



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И
ИНФОРМАТИКУ



Соња Вученов

МЕРЕЊЕ УЧЕНИЧКОГ НАПРЕТКА ПРИ КОРИШЋЕЊУ РАЧУНАРА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

-мастер рад-

Нови Сад, 2012. године

Садржај

Предговор.....	2
1. Увод	3
1.1 Употреба рачунара у настави	4
1.2 Кратак опис програма <i>GeoGebra</i>	5
2. Реализација истраживања	7
2.1 Постављање хипотезе	7
2.2 Групе	8
2.3 Припреме за часове	10
2.3.1 Први час-осна симетрија	10
2.3.2 Други час-центална симетрија	17
2.3.3 Трећи час-увежбавање осне и централне симетрије	23
2.3.4 Четврти час-транслација	29
2.3.5 Пети час-ротација	33
2.3.6 Шести час-увежбавање	39
2.3.7 Седми час-увежбавање	42
2.3.8 Осми час-увежбавање	44
2.3.9 Девети час-увежбавање	47
2.3.10 Десети час-контролни задатак	48
2.4 Анкета	50
3. Резултати истраживања.....	53
3.1 Резултати контролног задатка	53
3.2 Резултати анкете	57
4. Закључак	62
Литература	64
Биографија	65

Предговор

Учење математике и решавање задатака на што лакши начин, тема је која је у центру пажње већ годинама, како код нас, тако и у свету. Математичари су на разне начине покушали да олакшају градиво, да га приближе ученицима и да нове методе и начини решавања математичких проблема буду што јаснији ученицима. Један од тих начина је управо и употреба рачунара у математици. Употребом рачунара у настави подстичемо креативност ученика, помажемо њиховој мотивацији, а самим тим доприносимо и да ученици што више учествују у раду на часу, визуелни приказ је бољи, а и омогућава им се да виде неке од могућности коришћења рачунара и у сврхе учења.

Неки од математичких програма који се могу набавити бесплатно или уз лиценцу су: *Mathematica*, *Maple*, *Algebra*, *Geom View*, *Mathcad*, *GeoGebra*...

У овом раду приказано је коришћење рачунара у настави математике, као и резултати који су се при томе добили. Математички програм који је коришћен у овом истраживању, где се обрађивала наставна тема „Изометријске трансформације“ је *GeoGebra*.

Захваљујем се професорици математике Лепосави Уљаревић, на помоћи и свим сугестијама, приликом одржавања наставе у Гимназији „Жарко Зрењанин“ у Врбасу, као и директору Светозару Вујичићу који је то одобрио и тиме омогућио реализацију овог мастер рада. Такође, захваљујем се и члановима комисије, др Зорани Лужанин и др Ђурђици Такачи, редовним професорима ПМФ-а у Новом Саду, на свим сугестијама.

Посебну захвалност дугујем мом ментору, др Драгославу Херцегу, редовном професору ПМФ-а у Новом Саду, на свим саветима, сугестијама, помоћи и зато што је увек имао разумевања.

Нови Сад, август 2012.

Соња Вученов

1. Увод

У овом мастер раду посматраћемо и упоређивати наставу која је одржана са и без помоћи рачунара у обради наставне теме: „Изометријске трансформације“, и наставних јединица: „Осна симетрија“, „Централна симетрија“, „Транслација“, „Ротација“.

Постављамо хипотезу да се употребом рачунара у настави математике постиже већи напредак у погледу успеха у учењу, и у резултатима ученика, него у традиционалној настави. Ову хипотезу испитујемо експериментом.

Експеримент је одржан у Гимназији „Жарко Зрењанин“ у Врбасу, у којем су учествовала два одељења првог разреда, од којих је једно одељење природно-математичког смера, а друго општег смера. Време трајања експеримента је предвиђено време за обраду ове наставне теме, а то је 10 часова, у сваком одељењу.

Мастер рад је подељен у 3 дела.

У првом делу се бавимо припремом и постављањем хипотезе:

1. Уједначавање група и постављање хипотезе.
2. Преглед досадашњих оцена из математике.
3. Избор наставне јединице и наставних тема.

У другом делу реализујемо експеримент:

1. Опис експеримента
2. Контролни задатак којим проверавамо нашу хипотезу
3. Анкетирање ученика о томе шта они мисле о употреби рачунара у настави математике и да ли мисле да на тај начин могу лакше савладати градиво.

Трећи део мастер рада се бави анализом добијених података

1. Приказ и анализа резултата контролног задатка.
2. Приказ резултата анкете.

1.1 Употреба рачунара у настави

Побољшање квалитета наставе, а самим тим и образовања, тежња је која је све више присутна у нашем школству. Један од начина побољшања наставе је свакако и употреба рачунара. Употреба рачунара у настави, сем у информатици, није толико распрострањена у нашим школама, као у свету. Овај тренд се полако мења, тако да је у неким школама, уз помоћ неких страних донација и улагања министарства, сада настава уз помоћ рачунара омогућена. Наравно, да би та настава била адекватна, потребно је још доста улагања, усавршавања професора, али исто тако и мотивација како ученика тако и професора. Једна од главних препрека оваквом извођењу наставе су свакако предрасуде. Постоје подељена мишљења о употреби рачунара у настави. Једна страна заговара мишљење да рачунаре треба увести што раније у наставу, ако је могуће, чак и у предшколском узрасту, јер деца уче и кроз игру, а путем рачунара и разних програма им је то и омогућено, јер рачунари пружају велике могућности, па на тај начин, могу проширити своје знање и видике. С друге стране имамо и заговорнике мишљења да рачунаре не треба уводити у наставу, а неки од разлога су ти да на тај начин ученици губе вештину и рутину решавања задатака, да се мање труде, да се решавање задатака путем рачунара, конкретно у математици, своди на преписивање резултата добијених путем рачунара, и да на тај начин и професори вреднују само крајњи резултат, а не и поступак решавања. Оба ова начина размишљања имају своје врлине и мане, али наш циљ није такмичење који је од ових начина бољи, већ је наш циљ да побољшамо квалитет ученичког знања, а средства којима се будемо користили у току извођења наставе зависеће искључиво од тема које се обрађују, тј у зависности од градива користећемо средства за које сматрамо да ће на најбољи начин помоћи ученицима да савладају градиво.

David Tall [11], сматра да је људски мозак изузетан у својој способности за чување и пренос комплексних информација, али и да је ограничен одговарајућом количином података која може бити обрађена и сачувана. Један од метода којима можемо смањити ефекат ових ограничења је управо употреба рачунара у настави и разних математичких програма. Традиционалан начин наставе често доводи до минималних оптерећења когнитивних способности, те се поједине радње одвијају аутоматски, а знање које се овим путем усваја је краткорочно. С обзиром на начине на које се рачунар може користити у сврхе учења математике, види се могућност да се на предвидив начин помогне ученицима да изграде и тестирају своју менталну конструкцију. Рачунари дозвољавају ученицима да се фокусирају и на неке друге аспекте који су значајни у когнитивном развоју математичког знања, што није могуће у традиционалној настави. У ери развоја и иновација када се сваки дан сусрећемо са новим идејама и сазнањима, наше учење и наш

сопствени развој морају да прате тај темпо. Да би све то постигли, потребно је да се сваки дан све више едукујемо, да стално тражимо и проналазимо нове начине учења, а то је једино могуће уз помоћ савремене технологије. Ако у школама будемо примењивали само традиционални облик учења, изгубићемо трку са временом и савременим животом. Са развојем, побољшањем технологије и са све већим утицајем рачунара у нашим животима, све више се види и њихова примена и неопходност у настави математике.

1.2 Кратак опис програма *GeoGebra*

Сходно наставној теми за реализацију овог пројекта користили смо математички програм *GeoGebra*.

Програм *GeoGebra* је математички софтвер који повезује геометрију и алгебру. Развио га је Markus Hohenwarter са Универзитета у Салцбургу за поучавање математике у школама. *GeoGebra* је бесплатна и доступна на више од 45 језика.

Динамичко јединство геометрије и алгебре у *GeoGebra*-и пружа ученицима бољу визуализацију наставе, омогућава им експерименталан прилаз математици и наравно веће учешће у раду на часу. Поред тога што се у ученицима буди већа мотивација и што им градиво на овај начин постаје занимљивије, јер су изашли из стандардних оквира предавања, на овај начин ученици савладавају градиво експериментишући и сами могу откривањем лако доћи до решења.

GeoGebra, као спој геометрије и алгебре омогућава унос података на оба начина, тј, објекте можемо нацртати уз помоћ већ постојећих функција, али исто тако можемо их и алгебарски задати. То је такође предност овог програма, јер за сваки нацртан објекат веома лако можемо прочитати његове координате и једначине.

Овај програм поред тога што је веома једноставан и лак за савладавање, веома је користан и ученицима и наставницима. Наставници могу да га користе као динамички пројектор и да на тај начин целом одељењу презентују градиво, могу га користити да генеришу различите задатке, тј. мењајући параметре у задатку може се добити мноштво задатака који се разликују, а исте су тежине, и на тај начин се могу добити прецизнији подаци о увојеном знању, али и развити самосталан рад код ученика.

GeoGebra је веома погодан програм за креирање анимација којима можемо илустровати ученицима разне положаје и односе датих објеката. Овај програм доста можемо користити у елементарној геометрији, планиметрији, можемо конструисати тачке, векторе, кружнице, елипсе, параболе, хиперболе, разне многоуглове, конусне пресеке...

Користећи *GeoGebra*-у за потребе ове наставне теме, веома лако смо уз већ постојеће одговарајуће команде извршили све изометријске трансформације које смо обрађивали.

Ово су неке од уграђених функција и инструмената *GeoGebra*-е, који су коришћени у реализацији ове наставне теме:



Пресек два објекта



Права кроз две тачке



Нормала



Паралела



Права одређена са две тачке



Вектор одређен двема тачкама



Симетрала угла



Кружница одређена центром и једном тачком



Кружница одређена центром и полупречником



Кружни лук одређен центром и двема тачкама



Угао



Осна симетрија



Централна симетрија



Ротација



Транслација

2. Реализација истраживања

У овом делу рада анализираћемо групе, тј. одељења, образложићемо зашто је изабрана баш ова наставна тема за истраживање и обрадићемо сваки час посебно да би добили што бољи увид у сам ток истраживања и његову реализацију.

2.1 Постављање хипотезе

Развој савременог друштва, а самим тим и развој информационих технологија, омогућава модерну организацију наставе. Потребно је користити нове методе и нове дидактичке материјале, како би се настава побољшала и осавременила, а самим тим да би била и интересантнија ученицима. Циљ такве наставе је да ученици из ње усвоје што више знања која ће им бити корисна у даљем животу и да на што лакши начин савладају градиво.

Проблем истраживања је употреба рачунара у настави математике и испитивање њеног утицаја на напредак ученика, односно на квалитет знања који се овим путем усваја, на разумевање математичких садржаја и решавање одређених проблема.

Предмет истраживања је допринос употребе рачунара у настави математике у односу на уобичајени—традиционални начин рада. У експерименталној групи је настава реализована уз помоћ рачунара. Резултате експеримента смо посматрали са становишта ефикаснијег учења и успешнијег решавања задатака.

Циљ истраживања је да се испита ефекат употребе рачунара у настави математике на знање ученика и да се прикупе мишљења ученика о оваквој врсти наставе. Наш задатак је да испитамо успешност овако изведене наставе на основу теста знања, да сагледамо мишљење ученика о овоме и да на тај начин добијемо целокупну слику о употреби рачунара у настави математике.

На основу одређеног проблема, дефинисаног предмета, постављеног циља и задатака овог истраживања издвојили смо нулту хипотезу истраживања:

Употребом рачунара у настави математике постиже се већи напредак у погледу успеха у учењу, и у резултатима ученика, него у традиционалној настави.

2.2 Групе

Као што је већ речено, у истраживању су учествовала два одељења првог разреда Гимназије „Жарко Зрењанин“ из Врбаса, од којих је једно одељење било природно-математичког смера, а друго општег смера. Да би стекли увид у ученичко знање и у репрезентативност узорка, направили смо преглед оцена ова два одељења, са полугодишта из математике.

На иницијативу професорице математике која предаје и једном и другом одељењу, одлучено је да ће одељење природно-математичког смера бити контролна група, док ће одељење општег смера бити експериментална група, тј. код њих ће се настава одвијати уз помоћ рачунара. Преглед оцена са полугодишта можемо видети у табели 1.

	Контролна група	Експериментална група
Број ученика у одељењу	28	31
Одличан	8	3
Врло добар	3	3
Добар	7	3
Довољан	8	13
Недовољан	2	9
Средња оцена	3,25	2,29

Табела 1. Преглед оцена са полугодишта

Обрадићемо ове податке у Еxcel-у, користећи t-тест, да бисмо направили поређење група и установили да ли су групе подједнако добре у математици (Табела 2.)

	Контролна група	Експериментална група
Број ученика	28	31
Аритметичка средина	3,25	2,29
Стандардна девијација	1,824	1,613

Табела 2.

На основу добијених података проверена је помоћна нулта хипотеза:

Нема значајне разлике у оценама на полугодишту између контролне и експерименталне групе.

Интервал поверења за контролну групу је 3.25 ± 1.824 , тј. $[1.426, 5.074]$, а за експерименталну групу је 2.29 ± 1.613 , тј. $[0.677, 3.903]$. Одговарајућа t -вредност је $t = 2,812$, па је $p = 0.0067$. Како је добијено $p < 0.05$, са поузданошћу од 95% одбацујемо нулту хипотезу и закључујемо да постоји статистички значајна разлика у просечним оценама на полугодишту, тј. да је контролна група, на основу оцена са полугодишта, успешнија у математици од експерименталне групе.

Анализом наставног плана и програма, сходно могућностима школе у којој је требало бити обављено истраживање, закључили смо да је најпогоднија наставна тема, за ово истраживање, „Изометријске трансформације“. До овог закључка смо дошли зато што ова наставна тема представља једну од тема коју ученици теже савладавају, па је ово добра прилика да се види да ли ће ученици лакше савладати градиво ако се настава одвија уз помоћ рачунара. Такође, ово је једна од тема која је веома погодна за реализацију уз помоћ рачунара, а програм који ћемо ми користити у ту сврху је *GeoGebra*.

Због временских услова, ђаци нису похађали наставу три недеље, па је одлучено да поред одрађивања часова суботама, дође и до скраћивања градива тамо где је могуће, тако да је за ову наставну тему новим планом и програмом било предвиђено десет школских часова.

У оквиру наставне теме „Изометријске трансформације“, предвиђена је обрада следећих наставних јединица: „Осна симетрија“, „Централна симетрија“, „Транслација“ и „Ротација“.

Након увида у састав група, одабира наставне теме и постављања хипотезе, тј. проблема којим ћемо се овде бавити, представимо план и сам начин реализације истраживања.

Замишљено је да настава у оба разреда буде иста, али да њена реализација буде различита. Обрађиваће се исти задаци у оба разреда да би се на крају имао што бољи увид у напредак ученика и у њихову успешност у савладавању градива.

GeoGebra-у смо у овом случају, у експерименталној групи, користили као динамички пројектор да би се материја изложила целом одељењу. Потребан материјал за реализацију наставе у експерименталном одељењу су лаптоп, пројектор, али и табла, креда и прибор за конструкцију, јер је настава у експерименталном одељењу замишљена и као демонстрациона, али и тако да

ученици самостално раде задатке на табли. Излагање је замишљено тако што ће бити приказан конструктивни протокол, те ће корак по корак бити приказана и образложена цела конструкција.

Проблеми са којима сам се сусрела пре извођења истраживања су везани за одговарајућу опрему и услове рада на овакав начин. Часови за експерименталну групу су извођени у учионици која није предвиђена за часове математике, али је била одговарајућа, за потребе коришћења пројектора. У овој учионици је постојала „бела“ табла, али је недостјао основни прибор за рад са њом, тако да је рад био отежан. Такође, димензије те табле су много мање у односу на димензије „редовних“ табли, па је организација табле била доста компликованија.

2.3 Припреме за часове

У овом делу ћемо приказати припреме за часове који су предвиђени за наставну тему „Изометријске трансформације“. Припреме за оба разреда су рађене исто, тј. са истим задацима, али су за групу којој се предаје уз помоћ рачунара, задаци припремљени у *GeoGebra*-и. За потребе илустрације ових припрема, све слике су рађене у *GeoGebra*-и.

2.3.1 Први час–осна симетрија

Први део часа је предвиђен за упознавање ученика са истраживањем, оним што их очекује у наредном периоду и наставном темом коју ћемо обрађивати. На овом часу су обрађене дефиниције везане за изометрију и осну симетрију, као и теореме које се односе на осну симетрију, а предвиђене су за обраду у првом разреду гимназије. На часу су урађена и два задатка:

1. Осном симетријом пресликати произвољан четвороугао $ABCD$ у односу на осу s .
2. Конструисати једнакократи троугао ABC ако су дате кружнице k_1, k_2 , права p , и при томе важи $C \in p, h_c \subset p, A \in k_1, B \in k_2$.

Први задатак је изабран тако да ученици могу да схвате принцип осне симетрије и да увежбају осно пресликавање. Други задатак је конструктивног типа и изабран је због тога што се поред осне симетрије понављају и својства

једнакокраког троугла, а такође имамо пример у којем могу бити два решења овог задатка, што ћемо продискутовати са ученицима.

