UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Slobodan Nogavica

Hamiltonovi grafovi i digrafovi

Master rad

Novi Sad, 2016

Sadržaj

Predgovor

U ovom master radu bavićemo se Hamiltonovim konturama i putevima u grafovima i digrafovima. Sadržaj rada je raspoređen u tri glave.

Prva glava je uvodnog karaktera. Sadrži osnovne pojmove i definicije teorije grafova koje se koriste u navedenoj problematici. Daje se osvrt na istorijat i složenost problema Hamiltonovih kontura.

Druga glava se bavi Hamiltonovim grafovima. Upoznajemo se sa pojmom Hamiltonovog grafa. Izloženi su potrebni uslovi i dovoljni uslovi da graf bude Hamiltonov, među kojima su teoreme Orea (O.Ore) i Diraka (G.Dirac). Definišemo zatvorenje grafa i dokazujemo teoremu Hvatala (V.Chvatal) koja povezuje Hamiltonove grafove sa zatvorenjem grafova. Dajemo definiciju Hamiltonski povezanih grafova i navodimo njihove osnovne osobine. Dovodimo u vezu Hamiltonove grafove sa planarnim grafovima i dokazujemo teoremu Grinberga (E.Grinberg). Na kraju druge glave ostavljamo prostor za koju rec o stepenu grafa i Hamiltonovim konturama u G^3.

Treća glava je fokusirana na Hamiltonove digrafove. Dokazujemo teoreme Mejnielova (M. Meyniel) i Guila-Uri (Gouila-Houri), koje su potrebni uslovi za Hamiltonski jako povezane digrafove. U drugom delu treće glave fokusiramo se na Hamiltonove turnire. Dajemo pregled osnovnih osobina takvih turnira. Dokazujemo teoremu Kamiona (P. Camion) koja nam daje potreban i dovoljan uslov da turnir sadrži Hamiltonovu konturu. Na kraju treće glave navodimo i dokazujemo teoremu Harari-Mozera (F. Harary, L. Moser) koja nam garantuje da je svaki netrivijalan jako povezan turnir čvorno-panciklіčan.

Ovom prilikom bih se zahvalio svom mentoru, dr Vojislavu Petroviću, ne samo na odabiru zanimljive teme, već i na podršci i korisnim savetima prilikom izrade ovog master rada. Zahvalnost dugujem i članovima komisije, dr Bojanu Bašiću i dr Borisu Šobotu.

Na kraju, ovaj master rad posvećujem svom ocu, i dugujem mu veliku zahvalnost na podršci tokom svih godina mog školovanja, kao i na svemu što mi je pružio u životu.

Slobodan Nogavica

Glava 1. Uvod

1.1 Osnovni pojmovi

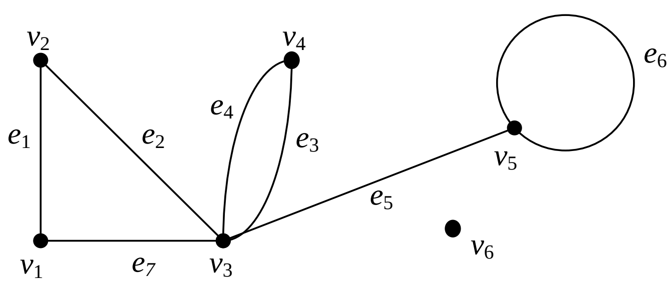
Definicija 1.1.1. *Graf* G je uređeni par ($V(G)$, $E(G)$) gde je $V(G)$ konačan neprazan skup elemenata koje nazivamo *čvorovima*, dok je $E(G)$ konačan skup neuređenih parova elemenata iz $V(G)$ koje nazivamo *grane*.

Ukoliko je grana određena čvorovima u i v, tada umesto (u, v) možemo pisati uv, ili samo e, gde je $e = (u, v)$. Za granu e kažemo još i da „spaja u i v”, „krajevi grane e su čvorovi u i v”, „e je incidentno sa u i v”, ...

Definicija 1.1.2. Grane koje su incidentne sa istim parom čvorova nazivaju se *paralelne grane*. Grana kod koje se početni i krajnji čvor poklapaju naziva se *lupa* ili *petlja*.

Definicija 1.1.3. Graf G je *prost* ukoliko u njegovom skupu grana, $E(G)$, nema ni petlji ni paralelnih grana. *Multigraf* je graf u čijem se skupu grana mogu pojavljivati paralelne grane ili petlje.

U ovom radu bavićemo se, isključivo, prostim grafovima.



$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
$E(D) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$
e_3, e_4- paralelne grane
e_6 – petlja (lupa)
v_6 – izolovan čvor

Slika 1. Multigraf

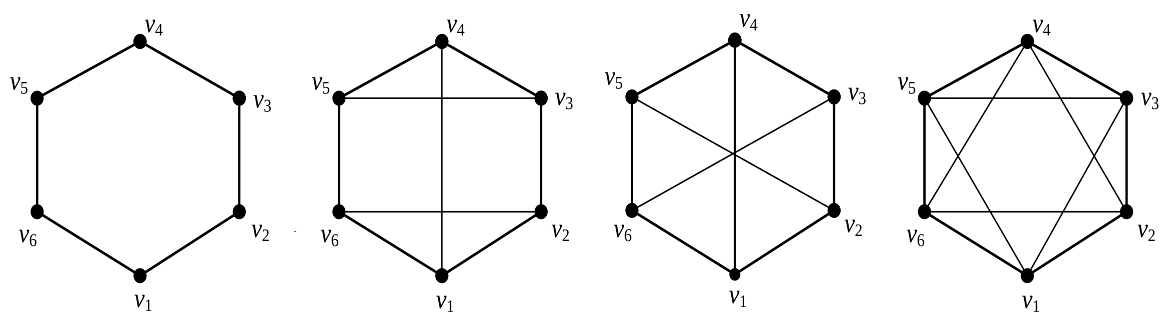
Definicija 1.1.4. Dva čvora povezana granom nazivamo *susednim čvorovima*. U suprotnom su čvorovi *nesusedni*. Skup svi suseda čvora $v \in V(G)$ označavamo sa $N_G(v)$, i pišemo $N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in V(G)\}$.

Definicija 1.1.5. *Stepen čvora* $v \in V(G)$ je broj suseda tog čvora u grafu G, i to zapisujemo sa $d_G(v) = | N_G(v) |$. Minimalan stepen svih čvorova obeležavamo sa $\delta(G)$, a maksimalan sa $\Delta(G)$. Zapisujemo $\delta(G) = min_{v \in V(G)}\, d_G(v)$ i $\Delta(G) = max_{v \in V(G)}\, d_G(v)$.

Definicija 1.1.6. Čvor koji nema suseda naziva se *izolovan čvor*, dok čvor sa tačno jednim susedom nazivamo *viseći* ili *krajnji* čvor.

Definicija 1.1.7. Ukoliko svi čvorovi grafa imaju isti stepen, tada graf nazivamo *regularnim grafom.* Specijalno, ako je stepen svakog čvora jednak k onda je graf $k -$ *regularan.*

U regularnim grafovima je $\delta(G) = \Delta(G)$.

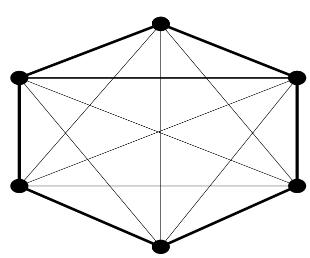


2-regularan graf 3-regularan graf 3-regularan graf 4-regularan graf

Slika 2. Regularni grafovi

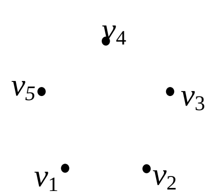
Pojedini grafovi, zbog svojih specifičnih svojstava, imaju zasebna imena. Definisaćemo neke od specijalnih grafova koje ćemo u ovom radu koristiti:

Definicija 1.1.8. Graf u kom između svaka dva čvora postoji grana naziva se *kompletan graf*. Kompletan graf sa n čvorova označavamo sa K_n.



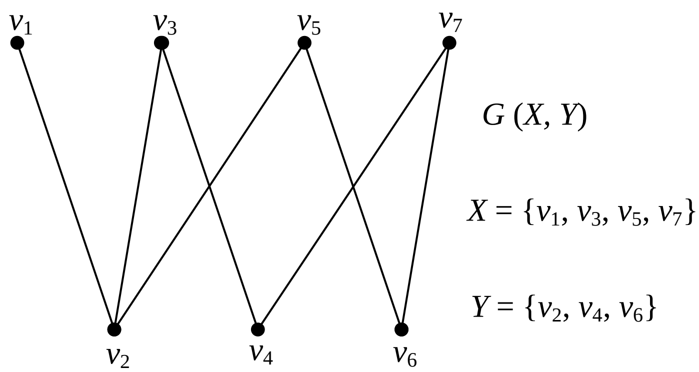
Slika 3. Kompletan graf K_6

Definicija 1.1.9. Graf sa u kojem nikoja dva čvora nisu povezana naziva se *prazan graf.* Prazan graf sa n čvorova označavamo sa $\overline{K}_n$.



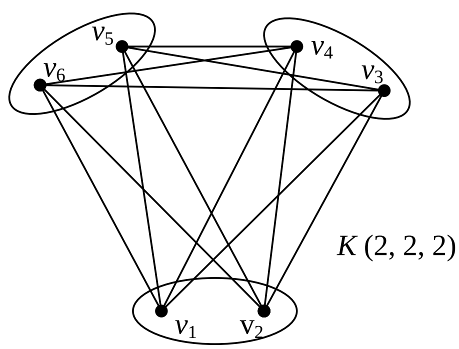
Slika 4. Prazan graf $\overline{K_5}$

Definicija 1.1.10. *k − partitan graf* $G(X_1, X_2, ..., X_k)$ je graf čiji skup čvorova $V(G)$ delimo u k disjunktnih klasa, $X_1, X_2, ..., X_k$. Svaka grana *k − partitnog* grafa spaja čvorove koji pripadaju različitim klasama. *Bipartitan graf* je vrsta k − partitnog grafa kod kojeg je skup čvorova podeljen u dve disjunktne klase.



Slika 5. Bipartitan graf

Definicija 1.1.11. *Kompletan k − partitan graf* $K(n_1, n_2, ..., n_k)$ je k − partitan graf $G(X_1, X_2, ..., X_k)$, $|X_i| = n_i$, u kojem između svaka dva čvora iz različitih klasa postoji grana.

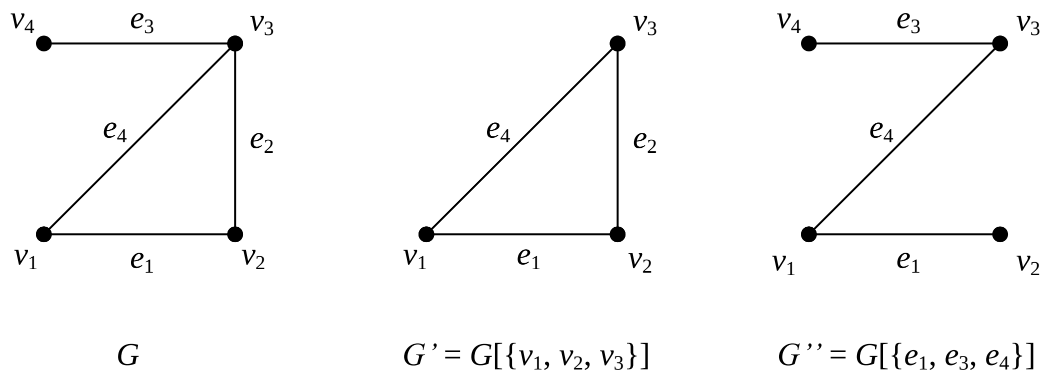


Slika 6. Kompletan 3-partitan graf

Definicija 1.1.12. H je *podgraf grafa G* ako su svi njegovi čvorovi i sve njegove grane sadržane u garfu G. Ako je H podgraf od G, onda je G *nadgraf* od H. *Pokrivajući pograf* grafa G je podgraf H, takav da je $V(H) = V(G)$.

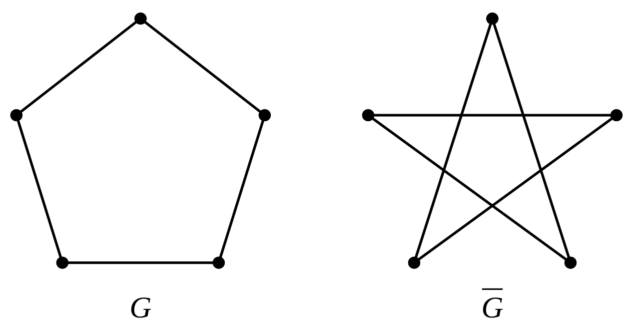
Definicija 1.1.13. Neka je V' neprazan podskup od $V(G)$. *Podgraf grafa G indukovan skupom čvorova V′* predstavlja graf G' sa skupom čvorova $V(G') = V'$, i skupom grana $E(G')$ koji čine sve grane grafa G čija su oba kraja u V'. Označavaćemo ga sa $G[\, V'\,]$.

Definicija 1.1.14. Neka je E' neprazan podskup od $E(G)$. *Podgraf grafa G indukovan skupom grana E′* predstavlja graf G' sa skupom grana $E(G') = E'$, i skupom čvorova $V(G')$ koji čine svi krajevi grana iz E'. Označavaćemo ga sa $G[\, E']$.



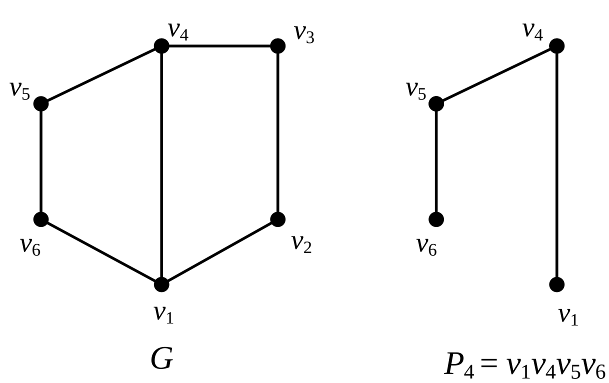
Slika 7. Graf i njegovi indukovani podgrafovi

Definicija 1.1.15. *Komplement grafa G* je graf $\bar{G}$ čiji je skup čvorova $V(\bar{G}) = V(G)$ i čiji je skup grana $E(\bar{G}) = \{uv \mid u, v \in V(G), uv \notin E(G)\}$.



Slika 8. Graf i njegov komplement

Definicija 1.1.16. *Put* P_k u grafu G je niz čvorova $v_1 v_2 \dots v_k$ $(v_k \geq 2)$ koji su svi različiti i pritom $v_i v_{i+1} \in E(G)$ za $i = 1, 2, \dots, k-1$. Čvorovi v_1 i v_k su *krajevi* puta P_k. Put P_k označavaćemo sa $(v_1 - v_k)$ −put ili $(v_k - v_1)$ −put. *Dužina puta* P_k predstavlja broj grana tog puta.



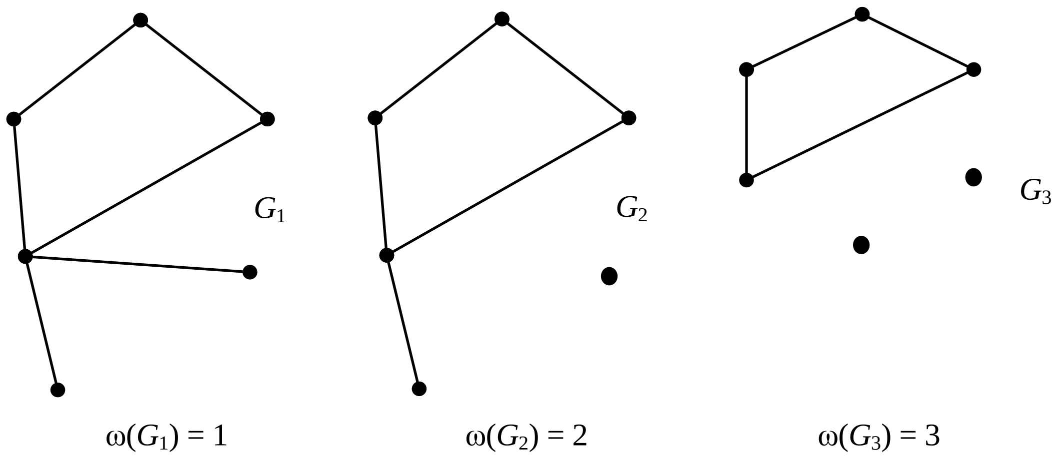
Slika 9. Put

Definicija 1.1.17. *Hamiltonov put* u grafu G je put koji sadrži sve čvorove grafa G.

