x \in I$, sa izvodom $f'(x) \in V$, ako

$$\left|\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)\right|\right| \to 0, \text{ kada } h \to 0. \tag{1.2}$$

Možemo zapisati jednačinu (1.2) u ekvivalentnom obliku

$$||f(x+h) - f(x) - f'(x)h|| = o(|h|), \text{ kada } h \to 0. \tag{1.3}$$

Ako je $V = \mathbb{R}^n$ funkciju pišemo $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ tada je diferencijabilnost ekvivalentna diferencijabilnosti svake komponente f_i . Za funkcije čije su vrednosti vektori, teorema o srednjoj vrednosti se mora zameniti sa sledećom teoremom:

Teorema 1.2.1. Ako je $f : I \to V$ diferencijabilna u svakoj tački u I, tada

$$||f(y) - f(x)|| \leq |y - x| \sup_{0<t<1} \{||f'(x + t(y - x))||, \}; \quad x, y \in I \tag{1.4}$$

Dokaz. Neka je $M > \sup\limits_{0<t<1} \{||f'(x + t(y - x))||, \}$ i neka je

$$E = \{t; 0 \leq t \leq 1, ||f(x + t(y - x) - f(x)|| \leq Mt|x - y|\}.$$

E je zatvoren skup jer je f neprekidna, i $0 \in E$, E ima najveći element s. Pretpostavimo da je $s < 1$. Uzmimo $t \in E$, tako da je $1 > t > s$ i tako da je $t - s$ dovoljno malo. Tada imamo:

$$\begin{aligned}
& ||f(x + t(y - x)) - f(x)|| \\
\leq \; & ||f(x + t(y - x)) - f(x + s(y - x))|| + ||f(x + s(y - x)) - f(x)|| \\
\leq \; & M|(t - s)(y - x)| + Ms|y - x| = Mt|y - x|.
\end{aligned}$$

Poslednji red sledi iz osobine diferencijala za dve bliske tačke i da je M strogo veće od supremuma svih vrednosti izvoda na segmentu $[x, y]$. Sada imamo da s nije maksimalno što nam daje kontradikciju. Dakle, $s = 1$ čime smo završili dokaz. $\square$

Primedba 1.2.1. Ako je f neprekidna na $[x, y]$ i diferencijabilna na unutrašnjosti dobijamo nejednakost (1.4) sa supremumom za $0 < t < 1$ kao graničnu vrednost nejednakosti (1.4) primenjene na manje intervale, tj. uzimamo na primer $x, y \in [\epsilon, 1 - \epsilon]$ i puštamo $\epsilon \to 0$. Ako je $v \in V$, tada primenom (1.4) na $x \to f(x) - xv$ daje:

$$||f(y) - f(x) - v(y - x)|| \leq |y - x| \sup_{0<t<1} ||f'(x + t(y - x)) - v|| \tag{1.5}$$

Corolar 1.2.2. Neka je f neprekidna funkcija u I i diferencijabilna van zatvorenog skupa $F = \{x : f(x) = 0\}$. Ako $x \in F$ i $f'(y) \to 0$, kada $I \setminus F \ni y \to x$, tada $f'(x)$ postoji i jednak je 0.

Dokaz. Ako $y \in F$, tada je $f(y) - f(x) = 0$. Ako y nije u F, uzimamo tačku $z \in F \cap [x, y]$ koja je najbliža y. Tada nam (1.4) daje:

$$||f(y) - f(x)|| = ||f(y) - f(z)|| \leq |y - z| \sup_{0<t<1} ||f'(z + t(y - z))||,$$

što je zapravo $o(|y - x|)$ kad $y \to x$. $\square$

Primer 1.2.1. Ako je P polinom i

$$\begin{cases} P(1/x)e^{-1/x} & \text{ako } x > 0, \\ 0 & \text{ako } x \leq 0 \end{cases},$$

tada je f neprekidna. Izvod za $x > 0$ je oblika

$$\frac{(P(1/x) - P'(1/x))}{x^2 e^{-1/x}},$$

tako da $f'(0)$ postoji i jednak je 0.

Neka je U Banahov prostor i neka je X otvoren podskup od U. Ako je f funkcija iz X u V tada analogno definišemo diferencijabilnost kao u (1.4):

Definicija 1.2.1. f je diferencijabilna u $x \in X$ ako postoji $f'(x) \in L(U, V)$ takav da

$$||f(x + h) - f(x) - f'(x)h|| = o(||h||), \; h \to 0.$$

Sa $L(U, V)$ označavamo prostor linearnih preslikavanja iz U u V, koji je Banahov prostor sa normom

$$||T|| = \sup_{||x||<1} ||Tx||, \; T \in L(U, V).$$

Sa $C^1(X, V)$ obeležavamo skup neprekidno diferencijabilnih funkcija iz X u V, tj. skup funkcija f koje su diferencijabilne u svakoj tački i za koje je preslikavanje $X \ni x \mapsto f'(x) \in L(U, V)$ neprekidno.

Ako je f samo diferencijabilna u svakoj tački na zatvorenom intervalu $[x, y]$, tada nam (1.5) za sve $T \in L(U, V)$

$$||f(y)-f(x)-T(y-x)|| \leq |y-x| \sup_{0<t<1} ||f'(x+t(y-x))-T|| \tag{1.6}$$

daje da je $f(x+t(y-x))-Tt(y-x)$ diferencijabilna u t na $[0,1]$ sa izvodom

$$f'(x+t(y-x))(y-x)-T(y-x). \tag{1.7}$$

Teorema 1.2.3. Ako za sve j, $f_j \in C^1(X,V)$ i $f_j \to f$, $f'_j \to g$ lokalno uniformno u X, tada je $f \in C^1(X,V)$ i $f'=g$.

Dokaz. Ako primenimo (1.6) na f_i i obeležimo $f'_i(x)=T$, tada za $j \to \infty$ dobijamo:

$$||f(y)-f(x)-g(x)(y-x)|| \leq ||y-x|| \sup_{0<t<1} ||g(x+t(y-x))-g(x)||, \tag{1.8}$$

iz čega dobijamo da je f diferencijabilna po definiciji u x sa izvodom $g(x)$. Kako je g neprekidna, dokaz je završen. □

Teorema 1.2.4. (**O izvodima po pravcu**) Ako su funkcije f i g neprekidne na X sa vrednostima u V i $L(U,V)$ redom, i $t \mapsto f(x+ty)$ je diferencijabilno za sve $x,y \in U$ po t sa izvodom $g(x+ty)y$ kada $x+ty \in X$, tada $f \in C^1$ i $f'=g$. Dovoljno je napraviti istu pretpostavku za sve y u skupu $Y \subset U$ čije je linearno zatvorenje baš U.

Dokaz. Izraz (1.5) nam daje za malo $||y||$:

$$||f(y+x)-f(x)-g(x)y|| \leq ||y|| \sup_{0<t<1} ||g(x+ty)-g(x)||,$$

čime smo pokazali prvi deo. Da bismo pokazali drugi deo, dovoljno je pokazati da je skup svih y za koje je pretpostavka tačna zapravo linearan i zatvoren. Ovo možemo da dobijemo iz (1.5).

□

Ako je f linearno preslikavanje iz $U \to V$, onda je f naravno diferencijabilno i $f'(x)=f$. Opštije, neka su $U_1,U_2,...,U_k$ Banahovi prostori i neka je $L(U_1,...,U_k;V)$ skup svih multilinearnih preslikavanja

$$U_1 \times ... \times U_k \ni (x_1,...,x_k) \mapsto f(x_1,...,x_k) \in V \tag{1.9}$$

koja su neprekidna, gde je

$$||f|| = \sup_{||x_j||<1} ||f(x_1,...,x_k)|| < \infty.$$

$L(U_1,...,U_k;V)$ sa navedenom normom je Banahov prostor. Preslikavanje

$$U_1 \oplus ... \oplus U_k \ni (x_1,...,x_k) \mapsto f(x_1,...,x_k) \in V \tag{1.10}$$

je diferencijabilno za sve $(x_1,...,x_k)$, i diferencijal je

$$f'(x)(y_1,y_2,...,y_k) = f(y_1,...,x_k) + f(x_1,y_2,...,x_k) + ... + f(x_1,x_2,...,y_k)$$

Još jedno bitno C^1-preslikavanje je funkcija koja dodeljuje preslikavanju $T \in L(U,V)$ njegovo inverzno $T^{-1} \in L(V,U)$. Naravno, pod inverznim preslikavanjem mislimo na preslikavanje koje ispunjava:

$$TT^{-1} = \mathrm{id}_V, \quad T^{-1}T = \mathrm{id}_U \tag{1.11}$$

Ako je $X \in L(U,V)$ imamo da je $(T+S)T^{-1} = \mathrm{id}_V + ST^{-1}$, pa ako je $||S||||T^{-1}|| < 1$, desni inverz od $T+S$ je onda dat u sledećem obliku:

$$T^{-1}(\mathrm{id}_V + ST^{-1})^{-1} = \sum_0^\infty T^{-1}(-ST^{-1})^k.$$

Na isti način dobijamo da je levi inverz takođe istog oblika. Stoga, $f(T) = T^{-1}$ je definisano na otvorenom skupu i

$$||f(T+S) - f(T) + T^{-1}ST^{-1}|| = ||\sum_0^\infty T^{-1}(-ST^{-1})^{-k} - T^{-1} + T^{-1}ST^{-1}||$$
$$= \ ||\sum_2^\infty T^{-1}(-ST^{-1})^k|| = ||T^{-1}(-ST)^2\sum_0^\infty(-ST^{-1})^k|| \leq ||S||\Big(||T^{-1}||^2\frac{||T^{-1}||||S||}{1-||T^{-1}||||S||}\Big)$$

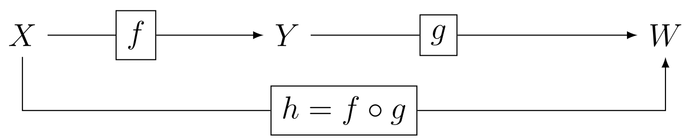
pa je f diferencijabilno u T i $f'(T)S = -T^{-1}ST^{-1}$. Odavde imamo da je f neprekidno pa je i f' neprekidno. Posmatrajmo sada kompozicije funkcija. Neka je X otvoren podskup Banahovog prostora U, $f : X \to V$ - Banahov prostor, tako da je rang sadržan otvorenom skupu Y na kojem definišemo preslikavanje $g : Y \to W$ - Banahov prostor. Ako je f diferencijabilna u x i g diferencijabilna u $y = f(x)$, tada je $h = g \circ f$ diferencijabilno u x i

$$h'(x) = g'(y)f'(x) \tag{1.12}$$

Ovaj identitet je poznat kao lančano pravilo. Odavde imamo da $h \in C^1$ ako je $f \in C^1$ i $g \in C^1$. Diferencijal f' možemo predstaviti kao preslikavanje

$$X \times U \ni (x,t) \mapsto (f(x), f'(x)) \in Y \times V \tag{1.13}$$

koje je linearno po drugoj komponentni koju možemo da posmatramo kao tangentni pravac. Kompoziciju funkcije možemo predstaviti diagramom:



Slika 1.1: Kompozicija funkcija

Takođe, ako imamo da su $f, g \in C^1$, onda dobijamo $h \in C^1$ što takođe možemo predstaviti diagramom:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\boxed{f'}"] \arrow[rr, bend right, "\boxed{h'(x) = g'(y) \circ f'(x)}"'] & L(X,Y) \arrow[r, "\boxed{\circ g'}"] & L(X,W) \end{tikzcd}$$

Slika 1.2: Diferencijal kompozicije funkcija

jer je kompozicija linearnih preslikavanja $A \in L(X,Y)$ i $B \in L(Y,W)$ zapravo linearno preslikavanje $A \circ B \in L(X,W)$. Umesto f', pisaćemo i df, pogotovo kada je f realna funkcija. Ako je f definisana na otvorenom skupu u $\mathbb{R}^n$, za $t = \sum t_j e_j$ imamo:

$$(df)(t) = (df)(\sum t_j e_j) = \sum t_j df(e_j) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} t_j.$$

Ali, kako imamo da je $t_j = (dx_j)(t)$, pa možemo da napišemo jednačinu u obliku

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Naravno, diferencijal funkcije se može predstaviti i u matričnom obliku, s obzirom da se radi o linearnom preslikavanju. Naime, ako su U_1 i U_2 podskupovi skupova $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ redom i $f : U_1 \to U_2$ diferencijabilno preslikavanje, tada za $a = (a_1, ..., a_n) \in U_1$ i $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)) \in U_2$:

$$(df)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}_{m \times n}$$

U nastavku ćemo pokazati teoremu o izvodu inverzne funkcije.

Teorema 1.2.5. Neka je X otvoren u U i neka $f \in C^1(X,V)$, i neka je $x_0 \in X$ i $f(x_0) = y_0$. Za egzistenciju funckije $g \in C^1(Y,U)$, gde je Y okolina tačke y_0 za koju važi:

$$\begin{aligned} &a) \quad f \circ g &&= \text{id, u okolini } y_0, \text{ ili} \\ &b) \quad g \circ f &&= \text{id, u okolini } x_0, \text{ ili} \\ &c) \quad f \circ g &&= \text{id, u okolini } y_0, \text{ i } g \circ f = \text{id u okolini } x_0 \end{aligned}$$

je potrebno i dovoljno da postoji linearno preslikavanje $A \in L(V,U)$ takvo da redom važi:

$$\begin{aligned} &a') \quad f'(x_0)A &&= \mathrm{id}_V \\ &b') \quad Af'(x_0) &&= \mathrm{id}_U \\ &c') \quad f'(x_0)A &&= \mathrm{id}_V, Af'(x_0) = \mathrm{id}_U. \end{aligned}$$

Uslov c') je ekvivalentan bijektivnosti funkcije $f'(x_0)$ koji povlači da je g jedinstveno određeno u okolini y_0. Ako je $V(U)$ konačne dimenzije, tada je a') (b')) ekvivalentno sirjektivnosti (injektivnosti) $f(x_0)$.

Dokaz. Potreban uslov sledi direktno iz lančanog pravila. Da bi pokazali dovoljan uslov, prvo primetimo da ako je $f \circ g_1 = \mathrm{id}$ u okolini y_0 i $g_2 \circ f = \mathrm{id}$ u okolini x_0 tada je $g_1 = g_2 \circ f \circ g_1 = g_2$ u okolini y_0 što dokazuje jedinstvenost u c), a pod a) i b) problem svodi na dokaz egsistencije. Ako zamenimo f sa $f \circ A$, tj. $A \circ f$, vidimo da je dovoljno da samo posmatramo slučaj kada je $U = V$ i $f'(x_0) = \mathrm{id}$. Izaberimo $\delta > 0$ tako da

$$||f'(x) - \mathrm{id}|| < \frac{1}{2}, \quad \text{kada} \quad ||x - x_0|| \leq \delta.$$

Kada je $||x_j - x_0|| \leq \delta, j = 1, 2$, koristeći (1.6) imamo da

$$||f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)|| \leq \frac{||x_1 - x_2||}{2}. \tag{1.14}$$

Dakle, f je injektivna na lopti $\{x; ||x - x_0|| \leq \delta\}$. Da bismo rešili jednačinu $f(x) = y$ kada je $y - y_0 < \frac{\delta}{2}$, formiramo niz

$$x_k = x_{k-1} + y - f(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, ... \tag{1.15}$$

za koji hoćemo da pokažemo da konvergira u lopti $\{x; ||x - x_0|| < \delta\}$. Imamo da je

$$||x_1 - x_0|| = ||y - y_0|| < \frac{\delta}{2}$$

Ako je $k > 1$ i $||x_j - x_0||$ za sve $j < k$, onda je

$$\begin{aligned} ||x_k - x_{k-1}|| &= ||x_{k-1} - f(x_{k-1}) - (x_{k-2} - f(x_{k-2}))|| \\ &\leq \frac{||x_{k-1} - x_{k-2}||}{2} < \frac{\delta}{2^k} \end{aligned}$$

po (1.14). Dakle

$$||x_k - x_0|| < \delta \sum_{1}^{k} 2^{-j} < \delta \tag{1.16}$$

pa je niz x_k ostaje u lopti $\{x; ||x - x_0|| < \delta\}$ i Košijev je. Za granicu takođe važi da ostaje u istoj lopti, i kada $k \to \infty$ dobijamo da je $f(x) = y$ iz (1.15). Da bismo dokazali da je inverzna funkcija $g(y) = x$, koja je sada definisana kada je $||y - y_0|| < \frac{\delta}{2}$, pripada C^1, stavimo da je

$$g(y) = x, \quad g(y + k) = x + h$$

Ovo znači da je $f(x + h) = y + k$ i da je $f(x) = y$. Odavde sledi da je

$$k = f(x + h) - f(x) = f'(x)h + o(||h||). \tag{1.17}$$

Iz (1.14) imamo da je $||k - h|| < ||\frac{h}{2}||$, odakle sledi da je $\frac{||h||}{2} < ||k|| < 2||h||$. Kako je $||f'(x)^{-1}|| < 2$ dobijamo da je

$$h = f'(x)^{-1}k + o(||k||) \tag{1.18}$$

što dokazuje da je g diferencijabilna i da je $g'(y) = f'(g(y))^{-1}$, što je zapravo neprekidna funkcija po y. □

Sada ćemo definisati izvode višeg reda i prostor $C^k(X,V)$ gde je X, kao i ranije, otvoren podskup Banahovog prostora U ali sada $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Ovo možemo uraditi induktivno: $f \in C^k(X,V)$ ako $f \in C(X,V)$ i $f' \in C^{k-1}(X, L(U,V))$. Izvod f'' funkcije f' nazivamo drugim izvodom, i tako dalje

$$f^{(k)} \in C(X, L(U, L(U, ..., L(U,V)))).$$

Vektorski prostor $L(U, L(U, ..., L(U,V)))$ je izomorfan Banahovom prostoru $L(U, ..., U; V) = L^k(U,V)$ k-linearnih preslikavanja iz U u V. Štaviše, uvek imamo da je

$$L(U, L(U_1, ..., U_j; V)) = L(U, U_1, ..., U_j; V).$$

je ako je f element prostora na levoj strani, ako se tvrdnja za j zameni sa tvrdnjom za $j-1$, tada je

$$U \times U_1 \times ... \times U_j \ni (x, x_1, ..., x_j) \to f(x)(x_1, ..., x_j) \in V$$

element prostora sa desne strane, i svi njegovi elementi se mogu na isti način dobiti. Preslikavanje je očigledno linearno i očuvava normu. Sa $L_s^k(U,V)$ ćemo obeležavati prostor simetričnih k linearnih formi iz U u V, tj. forme takve da vrednost u bilo kojoj tački nije promenjena permutacijom koordinata.

Teorema 1.2.6. Ako je $f \in C^k$ tada je $f^{(k)}$ simetrična multilinearna forma, tj. redosled diferenciranja nije bitan.

Dokaz. Neka je $\Delta_y F(x) = F(x+y) - F(x)$. Ako ponavljano primenjujemo (1.6) dobijamo da ako je L multilinearna forma, onda

$$\begin{aligned}
& ||\Delta_{y_k} ... \Delta_{y_1} f(x) - L(y_1, ..., y_k)|| \\
\leq & \sup_{0<t<1} ||\Delta_{y_{k-1}} ... \Delta_{y_1} f'(x + t y_k)(y_k) - L(y_1, ..., y_k)|| \\
\leq & \sup_{0<t_j<1} ||f^{(k)}\Big(x + \sum_1^k t_j y_j; y_1, ..., y_k\Big) - L(y_1, ..., y_k)||.
\end{aligned}$$

Ako izaberemo $L = f^{(k)}(x)$, dobijamo da

$$||\Delta_{y_k} ... \Delta_{y_1} f(x) - f^{(k)}(x; y_1, ..., y_k)|| = o(||y_1||...||y_k||). \tag{1.19}$$

Ovim je $f^{(k)}$ u potpunosti određeno, i kako je $\Delta_{y_k} ... \Delta_{y_1} f(x)$ ne zavisi od redosleda razlika, imamo da je $f^{(k)}$ simetrična. □

Iz (1.12), po indukciji sledi da je $h = g \circ f \in C^k$ ako su $f, g \in C^k$, jer ako je ovo pokazano za vrednosti manje od k imamo da $g' \circ f \in C^{k-1}$ i $f' \in C^{k-1}$, i $f' \in C^{k-1}$, i kompozicija linearnih preslikavanja

$$L(V,W) \times L(U,V) \to L(U,W)$$

je neprekidno, dakle glatko. Teorema o diferencijabilnosti inverznog preslikavanja je takođe ostaje tačna ako C^1 zamenimo sa C^k svuda. Štaviše, preslikavanje

$$L(U,V) \ni T \to T^{-1} \in L(V,U) \tag{1.20}$$

je u C^k, gde je njen k-ti izvod definisan kao

$$(S_1, ..., S_k) \to (-1)^k \sum S_{i_1} T^{-1} S_{i_2} T^{-1} ... S_{i_k} T^{-1} \tag{1.21}$$

sabran po svim permutacijama na skupu $\{1, ..., k\}$. U dokazu prethodne teoreme dobijamo induktivno da je $g \in C^k$ ako je $f \in C^k$, koristeći $g'(y) = f'(g(y))^{-1}$.

Pretpostavimo sada da je f definisana na otvorenom skupu $X \subset \mathbb{R}^n$. Iz teoreme 1.2.4 sledi da $f \in C^k$ ako i samo ako su svi parcijalni izvodi

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{i_j}}$$

reda $j \leq k$ definisani i neprekidni. Po teoremi 1.2.6 znamo da redosled diferenciranja nije bitan. Sa zapisom $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ možemo da zapišemo ove parcijalne izvode u obliku

$$\partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n} f = \partial^\alpha f.$$

Glava 2

Bitni rezultati diferencijalnog računa

U ovom poglavlju ćemo pokazati neke osnovne, ali bitne teoreme. Na početku ćemo se prisetiti nekih rezultata iz kompleksne analize koje ćemo ovde dati bez dokaza. Kasnije ćemo pokazati Tejlorovu teoremu, uvesti pojam particije jedinice, pokazati teoreme o implicitnom i inverznom preslikavanju i teoremu o rangu. Ove teoreme će nam biti esencijalne u pokazivanju složenijih teorema u poglavljima 3 i 4.

2.1 Holomorfne funkcije

Ubuduće ćemo uglavnom koristiti prostore oblika $C^k(\Omega, \mathbb{R})$ koje ćemo kraće obeležavati sa $C^k(\Omega)$. Sa $C^\infty(\Omega)$ ćemo obeležavamo skup funkcija koje pripadaju $C^k(\Omega)$ za sve k i te funkcije ćemo zvati glatke. Funkcije iz $C^k(\Omega)$ nazivamo C^k-funkcije na Ω. Za bilo koju funkciju f definisanu na Ω, sa $\mathrm{supp}(f)$ označavamo zatvorenje skupa

$$\{s \in \Omega : f(x) \neq 0\}$$

kojeg nazivamo nosač funkcije f. Sa $C_0^\infty(\Omega)$ obeležavamo skup funkcija $f \in C^k(\Omega)$ takvih da je $\mathrm{supp}(f)$ kompaktan. Ako je E konačno-dimenzionalan R vektorski prostor, sa $C^k(\Omega, E), C_0^k(\Omega, E)$ obeležavamo skup svih preslikavanja $f : \Omega \to E$ takvih da, za bilo koju neprekidnu (linearnu) funkcionelu l na E, funckija $l \circ f \in C^k(\Omega), C_0^k(\Omega), \ldots$. Ako je $e_1, ..., e_q$ $\mathbb{R}$-baza za E, i $f : \Omega \to E$ preslikavanje, tada za sve $x \in \Omega$, postoje realni brojevi $f_1(x), ..., f_n(x)$ takvi da je

$$f(x) = \sum_{j=1}^{q} f_j(x) e_j.$$

Naravno, $f \in C^k(\Omega, E), C_0^k(\Omega, E)$ ako i samo ako za sve j važi $f_j \in C^k(\Omega, E), C_0^k(\Omega, E)$. Elementi $C^k(\Omega, E)$ nazivamo C^k preslikavanjima skupa Ω u E. Ako je $E = \mathbb{R}^q$ pišemo $C^k(\Omega, q), C_0^k(\Omega, q)$ za $C^k(\Omega, E), C_0^k(\Omega, E)$. Za $f \in C^k(\Omega, E)$, definišemo izvode D^α za $|\alpha| \leq k$. Tada je

$$D^\alpha f \in C^{k-|\alpha|}(\Omega, E).$$

Ubuduće ćemo po potrebi izjednačavati funckije $f \in C_0^k(\Omega)$ sa funckijama $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$

tako da je $g = f$ na Ω i $g = 0$ na $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Funkcija f definisana na Ω je analitička ako za bilo koje $a = (a_1, ..., a_n) \in \Omega$, postoji red

$$P_a(x) \equiv \sum_\alpha c_\alpha (x-a)^\alpha = \sum_{\alpha_j \geq 0} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - a_n)^{\alpha_n}$$

koji konvergira ka $f(x)$ za x u okolini U tačke a. Red konvergira uniformno ka f na kompaktnom podskupu skupa U (tako da je f neprekidno), a takođe i red izvoda. Stoga, $f \in C^\infty(\Omega)$ i za bilo koje $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$,

$$D^\beta f(x) = D^\beta P_a(x) = \sum_\alpha c_\alpha D^\beta (x-a)^\alpha$$

Štaviše, red je jedinstveno određen funkcijom f:

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a).$$

Analitička preslikavanja iz Ω u konačno dimenzionalan vektorski prostor su definisana na isti način kao iznad. Ako su U, V otvoreni skupovi u $\mathbb{R}^n$ i $f : U \to V$ je homeomorfizam takav da su f i f^{-1} C^k, tada je f C^k-difeomorfizam (ili samo difeomorfizam) skupa U na V. Ako je $U = V$, onda f nazivamo C^k-automorfizam. Ako su f i f^{-1} realne analitičke, onda koristimo naziv analitički izomorfizam (automorfizam). Ako je U otvoren skup u $\mathbb{C}^n$ i f je funkcija na U sa kompleksnim vrednostima, tada f nazivamo holomorfnom ako za bilo koje $a \in U$ postoji red $\sum c_a(z-a)^\alpha$, koji konvergira ka $f(z)$ za sve z u okolini a. Ako je E konačno dimenzionalan $\mathbb{C}$ vektorski prostor konačno dimenzionalan $\mathbb{C}$ vektorski prostor, preslikavanje $f : U \to E$ je holomorfno ako za bilo koje $\mathbb{C}$ linearno preslikavanje l na E, $l \circ f$ je holomorfno. Preslikavanje $f : \Omega \to \mathbb{C}^q$ je holomorfno ako i samo ako, kada napišemo $f = (f_1, ..., f_n)$, svaka komponenta je holomorfna. Preslikavanje $f : U \to V$, gde su U i V otvoreni skupovi u $\mathbb{C}^n$, nazivamo $\mathbb{C}$ analitičkim izomorfizmom ako su f i f^{-1} holomorfna. Teorema Osgood-a, koju ovde nećemo pokazivati, nam daje da su sva 1-1 holomorfna preslikavanja iz U u V $\mathbb{C}$ - analitički izomorfizmi.