Дефиниција 1. *Изометрија (I) је свако обострано једнозначно пресликавање фигуре $\mathcal{F}$ на фигуру $\mathcal{F}'$ које дужи пресликава на подударне дужи.*

Уочимо да ако важи:

$$I(A)=A' \quad \text{и} \quad I(B)=B',$$

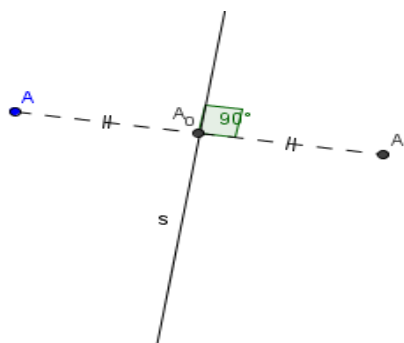
тада је

$$|AB|=|A'B'|$$

Дефиниција 2. *Изометријска трансформација $I:\mathcal{F}\rightarrow\mathcal{F}'$ је директна ако „чува“ оријентацију, тј. ако су фигуре $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ исте оријентације. Изометријска трансформација $I:\mathcal{F}\rightarrow\mathcal{F}'$ је индиректна ако су фигуре $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ супротне оријентације.*

Дефиниција 3. *Пресликавање равни, при којем се свака тачка A , те равни, преслика у тачку A' симетричну у односу на праву s , назива се **осна симетрија** у односу на праву (осу) s , и означава са I_s .*

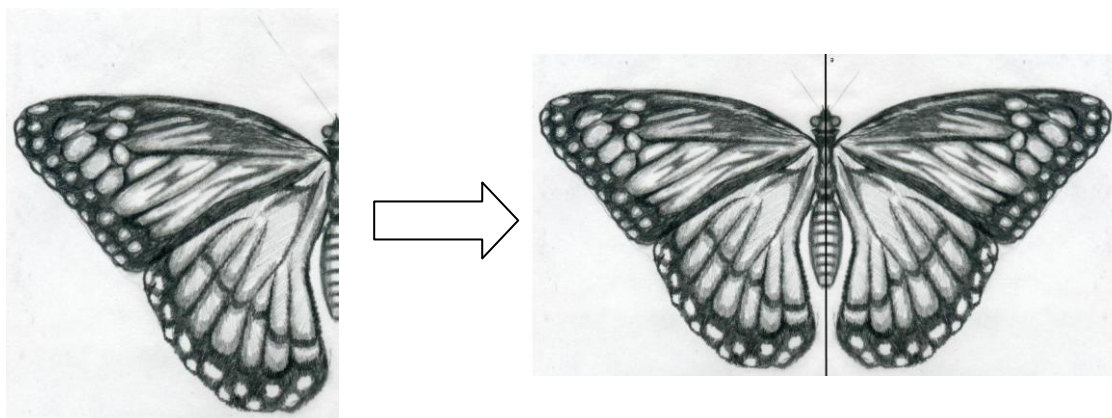
Пресликавање тачке A у односу на осу s , врши се тако што се конструише нормала из тачке A у односу на осу s , затим, у пресеку нормале и осе s добијемо тачку A_0 , а потом нанесемо растојање од тачке A до тачке A_0 на другу страну од тачке A_0 , и тако добијемо тачку A' , што можемо видети на слици 1.



Слика 1.

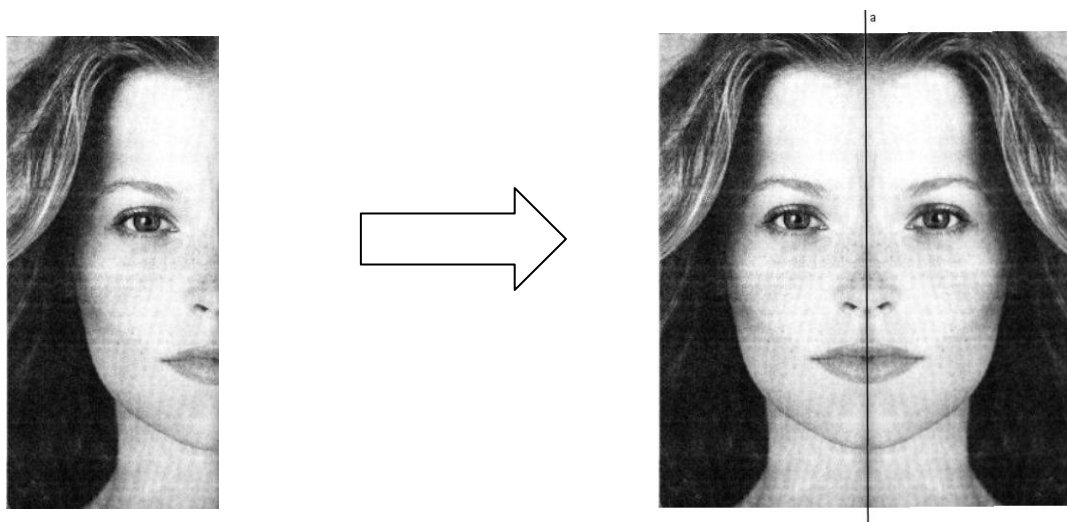
Да би ученицима што боље објаснили осну симетрију, користићемо неке примере из природе који су им веома блиски:

Пример лептира (Слика 2.). Можемо уочити да ако замислимо осу која дели лептира уздуж, управо та оса је оса симетрије.



Слика 2.

Исто важи и за људско тело, па је и лице (Слика 3.) на исти начин осно симетрично. (Наравно, не може бити потпуно, тј. савршено осно симетрично, али се уопштено може тако рећи.)



Слика 3.

Поред ових, наравно, постоје многи примери осне симетрије који нас окружују, па је један од задатака за ученике био да смисле по неколико таквих примера

Теорема 1. *Осна симетрија је изометрија равни.*

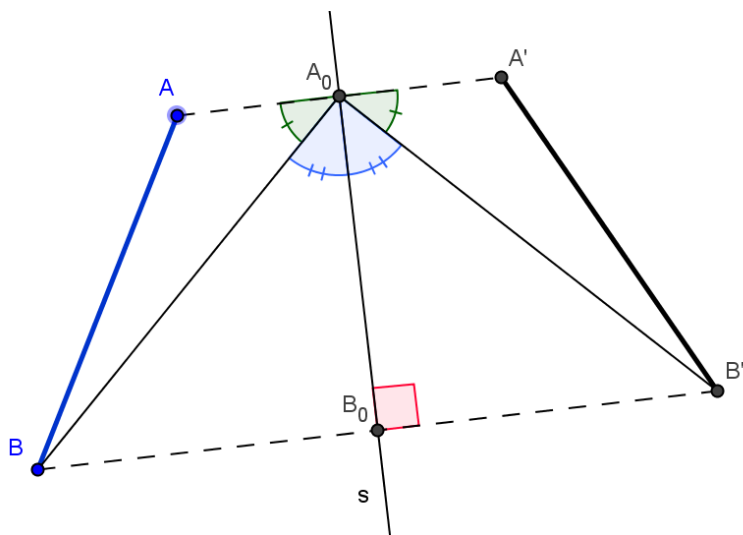
Доказ

У овој теорему треба да покажемо да ако је

$$I_s(|AB|) = |A'B'|$$

онда важи

$$|AB| = |A'B'|.$$



Слика 4.

Да би ово показали, посматрајмо следеће троуглове (Слика 4.)

$\triangle A_0 B_0 B$ и $\triangle A_0 B_0 B'$

$|BB_0| \cong |B_0 B'|$ -ово важи из услова осне симетрије

$|A_0 B_0| \cong |A_0 B_0|$ -заједничка страница

$\sphericalangle BB_0 A_0 \cong \sphericalangle B' B_0 A_0 = 90^\circ$

Из датих једнакости, на основу става СУС закључујемо да је $\triangle A_0 B_0 B$ подударан са $\triangle A_0 B_0 B'$. Одавде следи да је

$$|A_0 B| \cong |A_0 B'|$$

и $\sphericalangle B A_0 B_0 \cong \sphericalangle B' A_0 B_0$.

Посматрајмо сада:

$\triangle A_0 A B$ и $\triangle A_0 A B'$

$|AA_0| \cong |A_0 A'|$ -важи из услова осне симетрије

$|A_0 B| \cong |A_0 B'|$ -из последице да је $\triangle A_0 B_0 B \cong \triangle A_0 B_0 B'$

$\sphericalangle B A_0 A \cong \sphericalangle B' A_0 A' = 90^\circ - x$, где је $x = \sphericalangle B A_0 B_0 \cong \sphericalangle B' A_0 B_0$

На основу става СУС одавде следи да је ΔA_0AB подударан са $\Delta A_0AB'$, те је

$$|AB| \cong |A'B'|$$

Пошто смо добили да је $|AB| \cong |A'B'|$, следи да је I_s изометрија.

Дефиниција 4. За две фигуре $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ каже се да су симетричне у односу на праву s , ако свакој тачки M фигуре $\mathcal{F}$ одговара тачка M' фигуре $\mathcal{F}'$, тако да је $I_s(M) = M'$, и обрнуто, свакој тачки N' фигуре $\mathcal{F}'$ одговара тачка N фигуре $\mathcal{F}$, тако да је $I_s(N') = N$.

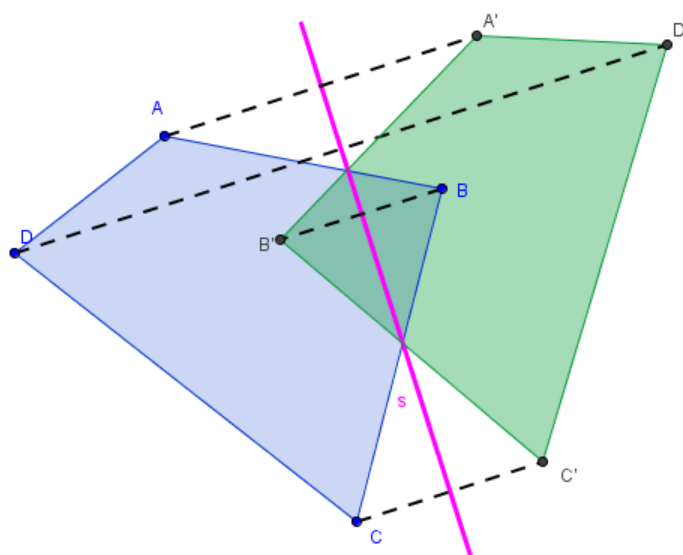
Теорема 2. Осна симетрија је индиректна изометрија.

Није предвиђено да се ова теорема доказује, па је само наводимо. Како су ученици већ упознати шта значи директна, а шта индиректна изометрија, усвојили су и ову теорему.

Задатак 1. Осном симетријом пресликати произвољан четвороугао $ABCD$ у односу на осу s .

Решење

Ученици су у обе групе сами решавали овај задатак на табли и нису имали потешкоћа, сем у симболичком исписивању пресликавања.



Слика 5.

Завршено пресликавање приказано је на слици 5, док је симболима, пресликавање овако записано:

$$I_s(A) = A'$$

$$I_s(B) = B'$$

$$I_s(C) = C'$$

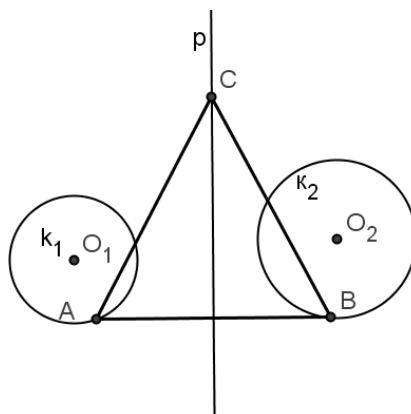
$$I_s(D) = D$$

$$I_s(ABCD) = A'B'C'D'$$

Задатак 2. Конструисати једнакокраки троугао ABC ако су дате кружнице k_1, k_2 , права p , и при томе важи $C \in p, h_c \subset p, A \in k_1, B \in k_2$.

Решење

Скицу овог задатка (Слика 6.) која се користи при анализирању задатка, сам ја ученицима нацртала на табли, тј. нацртала сам дате податке, а ученици су уз моју помоћ доносили закључке о томе како ће изгледати крајња слика.



Слика 6.

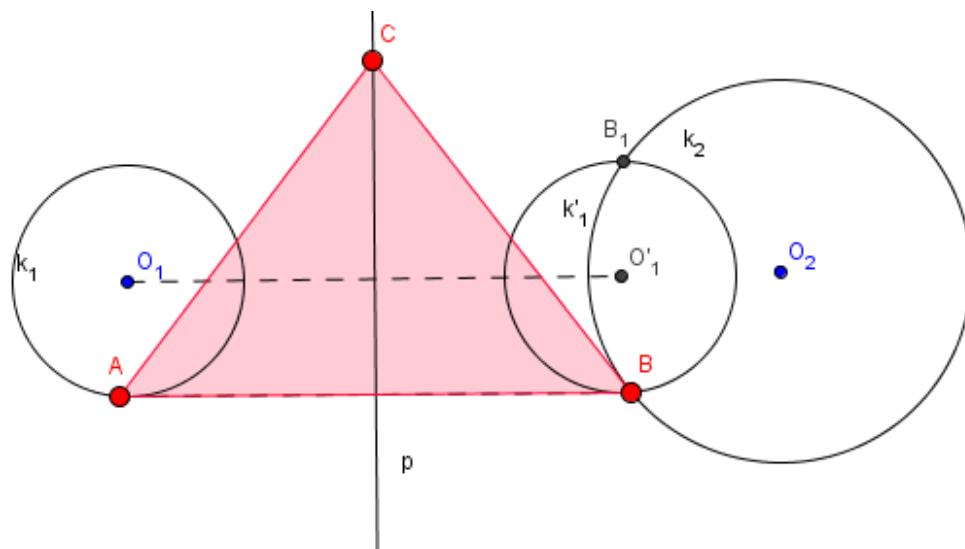
Овај задатак је такође битан и због тога што се примењује Дефиниција 4, па су ученици могли уочити да је

$$I_s(A) = B,$$

што значи да тачку B можемо добити у пресеку кружнице k_2 и кружнице $I_s(k_1)$.

Пошто је ово био први конструктивни задатак ученицима сам понудила могућност да бирају да ли ћу овај задатак на табли урадити ја, или ће они покушати да га ураде уз моју помоћ. Контролно одељење је одлучило да задатак на табли урадим ја, док су се у експерименталној групи јавила три ученика да тај задатак ураде на табли, јер су били охрабрени тиме што су убрзану конструкцију видели на пројектору док сам им ја излагала задатак.

Изглед завршене конструкције приказан је на слици 7.



Слика 7.

Оно што сам могла да запазим је то да су ученици у експерименталној групи били пријатно изненађени тиме што су могли да прате конструкцију и преко пројектора, док је упоредо, један од ученика радио конструкцију на табли. Такође, свидела им се и прегледност онога што треба да ураде, као и то што су бојама истакнути одређени објекти.

Доказ, записан симболима, је изгледао овако:

$$\begin{aligned} I_s(O_1) &= O_1' \\ I_s(k_1) &= k_1' \\ k_1' \cap k_2 &= \{B, B_1\} \\ I_s(B) &= A \end{aligned}$$

Број решења у експерименталној групи смо утврдили уз помоћ анимације у *GeoGebra*-и, док смо у контролној групи то урадили помоћу цртежа и исписаног доказа. Због постојања тачака B и B_1 , имамо највише два могућа решења.

Пред крај часа, ученицима сам задала домаћи задатак и упутила их како би требало да га реше.

Задатак 3. Конструисати једнаокраки троугао ABC ако су дате праве p, q и кружница k , при чему важи $C \in p, h_c \subset p, A \in k, B \in q$.

2.3.2 Други час–центална симетрија

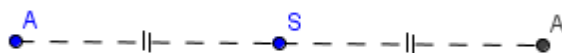
Сходно наставној теми „Централна симетрија“, са ученицима је обрађен теоријски део који се састоји из две дефиниције и две теореме, док сам на примеру карата покушала да им што боље објасним појам централне симетрије. Урадили смо и три задатка:

1. Централном симетријом у односу на тачку S пресликати петоугао $ABCDE$.
2. $I_p \circ I_A(ABCD)$
3. Конструисати квадрат $ABCD$, ако су дате: тачка O (пресек дијагонала), кружница k и права p , при чему важи да је $A \in k$ и $C \in p$.

Решавајући први задатак ученици би требало да савладају пресликавање централном симетријом. Другим задатком, поред тога што се увежбава принцип централне симетрије, такође се повезује ова наставна јединица, са прошлом. Трећи задатак је изабран због тога што се примењују и особине квадрата, а при томе се централна симетрија може применити неколико пута, у односу на различите центре симетрије, што ће бити детаљније описано при изради задатка.

На овом часу су у обе групе ученици, уз моју помоћ, радили задатке на табли.

Дефиниција 1: Пресликавање које сваку тачку A равни α преводи у тачку A' симетричну са A у односу на тачку S те равни, назива се **централна симетрија** равни α са центром S .



Слика 8.

Пресликавање тачке A централном симетријом у односу на тачку S (Слика 8.) описано је симболима:

$$I_S(A) = A'$$

$$A - S - A'$$

$$|AS| \cong |SA'|$$

На час сам донела неколико карата за играње, да им на том примеру покажем централну симетрију (Слика 9.)



Слика 9.

Можемо приметити да је у односу на централну тачку карте, лик централно симетричан.

Теорема 1. *Централна симетрија је изометрија.*

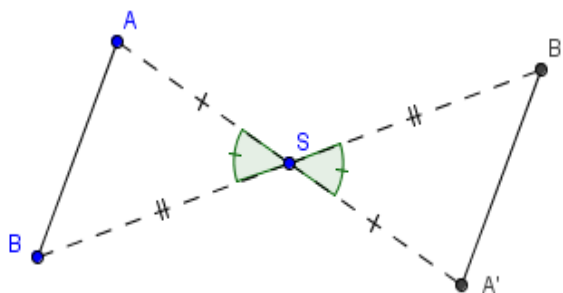
Доказ

У овој теореме треба да покажемо да ако је

$$I_S(|AB|) = |A'B'|$$

онда важи:

$$|AB| \cong |A'B'|$$



Слика 10.