Definicija 1.1.18. Dva čvora grafa G su *povezana* ako postoji put u G koji ih spaja.

Ako pretpostavimo da je svaki čvor povezan sa samim sobom onda je povezanost čvorova relacija ekvivalencije na skupu $V(G)$.

Definicija 1.1.19. *Komponenta povezanosti grafa* G ili *komponenta grafa* G je klasa ekvivalencije u odnosu na povezanost. Broj komponenti grafa G označavaćemo sa $\omega(G)$.

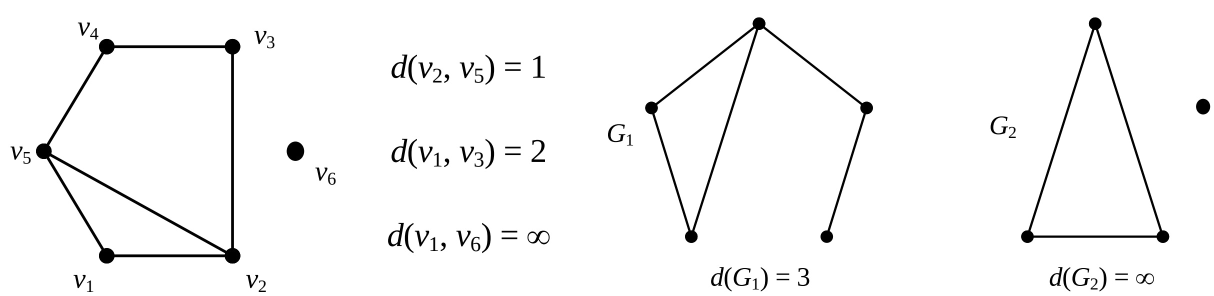


Slika 10. Komponenta povezanosti grafa

Definicija 1.1.20. Graf G je *povezan* ako ima tačno jednu komponentu povezanosti, odnosno, ako za svaka dva njegova čvora postoji put koji ih spaja.

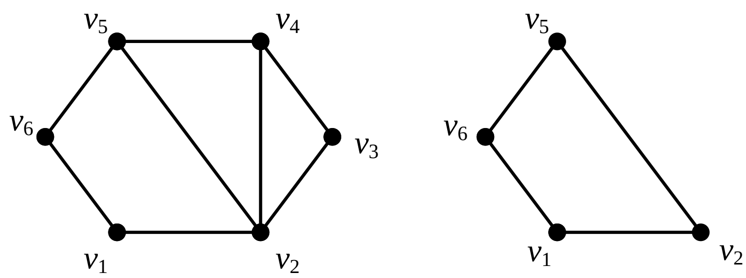
Definicija 1.1.21. *Rastojanje* između čvorova u i v grafa G je dužina najkraćeg $(u - v)$ −puta u grafu G. Rastojanje između čvorova u i v označavaćemo sa $d_G(u, v)$ ili, ukoliko je jasno da se rastojanje posmatra u grafu G, samo $d(u, v)$.

Dijametar grafa G, u oznaci $d(G)$, definiše se kao $d(G) = \max_{u,v \in V(G)} d(u, v)$.



Slika 11. Rastojanje između čvorova i dijametar grafa.

Definicija 1.1.22. *Kontura* u grafu G je put sa bar tri čvora sa dodatnom granom koja spaja krajnje čvorove. Konturu sa n čvorova ($n \geq 3$) označavaćemo sa C_n. Graf koji nema kontura naziva se *acikličan graf.*



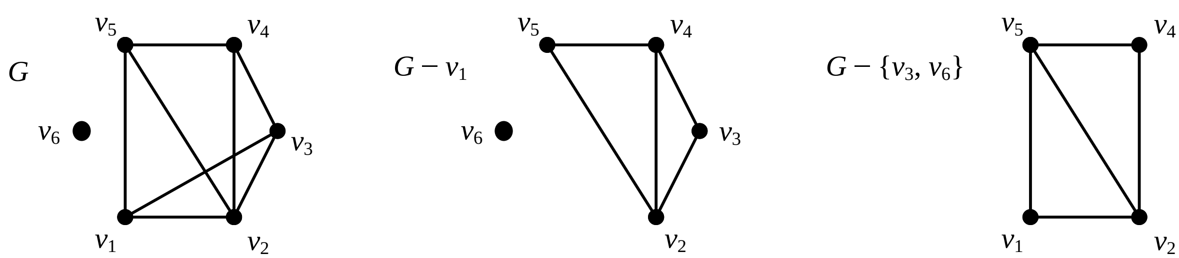
G $\qquad$ $C_4 = v_1v_2v_5v_6v_1$

Slika 12. Kontura

Definicija 1.1.23. *Uklanjanje čvora* $v \in V(G)$ iz grafa G se vrši tako što se iz grafa G ukloni čvor v i sve grane koje su sa njim incidentne. Dobijeni graf označavaćemo sa $G - v$.

Prema definiciji 1.1.13. graf $G - v$ predstavlja indukovan podgraf $G[V(G) - v]$.

Ukoliko umesto jednog čvora iz grafa G uklanjamo skup čvorova $V' \subset V(G)$, tako što iz grafa uklonimo sve čvorove skupa V' i sve grane čiji je bar jedan kraj u V', dobijamo graf $G - V'$ koji, prema definiciji 1.1.13. predstavlja indukovan podgraf $G[V(G) - V']$.

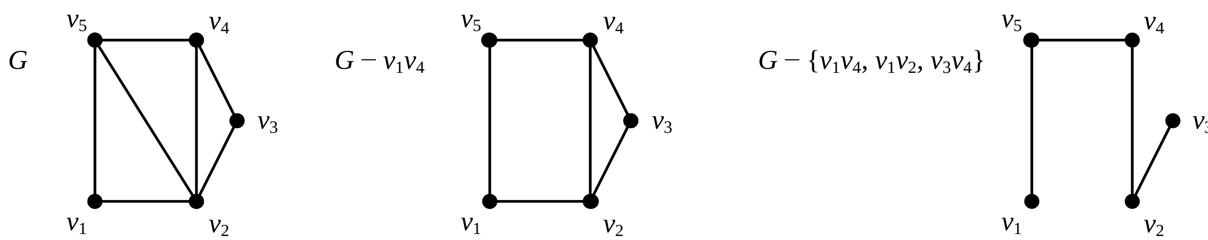


Slika 13. Graf, graf sa uklonjenim čvorom i graf sa uklonjenim skupom čvorova

Definicija 1.1.24. *Uklanjanje grane* $e \in E(G)$ iz grafa G vrši se tako što se iz G ukloni grana e a njeni krajevi ostaju u skupu čvorova grafa G. Dobijeni graf označavamo sa $G - e$.

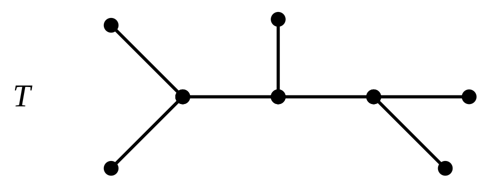
Prema definiciji 1.1.14. graf $G - e$ predstavlja indukovan podgraf $G[E(G) - e]$.

Ukoliko umesto jedne grane iz grafa G uklanjamo skup grana $E' \subset E(G)$, dobijamo graf $G - V'$ koji, prema definiciji 1.1.14. predstavlja indukovan podgraf $G[E(G) - E']$.



Slika 14. Graf, graf sa uklonjenom granom, graf sa uklonjenim skupom grana

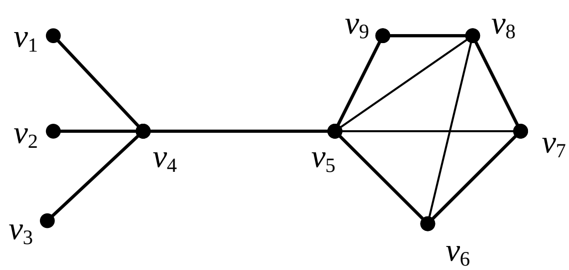
Definicija 1.1.25. Povezan acikličan graf naziva se *stablo*. Uobičajena oznaka za stablo je T.



Slika 15. Stablo

Definicija 1.1.26. Čvor $v \in V(G)$ je *artikulacioni čvor* u grafu G ako se uklanjanjem tog čvora povećava broj komponenti povezanosti grafa G.

Definicija 1.1.27. Grana $e \in V(G)$ je *most* u grafu G ako se uklanjanjem te grane povećava broj komponenti povezanosti grafa G.



v_4 , v_5 – artikulacioni čvorovi

v_4v_5, v_3v_4, v_1v_4, v_2v_4 – mostovi

Slika 16. Artikulacioni čvorovi i mostovi

Definicija 1.1.28. *Čvorni separator* u grafu G je skup čvorova $U \subset V(G)$, takav da je $G - U$ nepovezan graf.

Definicija 1.1.29. Minimalan broj čvorova grafa G čijim se uklanjanjem dobija nepovezan graf ili K_1 naziva se *čvorna povezanost* i označava se sa $\kappa(G)$. Za graf G kažemo da je k-povezan ako i samo ako je $k(G) \geq k$.

Tako je

- $\kappa(G) = 0$ ako i samo ako je G nepovezan ili K_1
- $\kappa(G) = 1$ ako i samo ako G sadrži artikulacioni čvor ili je $G = K_2$

Definicija 1.1.30. *Granski separator* u grafu G je skup grana $F \subset E(G)$, takav da je $G - F$ nepovezan graf.

Definicija 1.1.31. Minimalan broj grana grafa G čijim se uklanjanjem dobija nepovezan graf naziva se *granska povezanost* i označava se sa $\kappa_1(G)$.

Važi

- $\kappa_1(G) = 0$ ako i samo ako je G nepovezan ili K_1
- $\kappa_1(G) = 1$ ako i samo ako je G povezan i sadrži most

Teorema 1.1.1. *Neka je G k-povezan graf i neka su $v, v_1, v_2, ..., v_k$, $k + 1$ različitih čvorova grafa G. Tada postoje putevi $v - v_i$ $(1 \leq i \leq k)$ koji imaju zajednički samo inicijalni čvor v.*

U ovom radu, osim Hamiltonovim grafovima, bavićemo se i Hamiltonovim digrafovima i turnirima. U naredno delu definisaćemo osnovne pojmove vezane za digrafove i turnire.

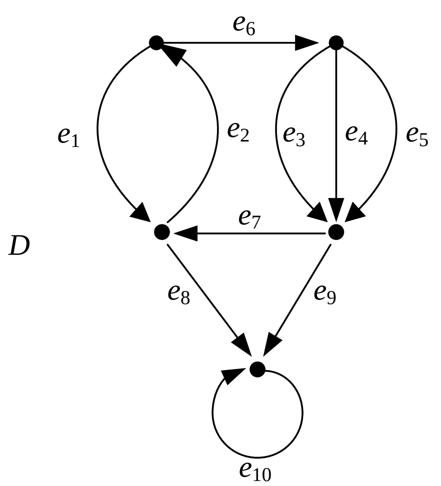
Definicija 1.1.32. *Orijentisani graf* ili *digraf D* je uređeni par $(V(D), E(D))$, gde je $V(D)$ konačan neprazan skup elemenata koje nazivamo čvorovima dok je $E(D)$ konačan skup *uređenih* parova elemenata iz $V(D)$ koje nazivamo granama.

Bitno je napomenuti da pojam *grana* kod orijentisanih grafova predstavlja *uređeni* par čvorova odnosno, ukoliko je $e = (u, v) \in E(D)$ kažemo da je grana e ***orijentisana od*** u ***ka*** v. Sa istim značenjem koriste se izrazi: e ***vodi od*** u ***ka*** v, u ***dominira*** (***pobeđuje, tuče***) v, odnosno v je ***dominiran*** (***pobedjen, tučen***) od u. Čvor u naziva se *početak*, a čvor v *kr*aj grane (u, v). Umesto (u, v) koristićemo oznaku uv. Činjenica da čvor u dominira čvor v označava se sa $u \to v$.

Definicija 1.1.33. *Paralelnim granama* nazivamo dve ili više grana digrafa koje imaju zajednički početak i zajednički kraj. Dve grane digrafa nazivamo *simetričnim* ako je početni čvor prve grane krajnji čvor druge grane, a krajnji čvor prve grane početni čvor druge.

Na isti način kao i kod neorijentisanih grafova definiče se *lupa*, odnosno *petlja*.

Većin pojmova iz teorije neorijentisanih grafova direktno se prenose na digrafove. Npr. *Orijentisan put* i *orijentisana kontura* definišu se isto kao i u neorijentisanom grafu s tim što je svuda prisutna orijentacija.



$V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
$E(D) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$
e_3, e_4, e_5 - paralelne
e_1, e_2 - simetrične
e_{10} - petlja (lupa)

Slika 17. Digraf

U daljem tekstu definisaćemo samo nove pojmove koji se sreću isključivo kod digrafova i posledica su orijentacije.

Definicija 1.1.34. Za čvorove u i v digrafa D kažemo da su *jako povezani* ako postoje $(u - v)$ $-$put i $(v - u)$ $-$ put u digrafu D.

Ukoliko pretpostavimo da je svaki čvor jako povezan sa samim sobom onda je jaka povezanost čvorova relacija ekvivalencije na skupu $V(D)$.

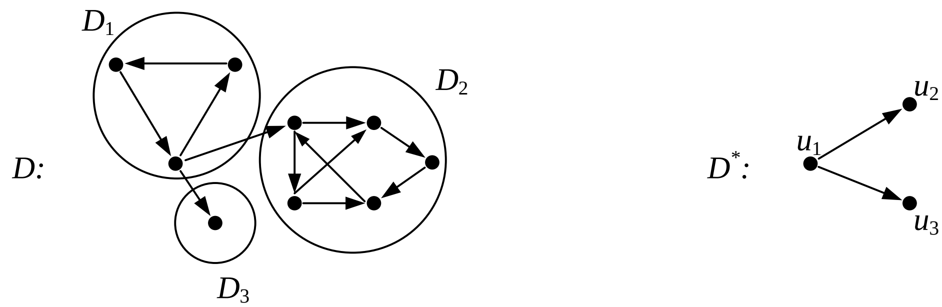
Definicija 1.1.35. *Komponenta jake povezanosti digrafa D* ili *komponenta dirafa D* je klasa ekvivalencije u odnosu na jaku povezanost.

Definicija 1.1.36. Digraf D je *jako povezan* ako i samo ako ima tačno jednu komponentu jake povezanosti, odnosno, ako su svaka dva njegova čvora jako povezana.

Narednu teoremu koristićemo u glavi 3 i navodimo je bez dokaza.

Teorema 1.1.2. *Digraf D je jako povezan ako i samo ako za svako razbijanje skupa čvorova $V(D)$ na dva neprazna podskupa V_1 i V_2, postoji bar jedna grana koja vodi iz V_1 u V_2 i bar jedna grana koja vodi iz V_2 u V_1.*

Definicija 1.1.37. *Kondenzat* digrafa D je digraf D^* definisan na sledeći način. Ako su $D_1, D_2, \ldots, D_k$ komponente digrafa D, tada je $V(D^*) = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$. Pri tome iz čvora u_i vodi grana u čvor u_j ako i samo ako u D postoji grana koja vodi od D_i ka D_j.