Teorema 2.1.1 (**Cauchy**[1]**-Riemann**[2]**).** Funckija definisana na otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{C}^n$ je holomorfna ako i samo ako je neprekidna, i za bilo koje j, $1 \leq j \leq n$, parcijalni izvodi

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\Big), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\Big)$$

postoje i jednaki su 0. Ovde je $z_j = x_j + iy_j$, x_j, y_j su realni, a $i = \sqrt{-1}$.

Za holomorfnu funkciju f na U, pišemo

$$D^\alpha f = \Big(\frac{\partial}{\partial z_1}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{\partial}{\partial z_n}\Big)^{\alpha_n} f.$$

Teorema 2.1.2 (**Princip analitičkog produženja**)**.** Ako je f holomorfno (ili realno analitičko) preslikavanje na povezanom skupu $U(\Omega)$ u $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ i $D^\alpha f(a) = 0$ za sve $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ i neko $a \in U(\Omega)$, tada se $f \equiv 0$. Takođe, ako je $f = 0$ na nekom otvorenom nepraznom podskupu skupa $U(\Omega)$, tada se $f \equiv 0$.

[1] Augustin-Louis Cauchy, (1789 - 1857), francuski matematičar

[2] Georg Friedrich Bernhard Riemann, (1826 – 1866), nemački matematičar

Teorema 2.1.3 (**Weierstrass**[3]). Ako je $\{f_k\}$ niz holomorfnih funkcija koji konvergira uniformno na kompaktnom podskupu skupa U ka funkciji f, tada je f holomorfno na U. Štaviše, za bilo koje α, $\{D^\alpha f_k\}$ konvergira ka $D^\alpha f$, uniformno na kompaktnim skupovima.

Teorema 2.1.4 (**Montrel**[4]). Ako je $\mathcal{F}$ familija holomorfnih funkcija na U koje su uniformno ograničene na kompaktnim podskupovima K skupa U:

$$|f(x)| \leq M \quad \text{za sve } x \in K, f \in \mathcal{F}$$

tada bilo koji niz elemenata iz $\mathcal{F}$ sadrži podniz koji konvergira uniformno na kompaktnim podskupovima skupa U.

Teorema 2.1.5 (**Princip maksimuma**). Neka je f holomorfna funckija na povezanom otvorenom skupu na $\mathbb{C}^n$. Tada, preslikavanje $f : U \to \mathbb{C}$ je ili konstantno ili otvoreno. Preciznije, ako je U povezan skup i ako obeležimo

$$M = \sup_{\theta \in \partial U, z \to \theta, z \in U} \overline{lim} |f(z)|$$

onda imamo da je $|f(z)| < M$ za sve $z \in U$, sem ako je f konstantna.

Teorema 2.1.6 (**Cauchy**). Ako je f preslikavanje holomorfno na U i $|f(z)| \leq M$ za sve $z \in U$, tada za bilo koji kompaktan skup $K \subset U$ i za bilo koje α, imamo

$$|D^\alpha f(z)| \leq M\alpha! \delta^{-|\alpha|}, \quad \text{za } z \in K$$

gde je δ udeljenost skupa K od ruba skupa U.

2.2 Tejlorova teorema

Lema 2.2.1. Neka je f realna analitička na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (skup $\mathbb{R}^n$ gledamo kao zatvoren podskup skupa $\mathbb{C}^n$). Tada postoji otvoren skup $U \subset \mathbb{C}^n$, $U \cap \mathbb{R}^n = \Omega$ i holomorfna funckija F na U takva da je $F_{|\Omega} = f$.

Dokaz. Neka je $a \in \Omega$ i neka je $P_a(x) = \sum c_\alpha (x-a)^\alpha$ red koji konvergira ka $f(x)$ za $|x - a| < r_a, r_a > 0$. Definišimo

$$U_a = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - a| < r_a\}.$$

Tada, za $z \in U_a, P_a(z) = \sum c_\alpha (z-a)^\alpha$ konvergira i takođe je holomorfna funkcija na U_a. Neka je $U = \cup_{a \in \Omega} U_a$. Tvrdimo da ako je $U_a \cap U_b = U_{a,b} \neq \emptyset$, tada je $P_a = P_b$ u $U_{a,b}$. Štaviše, $U_{a,b}$ je konveksan, dakle povezan. Dalje, ako je $U_{a,b} \neq \emptyset$, tada je $U_{a,b} \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$, i za bilo koje $c \in U_{a,b} \cap \mathbb{R}^n$, imamo da je

$$D^\alpha P_a(c) = D^\alpha f(c) = D^\alpha P_b(c)$$

i sada možemo primeniti princip analitičkog produženja od ranije. Stoga možemo definisati □

Vratimo se sada na funkcije sa realnim vrednostima. Neka je N okolina zatvorenog jediničnog intervala $[0, 1]$ u $\mathbb{R}$ i neka je $f \in C^k(N), k \geq 1$. Tada imamo:

[3]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, (1815 - 1897), nemački matematičar)
[4]Paul Antoine Aristide Montel (1876 – 1975), francuski matematičar

Lema 2.2.2. Postoji θ, $0 \le \theta \le 1$ takvo da je

$$f(1) = \sum_{v=0}^{k-1} \frac{f^{(v)}(0)}{v!} + \frac{f^{(k)}(\theta)}{k!},$$

gde je

$$f^{(v)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right) f(t).$$

Dokaz. Za neprekidnu funkciju g na N, definišimo

$$I_0(g,t) = g(t), \; I_r(g,t) = \int_0^t I_{r-1}(g,s)ds, \; r \ge 1.$$

Očigledno, ako je $g \in C^k(N)$ i $f^{(v)}(0) = 0$ za $0 \le v \le k-1$, imamo

$$g(t) = I_k(g^{(k)}, t).$$

Ako primenimo ovo na

$$g(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{k-1} \frac{f^{(k)}(0)}{v!} t^k,$$

dobijamo

$$f(1) - \sum_{v=0}^{k-1} \frac{f^{(v)}(0)}{v!} = I_k(g^{(k)}, 1) = I_k(f^{(k)}, 1). \tag{2.1}$$

Ako su m i M redom donja i gornja granica funckije $f^{(k)}$ na intervalu $[0,1]$, imamo

$$\frac{m}{k!} = m \int_0^1 \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} ds \le ... \le I_k(f^{(k)}, 1) \le ... \le M \int_0^1 \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} ds = \frac{M}{k!}.$$

Kako je $f^{(k)}$ neprekidna, zbog toga ostvaruje sve vrednosti između m i M, pa postoji θ, $0 \le \theta \le 1$ za koje važi

$$I_k(f^{(k)}, 1) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\theta).$$

Ovim je dokaz leme završen. □

Jednostavno je pokazati indukcijom da je

$$I_k(g,t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^t g(s)(t-s)^{k-1} ds$$

Stoga, jednačina (2.1) se može napisati u sledećem obliku:

$$f(1) = \sum_{v=0}^{k-1} \frac{f^{(v)}(0)}{v!} + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} f^{(k)}(t) dt. \tag{2.2}$$

Teorema 2.2.3 (Taylor[5]). Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i neka $f \in C^k(\Omega)$. Neka $x, y \in \Omega$ i pretpostavimo da je duž $[x,y] = \{x + t(y-x) : t \in [0,1]\}$ sadržana u Ω. Tada imamo

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le k-1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(y)(x-y)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha} D^\alpha f(\theta)(x-y)^\alpha,$$

gde je $\theta \in [x,y]$.

[5]Brook Taylor (1685 - 1731), Engleski matematičar.

Dokaz. Tvrđenje teoreme direktno sledi primenom leme (2.2.2) na funkciju

$$g(t) = f(y + t(x - y)),$$

koja pripada $C^k(N)$ za dobro odabranu okolinu N intervala $[0,1]$. $\square$

Ako $f \in C^m(\Omega)$, i ako je S podskup Ω, definišemo normu

$$||f||_m^S = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in S} |D^\alpha f(x)|.$$

Primetimo da za $f, g \in C^m(\Omega)$ imamo

$$||fg||_m^S \leq ||f||_m^S ||g||_m^S, \quad ||f+g||_m^S \leq ||f||_m^S + ||g||_m^S. \tag{2.3}$$

Definišemo topologiju na $C^k(\Omega)$, gde je k konačno, preko baza okolina funkcija $g \in C^k(\Omega)$

$$B(g, K, \epsilon) = \{f \in C^k(\Omega) : ||f - g||_k^K < \epsilon\},$$

gde ϵ trči kroz sve pozitivne realne brojeve a K kroz sve kompaktne podskupovęskupa Ω. Odgovarajuća topologija na $C^\infty(\Omega)$ se dobija preko baza okolina funckija

$$\{f \in C^\infty(\Omega) : ||f - g||_m^K < \epsilon\},$$

gde ovaj put m trči kroz sve pozitivne cele brojeve. Ova topologija se može analogno uvesti na prostoru $C^k(\Omega, E)$, gde je $0 \leq k \leq \infty$ i E je konačno dimenzionalan vektorski prostor. Lako je primetiti da topologija navedena gore na $C^k(\Omega)$ ima prebrojivu bazu. Red $\{f_k\}$ konvergira ka 0, ako i samo ako $D^\alpha f_k \to 0$ uniformno na kompaktnim skupovima za sve α takve da $|\alpha| \leq k$ (ili sve α ako je $k = \infty$). Takođe, možemo uvesti metriku na datoj topologiji; ako je $k < \infty$, možemo da udaljenost funkcija na sledeći način:

$$d(f, g) = \sum_{v=0}^{\infty} 2^{-v} \frac{||f - g||_k^{K_v}}{1 + ||f - g||_k^{K_v}},$$

gde je $\{K_v\}$ niz kompaktnih skupova takvih da važi $K_v \subset \overset{\circ}{K}_{v+1}$ i $\cup K_v = \Omega$. Ako je $k = \infty$, možemo da uzmemo sledeću funkciju

$$\sum_{v=0}^{\infty} 2^{-v} \frac{||f - g||_v^{K_v}}{1 + ||f - g||_v^{K_v}}.$$

Teorema 2.2.4. Za $0 \leq k \leq \infty$, $C^k(\Omega)$ je kompletan metrički prostor.

Dokaz. Dovoljno je da pokažemo da ako je $\{g_v\}$ niz funkcija u $C^k(\Omega)$ i

$$||g_v - g_\mu||_m^K \to 0$$

kada $\mu, v \to \infty$ za sve $m \leq k$ i sve kompaktne skupove $K \subset \Omega$, onda postoji $g \in C^k(\Omega)$ takvo da

$$||g_v - g||_m^K \to 0,$$

za sve $m \leq k$ i sve kompaktne skupove K. Za sve α, tako da je $|\alpha| \leq k$, postoji funkcija g_α takva da

$$||D^\alpha(g_v) - g_\alpha||_0^K \to 0, \quad \text{kada} \quad v \to \infty.$$

(Jer očigledno $D^\alpha(g_v - g_\mu) \to 0$ uniformno na kompaktnim skupovima). Ostalo je samo još da pokažemo da je $g = g_0 \in C^k(\Omega)$ i $D^\alpha g = g_\alpha$. Dovoljno je da pokažemo da ako je $|\alpha| \leq k-1$ i $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n), |\beta| = 1$, onda $g_\alpha \in C^1(\Omega)$ i $D^\beta g_\alpha = g_{\alpha+\beta}$. Ako $a \in \Omega$ i x je blizu a, tada, po Tejlorovoj formuli imamo:

$$D^\alpha g_v(x) - D^\alpha g_v(a) = \sum_{|\beta|=1} D^{\alpha+\beta} g_v(\theta_v)(x-a)^\beta, \tag{2.4}$$

gde je θ_v tačka na duži $[a, x]$. Možemo izabrati podniz v_p takav da

$$\theta_{v_p} \to \theta \in [a, x]$$

Ako zamenimo v sa v_p u jednakosti (2.4) i pustimo $p \to \infty$, dobijamo

$$g_\alpha(x) - g_\alpha(a) = \sum_{|\beta|=1} g_{\alpha+\beta}(\theta)(x-a)^\beta = \sum_{|\beta|=1} g_{\alpha+\beta}(a)(x-a)^\beta + o(|x-a|).$$

Druga jednakost sledi iz neprekidnosti funkcije $g_{\alpha+\beta}$. Ovo implicira da je $g_\alpha \in C^1(\Omega)$ i da za $|\beta| = 1$ imamo $D^\beta g_\alpha = g_{\alpha+\beta}$.

□

Propozicija 2.2.5. Ako je $f \in C^\infty(\Omega)$, tada je f analitička ako i samo ako za bilo koji kompaktan skup $K \subset \Omega$, postoji $M > 0$ takvo da

$$|D^\alpha f(x)| \leq M^{|\alpha|+1} \alpha!, \quad \text{za} \;\; x \in K \text{ i sve } \alpha. \tag{2.5}$$

Dokaz. Ako je f analitička, nejednakost sledi direktno iz leme 2.2.1 i teoreme 2.1.6. Obrnuto, ako imamo jednakost 2.5 i x pripada kompaktnoj konveksnoj okolini skupa K tačke $a \in \Omega$, za $\theta \in [a, x]$ imamo

$$\Big| \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\theta)(x-a)^\alpha \Big| \leq k^n M^{k+1} |x-a|^k.$$

Ako je $|x - a| < \frac{1}{M}$, Tejlorova formula nam daje da

$$\sum \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a)(x-a)^\alpha$$

konvergira ka $f(x)$. □

2.3 Particija jedinice

Definicija 2.3.1. Familija skupova $\{E_i\}_{i\in I}$ koji su podskupovi topološkog prostora X je lokalno konačna ako za sve $a \in X$ postoji okolina U takva da je familija

$$\{i \in I : E_i \cap U \neq \emptyset\} \;\; \text{konačna.}$$

Definicija 2.3.2. Familiju $\{E'_i\}_{i\in I}$ nazivamo prefinjenje familije $\{E_i\}_{i\in I}$ ako postoji preslikavanje

$$r : J \to I,$$

takvo da je $E'_j \subset E_{r(j)}$ za sve $j \in J$.

Propozicija 2.3.1. Ako je X lokalno konačan Hauzdorfov prostor koji je konačna unija kompaktnih skupova, tada je X parakompaktan, tj. bilo koji otvoren pokrivač ima lokalno konačno prefinjenje , koje je takođe otvoren pokrivač. Dalje, za bilo koji lokalno konačan pokrivač $\{U_j\}_{i \in I}$ skupa X, postoji otvoren pokrivač $\{V_i\}_{i \in I}$ skupa X (sa istim skupom indeksa) takav da je $\overline{V_i} \subset U_i$.

Definicija 2.3.3. Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i neka je $\{U_i\}_{i \in I}$ otvoren pokrivač. Familija $\{\phi_i\}_{i \in I}$ C^∞ funkcija se zove particija jedinice koja odgovara pokrivaču $\{U_i\}_{i \in I}$, ako

$$0 \leq \phi_i \leq 1; \quad \mathrm{supp}(\phi_i) \subset U_i;$$

familija $\mathrm{supp}(\phi_j)$ je lokalno konačna i

$$\sum_{i \in I} \phi_i(x) = 1, \quad \text{za bilo koje } x \in \Omega.$$

Sada kada smo uveli pojam particije jedinice, želimo da ispitamo kada ga možemo koristiti, tj. kada postoji skup funkcija koji odgovara otvorenom pokrivaču nekog otvorenog podskupa $\mathbb{R}^n$. Odgovor je zapravo uvek, ali prvo želimo da pokažemo dve leme koje će nam obezbediti postojanje glatke funkcije koja za nosač ima podskup proizvoljnog otvoreneg skupa.

Lema 2.3.2. Postoji C^∞ funkcija η na $\mathbb{R}^n$ takva da je $\eta \geq 0$ i $\mathrm{supp}(\eta) \subset \{x : ||x|| < 1\}$.

Dokaz. Neka je $0 < c < 1$ i neka je s glatka funkcija na $\mathbb{R}^1$ definisana na sledeći način:

$$s(r) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{c-r}} & \text{ako } r < c, \\ 0 & \text{ako } r \geq c. \end{cases}$$

To na primer može biti funkcija

$$\eta(x) = s(x_1^2 + ... + x_n^2).$$

□

Lema 2.3.3. Neka je K kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$ i neka je U otvoren skup koji sadrži K. Tada postoji glatka funkcija ϕ na $\mathbb{R}^n$ takva da je $\phi(x) \geq 0$ za sve x, $\phi(x) > 0$ za $x \in K$ i $\mathrm{supp}(\phi) \subset U$.

Dokaz. Neka je δ rastojanje skupa K od $\mathbb{R}^n \setminus U$. Za $a \in K$, definišimo funkciju:

$$\phi_a(x) = \eta\Big(\frac{x-a}{\delta}\Big),$$

gde je naravno η ista funkcija iz prethodne leme. Neka je

$$V_a = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi_a(x) < 0\}.$$

Tada je $a \in V_a \subset U$. Kako je K kompaktan, postoji konačno mnogo tačaka $a_1, ..., a_p \in K$ za koje važi:

$$K \subset V_{a_1} \cup ... \cup V_{a_p}.$$

Da bismo završili dokaz leme, uzmimo na primer funkciju $\phi = \sum_{j=1}^{p} \phi_{a_j}$. □

Teorema 2.3.4. Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i neka je $\{U_i\}_{i\in I}$ otvoren pokrivač. Tada postoji particija unije koja odgovara familiji $\{U_i\}_{i\in I}$.

Dokaz. Neka je $\{V_j\}_{j\in J}$ lokalno konačno profinjenje relativno kompaktnih podskupova Ω familije $\{U_i\}_{i\in I}$. Neka je $\{W_j\}_{j\in J}$ otvoren pokrivač tako da za svako j važi $\overline{W}_j \subset V_j$. Po prethodnoj lemi postoji glatka funkcija ψ_j na Ω, tako da je $\psi_j(x) > 0$ za $x \in \overline{W}_j$ i $\mathrm{supp}(\psi_j) \subset V_j$, $\psi_j \geq 0$. Definišimo funkciju

$$\phi'_j = \frac{\psi_j}{\sum_{j'\in J}\psi_{j'}}$$

(Kako je $\{V_j\}$ lokalno konačna, $\sum'_{j\in J}\psi_j$ je definisana, pripada $C^\infty(\Omega)$, i svuda je > 0, kako je $\psi_j > 0$ na W_j i $\bigcup W_j = \Omega$.) Očigledno

$$\phi'_j \geq 0, \quad \mathrm{supp}(\phi'_j) \subset V_j \quad \text{i} \quad \sum_{j\in J}\phi'_j = 1.$$

Neka je $r : I \to J$ preslikavanje takvo da je $V_j \subset U_{r(j)}$. Neka je $J_i \subset J$ skup $r^{-1}(i)$. Neka je $\phi_i = \sum_{j\in J_i}\phi'_j$, gde je praznu sumu izjednačavamo sa 0. Kako su skupovi J_i međusobno disjunktni i čine pokrivač skupa J, imamo

$$\sum_{i\in I}\phi_j = \sum_{j\in J}\phi_j = 1$$

Učigledno, $\mathrm{supp}(\phi_j) \subset U_i$. Kako je familija $\{\mathrm{supp}(\phi'_i)\}$ lokalno konačna, onda je i $\{\mathrm{supp}(\phi'_j)\}$. $\square$

Corolar 2.3.5. Neka je Ω otvoren u $\mathbb{R}^n$, neka je X zatvoren podskup skupa Ω i neka je U otvoren podskup skupa Ω koji sadrži X. Tada postoji glatka funkcija ψ na Ω takva da je $\psi(x) = 1$ ako $x \in X$, $\psi(x) = 0$ ako $x \in \Omega \setminus U$ i $0 \leq \psi \leq 1$ svugde drugde.

Dokaz. Po prethodnoj teoremi, postoje glatke funkcije $\phi_1, \phi_2 \geq 0$ takve da je $\mathrm{supp}(\phi_1) \subset U$, $\mathrm{supp}(\phi_2) \subset \Omega \setminus U$ tako da je $\phi_1 + \phi_2 = 1$. Tada je dokaz završen za $\psi = \phi_1$. $\square$

2.4 Inverzne funckije, implicitne funkcije i teorema o rangu

Teorema 2.4.1. (**Teorema o inverznom preslikavanju**) Ako je f C^1-preslikavanje skupa Ω na $\mathbb{R}^n$ i, za $a \in \Omega$, $(df)(a)$ je izomorfizam skupa $\mathbb{R}^n$, tada postoje okoline U tačke a i V tačke $f(a)$ takve da je $f|U$ homeomorfizam na V.

Dokaz. Bez uticaja na opštost, možemo uzeti da je $a = 0$ i $f(a) = 0$. Kako je $(df)(a) = A$ izomorfizam, možemo zameniti f sa $A^{-1} \circ f$ i pretpostaviti da je $(df)(a) = \mathrm{id}$. Neka je funkcija g definisana na Ω na sledeći način:

$$g(x) = f(x) - x.$$

Za $x = 0$ imamo da je $g(0) = f(0) - 0 = 0$. Očigledno je $(dg)(a) = 0$. Iz ovoga sledi da postoji okolina

$$W \text{ tačke } 0\ , \quad \overline{W} \subset \Omega, \quad W = \{x : |x_j| < r\},$$

takva da za $x, y \in \overline{W}$ sledi da je

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

Tada imamo za $x, y \in W$

$$-|f(y) - f(x)| + |y - x| \leq |g(x) - g(y)| = |f(y) - f(x) - y + x| \leq \frac{1}{2}|y - x|,$$

iz čega sledi da

$$-|f(y) - f(x)| \leq -\frac{1}{2}|y - x|,$$

tj.

$$|f(y) - f(x)| \geq \frac{1}{2}|y - x|,$$

pa je f injektivno na W. Neka je $V = \{x : |x_j| < \frac{1}{2}r\}$ i $U = W \cap f^{-1}(V)$. Definišimo preslikavanje $\phi_0 : V \to W$ i ϕ_i na sledeći način:

$$\begin{aligned}
&\phi_0(y) = 0,\\
&\phi_k(y) = y - g(\phi_{k-1}(y)).
\end{aligned}$$

Tada se lako može pokazati indukcijom da je

$$\phi_v(V) \subset W, \quad v \geq 0.$$

Takođe važi da

$$|\phi_v(y) - \phi_{v-1}(y)| = |g(\phi_{v-1}(y)) - g(\phi_{v-2}(y))| \leq r2^{-v}, \quad \text{za } v \geq 2$$

i ovo je takođe trivijalno tačno za $v = 1$. Stoga $\{\phi_v\}$ konvergira uniformno ka funkciji $\phi : V \to \mathbb{R}^n$. Kako je $\phi_j(V) \subset W$, imamo da je $\phi(V) \subset \overline{W}$ i

$$\phi(y) = y - g(\phi(y)).$$

Kako je $|y| < \frac{r}{2}$ na V i $|g(\phi(y))| \leq \frac{r}{2}$, sledi da je $\phi(V) \subset W$; takođe, $f(\phi(y)) = \phi(y) + g(\phi(y)) = y$. Kako je $\phi_{|W}$ injektivno, ϕ je inverzna funkcija f. Očigledno, ϕ je neprekidna kao granica niza $\{\phi_k\}$, što dokazuje teoremu. Kasnije ćemo videti da $\phi \in C^1(V, n)$. $\square$

Da bismo pokazali teoremu o implicitnom preslikavanju, prvo ćemo da uvedemo neke nove oznake koje će da nam služe da pristupimo blokovima matrica, konkretno matrica diferencijala.

Definicija 2.4.1. Neka su Ω_1 i Ω_2 otvoreni podskupovi skupova $\mathbb{R}^{n_1}$ i $\mathbb{R}^{n_2}$, neka je f C^1-preslikavanje skupa $\Omega_1 \times \Omega_2$ na $\mathbb{R}^p$ i neka $(a, b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$. Definišimo preslikavanje $g : \Omega_2 \to \mathbb{R}^p$ tako da je $g(y) = f(a, y)$. Parcijalni diferencijal $(d_2 f)(a, b)$ je definisan kao linearno preslikavanje $(dg)(b)$ skupa $\mathbb{R}^{n_2}$ na $\mathbb{R}^p$. Parcijalni diferencijal $(d_1 f)(a, b)$ je definisan analogno.

Teorema 2.4.2. Neka su Ω_1 i Ω_2 otvoreni podskupovi skupova $\mathbb{R}^{n_1}$ i $\mathbb{R}^{n_2}$, neka je f C^1-preslikavanje skupa $\Omega_1 \times \Omega_2$ na $\mathbb{R}^{n_2}$. Neka je za neko $(a, b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ $f(a, b) = 0$, i rank $(d_2 f)(a, b) = n_2$. Tada postoji okolina $U_1 \times U_2$ tačke (a, b) takva da za bilo koje $x \in U_1$, postoji jedinstveno $y = y(x) \in U_2$ takvo da je $f(x, y(x)) = 0$. Takođe, preslikavanje $x \mapsto y(x)$ je neprekidno.