Да ово важи показаћемо тако што ћемо посматрати следеће троуглове (Слика 10.):

$\triangle ASB$ и $\triangle A'SB'$

$|AS| \cong |A'S|$ -важи из услова централне симетрије

$|BS| \cong |B'S|$ -такође важи из услова централне симетрије

$\sphericalangle ASB \cong \sphericalangle A'SB'$ - ово су унакрсни углови

Одавде, на основу става СУС добијамо да је $\triangle ASB \cong \triangle A'SB'$, из чега следи да је $|AB| \cong |A'B'|$, а тиме смо доказали теорему.

Дефиниција 2. За две фигуре $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ каже се да су централно симетричне у односу на тачку S , ако свакој тачки M фигуре $\mathcal{F}$ одговара тачка M' фигуре $\mathcal{F}'$, тако да је $I_S(M) = M'$, и обрнуто, свакој тачки N' фигуре $\mathcal{F}'$ одговара тачка N фигуре $\mathcal{F}$, тако да је $I_S(N') = N$.

Теорема 2. Централна симетрија је директна изометрија.

Задатак 4. Централном симетријом у односу на тачку S пресликати петоугао $ABCDE$.

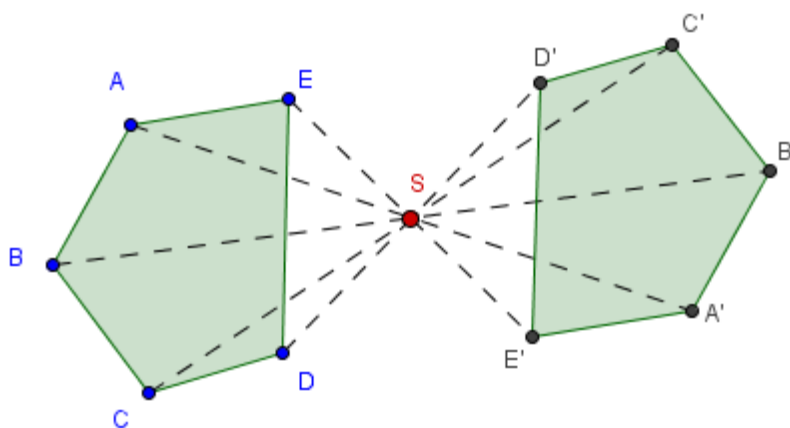
Решење

При решавању овог задатка није било никаквих потешкоћа ни у једној групи, чак ни са записом решења, симболима, које изгледа овако:

$$I_S(A) = A', \quad I_S(B) = B', \quad I_S(C) = C', \quad I_S(D) = D', \quad I_S(E) = E'$$

$$I_S(ABCDE) = A'B'C'D'E'$$

Коначан изглед пресликавања приказан је на слици 11.

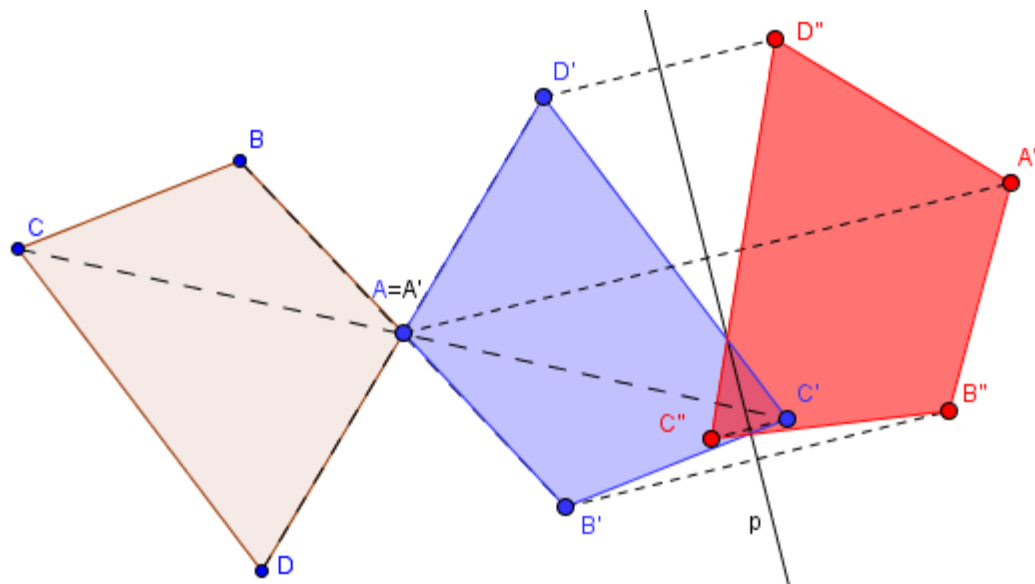


Слика 11.

Задатак 5. $I_p \circ I_A(ABCD)$

Решење

$$I_p \circ I_A(ABCD) = I_p(I_A(ABCD)) = I_p(A'B'C'D') = A''B''C''D''$$



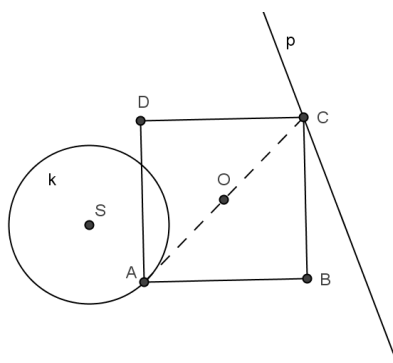
Слика 12.

Проблем који се јавио при решавању овог задатка био је тај што нису сви ученици знали правило композиције функције, иако су то већ радили.

Задатак 6. Конструисати квадрат ABCD, ако су дате: тачка O(пресек дијагонала), кружница k и права p , при чему важи да је $A \in k$ и $C \in p$.

Решење

При решавању овог задатка ученицима сам помогла тиме што сам им нацртала скицу која је представљала само дате елементе (Слика 13.)



Слика 13.

Тиме што сам спојила тачке А и С ученици су брзо закључили да тачку А можемо пресликати централном симетријом, у односу на тачку О и добити тачку С. Уз моју помоћ, тј. навођењем онога што смо радили прошли час, ученици су закључили, да тачку С можемо добити у пресеку праве p и кружнице k' . ($k' = I_O(k)$)

Конструкцију су ученици, у обе групе, радили на табли. Већи проблем настао је у контролној групи зато што остали ученици у одељењу нису могли да испрате сваки корак конструкције, јер су се жалили на лошу видљивост онога што пише на табли, да ученик који ради задатак заклања таблу и да је непрецизан. Такав проблем се није јавио у експерименталној групи, јер су они конструкцију пратили и путем пројектора. Завршена конструкција приказана је на слици 13.

При записивању доказа опет је било мањих проблема, у обе групе.

$$I_O(S) = S'$$

$$I_O(k) = k'$$

$$k' \cap p = \{C, C_1\}$$

$$I_O(C) = A$$

$$O \in n, n \perp AC$$

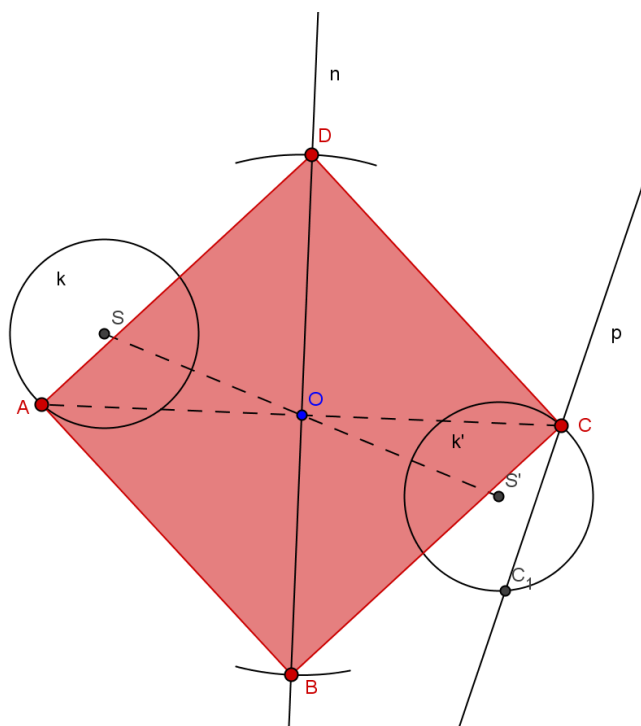
$$k(O, r = |AO|) \cap n = \{B, D\}$$

Оно што сам им назначила је то да смо једну од тачака В или D, могли да добијемо и применом централне симетрије у односу на центар О, тј.

$$I_O(B) = D$$

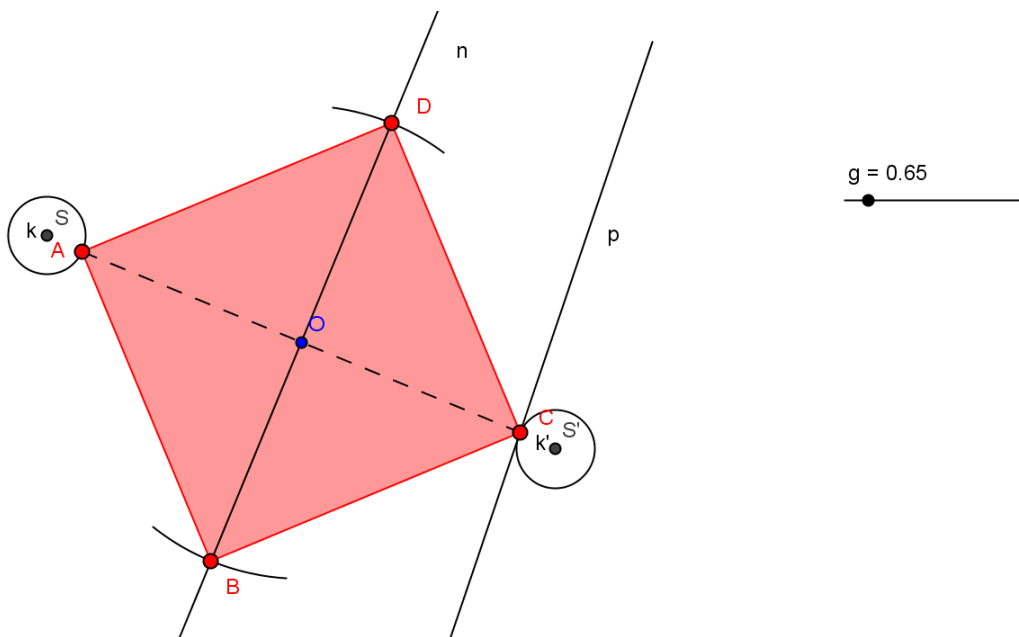
$$\text{или } I_O(D) = B$$

Ово наравно можемо урадити јер се дијагонале код квадрата полове.



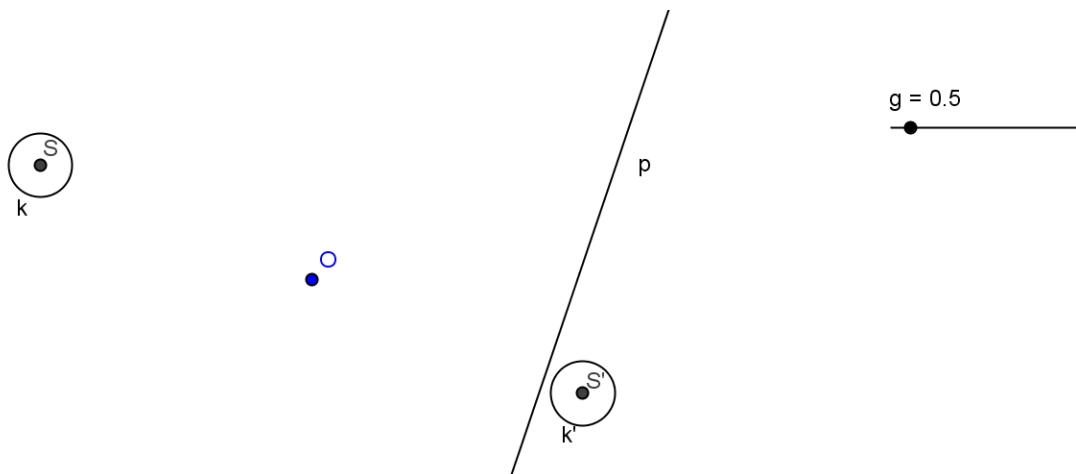
Слика 14.

Продискутовали смо и могући број решења уз помоћ слике 14. и доказа, док смо у експерименталној групи то урадили уз помоћ анимације, конкретно, поставила сам клизач који је одређивао полупречник дате кружнице и на тај начин смо могли да видимо сва решења овог задатка.



Слика 15.

Слика 13 уједно је и слика која представља два решења. Слика 15. је слика добијена анимацијом, која приказује могућност само једног решења, где је g , већ поменути клизач, док Слика 16. представља случај када немамо решење.



Слика 16.

Домаћи задатак који сам задала је сличан задатку који смо радили на часу, међутим, могуће потешкоће могу настати при наношењу странице a .

Задатак 7. Конструисати ромб $ABCD$ ако су дате праве p и q , тачка O (пресек дијагонала) и дужина странице a , при чему је $A \in p$ и $C \in q$.

2.3.3 Трећи час–увежбавање осне и централне симетрије

Овај час је предвиђен за увежбавање осне и централне симетрије, па су на часу урађена три задатка:

1. Конструисати квадрат $ABCD$, ако су дате праве p, q, r , тако да важи: $A \in p, B, D \in q$ и $C \in r$.
2. Конструисати праву p , ако су дате кружнице k_1 и k_2 , при чему важе услови:
 $k_1 \cap k_2 = \{A, B\}$, $A \in p$, $p \cap k_1 = \{A, M\}$, $p \cap k_2 = \{A, N\}$, $|AM| = |AN|$.
3. Конструисати ромб $ABCD$, ако су дате кружнице k_1, k_2 , права p , и дужина странице a , при чему је $A \in k_1$, $C \in k_2$, $B, D \in p$.

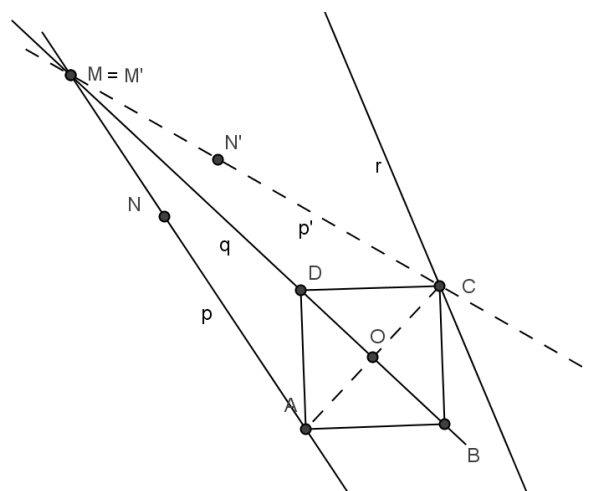
Први и трећи задатак су из осне симетрије, док је други задатак везан за централну симетрију. Први задатак је изабран да би ученици савладали

пресликавање праве осном симетријом, јер смо у претходним задацима пресликавали само кружницу. Управо из тог разлога су дате баш три праве, а не нпр. права и кружница или две кружнице. То је уједно и био један од проблема при решавању овог задатка, јер ученици нису сами наслутили како се пресликава права. Други задатак је изабран зато што је потребно конструисати праву, а не неки многоугао, као што смо до сада радили, чиме је ученицима омогућен увид у још неке могућности изометрије. Иако се трећи задатак решава помоћу осне симетрије, изабрала сам баш њега, јер може да помогне ученицима, који нису урадили домаћи задатак, да боље схвате пресликавање ромба када два његова темена припадају неким фигурама, и дата је дужина његове стране. Пошто је ово час увежбавања, све задатке су на табли радили ученици.

Задатак 8. Конструисати квадрат $ABCD$, ако су дате праве p, q, r , тако да важи: $A \in p, B, D \in q$ и $C \in r$, при томе праве p, q и r нису паралелне праве.

Решење

Иако сам планирала да све задатке ученици самостално раде на табли, уз моје сугестије, ученици нису схватили како да пресликају праву, па сам им ипак ја скицирала анализу задатка (Слика 17).



Слика 17.

Ученици су сами закључили да је

$$I_q(A) = C$$

и да је потребно праву p пресликати осном симетријом у односу на праву q , али нису знали како.

Пошто је за пресликавање праве потребно да пресликамо две њене тачке, као прву тачку изабрали смо тачку M која је уједно и тачка M' . Другу тачку са

Након овог објашњења, ученик који је радио задатак на табли, наставио је самостално даље да решава задатак, као и остали ученици.

Мале потешкоће су се јавиле код исписивања доказа у експерименталној групи, у последњем кораку, док у контролној групи није било проблема. Доказ изгледа овако:

$$k(0, r = |AO|) \cap q = \{B, D\}$$

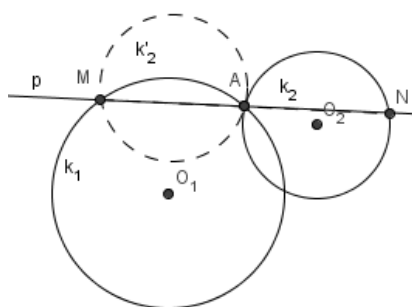
Овај задатак је изабран и због тога што у њему немамо могућност за постојање два решења, што је био случај у свим осталим конструктивним задацима које смо до тада радили.

Задатак 9. Конструисати праву p , ако су дате кружнице k_1 и k_2 , при чему важе следећи услови:

$$k_1 \cap k_2 = \{A, B\}, \quad A \in p, \quad p \cap k_1 = \{A, M\}, \quad p \cap k_2 = \{A, N\}, \quad |AM| = |AN|.$$

Решење

Анализу су ученици, у обе групе, сами радили на табли и она је приказана на слици 19. Оно што је важно да напоменем је то да су ученици у експерименталној групи слику на пројектору добили тек када је извршена анализа од стране ученика на табли.