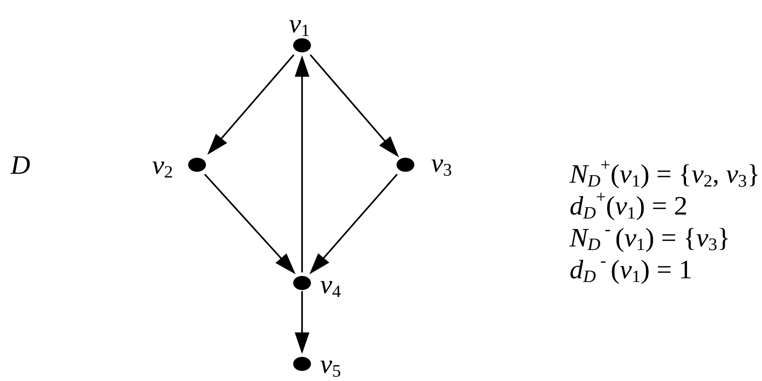


Slika 18. Kondenzat digrafa D

Definicija 1.1.38. *Izlazni skup čvora* $v \in V(D)$ je skup svih čvorova iz $V(D)$ koje čvor v dominira. Izlazni skup čvora $v \in V(D)$ označavamo sa $O_D(v)$ i pišemo $O_D(v) = \{x | x \in V(D), v \to x\}$. *Ulazni skup čvora* $v \in V(D)$ je skup svih čvorova iz $V(D)$ od kojih je čvor v dominiran. Ulazni čvor skupa $v \in V(D)$ označavamo sa $I_D(v)$ i pišemo $I_D(v) = \{x | x \in V(D), x \to v\}$.

Definicija 1.1.39. *Izlazni stepen čvora* $v \in V(D)$ predstavlja broj čvorova izlaznog skupa $O_D(v)$. Izlazni stepen čvora $v \in V(D)$ označavamo sa $d_D^+(v)$ i pišemo $d_D^+(v) = |O_D(v)|$. *Ulazni stepen čvora* $v \in V(D)$ predstavlja broj čvorova ulaznog skupa $I_D(v)$. Ulazni stepen čvora $v \in V(D)$ označavamo sa $d_D^-(v)$ i pišemo $d_D^-(v) = |I_D(v)|$.

Ukoliko je jasno o kojem digrafu je reč, u svim definisanim pojmovima indeks D može biti izostavljen.



Slika 19. Izlazni skup i izlazni stepen čvor

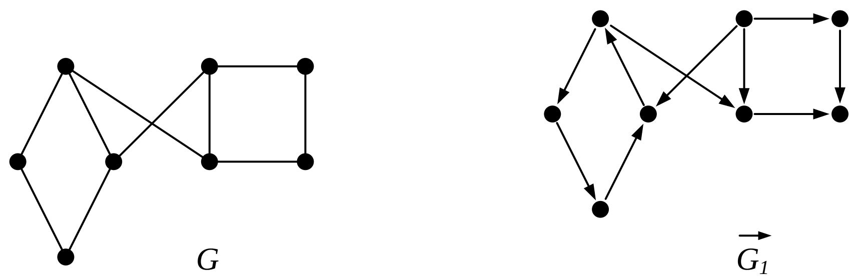
Na sličan način kao kod neorijentisanih grafova definiču se *minimalni izlazni stepen, minimalni ulazni stepen,* kao i *maksimalni izlazni stepen* i *maksimalni ulazni stepen.*

Definicija 1.1.40. *Totalni stepen čvora* $v \in V(D)$, u oznaci $d(v)$, definiše se kao $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$.

Definicija 1.1.41. *Podvučeni graf G* od digrafa *D* predstavlja neorijentisani graf koji se dobija tako što se u digrafu *D* zanemari orijentacija grana.

Definicija 1.1.42. *Orijentacija grafa G* predstavlja digraf *D*, koji se dobija tako što se svaka grana neorijentisanog grafa *G* orijentiše u jednom od dva moguća smera.

U zavisnosti od toga kako se pojedine grane neorijentisanog grafa orijentišu, isti graf može imati više orijentacija.

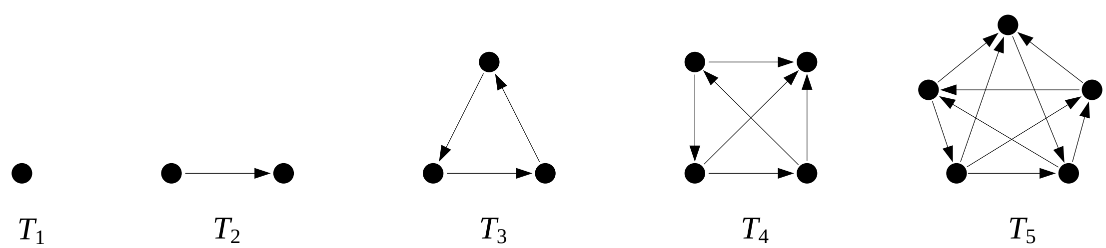


Slika 20. Orijentacija grafa *G*

Definicija 1.1.43. Ukoliko se orijentacijom grafa *G* dobije jako povezan digraf *D* kaže se da je takva orijentacija grafa *G jaka*.

Definisaćemo jednu klasu specijalnih digrafova kojom ćemo se baviti u ovom radu.

Definicija 1.1.44. *Turnir sa n čvorova*, u oznaci T_n, predstavlja proizvoljnu orijentaciju kompletnog grafa K_n.



Slika 21. Turnir

Kod turnira se često za izlazni stepen čvora *v* upostrebljava izraz *skor* i označava se sa $s(v)$. Dakle, $s(v) = d_D^+(v)$.

Definicija 1.1.45. Uređen n - torku $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ nazivamo *niz skorova* ili *skor-niz turnira* T_n, ako je $V(T_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i $s_i = s(v_i)$, gde je $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definicija 1.1.46. Turnir T_n je *tranzitivan* ako za svaka tri čvora $u, v, w \in V(T_n)$ iz $u \to v$ i $v \to w$ sledi $u \to w$.

1.2 Istorijat problema

Iako su proučavani ranije, od strane britanskog matematičara Tomasa Kirkmana (Thomas Penzngton Kirkman), pojam Hamiltonovih grafova vezuje se za poznatog irskog matematičara Vilijama Hamiltona (Ser William Rowan Hamilton). Godine 1857 Hamilton je predstavio igru na dodekaedru. Dodekaedar je jedan od pet pravilnih poliedara, Platonovih tela. Ima 12 strana i 20 temena, sve strane su pravilni petouglovi i u svakom temenu sustiču se po tri. Hamilton je svako teme obeležio imenima 20 svetskih metropola tog vremena. Cilj igre bio je da se nadje put duž ivica dodekaedra koji prolazi kroz svaku metropolu (teme) tačno jedanput i počinje i završava se u istoj metropoli (temenu). Ne postoje naznake da je igra ikada bila uspesno resena. Predmet Hamiltonove igre može da se opiše, radi bolje preglednosti i orijentacije, terminima teorije grafova. Odatle potiče izraz „Hamiltonov graf“. Umesto dodekaedra posmatramo njegovu stereografsku projekciju. Tada se Hamiltonov „put oko sveta“ svodi na konturu ko–ja prolazi kroz sve čvorove tako dobijenog grafa. Zanimljivo je pomenuti da je 1855. godine (dve godine pre nego što je Hamilton predstavio svoju igru) Kirkman izložio sledeći problem koji je poslao britanskom Kraljevskom Društvu (Royal Society): Da li je moguće za dati graf poliedra pronaći konturu koja prolazi kroz svako teme tačno jedanput? Dakle, iako je Hamiltonova igra izazvala više interesovanja za Hamiltonove grafove, možemo reći da je Kirkman začetnik te teorije.

Konture koje sadrže sve čvorove grafa nazivaju se **Hamiltonove konture**, a grafovi u kojima postoje takve konture **Hamiltonovi grafovi**. Jedan od najtežih i još uvek nerešenih problema teorije grafova je karakterizacija Hamiltonovih grafova. Do sada je otkriveno više potrebnih i više dovoljnih uslova da graf bude Hamiltonov, ali među njima nijedan nije istovremeno i potreban i dovoljan uslov.

Na primer, ako je G Hamiltonov graf tada zbog prisustva Hamiltonove konture nema artikulaci–onih čvorova. Prema tome graf G je 2-povezan. Zbog toga, potreban uslov za graf G da bude Hamiltonov je da je 2-povezan. Dakle, graf koji nije 2-povezan nije Hamiltonov. Međutim, 2-povezanost nije i dovoljan uslov. Na primer, Petersenov graf je 2-povezan, a nije Hamiltonov. Od dovoljnih uslova, jedan od najpoznatijih je Oreov. Ali on nije i potreban. Jedan od kontraprimera je kontura C_n ($n \geq 5$).

U narednim delovima daćemo detaljan pregled svih potrebnih i svih dovoljnih uslova.

Glava 2. Hamiltonovi grafovi

2.1 Potrebni uslovi

Nešto manje očigledan potreban uslov sadržan je u narednoj teoremi.

Teorema 2.1.1 *Ako je G Hamiltonov graf, tada za svaki pravi neprazan podskup $S \subset V(G)$ važi*

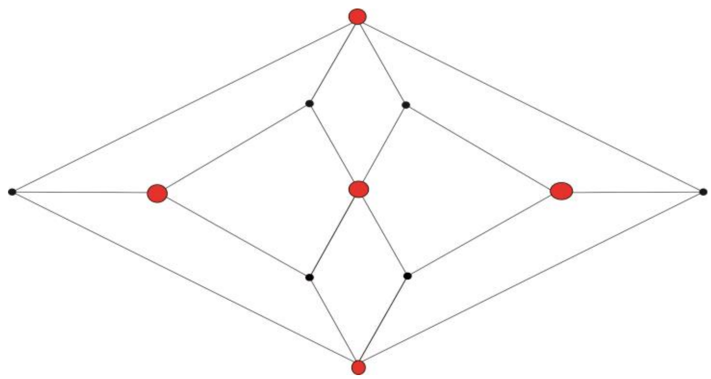
$$\omega\,(G - S) \leq |S|$$

Dokaz. Neka je $S \subset V(G)$ i pretpostavimo da je $\omega(G - S) = k \geq 1$, gde su $G_1, G_2, \ldots, G_k$ komponente $G - S$. Neka je C Hamiltonova kontura u G. Tada je $E(C) \subset E(G)$, pa važi $\omega(G - S) \leq \omega(C - S)$. Razlog je što se dodavanjem novih grana ne povećava broj komponenti. Međutim važi $\omega(C - S) \leq |S|$. Zaista, uklanjanjem određenog broja čvorova kontura se raspa–da na jedan ili više disjunktnih puteva. Pri tome jednakost važi samo u slučaju kada nikoja dva čvora iz S nisu susedi u konturi C. Tada se C raspada na tačno $|S|$ disjunktnih puteva. Iz navedenih jednakosti zaključujemo da važi $\omega(G - S) \leq |S|$.

■

Navedeni rezultat je često efikasan metod za dokaz da dati graf nije Hamiltonov. Sastoji se u tome da se uoči zgodan podskup S, takav da je $\omega(G - S) > |S|$.

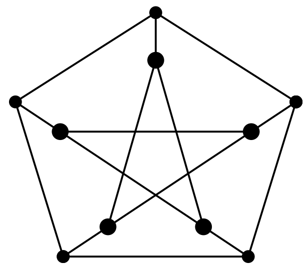
Primer. *Herschelov* graf nije Hamiltonov.



Slika 22. Herschelov graf

Označimo ga sa G. Neka skup S sadrži crvene čvorove grafa G. Tada je $|S| = 5$. Graf $G - S$ je $\overline{K_6}$ graf, pa važi $\omega(G - S) = 6$. Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da *Herschelov* graf nije Hamiltonov.

Uslov teoreme 2.2.1 nije i dovoljan. Za Petersenov graf G se može pokazati da je $\omega(G - S) \leq |S|$ za svaki $S \subset V(G)$. Međutim Petersenov graf nije Hamiltonov.



Slika 23. Petersenov graf

Ukoliko posmatramo samo samo skupove S kardinalnosti 1 dobijamo narednu posledicu:

Posledica 2.1.1 *Svaki Hamiltonov graf je* 2*-povezan*.

■

Kao i kod teoreme 2.1 i kod posledice 2.1.1 imamo da obrnuto tvrđenje ne važi. Na primer, neka je graf $G = K_{2,3}$ koji je 2−povezan. Neka je S particija skupa čvorova kardinalnosti 2. Tada je $\omega(G - S) = 3 > 2 = |S|$, što implicira, na osnovu teoreme 2.1.1, da G nije Hamiltonov graf.

Hvatal (V. Chvátal) je definisao da je graf G 1−*stabilan* ako $\omega(G - S) \leq |S|$ za svaki neprazan podskup S skupa $V(G)$. Na osnovu ove definicije iz teoreme 2.1 sledi

Posledica 2.1.2 *Svaki Hamiltonov graf je* 1*-stabilan*.

■

2.2 Dovoljni uslovi. Teoreme Orea i Diraka.

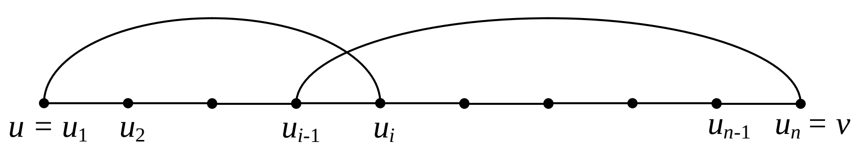
Dovoljni uslovi za Hamiltonove grafove su daleko brojniji od potrebnih. Najznačajniji među njima su teoreme Orea (O. Ore) i Diraka (G. Dirac). Kasnije, koristeći Oreovu ideju, Bondi (J. A. Bondy) i Hvatal (V. Chvatal) su dokazali tvrđenje koje će biti preteča pojma *zatvorenje grafa*.

Teorema 2.2.1 (O. Ore, 1960**).** *Ako je G graf sa n* ($n \geq 3$) *čvorova, takav da za svaka dva nesusedna čvora u i v važi*

$$d(u) + d(v) \geq n \,,$$

tada je G Hamiltonov graf.

Dokaz. Pretpostavimo da tvrđenje nije tačno, tj. da postoji graf sa n ($n \geq 3$) čvorova, koji zadovoljava uslov teoreme ali nije Hamiltonov. Među svim takvim grafovima uočimo maksima–lan, tj. onaj koji ima najviše grana i označimo ga sa G. Kako je kompletan graf K_n Hamiltonov za $n \geq 3$, sledi $G \neq K_n$. Neka su u i v dva nesusedna čvora u grafu G. Kako je G maksimalan kontraprimer s obzirom na broj grana, graf $G + uv$ je Hamiltonov. Ako je C Hamiltonova kontura, u i v su susedi na C. (U protivnom C bi bila Hamiltonova kontura u G, što je suprotno pretpostavci.) Stoga je $C - uv = P$ Hamiltonov put u G čiji su krajevi u i v. Neka je $P : u = u_1, u_2, \ldots, u_n = v$. Tvrdimo da ako $u_1u_i \in E(G)$, $2 \leq i \leq n$, onda $u_{i-1}u_n \notin E(G)$. Pretpostavimo suprotno, da za neko i , $2 \leq i \leq n$, $u_1u_i, u_{i-1}u_n \in E(G)$. Tada je $u_1u_iu_{i+1} \ldots u_nu_{i-1}u_{i-2} \ldots u_1$ Hamiltonova kontura u G, a to je kontradikcija s pretpostavkom da G nije Hamiltonov graf.



Slika 24.

Prema tome za svaki čvor iz skupa $\{u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ koji je povezan sa u_1 postoji čvor iz skupa $\{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\}$ koji nije povezan sa u_n. Odatle zaključujemo da je $d(u_n) \leq (n - 1) - d(u_1)$, odnosno

$$d(u) + d(v) \leq n - 1$$

što je kontradikcija sa uslovom teoreme. Dakle, G je Hamiltonov graf.

■

Oreova teorema nije potreban uslov da graf bude Hamiltonov. Jedan od kontraprimera je kontura C_n, $n \geq 5$. Za svaka dva nesusedna čvora $u, v \in V(G)$ važi $d(u) + d(v) = 4 < n$, ali C_n je očigle–dno Hamiltonov graf.

Međutim, Oreov uslov $d(u) + d(v) \geq n$ ne može ni da se oslabi. Naime, graf sa n čvorova u kojem za svaka dva nesusedna čvora u i v važi $d(u) + d(v) \geq n - 1$ ne mora da bude Hamiltonov. Primer je kompletan bipartitan graf $K_{k,\, k+1}$ koji ispunjava navedeni uslov ali nije Hamiltonov.

Direktna posledica Oreove teoreme je teorema Diraka.

Teorema 2.2.2 (G. Dirac, 1952**).** *Ako je G graf sa n ($n \geq 3$) čvorova, takav da je $d(u) \geq \frac{n}{2}$, za svako $u \in V(G)$, tada je G Hamiltonov graf.*

■

Kao što smo rekli Bondi i Hvatal, koristeći Oreovu ideju, dokazali su sledeću teoremu.

Teorema 2.2.3 (J.A. Bondy, V. Chvatal, 1976**).** *Neka je G graf sa n čvorova i neka su u i v dva nesusedna čvora u G, takva da je $d(u) + d(v) \geq n$. Tada je graf $G + uv$ Hamiltonov ako i samo ako je G Hamiltonov.*

Dokaz. Ako je G Hamiltonov graf, onda je, očigledno, i $G + uv$ Hamiltonov graf. Obrnuto, pretpostavimo da je $G + uv$ Hamiltonov graf, a da G nije. Tada, kao u dokazu Oreove teoreme, dobijamo $d(u) + d(v) \leq n - 1$, što je kontradikcija s uslovom teoreme.

■

Kao što smo već rekli u uvodnom delu ovog rada, skup suseda čvora v u grafu G, u oznaci $N(v)$, predstavlja skup svih čvorova grafa G koji su povezani sa v. Sledeće tvrđenje predstavlja dovoljan uslov zasnovan na kardinalnom broju unije skupova suseda dva nesusedna čvora u 2-povezanom grafu.

Teorema 2.2.4 (R.J. Faudree, R.J. Jacobson, R.H. Schelp, 1989**)** *Neka je G 2−povezan graf sa n čvorova. Ako za svaka dva nesusedna čvora grafa G važi*

$$| N(u) \cup N(v) | \geq \frac{2n-1}{3}$$

tada je G Hamiltonov graf.

Dokaz. Kako je G 2-povezan graf, na osnovu teoreme "*Graf sa n čvorova je 2-povezan ako i samo ako svaka dva čvora leže na konturi*", sledi da graf G sadrži bar jednu konturu. Od svih kontura koje sadrži graf G obeležimo sa C konturu maksimalne dužine. Pokazaćemo da je C Hamiltonova kontura. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji čvor $w_0 \in V(G) - V(C)$. Posledi–ca poznate Mengerove teoreme je teorema 1.1.1, navedena u uvodnom delu ovog rada.

U specijalnom slučaju $k = 2$ u našem grafu G postoje putevi P_1 i P_2, koji imaju zajednički samo inicijalni čvor w_0 i čiji se završni čvorovi, obeležimo ih sa v_1 i v_2, nalaze na konturi C. Pritom su v_1 i v_2 jedini zajednički čvorovi P_1 i C, odnosno P_2 i C. Fiksirajmo jednu orijentaciju konture C i u njoj označimo sa w_1 i w_2 redom sledbenike v_1 i v_2. Nijedan od čvorova w_1 i w_2 nije susedan čvoru w_0. Zaista, ako bi w_iw_0, $1 \leq i \leq 2$, bila grana u G, granu v_iw_i možemo zameniti putem $P_i + w_0w_i$ čime dobijamo konturu dužine bar $|V(C)| + 1$. To je kontradikciju sa izborom konture C. Iz sličnog razloga čvorovi w_1 i w_2 nisu susedni, tj. $w_1w_2 \notin E(G)$, odnosno $v_1v_2 \notin E(C)$. Dakle, $\{w_0, w_1, w_2\}$ je skup nezavisnih čvorova u G; nikoja dva od njih nisu susedi u G. Na sličan način, maksimalnost konture C povlači da nijedan čvor iz G, koji je van C, nije sused s dva čvora skupa $\{w_0, w_1, w_2\}$. Dalje ćemo pokazati da za neka dva čvora w_k, w_l, gde je $\{k, l\} \subset \{0, 1, 2\}$ važi $| N(w_k) \cup N(w_l) | < \frac{2n-1}{3}$, što je kontradikcija s uslovom teoreme. Uvedimo oznake R, S, T za sledeće skupove. R je skup čvorova iz G koji nisu susedi ni sa jednim od čvorova w_0, w_1, w_2. S je skup čvorova iz G koji su susedi sa tačno jednim od čvorova w_0, w_1, w_2. Najzad, T je skup čvorova iz G koji su susedi sa bar dva čvora od w_0, w_1, w_2. Dalje, neka je $R_C = R \cap V(C)$ i neka je $R_{C'} = R \setminus V(C)$. Iz definicije skupa R sledi $\{w_0, w_1, w_2\} \subseteq R$ i $w_0 \in R_{C'}$. Otuda je

$$| R_{C'} | \geq 1. \qquad (*)$$

Osim toga je, kao što je prethodno utvrđeno,

$$(V(G) \setminus V(C)) \cap T = \emptyset. \qquad (**)$$

Neka su r_1 i r_2 dva uzastopna čvora iz R na konturi C. Pokazaćemo da na C, između r_1 i r_2, leže najviše dva čvota iz T. Kako $\{w_0, w_1, w_2\} \subseteq R$, čvorovi r_1 i r_2 nalaze se ili na putu $w_1 - w_2$ ili na putu $w_2 - w_1$ na konturi C. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da r_1 i r_2 pripadaju, tim redom, putu $w_1 - w_2$. Neka je P $(r_1 - r_2)$ − put na konturi C. Tada je svaki unutrašnji čvor puta P sused sa bar jednim od čvorova w_0, w_1, w_2. Neka su sa v i v' označeni susedni čvorovi na P, takvi da $v \in N(w_i)$, $v' \in N(w_j)$, za neke i, j, $0 \leq i \neq j \leq 2$. Primetimo da je $i \neq 0$. Zaista, za $i = 0$ je $j = 1$ ili $j = 2$. No tada, u oba slučaja, dobijamo konturu dužu od C; kontadikcija sa izborom konture C. Dalje, ako je $i = 2$, onda je $j = 0$, jer u suprotnom ponovo dobijamo konturu dužu od C. Konačno, ako je $i = 1$, onda je $j = 1$ ili $j = 2$. Dakle, ako uvedemo sledeće oznake $N_0 = V(P) \cap N(w_0)$, $N_1 = V(P) \cap N(w_1)$, $N_2 = V(P) \cap N(w_2)$, možemo zaključiti sledeće:

(i) Svaki od N_i se sastoji od (moguće praznih) nizova uzastopnih unutrašnjih čvorova puta P

(ii) Svaki element iz N_1 prethodi ili je jednak svakom elementu iz N_2 i svaki element iz N_2 prethodi svakom elementu iz N_0

(iii) $| N_1 \cap N_2 | \leq 1$, $| N_2 \cap N_0 | \leq 1$ i $| N_1 \cap N_0 |$ je jednak 0 ili najviše 1, u zavisnosti od toga da li je $N_2 = \emptyset$ ili $N_2 \neq \emptyset$

Kako svaki element iz T koji se nalazi između r_1 i r_2 mora biti u preseku dva od sku–pova N_i, $0 \leq i \leq 2$, sledi da se najviše dva elementa iz skupa T nalaze između r_1 i r_2. Za kraj dokaza, izaberimo j, $0 \leq j \leq 2$, tako da w_j ima makismalan broj suseda u S. Ako taj broj obeležimo sa s, tada je $s \geq \frac{|S|}{3}$. Kako, prema (**), ne postoje čvorovi van konture C koji su susedi sa dva od čvorova w_0, w_1, w_2, broj čvorova iz skupa S koji nisu na konturi C je $n - |V(C)| - |R_{C'}|$. Iz prethodnog razmatranja zaključujemo da je broj čvorova iz skupa S na konturi C bar $|V(C)| - 3|R_C|$. Otuda je,

$$\begin{aligned} |S| = |S \setminus V(C)| + |S \cap V(C)| &\geq (n - |V(C)| - |R_{C'}|) + (|V(C)| - 3|R_C|) \\ &= n - |R_{C'}| - 3|R_C|, \end{aligned}$$

I zbog toga važi

$$s \geq \frac{|S|}{3} \geq \frac{n}{3} - \frac{|R_{C'}|}{3} - |R_C|$$

Međutim, tada su w_k i w_l, $0 \leq l \neq k \leq 2$; $l, k \neq j$, nesusedni čvorovi u G, za koje važi

$$|N(w_k) \cup N(w_l)| = n - |R| - s = n - |R_{C'}| - |R_C| - s \leq \frac{2n}{3} - \frac{2|R_{C'}|}{3}.$$

Iz (*) znamo da je $|R_{C'}| \geq 1$. Stoga je

$$|N(w_k) \cup N(w_l)| \leq \frac{2n-2}{3} < \frac{2n-1}{3}$$

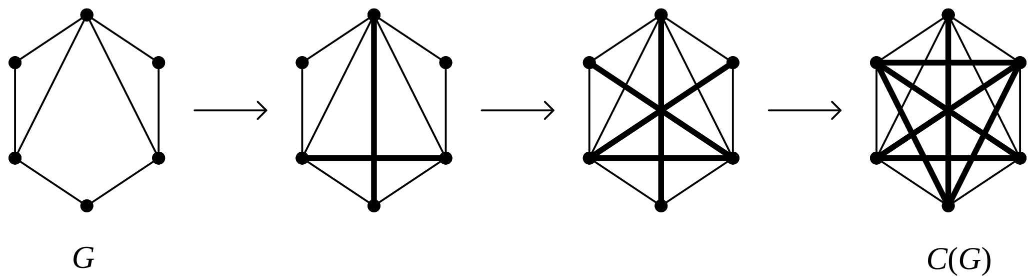
čime je dokaz završen.

■

2.3 Zatvorenje grafa i teorema Hvatala

Kao što smo rekli, teorema Bondia i Hvatala, dala je motivaciju za uvođenje sledeće definicije.

Definicija 2.3.1. *Zatvorenje* grafa G sa n čvorova, u oznaci $C(G)$, predstavlja graf koji se dobija od grafa G sukcesivnim dodavanjem grana koje povezuju nesusedne čvorove čiji je zbir stepena bar n, pri čemu se stepeni čvorova računaju u odnosu na postojeće grafove koji nastaju nakon svakog dodavanja nove grane. Dodavanja grana se vrše sve dok takvih nesusednih čvorova ima.



Slika 25. Zatvorenje grafa

Da završni graf $C(G)$ ne zavisi od redosleda dodavanja novih grana, odnosno da je definicija zatvorenja grafa dobra, pokazuje sledeća teorema.

Teorema 2.3.1. *Neka je G graf sa n čvorova. Ako su G_1 i G_2 grafovi dobijeni sukcesivnim dodavanjem grana koje povezuju nesusedne čvorove, čiji je zbir stepena bar n, onda je $G_1 = G_2$.*

Dokaz. Neka su G_1 i G_2 završni grafovi dobijeni sukcesivnim dodavanjem grana $e_1, e_2, ..., e_i$, odnosno $f_1, f_2, ..., f_j$ grafu G, respektivno. (To znači da ni u grafu G_1, ni u grafu G_2, nema nesusednih čvorova čiji je zbir stepena bar n.) Da bi dokazali da je $G_1 = G_2$ dovoljno je pokazati da je za svako k, $1 \leq k \leq i$, e_k grana u G_2 i za svako k, $1 \leq k \leq j$, f_k je grana u G_1, tj. da je $\{e_1, e_2, ..., e_i\} = \{f_1, f_2, ..., f_j\}$. Pretpostavimo suprotno. Tada jedan od navedenih skupova sadrži granu koje nema u drugom skupu. Bez umanjenja opštosti možemo uzeti da postoji ceo broj k, $1 \leq k \leq i$, takav da $\{e_1, e_2, ..., e_k\} \subset \{f_1, f_2, ..., f_j\}$ i $e_{k+1} = uv \notin \{f_1, f_2, ..., f_j\}$. Neka je G_3 graf dobijen dodavanjem grana $e_1, e_2, ..., e_k$ grafu G. Kako $e_{k+1} \in E(G_1)$, iz definicje zatvorenja sledi $d_{G_3}(u) + d_{G_3}(v) \geq n$. Iz činjenice da je G_3 podgraf od G_2 sledi da je $d_{G_2}(v) + d_{G_2}(u) \geq d_{G_3}(u) + d_{G_3}(v) \geq n$. Međutim, čvorovi u i v nisu susedni u G_2, pa dobijamo kontradikciju sa definicijom zatvorenja grafa.

$\blacksquare$

Sledeća teorema je direktna posledica definicije zatvorenja grafa i teoreme 2.2.3.

Teorema 2.3.2. *Graf G je Hamiltonov ako i samo ako je $C(G)$ Hamiltonov graf.*

■

Kako je svaki kompletan graf, sa bar tri čvora, Hamiltonov, dobijamo da je Bondijev i Hvatalov uslov dovoljan da je graf Hamiltonov.

Teorema 2.3.3. *Neka graf G sadrži bar tri čvora. Ako je $C(G)$ kompletan graf, tada je G Hamiltonov graf.*

■

Ako graf G zadovoljava uslov teoreme 2.2.1 onda je $C(G)$ kompletan graf, i tada je, na osnovu teoreme 2.3.3, G Hamiltonov graf. Stoga je Oreova teorema posledica teoreme 2.3.3. Interesantno je da je najveći broj dovoljnih uslova, izraženih preko stepena čvorova, za Hamiltonove grafove upravo posledica teoreme 2.3.3. Naredna teorema je jedna od najpoznatijih iz te grupe, a ona je rezultat Hvatala.

Teorema 2.3.4. *Neka je G graf sa n, $n \geq 3$, čvorova čiji stepeni d_i, $1 \leq i \leq n$, zadovoljavaju nejdnakost $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$. Ako ne postoji prirodan broj k, $k < \frac{n}{2}$, takav da je $d_k < k$ i $d_{n-k} < n - k - 1$, tada je G Hamiltonov graf.*

Dokaz. Prema teoremi 2.3.3, dovoljno je da pokažemo da je $C(G)$ kompletan graf. Pretpostavimo suprotno. Tada u $C(G)$ postoje nesusedni čvorovi. Neka su u i v nesusedni čvorovi u $C(G)$, takvi da je zbir $d_{C(G)}(u) + d_{C(G)}(v)$ najveći. Kako $uv \notin E(C(G))$ i $C(G)$ je zatvorenje, sledi $d_{C(G)}(u) + d_{C(G)}(v) \leq n - 1$. Pretpostavimo, bez umanjenja opštosti, da je $d_{C(G)}(u) \leq d_{C(G)}(v)$. Ako je $d_{C(G)}(u) = k$, tada iz prethodna dva uslova sledi $k \leq \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2}$ i $d_{C(G)}(v) \leq n - 1 - k$. Obeležimo sa W skup svih čvorova različitih od v koji nisu susedi sa v u $C(G)$. Tada je $|W| = n - 1 - d_{C(G)}(v) \geq k$. Ako je w proizvoljan čvor iz W, tada zbog izbora čvorova u i v važi $d_G(w) \leq d_{C(G)}(w) \leq d_{C(G)}(u) = k$, tj. $d_G(w) \leq k$. Dakle, svaki čvor skupa W, a ima ih bar k, ima u grafu G stepen $\leq k$. Kako su stepeni poređani po veličini, $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$, sledi $d_k \leq k$, $k < \frac{n}{2}$. Slično, obeležimo sa U skup svih čvorova različitih od u koji nisu su–sedi sa u u $C(G)$. Tada $v \notin U$ i $|U| = n - 1 - d_{C(G)}(u) = n - 1 - k$. Zbog izbora čvorova u i v, za svaki čvor w iz U važi $d_G(w) \leq d_{C(G)}(w) \leq d_{C(G)}(v) \leq n - 1 - k$. Iz toga zaključujemo da U sadrži $n - 1 - k$ čvorova od kojih svaki ima stepen $\leq n - 1 - k$ u grafu G. Kako $u \notin U$, a važi $d_G(u) \leq d_{C(G)}(u) \leq d_{C(G)}(v) \leq n - 1 - k$, zaključujemo da G sadrži $n - k$ čvorova $(U \cup \{u\})$ koji imaju stepene $\leq n - 1 - k$. Kako su stepeni poređani po veličini, $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$, sledi da je $d_{n-k} \leq n - k - 1$. Međutim, to je kontradikcija sa uslovom teoreme. Dakle, $C(G)$ je kompletan graf, pa je G Hamiltonov.

■

2.4 Hamiltonski povezani grafovi

Pre nego što počnemo da se bavimo Hamiltonski povezanim grafovima, definisaćemo pojam *Hamiltonovog puta* u proizvoljnom grafu.

Još jedan vrlo bitan pojam vezan za Hamiltonove grafove definiše se preko Hamiltonovih puteva.

Definicija 2.4.1. Graf G je *Hamiltonski povezan* ako za svaka dva razlicita čvora u, v grafa G postoji $(u - v)$ − Hamiltonov put u grafu G.

Lako se uočava da je Hamiltonski povezan graf sa bar 3 čvora Hamiltonov. Obrnuto ne mora da važi. Kontraprimer je, recimo, kontura C_n, $n \geq 4$. Potreban i dovoljan uslov za Hamiltonski povezane grafove nije poznat. Postoji nekoliko dovoljnih uslova koji se zasnivaju na sledećoj, možemo slobodno reći, modifikovanoj ideji zatvorenja grafa.

Definicija 2.4.2. $(n + 1)$ − *zatvorenje grafa* grafa G sa n čvorova, u oznaci $C_{n+1}(G)$, definiše se kao graf koji se dobija od grafa G sukcesivnim dodavanjem grana koje povezuju nesusedne čvorove čiji je zbir stepena bar $n + 1$. Dodavanje grana se izvodi se sve dok takvih čvorova ima, a njihovi stepeni računaju se u donosu na postojeći graf koji je nastao prethodnim dodavanjem grana.

Ranije definisano zatvorenje grafa G, u oznaci $C(G)$, je u stvari n-zatvorenje. Nakon ove definicije imamo teoremu analognu teoremi 2.3.3. , koja je, takodje, Bondijev I Hvatalov rezultat.

Teorema 2.4.1. *Neka je G graf sa n čvorova. Ako je $C_{n+1}(G)$ kompletan graf, tada je G Hamiltonski povezan.*

Dokaz. Kako je slučaj $n = 1$ trivijalan, uzmimo da je $n \geq 2$. Neka je G graf sa n čvorova, $n \geq 2$, čije je $(n + 1)$ − zatvorenje kompletan graf, i neka su u i v dva proizvoljna čvora grafa G. Pokazaćemo da tada graf G sadrži $(u - v)$ − Hamiltonov put. Neka je G' graf sa $n + 1$ čvorova koji se dobija od grafa G dodavanjem novog čvora w i grana uw i vw. Kako je $C_{n+1}(G)$ kompletan graf i $|V(G')| = n + 1$, podgraf grafa $C(G')$, indukovan sa $V(G)$, takođe je kompletan graf. Odatle zaključujemo da je $d_{C(G')}(x) \geq n - 1$, za svako $x \in V(G)$. Sada sledi $d_{C(G')}(x) + d_{C(G')}(w) \geq n + 1 = |V(G')|$. Na osnovu teorema 2.2.1 i 2.3.2 sledi da je $C(G')$ kompletan graf i da je G' Hamiltonov graf. Obeležimo sa C' Hamiltonovu kontru u grafu G'. Iz činjenice da su u i v jedini susedi čvora w u grafu G'zaključujemo da su u, w i v tri uzastopna čvora na konturi C'. Uklanjanjem čvora w graf G' prelazi u graf G, a kontura C' u Hamiltonov $(u{-}v)$−put u grafu G.

Dakle, za svaka dva čvora u i v grafa G postoji $(u - v)$ −Hamiltonov put, te je G Hamiltonski povezan. ■

Naredna tri tvrđenja su direktne posledice Oreove teoreme, Dirakove teoreme i prethodnog tvrđenja, redom.

Teorema 2.4.2. *Ako u grafu G za svaka dva nesusedna čvora u i v važi*

$$d(u) + d(v) \geq n + 1$$

tada je G Hamiltonski povezan graf.

■

Teorema 2.4.3. *Ako u grafu G sa n čvorova za svaki čvor u važi*

$$d(u) \geq \frac{n+1}{2}$$

tada je G Hamiltonski povezan graf.

■

Teorema 2.4.4. *Neka je G graf sa n,* $n \geq 3$*, čvorova čiji stepeni* d_i, $1 \leq i \leq n$*, zadovoljavaju nejednakost* $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$*. Ako ne postoji prirodan broj k,* $k < \frac{n}{2}$*, takav da je* $d_k < k$ *i* $d_{n-k} < n - k$*, tada je G Hamiltonski povezan graf.*

■

2.5 Hamiltonovi planarni grafovi i teorema Grinberga

Definicija 2.5.1. Graf *G* je *planaran* ako se može smetiti u ravan, tako da su ispunjeni sledeći uslovi. Čvorovima grafa *G* odgovaraju tačke u ravni, a granama lukovi Žordanovih krivih koji spajaju susedne čvorove. Pritom, dve grane (dva Žordanova luka) nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka.

Za zatvorene Žordanove krive važi sledeće tvrđenje.

Teorema 2.5.1. (Jordan, 1887**)** *Svaka zatvorena Jordanova kriva J u ravni* (*na sferi*) *deli preos–tale tačke ravni* (*sfere*) *na dva povezana skupa, unutrašnjost – int J I spoljašnjost – ext J.*

■

Za planarne grafove važi sledeće tvrđenje.

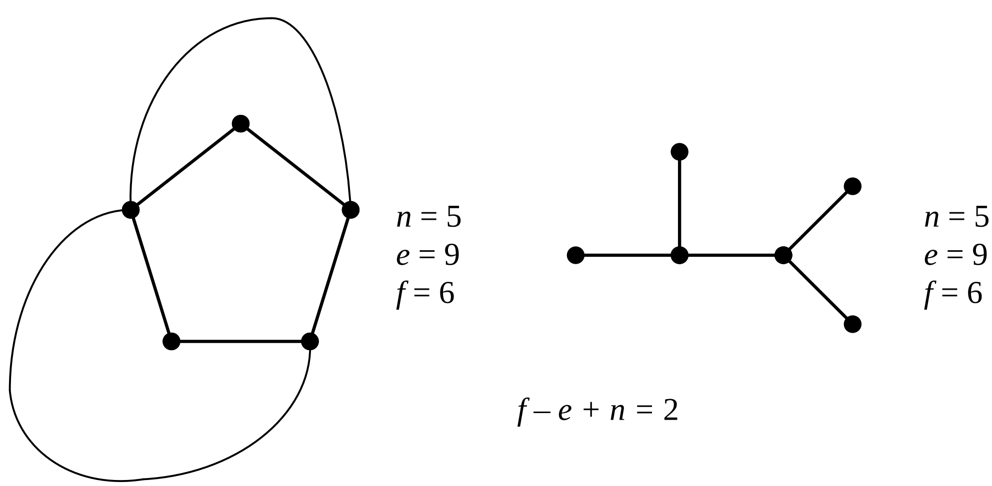
Definicija 2.5.2. Povezani delovi ravni (sfere) na koje planaran graf deli ravan (sferu) zovu se *oblasti*.

Ojler je otkrio sledeću vezu između brojeva oblasti, grana i čvorova planarnog grafa.

Teorema 2.5.2. (Euler, 1752) *Ako je G povezan planaran graf sa n čvorova, e grana i f oblasti na koje deli ravan, odnosno sferu, tada je*

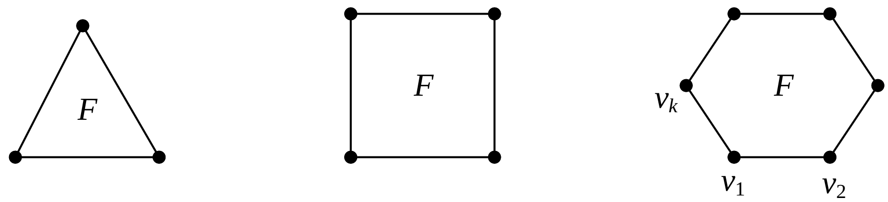
$$f - e + n = 2$$

■



Slika 26.

Definicija 2.5.3. Neka je F oblast u ravni ograničena konturom C. *Stepen oblasti* F, u oznaci $d(F)$, definiše se kao dužina konture C.

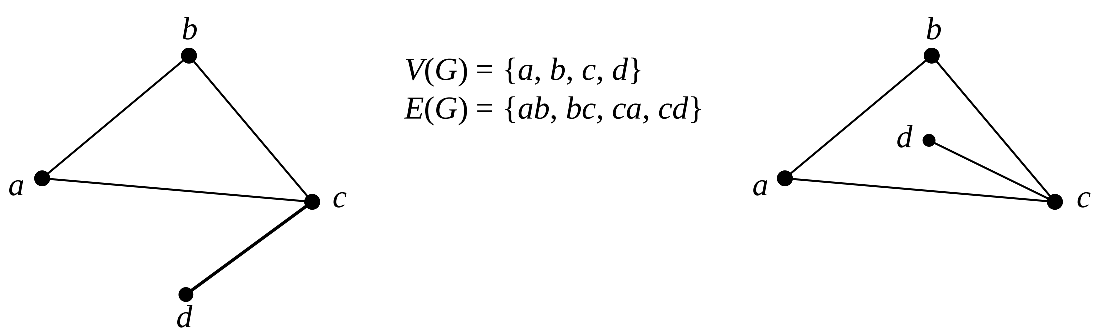


$d(F) = 3$ trougao | $d(F) = 4$ četvorougao | $d(F) = k$ k-ugao

Slika 27.

Prethodnu definiciju možemo uopštiti. Potreba za uopštenjem se javlja ukoliko posmatramo grafove koji imaju jedan ili više mostova, jer se u tom slučaju most računa dva puta. Naime, stepen oblasti je dužina najkraće zatvorene šetnje koja ide rubom dotične oblasti. Ukoliko je graf granski 2-povezan, odnosno, ukoliko je povezan i nema mostova, tada se stepen oblasti svodi na dužinu konture koja ograničava oblast.

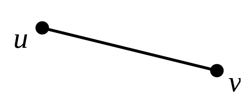
Primer.



Slika 28.

U primeru na slici 28. graf G je, očigledno, planaran. Ukoliko se čvor d nalazi u spoljašnjoj (beskonačnoj) oblasti tada je stepen te oblasti jednak 5. Najkraća šetnja njenim rubom je *dcabcd*, koja je dužine 5. Ako bi čvor d bio u unutrašnjosti trougla *abc*, tada bi stepen te unutrašnje (konačne) oblasti takođe bio 5. U pitanju je ista šetnja kao u prethodnom slučaju.

Primer.



Slika 29.

Na slici 29. dat je graf K_2. On je planaran i ima samo spoljašnju oblast. Njen stepen je 2, a šetnja je *uvu*.

Ako je G povezan planaran graf sa n čvorova koji ne sadrži mostove, tada za svaku oblast F važi $3 \leq d(F) \leq n$. Ako je f broj oblasti na koje planaran graf deli ravan, tada je očigledno

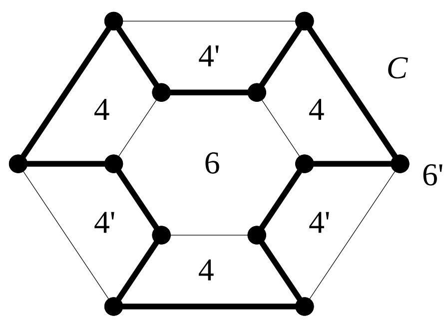
$$f = f_3 + \cdots + f_n ,$$

gde f_i predstavlja broj oblasti stepena i,$3 \leq i \leq n$.

Definicija 2.5.4. *Planaran Hamiltonov graf* je planaran graf koji sadrži Hamiltonovu konturu.

Ni za planarne grafove nije poznat potreban i dovoljan uslov da budu Hamiltonovi. Predstavićemo jedan od najpoznatijih potrebnih uslova. Pre toga, nekoliko novih pojmova i oznaka.

Neka je G planaran Hamiltonov graf smešten u ravan i neka je C Hamiltonova kontura u grafu G. Obeležimo sa f_i broj oblasti stepena i u unutrašnjosti konture C, a sa f_i' broj oblasti stepena i u spoljašnjosti konture C. U primeru na slici 28 je $f_4 = 3$ i $f_4' = 3$



Slika 30.

Sledeću teoremu formulisao je i dokazao Grinberg, 1968.godine.

Teorema 2.5.3. (Grinberg, 1968**)** *Ako je G planaran Hamiltonov graf sa n,* $n \geq 3$, *čvorova, tada za bilo koju njegovu Hamiltonovu konturu važi*

$$\sum_{i=3}^{n} (i-2)(f_i - f_i') = 0$$

Dokaz. Neka je G planaran Hamiltonov graf i neka je C Hamiltonova kontura u G. Tetiva konture C je grana grafa G koja spaja dva nesusedna čvora grafa G. Obeležimo sa a broj tetiva koje leže u unutrašnjosti konture C, a sa b broj tetiva koje leže u spoljašnjosti konture C. Tada možemo da zaključimo da važi

$$\sum_{i=3}^{n} f_i = a + 1 \qquad (1)$$

gde $\sum_{i=3}^{n} f_i$ predstavlja broj oblasti u unutrašnjosti konture *C*. Dalje, ako za svaku od a + 1 unu–trašnjih oblasti uočimo broj grana na rubu i to saberemo, dobijamo sledeću jednakost

$$\sum_{i=3}^{n} i f_i = 2a + n \qquad (2)$$

Jednakost sledi iz činjenice da je svaka od a unutrašnjih tetiva zajednička za dve unutrašnje oblasti, pa se stoga računa dvaput. S druge strane, svaka od *n* tetiva Hamitonove konture računa se jedanput. Iz (1) i (2) sledi

$$\sum_{i=3}^{n} (i-2) f_i = n - 2$$

Na sličan način, posmatrajući tetive u spoljašnjosti konture *C*, broj oblasti na koji je dele, I broj grana koje okružuju sve te oblasti, zaključujemo da je

$$\sum_{i=3}^{n} (i-2) f_i^{'} = n - 2$$

Iz poslednje dve jednakosti sledi tvrđenje teoreme.

■

Naredno razmatranje pokazalo se kao veoma korisno prilikom primene teoreme Grinberga. Neka je *G* planaran Hamiltonov graf sa Hamiltonovom konturom *C* koji je smešten u ravan. Pretpostavimo da je grana $e \in E(G)$ na granici dve oblasti, F_1 i F_2, grafa *G*. Ako grana *e* leži na konturi *C* onda se jedna od oblasti, F_1 ili F_2, nalazi u unutrašnjosti konture *C*, a druga u njenoj spoljašnjosti. Ako *e* ne leži na konturi *C* onda su obe oblasti F_1 i F_2 u unutrašnjosti ili obe u spoljašnjosti *C*.

1880.godine engleski matematičar Tejt (P. G. Tait) je postavio hipotezu da je svaki 3-povezan planaran graf Hamiltonov graf. Ovo tvrđenje je, 1946.godine, opovrgao matematičar Tat (W. Tutte) konstruišući kontraprimer. Osim toga Tat je dokazao da je svaki 4-povezan planaran graf Hamiltonov graf. Ovaj rezultat je kasnije proširen od strane Tomasena (C. Thomassen).

Teorema 2.5.4. *Svaki* 4-*povezan planarni graf je Hamiltonski povezan.*

■

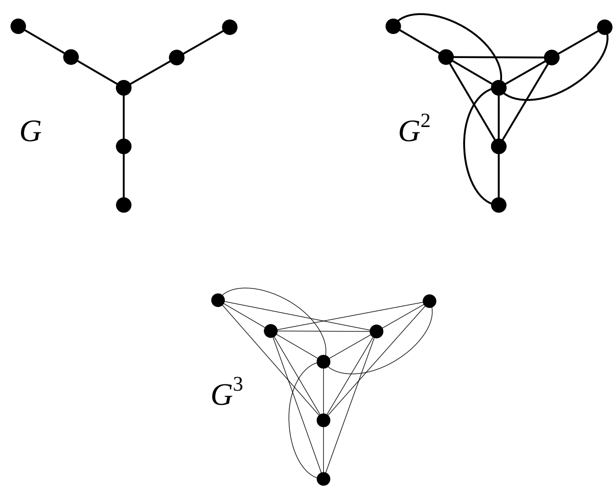
2.6 Stepen grafa i Hamiltonove konture u G^3

U ovom delu krećemo od definicije stepena grafa, a potom ćemo dati pregled važnijih tvrđenja koja povezuju kvadrat i kub grafa s Hamiltonovim grafovima.

Definicija 2.6.1. *k-ti stepen* povezanog grafa G, u oznaci G^k, gde je $k \geq 1$, je graf koji ima sledeće osobine

1. $V(G^k) = V(G)$
2. $uv \in E(G^k)$ ako i samo ako je $1 \leq d_G(u, v) \leq k$

Grafove G^2 i G^3 nazivaćemo kvadrat i kub grafa G, respektivno.



Slika 31. Kvadrat i kub grafa G

Kako k-ti stepen, G^k, povezanog grafa G sadrži G kao svoj podgraf, zaključujemo da ako je G Hamiltonov graf, tada je i G^k Hamiltonov graf. Bez obzira da li je G Hamiltonov graf ili nije, za povezan graf G, sa bar 3 čvora, i za dovoljno veliko k, graf G^k je Hamiltonov, zbog toga što ako graf G ima dijametar d onda je G^d kompletan graf. Prirodno se postavlja pitanje: koji je najmanji broj k za koji je G^k Hamiltonov graf? Graf G na sl. 29 pokazuje da $k = 2$ nije minimalan broj. Naime, posmatrajmo grane iz krajnjih čvorova koji su stepena 2 i pretpostavimo da postoji Hamiltonova kontura. Tada ona prolazi kroz obe grane u svakom od njih. No tada ona u srednjem čvoru sadrži 3 grane, što je kontradikcija. Međutim, graf G^3 u tom primeru jeste Hamiltonov. Tačno je, zapravo, da je kub svakog povezanog grafa sa bar 3 čvora Hamiltonov graf. Štaviše, postoji jači rezultat.

Teorema 2.6.1. (J. J. Karaganis, M. Sekanina**)** *Ako je G povezan graf, tada je G^3 Hamiltonski povezan graf.*

Dokaz. Ako je H stablo koje koje sadrži sve čvorove grafa G i ako je H^3 Hamiltonski povezan, tada je i G^3 Hamiltonski povezan graf. Otuda, zaključujemo da je dovoljno pokazati da je kub svakog stabla Hamiltonski povezan graf. Dokaz izvodimo indukcijom po broju čvorova stabla. Za male vrednosti n tvrđenje je očigledno. Pretpostavimo da je za svako stablo H, sa manje od n čvorova, H^3 Hamiltonski povezan graf. Neka je T stablo sa n čvorova. Neka su u i v dva proizvoljna čvora stabla T. Posmatraćemo dva slučaja.

Prvi slučaj. Pretpostavimo da su u i v susedi u T. Neka je $e = uv$ i posmatramo šumu $T-e$. Ova šuma ima dve komponente. Jednu čini stablo T_u koje sadrži čvor u, a drugu stablo T_v koje sadrži čvor v. Na osnovu induktivne pretpostavke zaključujemo da su T_u^3 i T_v^3 Hamiltonski povezani. Neka je u_1 bilo koji čvor u T_u koji je susedan sa u i neka je v_1 bilo koji čvor u T_v susedan sa v. Ako je T_u ili T_v trivijalno stablo, u smislu da jedno od ta dva stabla ima samo jedan čvor, uzimamo da je $u_1 = u$ ili $v_1 = v$, respektivno. Primetimo da su u_1 i v_1 susedi u T^3 jer važi da je $d_T(u_1, v_1) \leq 3$. Neka je P_u Hamiltonov $(u-u_1)$-put u T_u^3 i neka je P_v Hamiltonov $v-v_1$ put u T_v^3 . Ovi putevi mogu biti trivijalni. Put koji se sastoji od puta P_u , grane u_1v_1 i puta P_v predstavlja Hamiltonov $(u-v)$-put u T^3.

Drugi slučaj. Pretpostavimo da u i v nisu susedi u T. Iz činjenice da je T stablo znamo da postoji jedinstveni put između svaka dva njegova čvora. Neka je P jedinstveni $(u-v)$-put u T, i neka je $f = uw$ grana puta P koja sadrži čvor u. Graf $T - f$ sastoji se od dva stabla. Jedno stablo, obeležimo ga sa T_u, koje sadrži čvor u, i drugo stablo, obeležimo ga sa T_w, koje sadrži čvor w. Prema induktivnoj hipotezi znamo da postoji Hamiltonov w-v put P_w u $T_w{}^3$. Neka je u_1 čvor u T_u, susedan sa u, i neka je P_u Hamiltonov u-u_1 put u $T_u{}^3$. Ukoliko je T_u trivijano stablo uzimamo da je $u_1 = u$. Iz $d_T(u_1, w) \leq 2$ zaključujemo da se grana u_1w nalazi u T^3. Put koji se sastoji od puta P_u, grane u_1w i puta P_w predstavlja Hamiltonov $(u-v)$ put u T^3.

■

Direktna posledica prethodnog tvrđenja je, očigledno, da je za svaki povezan graf sa bar tri čvora G^3 Hamiltonov graf.

Iako nije tačno da je kvadrat svakog povezanog grafa, sa bar 3 čvora, Hamiltonov graf, postojala je pretpostavka, nezavisno od strane Neš-Viliamsa (C. Nesh-Williams) i Plumera (M. D. Plummer), da je kvadrat svakog 2-povezanog grafa Hamiltonov graf. 1974.godine Flajšner (X. Fleischner) je dokazao da je ta pretpostavka tačna.

Teorema 2.6.2. (Fleischner, 1974**)** *Ako je G* 2-*povezan graf, tada je G^2 Hamiltonov graf.*

■

Flajšnerov rezultat se može pojačati. Naime, važi sledeće tvrđenje.

Teorema 2.6.3. *Ako je G 2-povezan graf, tada je G^2 Hamiltonski povezan graf.*

Dokaz. Kako je G 2-povezan graf, sledi da ima bar tri čvora. Neka su u i v dva proizvoljna čvora grafa G. Označimo sa $G_1, G_2, ..., G_5$ pet disjunktnih kopija grafa G i neka su u_i i v_i, $i = 1, 2, ..., 5$, čvorovi grafa G_i koji odgovaraju čvorovima u i v grafa G. Formirajmo novi graf F, dodavanjem dva čvora w_1 i w_2, i deset grana w_1u_i i w_2v_i , $i = 1, 2, ..., 5$, grafu $G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_5$. Jasno, nijedan od čvorova w_1, w_2 nije artikulacioni u grafu F. Štaviše, kako je svaki graf G_i 2-povezan i sadrži dva čvora susedna sa čvorovima iz skupa $V(F) \setminus V(G_i)$, sledi da nijedan čvor grafa G_i nije artikulacioni čvor grafa F. Odatle zaključujemo da je F 2-povezan graf. Prema prethodnoj teoremi, F^2 sadrži Hamiltonovu konturu C, koja, očigledno, sadrži w_1 i w_2. Bar jedan od grafova G_i, recimo G_1, ne sadrži čvor koji je susedan sa w_1 ili w_2 na konturi C. Kako su u_1 i u_2 jedini čvorovi grafa G_1, koji su na konturi C susedi sa čvorovima koji nisu u grafu G_1, sledi da kontura C sadrži (u_1-v_1)-put koji sadrži sve čvorove grafa G_1. Prema tome, G_1^2 sadrži Hamiltonov (u_1–v_1)-put, što implicira da G^2 sadrži u–v Hamiltonov put.

■

Glava 3. Hamiltonovi digrafovi

3.1 Hamiltonovi digrafovi. Teoreme Mejniela i Guila-Uri

U uvodnom delu ovog rada definisali smo digrafove i dali pregled osnovnih pojmova vezanih za njih. U ovom delu rada bavićemo se Hamiltonovim digrafovima, tj. digrafovima koji sadrže Hamiltonovu konturu. Za digrafove u opštem slučaju, kao i za neorijentisane grafove, nije poznat potreban i dovoljan uslov za egzistenciju Hamiltonove konture. Šta više, situacija kod Hamiltonovih digrafova je još složenija. Postoji niz dovoljnih uslova da digraf bude Hamiltonov. Dobar deo su analogni i predstavljaju uopštenja Oreove, odnosno Dirakove teoreme. Pre nego što navedemo i dokažemo jedan od najpoznatijih dovoljnih uslova, Mejnielov uslov, primetimo da je svaki Hamiltonov digraf jako povezan digraf. Sada dokazujemo Mejnielov dovoljan uslov.

Teorema 3.1.1. (M. Meyniel, 1973**)** *Neka je D jako povezan netrivijalan digraf sa n čvorova. Ako za svaka dva nesusedna čvora u i v važi*

$$d(u) + d(v) \geq 2n - 1,$$

gde $d(u)$ *i* $d(v)$ *totalni stepeni čvorova u i v, tada D sadrži Hamiltonovu konturu.*

Dokaz. Koristićemo sledeće oznake. Ako su S_1 i S_2 proizvoljni neprazni podskupovi od $V(D)$, tada su (S_1, S_2) i $[S_1, S_2]$ sledeći podskupovi od $E(D)$:

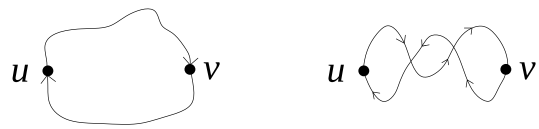
- $(S_1, S_2) = \{(u, v) \in E(D) | \, u \in S_1, v \in S_2\}$
- $[S_1, S_2] = (S_1, S_2) \cup (S_2, S_1)$

Specijalno važi,

- $|(u, V(D))| = d^+(u),$
- $|(V(D), u)| = d^-(u),$
- $|[u, V(D)]| = d^+(u) + d^-(u) = d(u).$

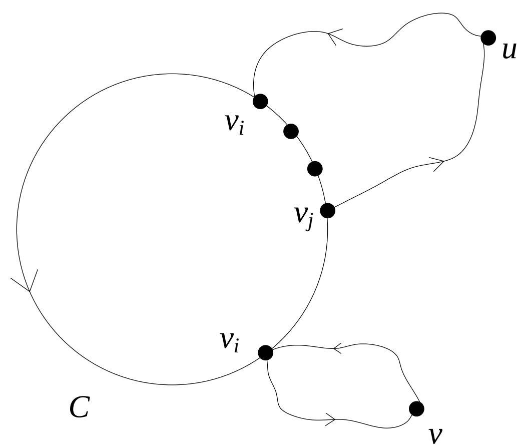
Pretpostavimo da D zadovoljava uslove teoreme i da ne sadrži Hamiltonovu konturu. Pokazaćemo da ta pretpostavka vodi kontradikciji.

Kako je D jako povezan i netrivijalan digraf, D sadrži (orijentisane) konture. Za dva čvora u i v postoje $u - v$ i $v - u$ putevi koji zajedno ili čine ili sadrže konturu.



Slika 32.

Neka je $C = v_1 v_2 \dots v_m v_1$ maksimalna kontura u D, i neka je $S = V(C) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. S obzirom da D nema Hamiltonovu konturu sledi $S \subset V(D)$. Zbog povezanosti D čvorovi izvan konture C povezani su sa čvorovima na konturi C, putevima ka C i od C. To znači da postoje putevi koji povezuju čvorove v_i i v_j na konturi C i koji, osim v_i i v_j, nemaju drugih zajedničkih čvorova sa $V(C)$.

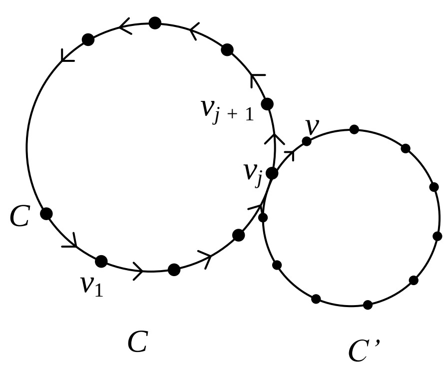


Slika 33.

Mogu nastupiti sledeća dva slučaja.

1) *Za sve pomenute puteve je* $v_i \equiv v_j$.

   To znači da su svi ti putevi u stvari konture. Neka je C' jedna takva kontura, koja sa C ima zajednički samo čvor v_j, i neka je $v \in V(C')$, takav da $v_j \to v$.



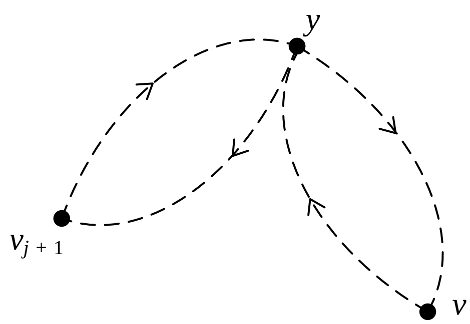
Slika 34.

Čvor v ne može biti sused ni sa jednim čvorom sa konture C različitim od v_j, jer u suprotnom dobijamo put koji spaja dva različita čvora na konturi C, što je suprotno sa pretpostavkom prvog slučaja. Dakle, važi $d_C(v) \leq 2$ (v eventualno može da bude povezan i drugom granom sa v_j).

Čvor v_{j+1} može biti povezan (dvostruko) sa svakim čvorom sa konture C. Otuda je

$$d_C(v_{j+1}) \leq 2(m-1).$$

Za čvorove iz skupa iz skupa $V(D) - (V(C) \cup \{v\})$ imamo sledeće. Ako je $y \in V(D) - (V(C) \cup \{v\})$ tada od četiri moguće grane koje spajaju v_{j+1} i v sa y, najviše dve mogu da postoje. Zaista, ako $v_{j+1} \to y$, tada ne može da $y \to v$, jer bi (preko C') imali put koji spaja v_{j+1} i v_j.



Slika 35.

Slično, $v \to y$ isključuje $y \to v_{j+1}$. Odatle je

$$\left|[y, \{v, v_{j+1}\}]\right| \leq 2$$

za svako $y \in V(D) - (V(C) \cup \{v\})$, pa dobijamo

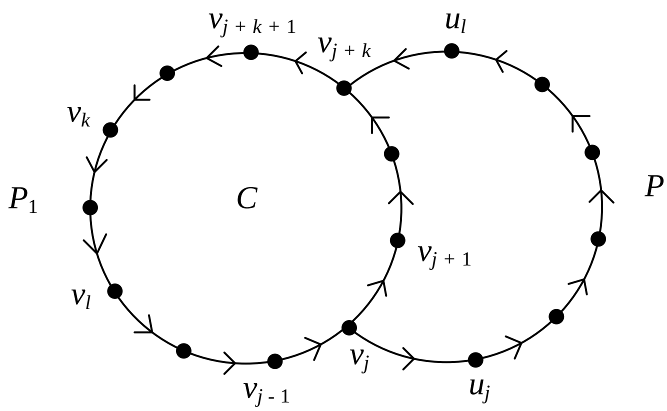
$$\begin{aligned} d(v) + d(v_{j+1}) &\leq 2 + 2(m-1) + \sum_{y \in V(D) - (V(C) \cup \{v\})} \left|[y, \{v, v_{j+1}\}]\right| \\ &= 2 + 2(m-1) + 2(n-m-1) = 2n - 2 \end{aligned}$$

Kako v i v_{j+1} nisu susedni čvorovi u D, dobili smo kontradikciju sa uslovom teoreme.

2) *Postoji bar jedan put koji spaja dva različita čvora na konturi C.*

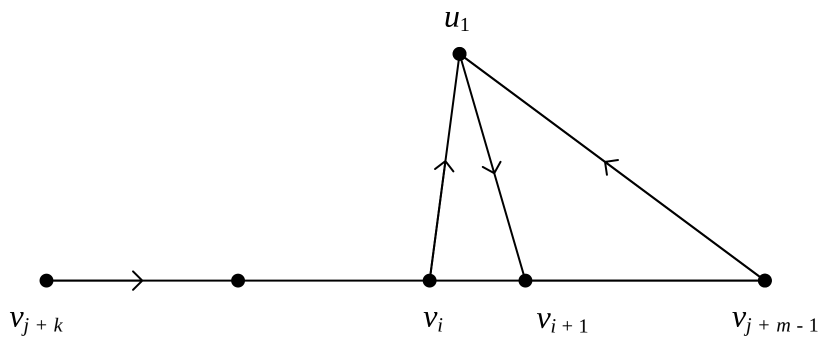
Neka je $P = v_j u_1 u_2 \dots u_l v_{j+k}$ jedan takav put i neka je izabran tako da je k minimalno (sabiranje je po modulu m). Kako je C maksimalna kontura u D, P ne spaja dva susedna čvora na C, tj. $2 \leq k \leq n-1$.

Uočimo na konturi C put $P_1 = v_{j+k} v_{j+k+1} \dots v_{j-1} v_j$. Zapazimo da u D ne postoji put P_1' koji počinje u v_{j+k}, završava se u v_j i za koji važi $V(P_1') = V(P_1) \cup \{u_1\}$.



Slika 36.

Zaista ako bi postojao takav put dobili bi konture dužine veće od m, što je kontradikcija sa izborom konture C. To, u stvari, znači da u_1 ne može da se "ubaci" na put P_1, pa može da se da ocena broja grana između u_1 i $V(P_1)$. Nemogućnost tog "ubacivanja" povlači da ne mogu istovremeno da postoje grane (v_i, u_1) i (u_1, v_{i+1}) za svako $i \in \{j+k, j+k+1, \dots, j+m-1 \equiv j-1\}$.



Slika 37.

Iz toga dalje sledi

$|(v_i, u_1)| + |(u_1, v_{i+1})| \leq 1$ za svako $i \in \{j+k, j+k+1, \dots, j+m-1 \equiv j-1\}$

Otuda je

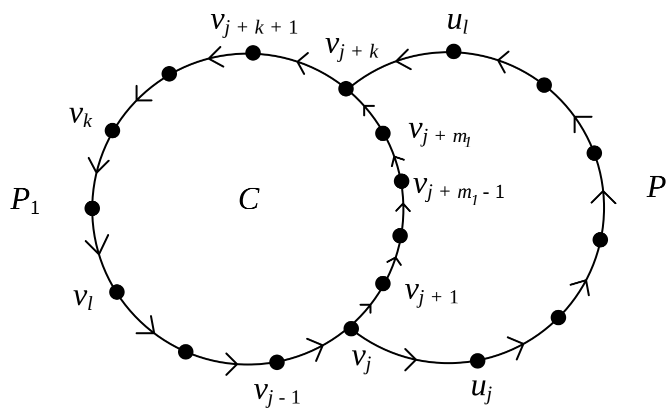
$$
\begin{aligned}
|[u_1, P_1]| &= |(u_1, P_1)| + |(P_1, u_1)| \\
&= \left|(u_1, v_{j+k})\right| + \left|(u_1, v_{j+k+1})\right| + \cdots + \left|(u_1, v_{j+m})\right| + \left|(v_{j+k}, u_1)\right| \\
&\quad + \left|(v_{j+k+1}, v_1)\right| + \cdots + \left|(v_{j+m}, u_1)\right| \\
&= \left|(u_1, v_{j+k})\right| + \left(\left|(v_{j+k}, u_1)\right| + \left|(u_1, v_{j+k+1})\right|\right) + \cdots \\
&\quad + \left(\left|(v_{j+m-1}, u_1)\right| + \left|(u_1, v_{j+m})\right|\right) + \left|(v_{j+m}, u_1)\right| \\
&\leq 1 + (j+m-1-(j+k)+1) \cdot 1 + 1 = m-k+2
\end{aligned}
$$

odnosno, $|[u_1, P_1]| \leq m-k+2$.   (1)

S obzirom na minimalnost k između čvora u_1 i čvorova $v_{j+1}, \dots, v_{j+k-1}$ nema nikakvih grana. Iz istog razloga ne postoje putevi

$$v_{j+i}\, y\, u_1,\ u_1\, y\, v_{j+i} \qquad (*)$$

za svako $y \in V(D) - (S \cup \{u_1\})$ i $1 \leq i \leq k-1$.



Slika 38.

Neka je m_1 najveći prirodan broj, $1 \leq m_1 \leq k$, za koji u D postoji $v_{j+k} - v_j$ put koji sadrži čvorove $V(P) \cup \{v_{j+1}, \dots, v_{j+m_1-1}\}$. Takvo m_1 sigurno postoji s obzirom da za $m_1 = 1$ imamo put P_1. Označimo sa Q taj $v_{j+k} - v_j$ put. Put P nadovezan na put Q daje konturu C_1 čija je dužina veća od n ako je $m_1 = k$. Zbog maksimalnosti konture C imamo da je $m_1 < k$.
Kako $v_{j+m_1} \notin V(Q)$ dobijamo, na sličan način kao (1),

$$\left|\left[v_{j+m_1}, Q\right]\right| \leq m_1 + m - k + 1. \qquad (2)$$

Posmatrajmo sad čvorove u_1 i v_{j+m_1}. Kako je $j < j + m_1 < k$ $(1 \leq m_1 \leq k-1)$ između njih nema nikakve grane. Kako u_1 nije povezan ni sa jednim od čvorova $v_{j+1}, \dots, v_{j+k-1}$ iz (1) sledi

$$|[u_1, S]| = |[u_1, P_1]| \leq m - k + 2. \qquad (3)$$

S druge strane zbog (2) između v_{j+m_1} i Q ima $\leq m_1 + m - k + 1$ grana. Od ostalih čvorova iz S sa v_{j+m_1} mogu biti povezani samo čvorovi $v_{j+m_1+1}, \dots, v_{j+k-1}$, sa eventualno dve grane. Stoga je

$$\left|\left[v_{j+m_1}, S\right]\right| \leq m_1 + m - k + 1 + 2(k - m_1 - 1) = m + k - m_1 - 1. \qquad (4)$$

S obzirom na (*) između svakog čvora y, $y \in V(D) - (S \cup \{u_1\})$ i $\{u_1, v_{j+m_1}\}$ mogu postojati najviše dve grane. Tako imamo

$$\left|\left[V(D) - (S \cup \{u_1\}, \{u_1, v_{j+m_1}\}\right]\right| \leq 2(n-m-1). \qquad (5)$$

Konačno, iz (2), (3), (4) i (5) sledi

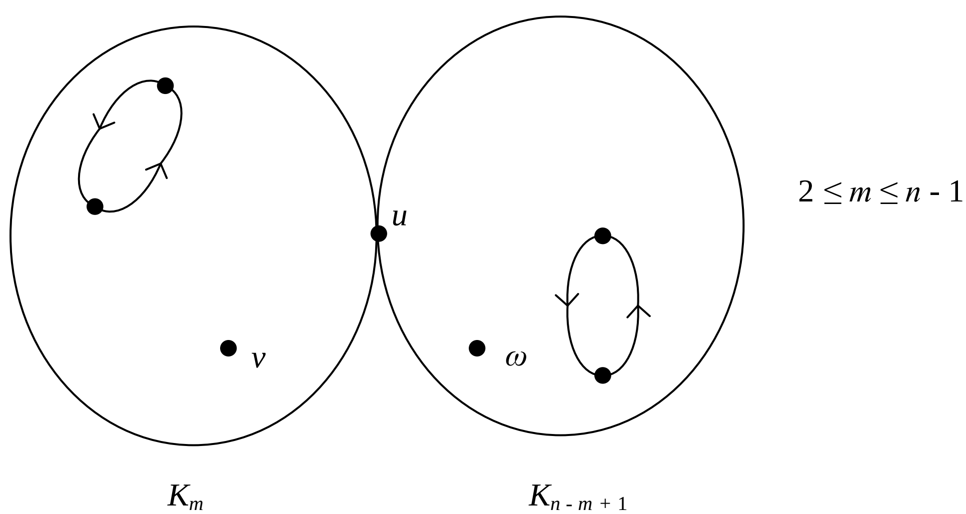
$$\begin{aligned} d(u_1) + d\left(v_{j+m_1}\right) &= |[u_1, S]| + \left|\left[v_{j+m_1}, S\right]\right| + \left|\left[V(D) - (S \cup \{u_1\}, \{u_1, v_{j+m_1}\}\right]\right| \\ &\leq (m-k+2) + (m+k-m_1-1) + 2(n-m-1) = 2n - m_1 - 1 \\ &\leq 2n-2 \end{aligned}$$

jer je $m_1 \geq 1$, što je kontradikcija sa pretpostavkom.

■

Posledica 3.1.1. *Tvrđenje Mejnielove teoreme ne može da se pojača.*

Dokaz. Sledi zbog sledećeg kontraprimera.



Slika 39.

Neka su K_m i K_{n-m+1} kompletni simetrični digrafovi sa jednim zajedničkim čvorom *u*. Digraf $D = K_m^* \cup K_{n-m+1}^*$ ima *n* čvorova i nema Hamiltonovu konturu jer je u artikulacioni čvor. Ako su *v* i *w* nepovezani čvorovi u *D*, tada je

$$d(v) + d(w) = 2(m-1) + 2(n-m) = 2n-2.$$

■

Posledica 3.1.2. *Ako je D jako povezan digraf koji nema nesusednih čvorova, tada je D Hamiltonov.*

Dokaz. Direktno sledi iz Mejnielove teoreme.

■

Teorema 3.1.2. (Gouila-Houri, 1967**)** *Ako je D jako povezan digraf sa* n $(n \geq 2)$ *čvorova, takav da je*

$$d(v) \geq n \text{ za svako } v \in V(D),$$

tada D ima Hamiltonovu konturu.

Dokaz. Ako su svaka dva čvora povezana tada tvrđenje sledi iz posledice 3.1.2. Ako su u i v nepovezani čvorovi u D tada je $d(u) + d(v) \geq 2n > 2n - 1$, pa tvrđenje direktno sledi iz Mejnielove teoreme.

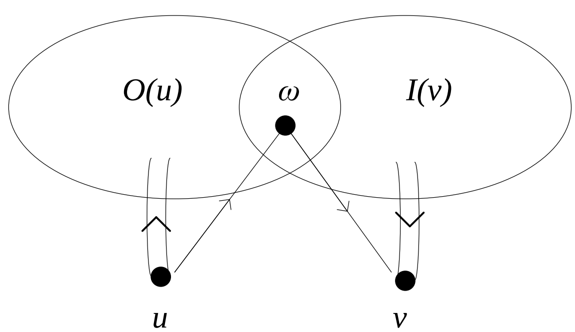
■

Teorema 3.1.3. (Woodall, 1972**)** *Ako je D netrivijalan digraf sa n čvorova, takav da za svaka dva čvora* $u, v \in V(D)$ *za koje važi* $(u, v) \notin E(D)$ *sledi*

$$d^+(u) + d^-(v) \geq n,$$

tada D ima Hamiltonovu konturu.

Dokaz. Koristićemo teoremu Mejniela. Pokazaćemo prvo da je D jako povezan. Neka su u i v dva proizvoljna čvora iz D. Pokazaćemo da uvek postoji $u - v$ put. Ako $(u, v) \in E(D)$ to je očigledno. Ako $(u, v) \notin E(D)$ tada je po uslovu teoreme $d^+(u) + d^-(v) \geq n$ što povlači da je $O(u) \cap I(v) \neq \emptyset$ (u suprotnom je $|V(D)| > n$. Tada iz u u v vodi put $u \to w \to v$, gde je $w \in O(u) \cap I(v)$.



Slika 40.

Neka su u i v dva nepovezana čvora u D. Sada je $(u, v) \notin E(D)$ i $(v, u) \notin E(D)$, pa imamo

$$d^+(u) + d^-(v) \geq n$$

$$d^+(v) + d^-(u) \geq n$$

odnosno

$$d(u) + d(v) \geq 2n > 2n - 1.$$

Prema Mejnielovoj teoremi, *D* ima Hamiltonovu konturu.

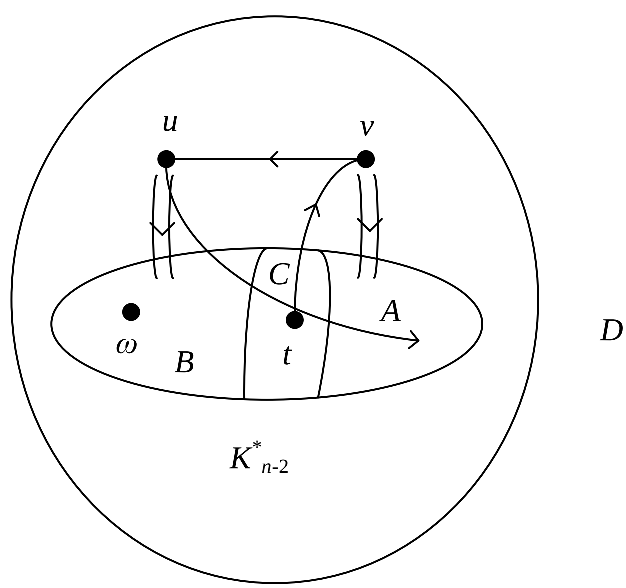
Ako su svaka dva čvora u *D* povezana, tvrđenje sledi iz posledice 3.1.2.

■

Teorema 3.1.4. *Mejnielova teorema je jače tvrđenje i od Guila-Uri i od Vudalovog, tj. postoji digraf D sa Hamiltonovom konturom koji zadovoljava uslove Mejnielove teoreme, a ne zadovoljava ni uslov Guila-Uri ni uslov Vudala.*

Dokaz. Neka je *D* digraf sa *n* čvorova koji sadrži poddigraf K^*_{n-2}. Neka su čvorovi u i v takvi da $u, v \in V(D) - V(K^*_{n-2})$ za koje postoji samo grana $v \to u$. Neka su $A, B, C \subset V(K^*_{n-2})$ takvi da

- $|A| = 2$, čvor *v* tuče sve čvorove iz *A* i nijedan čvor iz *A* ne tuče *v*, i čvor *u* tuče čvorove iz *A*
- $|C| = 1, V(C) = \{t\}$, *t* nije sused sa u i postoji samo grana $t \to v$
- $|B| = n - 5$, čvor *u* tuče sve čvorove iz *B* i nijedan čvor iz *B* ne tuče *u*, i čvor *v* nije sused ni sa jednim čvorom iz *B*



Slika 41.

D očigledno ima Hamiltonovu konturu. To je recimo $v \to u \to x \to \cdots \to t \to v$, gde je $x \in B$.

Takođe, Mejnielov uslov je zadovoljen jer su jedini nesusedni čvorovi *v* i čvorovi iz skupa *B*, a za njih važi sledeće. Neka je $w \in B$. Imamo

$$d(v) + d(w) = (|A| + 2) + (2(n-3) + 1) = 4 + 2n - 5 = 2n - 1.$$

Međutim, $d(v) = 4 < n$, što znači da Guila-Uri uslov ne važi, a zbog

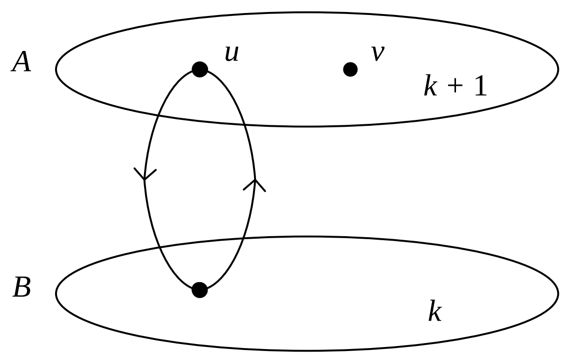
$$d^+(u) + d^-(v) = (n-3) + 1 = n - 2 < n$$

ni Vudalov uslov ne važi.

■

Teorema 3.1.5. *Nijedan od uslova u teoremama Mejniela, Guila-Uri i Vudala ne može biti oslabljen.*

Dokaz. Kontraprimer.



Slika 42.

Neka je *D* kompletan simetričan bipartitan digraf, sa klasama *A* i *B*, takav da je

- $|A| = k + 1$
- $|B| = k$
- $|V(D)| = n = 2k + 1$

Očigledno, *D* ne sadrži Hamiltonovu konturu. Međutim, *D* zadovoljava minimalno oslabljene uslove teorema Mejniela, Guila-Uri i Vudala. Zaista, neka su $u, v \in A$. Tada imamo

- $d(u) + d(v) = 2k + 2k = 4k = 2n - 2$ (uslov Mejnielove teoreme nije zadovoljen)
- $d^+(u) + d^-(v) = 2k < n$ (uslov Vudalove teoreme nije zadovoljen)
- $d(u) = 2k < n$ (uslov teoreme Guila-Uri nije zadovoljen)

■

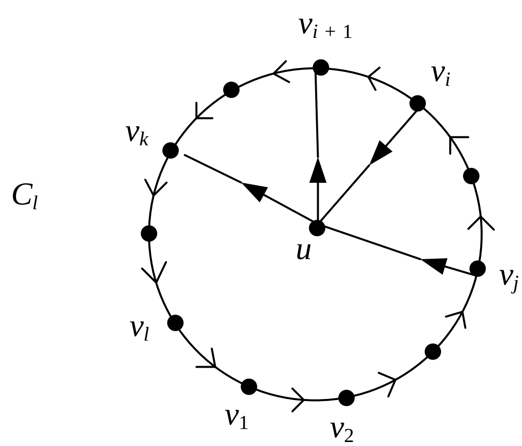
3.2. Hamiltonovi turniri. Teoreme Kamiona i Harari-Mozera.

Turnire, kao specijalnu klasu digrafova, definisali smo u uvodnom delu ovog rada. U narednom delu bavićemo se Hamiltonovim turnirima, odnosno, turnirima koji sadrže Hamiltonovu konturu. Turniri su jedina šira klasa grafova za koje je poznat potreban i dovoljan uslov da budu Hamiltonovi. Fundamentalni rezultat potiče od Kamiona.

Teorema 3.2.1. (P. Camion, 1959**)** *Turnir sa* n $(n \geq 3)$ *čvorova ima Hamiltonovu konturu ako i samo ako je jako povezan.*

Dokaz. $(\Longrightarrow)$ Pretpostavimo da turnir $T_n, n \geq 3$, ima Hamiltonovu konturu. Tada je T_n jako povezan, jer se iz svakog čvora u svaki drugi može stići duž Hamiltonove konture.

$(\Longleftarrow)$ Neka je turnir $T_n, n \geq 3$, jako povezan. Neka je u proizvoljan čvor u T_n. Na osnovu teoreme 1.1.2., iz jake povezanosti, sledi $O(u) \neq \emptyset$ i $I(u) \neq \emptyset$. Dalje, u T_n postoje čvorovi $v \in O(u)$ i $w \in I(u)$ takvi da $v \to w$, jer u protivnom $u \cup I(u) \Longrightarrow O(u)$, što je kontradikcija s jakom povezanošću T_n. Dakle, T_n sadrži konturu $u \to v \to w \to u$ dužine 3.

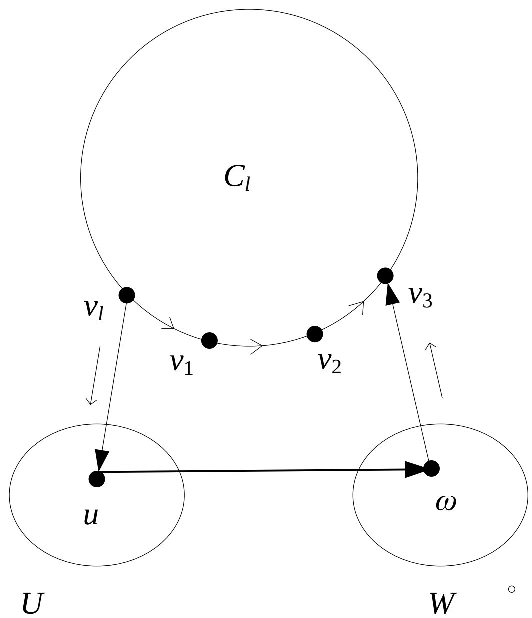


Slika 43.

Neka je $l, l \geq 3$, dužina najduže konture u T_n. Ako je $l = n$ dokaz je završen. Pretpostavimo da je $l < n$. Pokazaćemo da to vodi u kontradikciju.

Neka je $C_l = v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_l \to v_1$ kontura dužine l i neka $u \in V(T_n) - V(C_l)$. Ako na konturi C_l postoje čvorovi v_j i v_k, takvi da $v_j \to u$ i $u \to v_k$tada se na C_l mogu naći susedni čvorovi v_i i v_{i+1} takvi da $v_i \to u$ i $u \to v_{i+1}$. (Čvor v_{i+1} je "prelaz" od čvorova koji tuku u ka čvorovima koje u tuče.) U tom slučaju čvor u može da se ubaci na konturu C_l između v_i i v_{i+1}, čime se dobija kontura $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_i \to u \to v_{i+1} \to \cdots \to v_l \to v_1$ dužine $l + 1$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je C_l najduža kontura u T_n.

Pretpostavimo da takav čvor $u \in V(T_n) - V(C_l)$ ne postoji. Tada se svi čvorovi skupa $V(T_n) - V(C_l)$ mogu razbiti na dva disjunktna podskupa U i W, takva da $V(C_l) \Rightarrow U$ i $W \Rightarrow V(C_l)$.



Slika 44.

Nijedan od skupova U i W nije prazan. Zaista, ako bi U bio prazan, tada bi imali $V(C_l) \Leftarrow W = V(T_n) - V(C_l)$. Turnir T_n ne bi bio povezan, što je kontradikcija sa uslovom teoreme. Slično je za $W = \emptyset$.

Dalje, postoje čvorovi $u \in U$ i $w \in W$, takvi da $u \to w$. (U protivnom $U \Rightarrow W$ i $U \Rightarrow W \cup V(C_l) = V(T_n) - U$, što opet povlači da T_n nije jako povezan.) Međutim, sada se C_l ponovo može proširiti u konturu $C_{l+1} = v_1 \to w \to u \to v_3 \to v_4 \to \cdots \to v_l \to v_1$. To je kontradikcija sa maksimalnošću konture C_l. Time je dokaz završen.

■

Definicija 3.2.1. Digraf D sa $n, n \geq 3$, čvorova je *pancikličan* ako za svako $k, 3 \leq k \leq n$, sadrži konturu dužine k.

Definicija 3.2.2. Digraf D sa $n, n \geq 3$, čvorova je *čvorno-pancikličan* ako za svaki čvor $v \in V(D)$ i za svako $k, 3 \leq k \leq n$, postoji u D kontura dužine k koja sadrži v.

Panciklčan digraf sadrži Hamiltonovu konturu. Obrnuto ne mora da važi. Kada posmatramo turnire tada iz egzistencije Hamiltonove konture sledi čvorna panciklčnost (a samim tim i panciklčnost). Do tog rezultata došli su Harari i Mozer.

Teorema 3.2.2. (F. Harary, L. Moser, 1966**)** *Svaki netrivijalan jako povezan turnir je čvorno-panciklčan.*

Dokaz. Neka je T_n jako povezan turnir i $v \in V(T_n)$. Indukcijom po k pokazaćemo da za svako $k, 3 \leq k \leq n$, postoji kontura C_k koja sadrži čvor v. Isto kao u dokazu teoreme 3.2.1. iz jake povezanosti T_n sledi da v leži na konturi C_3. Pretpostavimo da v lezi na konturi C_k, $3 \leq k \leq n-1$. Pokažimo da tada leži i na konturi C_{k+1}. Uočimo sve čvorove iz T_n koji nisu na konturi C_k. Moguća su dva slučaja:

- *Postoji* $x \in V(T_n) - V(C_k)$ *i čvorovi* $y, z \in V(C_k)$, *takvi da* $y \to x$ *i* $x \to z$.
  Tada se, kao u dokazu teoreme 3.2.1, x može "ubaciti" na C_k, čime se dobija kontura C_{k+1} koja sadrži v. Neka je $C_k = v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to v_1$ kontura dužine k. Tada se na C_k mogu naći susedni čvorovi v_i i v_{i+1} takvi da $v_i \to x$ i $x \to v_{i+1}$. (Čvor v_{i+1} je "prelaz" od čvorova koji tuku x ka čvorovima koje x tuče.) U tom slučaju čvor x može da se ubaci na konturu C_k između v_i i v_{i+1}, čime se dobija kontura $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_i \to x \to v_{i+1} \to \cdots \to v_k \to v_1$ dužine $k+1$
- *Za svaki čvor* $x \in V(T_n) - V(C_k)$ *ili* $x \to V(C_k)$ *ili* $V(C_k) \to x$.
  Tada se, kao u dokazu prethodne teorme, svi čvorovi skupa $V(T_n) - V(C_k)$ mogu razbiti na dva disjunktna podskupa U i W, takva da $V(C_k) \Rightarrow U$ i $W \Rightarrow V(C_k)$. Pri tome, postoje čvorovi $u \in U$ i $w \in W$, takvi da $u \to w$. Ako je $C_k = v \to v_1 \to \cdots \to v_{k-1} \to v$, tada se za konturu C_{k+1} koja sadrži v može uzeti $v \to u \to w \to v_3 \to \cdots \to v_{k-1} \to v$.

■

Zaključak

Teorija grafova našla je veliku primenu kako u matematičkim tako i u nematematičkim disciplinama. Razlog za to je relativno jednostavna struktura i bogat sadržaj grafova, kao i mogućnost grafičkog, odnosno geometrijskog, prikaza tih struktura. Teorija grafova je jedna od onih matematičkih disciplina koje poslednjih godina odlikuje intenzivan razvoj. U primenama pojam grafa dobija svoju punu vrednost kada se skupovi i relacije na njima predstavljaju geometrijskim figurama koje su bliske intuintivnoj predstavi koju čovek ima o osobinama i ponašanju objekta koji se predstavlja grafom. Primenu grafova nalazimo u elektrotehnici, saobraćaju, hemiji, teoriji informacija i kodiranja, ekonomiji, sociologiji, biologiji, itd. Razvoj teorije grafova, kao matematičke grane zagarantovan je upravo činjenicom da su grafovi našli veliku primenu u rešavanju svakodnevnih problema.

Tema kojom sam se bavio u ovom radu bila mi je zanimljiva, upravo zbog činjenice da je jedan od najzahtevnijih nerešenih problema teorije grafova karakterizacija Hamiltonovih grafova. Do sada je otkriveno više potrebnih i više dovoljnih uslova da graf bude Hamiltonov, i ti rezultati predstavljeni su ovom radu, ali nijedan od njih nije istovremeno potreban i dovoljan. Jedina klasa grafova u kojoj postoji karakterizacija Hamiltonovih grafova jeste klasa turnira.

I pre Hamiltonove igre na dodekaedru koju je predstavio 1857. godine, poznatu kao „Put oko sveta”, rešavani su slični problem. Tu je pre svega, čuveni problem konjičkog skoka (konj, šahovska figura). Problem glasi: *Da li je moguće konjem obići sva polja šahovske table tako da se svako polje obiđe tačno jedanput i vrati na polazište?*, ili u terminologiji teorije grafova: *Da li u grafu pridruženom konju postoji Hamiltonova kontura?* Najstariji pisani trag ovog problema datira još iz 9. v.n.e. Indijski pesnik Rudrata u svojoj zbirci pesama „Kavialankara” koristio je niz šablona konjićevog skoka na polovini šahovske table u poetskoj figuri zvanoj „turagapadabanda” ili „raspored u konjevim koracima”. Od velikih matematičara, problem konjičkog skoka proučavao je Ojler. Prvi postupak za pronalaženje konjičkog skoka bilo je Vornsdorfovo pravilo, prvi put opisano 1823. godine.

Literatura

1. L. W. Beineke, R. J. Wilson, *Selected topics in graph theory*, Academic Press, London 1978.

2. I. Bošnjak, D. Mašulović, V. Petrović, R. Tošić, *Zbirka zadataka iz teorije grafova*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 2005.

3. G. Chartrand, L. Lesniak, *Graphs & Digraphs*, Chapman & Hall/CRC, New York 2005.

4. V. Petrović, *Teorija grafova*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1998.

5. D. Cvetković, *Teorija grafova i njene primene*, Naučna knjiga, Beograd 1990.

6. D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, New York 2001.

Biografija

Slobodan Nogavica rođen je u Vrbasu, 4. maja 1990. godine. Osnovnu školu „Isa Bajić" u Kuli završava 2005. godine. Iste godine upisuje opšti smer gimnazije „Petro Kuzmjak" u Ruskom Krsturu. Školske 2009/2010. upisuje osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, departman za matematiku i informatiku, smer Diplomirani profesor matematike. Iste završava 2013. godine i upisuje master akademske studije na istom fakultetu, smer Master matematika, modul Nastava matematike. Na master studijama položio je sve ispite predviđene planom i programom, čime je stekao uslov za odbarnu ovog master rada.

Novi Sad, april 2016. Slobodan Nogavica

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMETACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Slobodan Nogavica
AU
Mentor: dr Vojislav Petrović
MN
Naslov rada: Hamiltonovi grafovi i digrafovi
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2016.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički faklutet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 3 glave/ 46 strana/ 6 literatura/ 44 slike/ 1 fotografija
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Diskretna matematika, teorija grafova
ND
Predmetna odrednica/ ključne reči: graf, digraf, Hamiltonovi grafovi, Hamiltonovi digrafovi
PO
UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Sadržaj rada je problem Hamiltonovih kontura i puteva u grafovima i digrafovima. Rad se sastoji od tri poglavlja. Prvo poglavlje je uvodnog karaktera. Čine ga osnovni pojmovi i definicije. Uz to, daje se istorijski osvrt na navedeni problem. Drugo poglavlje se bavi Hamiltonovim grafovima. Prezentuju se najpoznatiji potrebni I dovoljni uslovi da graf bude Hamiltonov. Od poslednjih, navodimo teoreme Orea, Diraka, Bondi-Hvatala, Grinberga. Uvodi se pojam hamiltonske povezanosti grafa i daju odgovarajući rezultati. Sadržaj poglavlja tri čine Hamiltonovi digrafovi. Predstavljene su teoreme Guila-Uri, Mejniela i Vudala za opšte digrafove i teoreme Kamiona i Harari-Mozera za turnire.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 4.3.2014.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Boris Šobot, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Bojan Bačić, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Vojislav Petrović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code: Master's thesis
CC
Author: Slobodan Nogavica
AU
Mentor: Vojislav Petrović, Ph.D.
MN
Title: Hamiltonian graphs and digraphs
TI
Language of text: Serbian (latin)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2016
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and informatics, Faculty of sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 3 chapters/ 46 pages/ 6 references/ 44 pictures/ 1 photograph
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Discrete mathematics, graph theory
SD
Subject/ Key words: graph, digraph, Hamiltonian graph, Hamiltonian digraph
SKW
UC:

Holding data: The library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of sciences, University of Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: The subject of this thesis is the problem of Hamiltonian cycles and paths in graphs and digraphs. The thesis consist of three parts. In Chapter 1 basic concepts and definitions are introduced. It also gives a historical overview of the problem. Chapter 2 deals with Hamiltonian graphs. Main sufficient and necessary conditions are presented. Among them let us mention theorems of Ore, Dirac, Bondy-Chvatal, Grinberg. The concept of Hamiltonian connected graphs and corresponding results are also presented. The content of the last Chapter 3 are Hamiltonian digraphs. It provides theorems of Gouila-Houri, Meyniel and Woodall for general digraphs as well as theorems of Camion and Harary-Moser for tournaments.
AB
Accepted by the Scientific Board on: 4/3/2014
ASB
Defended:
DE
Thesis defens board:
DB
President: Boris Šobot, Ph.D., Faculty of sciences, University of Novi Sad
Member: Bojan Bašić, Ph.D., Faculty of sciences, University of Novi Sad
Mentor: Vojislav Petrović, Ph.D., Full Professor, Faculty of sciences, University of Novi Sad