Dokaz. Posmatrajmo preslikavanje $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ takvo da je

$$F(x, y) = (x, f(x, y)).$$

Matrica $(dF)(a, b)$ je oblika

$$\begin{bmatrix} E_{n_1 \times n_1} & 0 \\ 0 & (d_2 f)(a, b) \end{bmatrix}.$$

Naravno, blok $E_{n_1\times n_1}$ je uvek regularan, pa imamo da je $(dF)(a, b)$ regularna, tj. izomorfizam ako i samo ako je $(d_2 f)(a, b)$ je ranga n_2, tj. regularna. Tada po teoremi 2.4.1 postoji okolina $U \times U_2$ tačke (a, b) i okolina W tačke $(a, 0)$ tako da je $F_{|U\times U_2} \to W$ homeomorfizam. Neka je $\phi : W \to U \times U_2$. Postoji okolina U_1 tačke a takva da $x \in U_1$ povlači da je $(x, 0) \in W$. Za $x \in U_1$, neka je $y(x)$ projekcija $\phi(x, 0)$ na U_2. Očigledno, ako $y \in U_2$ zadovoljava $f(x, y) = 0$, tada je $y = y(x)$. Takođe, $x \mapsto y(x)$ je neprekidno preslikavanje i $f(x, y(x)) = 0$. □

Komentar 2.4.1. Posmatrajmo $f(a, b)$ iz prethodne teoreme u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} f_1(a_1, ..., a_{n_1}, b_1, ..., b_{n_2}) \\ \\ \vdots \\ \\ f_{n_2}(a_1, ..., a_{n_1}, b_1, ..., b_{n_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \vdots \\ \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Ako bi funkcije f_i bile linearne, uslov za blok matricu bi zapravo predstavljao regularnost matrice sistema linearnih jednačina po $b_1, ..., b_{n_2}$ i ova teorema bi nam dala da je taj sistem jedinstveno rešiv u okolini tačke, tj. da se y može izraziti kao funkcija od x. Dakle, teorema nam daje uopšteni rezultat o jedinstvenosti rešenja sistema jednačina u okolini tačke koja ispunjava uslov regularnosti bloka matrice.

Lema 2.4.3. Neka važe pretpostavke iz prethodne teoreme sa istom notacijom, i neka je $A(x) = (d_2 f)(x, y(x))$ i $B(x) = (d_1 f)(x, y(x))$. Tada, ako je U dovoljno mala okolina tačke a, $A(x)$ je izomorfizam za $x \in U$, $y \in C^1(U, n_2)$ i

$$(dy)(x) = -A(x)^{-1} \circ B(x). \tag{2.7}$$

Dokaz. Kako je y neprekidna, $x \mapsto A(x)$ je neprekidno preslikavanje skupa U_1 na prostor linearnih preslikavanja $L(\mathbb{R}^{n_2}, \mathbb{R}^{n_2})$. Takođe, $A(a)$ je izomorfizam, pa je i $A(x)$ za dovoljno malu okolinu U. Pretpostavimo da je U konveksno. Neka $x, x+\xi \in U$ i $\eta = y(x+\xi)-y(x)$. Tada je $f(x + \xi, y(x) + \eta) = 0$, pa je po Tejlorovoj formuli

$$0 = f(x, y(x)) + B(x)\xi + A(x)\eta + o(|\xi| + |\eta|), \text{ kada } |\xi| \to 0;$$

štaviše, kada $\eta \to 0$ i $\xi \to 0$ i $f(x, y(x)) = 0$. Ovo nam daje da je

$$A(x)\eta = -B(x)\eta + o(|\eta| + |\xi|).$$

Ako je K kompaktan podskup skupa U, tada je $A(x)^{-1}$ neprekidno na U, pa je ograničeno na K, i dobijamo

$$\eta = -A(x)^{-1} \circ B(x)\xi + o(|\eta| + |\xi|).$$

Dakle, ako je $|\xi|$ dovoljno malo, postoji konstanta $C > 0$ takva da je

$$|\eta| \leq C|\xi| + \frac{1}{2}|\eta|,$$

pa je $|\eta| \leq 2C|\xi|$. Dakle

$$y(x+\xi) - y(x) = -A(x)^{-1} \circ B(x)\xi + o(|\xi|), \quad \text{kada } \xi \to 0,$$

što zapravo znači da $y \in C^1(U, n_2)$, čime je dokaz završen. $\square$

Corolar 2.4.4. Neka važe iste pretpostave iz teoreme 2.4.2, i neka je U okolina tačke a takva da je $(df)(x, y(x))$ izomorfizam za $x \in U$. Ako je

$$f \in C^k(\Omega_1 \times \Omega_2, n_2), \quad k \geq 1,$$

tada

$$y \in C^k(\Omega_2, n_2)$$

Dokaz. Imamo da

$$f \in C^k(\Omega_1 \times \Omega_2, n_2)$$

pa odavde sledi da za x

$$(df)(x, y(x)) \in C^{k-1}(\Omega_1 \times \Omega_2, n_2).$$

Kako su zapravo A i B blokovi matrice diferencijala $(df)(x, y(x))$, odavde direktno dobijamo da su A, A^{-1}, B preslikavanja $k-1$ puta diferencijabilna. Kako je po prethodnoj teoremi $(dy)(x) = -A(x)^{-1} \circ B(x)$, sledi da $(dy)(x) \in C^{k-1}(\Omega_1 \times \Omega_2, n_2)$, tj. $y \in C^k(\Omega_1 \times \Omega_2, n_2)$. $\square$

Corolar 2.4.5. U teoremi o inverznom preslikavanju, ako je f C^n-funkcija, $n \leq \infty$, tada možemo primeniti prethodni korolar na teoremu o implicitnom preslikavanju za $g(x, y) = x - f(y)$, i dobijamo da je onda $(f|U)^{-1}$ takođe C^n funkcija. Ovaj rezultat uopštava teoremu o inverznom preslikavanju.

Definicija 2.4.2. Skup u $\mathbb{R}^n$ oblika $\{x : |x_i - a_i| < r_i\}$, gde su $a, r \in \mathbb{R}^n$ nazivamo paralelopiped. Ekvivalent ovog skupa u $\mathbb{C}^n$ nazivamo policilinder.

Teorema 2.4.6. (**Teorema o rangu**) Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i neka $f \in C^k(\Omega, m)$. Ako je rang preslikavanja $(df)(x)$ svuda isti i jednak r, tada za proizvoljnu tačku a postoje

1) otvoreni skupovi U, V tako da je U okolina tačke a i V okolina tačke $f(a)$,
2) paralelopipedi Q, Q' koji pripadaju redom $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$,
3) i C^k-difeomorfizmi $u : Q \to U$ i $u' : V \to Q'$

tako da za $\phi = u' \circ f \circ u$ važi

$$\phi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_r, 0, ..., 0).$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] & V \arrow[d, "u'"] \\
Q \arrow[u, "u"] \arrow[r, "\phi"'] & Q'
\end{tikzcd}$$

Dokaz. Naravno, sa odgovarajućim afinim automorfizmima možemo da svedemo slučaj na:

i) $a = 0, b = 0$
ii) $(df)(0)$ je zapravo preslikavanje $(x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ...x_r, 0, ..., 0)$.

Posmatrajmo preslikavanje $w : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definisano na sledeći način:

$$w(x) = (f_1(x), ..., f_r(x), x_{r+1}, ..., x_n),$$

gde je naravno

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x)).$$

Tada je $(dw)(0)$ indentičko preslikavanje, pa po teoremi o inverznom preslikavanju postoje okolina U tačke 0 i paralelopiped Q takvi da je $w|U : U \to Q$ C^k-difeomorfizam. Neka je $u = (w|U)^{-1}$. Tada imamo da je

$$f \circ u(y) = (y_1, ..., y_r, \phi_{r+1}(y), ..., \phi_m(y)),$$

gde su svi ϕ_j u $C^k(\Omega)$. Tada za funkciju $\xi = f \circ u$ imamo

$$\text{rang}(d\xi)(y) = r$$

za $y \in Q$, stoga

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial y_k} = 0, \quad \text{ako su } j, k > r.$$

Dakle, svi navedeni ϕ_j su nezavnisni od $y_{r+1}, ..., y_m$. Neka je sada $Q = Q^r \times Q^{n-r}$, gde su Q^r i Q^{n-r} paralelopipedi u $\mathbb{R}^r$ i $\mathbb{R}^{n-r}$ redom i neka je

$$v : Q^r \times \mathbb{R}^{m-r} \to Q^r \times \mathbb{R}^{m-r}$$

preslikavanje definisano na sledeći način:

$$v(y_1, ...y_m) = (y_1, ..., y_r, y_{r+1} - \phi(y_1, ..., y_r), ..., y_m - \phi_m(y_1, ..., y_r)).$$

Očigledno, kako su sve komponente C^k-difeomofrizmi, imamo da je to i preslikavanje v. Neka je Q' paralelopiped u $\mathbb{R}^m$ takav da je

$$v \circ \xi(Q) \subset Q' \subset Q^r \times \mathbb{R}^{m-r}$$

i neka je $V = v^{-1}(Q')$. Ako stavimo da je $u' = v|Q'$, imamo da je

$$u' \circ f \circ u(x_1, ..., x_n) = u' \circ \xi(x_1, ...x_n) = (x_1, ..., x_r, 0, ..., 0).$$

$\square$

Glava 3

Mera slika kritičnih tačaka

Pojam mere skupova je uvek povezan sa $\sigma-$aditivnom funkcijom mere koja merljivim skupovima, tj. elementu Borelove σ-algebre, daje vrednost koju nazivamo mera. Mi ćemo naravno koristiti meru koja je najprirodnija, a to je Lebegova[1] i posvetićemo posebnu pažnju skupovima čija je Lebegova mera 0. Ovo poglavlje je posvećeno Sardovoj teoremi o meri skupa kritičnih tačaka glatke funkcije (koja je zapravo 0), i primeni u ispitivanju funkcionalne zavisnosti neke familije funkcija.

3.1 Sardova teorema

Lema 3.1.1. Ako imamo preslikavanje $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, gde je Ω otvoren podskup skupa $\mathbb{R}^n$, koje zadovoljava Lipšicov uslov na svim kompaktnim skupovima, tj. za sve kompaktne skupove K postoji M_K takvo da je za sve $x, y \in K$, $||f(x) - f(y)|| \leq M_K|x - y|$. Tada , ako je skup $S \subseteq \Omega$ mere 0, onda je i njegova slika mere 0.

Očigledno, ako je funkcija iz prethodne teoreme C^1, tada je Lipšic uslov na kompaktnim skupovima trivijalno ispunjen, jer funkcija izvoda dostiže maksimum na kompaktnom skupu koji izabrati kao Lipšic konstanta.

Lema 3.1.2. Ako su $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, i ako je $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ C^1 preslikavanje i Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, tada je $f(\Omega)$ skup mere 0.

Dokaz. Ako uzmemo preslikavanje $g : \Omega \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ tako da je

$$g(x_1, .., x_m) = f(x_1, ..., x_n),$$

tada je $g \circ f(\Omega) = g(\Omega \times 0)$ skup mere 0 u $\mathbb{R}^n$. $\square$

Definicija 3.1.1. Ako $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, gde je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, C^1 funkcija, tada tačku a nazivamo kritičnom ako je $\text{rang}(df)(a) < m$.

Glavni cilj ovog poglavlja je rezultat poznat kao Sardova teorema koja nam za glatku funkciju daje da je slika skupa kritičnih tačaka skup mere 0. Naime, da bismo pokazali ovo, potrebno je da pokažemo nekoliko drugih tvrđenja. Za dokaz Sardove teoreme su nam potrebna sledeća tvrđenja:

1. Za C^1 funkciju $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$, slika skupa kritičnih tačaka je skup mere 0.

[1] Henri Léon Lebesgue (1875 - 1941), francuski matematičar.

2. Za C^∞ funkciju $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (Ω otvoren), slika skupa kritičnih tačaka je skup mere 0.

3. Pomoćna lema o meri skupova.

Teorema 3.1.3. Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i neka je $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ C^1 preslikavanje. Ako je A skup kritičnih tačaka, tada je $f(A)$ skup mere 0.

Dokaz. Neka $a \in A$, tj. neka je rang$(df)(a) < n$. Odavde imamo da je $f(a)+(df)(a)(\mathbb{R}^n)$ zapravo afini potprostor V_a prostora $\mathbb{R}^n$ dimenzije manje od n. Neka je $u_1, ..., u_n$ ortonormirana baza za $\mathbb{R}^n$ sa centrom u $f(a)$, takva da V_a leži u prostoru generisanom sa $u_1, ...u_{n-1}$. Ideja je da pokažemo da za (proivoljni) zatvoreni paralelopiped $Q \subset \Omega$, skup $f(A \cap Q)$ ima meru 0. Posmatrajmo sada Tejlorov razvoj u nekoj tački $y \in Q$ po x:

$$f(x) = f(y) + (df)(y)(x - y) + o_y(||x - y||). \tag{3.1}$$

Imamo da je

$$||o_y(||x - y||)|| \leq \lambda(||x - y||)||x - y||, \tag{3.2}$$

gde $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ i $\lambda(x) \to 0$, kada $x \to 0$. Ako je $\epsilon > 0$ dovoljno malo i Q_ϵ kocka stranice ϵ koja sadrži x i a, tada po (3.1) primenjenoj na x, a imamo:

1) $f(a) + (df)(a)(x - a) \in V_a$
2) ostatak $o_a(||x - y||)$ može da utiče na u_n, ali kako imamo ograničenje (3.2) za o_a tada se $f(x)$ nalazi izmedju hiperravni određenih sa $u_n = \pm 2\lambda(\epsilon)\epsilon$

Dalje, po Tejlorovom razvoju, imamo da $f(x)$ leži u kocki stranice $M\epsilon$, gde je $M > 0$ konstanta nezavisna od a, x i odabira koordinata $\{u_i\}$. Zapremina preseka kocke stranice $M\epsilon$ i prostora između hiperravni $u_n = \pm 2\lambda(\epsilon)\epsilon$ je $\leq 4M^{n-1}\epsilon^n\lambda(\epsilon)$. Kako odabir koordinata ne utiče na meru, imamo da je mera skupa $f(Q_\epsilon)$ manja od $4M^{n-1}\epsilon^n\lambda(\epsilon)$. Neka je l dužina stranice kocke Q. Podelimo Q na $(l/\epsilon)^n$ kocki stranice ϵ, $i = 1, ..., (l/\epsilon)^n$. Pokazali smo da ako je $Q_i \cap A \neq \emptyset$, onda je

$$\text{mera} f(Q_i) \leq M^{n-1}\epsilon^n\lambda(\epsilon).$$

Odavde sledi da je

$$\text{mera} f(A \cap Q) \leq \sum_{i, A \cap Q_i \neq \emptyset} \text{mera} f(A \cap Q_i) \leq 4M^{n-1}l^n\lambda(\epsilon).$$

Kako $\lambda(\epsilon) \to 0$, kada $\epsilon \to 0$, sledi da je mera$f(A \cap Q) = 0$. □

Teorema 3.1.4. Ako je $f : \Omega \to \mathbb{R}^1$ C^∞-preslikavanje, gde je Ω otvoren u $\mathbb{R}^n$, i A skup kritičnih tačaka, tada je $f(A)$ skup mere 0.

Dokaz. Definišimo skupove

$$A_k = \{a \in \Omega : D^\alpha f(a) = 0 \text{ za sve } \alpha \text{ takve da je } 0 < \alpha \leq k\}.$$

Očigledno je $A_{k+1} \subset A_k$ za proizvoljno k i skup A_1 možemo predstaviti na sledeći način:

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup ... \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup A_n. \tag{3.3}$$

(Naravno, skup kritičnih tačaka A je jednak sa A_1). Sada, ako $a \in A_n$ i ako je Q neka zatvorena kocka u Ω tako da $a \in \Omega$, imamo da je:

$$|f(x) - f(a)| \leq M|x - a|^{n+1},$$

pa slika kocke stranice ϵ oko a ima meru $\leq M\epsilon^{n+1}$ u $\mathbb{R}^1$, gde je $M > 0$ fiksna konstanta. Stoga, kao u prethodnom dokazu, ako podelimo kocku Q na $(l/\epsilon)^n$ manjih kocki stranica ϵ, imamo da je mera$f(A_n) = 0$. Ostatak dokaza sprovodimo indukcijom. Naime ako je $n = 1$, tada je teorema pokazana. Pretpostavimo da za Ω' otvoren skup u $\mathbb{R}^{n-1}$ i g C^∞-preslikavanje skupa Ω' na $\mathbb{R}^1$ i A_g-skup kritičnih tačaka važi da je mera$f(A_g) = 0$. Posmatrajmo razbijanje (3.3) za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{R}^1$. Treba da pokažemo da za skup $f(A_k \setminus A_{k-1})$ ima meru 0 za $1 \leq k < n$. Dovoljno je da pokažemo da za $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ i proizvoljnu tačku $a \in B_k$ postoji okolina U iste tačke tako da je mera$f(B_k \cap U) = 0$. Kako $a \notin A_{k+1}$, postoji α takvo da je $|\alpha| = k + 1$ i važi:

$$D^\alpha f(a) \neq 0.$$

Bez uticaja na opštost, neka je $\alpha_j \neq 0$ i

$$\beta = \alpha - (0, ..., 1, ..., 0),$$

gde je 1 na j-tom mestu. Za $h = D^\beta f$, imamo da je preslikavanje

$$(dh)(a) = [D^{\beta+(1,0,...,0)} f, ..., D^{\beta+(0,0,...,1)}]$$

u tački a na j-tom mestu različito od 0, pa je rang ovog preslikavanja maskimalan, tj. 1. Tada, po teoremi o rangu postoji okolina U tačke a, kocka Q u $\mathbb{R}^n$ i C^∞-difeomorfizam $u : U \to Q$ tako da je

$$u(\{x : h(x) = 0\}) = \{(x_1, ..., x_n) \in Q : x_1 = 0\} := H.$$

Po indukcijskoj pretpostavci imamo da je $u(B_k) \subset H$. Neka je

$$\Omega' = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : (0, x_2, ..., x_n) \in H\}.$$

Neka je g C^∞-funkcija na Ω' definisana na sledeći način:

$$g(x_2, ..., x_n) = F(0, x_2, ..., x_n),$$

gde je $F = f \circ u^{-1}$. Ako je $S = u(B_k \cap U)$, očigledno je $F(S) \subset g(A_g)$. Po indukcijskoj pretpostavci je $g(A_g)$, a zbog toga i $F(S) = F(U \cap B_k)$, skup mere 0. $\square$

Corolar 3.1.5. Ako je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ C^∞-preslikavanje i $B = \{x : (df)(x) = 0\}$, tada je mera$f(B) = 0$.

Dokaz. Imamo da je f oblika $(f_1, ..., f_m)$. Za proizvoljno f_i imamo da je $B \subset B_i = \{x : (d_i f)(x) = 0\}$, pa je

$$\text{mera } f(B) \subset \text{ mera } f_i(B_i) \times \mathbb{R}^{n-1},$$

što je skup mere 0, pa je i $f(B)$ skup mere 0. $\square$

Lema 3.1.6. Neka je S merljiv skup u $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{p-r}$. Sa $(x, y), x \in \mathbb{R}^r, y \in \mathbb{R}^{p-r}$ obeležavamo tačku u $\mathbb{R}^p$. Za $c \in \mathbb{R}^r$ definišemo skup

$$S_c = \{y \in R^{p-r} : (c, y) \in S\}.$$

Tada S ima meru 0 u $\mathbb{R}^p$ ako i samo ako S_c ima meru 0 za skoro sve $c \in \mathbb{R}^p$.

Dokaz. Sledi direktno iz Fubinijeve teoreme primenjene na karakterističu funkciju skupa S. □

Sada kada smo pripremili podlogu, pokažimo Sardovu teoremu:

Teorema 3.1.7 (**Sard**[2]). Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ C^∞-preslikavanje i A skup kritilčnih tačaka f. Tada je $f(A)$ skup mere 0.

Dokaz. Definišimo skupove

$$E_k = \{x \in \Omega : \text{rang}(df)(x) = k\}$$

Ako je $m > n$, onda dokaz sledi direktno iz teoreme 3.1.2. Neka je dalje $n \geq m$ i neka je

$$A = \bigcup_{0 \leq k < m} E_k.$$

Ideja je (kao i u prethodnim teoremama) da za bilo koju tačku $a \in A$ i neku okolinu U tačke a, mera$f(A \cap U) = 0$. Imamo da je skup

$$\{x \in \Omega : \text{rang}(df)(x) \leq k\} = \bigcup_{0 \leq r \leq k} E_r$$

zatvoren za sve k. Stoga, E_k je lokalno zatvoren, tj. za svaku tačku $a \in E_k$ i sve dovoljno male okoline U tačke a u $\mathbb{R}^n$, $U \cap E_k$ je zatvoren u U, stoga prebrojiva unija kompaktnih skupova. Kako f slika kompaktne skupove u kompaktne, i kako su kompaktni skupovi merljivi, sledi da je $S_k = f(U \cap E_k)$ merljiv u $\mathbb{R}^m$.
Za $k = 0$, po korolaru 3.1.5 imamo da je mera 0. Za $0 < k < m$ i $a \in E_k$, ako zapišemo $f = (f_1, ..., f_m)$, bez uticaja na opštost možemo pretpostaviti da je

$$\text{rang}(du)(a) = k,$$

gde je $u = (f_1, ..., f_k)$. Funkciju u možemo dopuniti do funkcije koja slika u prostor $\mathbb{R}^n$:

$$w = (f_1, ...f_k, u_{k+1}, .., u_n),$$

gde su $u_{k+1}, ..., u_n$ linearne funkcije na Ω (a samim time i glatke), tako da je ispunjen uslov

$$\text{rang}(dw)(a) = n.$$

Kako imamo pun rang preslikavanja, po korolaru 2.4.5, postoji okolina U tačke a i V tačke $w(a)$ tako da je $w : U \to V$ C^∞-difeomorfizam. Tada je preslikavanje

$$F = f \circ w^{-1} : V \to \mathbb{R}^m$$

oblika

$$F(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_k, F_{k+1}(x), ..., F_m(x)).$$

[2]Arthur Sard (1909 - 1980), američki matematičar.

Primetimo da je preslikavanje $(dF)(x)$ sigurno ranga bar k. Kako je F kompozicija difeomorfizma w^{-1} i funkcije f, to povlači da $(dF)(x)$ zavisi isključivo od ranga preslikavanja $(df)(x)$. Stoga imamo da za skup

$$E'_k = \{x \in V : \text{rang}(dF)(x) = k\}$$

važi da je

$$S_k = f(U \cap E_k) = F(E'_k).$$

Za $c \in \mathbb{R}^k$, definišemo preslikavanje $F_c : V_c \to \mathbb{R}^{m-k}$ tako da je

$$F_c(y) = (F_{k+1}(c, y), ..., F_m(c, y)),$$

gde je naravno $V_c = \{y \in \mathbb{R}^n : (c, y) \in V\}$. Imamo da važi:

$$(c, y) \in E'_k \text{ ako i samo ako } (dF_c)(y) = 0.$$

Poslednji korak u dokazu se sastoji u primenjivanju prethodnog korolara i leme, redom. Naime,

$$E'_{k,c} = \{y \in V_c : (c, y) \in E'_k\}$$

je skup mere 0 u $\mathbb{R}^{m-k}$. Uzimajući u obzir da je S_k merljiv i da važi

$$S_{k,c} = \{y \in \mathbb{R}^{m-k} : (c, y) \in S_k = F(E'_k)\} = F_c(E'_{k,c}),$$

po navedenom korolaru S_k je skup mere 0 u $\mathbb{R}^m$. □

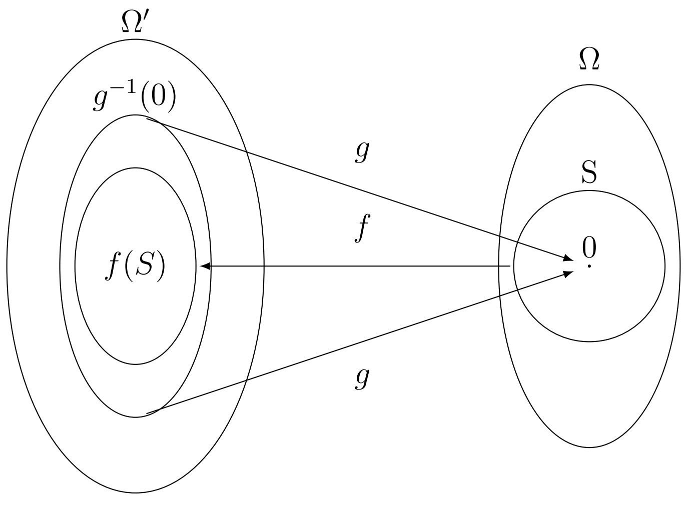
3.2 Funkcionalna zavisnost

Definicija 3.2.1. Neka su $f_1, ..., f_m \in C^\infty(\Omega)$ i neka je $f = (f_1, .., f_m)$. Kažemo da su $\{f_i\}$ funkcionalno zavisne na $S \subset \Omega$ ako postoji otvoren skup

$$\Omega' \supset f(S)$$

i funkcija g na Ω' tako da $g^{-1}(0)$ nije nigde gusto u Ω' i $g(f(x)) = 0$, za sve $x \in S$. Ako se može izabrati g kao realna analitička (holomorfna), onda kažemo da su $\{f_i\}$ analitički (holomorfno) nezavisne.

Komentar 3.2.1. Primetimo da je zapravo $f(S) \subset g^{-1}(0)$, pa funkcija g slika sve tačke iz $f(S)$ u 0. Odavde direktno imamo da ako $f(S)$ sadrži otvoren skup, onda $\{f_i\}$ nisu funkcionalno zavisne. Takođe, iako funkcija g slika ceo skup Ω', za definiciju je bitan samo skup tačaka koji se slika u 0, pa je tako na diagramu i predstavljeno.



Slika 3.1: Diagram funkcionalne zavisnosti.

Lema 3.2.1. Ako je X proizvoljan zatvoren skup u $\mathbb{R}^n$, tada postoji $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tako da je $\{x \in \mathbb{R} : \phi(x) = 0\} = X$.