Слика 19.

Изглед завршене конструкције приказан је на слици 20. Проблем који се јавио у експерименталној групи је био техничког типа, пошто се код њих радило на „белој“ табли, па је било веома тешко да конструкција буде прецизна.

При исписивању доказа, овог пута није било потешкоћа ни у једној групи, и он је изгледао овако:

$$I_A(O_2) = O_2'$$

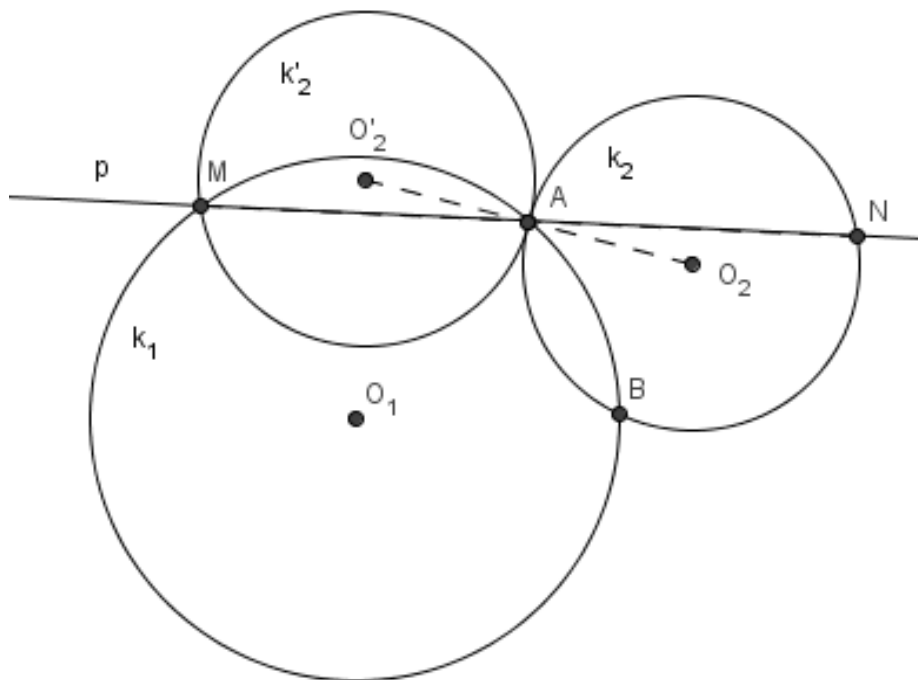
$$I_A(k_2) = k_2'$$

$$k_2' \cap k_1 = \{M\}$$

$$I_A(M) = N$$

$$|AM| \cong |AN|$$

$$M, N \in p$$

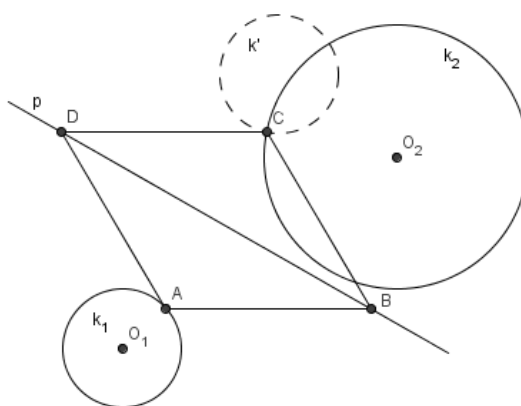


Слика 20.

Задатак 10. Конструисати ромб $ABCD$, ако су дате кружнице k_1, k_2 , права p , и дужина стране a , при чему је $A \in k_1$, $C \in k_2$, $B, D \in p$.

Решење

Анализу су ученици радили самостално и она је приказана на слици 21.

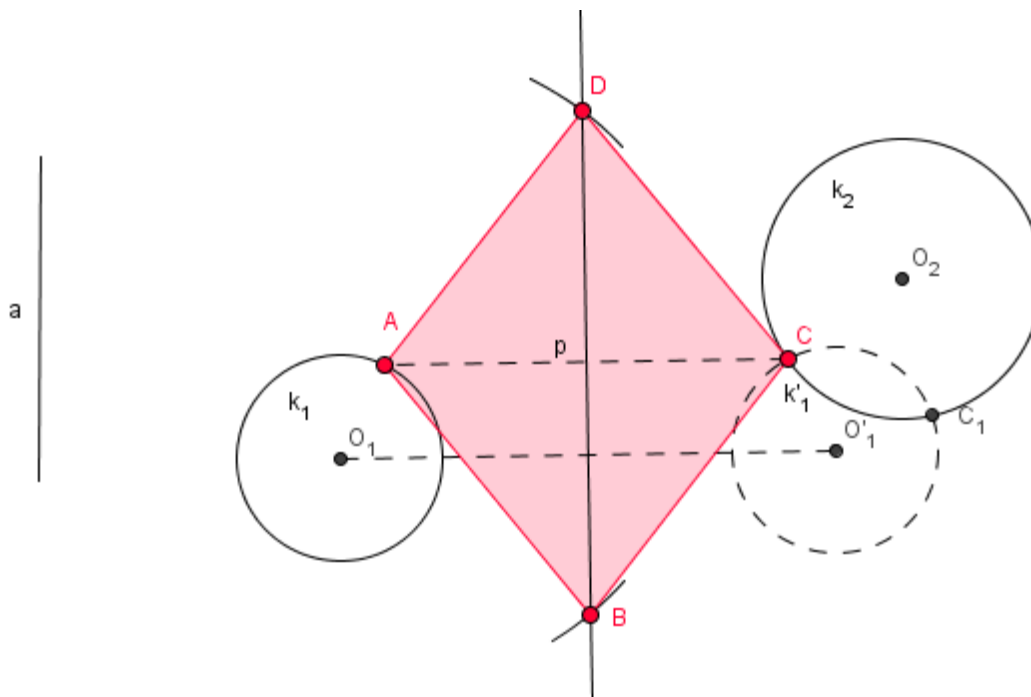


Слика 21.

Након што су ученици приметили да је

$$I_p(A) = C$$

и да тачку C можемо добити у пресеку кружница k_2 и k_1' , где је $I_p(k_1) = k_1'$, конструкција (Слика 22), није представљала већи проблем. Проблем се јавио код неких ученика у одељењу, који нису разумели да се дужина странице a узима произвољно, као ни то како треба да је конструишу. Више таквих недоумица је било у контролној групи.



Слика 22.

Проблем који се јавио, у исписивању доказа

$$I_p(O_2) = O_2'$$

$$I_p(k_1) = k_1'$$

$$k_1' \cap k_2 = \{C, C_1\}$$

$$I_p(C) = A$$

$$r(A, r = a) \cap p = \{B, D\}$$

био је у последњем кораку ($r(A, r = a) \cap p = \{B, D\}$.)

Анимацијом смо утврдили број могућих решења у експерименталном одељењу и по њиховим реакцијама, могла сам да закључим да им се веома свидело то што на овај начин могу да виде шта могу добити у зависности од положаја објеката и елемената који су дати.

Задатак који сам дала за домаћи очекивала сам да већина уради, а управо њега сам дала да би добили рутину у пресликавању осном и централном симетријом, што ће им користити при решавању и тежих задатака.

Задатак 11. $I_O \circ I_m \circ I_B(ABCD)$

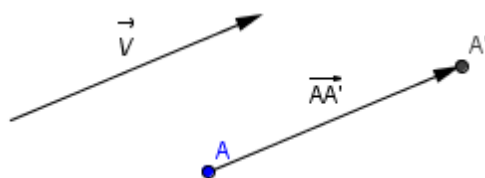
2.3.4 Четврти час–транслација

На овом часу обрађен је теоријски део који се састоји из две дефиниције и две теореме, којима сам ученицима објаснила појам транслације, а затим смо то применили у задацима. Урадили смо три задатка:

1. Транслирати шестоугао ABCDEF за произвољан вектор $\vec{v}$.
2. $I_p \circ T_{\vec{EB}} \circ I_C(ABCDE)$
3. Конструисати паралелограм, ако су дате тачке A, B и кружница k , тако да су $C, D \in k$.

Првим и другим задатком предвиђено је да ученици увежбају принцип транслације, односно, да повежу већ постојеће знање из изометријских трансформација, које смо до сада радили, са новим градивом. Трећи задатак је конструктивног типа и један од уобичајених задатака који се раде када се обрађује транслација.

Дефиниција 1. Нека је у равни α дат вектор $\vec{v}$. Пресликавање које свакој тачки A равни α , придружује тачку A', такву да је $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$, назива се **транслација**. (Слика 23)



Слика23.

$$T_{\vec{v}}(A) = A', \quad \overrightarrow{AA'} = \vec{v}$$

Теорема 1. Транслација је изометрија.

Доказ

Овом теоремом треба да покажемо да ако транслирамо дуж $|AB|$ за вектор $\vec{v}$ и ако је њена слика $|A'B'|$ тј.

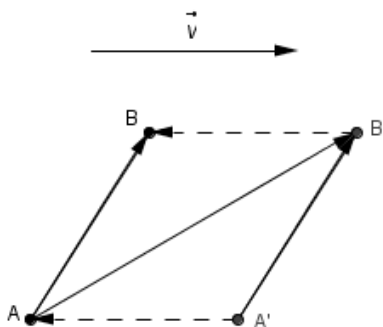
$$T_{\vec{v}}(|AB|) = |A'B'|$$

онда је

$$|AB| \cong |A'B'|$$

Да би ово доказали посматрајмо одговарајуће векторе са слике 24.

На основу дефиниције транслације, знамо да је $\overrightarrow{AA'} = \vec{v} = \overrightarrow{BB'}$



Слика 24.

Уочимо сада, да је:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AB'} - \vec{v}$$

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB'} - \vec{v}$$

Када погледамо ове две једначине, можемо уочити да је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Како важи да ако су два вектора једнака, онда им је исти правац, смер и интензитет, те закључујемо да је $|AB| \cong |A'B'|$.

Дефиниција 2. За фигуру $\mathcal{F}'$ кажемо да је транслаторна слика фигуре $\mathcal{F}$ за вектор $\vec{v}$, ако свакој тачки M фигуре $\mathcal{F}$ одговара тачка M' фигуре $\mathcal{F}'$, тако да је $T_{\vec{v}}(M) = M'$, и обрнуто, свакој тачки N' фигуре $\mathcal{F}'$ одговара тачка N фигуре $\mathcal{F}$, тако да је $T_{\vec{v}}(N') = N$.

Ова дефиниција је веома важна и доста се користи у задацима, тако да сам ученицима скренула пажњу на то.

Теорема 2. Транслација је директна изометрија.

Задатак 12. Транслирати шестоугао ABCDEF за произвољан вектор $\vec{v}$.

Решење

Приликом решавања овог задатка није било проблема ни у једној групи. Слика пресликавања приказана је на слици 25, а дат је и поступак пресликавања, симболима.

$$T_{\vec{v}}(A) = A'$$

$$T_{\vec{v}}(B) = B'$$

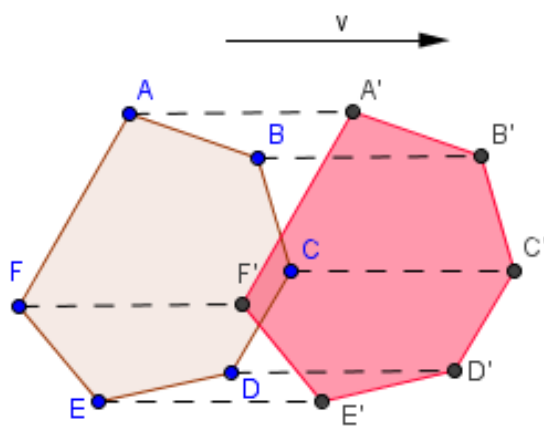
$$T_{\vec{v}}(C) = C'$$

$$T_{\vec{v}}(D) = D'$$

$$T_{\vec{v}}(E) = E'$$

$$T_{\vec{v}}(F) = F'$$

$$T_{\vec{v}}(ABCDEF) = A'B'C'D'E'F'$$



Слика 25.

Задатак 13. $I_p \circ T_{\vec{EB}} \circ I_C(ABCDE)$

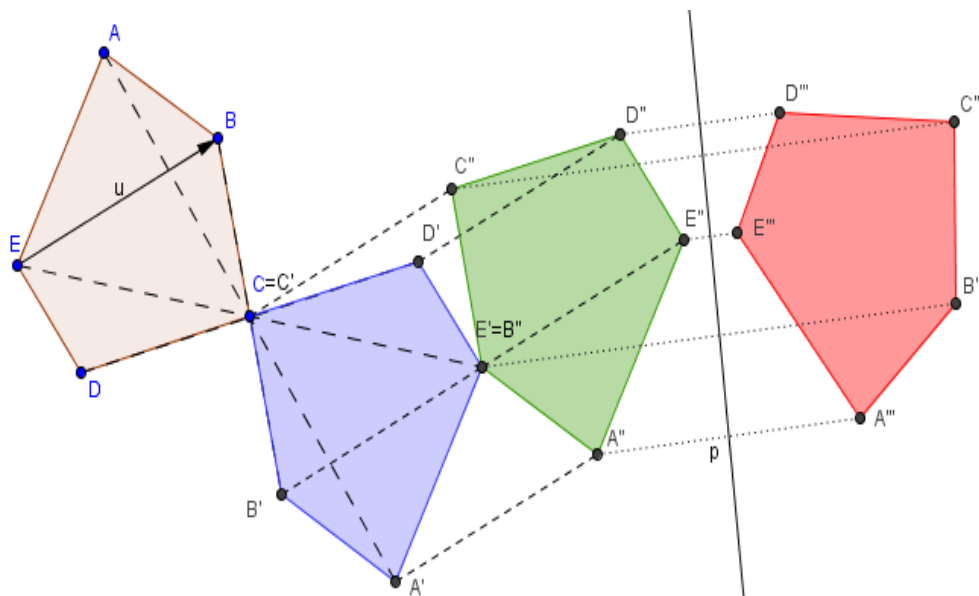
Решење

Овим задатком повезујемо све изометријске трансформације које смо до сада радили. Проблем у контролној групи при изради овог задатка је лоша организација табле, односно свеске. У експерименталној групи јавио се исти проблем, међутим, то се догодило због димензија „беле“ табле, које су доста мање, па је ученик који је радио задатак на табли морао да нацрта петоугао мањих димензија, што је смањило видљивост и прегледност задатка.

Доказ је дат симболима, уз моју помоћ.

$$I_p \circ T_{\overline{EB}} \circ I_C(ABCDE) = I_p \left(T_{\overline{EB}}(I_C(ABCDE)) \right) = I_p(T_{\overline{EB}}(A'B'C'D'E')) = \\ I_p(A''B''C''D''E'') = A'''B'''C'''D'''E'''$$

Пресликавање су у обе групе ученици урадили самостално (Слика 26).

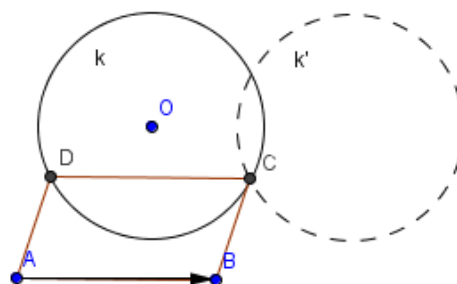


Слика 26.

Задатак 14. Конструисати паралелограм, ако су дате тачке A, B и кружница k , тако да су $C, D \in k$.

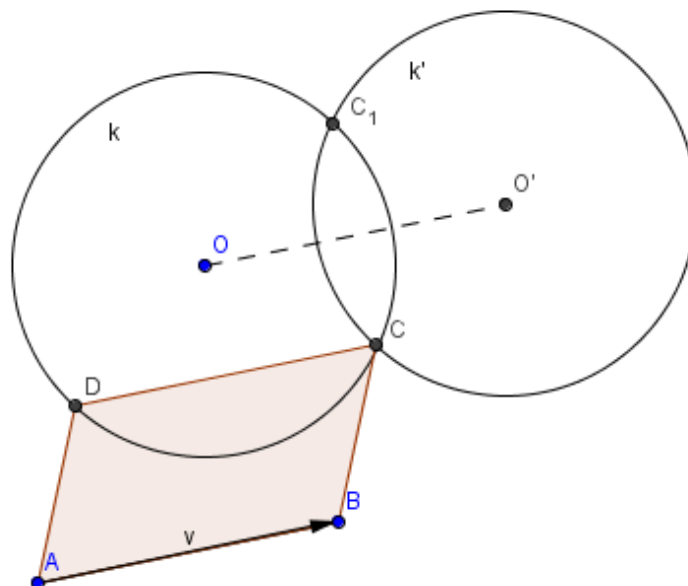
Решење

У контролној групи цео задатак сам радила ја, а у експерименталној групи сам урадила скицу за анализу задатка (Слика 27.), а један од ученика је урадио конструкцију на табли. Разлог зашто сам решила да у контролној групи урадим задатак је био тај што сам видела неразумеваше задатка код ученика, док је у експерименталној групи, након убрзаног приказа конструкције путем пројектора, било добровољаца да ураде овај задатак на табли.



Слика 27.

Слика 28. представља изглед завршене конструкције.



Слика 28.

У исписивању доказа

$$T_{\overline{AB}}(O) = O'$$

$$T_{\overline{AB}}(k) = k'$$

$$k' \cap k = \{C, C_1\}$$

$$T_{\overline{BA}}(C) = D,$$

код експерименталне групе није било проблема, чак шта више, ученик који је радио задатак на табли сам је уочио да ако узмемо да је интензитет вектора $\overline{AB}$, већи од пречника дате кружнице, нећемо добити пресечне тачке кружница k' и k , те нећемо ни имати решење. Тиме је уједно урађена и дискусија решења.

На овом часу нисам задала домаћи задатак ни у једној групи, јер су се обрађивали предвиђени задаци за овај час, до самог краја часа.

2.3.5 Пети час–ротација

На часу смо обрадили две дефиниције, две теореме и дала сам неколико примера ротације, да би ученици лакше савладали тај појам. Урадили смо и три задатка:

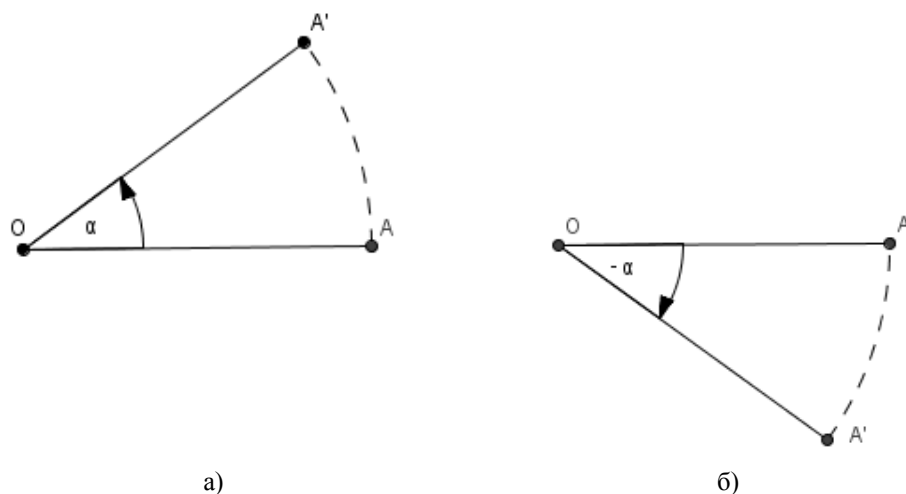
1. Ротирати произвољан четвороугао $ABCD$ у негативном смеру око тачке O , за произвољан угао α .
2. $I_M \circ T_{\overline{AB}} \circ R_{A, -45^\circ}(ABCD)$
3. Конструисати једнакостранични $\triangle ABC$, ако су дате преве p, q, r , и при томе важи: $p \parallel q \parallel r, A \in p, B \in q, C \in r$.

Први и други задатак су изабрани, као и увек до сада када се обрађује нова наставна јединица, да би ученици увежбали принципе и правила ротације и да би повезали ново градиво са претходним. У трећем задатку, поред правила ротације, користимо и својства једнакостраничног троугла, а задатак је специфичан и због тога што су дате праве паралелне.

Дефиниција 1. Ако је дата равна фигура $\mathcal{F}$, тачка O и оријентисани угао $\vec{\varphi}$ и ако је фигура $\mathcal{F}'$ скуп свих тачака у које се ротацијом $R_{O, \vec{\varphi}}$ пресликавају тачке фигуре $\mathcal{F}$, тада се каже да се фигура $\mathcal{F}$ ротацијом $R_{O, \vec{\varphi}}$ пресликава на фигуру $\mathcal{F}'$ и означава се са $R_{O, \vec{\varphi}}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$.

У зависности од оријентације угла, имамо ротацију у позитивном и у негативном смеру.

- Ако ротацију изводимо у смеру супротном кретању казаљке на сату, кажемо да ротацију изводимо у позитивном смеру (Слика 27. а)).
- Ако ротацију изводимо у смеру кретања казаљке на сату, кажемо да ротацију изводимо у негативном смеру (Слика 29. б)).



Слика 29.

Уочимо да при ротацији тачке A за угао $\vec{\alpha}$, око тачке O добијамо слику тачке A' , тј.

$$R_{O, \vec{\alpha}}(A) = A'$$

и важи:

$$\sphericalangle AOA' = \alpha$$

$$|OA| \cong |OA'|$$

Теорема 1. *Ротација је изометрија.*

Доказ

У овом доказу треба да покажемо да ако је

$$R_{O, \vec{\alpha}}(|AB|) = |A'B'|$$

онда важи

$$|AB| = |A'B'|.$$

Да би ово доказали посматрајмо следеће троуглове (Слика 30.):

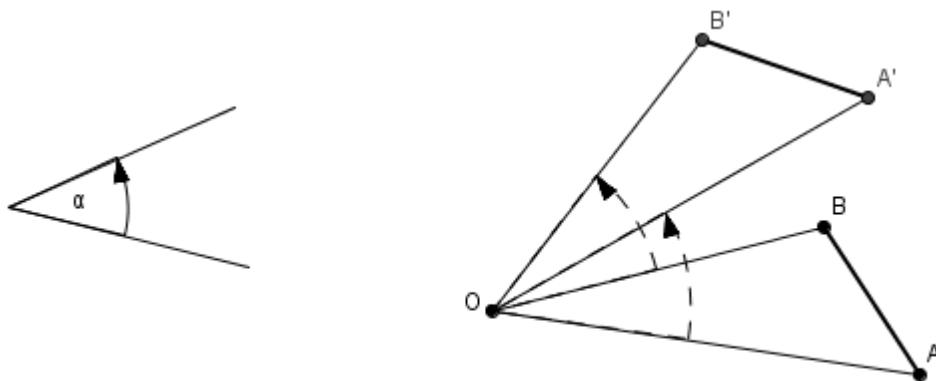
$\triangle OAB$ и $\triangle OA'B'$

$|OA| \cong |OA'|$ -ово важи из услова ротације ($R_{O, \vec{\alpha}}(A) = A'$)

$|OB| \cong |OB'|$ -такође, важи из услова ротације ($R_{O, \vec{\alpha}}(B) = B'$)

$\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle A'OB' = \alpha + \sphericalangle BOA'$.

На основу става СУС, из овога следи да је $\triangle OAB$ подударан са $\triangle OA'B'$, што значи да су му све странице подударне, па је и $|AB| = |A'B'|$.

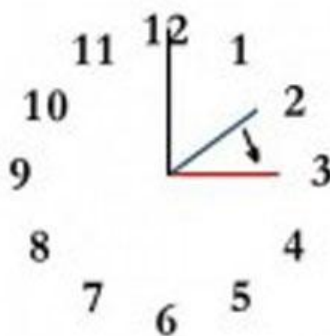


Слика 30.

Дефиниција 2. За фигуру $\mathcal{F}$, кажемо да се пресликава на фигуру $\mathcal{F}'$ ротацијом $R_{O,\vec{\alpha}}$ око тачке O , за угао α , ако свакој тачки M фигуре $\mathcal{F}$ одговара тачка M' фигуре $\mathcal{F}'$, тако да је $R_{O,\vec{\alpha}}(M) = M'$, и обрнуто.

Теорема 2. Ротација је директна изометрија.

Да би ученицима приближила појам ротације, појаснила сам је на примеру казаљке на сату (Слика 31). Ако центар сата посматрамо као центар симетрије, онда можемо уочити да је казаљка са 2 померена на 3 ротацијом за угао $-\pi/6$.



Слика 31.

Такође кретање Земље око Сунца можемо посматрати као ротацију, ако узмемо да је путања по којој се Земља креће у облику кружнице.

Из ових примера видимо да нам је за ротацију потребан објекат који ротирамо, центар ротације (око чега ротирамо објекат) и оријентисани угао, за чију вредност ротирамо објекат.

Задатак 15. Ротирати произвољан четвороугао $ABCD$ у негативном смеру око тачке O , за произвољан угао α .

Решење

Проблем, у обе групе, при решавању задатка, настао је јер нису сви ученици знали да оријентишу угао. Решење овог задатка дато је симболима и сликом пресликавања (Слика 32).

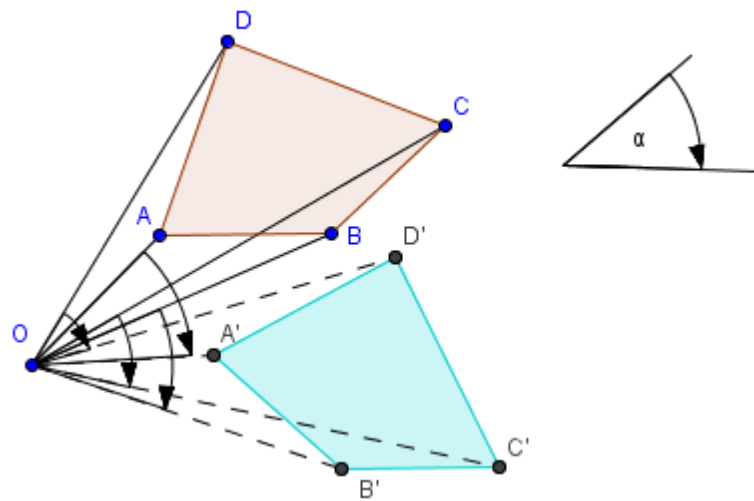
$$R_{O,\vec{\alpha}}(A) = A'$$

$$R_{O,\vec{\alpha}}(B) = B'$$

$$R_{O,\vec{\alpha}}(C) = C'$$

$$R_{O,\vec{\alpha}}(D) = D'$$

$$R_{O,\vec{\alpha}}(ABCD) = A'B'C'D'$$

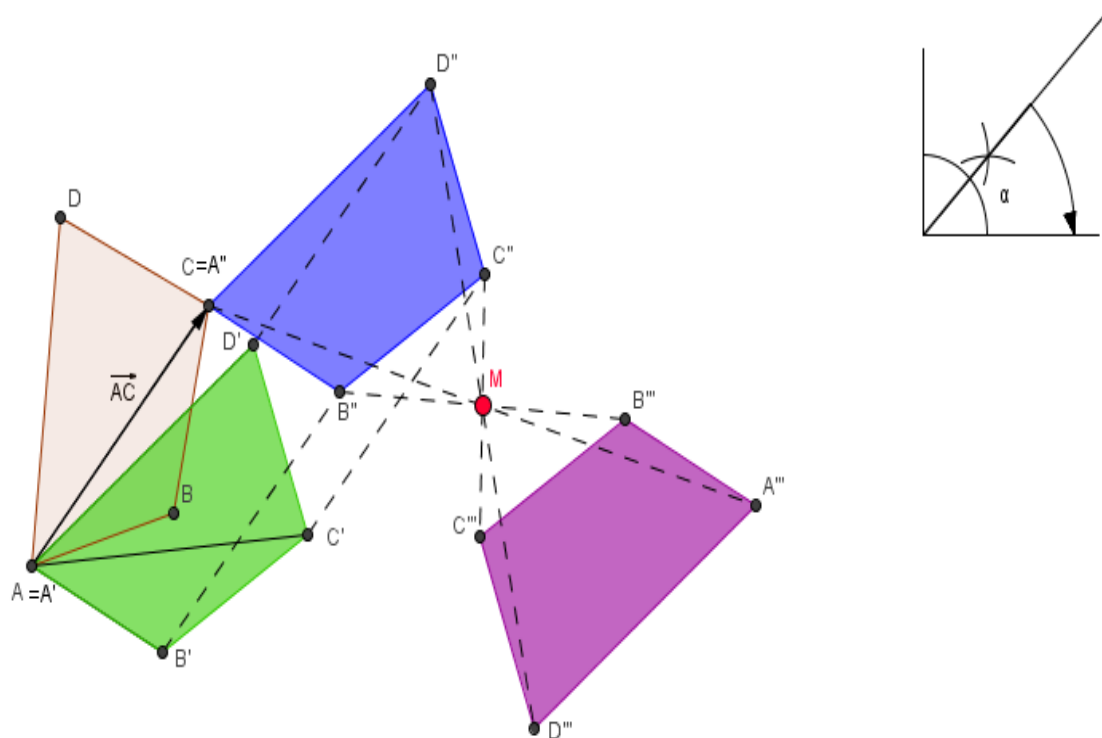


Слика 32.

Задатак 16. $I_M \circ T_{\overline{AB}} \circ R_{A, -45^\circ}(ABCD)$

Решење

Приликом решавања овог задатка није било већих потешкоћа, осим што је је неким ученицима требало подсећање како се врши пресликавање централном симетријом. То указује на то да ученици не обнављају градиво редовно. Решење овог задатка дато је математичким симболима и цртежом (Слика 33).



Слика 33.

$$I_M \circ T_{\overline{AB}} \circ R_{A, -45^\circ}(ABCD) = I_M \left(T_{\overline{AB}} \left(R_{A, -45^\circ}(ABCD) \right) \right) = I_M \left(T_{\overline{AB}}(A'B'C'D') \right) \\ = I_M(A''B''C''D'') = A'''B'''C'''D'''$$

Задатак 18. Конструисати једнакостранични $\triangle ABC$, ако су дате преве p, q, r , ако важе следећи услови: $p \parallel q \parallel r, A \in p, B \in q, C \in r$.

Решење

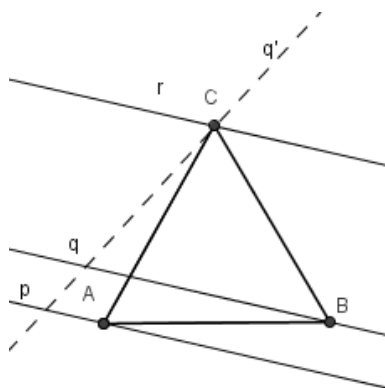
Анализу овог задатка (Слика 34.) сам ја урадила, пошто ученицима није било јасно ни како треба да изгледа слика анализе, а ни од чега да крену.

Оно што је битно нагласити јесте то да пошто су праве паралелне, онда имамо бесконачно много троуглова који задовољавају почетне услове. Приметимо да троугао по овим правима може да се креће као по шинама (Слика 35.) и на тај начин добијамо бесконачно много решења. Из тога следи да нпр. тачку A можемо произвољно изабрати на правој p . Уочимо да важи

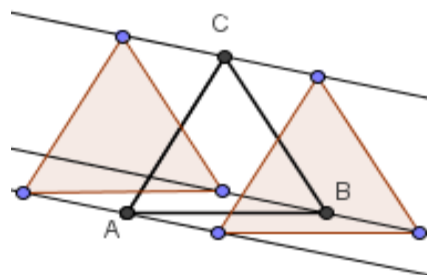
$$R_{A, 60^\circ}(B) = C$$

То значи да тачку C можемо добити у пресеку праве r са правом q' , где је

$$q' = R_{A, 60^\circ}(q).$$

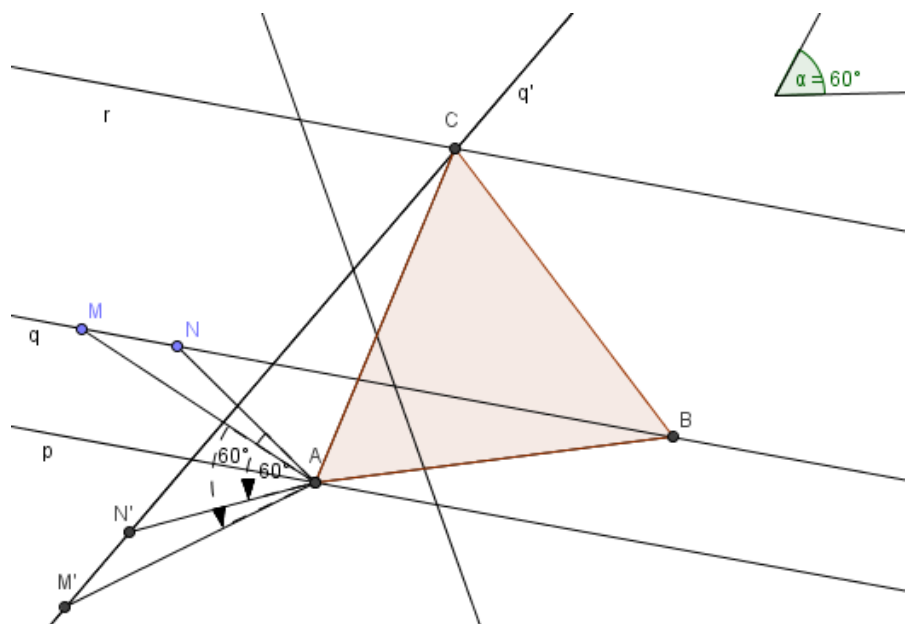


Слика 34.



Слика 35.

Конструкцију (Слика 36.) на табли су радили ученици, у обе групе. Проблем који се јавио, опет је био због оријентације угла.



Слика 36.

Исписивање доказа није представљало проблем за ученике.

$$\begin{aligned}
 M, N &\in q \\
 R_{A, 60^\circ}(M) &= M' \\
 R_{A, 60^\circ}(N) &= N' \\
 R_{A, 60^\circ}(q) &= q' \\
 q' \cap r &= \{C\} \\
 R_{A, -60^\circ}(C) &= B
 \end{aligned}$$

За домаћи задатак сам ученицима задала два задатка за које сам очекивала да ће већина решити јер смо сличне задатке радили на часу.

- 1) $T_{\vec{v}} \circ R_{A, -75^\circ}(ABC)$
- 2) Конструисати квадрат $ABCD$, ако су дате праве p и q , и при томе важи:
 $p \parallel q, B \in p, D \in q$.

2.3.6 Шести час–увежбавање

На овом часу смо увежбавали оно што смо радили на претходним часовима. Урадили смо два задатка, први из ротације за који се може рећи да је

сличан задатку са претходног часа (Задатак 18.), а други задатак се решава помоћу translације, а изабрала сам га јер је другачији од задатака које смо радили везано за translацију.

Задатак 19. Конструисати једнакостранични $\triangle ABC$, ако су дате концентричне кружнице k_1, k_2, k_3 , при чему је $A \in k_1, B \in k_2, C \in k_3$.