Dokaz. Imamo da postoji familija $\{U_p\}$ otvorenih skupova, tako da je $X = \bigcap U_p$. Neka je $\{K_m\}$ niz kompaktnih skupova takvih da je

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \mathbb{R}^n \quad \text{i } K_m \subset \mathring{K}_{m+1}.$$

Po korolaru 2.3.5, postoji familija C^∞ funkcija $\{\phi_p\}$ takvih da je $0 \leq \phi_p \leq 1$, $\phi_p = 0$ na X i $\phi_p = 1$ na $\mathbb{R}^n \setminus U_p$. Neka je

$$c_p = ||\phi_p||_p^{K_p} = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in K_p} ||D^\alpha \phi_p(x)||.$$

Izaberimo $\epsilon_p > 0$ takvo da je

$$\sum_1^\infty \epsilon_p c_p < \infty.$$

Neka je

$$\psi_m = \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i \phi_i.$$

Tada za bilo koji kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}^n$ postoji $K \subset K_r$, za neko r, tako da ako je $p > 0$ dato i $m' > m > r, p$ tada je

$$||\psi_m - \psi_{m'}|| \leq \sum_{q > m} \epsilon_p ||\phi_q||_p^K \leq \sum_{q > m} \epsilon_q ||\phi_q||_q^{K_q} \to 0, \quad \text{kada } m \to \infty$$

Dakle $\{\psi_m\}$ je Košijev niz u $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, pa postoji granica ϕ koja očigledno zadovoljava data svojstva. $\square$

Teorema 3.2.2. Ako je $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ C^∞-preslikavanje i $f = (f_1, ... f_m)$, tada su $\{f_i\}$ funckionalno zavisne na svakom kompaktnom podskupu skupa Ω ako i samo ako je $\text{rang}(df)(x) < m$ za sve $x \in \Omega$.

Dokaz. Pretpostavimo da za neku tačku $a \in \Omega$ važi $(df)(x) = m$. Tada je $(df)(x) = m$ za sve x dovoljno blizu tački a, pa je po teoremi o rangu postoji relativno kompaktna okolina U tačke a takva da je $f(U)$ otvorena u $\mathbb{R}^n$, tako da $f(\overline{U})$ nije nigde gust. Tada $\{f_i\}$ ne ispunjavaju uslov funkcionalne nezavisnosti na $\overline{U}$.
Obrnuto, ako je $\text{rang}(df)(x) < m$ za sve $x \in \Omega$, po Sardovoj teoremi, $f(\Omega)$ ima meru 0 u $\mathbb{R}^m$. Ako je $K \subset \Omega$ kompaktan, $f(K)$ je kompaktan skup mere 0, stoga nigde gust. Po lemi 3.2.1, postoji $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tako da je $g^{-1}(0) = f(K)$. Očigledno je onda $g \circ f(x) = 0$ za sve $x \in K$. $\square$

Teorema 3.2.3. Neka je $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ analitičko preslikavanje, $f = (f_1, ..., f_m)$. Tada su sledeća dva uslova su ekvivalentna:

1. $\text{rang}(df)(x) < m$ za bilo koje $x \in \Omega$.

2. Postoji nigde gust zatvoren skup $S \subset \Omega$ takav da bilo koje $a \in \Omega \setminus S$ ima okolinu $U \subset \Omega$ za koje su $\{f_j | U\}$ analitički zavisne.

Dokaz. Prvo primetimo da po principu analitičkog produženja, ako je Ω povezan, onda je $\operatorname{rang}(df)(x) < m$ za sve $x \in \Omega$ ako i samo ako je ovo tačno za sve x u nepraznom podskupu skupa Ω.
Dalje, pretpostavimo da je Ω povezan. Ako skup S sa navedenim osobinama postoji, tada je očigledno $\operatorname{rang}(df)(x) < m$ za sve $x \in \Omega \setminus S$ pa onda i na Ω, jer je

$$\{x : \operatorname{rang}(df)(x) = m\}$$

otvoren.
Sa druge strane, neka je

$$p = \max \operatorname{rang}(df)(x) < m; \tag{3.4}$$

Izaberimo $b \in \Omega$ koje ispunjava ovaj rang. Iz ovoga sledi da postoje indeksi $j_1, ..., j_p$, $1 \le j_r \le m$ i $k_1, ..., k_p$, $1 \le k_r \le n$ takvi da je $h(b) \neq 0$, gde je

$$h(x) = \det\Big(\frac{\partial f_{j_r}}{\partial x_{k_s}}(x)\Big).$$

Neka je $S = \{x \in \Omega : h(x) = 0\}$. Kako je h analitička na Ω i $\not\equiv 0$, S ne može da sadrži otvoren podskup, pa je nigde gust. Očigledno,

$$\operatorname{rang}(df)(x) = p, \quad \text{za } x \in \Omega \setminus S.$$

Neka je $a \in \Omega \setminus S$. Po teoremi o rangu, postoje okoline U tačke a i V tačke $f(a)$, paralelopipedi Q, Q' u $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ redom i analitički izomorfizmi $u : Q \to U$ i $u' : V \to Q'$ takvi da je $u' \circ f \circ u$ preslikavanje $(x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_p, 0..., 0)$. Ako je $u' = (u'_1, ..., u'_m)$, i ako stavimo da je $g = u'_m$, imamo da je

$$g \circ f = 0 \text{ na } U.$$

□

Glava 4

Aproksimacione teoreme

U ovom poglavlju ćemo se baviti teoremama o aproksimaciji koje nam daju korisne ocene funckija. Aproksimacione funckije će biti od polinomnog do proizvoljnog oblika, dok će ocene biti neprekidne funkcije ili konstante. Borelova teorema možda na prvi pogled izgleda kao da ne pripada ovom poglavlju, ali je ideja koja se koristi u suštini oduzimanje aproksimacionih funkcija koje na neki način popravljaju funkciju i održavaju je konačnom, pa je zato u ovom poglavlju. Na kraju ćemo uvesti jedan poseban Hilbertov prostor čiji su elementi holomorfne funkcije i pokazati neka tvrđenja u vezi ortonormiranih baza i aproksimacija pomoću istih.

4.1 Borelova teorema o Tejlorovom razvoju

Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i neka je $f \in C^\infty(\Omega)$. Sa $T(f)$ označavamo Tejlorov red

$$T(f) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(0)x^\alpha;$$

za $m \in \mathbb{N}$, obeležavamo

$$T^m(f) = \sum_{\alpha \leq m} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(0)x^\alpha.$$

Definicija 4.1.1. Neka je X zatvoren podskup skupa Ω. Kažemo je $f \in C^k(\Omega)$ m-ravna na X, gde je $m \leq k$, ako je $D^\alpha f(x) = 0$, za sve $x \in X$ i sve α za koje važi $|\alpha| \leq m$. Ako je $f \in C^\infty(\Omega)$ i $D^\alpha f(x) = 0$ za sve $x \in X$ i α, onda kažemo da je f ravna na X.

Lema 4.1.1. Neka je $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ m-ravna na 0. Tada za dato $\epsilon > 0$ postoji $g \in C^\infty(\Omega)$ koja se anulira u okolini 0 i za koje važi

$$||g - f||_m^{\mathbb{R}^n} < \epsilon$$

Dokaz. Po korolaru 2.3.5, imamo da postoji funkcija $\eta(x) \geq 0$ za sve x, $\eta(x) = 0$ za $||x|| \leq \frac{1}{2}$ i $\eta(x) = 1$ ako $|x| \geq 1$. Za $\delta > 0$, definišemo

$$g_\delta(x) = \eta\left(\frac{x}{\delta}\right)f(x).$$

Očigledno, ova funkcija se anulira u okolini 0; dovoljno je onda pokazati da je

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(D^\alpha g_\alpha)(x) - (D^\alpha f)(x)| \to 0, \quad \text{kada } \delta \to 0, \text{ ako } |\alpha| \leq m.$$

Imamo da je

$$g_\delta(x) = f(x), \text{ ako } |x| \geq \delta;$$

stoga

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} ||D^\alpha g_\delta(x) - D^\alpha f(x)|| = \sup_{||x||\leq\delta} ||D^\alpha g_\delta(x) - D^\alpha f(x)||.$$

Kako je f $m-$ravna u 0, $D^\alpha f(0) = 0$, pa imamo da je

$$\sup_{||x||\leq\delta} ||D^\alpha f(x)|| \to 0, \quad \text{kada } \delta \to 0, \text{ ako je } |\alpha| \leq m.$$

Sada imamo da

$$D^\alpha g_\delta(x) = \sum_{\mu+\nu=\alpha} \binom{\alpha}{\nu} \delta^{-|\nu|} (D^\nu \eta)\left(\frac{x}{\delta}\right)(D^\mu f)(x).$$

Kako je $\eta(x) = 1$ kada je $||x|| \geq 1$, imamo da je

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^\nu} ||D^\nu \eta(x)|| = M_\nu < \infty.$$

Stoga je

$$||D^\alpha g_\delta(x)|| \leq M \sum_{\mu+\nu=\alpha} \delta^{-|\nu|} ||D^\mu f(x)||, \; M = \max_\nu \binom{\alpha}{\nu} M_\nu.$$

Imamo da je $D^\mu f$ $(m - |\mu|)$-ravna u 0, pa je

$$\sup_{|x|\leq\delta} ||D^\mu f(x)|| = o(\delta^{m-|\mu|}), \text{ kada } \delta \to 0;$$

stoga je

$$\sup_{||x||\leq\delta} ||D^\alpha g_\delta(x)|| = o(\sum_{\mu+\nu=\alpha} \delta^{m-|\mu|-|\nu|}) = o(1), \text{ kada je } |\alpha| \leq m.$$

Ovim je dokaz završen. □

Teorema 4.1.2. (**Borel**[1]) Neka je za svaku n-torku $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ nenegativnih celih brojeva data realna konstana c_α. Tada postoji funkcija $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ takva da je

$$\frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0) = c_\alpha.$$

Drugim rečima, preslikavanje $f \mapsto T(f)$, gde je $f \in C^\infty$, je sirjektivno.

Dokaz. Neka je

$$T_m(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha x^\alpha.$$

Očigledno je $(T_{m+1} - T_m)$ m-ravno u 0, pa po prethodnoj lemi postoji $g_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ koja se anulira u okolini 0 takva da važi

$$||T_{m+1} - T_m - g_m||_m^{\mathbb{R}^n} < 2^{-m}.$$

[1] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871 - 1956), francuski matematičar.

Imamo da funkcija

$$f = T_0 + \sum_{m=0}^{\infty} (T_{m+1} - T_m - g_m) \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Dalje, za bilo koje $k > 0$, suma $\sum_{m \geq k}(T_{m+1} - T_m - g_m)$ je k-ravna u 0. Stoga

$$T^k(f) = T^k(T_0 + \sum_{m=0}^{k-1} (T_{m+1} - T_m - g_m)) = T_k,$$

čime je dokaz završen.

□

4.2 Weierstrass i Whitney

Prvo ćemo početi sa jednom lemom.

Lema 4.2.1. Neka je $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$, gde je $0 \leq k < \infty$. Za $\lambda > 0$ definišimo funkciju

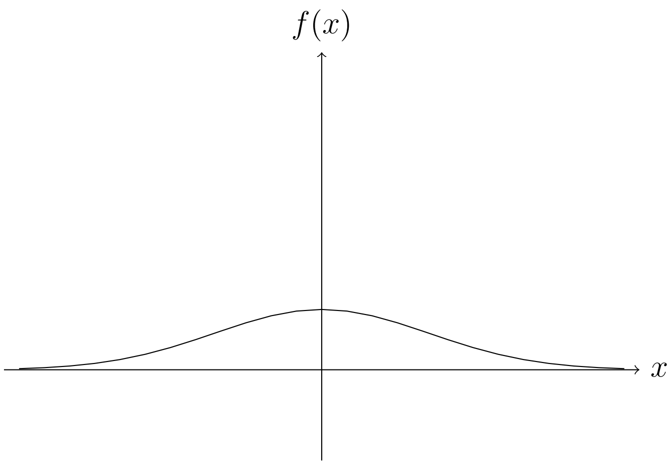
$$\begin{aligned} & I_\lambda(f)(x) \equiv g_\lambda(x) \\ = \; & c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-\lambda[(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)]} dy \\ = \; & c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-\lambda||x-y||^2} dy, \end{aligned}$$

gde je $c = \pi^{-\frac{1}{2}n}$ konstanta izabrana da ispunjava

$$c \int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2} dx = 1.$$

Tada imamo da

$$||g_\lambda - f||_k^{\mathbb{R}^n} \to 0 \;\; \text{kada } \lambda \to \infty.$$



Slika 4.1: Funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$ koju koristimo za integraciju u jednodimenzionalnom slučaju.

Dokaz. Imamo da je

$$g_\lambda(x) = c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-||y||^2} dy,$$

jer kada zamenimo y sa $x-y$ pod integralom, vrednost integrala se ne menja, pa za $|\alpha| \leq k$, imamo

$$\begin{aligned} D^\alpha g_\lambda(x) = c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(x-y) e^{-\lambda||y||^2} dy \\ = \quad D^\alpha g_\lambda(x) = c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(y) e^{-\lambda||x-y||^2} dy. \end{aligned}$$

Ovo nam daje da

$$D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x) = c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)) e^{-\lambda||x-y||^2} dy.$$

Za dato $\epsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ takvo da

$$||D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)|| < \frac{\epsilon}{2}, \ \text{ za } ||x-y|| \leq \delta \text{ i } |\alpha| \leq k,$$

jer $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Štaviše, postoji konstanta $M > 0$ takva da

$$||D^\alpha f(y)|| < M, \text{ za sve } y, \ |\alpha| \leq k.$$

Stoga,

$$\begin{aligned} & ||D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x)|| \\ = \quad & c\lambda^{\frac{1}{2}n} \Big| \Big(\int_{||x-y||<\delta} + \int_{||x-y||\geq\delta} \Big) (D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)) e^{-\lambda||x-y||^2} dy \Big| \\ \leq \quad & \frac{1}{2}\epsilon c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda||x-y||^2} dy + 2Mc\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{||x-y||\geq\delta} e^{-\lambda||x-y||^2} dy. \end{aligned}$$

Sada,

$$c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda||x-y||^2} dy = 1$$

i

$$\begin{aligned} & c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{||x-y||^2\geq\delta} e^{-\lambda||x-y||^2} dy \leq \\ & e^{-\frac{1}{2}\lambda\delta^2} c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\lambda||x-y||^2} dy \\ = \quad & 2^{\frac{1}{2}n} e^{-\frac{1}{2}\lambda\delta^2}. \end{aligned}$$

Ovo nam daje da

$$||D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x)|| \leq \frac{1}{2}\epsilon + M2^{1+\frac{1}{2}n} e^{-\frac{1}{2}\lambda\delta^2}.$$

Kako za fiksno $\delta > 0$ možemo izabrati dovoljno veliko λ tako da je desna strana izraza manja od ϵ, imamo da

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} ||D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x)|| \to 0, \quad \text{kada } \lambda \to \infty,$$

čime je lema dokazana. □

Komentar 4.2.1. Ako diferenciramo funkciju g_λ dobijamo

$$D^\alpha g_\lambda(x) = D^\alpha\Big(c\lambda^{\frac{1}{2}n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-\lambda||x-y||^2}dy\Big) = c\lambda^{\frac{1}{2}n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)D^\alpha e^{-\lambda||x-y||^2}dy,$$

a kako je $e^{-\lambda||x-y||^2}$ glatka, dobijamo da je g_λ isto glatka. Ovo je takozvano "uglačavanje" funkcije. Takođe, primetimo da funkcija f čak ne mora biti ni neprekidna. Naime, dovoljno je da bude integrabilna na $\mathbb{R}^n$ jer, kako je $e^{-\lambda||x-y||^2} \leq 1$, g_λ je dobro definisana a zbog prethodno navedenog razloga i glatka.

Teorema 4.2.2. (**Weierstrass**) Neka je Ω otvoren u $\mathbb{R}^n$. Tada za proizvoljnu funkciju $f \in C^k(\Omega)$, gde je $0 \leq k < \infty$, $\epsilon > 0$ i kompaktan skup $K \subset \Omega$, postoji polinom $P(x)$ po $x_1, ..., x_n$ takav da

$$||f - P||_k^K < \epsilon.$$

Dokaz. Ako zamenimo f sa ϕf, gde $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\text{supp}(\phi) \subset \Omega$ i $\phi = 1$ u okolini K, možemo da pretpostavimo da $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Tada, po prethodnoj lemi, za dato $\epsilon > 0$ možemo izabrati dovoljno veliko λ takvo da ako je

$$I_\lambda(f)(x) \equiv g_\lambda(x) = c\lambda^{\frac{1}{2}n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-\lambda||x-y||^2}dy,$$

onda imamo

$$||g_\lambda - f||_k^K < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sada

$$e^{-\lambda||x-y||^2} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}(-\lambda)^p||x-y||^{2p}.$$

Ako stavimo

$$Q_N(x,y) = \sum_{p=0}^{N}\frac{1}{p!}(-\lambda)^p||x-y||^{2p},$$

onda

$$D^\alpha Q_N(x,y) \to D^\alpha e^{-\lambda||x-y||^2}$$

unifromno za x, y na bilo kojem kompaktnom skupu. Ako stavimo

$$P_N(x) = c\lambda^{\frac{1}{2}n}\int f(y)Q_N(x,y)dy,$$

imamo da je P_N polinom i $||g_\lambda - P_N||_k^K \to 0$, kada $N \to \infty$. □

Corolar 4.2.3. Ako je Ω_j otvoren skup u $\mathbb{R}^{n_j}$, $j = 1, 2$ i x_j predstavlja tačku u $\mathbb{R}^{n_j}$, konačne linearne kombinacije

$$\sum_\mu \phi_\mu^{(1)}(x_1)\phi_\mu^{(2)}(x_2),$$

gde $\phi_\mu^{(j)} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n_j})$, su guste u $C^k(\Omega_1 \times \Omega_2)$ za $0 \leq k \leq \infty$.

Kako topologija na $C^k(\Omega_1\times\Omega_2)$ sadrži samo aproksimacije na kompaktnim skupovima, kada pomnožimo $\phi_\mu^{(j)}$ sa prikladnom C^∞ funkcijom koja ima kompaktan nosač, dobijamo:

Corolar 4.2.4. Sa oznakama iz prethodnog korolara, konačne linearne kombinacije

$$\sum_\mu \phi_\mu^{(1)}(x_1)\phi_\mu^{(2)}(x_2)$$

, gde $\phi_\mu^{(j)} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n_j})$, su guste u $C^k(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Sada ćemo pokazati aproksimacionu teoremu koja je fundamentalnog značaja u izučavanju diferencijalnih i analitičkih mnogostrukosti.

Teorema 4.2.5 (**Whitney**[2])**.** Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i $f \in C^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$. Neka je ν neprekidna funkcija na Ω i $\nu(x) > 0$ za sve $x \in \Omega$. Tada postoji realna analitička funkcija g na Ω takva da

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha g(x)| < \nu(x), \quad \text{za } 0 \leq |\alpha| \leq min\Big(k, \frac{1}{\nu(x)}\Big).$$

Problem ćemo rešiti tako što ćemo ga prvo preformulisati. Prvo primetimo sledeće.

Lema 4.2.6. Neka je $\{K_p\}$ niz kompaktnih podskupova skupa Ω tako da je $K_0 = \emptyset$, $K_p \subset \mathring{K}_{p+1}$ i $\bigcup K_p = \Omega$. Ako je $\{\epsilon_p\}$ niz strogo pozitivnih brojeva, onda postoji neprekidna funkcija $\nu > 0$ tako da je

$$\nu(x) < \epsilon_p, \quad \text{za } x \in K_{p+1} \setminus K_p,$$

gde je $p \geq 0$.

Stoga, teoremu možemo napisati u sledećem obliku:

Teorema 4.2.7. Neka je Ω otvoren u $\mathbb{R}^n$ i neka $f \in C^k(\Omega)$ gde je $0 \leq k \leq \infty$. Neka je $\{K_p\}$ niz kompaktnih podskupova skupa Ω tako da je $K_0 = \emptyset$, $K_p \subset \mathring{K}_{p+1}$ i $\bigcup K_p = \Omega$. Neka je $\{n_p\}$ proizvoljan niz prirodnih brojeva i neka je $m_p = min\{k, n_p\}$. Konačno, neka je $\{\epsilon_p\}$ niz pozitivnih realnih brojeva. Tada postoji realna analitička funkcija g na Ω takva da je

$$||f - g||_{m_p}^{K_{p+1} \setminus K_p} < \epsilon_p,$$

za sve $p \geq 0$.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je $m_{p+1} \geq m_p$ za $p \geq 0$. Podsetimo se da ako $\phi, \psi \in C^{m_p}(\Omega)$ i $S \subset \Omega$, imamo da važi

$$||\phi\psi||_{m_p}^S \leq ||\phi||_{m_p}^S ||\psi||_{m_p}^S.$$

Obeležimo $L_p = K_{p+1} \setminus K_p$, $p \geq 0$. Neka su $\phi_p \in C^\infty$ takve da je supp (ϕ_p) kompaktan u Ω, $\phi_p(x) = 0$ ako je x u okolini skupa K_{p-1}, $\phi_p(x) = 1$ ako je x u okolini $\overline{L_p}$. Neka je

$$M_p = 1 + ||\phi_p||_{m_p}^\Omega.$$

Izaberimo $\delta_p > 0$ takvo da je

$$2\delta_{p+1} \leq \delta_p, \quad \sum_{q \geq p} \delta_q M_{q+1} \leq \frac{1}{4}\epsilon_p, \quad \text{za } p \geq 0. \tag{4.1}$$

Kao u lemi 4.2.1, ako $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$, definišemo $I_\lambda(f)$ na sledeći način:

$$I_\lambda(f)(x) = c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-\lambda||x-y||^2} dy,$$
$$c \int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2} dx = 1.$$

[2]Hassler Whitney (1907 - 1989), američki matematičar.

Po lemi 4.2.1, postoji $\lambda_0 > 0$ takvo da ako je $g_0 = I_\lambda(\phi_0 f)$, imamo da je

$$||g_0 - \phi_0 f||_{m_0}^{K_1} < \delta_0$$

Dalje definišemo induktivno brojeve $\lambda_0, ..., \lambda_p, ...$ i funkcije $g_0, ..., g_p, ...$ na sledeći način. Pretpostavimo da su $g_0, ..., g_{p-1}$, $\lambda_0, ..., \lambda_{p-1}$ date. Po lemi 4.2.1, postoji funkcija $l_p(\lambda_j, g_j)$, $j \leq p-1$, takva da ako je $\lambda_p > l_p$ i $g_p = I_{\lambda_p}[\phi_p(f - g_0 - ... - g_{p-1})]$, onda je

$$||g_p - \phi_p(f - g_0 - ... - g_{p-1})||_{m_p}^{K_{p+1}} < \delta_p. \tag{4.2}$$

Kako g_p zavisi samo od λ_p i $g_0, ..., g_{p-1}$, vidimo da je l_p funkcija koja zavisi samo od $\lambda_0, ..., \lambda_{p-1}$. Kako je $\phi_p = 0$ na okolini skupa K_{p-1}, (4.2) nam daje da

$$||g_p||_{m_p}^{K_{p-1}} < \delta_p; \tag{4.3}$$

kako je $\phi_p = 1$ u okolini $\overline{L_p}$, imamo

$$||f - g_0 - ... - g_p||_{m_p}^{L_p} < \epsilon_p, \quad L_p = K_{p+1} \setminus K_p. \tag{4.4}$$

Stoga, kada zamenimo p sa $p+1$ u (4.2), imamo

$$\begin{aligned} ||g_{p+1}||_{m_p}^{L_p} &= ||\phi_{p+1}(f - \sum_0^p g_q)||_{m_p}^{L_p} + ||g_{p+1} - \phi_{p+1}(f - \sum_o^p g_q)||_{m_p}^{L_p} \\ &\leq ||\phi_{p+1}||_{m_p}^{\Omega} ||f - \sum_0^p g_q||_{m_p}^{L_p} + \delta_{p+1} \\ &\leq M_{p+1}\delta_p + \delta_{p+1}; \end{aligned}$$

□

štaviše, imamo iz (4.3)

$$||g_{p+1}||_{m_p}^{K_p} \leq \delta_{p+1}$$

Ovo nam daje da

$$||g_{p+1}||_{m_p}^{K_{p+1}} \leq M_{p+1}\delta_p + 2\delta_{p+1} \leq M_{p+1}\delta_p + \delta_p \leq 2\delta_p M_{p+1}. \tag{4.5}$$

Preciznije

$$||\sum_{q>p} g_q||_{m_p}^{K_{p+1}} \leq 2\sum_{q>p} \delta_p M_{q+1} < \frac{1}{2}\epsilon_p.$$

Ovo implicira da je

$$g = \sum_{q=0}^{\infty} g_q \in C^{m_p}(\Omega), \quad \text{za sve } p.$$

Dalje, po (4.5), imamo

$$||f - g||_{m_p}^{L_p} \leq ||f - \sum_0^p g_q||_{m_p}^{L_p} + ||\sum_{q>p} g_q||_{m_p}^{L_p} < \delta_p + \frac{1}{2}\epsilon_p < \epsilon_p.$$

Stoga, ako je $\{\lambda_p\}$ niz takav da važi $\lambda_p > l_p(\lambda_0, ..., \lambda_{p-1})$, da su članovi niza $\{g_p\}$ definisani po proceduri iznad, i da je $g = \sum g_p$, onda

$$||f - g||_{m_p}^{K_{p+1} - K_p} < \epsilon_p.$$

Sada ćemo pokazati da ako su $\lambda_p > l_p(\lambda_0, ..., \lambda_{p-1})$ dobro izabrani, onda je g analitička. Po definiciji, imamo da

$$\begin{aligned} g_p(x) &= c\lambda_p^{\frac{1}{2}n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_p(y)\Big(f((y) - \sum_{q=0}^{p-1} g_q(y)\Big)e^{-\lambda_p||x-y||^2}dy \\ &= c\lambda_p^{\frac{1}{2}n} \int_{textsupp(\phi_p)} \phi_p(y)\Big(f((y) - \sum_{q=0}^{p-1} g_q(y)\Big)e^{-\lambda_p||x-y||^2}dy. \end{aligned}$$

Kako se integracija vrši na kompaktnom skupu i $e^{-\lambda||x-y||^2}$ je analitička u x, g_p u $\mathbb{R}^n$ za sve p. Neka je sada $2\rho_p$ jednako razdaljini između skupova K_p i $\Omega \setminus K_{p+1}$. Očigledno je $\rho_p > 0$. Neka je U_p otvoren skup u $\mathbb{C}^n \supset \mathbb{R}^n$, $U_p \supset K_p$ takav da ako je $z \in U_p$ i $y \in \Omega \setminus K_{p-1}$, onda je

$$\mathrm{Re}\{(z_1 - y_1)^2 + ... + (z_n - y_n)^2\} > \rho_p;$$

očigledno je g_p restrikcija na $\mathbb{R}^n$ funkcije

$$h_p(z) = c\lambda_p^{\frac{1}{2}n} \int_{\mathrm{supp}(\phi_p)} \phi_p(y)\Big(f(y) - \sum_{q=0}^{p-1} g_q(y)\Big)e^{-\lambda_p[(z_1-y_1)+...+(z_n-y_n)]}dy.$$

Dalje, kako je $\mathrm{supp}(\phi_q) \subset \Omega \setminus K_{p+1}$, ako je $q > p+1$, integral koji definiše g_q se može zameniti integralom na $\Omega \setminus K_{p+1}$. Ovo pokazuje da za $z \in U_p$ važi

$$||h_q(z)|| \leq c\lambda_q^{\frac{1}{2}n} e^{-\lambda_p \rho_p} H_q(g_0, ..., g_{q-1}) = c\lambda_q^{\frac{1}{2}n} H_q e^{-\lambda_q \rho_p}, \tag{4.6}$$

gde H_q zavisi isključivo od $\lambda_0, ..., \lambda_{q-1}$, jer g_p zavisi samo od λ_j, gde je $j \leq p$. Možemo izabrati, induktivno,

$$\lambda_q > l_q(\lambda_0, ..., \lambda_{q-1}),$$

takvo da je

$$\sum \lambda_q^{\frac{1}{2}n} H_q e^{-\lambda_q \rho} < \infty, \quad \text{za bilo koje } \rho > 0.$$

To radimo tako što izaberemo λ_q takvo da je $\lambda_q^{\frac{1}{2}n} H_q e^{-\frac{\lambda}{q}} < \frac{1}{q^2}$. Sa ovakvim odabirom niza $\{\lambda_q\}$, iz (4.6) imamo da red

$$h(z) = \sum h_q(z)$$

konvergira uniformno na U_p za bilo koje p; očigledno, $U = \bigcup U_p$ je otvoren skup u $\mathbb{C}^n$ i važi $U \cap \mathbb{R}^n = \Omega$; h je holomorfna po teoremi 2.1.3. Njena restrikcija na Ω je funckija g koja je zato realna analitička na Ω, čime je teorema pokazana.