Решење

Ученици су самостално радили задатак на табли, јер су увидели сличност са претходним задатком, и при томе нису имали потешкоћа. Такође су приметили да на исти начин, као у претходном задатку, имамо бесконачно много решења, и да једно теме троугла можемо произвољно изабрати.

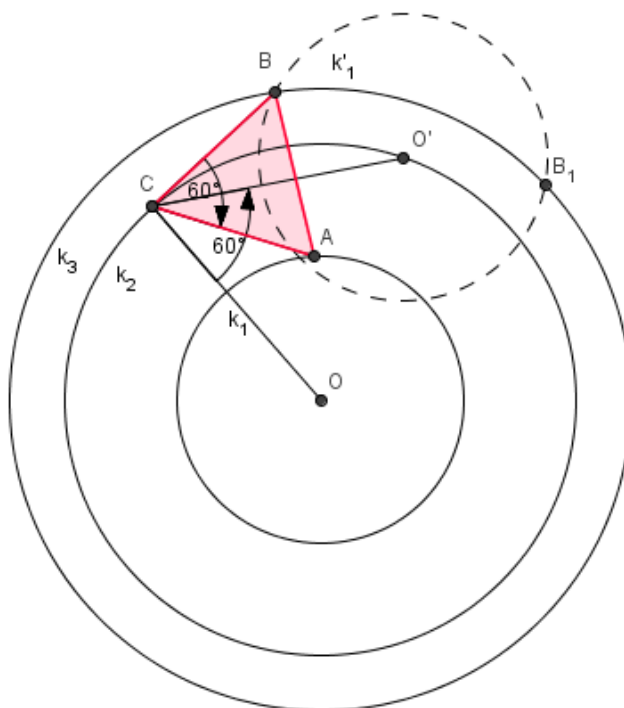
Конструисање (Слика 37.) је прошло без проблема, уз моје мање сугестије, док при запису доказа није било проблема у контролној групи, а у експерименталној групи су постојале недоумице око оријентације угла.

$$R_{C,60^\circ}(O) = O'$$

$$R_{C,60^\circ}(k_1) = k_1'$$

$$k_1' \cap k_3 = \{B, B_1\}$$

$$R_{C,-60^\circ}(B) = A$$



Слика 37.

Задатак 20. Конструисати дуж АВ, ако је дат $\sphericalangle xOy$ и вектор $\vec{v}$, при чему важи:
 $A \in x, B \in y$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Решење

У контролној групи овај задатак сам ја урадила, док сам у експерименталној групи урадила анализу задатка и показала им убрзану конструкцију, а онда је ученик на табли радио конструкцију (Слика 38.) и доказ.

Оно што је требало уочити је да пошто је

$$\overrightarrow{AB} = \vec{v}$$

онда је

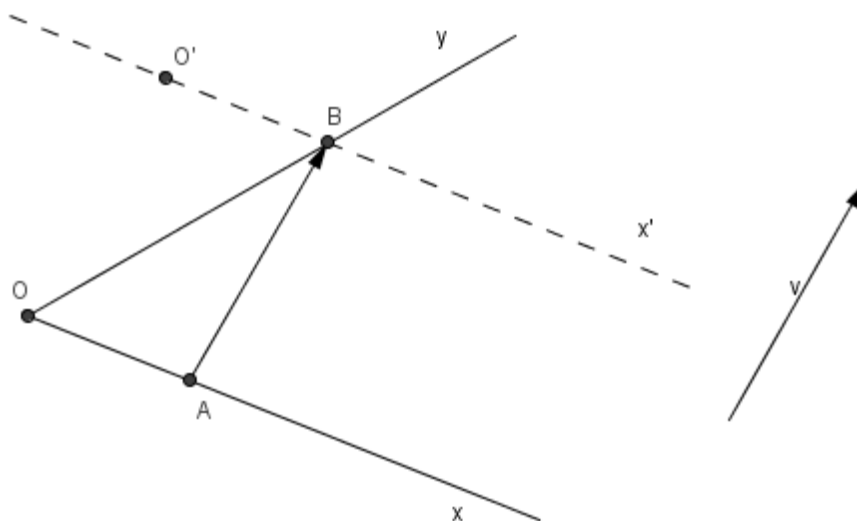
$$T_{\vec{v}}(A) = B$$

Тада, тачку В можемо добити у пресеку полуправе у и праве x' , где је

$$x' = T_{\vec{v}}(x)$$

Тачку А затим добијамо из

$$T_{-\vec{v}}(B) = A$$



Слика 38.

За домаћи задатак сам задала један задатак, а евентуални проблеми могу настати уколико ученици не препознају коју изометријску трансформацију треба да примене.

Задатак 21. Дате су праве a, b, c и дуж d . Конструисати ромб ABCD, такав да
 $A \in a, B \in b, C \in c$, при чему је $|CD| = d$.

2.3.7 Седми час–увежбавање

На овом часу су урађена два задатка, први из ротације, а други из транслагације. Други задатак је можда мало компликованији, али подстаћи ће боље ученике да раде и видећемо колико ће успеха имати у решавању, док је први задатак сличан задацима којима смо радили, али има и нових елемената.

Задатак 22. Конструисати квадрат ABCD, ако су дате: тачка O (пресек дијагонала), кружница k и права p , при чему је $A \in k, B \in p$.

Решење

Овај задатак, на табли, су радили ученици, у обе групе. До забуне је дошло код неких ученика јер су покушали да реше задатак примењујући централну симетрију, тј. хтели су да кружницу k пресликају у односу на тачку O. Када је ова дилема отклоњена није било проблема са конструкцијом (Слика 39.), ни са доказом.

$$R_{O,90^\circ}(S) = S'$$

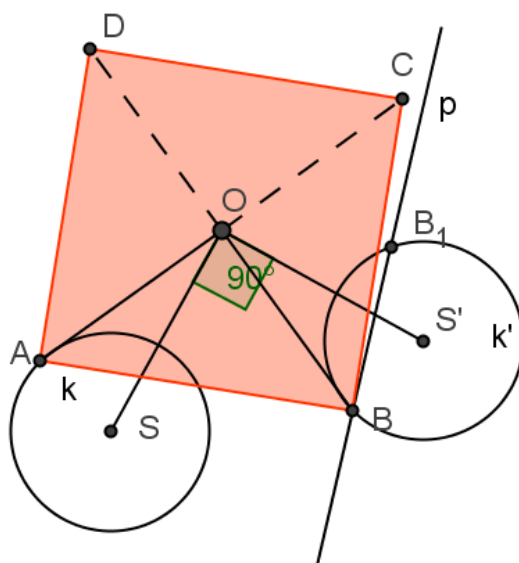
$$R_{O,90^\circ}(k) = k'$$

$$k' \cap p = \{B, B_1\}$$

$$R_{O,-90^\circ}(B) = A$$

$$I_O(B) = D$$

$$I_O(A) = C$$



Слика 39.

Када је ученик из експерименталне групе завршио задатак на табли и констатовао највише два могућа решења овог задатка, приказала сам им уз помоћ анимације како то изгледа.

Задатак 23. Дате су кружнице k_1, k_2 и права p . Конструисати праву p , такву да је $p \parallel q, p \cap k_1 = \{A, B\}, p \cap k_2 = \{C, D\}$ и $|AB| = |CD|$.

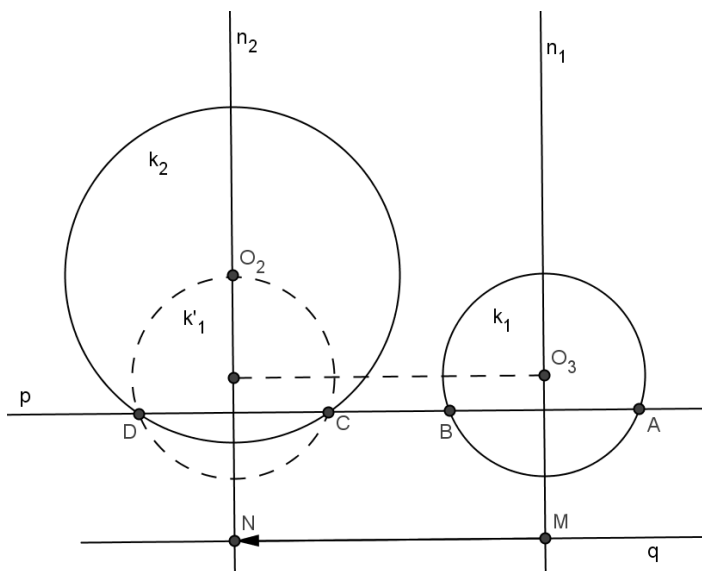
Решење

Дала сам ученицима 5 минута да пробају сами да ураде овај задатак. За то време сам их обилазила и видела да у контролној групи постоје три ученика која су била близу решења, док је у експерименталној групи један ученик био на том путу.

Задатке су на табли, у обе групе радили ученици који су успели да реше задатак или су били близу решења. Ученици су извршили следећу анализу:

Нека је тачка N , тачка која је добијена у пресеку нормале (n_2) из тачке O_2 , на праву q , и праве q . На исти начин, у односу на O_2 , добијамо тачку M . Тако добијамо вектор транслације $\overrightarrow{MN}$ па када за тај вектор транслирамо кружницу k_1 , у пресеку транслиране кружнице k_1' и k_2 , добићемо тачке C и D .

Овим је уједно исписан и доказ, а конструкција је приказана на слици 40.



Слика 40.

Ученицима сам задала један задатак за домаћи који је сличан задатку који смо радили на часу, тако да не очекујем веће проблеме при његовом решавању.

Задатак 24. Конструисати квадрат ABCD, ако су дате права p , кружница k и тачка O , која је пресек дијагонала, и при томе је $A \in k$ и $B \in p$.

2.3.8 Осми час–увежбавање

На овом часу урађена су три задатка, први из ротације, други из translације, а трећи из осне симетрије. Сва три задатка сам изабрала зато што се у њима примењује нешто ново у односу на већ рађене задатке. У сваком задатку је потребно уочити неке појединости пре него што се примени одређена изометријска трансформација.

Задатак 25. Конструисати квадрат, ако су дате тачке P и O , где је O пресек дијагонала квадрата, а крајеви странице AB удаљени су од дате тачке P за дате дужи m и n .

Решење

У обе групе ученици су радили ове задатке уз моју помоћ. Било је потребно уочити да, ако се око тачке P опишу кругови k_1 и k_2 полупречника m и n , онда ће тачке A и B припадати тим круговима. Можемо приметити да је

$$R_{O,90^\circ}(A) = B$$

па тачку B можемо добити у пресеку кружница k_2 и k_1' , где је

$$R_{O,90^\circ}(k_1) = k_1'$$

Конструкцију (Слика 41.) су ученици радили самостално на табли, док је појединим ученицима у одељењу била потрабна помоћ да би извршили конструкцију.

Ученици су сами урадили доказ, без моје помоћи, као и дискусију решења, јер су уочили да постојањем тачака B и B_1 имамо два решења, а затим сам у експерименталној групи показала могућа решења уз помоћ анимације.

$$R_{O,90^\circ}(P) = P'$$

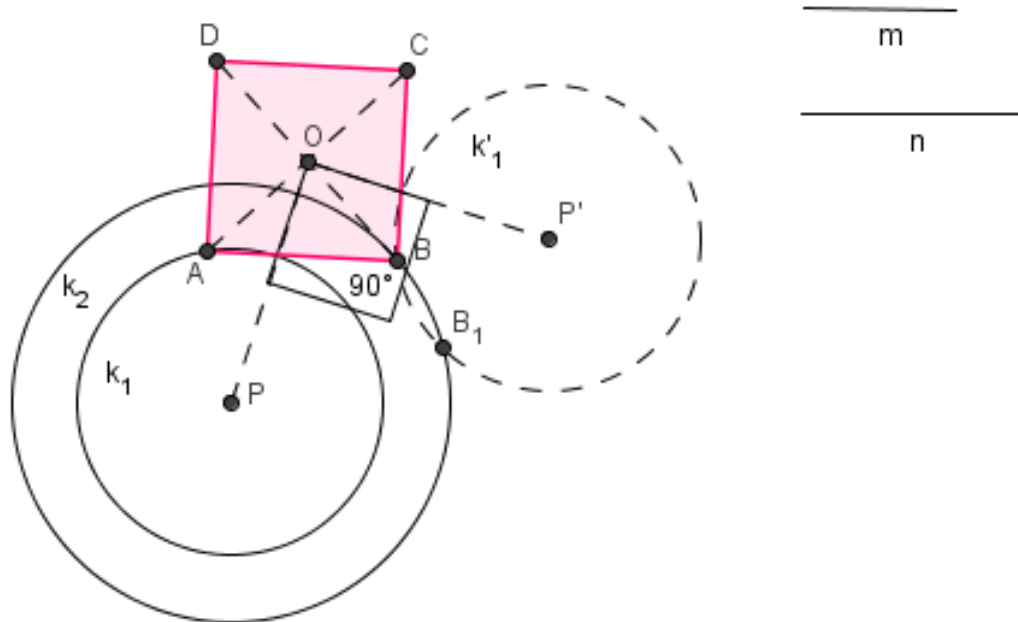
$$R_{O,90^\circ}(k_1) = k_1'$$

$$k_1' \cap k_2 = \{B, B_1\}$$

$$R_{O,90^\circ}(B) = A$$

$$I_O(A) = C$$

$$I_0(B) = D$$



Слика 41.

Задатак 26. Дате су кружнице k_1, k_2 , права p и дуж m . Конструисати праву q , $q \parallel p$, која сече кружнице у тачкама А и В, $A \in k_1$, $B \in k_2$, тако да је $|AB|=m$.

Решение

Анализу овог задатка сам ја урадила, сматрајући да није тако једноставан, јер се ученици нису до сада сусрели са оваквом врстом задатка. Требало је уочити да ако дужину дужи m нанесемо на праву p , од тачке М до тачке N, онда добијамо вектор $\vec{m}$, који има дужину дужи m , правац праве p , а смер смо изабрали у десну страну. Пошто је $q \parallel p$, то значи да је

$$T_{\vec{m}}(A)=B$$

Из тога следи да тачку В можемо добити у пресеку кружница k_2 и k_1 , где је

$$k_1' = T_{\vec{m}}(k_1)$$

Конструкцију (Слика 42.) су ученици сами радили на табли и у својим свескама, и није било већих проблема ни при њеној изради, ни при исписивању доказа.

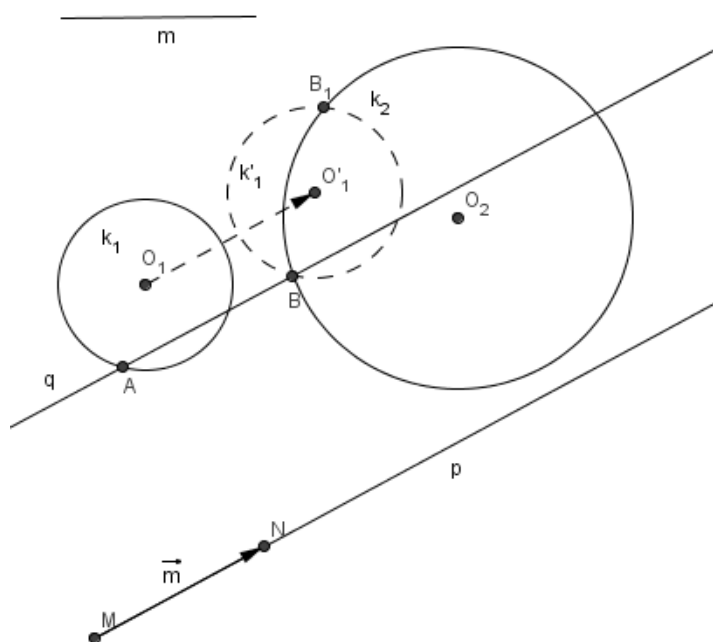
$$T_{\vec{m}}(O_1) = O_1,$$

$$T_{\vec{m}}(k_1) = k_1,$$

$$k_1' \cap k_2 = \{B, B_1\}$$

$$T_{\vec{m}}(B) = A$$

$$A, B \in q$$



Слика 42.

Задатак 27. Дате су тачке A, B и права p . Конструисати праве a и b , тако да је $A \in a, B \in b$ и да права p полови угао који образују a и b .

Решење

Ученици који су овај задатак радили на табли, лепо су се снашли и приметили да задатак има решење ако су тачке A и B са супротних страна праве p . Оно што је било важно да примете је да пошто права p полови угао, можемо је посматрати као осу симетрије. Из тога закључујемо да ће се тачка B' , која је осно симетрична слика тачке B , у односу на праву p , налазити на правој a . Ученица из контролне групе је то сама закључила, док је ученик из експерименталне групе до тог закључка дошао уз моју помоћ.

Конструкција(Слика 43.) и исписивање доказа нису представљали проблем.

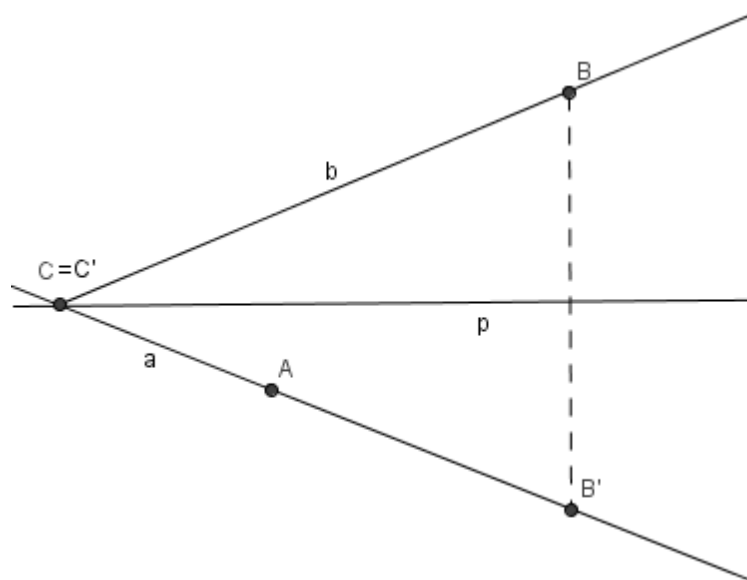
$$I_p(B) = B'$$

$$A, B' \in a$$

$$a \cap p = \{C\}$$

$$I_p(C) = C' = C$$

$$C, B \in b$$



Слика 43.

За домаћи сам ученицима задала један задатак који је сличан задатку који смо радили на овом часу, тако да не очкујем проблеме приликом његовог решавања.

Задатак 28. Конструисати једнакостранични $\triangle ABC$, ако су дате концентричне кружнице k_1 , k_2 , и тачка A , уз услов да је $B \in k_1$, $C \in k_2$.

2.3.9 Девети час–увежбавање

Овај час је био одржан у суботу (дан предвиђен за одрађивање часова), па је био скраћен на 30 минута. Пошто је ово био последњи час пред контролни задатак, у претходном договору са ученицима, испланиран је тако да на њему ученици постављају питања у вези градива које смо обрадили и да урадимо неке делове задатака који им нису били јасни.

2.3.10 Десети час–контролни задатак

Након девет часова обраде наставне теме „Изометријске трансформације“, уследила је провера знања ученика у обе групе. Провера знања је организована тако што су ученици сваке групе подељени у четири подгрупе. Тиме смо остварили услове да сваки ученик, сваке подгрупе, самостално решава задатке. Задаци су идентични за оба одељења, да би се што боље могло направити поређење ових група.

Ово су примери контролног задатка за све четири подгрупе:

A

- 1) $R_{O,45^\circ} \circ I_p(ABCD)$
- 2) Конструисати правоугаоник ABCD, ако је дата кружница k , права p , тачка O (пресек дијагонала) и дужина странице b при чему је $A \in k, C \in p$.
- 3) Конструисати једнакокраки тругао ABC, ако је дата тачка C , угао γ код темена C и праве p и q , при чему је $p \parallel q, A \in p, B \in q$.

B

- 1) $T_{\overline{AB}}(ABCD) \circ R_{S,60^\circ}$
- 2) Конструисати једнакокраки тругао ABC, ако је дата права p и на њој тачка C , и праве q и r , тако да је $A \in q, B \in r, h_c \subset p$.
- 3) Конструисати квадрат PQRS чија темена Q и S припадају двема датим правима q и s , и коме је дато теме R .

C

- 1) $R_{S,-30^\circ} \circ I_A(ABCD)$
- 2) Конструисати ромб такав да једна његова дијагонала буде једнака датој дужи d и припада датој правој p , а друга два темена припадају двема датим кружницама k_1 и k_2 .
- 3) Конструисати једнакостранични тругао ABC, ако је дата тачка C и праве p и q , тако да је $p \parallel q, A \in p, B \in q$.

D

- 1) $I_0 \circ R_{M, -75^\circ}(ABCD)$
- 2) Конструисати паралелограм ABCD, ако су дате тачке A, B, кружница k и права p , при чему је $C \in k, D \in p$.
- 3) Конструисати квадрат ABCD, ако је дата тачка C и концентричне кружнице k_1, k_2, k_3 , при чему је $B \in k_1, A \in k_2, D \in k_3$.

Први задатак је композиција два пресликавања, од којих је једно пресликавање ротација, а друго је осна симетрија, централна симетрија или транслација. Други задатак је, зависно од подгрупе, из осне симетрије, централне симетрије или транслације, док је трећи задатак у свакој подгрупи био везан за ротацију.

Подгрупа A:

Други задатак се решава применом централне симетрије. Задатак је сличан задатку 6, али отежавајућа околност је што се овде ради о правоугаонику, па ће можда бити проблем неким ученицима да наношењем странице b конструишу преостала два темена правоугаоника. Трећи задатак је сличан задатку 18, чак шта више, овде је олакшавајућа околност то што је теме C дато, међутим може доћи до грешака при наношењу угла.

Подгрупа B:

Други задатак се решава применом осне симетрије и сличан је задатку 2, тако да нисам очекивала неке веће потешкоће приликом његовог решавања. Трећи задатак сличан је задатку 22 и не би требало да буде проблема при решавању, ако се уради адекватна анализа задатка.

Подгрупа C

Радили смо сличне задатке, другом задатку у овој подгрупи, али проблеми могу настати при конструисању темена која леже на правој p . Познавањем особина ромба, овај задатак не би требало да представља проблем. Трећи задатак из ове подгрупе сличан је трећем задатку из подгрупе A. Разлика је што овде имамо уместо угла γ баш угао од 60° , па ћемо тиме добити једнакостранични троугао.

Подгрупа D

Други задатак сличан је задатку 14. са часа и не би требало да буде већих проблема ако ученици схвате да се задатак решава применом транслације. Трећи

задатак је сличан задатку 19, са часа, али је сада у питању квадрат и добром анализом задатка не би требало да буде проблема при његовој изради.

Што се тиче првог задатка, сличне примере смо доста вежбали и могући проблеми су оријентација угла при ротацији и редослед пресликавања, тј. непознавање правила композиције.

Сваки задатак носио је два поена. Код првог задатка један поен се добија ако је добро урађено прво пресликавање у композицији, а два поена се добијају за потпун задатак. У другом и трећем задатку, бодовање сам вршила на исти начин, један бод ученици су добили ако су урадили само конструкцију без доказа или обратно, а два бода за потпун задатак.

Оцењивање се врши по следећој расподели:

0-2 поена је *недовољан* (1)

2-3 поена је *довољан* (2)

3-4 поена је *добар* (3)

4-5 поена је *врло добар* (4)

5-6 поена је *одличан* (5)

2.4 Анкета

Метода анкетирања је поступак којим се на темељу анкетног упитника истражују и прикупљају подаци, информације, ставови и мишљења о предмету истраживања.

Анкета представља најраспрострањенију методу прикупљања података и њом се могу добити мишљења о малом броју питања, која интересују већи број људи. Ова метода је поуздана у толикој мери у коликој су мери поуздане саме информације прикупљене овом методом.

У циљу утврђивања ученичког мишљења о употреби рачунара у настави математике, неколико часова након контролног задатка, ученици су анонимно анкетирани. Очекивали смо да ће анкета пружити бољи увид у то колико се ученицима допао наш начин рада, да ли имају неке замерке и да ли би волели да на овај начин чешће уче.

Креирањем ове анкете трудила сам се да задовољим све услове који су потребни да анкета буде добра, а то је објективност, да су питања јасна, да нема сугестивних питања, питања су написана јасним језиком и теоријски су утемељена, јер анкетирамо ученике о питањима која ће нам помоћи у нашем истраживању.

Ова анкета је комбинованог типа, тј. имамо питања која су затвореног типа, ученици заокружују понуђене одговоре, и отвореног типа, где ученици треба да напишу своје одговоре.

Ученици из контролне групе нису имали једанаесто питање на анкети.

АНКЕТА

Овај упитник је анониман, није потребно да напишеш своје име и презиме, а твоји одговори ће се користити само за сврхе истраживања. Подсећамо те, ово није никакво тестирање и нема тачних и погрешних одговора. Одговарајући искрено на постављена питања, помоћићеш нам да разумемо начин размишљања младих људи.

Пред тобом је неколико питања на која треба да одговориш тако што ћеш заокружити одговор или га написати на понуђеном месту.

Хвала на сарадњи.

Пол	мушки	женски
Разред и одељење		
Оцена из математике на полугодишту		

- Да ли имаш могућност да свакодневно користиш рачунар?
Да Не
- Да ли користиш рачунар и у сврхе учења?
Да Повремено Не
- Да ли користиш неке математичке програме?
Да Повремено Не
- Које математичке програме знаш и користиш их?

- Да ли би волео-ла да се рачунари више користе у настави?
Да Нисам сигуран-на Не
- Да ли си до сада имао-ла прилику да присуствујеш настави која је одржана уз помоћ рачунара?
Да Не
- Ако је твој одговор на претходно питање био „Да“, напиши из ког предмета је настава одржана на тај начин.

- Каква су твоја искуства поводом оваког извођења наставе?
Позитивна Неутрална Негативна
- Какво је твоје мишљење о коришћењу рачунара у настави математике?
Позитивно Неутрално Негативно
- Да ли сматраш да би ти употреба рачунара у настави математике помогла да лакше савладаш неке теме из градива?
Да Нисам сигуран-на Не
- Како ти се свидело предавање, на часовима математике, које је обављено уз помоћ рачунара?
Свидело ми се Не могу да оценим Није ми се свидело
- Напиши сугестије и предлоге који би помогли у побољшању наставе уз помоћ рачунара у математици.

3. Резултати истраживања.

У овом делу ћемо на основу теста знања, тј. на основу контролног задатка добити увид о успеху ученика у савладавању одговарајуће наставне теме и на основу статистичких показатеља моћићемо да региструјемо разлике у успеху. На основу ових резултата, извешћемо закључак о доприносу нашег начина рада о успешнијем савладавању ове наставне теме. Такође, анализирајући одговоре са анкете, стећићемо комплетнију слику о успеху нашег начина рада

3.1 Резултати контролног задатка

Контролни задатак су у контролној групи радила двадесет три ученика од двадесет осам колико их има у одељењу, док су у експерименталној групи свих тридесет једно радили контролни.

Грешке које су ученици правили на контролном задатку су већ предвиђене грешке. Ни један ученик није предао празан рад, тј. сви су покушавали да реше задатке. Највећи број ученика решио је први задатак, али било је доста и оних који су правили грешке при оријентацији угла.

Гледајући обе групе заједно 55,55% ученика је потпуно решило први задатак, док је 37,04% ученика први задатак решило половично. 14,81% ученика је потпуно урадило други задатак, а 18,52% је урадило половично овај задатак. 18,52% ученика је комплетно решило трећи задатак, док је њих 9,26% то урадило половично.

Из ових података можемо закључити да ученици нису најбоље савладали конструктивне задатке. Такође, важно је напоменути да су трећи задатак урадили половично, или потпуно, само ученици који су на контролном добили 4 или 5.

Након бодовања урађених задатака оцене изгледају овако (Табела 2.):

	Контролна група	Експериментална група
Број ученика	23	31
Одличан	7	3
Врло добар	2	3
Добар	4	4
Довољан	3	14
Недовољан	7	7
Средња оцена	2,96	2,39

Табела 3. Оцене са контролног задатка

Ради лакше прегледности можемо добијене оцене приказати и графички (График 1.)

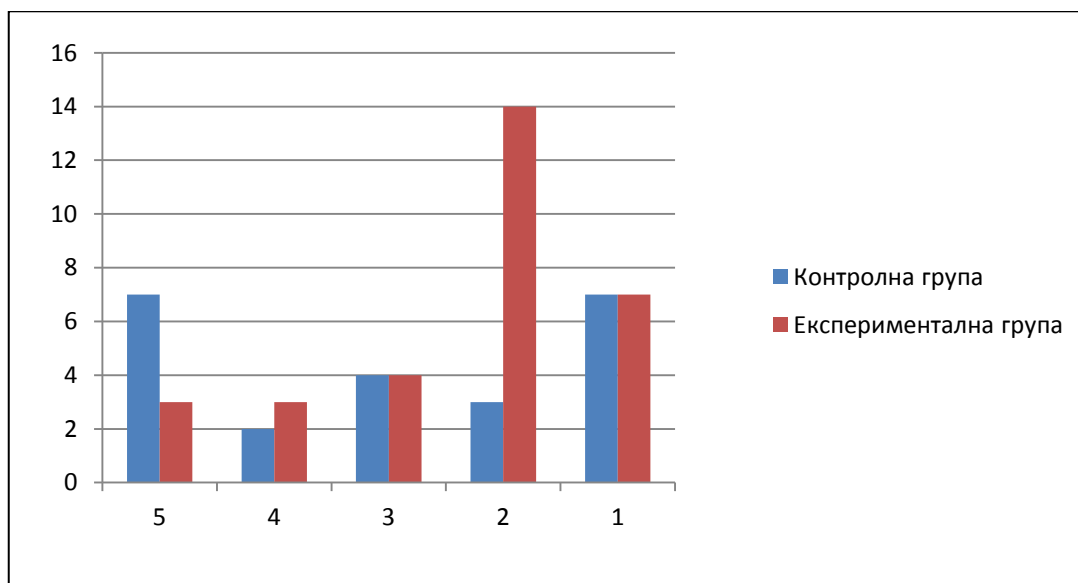


График 1.

Упоредимо сада оцене са полугодишта и са контролног задатка, у свакој групи посебно (Табела 3.)

	Контролна група		Експериментална група	
	Полугодиште	Контролни	Полугодиште	Контролни
Број ученика	28	25	31	31
Одличан	8	7	3	3
Врло добар	3	2	3	3
Добар	7	4	3	4
Довољан	8	3	12	14
Недовољан	2	7	9	7
Средња оцена	3,25	2,96	2,29	2,39

Табела 4.

Да би што боље учили напредовање сваке групе, графички (График 2, График 3.) ћемо упоредити оцене са полугодишта и оцене са контролног задатка у свакој групи посебно.

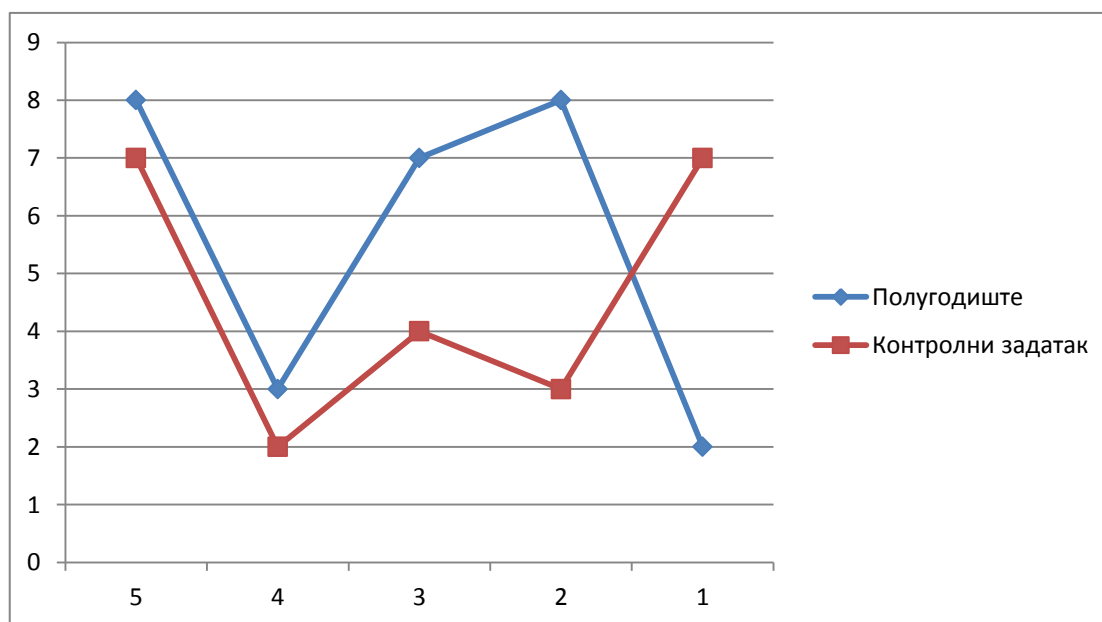


График 2. Контролна група

Одавде можемо уочити да је број свих позитивних оцена на полугодишту код контролне групе био већи, док је број негативних оцена знатно мањи него на контролном задатку.

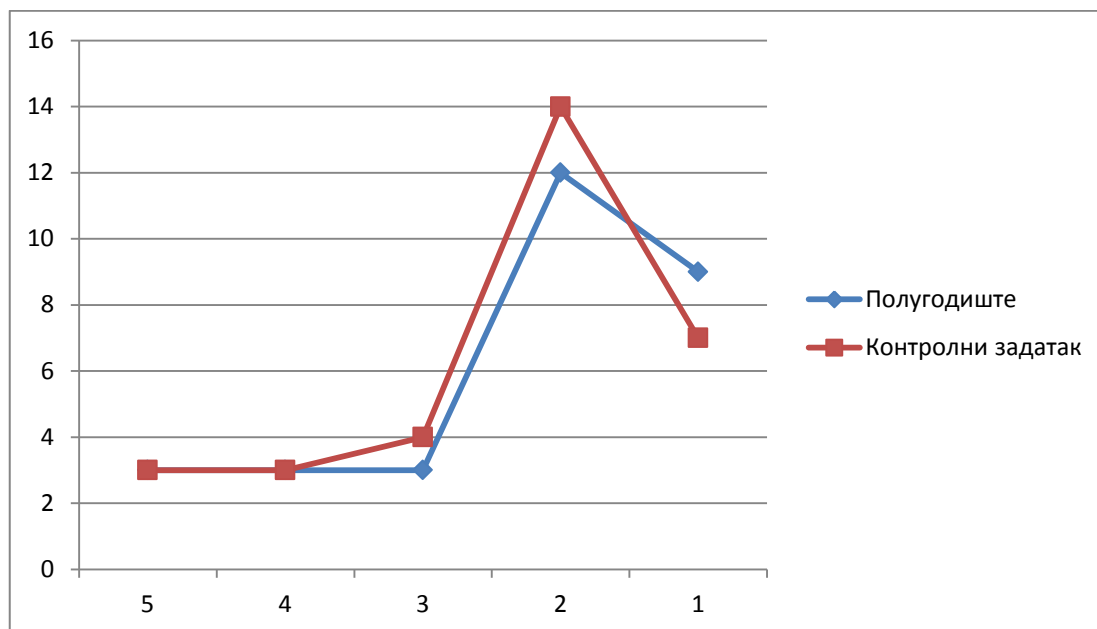


График 3. Експериментална група

Оно што можемо закључити о експерименталној групи јесте да је њихов број позитивних оцена остао исти или се повећео, док се број негативних оцена смањио у односу на полугодиште.