4.3 Aproksimaciona teorema za holomorfne funkcije

Neka je U otvoren skup u $\mathbb{C}^n$ i neka je $\lambda : U \to \mathbb{R}^+$ nepekidna nenegativna funkcija. Sa $dv = dv_z$ označavamo Lebegovu meru u $\mathbb{C}^n$. Sa $\mathcal{H}(\lambda)$ označavamo skup holomorfnih funkcija na U takvih da je

$$\int_U |f(z)|^2 \lambda(z) dv < \infty.$$

Lema 4.3.1. Za $f, g \in \mathcal{H}(\lambda)$ definišemo skalarni proizvod

$$(f,g)_\lambda = (f,g) = \int_U f(z)\overline{g(z)}\lambda(z)dv.$$

Tada $\mathcal{H}(\lambda)$ sa skalarnim proizvodom (f,g) čini Hilbertov prostor.

Dokaz. Kako je prostor $L^2(\lambda dv)$ kvadratno integrabilnih funkcija po meri $\lambda(z)dv_z$ kompletan, ostaje nam samo da pokažemo da je $\mathcal{H}(\lambda)$ zatvoren u $L^2(\lambda dv)$. Ovo je posledica sledeće propozicije. □

Propozicija 4.3.2. Ako je $\{f_p\}$ niz elemenata iz $\mathcal{H}(\lambda)$ i važi

$$\int_U |f_p(z) - f_q(z)|\lambda(z)dv_z \to 0, \quad \text{kada } p, q \to \infty,$$

tada niz $\{f_p\}$ konvergira uniformno na kompaktnim podskupovima skupa U.

Dokaz. Kako je λ ograničena sa pozitivnom konstantom na bilo kojem kompaktnom podskupu skupa U, možemo uzeti $\lambda \equiv 1$. Ako je g holomorfna u okolini zatvorenog diska $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq \rho\}$, imamo po Košijevoj formuli,

$$g(a) = (\pi\rho^2)^{-1} \int_{|z|\leq\rho} g(a+z)dv.$$

Ako primenimo ovo n puta, sledi da ako je $h(z_1, ..., z_n)$ holomorfna u okolini policilindra $\{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1 - a_1| \leq \rho, ..., |z_n - a_n| \leq \rho\}$, onda

$$h(a) = (\pi\rho^2)^{-n} \int_{|z|\leq\rho} h(a+z)dv.$$

Neka je K kompaktan skup u U i $\rho > 0$ dovoljno malo tako da je skup

$$K_\rho = \{z \in \mathbb{C}^n : \text{ postoji } a \in K \text{ tako da je } |z - a| \leq \rho\}$$

kompaktan u U. Ako je f holomorfna u U i $a \in K$, imamo da je

$$|f(a)| \leq (\pi\rho^2)^{-n} \int_{|x|\leq\rho} |f(a+z)|dv \leq (\pi\rho^2)^{-n} \int_{K_p} |f(z)|dv.$$

Ako primenimo ovu nejednakost na razlike $(f_q - f_q)^2$, dobijamo traženo tvrđenje. □

Neka je $\{\phi_\nu\}$ kompletna ortonormirana baza u $\mathcal{H}(\lambda)$. Tada, ako $f \in \mathcal{H}(\lambda)$, onda je

$$f = \sum c_\nu \lambda_\nu, \quad c_\nu = (f, \phi_\nu),$$

gde je naravno red konvergentan u $\mathcal{H}(\lambda)$. Iz prethodne propozicije možemo zaključiti:

Lema 4.3.3. Ako je $\{\phi_\nu\}$ kompletna ortonormirana baza za $\mathcal{H}(\lambda)$, tada bilo koje $f \in \mathcal{H}(\lambda)$ može biti aproksimirano, uniformno na kompaktnim podskupovima skupa U sa konačnim linearnim kombinacijama

$$\sum_{\nu}^{N} c_\nu \phi_\nu, \quad c_\nu \in \mathbb{C}.$$

Propozicija 4.3.4. Neka su U_1, U_2 otvoreni skupovi u $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m$ redom, i neka su λ_j striktno pozitivne funkcije na U_j. Definišemo proizvod funkcija $\lambda_1 \times \lambda_2$ na $U_1 \times U_2$ na sledeći način:

$$(\lambda_1 \times \lambda_2)(z_1, z_2) = \lambda_1(z_1)\lambda_2(z_2).$$

Neka je $\{\phi_\nu^{(j)}\}$ kompletan ortonormiran sistem na $\mathcal{H}(\lambda_j)$, za $j = 1, 2$. Tada funkcije $\{\phi_{\nu_1}^{(1)}(z_1)\phi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)\}$ formiraju kompletnu ortonormiranu bazu u $\mathcal{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da ako $f \in \mathcal{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$ i

$$\int_{U_1 \times U_2} f(z_1, z_2)\overline{\phi_{\nu_1}^{(1)}\phi_{\nu_2}^{(2)}}\lambda_1(z_1)\lambda_2(z_2)dv = 0, \quad \text{za sve } \nu_1, \nu_2,$$

(gde je dv Lebegova mera u $\mathbb{C}^{n_1+n_2}$), tada se $f \equiv 0$. Neka je dv_j Lebegova mera u $\mathbb{C}^{n_j}$. Prvo treba da pokažemo da za $a_1 \in U_1$, funkcija

$$z_2 \mapsto f(a_1, z_2)$$

na U_2 pripada $\mathcal{H}(\lambda_2)$. Štaviše, iz dokaza prethodne propozicije sledi da za $z_j \in U_2$, i dovoljno malo $\rho > 0$

$$|f(a_1, z_2)|^2 \leq c^{-1}(\pi\rho^2)^{-n_1} \int_{|z_1 - a_1| \leq \rho} |f(z_1, z_2)|^2 \lambda_1(z_1)dv_1.$$

gde je

$$c = \inf \lambda_1(z_1) \ \text{ za } \ |z_1 - a_1| \leq \rho,$$

tako da je

$$\int_{U_2} |f(a_1, z_2)|^2 \lambda_2(z_2)dv_2 \leq c^{-1}(\pi\rho^2)^{-n_1} \int_{U_1 \times U_2} |f(z_1, z_2)|^2 \lambda_1(z_1)\lambda_2(z_2)dv < \infty.$$

Sada tvrdimo da za bilo koje ν_2, funkcija

$$g(z_1) = g^{(\nu_2)}(z_1) = \int_{U_2} f(z_1, z_2)\overline{\phi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)}\lambda_2(z_2)dv_2$$

leži u $\mathcal{H}(\lambda)$. Prvo imamo da je $g(z_1)$ holomorfna na U_1 jer, ako imamo niz kompaktnih skupova $\{K_p\}$ koji icrpljuju U_2,

$$\int_{K_p} f(z_1, z_2)\overline{\phi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)}\lambda_2(z_2)dv_2$$

konvergira ka $g(z_1)$, uniformno na kompaktnim podskupovima skupa U_1, kao u propoziciji 4.3.2. Dalje, po Švarcovoj nejednakosti imamo

$$|g(z_1)|^2 \leq \int_{U_2} |f(z_1, z_2)|^2 \lambda_2(z_2)dv_2 \int_{U_2} |\phi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)|^2 \lambda_2(z_2)dv_2,$$

pa je

$$\int_{U_1} |g(z_1)|^2 \lambda_1(z_1)dv_1 \leq \int_{U_1} \lambda_1(z_1)dv_1 \int_{U_2} |f(z_1, z_2)|^2 \lambda_2(z_2)dv_2 < \infty,$$

jer $f \in \mathcal{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$. Stoga $g(z_1) \in \mathcal{H}(\lambda_1)$. Po hipotezi, $g(z_1)$ je ortogonalna na sve $\{\phi_{\nu_1}^{(1)}(z_1)\}$ u $\mathcal{H}(\lambda_1)$, stoga se $g(z_1) \equiv 0$. Zato, za fiksno z_1, $f(z_1, z_2)$ je ortogonalno na sve $\{\phi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)\}$ u $\mathcal{H}(\lambda_2)$, pa se $f(z_1, z_2) \equiv 0$. $\square$

Teorema 4.3.5. Ako su U_1, U_2 otvoreni skupovi u $\mathbb{C}^{n_1}, \mathbb{C}^{n_2}$ redom, konačne linearne kombinacije

$$\sum_{\nu} \phi_\nu^{(1)}(z_1)\phi_\nu^{(2)}(z_2),$$

gde su $\phi_\nu^{(j)}(z_j)$ holomorfne na U_j, su guste u prostoru holomorfnih funkcija na $U_1 \times U_2$ u odnosu na topologiju kompaktne konvergencije.

Dokaz. Neka je $f(z_1, z_2)$ holomorfna na $U_1 \times U_2$. Tada postoji strogo pozitivna neprekidna funkcija $\eta : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^+$ tako da $f \in \mathcal{H}(\eta)$, tj.

$$\int_{U_1 \times U_2} |f|^2 \eta dv < \infty.$$

Neka su $\{K_p^{(j)}\}$ kompaktni skupovi u U_j tako da važi:

$$K_p^{(j)} \subset \mathring{K}_{p+1}^{(j)}, \quad \bigcup K_p^{(j)} = U_j.$$

Tada je

$$\bigcup_p K_p^{(j)} \times K_p^{(2)} = U_1 \times U_2.$$

Neka je $0 < \epsilon < 1$ takvo da je $\eta(z_1, z_2) \geq \epsilon_p$ za $(z_1, z_2) \in K_p^{(1)} \times K_p^{(2)}$. Neka su λ_j strogo pozitivne funkcije na U_j takve da je $\lambda_j(z_j) \leq \epsilon_p$ za $z_j \in K_p^{(j)} \setminus K_{p-1}^{(j)}$. Sada

$$(K_p^{(1)} \times K_p^{(2)}) \setminus (K_{p-1}^{(1)} \times K_{p-1}^{(2)}) = K_p^{(1)} \times (K_p^{(2)} \setminus K_{p-1}^{(2)}) \cup (K_p^{(1)} \setminus K_{p-1}^{(1)}) \times K_p^{(2)}.$$

Za tačku

$$(z_1, z_2) \in (K_p^{(1)} \times K_p^{(2)}) \setminus (K_{p-1}^{(1)} \times K_{p-1}^{(2)}),$$

trivijalno imamo da je

$$\lambda_1(z_1)\lambda_2(z_2) \leq \epsilon_p \leq \eta(z_1, z_2).$$

Stoga imamo da je

$$\lambda_1(z_1)\lambda_2(z_2) \leq \eta(z_1, z_2), \quad \text{na } U_1 \times U_2.$$

Stoga $f \in \mathcal{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$. □

Ako je $\{\phi_\nu^{(j)}\}$ kompletan ortonormiran sistem u $\mathcal{H}(\lambda_j)$, tada proizvodi $\phi_{\nu_1}^{(1)}\phi_{\nu_2}^{(2)}$ formiraju kompletnu ortonormiranu bazu u $\mathcal{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$. Kako $f \in \mathcal{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$, po lemi 4.3.3, postoje kompleksne konstante $c_{\nu_1\nu_2}$ tako da forma

$$\sum c_{\nu_1\nu_2}\phi_{\nu_1}^{(1)}(z_1)\phi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)$$

aproksimira f uniformno na kompaktnim podskupovima skupa $U_1 \times U_2$.

Deo II

Linearni diferencijalni operatori

Glava 5

Furijeova transformacija

Ova transformacija ima svoju široku primenu u teoriji i praksi. Ako je primenimo na talas, dobićemo vrednost amplitude za datu frekvenciju. Ovde ćemo ispitati neke od njenih osnovnih osobina u zavisnosti od prostora funkcija na kojima je primenjujemo. Rezultate iz ovog poglavlja ćemo primenjivati u velikoj meri dalje u radu zbog korisne osobine ove transformacije koja nam daje direktnu vezu između polinoma i diferencijalnih operatora.

5.1 Furijeova transformacija na Schwartz-ovim prostorima

Neka je dat otvoren skup $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i realan broj $p \geq 1$. Skup kompleksnih Lebeg-merljivih funkcija f na Ω takvih da je $|f|^p$ integrabilno u odnosu na Lebegovu meru čini vektorski prostor. Ovaj prostor je takođe snabdeven normom koja se prirodno nameće

$$||f||_{L^p} = \Big(\int_\Omega |f|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}},$$

i sa tom normom čini Banahov prostor koji obeležavamo sa $L^p(\Omega)$. Primetimo da funkcije koje imaju normu 0 mogu biti jednake nuli skoro svugde. Specijalno, za $p = 2$ na ovom prostoru možemo definisati

$$(f, g)_{L^2} = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\mathrm{dx}.$$

$L^2(\Omega)$ je Hilbertov u odnosu na ovaj skalarni proizvod. Neka je $f \in L^1(\Omega)$. Definišemo Furijeovu transformaciju $\mathcal{F} : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$, $f \mapsto \hat{f}$ na sledeći način:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i<x,\xi>}\mathrm{dx},$$

gde je $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ i $< x, \xi >= x_1\xi_1 + ... + x_n\xi_n$.

Dalje, definišemo Švarcov prostor brzoopadajućih funkcija

$$S(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : (1 + |x|^2)^N D^\alpha f(x) \text{ je ograničena } \forall N \in \mathbb{N}_0, \forall |\alpha| \geq 0\}.$$

Za sve $0 \leq p \leq \infty$, $S(\mathbb{R}^n)$ je gust u $L^p(\mathbb{R}^n)$. Takođe, za sve $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $D^\alpha f$ je sadržana u $S(\mathbb{R}^n)$ (a samim time i ograničen). Primetimo da parcijalnom integracijom dobijamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) e^{-i<x,\xi>} dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(f(x) e^{-i<x,\xi>} \Big|_{x_i=-\infty}^{x_i=\infty} \Big) dx_1 ... d_{x_{i-1}} dx_{i+1} ... dx_n \\ &- \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(-i\xi_i) e^{-i<x,\xi>} dx,\end{aligned}$$

a kako je $e^{-i<x,\xi>}\Big|_{x_i=-\infty}^{x_i=\infty} = 0$ (sem na skupu mere 0), imamo da je prvi član sa desne jednakosti 0, tj.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) e^{-i<x,\xi>} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(i\xi_i) e^{-i<x,\xi>} dx,$$

Odavde direktno dobijamo da je

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(x) e^{-i<x,\xi>} \mathrm{d}x = (2\pi)^{-n/2} i^{|\alpha|} \xi^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i<x,x>} dx,$$

tj.

$$\mathcal{F}(D^\alpha f) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}(f). \tag{5.1}$$

Primetimo da je

$$|\hat{f}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||e^{-i<x,\xi>}| dx = (2\pi)^{-n/2} ||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Sada imamo direktno:

Corolar 5.1.1. Ako $f \in S(\mathbb{R}^n)$, onda $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 5.1.2. (**Formula inverzije**) Ako $f \in S(\mathbb{R}^n)$, onda je

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i<x,\xi>} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dokaz. Neka je $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$. Kako je $\hat{f}$ ograničeno, imamo da je funkcija $\phi(\xi)\hat{f}(\xi)$ integrabilna. Dalje, koristeći Fubinijevu teoremu imamo:

$$\begin{aligned}\int \phi(\xi)\hat{f}(\xi) e^{i<x,\xi>} d\xi &= (2\pi)^{-n/2} \int \phi(\xi) e^{i<x,\xi>} \Big(\int f(y) e^{-i<y,\xi>} dy \Big) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int \phi(\xi) f(y) e^{i<x-y,\xi>} dy d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int f(x+t) \Big(\int \phi(\xi) e^{-i<t,\xi>} d\xi \Big) dt \\ &= \int f(x+t) \hat{\phi}(t) dt,\end{aligned}$$

gde je naravno $t = x + y$ smena koju smo koristili. Uzmimo $g \in S(\mathbb{R}^n)$ i stavimo $\phi(\xi) = g(\epsilon\xi)$ sa $\epsilon > 0$. Tada imamo

$$\hat{\phi}(t) = \epsilon^{-n} \hat{g}(t/\epsilon).$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned}\int g(\epsilon\xi)\hat{f}(\xi) e^{i<x,\xi>} d\xi &= \int f(x+\epsilon t)\hat{g}(t) dt \\ &= \int f(x+t)\epsilon^{-n}\hat{g}(t/\epsilon) dt.\end{aligned}$$

Kako su f i g ograničene i $\hat{f}$ i $\hat{g}$ integrabilne po prethodnom korolaru, možemo da pustimo $\epsilon \to 0$ pod integralom, i dobijamo:

$$g(0)\int \hat{f}(\xi)e^{i<x,\xi>}d\xi = f(x)\int \hat{g}(t)dt.$$

Ako uzmemo da je

$$g(\xi) = e^{||\xi||^2/2},$$

uzimajući u obzir

$$\hat{g} = g,$$

imamo da je

$$g(0) = (2\pi)^{-n/2}\int \hat{g}(t)dt = 1.$$

Kada uvrstimo ovo u jednakost dobijamo

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2}\int \hat{f}(\xi)e^{i<x,\xi>}d\xi,$$

što je i trebalo pokazati. □

Corolar 5.1.3. Imamo

$$\int f(\xi)\hat{\phi}(\xi)d\xi = \int \hat{f(\xi)}\phi(\xi)d\xi.$$

Ovo dobijamo iz dokaza prethodne teoreme, ako stavimo $x = 0$.

Corolar 5.1.4. Ako $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $g \in S(\mathbb{R}^n)$, onda imamo

$$\int g(\xi)\hat{f}(\xi)e^{i<x,\xi>}d\xi = \int f(x+t)\hat{g}(t)dt.$$

Direktno iz dokaza prethodne teoreme.

Corolar 5.1.5. Ako $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$, imamo:

$$(f,g)_{L^2} = (\hat{f},\hat{g})_{L^2}.$$

Kao poseban slučaj, za $f = g$ imamo $||f||_{L^2} = ||\hat{f}||_{L^2}$.

Dokaz. Uvodimo $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ tako da je

$$\overline{\phi(t)} = \hat{g}(t).$$

Tada, po formuli inverzije imamo:

$$g(x) = (2\pi)^{-n/2}\int \hat{g}(\xi)e^{i<x,\xi>}d\xi.$$

Ako konjugujemo ceo izraz, imamo:

$$\overline{g(x)} = (2\pi)^{-n/2}\int \phi(\xi)e^{-i<x,\xi>}d\xi = \hat{\phi}(x).$$

Tada po 5.1.3 imamo da je

$$(f,g)_{L^2} = \int f(\xi)\overline{g(\xi)}d\xi = \int f(\xi)\hat{\phi}(\xi)d\xi = \int \hat{f}(\xi)\phi(\xi)d\xi = (\hat{f},\hat{g})_{L^2},$$

što je i trebalo pokazati. □

5.2 Furijeova transformacija na L^1 i L^2 prostorima

Ako imamo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ i $g \in S(\mathbb{R}^n)$ tada je naravno proizvod fg integrabilan. Sada za tu funkciju f možemo da definišemo linearnu funkcionelu $\hat{f}$ na $S(\mathbb{R}^n)$ na sledeći način:

$$(\hat{f}, \phi) = \int f(t)\hat{\phi}(t)dt, \quad \forall \phi \in S(\mathbb{R}^n)$$

$\hat{f}$ opet zovemo Furijeovom transformacijom funkcije f. Ako za neko $1 \leq q \leq \infty$ postoji funkcija $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ tako da važi

$$(\hat{f}, \phi) = \int g(t)\hat{\phi}(t)dt, \quad \forall \phi \in S(\mathbb{R}^n),$$

onda poistovećujemo $\hat{f}$ sa g. Primetimo da su onda ove funkcije jednake do na skup mere 0.

Sada ćemo da pokažemo da je zapravo L^2 norma invarijanta Furijeove transformacije:

Teorema 5.2.1. (Plancherel)[1]. Neka $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Tada i $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ i važi $||f||_{L^2} = ||\hat{f}||_{L^2}$.

Dokaz. Kako je $S(\mathbb{R}^n)$ gust u $L^2(\mathbb{R}^n)$, imamo niz funkcija $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ takav da važi:

$$||f_k - f||_{L^2} \to 0, \quad \text{kada } k \to \infty.$$

Dalje, po 5.1.5 imamo da je

$$\begin{aligned} &||\hat{f}_k - \hat{f}_l||_{L^2} = ||f_k - f_l||_{L^2} \quad \text{, pa imamo da} \\ &||\hat{f}_k - \hat{f}_l||_{L^2} \to 0, \quad \text{kada } k, l \to \infty. \end{aligned}$$

Sada koristeći kompletnost prostora $L^2(\mathbb{R}^n)$ imamo da postoji $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ takvo da

$$||\hat{f}_k - g||_{L^2} \to 0, \quad \text{kada } k \to \infty.$$

Očigledno važi da

$$||g||_{L^2} = \lim_{k\to\infty} ||\hat{f}_k||_{L^2} = \lim_{k\to\infty} ||f_k||_{L^2} = ||f||_{L^2}.$$

Dalje, za $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ imamo

$$\int g(t)\phi(t)dt = \lim_{k\to\infty} \int \hat{f}_k(t)\phi(t)dt = \lim_{k\to\infty} \int f_k(t)\hat{\phi}(t)dt,$$

po koroloaru 5.1.3. Dalje, kako $f_k \to f$ u $L^2(\mathbb{R}^n)$ i $\hat{\phi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, po Švarcovoj nejednakosti imamo:

$$|(f_k - f, \hat{\phi})| \leq ||f_k - f||_{L^2} ||\hat{\phi}||_{L^2} \to 0, \text{ kada } k \to \infty,$$

pa važi da

$$\lim_{k\to\infty} \int (f_k(t) - f(t))\hat{\phi}(t)dt \to 0, \text{ kada } k \to \infty$$

tj.

$$\int g(t)\phi(t)dt = \lim_{k\to\infty} \int f_k(t)\hat{\phi}(t)dt = \int f(t)\hat{\phi}(t)dt = (\hat{f}, \phi), \forall \phi \in S(\mathbb{R}^n),$$

čime je teorema dokazana. □

[1] Michel Plancherel (1885 - 1967), Švajcarski matematičar

Propozicija 5.2.2. Primetimo da važi

$$\hat{\hat{f}}(-x) = f(x), \quad \text{za } f \in S(\mathbb{R}^n)$$

Ovo je direktna posledica formule inverzije i prethodne teoreme. Primetimo da ovo važi za L^2 prostore. Ako $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, za $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ imamo

$$\int \phi(\epsilon\xi)\hat{f}(\xi)e^{i<x,\xi>}d\xi = \int f(x+\epsilon t)\hat{\phi}dt,$$

po korolaru 5.1.4. Sada, ako dodamo uslov da $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ imamo da leva strana konvergira ka

$$\phi(0)\int \hat{f}(\xi)e^{i<x,\xi>}d\xi,$$

dok desna strana konvergira u prostoru $L^1(\mathbb{R}^n)$ ka

$$f(x)\int \hat{\phi}(t)dt.$$

Kako je

$$\int \phi(\hat{t})dt = \int \hat{\phi}e^{i<t,0>}dt,$$

imamo

$$\hat{\hat{f}}(-x) = f(x),$$

naravno pod početnom pretpostavkom da $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Dalje, definišemo operaciju konvolucije za $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ na sledeći način:

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy$$

Pokazaćemo da ovako zadata operacija ima smisla:

Propozicija 5.2.3. Neka $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Tada

$$\int |f(x-y)g(y)|dy < \infty,$$

za skoro sve x. Takođe važi

$$||f * g||_{L^1} \leq ||f||_{L^1}||g||_{L^1}.$$

Neka su $f, g \geq 0$. Pokažimo da $(f * g) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Po Fubinijevoj teoremi imamo:

$$\int\int f(x-y)g(y)dydx = \int \Big(\int f(x-y)dx\Big)g(y)dy = ||f||_{L^1}||g||_{L^1} < \infty.$$

Ako uzmemo proizvoljno $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dobijamo datu nejednakost normi.

Komentar 5.2.1. Primetimo da za $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ trivijalno imamo da je

$$\int \Big|f(x-y)g(y)\Big|dy < \infty$$

za skoro sve x, i po Švarcovoj nejednakosti važi

$$\Big|\int f(x-y)g(y)dy\Big| \leq ||f||_{L^2}||g||_{L^2}.$$

Teorema 5.2.4. Neka $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$. Tada i $f * g \in S(\mathbb{R}^n)$ i važi

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} \hat{g}.$$

Dokaz. Prvo primetimo da je

$$|x|^2 = |x - y + y|^2 \leq (|x - y| + |y|)^2 \leq 2|x - y|^2 + 2|y|^2,$$

pa je

$$1 + |x|^2 \leq 2 + 2|x - y|^2 + 2|y|^2 \leq 2(1 + |x - y|^2)(1 + |y|^2).$$

Kako je $D^\alpha(f * g) = \int D^\alpha f(x - y) g(y) dy$, imamo da je

$$\begin{aligned} (1 + |x|^2)^N |D^\alpha(f * g)| &\leq 2^N \Big| \int (1 + |x - y|^2)^n D^\alpha f(x - y)(1 + |y|^2)^n g(y) dy \Big| \\ &\leq 2^N ||(1 + |x|^2) D^\alpha f(x)||_{L^2} ||(1 + |x|^2) g(x)||_{L^2} < \infty, \end{aligned}$$

jer su funkcije $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$, pa dobijamo da je $f * g \in S(\mathbb{R}^n)$. Dalje,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int \Big(\int f(x - y) g(y) dy \Big) e^{-i<x,\xi>} dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int f(x - y) g(y) e^{-i<x,\xi>} dy dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int f(x - y) e^{-i<x-y,\xi>} g(y) e^{-i<y,\xi>} dy dx \\ &= (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

□

Corolar 5.2.5. Ako $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$, tada po prethodnoj teoremi i formuli inverzije imamo:

$$\mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{g}.$$

Glava 6

Linearni diferencijalni operatori

U ovom poglavlju ćemo uvesti linearni diferencijalni operator preko definicije nosača i pokazati da se može predstaviti u pogodnom obliku koji najčešće može da se vidi u literaturi. Posle toga ćemo pokazati jedan rezultat koji povezuje slabu neprekidnost sa linearnim diferencijalnim operatorom.

6.1 Teorema Peetre-a o reprezentaciji linearnog diferencijalnog operatora

Definicija 6.1.1. Neka je V otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Tada definišemo linearni diferencijalni operator

$$P : C^\infty(V, p) \to C^\infty(V, q),$$

tako da važi

$$\operatorname{supp}(Ps) \subset \operatorname{supp}(s)$$

Prirodno možemo definisati i restrikciju operatora na otvorenom skupu $U \subset V$:

$$P_U : C^\infty(U, p) \to C^\infty(U, q),$$

Štaviše, za $a \in U$ uzmimo C^∞-funkciju ϕ koja ima kompaktan nosač u U koja je jednaka 1 u okolini a. Tada za sve $s \in C^\infty(U)$ definišemo odeljak $\phi s \in C^\infty(V)$ na sledeći način:

$$\phi s(x) = \begin{cases} \phi(x)s(x), \text{ ako } x \in U \\ 0, \text{ ako } x \notin U \end{cases}$$

Možemo da stavimo da je

$$(P_U s)(a) = P(\phi s)(a)$$

Propozicija 6.1.1. Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i neka je P linearni diferencijalni operator , $P : C^\infty(\Omega, r) \to C^\infty(\Omega, s)$. Tada, za bilo koje $a \in \Omega$ postoji okolina $U \ni a$, $n \in \mathbb{N}$ i konstanta $C > 0$ takva da važi:

$$||Pu||_0 \leq C||u||_m, \tag{6.1}$$

za bilo koje

$$u \in C_0^\infty(U \setminus \{a\}, r).$$

Podsetimo se da je norma za funkciju $C_0^\infty(U, r)$ definisana na sledeći način:

$$||u||_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{j=1}^{r} \sup_{x \in U} |D^\alpha u_j(x)|, u = (u_1, ..., u_r).$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da za neku tačku $a \in \Omega$. Neka je onda U_0 relativno kompaktan u Ω. Tada postoji otvoren skup

$$U_1 \subset\subset U \setminus \{a\},$$

i funkcija

$$u_1 \in C_0^\infty(U_1, r),$$

takva da važi

$$||Pu_1||_0 > 2^2||u_1||_1.$$

Dalje, u $U_0 \setminus \overline{U}_1 \ni a$ postoji otvoren skup

$$U_2 \subset\subset (U_0 \setminus \overline{U}_1) \setminus \{a\}$$

i funkcija

$$u_2 \in C_0^\infty(U_2)$$

takvo da važi

$$||Pu_2||_0 > 2^{2\cdot 2}||u_2||_2.$$

Dalje konstruišemo niz skupova $\{U_k\}$ na sličan način:

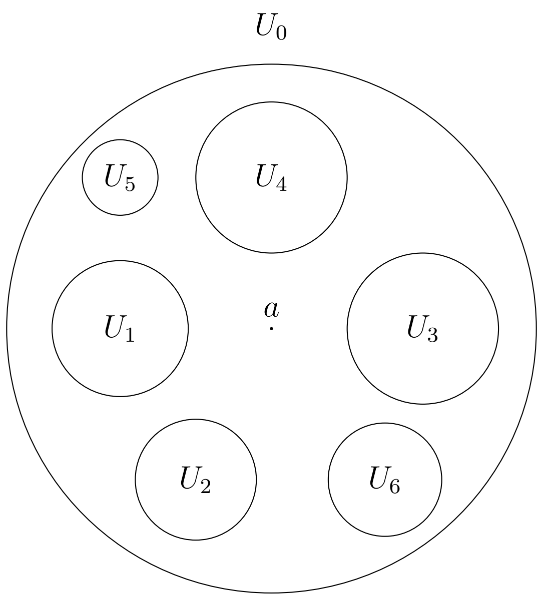
$$\overline{U}_k \subset U_0 \setminus \{a\},\ \overline{U}_k \cap \overline{U}_l = \emptyset, \quad \text{ako } k \neq l$$

tako da važi

$$u_k \in C_0^\infty(U_k, r)$$

i

$$||Pu_k||_0 > 2^{2\cdot k}||u_k||_k.$$



Slika 6.1: Konstrukcija skupova.

Neka je dalje

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k} u_k}{||u_k||_k}.$$

Očigledno da red konvergira u C^∞, i to tako da

$$u \in C_0^\infty(U', r),$$

gde je U' relativno kompaktna okolina $\overline{U_0}$ u Ω. Imamo da je

$$u|U_k = 2^{-k} u_k|U_k||u_k||_k^{-1}.$$

Zbog osobine linearnog diferencijalnog operatora $\mathrm{supp}(Pf) \subset \mathrm{supp}(f)$, za sve f, imamo da je

$$Pu|U_k = 2^{-k}||u_k||_k^{-1}(Pu_k)|U_k.$$

Kako je $||Pu_k||_0 > 2^{2k}||u_k||_k$, postoji $x_k \in U_k$ takvo da je

$$|Pu_k(x_k)| > 2^{2k}||u_k||_k. \tag{6.2}$$

Sada je

$$|Pu(x_k)| = 2^{-k}||u_k||_k^{-1}|(Pu_k)|U_k| > 2^k.$$

□

Teorema 6.1.2. (Peetre)[1] Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i neka je P linearni diferencijalni operator iz $C^\infty(\Omega, r)$ u $C^\infty(\Omega, s)$. Tada, za svaki relativno kompaktan podskup Ω' u Ω postoje:

1. Konstanta $m \geq 0$;
2. C^∞ preslikavanja a_α iz Ω' u prostor linearnih preslikavanja iz $\mathbb{R}^r$ u $\mathbb{R}^s$ (tj. prostor matrica $s \times r$),

takva da za svaku funkciju $u \in C^\infty(\Omega', r)$

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)(D^\alpha u)(x).$$

Dokaz. Dokaz ćemo podeliti na nekoliko koraka. Prvo ćemo da fiksiramo proizvoljan otvoren skup U i pretpostaviti da postoje konstante $C > 0$ i $m \geq 0$ takve da važi

$$||Pu||_0 \leq C||u||_m, \text{ za sve } u \in C_0^\infty(U, r). \tag{6.3}$$

Ovu pretpostavku ćemo koristiti kroz ceo dokaz.

1. Korak: Pokazaćemo da za funkciju $u \in C_0^\infty(U, r)$ koja je $m-$ravna u tački a važi:

$$(Pu)(a) = 0. \tag{6.4}$$

Po lemi 4.1.1 postoji niz funkcija $\{u_k\} \in C_0^\infty(U, r)$ koje se anuliraju u okolini tačke a takve da $||u - u_k||_m$ teži ka 0 kada $k \to \infty$. Po nejednakosti 6.3, Pu_k onda uniformno konvergira ka Pu na U. Sada, kako je

$$\mathrm{supp}(Pu_k) \subset \mathrm{supp}(u_k),$$

[1] Jaak Peetre, rođen 1935., švedski matematičar

i kako su funkcije u_k jednake 0 u okolini a, imamo

$$(Pu_k)(a) = 0.$$

Stoga, zbog uniformne konvergencije imamo:

$$(Pu)(a) = \lim_{k\to\infty}(Pu_k)(a) = 0.$$

2. Korak: Pokazaćemo da za bilo koju funkciju $u \in C^\infty(U,r)$ postoje C^∞ preslikavanja a_α koja slikaju Ω u prostor matrica $s\times r$ takva da:

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha u(x), \quad x \in U.$$

Neka je $e_1, ..., e_r$ baza prostora $\mathbb{R}^r$. Ako $u \in C^\infty(U,r)$, imamo

$$u = \sum_{j=1}^{r} u_j e_j, \quad \text{gde } u_j \in C^\infty(U,1).$$

Za $a \in U$, neka je $\mu_{\alpha,a}$ monom

$$\mu_{\alpha,a} = (x-a)^\alpha.$$

Tada imamo po Tejlorovoj formuli u a imamo da je

$$u = \sum_{|\alpha|\le m}\frac{1}{\alpha!}\mu_{\alpha,a}\sum_{j=1}^{r} D^\alpha u_j e_j + f,$$

gde je f funkcija ostatka koja je $m-$ravna u a. Podsetimo se da postoji skalarna funkcija ν_a takva da je

$$\mathrm{supp}(\nu_a) \subset U, \text{ kompaktan u } U,$$

koja je jednaka 1 u nekoj okolini tačke a. Ovo nam na primer daje korolar 2.3.5. Tada je funkcija $f\nu_a \in C_0^\infty(U,r)$ i takođe m-ravna u a pa, uzimajući u obzir da su funkcije u_j skalarne, dobijamo:

$$(Pu)(a) = \sum_{|\alpha|\le m}\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\alpha!}P(\mu_{\alpha,a})(a)D^\alpha u_j(a).$$

Kako je

$$\mu_{\alpha,a} = \sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(-a)^{\alpha-\beta}\mu_{\beta,0},$$

a po pretpostavci $P(\mu_{\beta,0}e_j)$ je C^∞ preslikavanje skupa Ω na $\mathbb{R}^s$, imamo da je preslikavanje $a \mapsto P(\mu_{\alpha,a})(a)$ C^∞ sa skupa Ω u $\mathbb{R}^s$. Predstavimo sumu po j zajedno sa funkcijama $\frac{1}{\alpha!}P(\mu_{\alpha,a})(a)$ preko linearnih preslikavanja a_α. Na kraju još samo treba da zaključimo da je ovo tačno u svakoj tački $a \in U$ čime dobijamo traženo tvrđenje.

3. Korak: Ovde ćemo pokazati tvrđenje teoreme. Iz propozicije 6.1.1 imamo da za svaku tačku $a \in U$ postoji okolina U_a i konstante $C_a > 0$ i $m_a \in \mathbb{N}$ takve da je

$$||Pu||_0 \le C_a||u||_{a_m}$$

Kako je $\Omega' \subset \bigcup_{a\in U} U_a$ relativno kompaktan u U, postoji konačan skup tačaka $A = \{a_1, ...a_k\}$ takvih da je
$$\Omega' \subset \bigcup_{a\in A} U_a.$$
Ako uzmemo $C = \max\{C_a : a \in A\}$ i $m = \max\{m_a : a \in A\}$, imamo da važi
$$||Pu||_0 \leq C||u||_m,$$
za sve
$$u \in C_0^\infty(\Omega' \setminus \bigcup\{a_i\}, r).$$
Iz koraka 2 imamo da postoje C^∞ preslikavanja a_α iz Ω' u $\mathbb{R}^s$ takva da je
$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)(D^\alpha u)(x), \quad \text{za } x \in \Omega \setminus \{x_i\}.$$
Kako su obe strane jednakosti neprekidne, imamo traženo tvrđenje. □

6.2 Slaba neprekidnost

Definicija 6.2.1. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, i $a \in \Omega$. Sa m_a ćemo obeležavati potprostor prostora $C^\infty(\Omega, r)$ koji čine funkcije f takve da je $D^\alpha f(a) = 0$, za sve $|\alpha| = 1$. Red operatora P u tački a ćemo obeležavati $o_P(a)$. Definišemo ga kao najveći broj k takav da je $P(f^k s)(a) \neq 0$ za neko $f \in m_a$ i neki odeljak $s \in C_0^\infty(\Omega, r)$. Red operatora definišemo kao $\max\limits_{a\in\Omega} o_P(a)$.

Komentar 6.2.1. Lako možemo dokazati da je red operatora P zadat kao u 6.1.2 zapravo najveće k za koje postoji α takvo da je $|\alpha| = k$ i $a_\alpha \not\equiv 0$..

Definicija 6.2.2. $\mathbb{C}$-linearan operator $L : C^\infty(\Omega, r) \to C^\infty(\Omega, s)$ ćemo nazivati slabo neprekidnim, ako za svaki niz odeljaka $\{s_k\}$ u $C^\infty(\Omega, r)$ koji lokalno uniformno konvergiraju ka $s \in C^\infty(\Omega, r)$ zajedno sa svim njihovim izvodima, niz $\{Ls_k\}$ konvergira uniformno na kompaktnim podskupovima ka Ls.

Teorema 6.2.1. Slabo neprekidan $\mathbb{C}$-linearan operator
$$L : C^\infty(\Omega, r) \to C^\infty(\Omega, s)$$
je linearan diferencijalni operator reda $\leq m$ ako i samo ako je sledeći uslov ispunjen:
Za bilo koje $s \in C^\infty(\Omega, r), a \in \Omega$ i bilo koju realnu funkciju f na Ω
$$\kappa(\lambda)(a) = e^{-i\lambda f(a)}\{L(se^{i\lambda f})(a)\}$$
je polinom po λ reda $\leq m$ sa vrednostima u

Dokaz. Jedan smer je jednostavan. Ako pretpostavimo da je L linearni diferencijalni operator reda $\leq m$, po prethodnoj teoremi imamo da je
$$L(se^{i\lambda f}) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha(se^{i\lambda f}) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha e^{i\lambda f}\Big(D^\alpha s + (i\lambda)^{|\alpha|} s D^\alpha f\Big),$$
pa je
$$\kappa(\lambda)(a) = e^{-i\lambda f(a)} \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha e^{i\lambda f}\Big(D^\alpha s + (i\lambda)^{|\alpha|} s D^\alpha f\Big) =$$

na svakom relativno kompaktnom podskupu, pa samim time i svugde. Ovo je očigledno polinom $m-$tog stepena.
Pokažimo sada drugi smer. Prvo ćemo predstaviti polinom preko funkcija $\kappa_\nu(f,s)$:

$$\kappa(\lambda)(a)=\sum_{\nu=0}^{m}\kappa_\nu(f,s)(a)\lambda^\nu.$$

Naravno, preslikavanje $a\mapsto\kappa_\nu(f,s)(a)$ onda mora biti C^∞, tj. $\kappa_\nu(f,s)\in C^\infty(\Omega,r)$.
Dalje, za realne brojeve $\lambda_1,...\lambda_k$ i realne funkcije $f_1,...,f_k$ definišemo

$$e^{-it(\lambda_1 f_1+...+\lambda_k f_k)}L(se^{it(\lambda_1 f_1+...+\lambda_k f_k)})=\sum_{\nu=0}^{m}\kappa_\nu(\lambda,f,s)t^\nu, \tag{6.5}$$

gde je $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_k)$ i $f=(f_1,...,f_k)$. Ovo je očigledno polinom po t, jer je $\lambda_1 f_1+...+\lambda_k f_k$ realna funkcija. Zbog toga je

$$\kappa_\nu(\lambda,f,s)\in C^\infty(\Omega,r).$$

Takođe, za fiksirano λ i $u>0$ imamo da je

$$\kappa_\nu(u\lambda,f,s)=u^\nu\kappa_\nu(\lambda,f,s).$$

Primetimo da je 6.5 jednako sa $\kappa(t\cdot\langle\lambda,f\rangle)$, pa je

$$\kappa_\nu(\lambda,f,s)(a)=\kappa_\nu(f,s)(a)\langle\lambda,f\rangle^\nu,$$

što je homogeni polinom po svim $\lambda_1,...\lambda_k$. Dalje, neka tačke $a,b\in\Omega$, neka je U okolina tih tačaka i neka je $\phi:U\to V$ C^∞-difeomorfizam skupa U na otvoren skup V u $\mathbb{R}^n$. Za proizvoljnu funkciju $\beta\in C_0^\infty(V)$, po formuli inverzije (tj. inverzne Furijeove transformacije) imamo:

$$\beta(y)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\beta}(\lambda)e^{i<y,\lambda>}d\lambda.$$

Stoga, ako $s\in C^\infty(\Omega,r)$, za funkciju $s_0(x)=s(x)\beta(\phi(x))$ imamo:

$$s_0(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\beta}(\lambda)e^{i<\lambda,f(x)>}s(x)d\lambda.$$

Kako je L slabo neprekidno, imamo:

$$\begin{aligned}L(s_0)(a)&=(2\ pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\beta}(\lambda)L(se^{i<\lambda,\phi>})(a)d\lambda\\&=(2\pi)^{-n/2}\sum_{\nu=0}^{m}\int\hat{\beta}(\lambda)\kappa_\nu(\lambda,\phi,s)(a)e^{i<\lambda,\phi(a)>}d\lambda\\&=\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{|\alpha|=\nu}\sigma_{\alpha,\nu}(a)(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\beta}(\lambda)e^{i<\lambda,\phi(a)>}\lambda^\alpha d\lambda,\end{aligned}$$

gde je

$$\sigma_{\alpha,\nu}\in C^\infty(\Omega,r).$$

Kako su funkcije $\kappa_\nu(\lambda,\phi,s)(a)$ homogeni polinomi po λ stepena ν, po formuli inverzije imamo:

$$L(s_0)(a)=\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{|\alpha|=\nu}\sigma_{\alpha,\nu}(a)i^{-|\alpha|}(D^\alpha\beta)(\phi(a)). \tag{6.6}$$

Ako $s \in C_0^\infty(V, \xi)$ ima nosač u maloj okolini tačke a, tada je

$$\operatorname{supp}(Ls) \subset \operatorname{supp}(s).$$

Ako $b \notin \operatorname{supp}(s)$, možemo da uzmemo da funkciju β takvu da je $\beta(\phi(x)) = 0$ ako je x blizu b i da je $\beta(\phi(x)) = 1$ u okolini $\operatorname{supp}(s)$ i primeniti 6.6 i dobijamo da je L linearni diferencijalni operator reda $\leq m$.

$\square$

Glava 7

Prostori Soboljeva

Parcijalne diferencijalne jednačine opisuju veliki broj zakona i njihova rešenja često odgovaraju nekim pojavama u prirodi. No međutim, neke od tih pojava koje su opisane istim tim zakonima ne mogu da se opišu "lepim" (tj. diferencijabilnim funkcijama). Iz potrebe da se ispravi ova slabost uvedeni su prostori Soboljeva[1] koji uopštavaju prostore diferencijabilnih funkcija. Na ovim prostorima se prirodno pojavljuju i pojmovi slabih izvoda i slabih rešenja.

7.1 Definicija i osobine

Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, $p \geq 1$ realan broj i $q \geq 1$ i $m \geq 0$ celi brojevi. Neka je

$$f = (f_1, ..., f_q) : \Omega \to \mathbb{C}^q$$

C^∞ preslikavanje. Posmatramo prostor svih C^∞ funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}^q$ za koje je ispunjena nejednakost

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{j=1}^{q} \int |D^\alpha f_j(x)|^p dx < \infty$$

Na ovom prostoru definišemo normu:

$$||f||_{m,p} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{j=1}^{q} \int |D^\alpha f_j(x)|^p dx \Big)^{1/p}.$$

Definicija 7.1.1. Kompletiranjem ovog prostora u odnosu na normu $|| \cdot ||_{m,p}$ dobijamo prostor Soboljeva koji obeležavamo $H_{m,p}(\Omega)$. Kompletiranjem prostora $C_0^\infty(\Omega, q)$ (C^∞ funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}^q$) u odnosu na istu normu obeležavamo sa $\mathring{H}_{m,p}(\Omega)$.

Primetimo da

$$|f|_{m,p} = \Big(\sum_{|\alpha| = m} \sum_{j=1}^{q} \int |D^\alpha f_j(x)|^p dx \Big)^{1/p}$$

definiše semi-normu, tzv. semi-normu Soboljeva.
Neka $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^q$, $z_j = (z_{j1}, ..., z_{jq})$. Definišemo

$$(z_1, z_2) = \sum_{\nu=1}^{q} z_{1\nu} \overline{z_{2\nu}}.$$

[1]Sergej Ljvovič Soboljev, (1908 – 1989), Sovjetski matematičar

Ako je $f = (f_1, ..., f_q) : \Omega \to \mathbb{C}^q$ i $g = (g_1, ..., g_q) : \Omega \to \mathbb{C}^q$, definišemo:

$$\langle f, g \rangle \ = \sum_{\nu=1}^{q} \int_{\Omega} f_\nu(x)\overline{g_\nu(x)}dx = \int (f(x), g(x))dx,$$

naravno ako ovaj integral postoji, tj. ako su svake od $f_\nu(x)\overline{g_\nu(x)}$ integrabilne.
Za funkciju $f = (f_1, ..., f_q)$, ako svaka od $f_\nu \in L^p(\Omega)$, pisaćemo kraće $f \in L^p(\Omega, q)$ ili samo $f \in L^p$.

Definicija 7.1.2. Za $f \in L^p(\Omega, q)$ kažemo da ima slabe izvode do reda m u L^k ako je ispunjen sledeći uslov:
Za sve $|\alpha| \leq m$, postoje funkcije $h^\alpha \in L^k(\Omega, q)$, takve da važi

$$\int_\Omega (f(x), D^\alpha g(x))dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (h^\alpha(x), g(x))dx \quad \text{za sve } g \in C_0^\infty(\Omega, q).$$

Funkcije $h^\alpha(x)$ nazivamo slabim izvodima reda α. Primetimo da su one jedinstveno određene do na skup mere 0.

Ako imamo niz funkcija $\{f_\nu\}$ u $C^\infty(\Omega, q)$ koji konvergira u $H_{m,p}(\Omega)$, tada $\{D^\alpha f_\nu\}$ konvergira u $L^p(\Omega)$, za sve $|\alpha| \leq m$. Obeležimo te granice sa f^α. Tada imamo:

$$\langle f_\nu, D^\alpha g \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle D^\alpha f_\nu, g \rangle \to (-1)^{|\alpha|} \langle f^\alpha, g \rangle, \quad \text{za sve } g \in C_0^\infty(\Omega, q).$$

Sledi da su f^α slabi izvodi funkcije $f = \lim_{\nu \to \infty} f_\nu$.

Primetimo da za $0 \leq m' \leq m$ imamo da je $||g||_{m',p} \leq ||g||_{m,p}$, stoga je Košijev niz $\{f_\nu\}$ u $H_{m,p}$ takođe Košijev niz u $H_{m',p}$. Kako je funkcija f nezavisna od odabira niza $\{f_\nu\}$, možemo da definišemo preslikavanje (koje je esencijalno indetičko)

$$i_{m,m'}(f) = i(f) = f',$$

gde je f' zapravo granica niza u $H_{m',p}(\Omega)$.

Propozicija 7.1.1. Linearno preslikavanje $i : H_{m,p} \to H_{m',p}$ je injekcija.

Dokaz. Neka je $i(f) = 0$ i neka je $\{f_\nu\}$ niz u $C^\infty(\Omega, q)$ koji konvergira ka f u $L^p(\Omega)$. Za funkciju $g \in C_0^\infty(\Omega, q)$ i $|\alpha| \leq m$ imamo:

$$0 = \lim \langle f_\nu, D^\alpha g \rangle = (-1)^{|\alpha|} \lim \langle D^\alpha f_\nu, g \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f^\alpha, g \rangle,$$

pa je f^α takođe nula, za sve $|\alpha| \leq m$., pa je $f = 0$ u $H_{m,p}(\Omega)$.
Dakle, ako je $i(f) = i(g)$, onda je $i(f - g) = 0$, pa je $f = g$, tj. i je injektivno. $\square$

Naravno, analogno imamo i

$$i(\mathring{H}_{m,p}(\Omega)) \subset \mathring{H}_{m',p}(\Omega).$$

Teorema 7.1.2. (Poencaré) Neka je Ω ograničen skup u $\mathbb{R}^n$ Tada postoji konstanta $C > 0$ takva da za sve $f \in C_0^\infty(\Omega)$ važi:

$$||f||_{0,p} \leq C|f|_{m,p}.$$

Dokaz. Prvo, iz fundamentalne teoreme integracije, i uzimajući u obzir da f ima kompaktan nosač, imamo da je

$$f(x) = \int_{M_i}^{x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ...x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_n)dt,$$

Kako po i-toj koordinati možemo da ograničimo skup Ω sa gornje strane sa konstantom N_i (kao što je sa donje ograničeno sa M_i), po Hölderovoj nejednakosti imamo:

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_i} dt \Big| \leq (N_i - M_i)^{\frac{1}{1-1/p}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|^p dt \Big)^{1/p},$$

tj.

$$\Big| \int_{M_i}^{N_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} dt \Big|^p \leq C_i \int_{M_i}^{N_i} \Big| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|^p dt,$$

Sada, imamo da je

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f|^p dx &= \int_\Omega \Big| \int_{M_i}^{x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} dt \Big|^p dx \leq \int_\Omega \Big| \int_{M_i}^{N_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} dt \Big|^p dx \\ &\leq C_i \int_\Omega \int_{M_i}^{N_i} \Big| \frac{\partial f}{\partial f_i} \Big|^p dx = C_i \int_{M_i}^{N_i} \int_\Omega \Big| \frac{\partial f}{\partial f_i} \Big|^p dx \\ &\leq C_i(N_i - M_i) \int_\Omega \Big| \frac{\partial f}{\partial f_i} \Big|^p dx, \end{aligned}$$

pa za $A_i = (C_i(N_i - M_i))^{1/p}$ konačno imamo:

$$|f|_{0,p} \leq A_i \Big| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{0,p}$$

Sada za $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ i $A = (A_1, ...A_n)$ indukcijom dobijamo:

$$|f|_{0,p} \leq A_1^{\alpha_1} \cdots A_n^{\alpha_n} \Big| D^\alpha f \Big|_{0,p}$$

odakle sledi da je

$$\Big(\sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{A^\alpha} \Big) |f|_{0,p} \leq |f|_{m,p}$$

tj.

$$|f|_{0,p} \leq C(\Omega, m)|f|_{m,p},$$

gde je $C(\Omega, m) = \Big(\sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{A^\alpha} \Big)^{-1}$ konstanta koja ne zavisi od odabira f. □

Komentar 7.1.1. Prostor $H_{m,p}(\Omega)$, za $p = 2$ je posebno interesantan slučaj jer snabdeven skalarnim proizvodom

$$[f, g]_m = [f, g] = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{j=1}^{q} \int_\Omega D^\alpha f_j(x) \overline{D^\alpha g(x)} dx$$

čini Hilbertov prostor. Pisaćemo kraće

$$H_m(\Omega) = H_{m,2}(\Omega), \quad \text{i} \quad \mathring{H}_m(\Omega) = \mathring{H}_{m,2}(\Omega)$$
$$||f||_m = ||f||_{m,p}$$

Propozicija 7.1.3. Neka $f \in \mathring{H}_m(\mathbb{R}^n)$. Tada postoje konstante $c_1, c_2 > 0$ takve da važi:

$$c_1 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}|^2 d\xi \leq ||f||_m^2 \leq c_2 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}|^2 d\xi$$

Dokaz. Dovoljno je da pokažemo da važi na prostoru $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, q)$ jer je gust u $\mathring{H}_m(\mathbb{R}^n)$. Očigledno, postoje konstante $c_1, c_2 > 0$ takve da

$$c_1(1 + |\xi|^2)^m \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2 \leq c_1(1 + |\xi|^2)^m. \tag{7.1}$$

Kako je

$$\begin{aligned} ||f||_m^2 &= \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{j=1}^{q} \int |D^\alpha f_j(x)|^2 dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{j=1}^{q} \int |\mathcal{F}(D^\alpha f_j(\xi))|^2 d\xi \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{j=1}^{q} \int |\xi^\alpha|^2 |D^\alpha f_j(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

iz 7.1 sledi tvrđenje. $\square$

Teorema 7.1.4. Imamo

$$\mathring{H}_m(\mathbb{R}^n) = H_m(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n, q) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}$$

Dokaz. Prvo pokazujemo prvu jednakost. Neka je $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, 1)$ takvo da je $\phi(x) = 1$ za $|x| \leq 1$, $0 \leq \phi(x) \leq 1$. Za funkciju $f \in H_m(\mathbb{R}^n)$ definišemo

$$f_\nu(x) = \phi(x/\nu) f(x).$$

Očigledno, funkcija f_ν ima kompaktan nosač. Takođe,

$$D^\alpha f_\nu = \sum_{\beta \leq \alpha} D^\beta \phi_\nu D^{\alpha - \beta} f, \text{ za } \phi_\nu(x) = \phi(x/\nu).$$

Kada $\nu \to \infty$, $D^\beta \phi \to 0$, za sve $|\beta| \geq 1$, dok $\phi \to 1$. Zato $D^\alpha f_\nu \to D^\alpha f$ u $L^2(\mathbb{R}^n, q)$ za sve $|\alpha| \leq m$, tj. $f_\nu \to f$ u $H_m(\mathbb{R}^n)$. Kako je $f_\nu \in \mathring{H}_m(\mathbb{R}^n)$ (koji je kompletan prostor po $|| \cdot ||_{m,2}$ normi), dobijamo da je $\mathring{H}_m(\mathbb{R}^n) = H_m(\mathbb{R}^n)$.
Po prethodnoj propoziciji imamo da je

$$\mathring{H}(\mathbb{R}) \subset \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n, q) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\},$$

pa je dovoljno da pokažemo još samo suprotnu inkluziju.
Neka je onda

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

za neko $f \in L^2(\mathbb{R}^n, q)$. Tada

$$(1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n, q).$$

Kako je $S(\mathbb{R}^n)$ gust u $L^2(\mathbb{R}^n, q)$, imamo da postoji niz funkcija $\{g_\nu\}$ u $S(\mathbb{R}^n)$ takvih da

$$g_\nu(\xi) \to (1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{f}(\xi), \text{ za } \nu \to \infty,$$

u $L^p(\mathbb{R}, q)$. Sada imamo da je

$$\frac{\hat{g}_\nu}{(1 + |\xi|^2)^{m/2}} \in S(\mathbb{R}^n).$$

Po formuli inverzije imamo da postoji $h_\nu \in S(\mathbb{R}^n)$ takva da je $\hat{h}_\nu = \frac{\hat{g}_\nu}{(1+|\xi|^2)^{m/2}}$. Tada $h_\nu \in H_m(\mathbb{R}^n)$. Kako je

$$\int (1 + |\xi|^2)^m |\hat{h}_\nu(\xi) - \hat{h}_\mu(\xi)|^2 d\xi = \int |\hat{g}_\nu - \hat{g}_\mu(\xi)| d\xi \to 0,$$

kada $\mu, \nu \to \infty$, i po propoziciji 7.1.3 imamo da h_ν konvergira u $H_m(\mathbb{R}^n)$. Očigledno, $h_\nu \to f$ u L^2 čime je dokaz završen. □

7.2 Konvolucija

Teorema 7.2.1. Neka je data C^∞ funkcija ϕ takva da je $\text{supp}(\phi) \subset \{x : |x| < 1\}$ i $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. Neka je $\phi_\epsilon = \epsilon^{-n}\phi(x/\epsilon)$.
Za otvoren skup Ω u $\mathbb{R}^n$, funkciju $f \in L^p(\Omega)$ i $x \in \mathbb{R}^n$ definišemo

$$(\phi_\epsilon * f)(x) := \int_\Omega \phi_\epsilon(x - y) f(y) dy.$$

Tada:
(a) Za bilo koje $f \in L^p(\Omega)$, $\phi * f \to f$, kada $\epsilon \to 0$.
(b) Za $f \in \mathring{H}_{m,p}(\Omega)$ i $|\alpha| \le m$ imamo:

$$D^\alpha(\phi_\epsilon * f) = \phi_\epsilon * D^\alpha f.$$

Dokaz. Prvo, produžavamo funkciju f na $\mathbb{R}^n$ tako što stavimo da je $f(x) = 0$ za $x \notin \Omega$. Dalje, imamo da je

$$\begin{aligned}(\phi * f - f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x - y) f(y) dy \\ &= \int_{|y| \le \epsilon} \phi_\epsilon(-y)(f(y + x) - f(x)) dy.\end{aligned}$$

Po Hölder-ovoj nejednakosti, za $p > 1$ imamo:

$$|(\phi_\epsilon * f - f)(x)|^p \le \left(\int_{|y| \le \epsilon} |\phi_\epsilon(y)|^{p'} \right)^{p/p'} \int_{|y| \le \epsilon} |f(y + x) - f(y)|^p dy,$$

gde je p definisano jednakošću

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

a ako je $p = 1$ onda je norma p' zamenjena supremumom funckije. Ako integralimo po x sa obe strane, i dignemo na $1/p'$ imamo:

$$||(\phi_\epsilon * f - f)(x)||_{L^p} \le \epsilon^{-n/p} ||\phi||_{L^{p'}} \left(\int_{|y| \le \epsilon} dy \int |f(x + y) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Odavde imamo da je

$$\begin{aligned}||(\phi_\epsilon * f - f)(x)||_{L^p} &\leq \epsilon^{-n/p}\left(\int_{|y|\leq\epsilon} dy\right)^{1/p} ||\phi||_{L^{p'}} \sup_{|y|\leq\epsilon}\left(\int |f(x+y)-f(x)|^p dx\right)^{1/p} \\ &= C||\phi||_{L^{p'}} \sup_{|y|\leq\epsilon}\left(\int |f(x+y)-f(x)|^p dx\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Sada, kada pustimo $\epsilon \to 0$, poslednji član teži ka 0; ovo je očigledno za neprekidnu funkciju f sa kompaktnim nosačem, a zbog toga važi i za proizvoljnu funkciju iz $L^p(\Omega)$ jer su neprekidne funkcije sa kompaktnim nosačem guste. Time je dokazan slučaj pod (a).
Da bismo dokazali pod (b), za $f \in \mathring{H}_{m,p}(\Omega)$, formiramo niz funckija iz $C_0^\infty(\Omega, q)$ koje konvergiraju ka f u $\mathring{H}(m,p)(\Omega)$. Tada je

$$\begin{aligned}D^\alpha(\phi_\epsilon * f)(x) &= \int_\Omega D^\alpha\phi_\epsilon(x-y)f(y)dy = \lim_{\nu\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(D^\alpha\phi_\epsilon)(x-y)f_\nu(y)dy \\ &= \lim_{\nu\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\epsilon)(x-y)D^\alpha f_\nu(y)dy = \int_\Omega \phi_\epsilon(x-y)D^\alpha f(y)dy\end{aligned}$$
$$= (\phi_\epsilon * (D^\alpha f))(x).$$

□

Teorema 7.2.2. Ako $f \in H_{m,p}$ i ako je za $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha f$ jako diferencijabilno do reda m' u L^p, tada je f jako diferencijabilna do reda $m+m'$ u L^p.

Dokaz. Ako pomnožimo f sa odgovarajućom C^∞ funkcijom koa ima kompaktan nosač, možemo pretpostaviti da f ima kompaktan nosač. Ako je funkcija ϕ_ϵ definisana kao u prethodnoj teoremi, tada je $\phi_\epsilon * f$ C^∞ funkcija. Za $|\alpha| \leq m$, imamo po prethodnoj teoremi pod (b) da je

$$D^\alpha(\phi_\epsilon * f) = \phi_\epsilon * (D^\alpha f).$$

Sada, kako je $D^\alpha f \in \mathring{H}_{m',p}$, imamo da za $|\alpha| \leq m$, $|\beta| \leq m'$,

$$D^{\alpha+\beta}(\phi_\epsilon * f) = D^\beta(\phi_\epsilon * D^\alpha f) = \phi_\epsilon * D^\beta(D^\alpha f).$$

Sada, kada $\epsilon \to 0$, ova funkcija konvergira u $L^p(\Omega, q)$ ka $D^{\alpha+\beta}f$, po prethodnoj teoremi pod (a), odakle sledi da $f \in H_{m+m',p}(\Omega)$. □

Propozicija 7.2.3. Neka je Ω ograničen skup u $\mathbb{R}^n$ i neka je ϕ C^∞ funkcija sa kompaktnim nosačem u $\mathbb{R}^n$ i

$$\phi(x) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)dx = 1.$$

Neka je opet

$$\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\phi(x/\epsilon).$$

Neka je $p \geq 1$ i neka je p' definisano tako da je $1/p + 1/p' = 1$ za $p > 1$. Tada za bilo koju funkciju $f \in \mathring{H}_{m,p}(\Omega)$, gde je $m \geq 1$, imamo da je

$$||\phi_\epsilon * f - f||^n_{m-1,p} \leq A\epsilon||\phi||_{L^{p'}}||f||_{m,p},$$

gde konstanta A zavisi samo od Ω, p i m, a $||\phi||_{L^{p'}}$ je $\sup|\phi|$, za $p = 1$.

Dokaz. Neka je f funkcija na $\mathbb{R}^n$ takva da je $\mathrm{supp}(f) \subset \Omega$. Za $x, y \in \mathbb{R}^n$ imamo da je

$$f(x+y) - f(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+ty)dt.$$

Stoga ako zapišemo

$$g_y(x) = f(x+y) - f(x),$$

po nejenakosti Hölder-a, imamo:

$$|g_y(x)|^p \leq n^{p-1} \sum_{j=1}^{n} |y_j|^p \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+ty) \right|^p dt,$$

pa je

$$\begin{aligned} ||g_y||_{L^p}^p &\leq n^{p-1} \sum_{j=1}^{n} |y_j|^p \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+ty) \right|^p dx \\ &= n^{p-1} \sum_{j=1}^{n} |y_j|^p \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| dx \leq n^{p-1} \sum_{j=1}^{n} |y_j|^p ||f||_{1,p}^p. \end{aligned}$$

Stoga, za $|y| \leq \epsilon$ imamo da je

$$||g_y||_{L^p}^p \leq n^{p-1} \sum_{j=1}^{p} |y_j|^p ||f||_{1,p}^p \leq n^{p-1} n \epsilon^p ||f||_{1,p}^p,$$

pa je

$$||g_y||_{L^p} \leq n\epsilon ||f||_{1,p}^p.$$

Sada imamo da je

$$\phi_\epsilon * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(y)(f(x-y) - f(x))dy$$

(jer je $\int \phi_\epsilon = 1$). Kako je

$$\mathrm{supp}(\phi_\epsilon) \subset \{x : |x| \leq \epsilon\},$$

za $p > 1$ imamo:

$$\begin{aligned} |\phi_\epsilon * f(x) - f(x)| &\leq \left(\int |\phi_\epsilon(y)|^{p'} \right)^{1/p'} \left(\int_{|y|\leq\epsilon} |f(x+y) - f(x)|^p dy \right)^{1/p} \\ &= \epsilon^{-n/p} ||\phi||_{L^{p'}} \left(\int_{|y|\leq\epsilon} |g_y(x)|^p dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Ova nejednakost je očigledno tačna i za $p = 1$. Po 7.2 imamo da je

$$\begin{aligned} \left(|\phi_\epsilon * f(x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} &\leq \epsilon^{-n/p} ||\phi||_{L^{p'}} n\epsilon ||f||_{1,p} \left(\int_{|y|\leq\epsilon} dy \right)^{1/p} \\ &= A\epsilon ||\phi||_{L^{p'}} ||f||_{1,p}, \end{aligned}$$

tj.

$$||\phi_\epsilon * f(x) - f(x)||_{0,p}^{\mathbb{R}^n} \leq A\epsilon ||\phi||_{L^{p'}} ||f||_{1,p}.$$

Ako dobijenu nejednakost primenimo na sve $D^\alpha f$ za koje je $|\alpha| \leq m-1$, i uzimajući u obzir da je $C_0^\infty(\Omega, q)$ gust u $\mathring{H}_{m,p}(\Omega)$, dobijamo traženu nejednakost. $\square$

Definicija 7.2.1. Znamo da postoji injekcija $H_{m,p}(\Omega)$ u $H_{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega, q)$. Za funkciju $f \in C^\infty(\Omega, q)$ kažemo da je jako diferencijabilna u L^p do reda m ako je za svako $\Omega' \subset\subset \Omega$ funkcija $f|\Omega'$ slika neke funkcije iz $H_{m,p}(\Omega)$ u $L^p(\Omega, q)$. Primetimo da ovo znači da su sve funkcije u $H_m(\Omega)$ jako diferencijabilne.

Propozicija 7.2.4. Neka je Ω ograničen skup u $\mathbb{R}^n$ i k neprekidna funkcija sa kompaktnim nosačem u $\mathbb{R}^n$. Tada, za bilo koje $f \in L^p(\Omega)$, definišemo funkciju

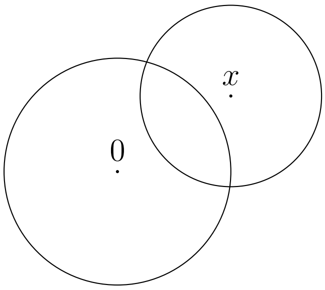
$$(Kf)(x) = \int_\Omega k(x-y)f(y)dy,$$

koja pripada $L^p(\Omega)$ i operator

$$K : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

je kompletno neprekidan (kompaktan).

Dokaz.



Slika 7.1: $(Kf)(x)$ ima nenula vrednosti samo ako nosači imaju presek.

Primetimo da, kako k ima kompaktan nosač a f ima nosač u $\overline{\Omega}$, onda Kf ima nosač na skupu

$$S = \{x + y : x \in \overline{\Omega}\ ,\ y \in \text{supp}(k)\}$$

Dakle, za niz funkcija $\{f_\nu\}$ u $L^p(\Omega)$ takvih da je $||f_\nu||_{L^p} \leq 1$, dovoljno je pokazati da postoji podniz $\{g_r\}$ takvih da $\{Kg_r\}$ konvergira uniformno na S (jer ako ima granicu, onda je slika relativno kompaktna). Po teoremi Ascoli-ja, dovoljno je pokazati da je familija $\{KF : ||f||_{L^p} \leq 1\}$ ograničena i ekvineprekidna.
Za $\delta > 0$ definišemo

$$\eta(\delta) = \sup_{|a-b|\leq\delta} |k(a) - k(b)|.$$

Tada po nejednakosti Hölder-a imamo da je

$$|Kf(x)| \leq ||k||_{L^{p'}}||f||_{L^p} \leq ||k||_{L^{p'}},$$

čime smo pokazali ograničenost. Takođe imamo da je

$$|Kf(x)-Kf(y)| \leq \eta(|x-y|)\int_\Omega |f(t)|dt \leq \eta(|x-y|)\Big(\int_\Omega 1^{p'}\Big)^{1/p'}||f||_{L^p} = \eta C(|x-y|)||f||_{L^p},$$

čime smo pokazali ekpineprekidnost, a samim time i propoziciju. $\square$

Teorema 7.2.5. (**Reilich**[2]) Neka je Ω ograničen skup u $\mathbb{R}^n$ i neka je $0 \leq m' < m$. Tada je prirodna injekcija

$$i : \mathring{H}_{m,p}(\Omega) \to \mathring{H}_{m',p}(\Omega)$$

je kompletno neprekidna.

Dokaz. Za proizvoljan neprekidni operator

$$T : \mathring{H}_{m,p}(\Omega) \to \mathring{H}_{m',p}(\mathbb{R}^n)$$

definišemo normu

$$||T|| = \sup_{f \neq 0} \left(\frac{||Tf||^{\mathbb{R}^n}_{m',p}}{||f||_{m,p^\Omega}} \right),$$

i neka je j kompozicija preslikavanja i sa izometrijom $\mathring{H}_{m',p}(\Omega) \to \mathring{H}_{m',p}(\mathbb{R}^n)$ (preslikavanje koje očuvava funkciju i nosač i proširuje joj domen na $\mathbb{R}^n$). Neka je T_ϵ operator $f \mapsto \phi_\epsilon * f$ definisan isto kao u prethodnoj propoziciji. Tada po propoziciji 7.2.3 imamo:

$$||T_\epsilon - j|| = \left(\frac{||\phi_\epsilon * f - f||^{\mathbb{R}^n}_{m',p}}{||f||_{m,p^\Omega}} \right) \to 0, \text{ kada } \epsilon \to 0.$$

Dalje, svaki operator T_ϵ kompletno neprekidan po prethodnoj propoziciji, a kako je uniformna granica kompletno neprekidnih operatora opet kompletno neprekidan operator, teorema je dokazana. □

Lema 7.2.6. (**Soboljev**) Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i neka je $m > n/p$. Tada za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$ postoji konstanta $C > 0$ takva da je za sve $f \in C^\infty(\Omega)$ za koje je $\text{supp}(f) \subset K$ važi

$$\sup_{x \in K} |f(x)| \leq C||f||_{m,p}.$$

Corolar 7.2.7. Neka je Ω otvoren u $\mathbb{R}^n$ i K kompaktan podskup skupa Ω. Tada, ako je $m > n/p$,

$$\sup_{x \in K} |f(x)| \leq C||f||_{m,p},$$

za bilo koje $f \in C^\infty(\Omega, q)$.

Dokaz. Primenom leme Soboljeva na komponente funkcije ϕf, gde je $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ i $\phi(x) = 1$ za $x \in K$. □

Propozicija 7.2.8. Neka je Ω otvoren u $\mathbb{R}^n$ i neka je K kompaktan podskup skupa Ω. Tada, ako je $m > n/p$, bilo koja funkcija $f \in C^\infty(\Omega, q)$ je skoro svugde jednaka funkciji sa neprekidnim izvodima reda $\leq m - [n/p] - 1$, gde je [X] najveći ceo deo broja X.

Dokaz. Ako pomnožimo f sa odgovarajućom funkcijom sa kompaktnim nosačem, možemo pretpostaviti da je $f \in \mathring{H}_{m,p}(\Omega)$ i da je Ω ograničen skup. Neka je dat niz funkcija

$$f_\nu \in C_0^\infty(\Omega, q), ||f_\nu - f||_{m,p} \to 0.$$

Po prethodnom korolaru, ako je K kompaktan skup u Ω, postoji $C > 0$ takvo da je za $|\alpha| < m - (n/p)$,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K} |D^\alpha (f_\nu - f_\mu)(x)| &\leq C||D^\alpha (f_\nu - f_\mu)||_{m-|\alpha|,p} \\ &\leq C||f_\nu - f_\mu||_{m,p} \to 0, \quad \text{kada } \mu, \nu \to \infty. \end{aligned}$$

Stoga, za $|\alpha| < m - (n/p)$, $D^\alpha f_\nu$ konvergira uniformno na kompaktnim podskupovima na Ω, čime je dokaz završen. □

[2]Franz Rellich (1906 – 1955), nemački matematičar

Glava 8

Eliptični i uniformno eliptični operatori

Posebnu klasu linearnih diferencijalnih operatora čine eliptični operatori. Njih karakteriše poseban uslov injektivnosti, tj. invertibilnosti karakterističnog polinoma. Često su njihova rešenja funkcije u obliku talasa i njima možemo da opišemo na primer oblik žice ili vodenog talasa u fiksnom momentu. Užu klasu čine uniformni eliptični operatori koji ispunjavaju dodatni uslov takozvane uniformnosti. Ovde ćemo predstaviti rezultate najviše vezane za uniforme eliptične operatore a to su nejednakosti Friedrichs-a i Gårding-a i teoremu o regularnosti.

8.1 Karakteristični polinom i adjungovani operator

Na dalje ćemo uvek pretpostaviti da je linearni diferencijalni operator $L : C^\infty(\Omega, n) \to C^\infty(\Omega, s)$, gde je Ω otvoren u $\mathbb{R}^n$, dat u obliku

$$(Pu)(a) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \quad u \in C^\infty(\Omega, r).$$

Definicija 8.1.1. Za linearni operator P reda m dat u navedenom obliku definišemo simbol operatora:

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} \xi^\alpha a_\alpha(x), \quad x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Kažemo da je P eliptičan ako za bilo koje $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ i $x \in \Omega$ linearno preslikavanje

$$p(x, \xi) : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^s$$

injektivno.

Definicija 8.1.2. Za linearni diferencijalni operator $P : C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^r) \to C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^r)$, gde je Ω otvoren u $\mathbb{R}^n$, kažemo da je uniformno (jako) eliptičan ako postoji konstanta $C > 0$ takva da za sve $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$ i $v \in \mathbb{C}^r$ važi nejednakost

$$\mathrm{Re}(p(x, \xi)v, v) \geq C|\xi|^m |v|^2.$$

Primetimo da za fiksirano $v \neq 0$ i $x \in \Omega$, funkcija

$$Q(\xi) = \mathrm{Re}(p(x, \xi)v, v)$$

je homogeni polinom reda m. Za skoro sve $a, b \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, $Q(a + \lambda b)$ je polinom reda m po λ, a ako je m neparno, taj polinom ima realnu nulu. Za linearno nezavisne vektore $a, b \in \mathbb{R}^n$ $a + \lambda b \neq 0$, za sve $\lambda \in \mathbb{R}$, pa polinom Q ima netrivijalnu nulu, dakle nije uniformno eliptičan, što nam daje da red uniformno eliptičnog linearnog diferencijalnog operatora m mora biti paran.
Dalje, primetimo da za dva linearna diferencijalna operatora

$$P_1 : C^\infty(\Omega, r) \to C^\infty(\Omega, s), P_2 : C^\infty(\Omega, s) \to C^\infty(\Omega, t)$$

redova m_1 i m_2, redom, kompozicija $P_1 \circ P_2$ je opet linearni diferncijalni operator i to reda $\leq m_1 + m_2$. Takođe, ako su

$$p_1(x, \xi) : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^s, \quad p_2(x, \xi) : \mathbb{C}^s \to \mathbb{C}^t$$

karakteristični polinomi operatora P_1 i P_2, redom, i ako je $P_1 \circ P_2$ reda $m_1 + m_2$, tada je $p_1 \circ p_2$ karakteristični polinom operatora $P_1 \circ P_2$. Štaviše, ako su P_1 i P_2 eliptični, tada je $p_1 \circ p_2 : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^s$ injektivno, pa je $P_1 \circ P_2$ eliptičan.

Definicija 8.1.3. Za linearni diferencijalni operator $P : C^\infty(\Omega, r) \to C^\infty(\Omega, s)$ definišemo adjungovani operator $P^* : C^\infty(\Omega, s) \to C^\infty(\Omega, r)$ takav da važi:

$$\int_\Omega ((Pu)(x), v(x))dx = \int_\Omega (u(x), (P^*v)(x))dx, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega, r), \forall v \in C_0^\infty(\Omega, s),$$

gde je

$$(f(x), g(x)) = \sum_{i=1}^{s} f_i(x)\overline{g_i(x)},$$

za proizvoljne dve funkcije

$$f = (f_1, ...f_s), \quad g = (g_1, ..., g_s).$$

Primetimo da za $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ imamo da je

$$\int_\Omega u(x)\overline{D^\alpha v(x)}dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u(x)\overline{v(x)}dx,$$

odakle direktno dobijamo i eksplicitni oblik operatora

$$(P^*v)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\overline{a_\alpha(x)}' v(x)),$$

gde je operator P dat u svom standardnom obliku.

Corolar 8.1.1. Neka je dat eliptični operator $P : C^\infty(\Omega, r) \to C^\infty(\Omega, s)$. Tada je za svako $\Omega' \subset\subset \Omega$ operator $(-1)^m P^* \circ P$ je uniformno eliptičan na Ω', tj. $P^* : C^\infty(\Omega', r) \to C^\infty(\Omega', r)$.

Dokaz. Ako je

$$L = (-1)^m P^* \circ P,$$

tada je karakteristični polinom operatora L dat u obliku

$$p_L = (-1)^m p^* \circ p,$$

pa je zbog toga za proizvoljno $v \in \mathbb{C}^r$

$$(p_L(x,\xi)v, v) = (p(x,\xi)v, p(x,\xi)v) = ||p(x,\xi)v||^2.$$

Dalje, kako je P eliptičan, za $x \in \Omega'$, $|\xi| = 1$ i $|v| = 1$ (kompaktn skupovi), $p(x,\xi)v \neq 0$ i stoga ograničen od dole. Kako je $p(x,\xi)v$ homogen po ξ i v, imamo:

$$(p_L(x,\xi)v, v) \geq C|\xi|^{2m}|v|^2,$$

za neko $C > 0$. □

8.2 Nejednakost Gårding-a

Ubuduće ćemo koristiti oznaku $||\cdot||_m$ za funkcije $C^\infty(\Omega, r)$ i mislićemo na normu iz glave 7 (a ne na normu iz glave 6).

Teorema 8.2.1. (**Gårding**[1]) Neka je P uniformno eliptičan operator parnog reda $2m$, $P : C^\infty(\Omega, r) \to C^\infty(\Omega, r)$. Tada, za bilo koje $\Omega' \subset\subset \Omega$, postoji konstante $C, B > 0$ takve da je

$$(-1)^m \mathrm{Re}\langle Pu, u\rangle \geq C||u||_m^2 - B||u||_0^2,$$

za sve $u \in C_0^\infty(\Omega', r)$.

Dokaz. Dokaz ćemo sprovesti u 4 koraka:
Korak 1: Posmatramo slučaj kada je operator P dat u obliku

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u(x),$$

gde u a_α konstantne matrice. Po teoremi Plancherel-a imamo da je

$$\langle Pu, u\rangle = \langle \widehat{Pu}, \hat{u}\rangle.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\widehat{Pu} &= \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha \widehat{D^\alpha u}(\xi) = (-1)^m \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha \xi^\alpha \hat{u}(\xi) + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} a_\alpha i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u}(\xi) \\
&= (-1)^m p(\xi)\hat{u}(\xi) + q(\xi)\hat{u}(\xi),
\end{aligned}$$

gde je p karakteristični polinom operatora P a q polinom stepena $\leq 2m - 1$. Imamo:

$$\begin{aligned}
(-1)^m \mathrm{Re}\langle Pu, u\rangle &= \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^n} (p(\xi)\hat{u}(\xi), \hat{u}(\xi))d\xi + (-1)^m \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^n} (q(\xi)\hat{u}(\xi), \hat{u}(\xi))d\xi \\
&\geq c_1 \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2m} |\hat{u}(\xi)| d\xi - c_2 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2m-1} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Konstanta $c_1 > 0$ dolazi iz nejednakosti

$$(p(\xi)v, v) \geq c_1 |\xi|^{2m} |v|^2,$$

[1] Lars Gårding (1919 – 2014), švedski matematičar

jer je P uniformno eliptični operator, dok je konstanta $c_2 > 0$ posledica cinjenice da je $q(\xi)$ polinom stepena $\leq 2m-1$ i da se njegova apsolutna vrednost može ograničiti navedenim polinomom (pa parnost broja m ne utiče na nejednakost). Neka je M dovoljno veliko da je

$$c_1|\xi|^{2m} - c_2(1+|\xi|)^{2m-1} \geq \frac{1}{2}c_1(1+|\xi|^2)^m,$$

za $|\xi| \geq M$. Tada, ako stavimo da je $c_3 = \frac{1}{2}c_1$ imamo:

$$\begin{aligned}(-1)^m \mathrm{Re}\langle Pu, u\rangle &\geq c_3 \int_{|\xi|\leq M} (1+|\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi - c_2 \int_{|\xi|\geq M} (1+|\xi|)^{2m-1} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= c_3 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi - \int_{|\xi|\leq M} ((1+|\xi|^2)^m + (1+|\xi|)^{2m-1}) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq c_3 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m |\hat{u}|^2 d\xi - c_4 \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,\end{aligned}$$

gde je

$$c_4 = \sup_{|\xi|\leq M} (c_3(1+|\xi|^2)^m + c_2(1+|\xi|)^{2m-1}).$$

Sada, po propoziciji 7.1.3 postoji konstanta $c > 0$ takva da je

$$(-1)^m \mathrm{Re}\langle Pu, u\rangle \geq c||u||_m^2 - c_4||u||_0^2.$$

Korak 2: Pokazujemo da za bilo koje $x_0 \in \Omega$ postoji okolina U tačke x_0 takva da je

$$(-1)^m \mathrm{Re}\langle Pu, u\rangle \geq c||u||_m^2 - B||u||_0^2,$$

za sve $u \in C_0^\infty(U, r)$, gde konstante $c, B > 0$ zavise samo od tačke x_0. Mogu da se pronađu diferencijalni operatori $Q_1, ..., Q_N$ i $R_1, ...R_N$ reda $\leq m$ koji slikaju $C^\infty(\Omega, r)$ u samog sebe takvi da je

$$P = \sum_{\nu=1}^{N} R_\nu^* \circ Q_\nu,$$

gde R_ν^* označava adjungovano preslikavanje preslikavanja R_ν. Takođe, možemo da ih razbijemo na zbir dva operatora

$$Q_\nu = Q_\nu^0 + Q'_\nu, \quad R_\nu = R_\nu^0 + R'_\nu$$

gde su operatori Q_ν^0, R_ν^0 sa konstantnim koeficijentima reda $\leq m$, a koeficijenti operatora Q'_ν, R'_ν se anuliraju u $x_0 \in \Omega$. Sada imamo:

$$\langle Pu, u\rangle = \langle P^0 u, u\rangle + \sum_\nu \Big(\langle Q'_\nu u, R_\nu^0\rangle + \langle Q_\nu^0 u, R'_\nu\rangle + \langle Q'_\nu u, R'_\nu u\rangle\Big),$$

gde je

$$P^0 = \sum_{\nu=1}^{N} (R_\nu^0)^* \circ Q_\nu^0.$$

Kako se koeficijenti operatora Q'_ν, R'_ν anuliraju u $x_0 \in \Omega$ i reda su $\leq m$, imamo da za svako $\epsilon > 0$, postoji okolina U tačke x_0 takva da je $|P^0 u| \leq \epsilon||u||_m^2$, za sve $u \in C_0^\infty(U, r)$. Ako primenimo nejednakost koju smo pokazali u koraku 1 na P^0, dobijamo:

$$(-1)^m \mathrm{Re}\langle Pu, u\rangle \geq (c_0 - \epsilon)||u||_m^2 - B||u||_0^2, \quad u \in C_0^\infty(U, r),$$

gde je

$$(-1)^m \mathrm{Re}\langle P^0 u, u\rangle \geq c_0||u||_m^2 - B||u||_0^2.$$

Korak 3: Za proizvoljno $\epsilon > 0$, postoji kosntanta $C(\epsilon) > 0$ takva da je ispunjena nejednakost

$$||f||_{m-1}^2 \leq \epsilon ||f||_m^2 + C(\epsilon)||f||_0^2,$$

za sve $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Po propoziciji 7.1.3 imamo da je

$$||f||_{m-1}^2 \leq c_2 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{m-1}|\hat{f}(x)|^2 d\xi.$$

Za dato $\epsilon > 0$, postoji konstanta $C(\epsilon) > 0$ takva da je

$$(1+|\xi|^2)^{m-1} \leq \epsilon c_2^{-1}(1+|\xi|^2)^m|C(\epsilon),$$

za sve $\xi \in \mathbb{R}^n$. Stoga je

$$||f||_{m-1}^2 \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m|\hat{f}(\xi)|d\xi + C(\epsilon)\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Traženu nejednakost dobijamo primenom propozicije 7.1.3.
Korak 4: Pokazujemo tvrđenje teoreme. Ako je $\Omega' \subset\subset \Omega$, iz koraka 2 sledi da možemo da nađemo konstante $c, B > 0$ i konačan pokrivač $U_1, ..., U_h$ skupa $\overline{\Omega'}$ takav da je

$$(-1)^m \mathrm{Re}\langle Pu, u\rangle \geq c||u||_m^2 - ||u||_0^2, \quad \forall u C_0^\infty(U, j, r), j = 1, ..., h.$$

Neka su $\nu_j \in C_0^\infty(U_j, 1)$, $0 \leq \eta_j \leq 1$ i $\sum \eta_j^2(x) = 1$, za sve x u okolini $\overline{\Omega'}$. Ovaj skup funkcija se formira tako što se uzme particija jedinice $\{\phi_\nu\}$ koja odgovara ovoj familiji i onda se uzme da je

$$\nu_j = \frac{\phi_i}{(\sum \phi_j^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Prvo, primetimo da postoji konstanta $C > 0$ koja zavisi samo od funkcija η_j takva da je ispunjena nejednakost

$$|\ ||\eta_j u||_m^2 - \sum_{|\alpha| \leq m} ||\eta_j D^\alpha u||_0^2\ | \leq C||u||_{m-1}||u||_m,$$

i uvedimo operator L reda $\leq 2m-1$ koji je definisan na sledeći način:

$$\langle P(\eta_j u), \eta_j u\rangle - \langle \eta_j Pu, \eta_j u\rangle = \langle Lu, u\rangle.$$

Ako L predstavimo u obliku $\sum B_\mu^* \circ A_\mu$, gde su A_μ operatori reda $\leq m$ i B_μ operatori reda $\leq m-1$, imamo da postoji konstanta $D > 0$ takva da je

$$|\langle P(\eta_j u), \eta_j u\rangle - \langle \eta_j Pu, \eta_j u\rangle| \leq D||u||_m||u||_{m-1}$$

Ovo nam daje da za bilo koje $u \in C_0^\infty(\Omega', r)$ važi:

$$\begin{aligned}
c||u||_m^2 &= c\sum_{|\alpha|\leq m}||D^\alpha u||_0^2 = c\sum_{j=1}^h\sum_{|\alpha|\leq m}||\eta_j D^\alpha u||_0^2 \\
&\leq c\sum_{j=1}^h||\eta_j u||_m^2 + cC||u||_m||u||_{m-1} \\
&\leq \sum_{j=1}^h \mathrm{Re}\langle P(\eta_j u), \eta_j u\rangle + B'||u||_0^2 + C'||u||_m||u||_{m-1} \\
&\leq \sum_{j=1}^h (-1)^m\mathrm{Re}\langle \eta_j Pu, \eta_j u\rangle + B'||u||_0^2 + C''||u||_m||u||_{m-1} \\
&= (-1)^m\mathrm{Re}\langle Pu, u\rangle + B'||u||_0^2 + C''||u||_m||u||_{m-1}.
\end{aligned}$$

Sada, ako je $\delta > 0$, imamo da je

$$2|w_1w_2| \leq \delta|w_1|^2 + \frac{1}{\delta}|w_2|^2,$$

za bilo koje kompleksne brojeve w_1, w_2 (nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine). Stoga je

$$2C''||u||_m||u||_{m-1} \leq \delta||u||_m^2 + \frac{(C'')^2}{\delta}||u||_{m-1}^2 \leq 2\delta||u||_m^2 + C(\delta)||u||_0^2,$$

gde druga nejednakost sledi iz koraka 3. Ako je $\delta \leq \frac{1}{2}c$ imamo:

$$\frac{1}{2}c||u||_m^2 \leq (-1)^m\mathrm{Re}\langle Pu, u\rangle + B_0||u||_0^2,$$

za odgovarajuće $B_0 > 0$ i sve $u \in C_0^\infty(\Omega)$ □

Može se pokazati da ako uniformno eliptični linearni diferencijalni operator reda $2m$ ima samo koeficijente uz izvode najvišeg reda (a ostali su 0) da važi jača nejednakost

$$(-1)^m\mathrm{Re}\langle Pu, u\rangle \geq C(\Omega)||u||_m^2,$$

za sve $u \in C_0^\infty(\Omega, r)$. Dokaz će ovde biti izostavljen.

8.3 Nejednakost Friedrichs-a i teorema o regularnosti

Teorema 8.3.1. (**Friedrichs**[2]) Neka je Ω ograničen skup u $\mathbb{R}^n$ i P linearni eliptični operator iz $C_0^\infty(\Omega, r)$ u $C_0^\infty(\Omega, s)$ reda m dat u obliku

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)(D^\alpha u)(x), \quad u \in C^\infty(\Omega, r).$$

[2]Kurt Otto Friedrichs, (1901 – 1982), nemački matematičar

Neka je $k \in \mathbb{N}_0$.
1. Ako su a_α konstantni koeficijenti, tada postoji konstanta $C > 0$ takva da je

$$||u||_{m+k} \leq C_1||Pu||_k$$

2. Za $x_0 \in \Omega$, postoji okolina U tačke x_0 i konstanta $C_1 > 0$ takva da je

$$||u||_{m+k} \leq C_1||Pu||_k,$$

za sve $u \in C_0^\infty(U, r)$ (u ovom slučaju P nema konstantne koeficijente).
3. Ako je Ω' relativno kompaktan u Ω, tada postoji konstanta $C_2 > 0$ takva da je

$$||u||_{m+k}^{\Omega'} \leq C_2\{||Pu||_k^\Omega + ||u||_0^\Omega\},$$

za sve $u \in C^\infty(\Omega, r)$.
Generalno,

$$||u||_{m+k} \leq C_2\{||Pu||_k + ||u||_0\},$$

za sve $u \in C_0^\infty(\Omega', r)$.

Definicija 8.3.1. Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i neka je P linearni diferencijalni operator koji slika $C^\infty(\Omega, r) \to C^\infty(\Omega, s)$. Neka $u \in H_0(\Omega)$. Definišemo Pu kao linearnu funkcionelu na $C_0^\infty(\Omega, s)$ na sledeći način:

$$(Pu)(v) = \langle u, P^*v\rangle, \quad v \in C_0^\infty(\Omega, s).$$

Ako za neko $1 \leq q \leq \infty$ postoji $g \in L^q(\Omega, s)$ koje ispunjava jednakost

$$(Pu)(v) = \langle g, v\rangle,$$

za sve $v \in C_0^\infty(\Omega, s)$, onda poistovećujemo funkcionelu Pu sa g i pišemo $Pu = g$, $Pu \in L^q(\Omega, s)$. Ako je P reda m i ako $u \in H_m(\Omega)$, onda $Pu \in H_0(\Omega)$.

Definicija 8.3.2. Neka je P uniformno eliptični operator na $C^\infty(\Omega, r)$ reda $2m$ koji je dat u obliku

$$P = \sum_{\nu=1}^{N} R_\nu^* \circ Q_\nu,$$

gde su Q_ν, R_ν operatori reda $\leq m$ na $C^\infty(\Omega, r)$. Za $u, v \in C_0^\infty(\Omega, r)$ definišemo

$$H\langle u, v\rangle = \sum_{\nu=1}^{N} \langle Q_\nu u, R_\nu v\rangle.$$

Očigledno možemo da proširimo definiciju za $u, v \in H_m(\Omega)$.

Propozicija 8.3.2. Neka $f \in H_m(\Omega)$, i za ceo broj μ, $0 < \mu \leq m$, i pretpostavimo da postoji konstanta $C > 0$ takva da je

$$|H\langle f, u\rangle| \leq C||u||_{m-\mu}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega, r).$$

Tada je f $m + \mu$ puta jako diferencijalna funkcija.

Propozicija 8.3.3. Neka je Δ Laplasov[3] operator na $C^\infty(\Omega, r)$ definisan na sledeći način:

$$u = (u_1, ...u_r) \mapsto (\Delta u_1, ..., \Delta u_r),$$

$$\Delta u_i = \tfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + ... + \tfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_r^2}.$$

Ako $f \in H_0(\mathbb{R}^n)$ i $\rho \in \mathbb{N}$, tada postoji $F \in H_{2\rho}(\mathbb{R}^n)$ takva da je $(I - \Delta)F = f$, gde je $I - \Delta$ operator

$$u \mapsto u - \Delta u$$

a

$$(I - \Delta)^\rho = (I - \Delta) \circ ... \circ (I - \Delta),$$

gde je kompozicija primenjena $\rho - 1$ puta.

Dokaz. Po Plancherel-ovoj teoremi 5.2.1, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Neka je

$$\Psi(\xi) = \hat{f}(\xi)(1 + \xi_1^2 + ... + \xi_n^2)^{-\rho}.$$

Kako $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, postoji $F \in L^2(\mathbb{R}^n)$ takva da je $\hat{F} = \Psi$. Štaviše,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{2\rho} |\hat{F}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Stoga po teoremi 7.1.4, $F \in H_{2\rho}(\mathbb{R}^n)$. Lako se vidi da je

$$(I - \Delta)^\rho F = f.$$

□

Teorema 8.3.4. (**Teorema regularnosti**) Neka je P eliptični diferencijalni operator reda m koji slika $C^\infty(\Omega, r) \to C^\infty(\Omega, s)$, gde je Ω otvoren u $\mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da $f \in H_0(\Omega)$ i da $Pf \in C^\infty(\Omega, s)$. Tada $f \in C^\infty(\Omega, r)$.

Dokaz. Posmatrajmo operator

$$L = (-1)^m P^* \circ P,$$

Tada je L eliptičan operator i po korolaru 8.1.1 za $\Omega' \subset\subset \Omega$, L je uniformno eliptičan na Ω'. Dalje,

$$Lf = (-1)^m P^* g, \quad g = Pf,$$

pa ako $Pf \in C^\infty(\Omega, r)$, onda $L \in C^\infty(\Omega, r)$. Stoga, možemo pretpostaviti da je P uniformno eliptičan na $C^\infty(\Omega, r)$ reda $2m$.
Ako $f \in H_0(\Omega)$, definišemo $f_0 \in H_0(\mathbb{R}^n)$,

$$f_0 = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Po prethodnoj propoziciji imamo da postoji $F_0 \in H_{2m}(\mathbb{R}^m)$ takvo da je

$$(I - \Delta)^m F_0 = f_0.$$

[3] Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749 – 1827), francuski matematičar

Neka je

$$P_0 = (-1)^m P \circ (I - \Delta^m).$$

Tada je P_0 uniformno eliptičan operator reda $4m$. Štaviše, ako je $F_0|\Omega = F$, imamo

$$F \in H_{2m}(\Omega), \quad P_0 F = (-1)^m P f \in C^\infty(\Omega, r).$$

Stoga, po propoziciji 8.3.2, F je $(4m + \mu)$ puta jako diferencijabilna za bilo koje $\mu \geq 0$. Po propociziji 7.2.8, $F \in C^\infty(\Omega, r)$. Stoga je

$$f = (-1)^m (I - \Delta)^m F \in C^\infty(\Omega, r).$$

$\square$

Zaključak

Ono što bi se moglo reći da je kruna prvog dela je Whitney-eva teorema. Ovde je ona data sa "samo" dokazom, ali taj dokaz nam ne daje širu sliku. Naime, ona ne samo što je fundamentalna u izučavanju mnogostrukosti, nego je Whitney, dok je pokazivao ovo tvrđenje, prvi put jasno objedinio različite koncepte mnogostrukosti iz tog vremena i uklonio sve konfuzije koje su postojale. Takođe, jednu od ideja iz dokaza je iskoristio Smale[4] u dokazu teoreme iz koje sledi Poincaré-ova[5] hipoteza za slučaj $n \geq 5$ i klasifikacija glatkih struktura na diskovima takođe dimenzije 5 ili više.

Nejednakost Gårding-a, koja je u drugom delu pokazana, daje nam rešenje za Dirihleov granični problem, gde je jednačina zapravo eliptična, i to velikog parnog reda. Kasnije je ista nejednakost korištena za rešavanje Cauchy-jevog problema za jake hiperbolične sisteme 1954. (Leroy). Teorema o regularnosti koja je pokazana na kraju je zapravo rezultat vezan za distribucije. Osobina koja je navedena u toj teoremi se zove hipoeliptičnost a teorema nam daje da je svaki eliptični operator zapravo hipoeliptičan. Operator može biti hipoeliptičan a da ne bude eliptičan, kao što je to na primer operator koji definiše toplotnu jednačinu.

Cela teorija predstavljena u ovom radu ima svoju široku primenu i svoj dublji značaj, ali zbog svoje obimnosti i nivoa, nije predstavljena ovde. Stoga, čitaocu se ostavlja da istraži nedorečeno.

[4]Steve Smale, rođen 1930, američki naučnik

[5]Henri Poincaré (1854 - 1912), francuski matematičar.

Literatura

[1] Anthony P. Morse, *The behaviour of a function on its critical set*, Annals Math. 1939.

[2] Arthur Sard, *The measure of critical values of differentiable maps*, Bull. Am Math. Soc., 1942.

[3] Besenyei Ádám, Komornik Vilmos, Simon László, *Parciális differenciál egyenletek*, Typotex, Budapest, 2014.

[4] Hassler Whitney, *Analityic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Am. Math. Soc., 1934.

[5] Hassler Whitney, *Differentiable manifolds*, Annals math., 1936.

[6] Hassler Whitney, *Geometric integration theory*, Princeton Univ. Press, 1957.

[7] Miloš Kurilić, *Osnovi opšte topologije*, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1998.

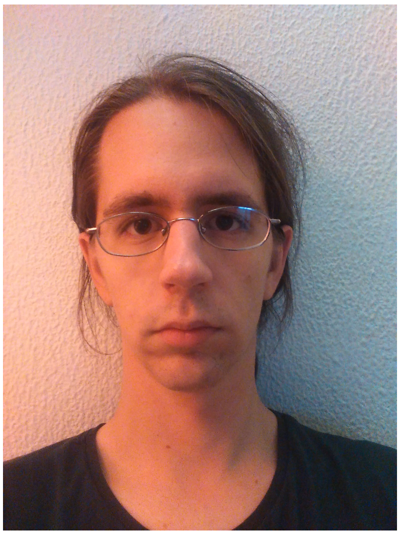
[8] Lars Hörmander, *The analysis of partial differential operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[9] Lars Gårding, *Some Points of Analysis and Their history*, Am Math. Soc., 1997.

[10] Olga Hadžić, Stevan Pilipović, *Uvod u funkcionalnu analizu*, Stylos, Novi Sad, 1996.

[11] Rangaswamy Narasimhan, *Analysis on real and complex manifolds*, North-Holland, Amsterdam, 1968.

Biografija



Srđan Trifunović je rođen 19. novembra 1992. u Somboru, rep. Srbija. Završava osnovnu školu "Ivan Goran Kovačić"u Stanišiću 2007. kao đak generacije. Iste godine upisuje gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu, smer obdareni učenici u matematičkoj gimnaziji, koju završava 2011. godine kao đak generacije i nosilac povelje Đušan Kešelj" koja se dodeljuje najboljem učeniku u prirodnim naukama u generaciji. Iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer matematika. Iste završava 2014. sa prosekom 9.92 i upisuje master akademske studije na istom fakultetu, smer Master matematika, modul Teorijska matematika. Sve ispite predviđene planom i programom je položio u julskom roku 2016. čime je stekao uslov za odbranu ovog master rada.

Novi Sad, jul 2016. Srđan Trifunović

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor:
AU

Mentor: Dr Stevan Pilipović, red. prof., akademik
MN

Naslov rada:
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2016.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA

Fizički opis rada:: (8/87/0/0/6/1/0)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Matematička analiza, Parcijalne diferencijalne jednačine
ND

Ključne reči: Diferencijal, Sard-ova teorema, Whitney-eva teorema, Furijeova transformacija, linearni diferencijalni operator, eliptični operator, uniformno eliptični operator, nejednakost Gårding-a, teorema o regularnosti, prostori Soboljeva, konvolucija
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ
Rad čine 2 dela, od kojih oba sadrže po 4 poglavlja.
U prvom delu rada je predstavljena teorija diferencijalnog računa vezana za funkcije. Objašnjeni su pojmovi diferencijala prvog i višeg reda, pokazane su neke osnovne toereme kao što je Talyor-ova, a poseban osvrt je ostavljen na neke bitne teoreme kao što su Sard-ova i Whitney-eva teorema.
U drugom delu je predstavljena teorija linearnih diferencijalnih operatora. Pokazane su neke osobine Fourier-ove transformacije na različitim prostorima. Zatim je uveden pojam linearnog diferencijalnog operatora. Pedstavljeni su i prostori Sobolleva koji su uopštenje diferencijabilnih funkcija, i pokazane su neke bitne teoreme vezane za njih. Poseban osvrt je ostavljen na eliptične i uniformno eliptične operatore i na teoremu o regularnosti kojom se završava ovaj rad.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 24.03. 2016.,
DP

Datum odbrane: Jul, 2016.
DO

Članovi komisije:
KO

Dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, predsednik
Dr Dora Seleši, vanredni profesor, Prirodni-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, član
Dr Stevan Pilipović, redovni profesor, akademik, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monographic type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master thesis
CC

Author:
AU

Mentor: Stevan Pilipović, PhD
MN

Title:
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2016.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
PP

Physical description: (87/0/0/6/1/0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Mathematical analysis/Partial differential equations
SD

Key words: Differential, Sards theorem, Whitneys theorem,Fourier transform, linear differential operator, elliptic operator, uniformlu elliptic operator, Gårdings inequality, regularity theorem, Sobolev spaces, konvolution
SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB
The thesis is separated into two parts.
In first part, the theory of differentiable functions is presented. The notions of differentials of first and higher order were introduced, and some fundemental theorems were shown, for example the Taylors theorem, and in main focus were the theorems of Whitney and Sard.
In second part, the theory of linear differential operators is presented. Some basic properties of Fourier's transformation on different function spaces are shown. After that, the notion of linear differential operator is introduced. The Sobolev spaces, the generalization of differentiable function spaces, are presented and some important theorems are shown. At the end, elliptic and uniformly eliptic operators were introduced and some theorems, for example the regularity theorem, were shown.

Accepted by the Scientific Board on: 24.03.2016.
ASB

Defended: July, 2016.
DE

Thesis defend board:
DB

Dr Marko Nedeljkov, Full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, president
Dr Dora Seleši , Associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,
Dr. Stevan Pilipović, Full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, mentor.