Експериментална група значајно је напредовала у односу на оцене са полугодишта, за разлику од контролне групе, где је средња оцена била мања него на полугодишту.

Статистичком обрадом резултата контролних задатака, помоћу t-теста, добили смо следеће податке (Табела 5.):

	Контролна група	Експериментална група
Број ученика	23	31
Аритметичка средина	2,96	2,39
Стандардна девијација	2,77	1,51

Табела 5.

На основу добијених података проверена је друга помоћна нулта хипотеза:

Нема значајне разлике у резултатима контролног задатка између контролне и експерименталне групе.

Интервал поверења за контролну групу је 2.96 ± 2.77 , тј. $[0.19, 5.73]$, а за експерименталну групу 2.39 ± 1.51 , тј. $[0.88, 3.9]$. Одговарајућа t-вредност је $t=1.45$, па је $p=0.154$. Како је добијено $p>0.05$, са поузданошћу од 95% прихватамо нулту хипотезу и закључујемо да не постоји статистички значајна разлика у просечним оценама, тј. обе групе су подједнако добро урадиле контролни задатак, што значи да је експериментална група напредовала.

На основу ових података, и на основу резултата које су нам дале две помоћне хипотезе можемо прихватити нашу главну хипотезу:

Употребом рачунара у настави математике постиже се већи напредак у погледу успеха у учењу, и у резултатима ученика, него у традиционалној настави.

3.2 Резултати анкете

Анкету су у контролном одељењу радила двадесет четири ученика, од двадесет осам колико их има у одељењу, а у експерименталном одељењу двадесет седам ученика, од њих тридесет једно. Сви ученици су одговорили на питања затвореног типа, док је мањи број ученика одговорио на питања отвореног типа, о чему ћемо касније више говорити.

Да би лакше видели резултате анкете, приказаћемо их процентуално, за сваку групу посебно, као и укупан резултат, за све тестиране ученике, заједно.

1. *Да ли имаш могућности да свакодневно користиш рачунар?*

	Да	Не
Контролна група	100%	0%
Експериментална група	100%	0%
Укупно	100%	0%

Табела 6.

Овим одговорима смо сазнали да сви ученици имају могућност свакодневног коришћења рачунара.

2. *Да ли користиш рачунар и у сврхе учења?*

	Често	Понекад	Никада
Контролна група	37,50%	58,33%	4,17%
Експериментална група	22,22%	77,78%	0,00%
Укупно	29,41%	68,63%	1,96%

Табела 7.

Ако погледамо ове резултате видећемо да у експерименталној групи нема ученика који не користе рачунар у сврхе учења, али и да је већи проценат оних који то раде понекад, од оних који то често раде, упоређујући са контролном групом.

3. *Да ли користиш неке математичке програме?*

	Да	Не
Контролна група	0,00%	100,00%
Експериментална група	0,00%	100,00%
Укупно	0,00%	100,00%

Табела 8.

Овим одговорима смо видели да ученици уопште не користе математичке програме, те се стога мора предузети нешто поводом тога. Овај податак нам сугерише да треба увести рад са математичким програмима и на часовима информатике, али би и часови математике на којима би се користили неки математички програми, допринели промени ових резултата.

4. *Које математичке програме знаш и користиш их?*

На ово питање није било одговора, ни у једној групи. То нам говори да ученици нису едуковани по питању математичких програма, али исто тако да ни сами не истражују могућности којима би олакшали решавање задатака.

5. *Да ли би волео-ла да се рачунари више користе у настави?*

	Да	Нисам сигуран-на	Не
Контролна група	66,67%	8,33%	25%
Експериментална група	66,67%	22,22%	11,11%
Укупно	66,67%	15,68%	17,65%

Табела 9.

Ови резултати нам говоре да поред тога што је исти број позитивних одговора, процентуално, у обе групе, негативних одговора је мање у експерименталној. Имамо 22,22% оних који не могу да се одлуче, у

експерименталној групи, што нам говори да би њихови одговори можда прешли у позитивне, ако би имали већи број оваквих предавања, па би могли лакше да се одреде.

6. *Да ли си до сада имао-ла прилику да присуствујеш настави која је одржана уз помоћ рачунара?*

	Да	Не
Контролна група	100,00%	0,00%
Експериментална група	100,00%	0,00%
Укупно	100,00%	0,00%

Табела 10.

Овај податак је охрабрујућ, што нам говори да је било још покушаја да се осавремени настава.

7. *Ако је твој одговор на претходно питање био „Да“, напиши из ког предмета је настава одржана на тај начин.*

Одговори на ово питање су били углавном исти и наведени су предмети: математика, информатика, хемија, биологија.

8. *Каква су твоја искуства поводом оваквог извођења наставе?*

	Позитивна	Неутрална	Негативна
Контролна група	50,00%	25%	25,00%
Експериментална група	66,67%	18,52%	14,81%
Укупно	58,82%	21,57%	19,61%

Табела 11.

Можемо увидети да је експериментална група задовољнија овим начином извођења наставе, те стога треба пружити више могућности обема групама да присуствују оваквом извођењу наставе чешће.

9. *Какво је твоје мишљење о коришћењу рачунара у настави математике?*

	Позитивно	Неутрално	Негативно
Контролна група	37,50%	16,67%	45,83%
Експериментална група	74,07%	18,52%	7,41%
Укупно	56,86%	17,65%	25,49%

Табела 12.

Ово је један веома битан податак. Можемо приметити да је проценат позитивног мишљења у експерименталној групи доста већи у односу на

контролну групу. То нам говори да ученици из контролне групе можда зазиру од непознатог и мисле да им је боље да се држе традиционалног начина учења математике, које им је већ познато.

10. *Да ли сматраш да би ти употреба рачунара у настави математике помогла да лакше савладаш неке теме из градива?*

	Да	Нисам сигуран-на	Не
Контролна група	25%	12,5%	62,50%
Експериментална група	70,37%	22,22%	7,41%
Укупно	49,02%	17,65%	33,33%

Табела 13.

Сличан утисак стичемо и на основу овог питања, а то је да су ученици из експерименталне групе након новог начина предавања, сада отворенији за рад и учење уз помоћ рачунара.

11. *Да ли ти се свидело предавање, на часовима математике, које је обављено уз помоћ рачунара?*

	Свидело ми се	Не могу да оценим	Није ми се свидело
Експериментална група	77,78%	14,81%	7,41%

Табела 14.

Резултати су процентуално слични резултатима за експерименталну групу у претходна два питања. То нам говори да онеме коме се видео овај начин предавања, мисли да му је било од помоћи и волео би поново да присуствује таквој врсти наставе.

12. *Напиши сугестије и предлоге који би помогли у побољшању наставе уз помоћ рачунара у математици.*

Само 12 ученика је одговорило на ово питање, и сви су били из експерименталне групе. Предлози су се сводили на то да ако се настава изводи на овакав начин, треба омогућити сваком ученику да има свој рачунар, да би свако од њих могао самостално да ради.

Ако погледамо ове резултате, мој коначан закључак је да су ученици из експерименталне групе сада наклоњенији одржавању наставе уз помоћ рачунара, да су њихова искуства углавном позитивна и да би желели поново да присуствују настави која се одржава на овај начин. То нам говори да је важно да ученике едукујемо и на овај начин, да рачунаре користе и у сврхе учења, а да им математички програми помогну да лакше савладају градиво. Наравно, кључну

улогу овде имају наставници који треба све ово да им покажу, омогуће и да их упуте у овакав вид учења. Треба омогућити ученицима да присуствују настави која је припремљена и на овај начин, да их тиме мотивишемо и да им отклонимо све страхове у вези овога, јер је природно да ученици имају страх од свега што им је страно.

Као веома забрињавајуће чињенице сматрам податке да ученици не користе ни један математички програм, и чак не знају ни један да наведу. Све могућности које такви програми пружају остају неискоришћене од стране ученика, док они покушавају да пуким меморисањем науче градиво. Управо овом анкетом смо увидели да ученицима треба пружити могућност да искусе оба начина предавања, да би стекли право мишљење о употреби рачунара у настави, а можда их на тај начин и мотивишемо да сами истражују и откривају нове начине учења.

Оно што сам такође могла да приметим је то да су ученици у експерименталном одељењу били много активнији и заинтересованији за рад, тако да су након завршетка овог истраживања желели да се још неке наставне теме из математике обрађују уз помоћ рачунара. Сваки задатак који је био предвиђен да се ради на часу, радио је неко од ученика, док су остали ученици могли лако да прате конструкцију и путем пројектора, која се више пута понављала. На тај начин један задатак је био више пута поновљен. Управо ово је била отежавајућа околност у контролној групи, јер се доста ученика жалило да не може да види шта је нацртано на табли док неки ученик ради задатак, јер заклања таблу својим телом, па се тако и доста времена губило. Ово нам говори да је употреба рачунара у настави математике за обраду неких наставних тема адекватнија и због неких техничких проблема, али и због прецизности и прегледности.

4.Закључак

На крају експерименталног истраживања дошли смо до резултата који указују на оправданост примене рачунара у настави математике. Проучавајући могућности примене савремене технологије у настави математике дошли смо до веома корисних информација о могућности коришћења рачунара, што су и сами ученици потврдили путем анкете, а све у циљу једног потпунијег, свеобухватнијег и практичнијег процеса стицања математичког знања. Велике могућности примене рачунара у настави математике у великој мери доприносе бољем разумевању математичких садржаја, а самим тим и индивидуалном развоју сваког појединца.

Упоредивањем резултата на почетку експеримента са резултатима на крају експеримента можемо закључити да су значајније напредовали ученици експерименталне групе показујући и већу самосталност у раду на часу, за разлику од ученика из контролне групе. Међутим, контролна група је постигла лошији успех него на полугодишту, што значи да традиционална настава не обезбеђује потребан ниво разумевања предвиђеног наставног садржаја, како би се повећала самосталност ученика и њихова спремност за успешније решавање задатака. Гледано у целини, експериментална група је доста напредовала у односу на контролну, захваљујући и исказаном интересовању ученика за решавање задатака.

David Tall [10], долази до закључка да је ученицима лакше да прихвате и савладају градиво, ако је оно презентовано на сликовит начин, јер је доказано да визуализација помаже, те да се о ономе што је виђено, много лакше прича у свакодневном животу. На тај начин, ученици лакше могу својим речима објаснити научено градиво и много дуже га памте, у односу на градиво које је научено само на основу дефиниција и теорема, које се памте од речи до речи. Из тог разлога, он сматра, да се само добром организацијом наставе која обухвата и коришћење различитих математичких програма, може допринети бољем памћењу градива, а самим тим и бољем коришћењу стеченог знања, те његовој примени у свакодневном животу. Тиме би се порушила још једна предрасуда која је везана за математику, а то је, да је она тешка. На овај начин би ученици уз различите програме веома лако дошли и до веома компликованих решења.

Рачунари омогућавају ученицима да што боље схвате градиво које је пред њима, тако да често оно што не можемо лако замислити или скицирати на табли, рачунарима решавамо са лакоћом. Са тим проблемом смо се сусрели и при обрађивању ове наставне теме, јер се често дешавало да ученици не могу добро да

замисле оно што треба да добијемо, не могу да процене колика удаљеност треба да буде између објеката, такође брзина и прецизност су од велике важности овде, а све то се боље и квалитетније постиже употребом рачунара.

Могла сам да приметим да поред тога што су ученици у експерименталној групи били сконцентрисанији на градиво, нов начин предавања им се веома допао, што је допринело бољој атмосфери у одељењу, али исто тако и бољим оценама на контролном задатку.

Неке области из математике као што су геометрија, тригонометрија, изометријске трансформације, које смо овде и изложили, су веома погодне за извођење уз помоћ рачунара, јер омогућавају ученицима бољу визуелизацију, већа је прецизност и на више сличних примера се за кратко време ученицима може објаснити градиво. Наравно, исто тако се рачунари могу користити и у комбинаторици, решавању једначина и неједначина, полиномима, као и у свим осталим областима које се изучавају у математици, ако се настава добро припреми и прилагоди ученицима.

Један од основних проблема у извођењу наставе на овај начин су немогућности школа и недостатак опреме, али исто тако и предрасуде, како ученика тако и професора. Уз адекватну едукацију наставника и професора, овај начин предавања би могао више да се примењује у свим основном и средњим школама и да се на тај начин ученицима покажу још неке могућности, како рачунара, тако и математике.

Уз већу мотивацију, игру и самостлно истраживање, ученици ће на лакши начин савладати градиво, а то им управо омогућавају рачунари.

Литература

- [1] Миличић П., Стојановић В., Кеделбург З., Боричић Б. (2000): **Математика за 1 разред средње школе**, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд
- [2] Богославов В. (2004): **Збирка решених задатака из математике 1**, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд
- [3] Милошевић Д. (2009): **Тестови знања у настави математике 53-59, Настава математике LIV, 2-3**, Друштво математичара Србије, Београд
- [4] Blackett N., Tall D. (1991): **Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software**, Proceedings of PME15, Assisi, 1 144–151, University of Warwick
- [5] Првановић М. (1963): **Преглед и особине основних трансформација у геометрији Еуклида**, Универзитет у Новом Саду, Нови Сад
- [6] Коцић Љ. (1981): **Педагошки експеримент, карактеристике и могућности**, Просвета, Београд.
- [7] Ђукић М. (2003): **Дидактичке иновације као изазов и избор**, Савез педагошких друштава Војводине, Нови Сад
- [8] Трнавац Н., Ђорђевић Н. (2002): **Педагогија**, Научна књига нова; Београд
- [9] Tall D. (1993): **Real Mathematics, rational computers and complex people**, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick
- [10] Tall D., Shesth G. (1983): **Visualiying Higer Level Mathematical Concepts Using Computer Graphics**, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick
- [11] Tall D. (1993): **Computer Environments for the Learning ofMathematics**, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick

Биографија



Соња Вученов, рођена 9.11.1988. у Врбасу, где је завршила основну школу „Светозар Милетић“ и гимназију „Жарко Зрењанин“. 2007. Уписује Природно-математички факултет у Новом Саду на департману за математику, смер: Професор математике. 2011. дипломира са просечном оценом 9.42 и уписује мастер студије, смер настава математике.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:

РБР

Идентификациони број:

ИБР

Тип документације: Монографска документација

ТД

Тип записа: Текстуални штампани материјал

ТЗ

Врста рада: Мастер рад

ВР

Аутор: Соња Вученов

АУ

Ментор: др Драгослав Херцег

МН

Наслов рада: Мерење ученичког напретка при коришћењу рачунара у настави математике

МР

Језик публикације: Српски (ћирилица)

ЈП

Језик извода: српски и енглески

ЈИ

Земља публикавања: Србија

ЗП

Уже географско подручје: Војводина

УГП

Година: 2012.

ГО

Издавач: Ауторски репринт

ИЗ

Место и адреса: Нови Сад, Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовића 3

МА

Физички опис рада: 4/ 65/ 0/ 14/ 44/ 3/ 0

(бр. поглавља/бр. страна/бр. литерарних цитата/бр. табела/бр. слика/бр. графика/бр. прилога)

ФО

Научна област: Математика

НО

Научна дисциплина: Методика наставе математике

НД

Кључне речи: Рачунари у настави, изометријске трансформације

ПО

УДК:

Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику

ЧУ

Важна напомена:

ВН

Извод: Овај мастер рад се бави ученичким напретком при коришћењу рачунара у настави математике. Хипотезу, да постоји напредак при коришћењу рачунара, у односу на традиционалну наставу испитујемо експериментом који је одржен у гимназији „Жарко Зрењанин“ у Врбасу, обрадом наставне теме „Изометријске трансформације“. Анализом контролног задатка и анкете, коју су радили ученици, хипотеза је потврђена и установљено је да се употребом рачунара у настави математике постиже већи напредак у погледу успеха у учењу, и у резултатима ученика, него у традиционалној настави.

ИЗ

Датум прихватања теме од стране НН већа 10.05.2012.

ДП

Датум одбране: август, 2012.

ДО

Чланови комисије:

КО

Председник: др Ђурђица Такачи, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

Члан: др Зорана Луженин др, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

Ментор: др др Драгослав Херцег, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code:

CC

Author: Sonja Vučenov

AU

Mentor: dr. Dragoslav Herceg

MN

Title: Measuring of pupils progress using computers in teaching mathematics

XI

Language of text: Serbian (Cyrillic)

LT

Language of abstract: Serbian and English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2012.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg
Dositeja Obradovića 3

PP

Physical description 4/ 65/ 0/ 14/ 44/ 3/ 0

(chapters/ pages/ references/ tables/ pictures/ charts/ supplements)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Teaching methods of mathematics

SD

Key words: computers in teaching, isometric transformations

SKW UC:

Holding data: Library of Department of Mathematics and Informatics

HD

Note:

N

Abstract: This master thesis deals with the pupil's progress using computers in teaching mathematics. Hypothesis, that there is a progress using computers, compared to traditional teaching, we will examine with the experiment which was held in "Žarko Zrenjanin" high school in Vrbas, elaborating of the theme "Isometric transformations". The hypothesis is confirmed with analysis of control task and survey, which pupils filled out, and it was found that the use of computers in teaching mathematics achieves greater progress in terms of learning, than in traditional teaching.

AB

Accepted by the Scientific Board on 10.5.2012.

ASB

Defended: august 2012.

DE

Thesis defense board:

DB

President: dr Đurđica Takači, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr Zorana Lužanin, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr Dragoslav Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad