УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ
И ИНФОРМАТИКУ

Slavko Krunić

Neke obične diferencijalne jednačine sa primenama
metodička obrada

master rad

Novi Sad, 2012.

1 Sadržaj

Predgovor

U ovom radu obrađene su neke obične diferencijalne jednačine prvog reda i pojedine jednostavne jednačine drugog reda zaključno sa linearnim homogenim jednačinama drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Njihova obrada predviđena je programima nekih srednjih škola, (npr. u matematčkoj gimnaziji, u pojedinim profilima tehničkih škola), a standardni su deo programa znatnog broja visokih škola i fakulteta.

Zahtevan su deo gradiva, posebno u sred njim školama, jer je za njihovu uspešnu obradu potrebno dobro poznavanje diferencijalnog i integralnog računa.

Pored iznošenja osnovnih pojmova i nekih ključnih stavova teorije, urađena je metodička obrada u 12 časova, koliko je predviđeno planom rada u mašinskim školama, (profil kompjutersko konstruisanje). Rešeno je više zadataka kako iz "čiste" matematike tako i iz raznih područja primene.

Diferencijalne jednačine su sa stanovišta praktične primene jedna od najvažnijih grana matematike. Tako su npr. mnogi fizički zakoni iskazani upravo preko diferencijalnih jednačina. Njihova primena je velika u tehničkim naukama a u novije vreme i u prirodnim (hemija, biologija), medicini, farmaciji i u društvenim naukama (ekonomija, psihologija, sociologija). Na njih se svode najraznovrsniji problemi ovih nauka.

Pri korišćenju diferencijalnih jednačina kao modela , moraju se uvek imati na umu razlike između njih i stvarnih pojava koje one opisuju. Informacije koje sadrži matematički model ne moraju potpuno odgovarati stvarnosti na koju se odnose. Jednoj pojavi može odgovarati i više modela kao što i jedan model može opisivati više pojava, međusobno i veoma različitih.

Jedan od ciljeva rada je da se prikažu neke mogućnosti primene nekoliko osnovnih tipova običnih diferencijalnih jednačina prvog i drugog reda već u srednjoj školi ne ulazeći detaljnije u pitanja koegzistencije matematičkog modela i stvarnosti koju on opisuje.

Tako će se nastava matematike povezati sa nastavom nekih drugih predmeta (fizika, hemija, mehanika, osnove elektrotehnike, termodinamika, ekologija, geografija, sociologija), i na taj način učiniti zanimljivijom i korisnijom. Istovremeno se ispunjavaju i programima predviđeni ciljevi nastave ovog predmeta.

U delu rada "O diferencijalnim jednačinama", teorija je data na nivou uglavnom iznad srednjoškolskog jer smatramo da je u izloženom obimu važna kao podsećanje profesoru. Teoreme (osim dve) nisu dokazane već su date skice dokaza ili su samo navedene, pošto ovde nije cilj detaljno teorijsko izlaganje.To je, po našem mišljenju, onaj teorijski nivo koji nastavniku pomaže da sagleda "odozgo" celu temu i time olakša njenu obradu, posebno u srednjoj školi. Neki njeni delovi mogu se koristiti i na tom nivou. Za čitanje opširnijih teorijskih izlaganja preporučujemo udžbenike [9] i [11] iz spiska literature.

Na kraju je dat kratak istorijski osvrt na razvoj teorije diferencijalnih jednačina.

Napominjemo da je naš specijalistički rad "Diferencijalne jednačine-obrada u mašinskoj školi", odbranjen na ovom fakultetu 2009. godine, i koji je ovde korišćen, sasvim drugačiji od ovog rada. U navedenom radu nije bilo brojnih primena, dela teorije, i najvećeg dela istorije diferencijalnih jednačina. Metodička objašnjenja teorijskih pojmova, kao i znatan deo ostalih rešavanih zadataka sa pratećim komentarima, uputstvima za rad i slikama su takođe drugačiji ili novi. Uostalom, ovaj rad se u jednom svom delu vezuje za mašinsku školu prvenstveno zbog programa rada koji omogućuje takvu obradu. Dakle, slična obrada moguća je i u svim drugim programima sa istim ili većim brojem časova predviđenih za ovu temu.

Zahvalnost dugujem profesoru dr Mirku Budinčeviću za veoma korisne i brojne sugestije u toku izrade rada i docentu dr Aleksandru Pavloviću za važne primedbe a posebno mentoru dr Dragoslavu Hercegu zbog podrške, organizacije, zapažanja i nastojanja da ovaj rad dobije željeni izgled.

U Novom Sadu, juna 2012. Slavko Krunić

1 Uvodni deo

Diferencijalne jednačine su standardni deo programa rada u četvrtom razredu mašinskih škola. Za njihovu uspešnu obradu neophodno je dobro poznavanje diferencijalnog i integralnog računa. Zbog toga su diferencijalne jednačine za učenike jedan od najtežih delova gradiva u ovom razredu. Za nastavnika predstavljaju poseban stručno-metodički izazov za uspešnu obradu. Njihova zastupljenost je različita u pojedinim programima rada. U programima sa tri i sa četiri časa nedeljno, diferencijalne jednačine se obrađuju sa četiri, odnosno sa pet časova.

Sadržaj je sledeći:

1. Pojam diferencijalne jednačine prvog reda,
2. Diferencijalne jednačine sa razdvajanjem promenljivih,
3. Diferencijalne jednačine drugog reda oblika $y'' = k$ i $y'' = k^2 y$, $k \in R$.

U programima sa pet časova nedeljno, pored ovog, obrađuju se još i Homogene jednačine prvog reda i Homogene jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima sa ukupno deset časova, kao posebna tema. U sledećoj glavi je prikazan program rada objavljen u Službenom glasniku Republike Srbije—Prosvetni glasnik 022-05-131/98, koji važi od školske 1998/1999. godine.

Realizacija ovog programa u potpunosti u mašinskim školama se teško ostvaruje, zbog obimnosti gradiva predviđenog za obradu. Zato nastavnici, u planovima rada, obično izostavljaju obradu matematičke statistike kako bi sačuvali kvalitet nastave. Pet časova, koji se tako dobijaju, rapoređuju se za obradu ostalih tema. Predlažemo da se u okviru teme "Diferencijalne jednačine" obrade sa po dva časa još i Linearna diferencijalna jednačina prvog reda i Bernulijeva jednačina koje su se nalazile u ranijim programima. Ovo gradivo smatramo korisnim za učenike pošto će oni najvećim delom nastaviti školovanje na tehničkim fakultetima i visokim školama pa će im odmah biti potrebno u nekim stručnim područjima.

U današnje vreme diferencijalne jednačine (obične, parcijalne i njihovi sistemi) su zastupljene u raznim naučnim oblastima a posebno u fizici, tehničkim naukama, hemiji, biologiji, ekonomiji, medicini, farmaciji. Jedan od ciljeva ovoga rada je da ukaže na neke mogućnosti praktične primene stečenih teorijskih znanja već na srednjoškolskom nivou obrazovanja. Prethodno je potrebno ovladati postupcima modeliranja, formalnog rešavanja i tumačenja dobijenih rezultata. Tokom obrade uspostavljaju se veze između raznih delova matematike kao i sa drugim naukama a posebno tehničkim i prirodnim. Tako se u nastavi razbija onaj tip formalizma u kome se obraća pažnja samo na nastavne sadržaje ali ne i na njihovu međusobnu povezanost i na njihov primenjeni karakter. Ova tema verovatno može najbolje poslužiti i kao ilustracija aplikativnog karaktera matematike.

U radu ćemo često koristiti i računar za rešavanje diferencijalnih jednačina i za prikazivanje nekih njihovih partikularnih rešenja. Koristićemo programske pakete ScientificWorkPlace i GeoGebra.

Naša želja je da na što bolji način kombinujemo rad na računaru sa drugim načinima primanja i prezentacije nastavnih sadržaja. Uz pomoć računara uči se sa više očiglednosti i sa manje straha od eventualnih grešaka u radu. Smatramo da je svaki zadatak koji ćemo rešavati potrebno rešiti i bez upotrebe računara. Tako ćemo vršiti kontrolu sopstvenog rada ali i rešenja dobijenih putem računara. Istovremeno se stvara koristan interaktivan odnos klasičnog rada i rada na računaru. Važno je napomenuti da je računar, i pored svoje velike moći, samo pomoćno sredstvo u nastavi i da stalno treba voditi računa o svrsishodnosti njegove upotrebe.

U mašinskoj školi učenici koriste računar i u brojnim stručnim predmetima, posebno oni u računarskim smerovima. Zato možemo da pretpostavimo da će oni za relativno kratko vreme, uz nastavnikovu pomoć, naučiti korišćenje ovih programskih paketa.

2 Obrada diferencijalnih jednačina u mašinskoj školi

2.1 Godišnji program rada

GODIŠNJI PROGRAM RADA (SMER ZA KOMPJUTERSKO KONSTRUISANJE)

1. FUNKCIJE (36)

Važniji pojmovi i činjenice o funkcijama jedne promenljive (definisanost, nule, parnost, monotonost, periodicnost). Složena funkcija (pojam i jednostavniji premeri). Pregled elementarnih funkcija. Granična vrednost i neprekidnost funkcije (geometrijski smisao), asimptote.

2. IZVOD FUNKCIJE (34)

Priraštaj funkcije. Izvod funkcije (problem tangente i brzine). Osnovne teoreme o izvodu, izvodi elementarnih funkcija. Diferencijal i njegova primena kod aproksimacija funkcija. Ispitivanje funkcija(uz primenu izvoda), grafik funkcije.

3. INTEGRAL(28)

Neodređeni integral, osnovna pravila o integralu, tablica osnovnih integrala, integrali nekih elementarnih funkcija. Metod zamene, metod parcijalne integracije. Određeni integral, Njutn-Lajbnicova formula (bez dokaza). Primene određenog integral (rektifikacija, kvadratura, kubatura).

4. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE(10)

Pojam diferencijalne jednačine. Diferencijalna jednačina kod koje se razdvajaju promenljive. Homogena diferencijalna jednačina. Diferencijalne jednačine drugog reda. Homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

5. VEROVATNOCA I STATISTIKA(32)

Slučajni dogadjaji. Verovatnoća. Uslovna verovatnoća i nezavisnost. Slučajne veličine, binomna,Puasonova i normalna raspodela. Srednja vrednost i disperzija. Populacija, obelezje i uzorak. Prikupljanje, sredjivanje i prikazivaanje podataka. Pojam ocene parametara, ocene verovatnoće, srednje vrednosti i disperzije. Intervalne ocene za verovatnoću i srednju vrednost

6. PROBLEMSKI ZADACI

Posle svake nastavne oblasti uraditi određen broj problemskih zadataka.

2.2 Plan obrade teme „Diferencijajlne jednačine“

Na osnovu godišnjeg plana rada, napravili smo sledeći plan obrade teme „Diferencijalne jednačine“.

1. Pojam diferencijalne jednačine prvog reda i njenog rešenja
2. Diferencijalne jednačine koje dopuštaju razdvajanje promenljivih
3. Diferencijalne jednačine koje dopuštaju razdvajanje promenljivih, vežbe
4. Diferencijalne jednačine koje dopuštaju razdvajanje promenljivih, vežbe
5. Homogena diferencijalna jednačina prvog reda
6. Homogena diferencijalna jednačina prvog reda, vežbe
7. Linearna diferencijalna jednačina prvog reda
8. Linearna diferencijalna jednačina prvog reda, vežbe
9. Bernulijeva diferencijalna jednačina
10. Diferencijalne jednačine oblika $y'' = k$ i $y'' = k^2 y$
11. Homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima
12. Homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima, vežbe

2.3 Pojam diferencijalne jednačine prvog reda

2.3.1 Prvi čas

Primer 1. Naći sve funkcije oblika $y = f(x)$ za koje važi $y' = x, \quad x \in \mathbb{R}$.

Rešenje. Znamo da je jedna od njih funkcija

$$y = \left(\frac{1}{2}\right) x^2 ,$$

jer je

$$\left(\frac{1}{2} x^2\right)' = x .$$

Zbog

$$\left(\frac{1}{2} x + C\right)' = x, \quad C \in \mathbb{R} ,$$

zadatu jednačinu zadovoljavaju i sve funkcije oblika

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

i znamo da je jedino one zadovoljavaju. Primećujemo da je svaka od njih diferencijabilna na celom skupu $\mathbb{R}$. Jednačina $y' = x$ je jedan primer diferencijalne jednačine. Svaka funkcija koja je zadovoljava je njeno partikularno rešenje ili rešenje. Skup svih rešenja

$$\left\{\frac{1}{2}x^2 + C \mid C \in \mathbb{R}\right\}$$

zvaćemo opšte rešenje ili opšti integral ove diferencijalne jednačine. Do ovog integrala možemo doći i na sledeći način: Zamenom y' količnikom $\frac{dy}{dx}$, dobijamo:

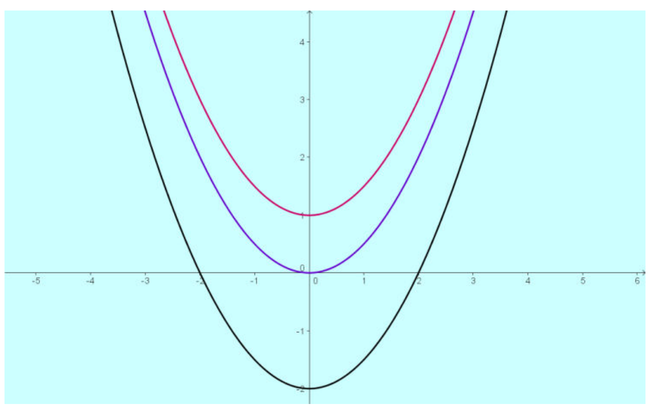
$$\frac{dy}{dx} = x,$$

i dalje,

$$dy = xdx, \qquad \int dy = \int xdx, \qquad y = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

(familija kvadratnih funkcija).

Partikularna rešenja za $C = -2$, $\mathrm{C} = 0$ i $\mathrm{C} = 1$ prikazana su na slici 1.



Slika 1.

Sada ćemo uopštiti naše razmatranje. Neka je funkcija f neprekidna u intervalu (a,b). Zadatak nalaženja njenog neodređenog integrala je ekvivalentan zadatku nalaženja funkcije čiji je izvod $f(\mathrm{x})$ za svako $x \in (a,b)$, odnosno zadatku određivanja zavisnosti y od x tako da je $y' = f(x)$, $x \in (a,b)$. Jednačine oblika $y' = f(x)$, gde je y nepoznata funkcija su primeri najprostijih diferencijalnih jednačina. Ovde se možemo podsetiti tablice izvoda elementarnih funkcija čiji desni stubac možemo posmatrati i kao jedan spisak takvih jednačina pri čemu za svaku od njih znamo po jednu funkciju y.

Pokazaćemo sada na jednom primeru iz fizike i jednom iz geometrije kako se dolazi do pojma diferencijalne jednačine i do potrebe za njihovim rešavanjem.

Primer 2. Poznato je da je brzina raspadanja radijuma proporcionalna količini radijuma u posmatranom trenutku. Neka je u trenutku t_0 bilo R_0 grama radijuma. Potrebno je odrediti količinu radijuma u ma kom trenutku t.

Rešenje. Trenutna brzina raspadanja R u trenutku t je

$$v = \frac{dR}{dt}.$$

Ako sa $k, (k > 0)$ označimo koeficijent proporcionalnosti brzine raspadanja i količine radijuma, dobijamo

$$\frac{dR}{dt} = -kR .$$

Na desnoj strani ove jednačine nalazi se znak "minus" zato što se sa vremenom smanjuje količina R pa mora biti $\frac{dR}{dt} < 0$. Problem se svodi na rešavanje jednačine

$$\frac{dR}{dt} = -kR ,$$

tačnije, na određivanje funkcije koja daje zavisnost R od t i za koju važi početni uslov

$$R(t_0) = R_0 .$$

Treba napomenuti da se jednačina koju ćemo rešavati može napisati i u obliku

$$R'(t) = -kR(t),$$

pomoću osnovne formule za diferencijal, ili jednostavnije

$$R' = kR$$

ako se t kao nezavisno promenljiva podrazumeva.

Rešavanje dobijene jednačine zasniva se na osnovnim pravilima diferencijalnog i integralnog računa.

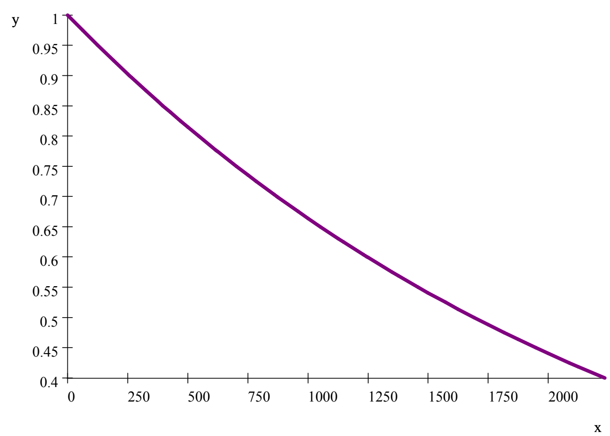
Množenjem njenih obeju strana sa $\frac{dt}{R}$ dobija se $\frac{dR}{R} = -kdt$, a nakon integracije obeju strana

$$\int \frac{dR}{R} = -\int kdt$$

Odavde je

$$\ln R = -kt + C_1, \qquad R = e^{-kt+C_1}, \qquad R = e^{C_1}e^{-kt}.$$

Ako stavimo $e^{C_1} = C$, dobijamo $R(t) = Ce^{-kt}$. Ovom jednačinom su određena sva rešenja za $R > 0$. Iz njih treba izdvojiti ono rešenje za koje je $R(t_0) = R_0$. Uvrštavanjem t_0 umesto t u dobijenu jednačinu, dalje je $R_0 = Ce^{-kt_0}$, odakle je $C = R_0e^{kt_0}$. Tražena funkcija je, dakle, $R(t) = R_0e^{-k(t-t0)}$. Ona daje poznati fizički zakon radioaktivnog raspadanja radiuma. Na slici 2. prikazan je zakon za radijumov izotop 226.



Slika 2.

Primer 3. Naći sve krive $y = f(x)$ u ravni xOy koje imaju sledeće svojstvo: ma koja tangenta krive seče Ox osu u tački čija je apscisa jednaka dvostrukoj apscisi tačke dodira.

Rešenje. Neka je $y = f(x)$ jedna od traženih krivih i $A(x, y)$ proizvoljna tačka na njoj.

Neka je a tangenta u tački A i neka je B presečna tačka te tangente i ose Ox.

Jednačina tangente je

$$Y - y = f'(x)(X - x).$$

Apscisa tačke B je $Y = 0$, pa je jednačina tangente

$$-y = y'(X - x),$$

gde je

$$y' = f'(x).$$

Odavde je

$$X = x - \frac{y}{y'}.$$

Prema uslovu u zadatku je

$$x - \frac{y}{y'} = 2x,$$

pa je

$$y' = -\frac{y}{x}, \quad (x \neq 0),$$

gde je y nepoznata funkcija koju treba odrediti.

Iz dobijene jednačine je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

$$\frac{dy}{x} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dy}{x} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = -\left(\ln|x| + \ln|C_1|\right), \quad C_1 \in R\{0\},$$

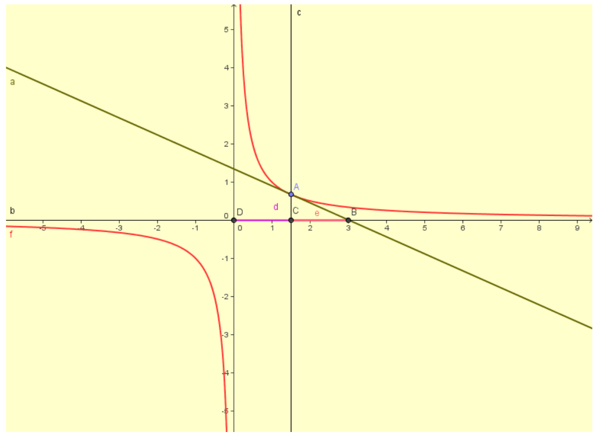
$$\ln|y| = -\ln|C_1 x|,$$

$$\mathrm{y} = \frac{1}{C_1 x}, \quad \frac{1}{C_1} = C,$$

$$y = \frac{C}{x} \quad C \neq 0.$$

Dobili smo beskonačno mnogo rešenja postavljenog problema. Njihovi grafici su sve grane dveju familija hiperbola.

Situacija je prikazana na slici 3, $\left(|DB| = 2|DC|\right)$.



Slika 3.

Jednačine kao što su $y' = x, R' = kR$ i $y' = -\frac{y}{x}$ zovemo diferencijalne jednačine prvog reda. Dobijene funkcije koje ih zadovoljavaju su njihova rešenja. Posmtaraćemo sada diferencijalne jednačine prvog reda oblika

$$y' = F(x, y) \ldots\ldots\ldots (1)$$

Definicija 1. *Diferencijalna jednačina prvog reda je svaka jednačina oblika*

$$y' = F(x, y) \ldots\ldots\ldots (1)$$

u kojoj figurišu nezavisno promenljiva x*, nepoznata funkcija* y *i prvi izvod nepoznate funkcije* y'*. Pritom* x *i* y *ne moraju biti eksplicitno zastupljeni.*

Definicija 2. *Rešenje date diferencijalne jednačine prvog reda je svaka funkcija diferencijabilna na nekom intervalu* (a, b) *takva da kada se ona i njen prvi izvod uvrste u datu diferencijalnu jednačinu, ta jednačina postaje identitet po* x*.*

Definicija 3. *Rešiti (ili integraliti) diferencijalnu jednačinu znači odrediti sva njena rešenja.*

Definicija 4. *Integralna kriva, ili grafik diferencijalne jednačine, je linija koja je grafik ma kog njenog rešenja.*

Definicija 5. *Skup svih integralnih krivih date diferencijalne jednačine je njeno opšte rešenje.*

Definicija 6. *Svako pojedinačno rešenje diferencijalne jednačine je njeno partikularno rešenje.*

Primer 4. Da li je funkcija $y = x \ln x$ rešenje diferencijalne jednačine $xy' = x + y$?

Rešenje. Kako je $y' = \ln x + 1$, zamenom y' i y u datu jednačinu, dobijamo identitet $x(\ln x + 1) = x + \ln x$. Znači, data funkcija je rešenje ove diferencijalne jednačine.

Komentar

Rešenja jednačina (algebarskih, trigonometrijskih, logaritamskih) sa kojima su se učenici do sada susretali su bili realni ili kompleksni brojevi. Ovde se učenici prvi put susreću sa rešenjem jednačine koje predstavlja funkciju, i to ne sasvim određenu funkciju, koja nije morala ni biti zastupljena u datoj jednačini. Zato je potrebno na nekoliko primera pokazati neka rešenja, bez rešavanja jednačine. U ovom slučaju treba učenike podsetiti na tablice izvoda i integrala gde su se već pojavljivale proizvoljne konstante.

2.4 Diferencijalne jednačine koje dopuštaju razdvajanje promenljivih

2.4.1 Drugi čas

Postupak nalaženja rešenja jednačina iz prethodnih primera sugeriše nam postupak rešavanja svih jednačina koje je moguće tako rešiti. Zvaćemo ih diferencijalne jednačine koje dopuštaju razdvajanje promenljivih.

Definicija 7. *Diferencijalna jednačina koja dopušta razdvajanje promenljivih je svaka diferencijalna jednačina koja se može prikazati u obliku*

$$y' = f(x)g(y).$$

gde su f *i* g *date neprekidne funkcije na intervalima* (a,b) *i* (c,d) *respektivno i* $g(y) \neq 0$ *za* $y \in (c,d)$.

Diferencijalna jednačina koja dopušta razdvajanje promenljivih se može zapisati i u obliku

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \quad g(y) \neq 0.$$

Njeno opšte rešenje je

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx,$$

odakle se integraljenjem dobija

$$G(y) = F(x) + C,$$

gde su $G(y)$ i $F(x)$ redom primitivne funkcije za $\frac{1}{g(y)}$ i $F(x)$.

Ako postoje realni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_k$ koji su rešenja jednačine $g(y) = 0$, onda su i funkcije $y = a_1, y = a_2, \ldots, y = a_k$ rešenja polazne jednačine, što je očigledno.

Komentar

Ovo su najjednstavnije diferencijalne jednačine i one su najvažnije, jer se prilikom rešavanja većine drugih tipova diferencijalnih jednačina one svode na jednačine sa razdvajanjem promenljivih. Osim toga, ove jednačine, i pored svog specijalnog oblika, predstavljaju modele u raznovrsnim i veoma važnim područjima primene. Zato je, prilikom obrade ove nastavne jedinice, potrebno od učenika zahtevati da u potpunosti ovladaju postupcima rešavanja ovakvih jednačina. Potrebno je uraditi više primera, na času i kod kuće, kao domaći zadatak. Nakon rešavanja zadataka potrebno je uvek prodiskutovati karakter dobijenih rešenja.

Primer 5. Rešiti diferencijalne jednačine

a) $y' = xy^2$,

b) $y' = xy - x + y - 1$

c) $\dfrac{y'}{\ln x} = -x^2, \ (x > 0)$,

d) $(1+y^2)dx - (1+x^2)dy = 0$.

Rešenja.

a)

$$\frac{dy}{dx} = xy^2$$

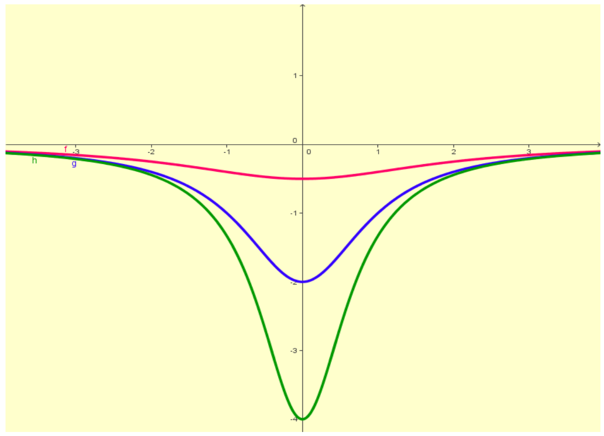
$$\frac{dy}{y^2} = xdx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int xdx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{y} = -\frac{2}{x^2 + C}, \quad (C = 2C_1).$$

Rešenje datog zadatka je familija funkcija koje su određene prethodnom jednačinom. Na slici 4. prikazana su neka partikularna rešenja.



Slika 4.

Rešenje date jednačine je i funkcija $y=0$ pošto i ona zadovoljava polaznu jednačinu.

Rešenje dobijeno pomoću računara u programskom paketu Scientific WorkPlace 5 :

$$\text{Exact solution is: } \frac{2}{-2C_1 - x^2},$$

što je izraz koji daje isto opšte rešenje kao prethodni.

U daljoj obradi retko ćemo navoditi rešenja dobijena putem računara ali ćemo ih stalno tražiti i upoređivati sa rešenjima dobijenim bez njegove upotrebe.

b)

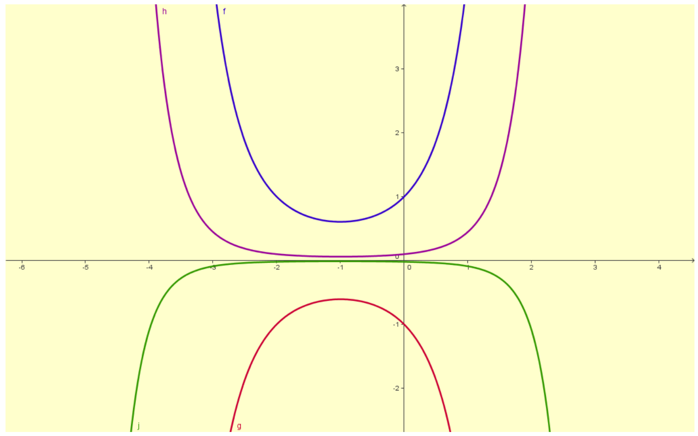
$$\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$$
$$\int \frac{dy}{y-1} = \int (x+1)dx$$
$$ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + x + C$$
$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}+x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Rešenje ove jednačine je i funkcija

$$y=1$$

pošto i ona zadovoljava polaznu jednačinu.

Na slici 5. prikazana su neka rešenja : za $C=1$ (plavo) , za $C=-1$ (crveno) , za $C=\frac{1}{10}$ (ljubičasto) i za $C=-\frac{1}{50}$ (zeleno).



Slika 5.

c)

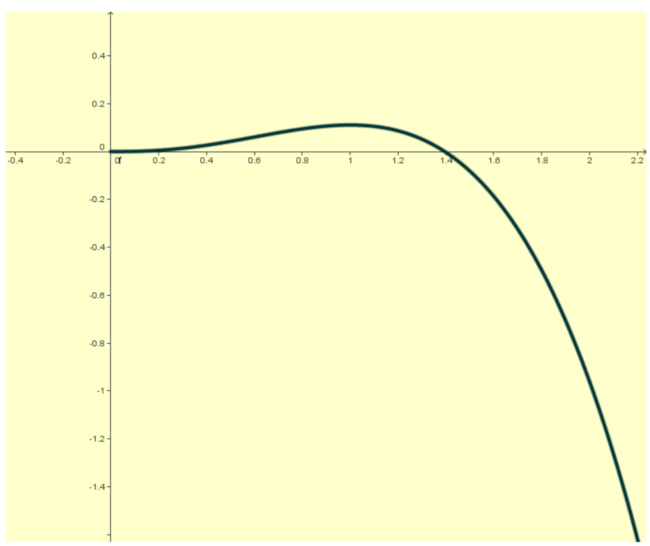
Razdvajanjem promenljivih dobija se jednačina

$$dy = -x^2 \ln x dx,$$

a zatim parcijalnom integracijom dobija se opšte rešenje

$$y = C + \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^3 \ln x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Prikaz partikularnog rešenja za $C = 0$ je na slici 6. Sva ostala rešenja dobijaju se translacijom za proizvoljan vektor u pravcu y-ose.



Slika 6.

Komentar

Ovaj zadatak nije detaljno rešavan.Izostavljen je postupak integracije pošto su svi programom predviđeni postupci obrađeni i detaljno uvežbani u prethodnoj temi. Napominjemo da su i svi teži integrali koji se javljaju u ovoj temi rešavani u prethodnoj što donosi značajnu uštedu vremena.

d)

$$\left(1+y^2\right)dx=\left(1+x^2\right)dy$$

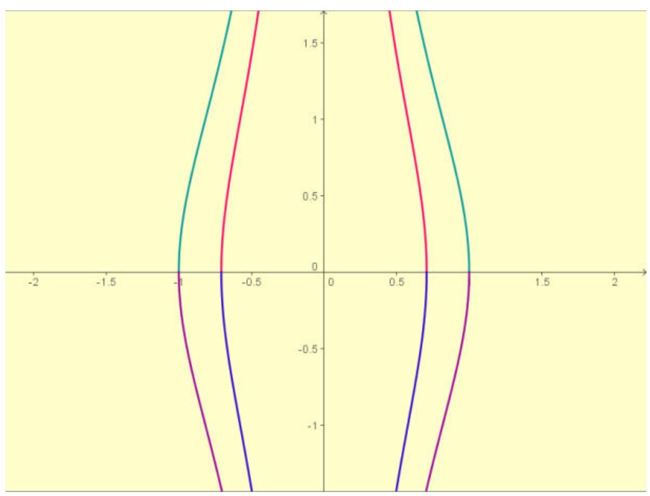
$$\int\frac{dy}{1+y^2}=\int\frac{dx}{1+x^2},$$

$$\operatorname{arctg}\left(1+y^2\right)=\operatorname{arctg}\left(1+x^2\right)+C,\quad C\in\mathbb{R},$$

$$tgC=\frac{1+y^2-1-x^2}{1+\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)},$$

$$y^2=\frac{ctgC}{x^2}-2,\quad C\in\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Opšte rešenje je familija krivih od kojih su, na slici 7. prikazane četiri, i to za izbor vrednosti integracione konstante1 i 2.



Slika 7.

Komentar

Važno je objasniti da, zbog egzistencije dveju funkcija, za jednu vrednost integracione konstante C dobijamo dva partikularna rešenja.

Primer 6. Naći ono partikularno rešenje jednačine

$$\left(xy^2-x\right)dx+\left(x^2y-y\right)dy=0$$

za koje važi $y(0)=2$.

Rešenje. Nakon razdvajanja promenljivih i integracije racionalnih funkcija dobija se familija funkcija

$$y^2 = 1 + \frac{1}{C\left(x^2-1\right)}\ , \quad C \in \mathbb{R}\{0\}.$$

koja sa funkcijama $y=-1$ i $y=1$ čini opšte rešenje. Na slici 7 prikazana su tri partikularna rešenja dobijena za $C=1$. Dalje je

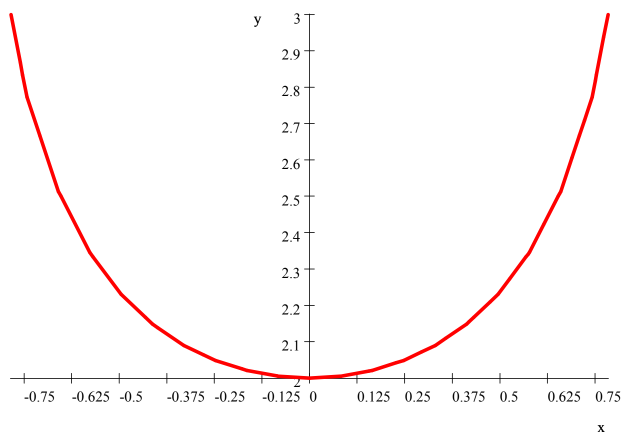
$$y^2(0) = 1 + \frac{1}{C(-1)},$$

$$4 = 1 - \frac{1}{C},$$

$$C = -\frac{1}{3},$$

pa je traženo partikularno rešenje

$$y = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}, \qquad |x|<1,$$



Slika 8.

Primer 7. Formirati diferencijalnu jednačinu familije krivih

$$\frac{1}{\mathrm{x}} - \frac{1}{y} = a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad xy \neq 0.$$

Rešenje. Diferenciranjem se dobija

$$-\frac{1}{x^2}+\frac{y'}{y^2}=0,$$

odakle je

$$x^2y'-y^2=0$$

tražena jednačina.

Provera:

$$x^2\frac{dy}{dx}-y^2=0$$
$$\int\frac{dy}{y^2}=\int\frac{dx}{x^2}$$
$$-\frac{1}{y}=-\frac{1}{x}+a, \quad a\in\mathbb{R}$$
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=a.$$

Napomena

Tokom ovoga časa kao i svih sledećih časova biće ocenjivani učenici koji učestvuju u radu, a posebno oni koji rade samostalno ili uz manju pomoć i pomažu ostalim učenicima.

Domaći zadatak

1. Rešiti diferencijalne jednačine

a) $e^{x+y}y'=x$,
b) $y'=(y+1)ctgx, \quad x\neq k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$,
c) $y'tgx=y^2, \quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$,
d) $\sqrt{x}y'=\sqrt{y}; \quad x,y\geq 0$,
e) $xyy'=1-x^2$.

2. Naći (ako postoji) ono partikularno rešenje jednačine $(x^2-1)y'+2\text{xy}'=0$ za koje važi $y(0)=1$.

3. Formirati diferencijalnu jednačinu familije krivih $x^2+\frac{1}{y^2}=b, \quad b\in\mathbb{R}$.

2.5 Diferencijalne jednačine koje dopuštaju razdvajanje promenljivih, vežba

2.5.1 Treći čas

Na početku časa obavezna je analiza domaćeg zadatka u trajanju do 10 minuta. U analizi učestvuju svi učenici i profesor. Na kraju se ocenjuju učenici koji su uspešno rešili zadatke i koji su aktivno učestvovali u analizi.

Cilj ovoga časa je da se rešavanjem nekoliko zadataka iz raznih oblasti u kojima se kao modeli javljaju diferencijalne jednačine u kojima se promenljive mogu razdvojiti, sagleda njihov značaj u drugim područjima. U ovim primerima je formiranje diferencijalne jednačine kao modela problema najvažniji ali i najteži deo zadatka. Taj deo zadatka ne može da uradi računar nego mi sami.

Primer 8. Masa stabla je trenutno približno 1.8t. Ako njegov godišnji koeficijent prirasta iznosi $k = 0,02$:

a) naći zakon tog prirasta,

b) izračunati masu koju će stablo imati kroz 9 meseci.

Rešenje.

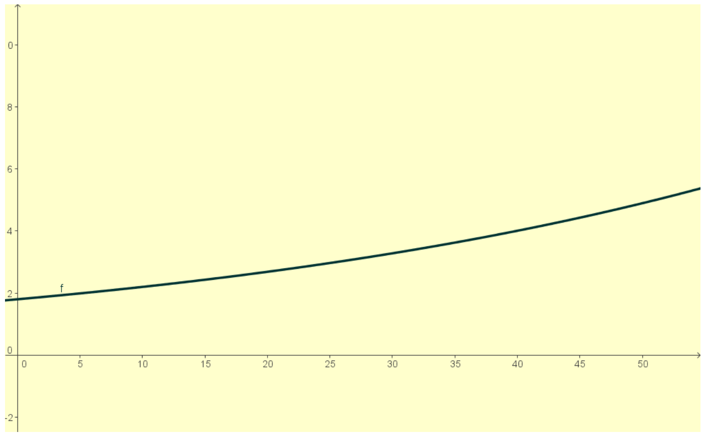
a) Zakon u ovom slučaju glasi:

$$\frac{dM}{M} = 0,02dt \text{ , uz uslov } M(0) = 1,8 .$$

Dalje je

$$\int \frac{dM}{M} = 0.02 \int dt$$
$$\ln M = 0,02t + C$$
$$M(t) = Ce^{0,02t}.$$

Pomoću početnog uslova dobijamo $C = 1,8$, pa je traženi zakon rasta $M(t) = 1.8e^{0,02t}$, (slika 9).



Slika 9.

b) Tražena masa će biti približno

$$M\left(0,75\right)=1,8e^{0,015}\approx 1,8272t\,.$$

Komentar

Opšte rešenje diferencijalne jednačine $dM = kMdt$ *je familija eksponencijalnih krivih*

$$M\left(t\right)=Ce^{kt},\quad C>0\,.$$

Ta jednačina može da se napiše i u obliku $\dfrac{dM}{dt}=kM$.

Odavde se vidi da je stopa promene veličine M s obzirom na vreme t proporcionalna trenutnoj masi M. Zato ćemo tu jednačinu zvati zakon eksponencijalnog rasta. Ona u praksi nije dobar matematički model za duži vremenski period, jer ne uzima u obzir neke ograničavajuće faktore rasta veličine koju posmatramo.

Primer 9. U ekonomiji se cena proizvoda obično prati u određenom vremenskom periodu.Zato je cenu prirodno posmatrati kao funkciju vremena. Ako cena $p\left(t\right)$ nekog proizvoda dostiže graničnu vrednost $\overline{p}$ kada $t\to\infty$, tada se kaže da je cena proizvoda dinamički stabilna a $\overline{p}$ se naziva ravnotežna cena. Da bi se proizvod prodao po što povoljnijoj ceni, onda ona mora biti obrnuto srazmerna svojoj promeni u nekom (kraćem) vremenskom periodu. Tako je omogućeno formiranje određene diferencijalne jednačine koju ta cena zadovoljava. Neka cena $p\left(t\right)$ proizvoda zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dp}{dt}=10-0,5p,\quad t\geq 0\,.$$

a) Naći $p\left(t\right)$ i izračunati $\overline{p}$ kao $\lim_{t\to\infty} p\left(t\right)$.

b) U istom koordinatnom sistemu nacrtati tri parcijalna rešenja koja redom zadovoljavaju početne uslove

$$p(0)=40, \quad p(0)=10 \quad i \quad p(0)=20 .$$

c) Analizirati ponašanje cene tokom dugog vremenskog perioda.

Rešenje.

a)

$$\frac{dp}{dt}=10-0.5p$$
$$\int \frac{dp}{10-0,5p}=\int dt$$
$$10-0,5p=Ce^{-0.5t}$$
$$p(t)=20-Ce^{-0.5t}$$
$$\overline{p}=lim_{t\to\infty}p(t)=lim_{t\to\infty}(20-Ce^{-0.5t})=20$$

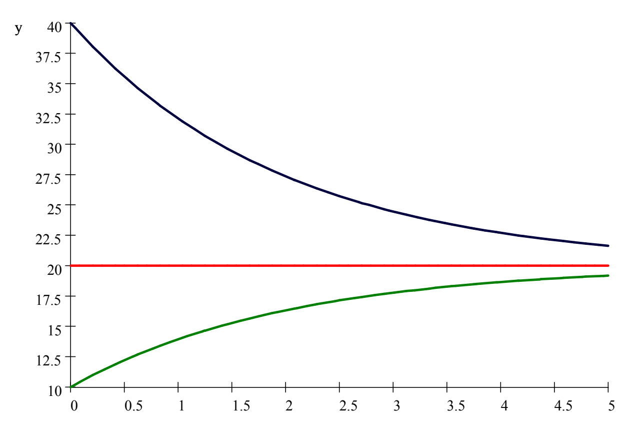
Polazna diferencijalna jednačina može se napisati u obliku

$$\frac{dp}{dt}=0,5(20-p),$$

odakle zaključujemo da je stopa promene veličine p s obzirom na vreme t proporcionalna razlici između njene trenutne vrednosti i granične vrednosti 20. Zato kažemo da ova diferencijalna jednačina predstavlja zakon ograničenog rasta.

b)

$$\begin{array}{lll} p(0)=20-C & p(0)=20-C & p(0)=20-C \\ 40=20-C & 10=20-C & 20=20-C \\ C=-20 & C=10 & C=0 \\ p(t)=20+20e^{-0,5t}, & p(t)=20-10e^{-0,5t}, & p(t)=20 \end{array}$$



Slika 10.

c) Ravnotežna cena p očigledno ne zavisi od konstante C niti od broja $p(0)$ koji je početna vrednost funkcije cene. Uočavamo da, ako je $p(0) > \overline{p}$, onda cena opada i ima graničnu vrednost p. Ako je $p(0) < \overline{p}$, onda cena raste i takođe ima graničnu vrednost $\overline{p}$. Ako je $p(0) = \overline{p}$, tada cena ostaje stalna i ne zavisi od t, (slika10).

Primer 10. Novac se kontinuirano ulaže na račun po stopi od 2000 evra godišnje uz kamatnu stopu od 8% koja se pripisuje neprekidno. Iznos A na računu nakon t godina zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dA}{dt} = 0,08A + 2000$$
.

a) Naći opšte rešenje ove jednačine.

b) Nacrtati grafike partikularnih rešenja koja zadovoljavaju početne uslove

$$A(0) = 0 \text{ i } A(0) = 1.$$

c) Uporediti partikularna rešenja iz prethodne tačke tokom dugog vremenskog perioda. Razmotriti uticaj vrednosti $A(0)$ na tekući iznos na računu.

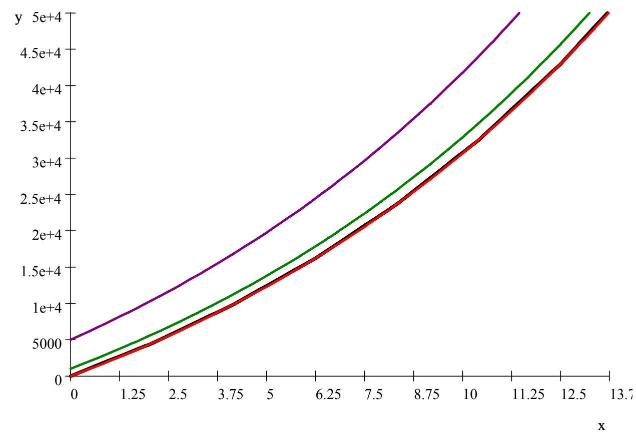
Rešenje.

a) Nakon razdvajanja promenljivih i integracije dobija se opšte rešenje

$$A(t) = Ce^{0.08t} - 25000, \quad C \geq 25000$$

b)

$A(0) = 0$	$A(0) = 1$
$C - 25000 = 0$	$C - 25000 = 1$
$C = 25000$	$C = 25001$
$A(t) = 25000e^{0.08t} - 25000$	$A(t) = 25001e^{0.08t} - 25000$



Slika 11.

U cilju što boljeg upoređivanja partikularnih rešenja prikazana su, na slici 11, još i rešenja za C=26 000, (zeleno) i za C=30 000, (ljubičasto).

c) I nakon dužeg vremenskog perioda male su razlike između ovih partikularnih rešenja. Ako je $A(0)$ veće, onda se tokom vremena uvećava razlika u rešenjima u odnosu na ona rešenja u kojima je $A(0)$ manje.

Domaći zadatak

1. Rešiti diferencijalne jednačine

a) $x^2y^2 = (x-1)y'$;

b) $xy' = y + y^3$,

c) $y' = \dfrac{1+y^2}{xy(1+x^2)}; x, \quad y \neq 0$.

2. Matematički model širenja glasina je diferencijalna jednačina

$$\frac{dN}{dt} = Ne^{-0.5t} \text{ (Gonpercov zakon rasta),}$$

gde je $N(t)$ broj osoba koje su čule glasinu u vreme t.

a) Naći opšte rešenje ove jednačine i izračunati $\overline{N} = \lim_{t\to\infty} N(t)$.

b) Nacrtati grafove parcijalnih rešenja koja zadovoljavaju početne uslove

$$N(0) = 100 \text{ i } N(0) = 200.$$

c) Analizirati učinak $N(0)$ na širenje glasina tokom dugog vremenskog perioda.

2.6 Diferencijalne jednačine koje dopuštaju razdvajanje promenljivih, vežba

2.6.1 Četvrti čas

Na početku časa obavezna je analiza domaćeg zadatka u trajanju do 15 minuta. U analizi učestvuju svi učenici i profesor. Na kraju analize vrednuju se ocenom postignuća učenika. Saopštavaju se rezultati prvog zadatka, a učenicima koji neke od njih nisu uradili daju se detaljna uputstva za rešavanje, i to što više od strane onih koji su ih uradili. U analizi drugog zadatka učenici saopštavaju svoje rezultate koje profesor zapisuje na tabli, (sa imenom učenika), a zatim daje video prikaz rešenog zadatka uz neophodan komentar.

Rešenje 2. zadatka

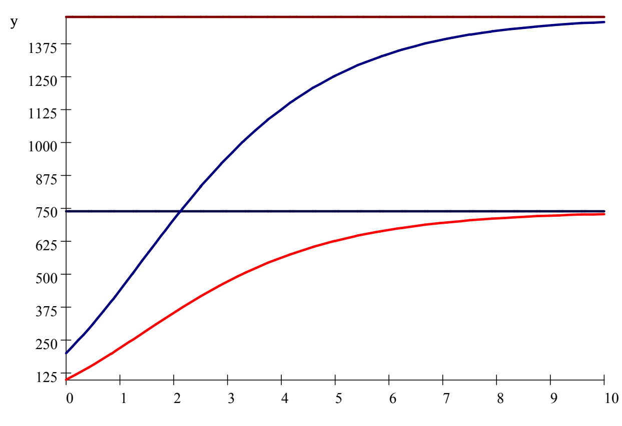
a) Nakon razdvajanja promenljivih i integracije nalazimo opšte rešenje

$$N(t) = Ce^{-2e^{-0.5t}} \text{ i } lim_{t\to\infty} N(t) = lim_{t\to\infty}\left(Ce^{-2e^{-0.5t}}\right) = C \text{ .}$$

Ovim je dokazano da je ovaj zakon rasta logistički, tj da ima svoju gornju granicu.

b)

$$\begin{array}{ll} N(0) = 100 & N(0) = 200 \\ Ce^{-2} = 100 & Ce^{-2} = 200 \\ C = 100e^{2} & C = 200e^{2} \\ N(t) = 100e^{2-2e^{-0.5t}} & N(t) = 200e^{2-2e^{-0.5t}} \end{array}$$



Slika 12.

c) Neka su $N_1(\mathrm{t})$ i $N_2(\mathrm{t})$ dva partikularna rešenja sa različitim vrednostima $N_1(0)$ i $N_2(0)$ i granicama logističkog rasta C_1 i C_2.U toku dugog vremenskog perioda povećava se i razlika između njih i njena apsolutna vrednost teži broju $|C_1 - C_2|$, (slika 12).

Komentar

Urađeni primeri omogućuju da se komentariše da je matematika veoma značajna u nekim područjima (biologija, ekonomija) kao i da je primenljiva i u sociologiji pri analizi nekih njenih pojava.

Zatim se rešavaju sledeća dva primera.

Primer 11.1. Telo koje ima temperaturu T_0 u trenutku $t_0 = 0$ stavljeno je u sredinu čija je temperatura τ , $\tau<T_0$. Naći zakon po kome ce se telo hladiti u zavisnosti od vremena t, znajući da je brzina tog hlađenja proporcionalna razlici temperatura tela i sredine koja ga okružuje.

Rešenje. Kako se temperatura $T(t)$ smanjuje sa protokom vremena t, koeficijent proporcionalnosti je negativan. Dakle,matematički model ovog procesa je diferencijalna jednačina

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - \tau), \quad k > 0.$$

Nakon razdvajanja promenljivih i integracije nalazimo opšte rešenje

$$T(t) = Ce^{-kt} + \tau ,$$

gde je C proizvoljna realna konstanta.

Zbog uslova

$$T(0) = T_0,$$

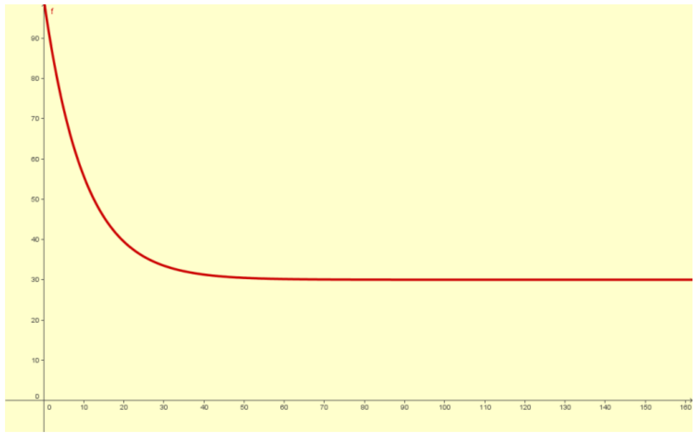
mora biti

$$\begin{aligned} T(0) &= Ce^0 + \tau \\ T_0 &= C + \tau \\ C &= T_0 - \tau, \end{aligned}$$

tako da je traženo rešenje

$$T(t) = (T_0 - \tau)e^{-kt} + \tau .$$

Grafički prikaz ovog zakona hlađenja dat je za $T_0 = 100$, $\tau = 30$ i za pretpostavljeno $k = 0{,}1$,(slika 13).



Slika 13.

Primer 12. Epidemija gripe širi se populacijom od 50 000 ljudi po stopi proporcionalnoj broju trenutno inficiranih i broju onih koji to još nisu. Ako je na početku bilo inficirano 100 ljudi, a nakon 10 dana njih 500, odrediti:

a) Koliko ljudi će biti inficirano nakon 20 dana?

b) Kada će gripom biti zaražena polovina ukupne populacije?

Rešenje.

a) Neka je P broj zaraženih u vreme t. Matematički model tog problema je sledeći model tzv. logističkog rasta:

$$\frac{dP}{dt} = kP(50\ 000 - P), \quad P(0) = 100, \quad P(10) = 500$$

Treba da odredimo $P(20)$. Za to treba da nađemo rešenje ovog problema.

Razdvajanjem promenljivih u datoj jednačini i integracijom dobijamo:

$$\int \frac{dP}{P(50\ 000 - P)} = k\int dt$$

$$\frac{1}{50\,000}\ln\frac{P}{50\,000 - P} = kt + C_1$$

(Korišćena je formula $\int \frac{1}{x(a+bx)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right| + C$.)

$$\ln\frac{P}{50\,000 - P} = 50\,000kt + 50\,000C_1$$

$$e^{50000kt+50000C_1} = \frac{P}{50000 - P}$$

odakle je

$$P(t) = \frac{50000}{1 + Ce^{-50000kt}}.$$

Ovo je opšti integral polazne diferencijalne jednačine. Konstantu C odredićemo iz navedenog uslova

$$P(0) = 100,$$

odakle je

$$100 = \frac{50000}{1 + C},$$

$$C = 499.$$

Zamena vrednosti za C u opšte rešenje daje:

$$P(t) = \frac{50000}{1 + 499e^{-50000kt}}.$$

Zbog

$$P(10) = 500,$$

je

$$500 = \frac{50000}{1 + 499e^{-500000k}},$$

odakle je

$$-50000k = \frac{\ln \frac{99}{499}}{10} \approx -0.16175$$

Dakle,

$$P(t) = \frac{50000}{1 + 499e^{-0.16175t}}.$$

Odavde je

$$P(20)=\frac{50000}{1+499e^{-3.2335}}=2419\,.$$

Znači, za 20 dana će biti zaraženo 2419 osoba.

b) Treba rešiti jednačinu

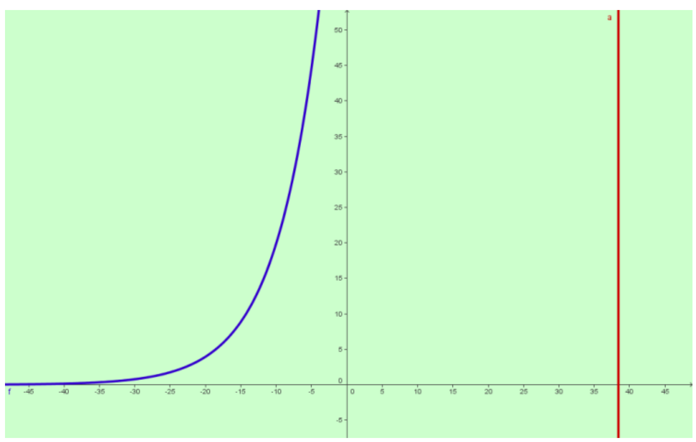
$$P(t)=25\ 000\,,$$

odnosno

$$\frac{50000}{1+499e^{-0.16175t}}=25000\,.$$

Približno rešenje je 38,409 dana.

Slika 14. grafički ilustruje zavisnost broja inficiranih od vremena. Presečna tačka krive f zavisnosti i prave $x=38,409$ je tačka $A(38,409;25000)$.



Slika 14.

Komentar

Rešeni primeri omogućuju učenicima da uoče da diferencijalne jednačine imaju primenu u raznovrsnim oblastima (toplotnoj mehanici i u socijalnoj medicini).

Domaći zadatak

Pred kraj časa učenicima će se podeliti sledeća dva urađena primera.

Primer 13. Jednostavan primer dinamičkog modela je opis dinamike rasta neke populacije u funkciji vremena, koja može biti, na primer u biologiji: ljudska, životinjska, kolonija mikroorganizama, ćelija, količina fermenata pri nekim hemijskim reakcijama, u ekonomiji: veličina kapitala, kamatnih stopa, poreskih stopa, itd. U velikom broju prostih modela, pri idealnim uslovima zatvorenih sistema na koje ne deluju uticaji iz prirodnog okruženja, logično se pretpostavlja da je brzina rasta populacije srazmerna veličini populacije. Ako se sa k označi stopa rasta (koeficijent proporcionalnosti), a u početnom momentu $t=0$ veličina populacije je bila $N(0)=N_0$, pri čemu je $N_0 > 0$, tada se veličina populacije u momentu $t>0$ opisuje jednačinom

$$N'(t)=kN(t),$$

a problem sa

$$N'(t)=kN(t), \quad t\geq 0, \quad N(0)=N_0$$

Kako je

$N'(t)>0$ za $k>0$ i $N'(t)<0$ za $k<0$, to je $N(t)\neq 0$, za svako $t\geq 0$.

Rešenje. Rešavanje ove diferencijalne jednačine se zasniva na osnovnim principima diferencijalnog računa.

Iz

$$\frac{dN(t)}{dt}=kN(t)$$

sledi

$$\frac{dN(t)}{N(t)}=kdt.$$

Odatle je

$$\ln N(t)=kt+C_1,$$

dakle

$$N(t)=e^{kt+C_1},$$

gde je C_1 proizvoljna konstanta. Ako označimo $C=e^{C_1}$, tada je

$$N(t)=Ce^{kt}, \quad t\geq 0,$$

tako da rešena diferencijalna jednačina ima klasu rešenja koja zavisi od proizvoljne konstante C i koja je njeno opšte rešenje. Konstantu C ćemo odrediti iz početnog uslova. Za $t=0$ je $N_0=N(0)=C$, tako da je dinamika rasta populacije opisana eksponencijalnom funkcijom

$$N(t)=N_0e^{kt}, \quad t\geq 0.$$

Jasno, $N(t) \to +\infty$ kad $t \to +\infty$ ako je $k > 0$; $N(t) \to 0$ kada $t \to +\infty$ ako je $k < 0$. Približnu vrednost za k dobijamo kao količnik priraštaja u nekom manjem periodu i veličine populacije na kraju tog perioda.

Procesi koji imaju tendenciju rasta sa protokom vremena, nazivaju se procesi rađanja, a oni sa tendencijom opadanja sa protokom vremena, procesi umiranja.

Zanimljiva je primena ovog razmatranja na ljudsku populaciju.Podaci dobijeni iz rešenja u poređenju sa podacima za period od 1700-te godine do sada pokazuju odlično slaganje. Međutim, naše rešenje predviđa 200 000 milijardi stanovnika već u 2510-toj godini. Tada bi gustina naseljenosti naše planete bila oko jednog stanovnika po $1m^2$ njene celokupne površine. To je očigledno nemoguće.Zato se daje tzv. poboljšani logistički model rasta koji daje realniju procenu za budućnost. Pri njegovom formiranju uzimaju se u obzir i neki ograničavajući faktori rasta.

Primer 14. U farmakokinetici se, između ostalih matematičkih modela koristi i tzv. jednokompartmanski otvoreni model sa intravenskim ubrizgavanjem jedne doze leka. Čini ga jednačina $\frac{dq}{dt} = -k_{10}q$ sa početnim uslovom $q(0) = q_0$, pri čemu je $\frac{dq}{dt}$ promena količine leka po jedinici vremena, k_{10} ("ka jedan-nula") konstanta eliminacije leka, q_0 početna doza i q količina leka u trenutku t. Znak "-" se javlja jer se sa vremenom količina aplikovanog leka u krvi smanjuje. Odrediti količinu leka u organizmu u proizvoljnom trenutku nakon aplikacije.

Rešenje. Iz polazne diferencijalne jednačine sledi

$$\frac{dq}{q} = -k_{10}dt,$$

i dalje

$$\begin{aligned}
&\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -k_{10}\int dt, \\
&\ln q I_{q_0}^{q} = -k_{10} t I_{t_0}^{t}, \\
&\ln q - \ln q_0 = -k_{10}(t - t_0), \quad t_0 = 0 \\
&\ln \frac{q}{q_0} = -k_{10}t, \\
&\frac{q}{q_0} = e^{-k_{10}t}, \\
&q(t) = q_0 e^{-k_{10}t}.
\end{aligned}$$

Poslednja formula omogućuje određivanje tražene količine leka pod uslovom da se odredi konstanta eliminacije leka k_{10}.

Neka je V poznati volumen distribucije leka za datog pacijenta. Tada, deobom u poslednjoj jednačini sa V, dobijamo

$$\frac{q}{V} = \frac{q_0}{V} e^{-k_{10}t}.$$

Promenljiva $C = \frac{q}{V}$ i konstanta $C_0 = \frac{q_0}{V}$ su redom koncentracije leka u trenutku t i u početnom trenutku.

Iz jednačine

$$C = C_0 e^{-k_{10}t},$$

logaritmovanjem dobijamo

$$\ln C = \ln C_0 - k_{10}t.$$

Ovo je formula linearne funkcije $\left(y = ax + b, \quad y = \ln C, \quad a = -\mathrm{k}_{10}, \quad x = t, \quad b = \ln C_0\right)$.

Praćenjem vrednosti broja C u nekom vremenskom intervalu nalazi se najbolja linearna aproksimacija dobijenih parova vrednosti za t i za C. Približna vrednost konstante $-k_{10}$ je koeficijent pravca dobijene prave.

Znajući k_{10} može se izračunati i tzv. poluvreme eliminacije $t_{0,5}$ leka. To je ono vreme za koje važi

$$C = \frac{C_0}{2}.$$

Tada je

$$\ln \frac{C_0}{2} = \ln C_0 - k_{10}t,$$

odakle je

$$t_{0,5} = \frac{\ln 2}{k_{10}}.$$

2.7 Homogena diferencijalna jednačina

2.7.1 Peti čas

Na početku časa ukratko se komentarišu zadaci dati za domaći i vrednuje se dobro razumevanje i valjani komentari u vezi sa njima. Zatim se prelazi na novu nastavnu jedinicu.

Definicija 8. *Diferencijalna jednačina prvog reda koja se može svesti na oblik*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

gde je f *zadata neprekidna funkcija u nekoj oblasti* G *je homogena jednačina prvog reda.*

Ova jednačina se smenom

$$y = ux,$$

gde je u nova nepoznata funkcija od x, svodi na diferencijalnu jednačinu sa razdvajanjem promenljivih. Zaista, tada je

$$y' = u'x + u,$$

pa je

$$u'x + u = f(u),$$

i dalje

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}x + u &= f(u), \\ \frac{du}{f(u)-u} &= \frac{dx}{x}, \\ \int \frac{du}{f(u)-u} &= \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ako su brojevi $u_1, u_2, ..., u_k$, rešenja jednačine $f(u) - u = 0$, tada je $u = u_k$, odnosno funkcija $y = u_k x$ je rešenje polazne jednačine.

Primer 15. Rešiti jednačine

a) $xy' = 2y, \quad x \neq 0$ (kao homogenu),

b) $x + y - xy' = 0, \quad x \neq 0$,

Rešenje.

a) Uočavamo da je ovo istovremeno i jednačina u kojoj se promenljive mogu razdvojiti, ali ćemo je rešavati kao homogenu.

$$y' = \frac{2y}{x}, \text{ (smena: } \frac{y}{x} = u \text{ , odakle je } y = ux \text{ , } y' = u'x + u \text{).}$$

Zamenom u datu diferencijalnu jednačinu dobijamo u′x+u=2u odnosno u′x=u. Dalje je

$$\frac{xdu}{dx} = u$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| = \ln|x| + \ln C_1, \quad C_1 > 0$$

$$\ln|u| = \ln|C_1 x|$$

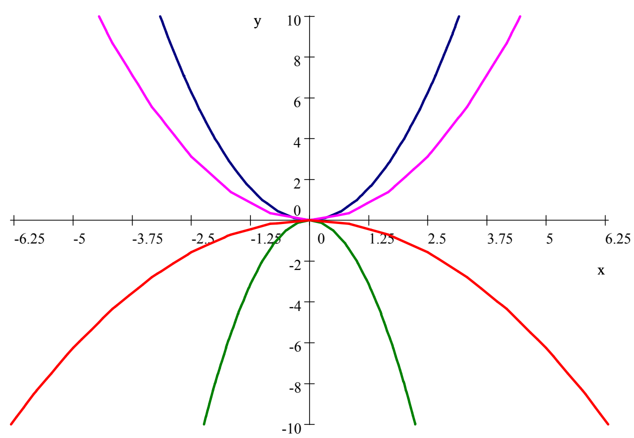
$$u = Cx, \quad C \neq 0$$

$$\frac{y}{x} = Cx$$

$$y = Cx^2 .$$

Komentar

Očigledno je i $y = 0$ rešenje, pa je opšte rešenje $y = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$. To je familija parabola sa temenom u koordinatnom početku simetričnih u odnosu na osu Oy ,(za $C \neq 0$) i prava $y = 0$,(za $C = 0$). Na slici 15. prikazana su neka rešenja.



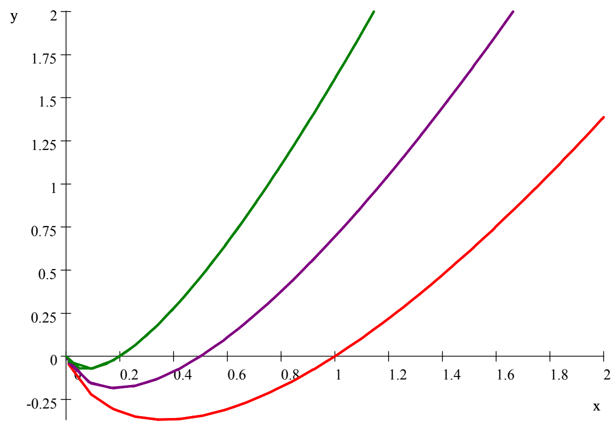
Slika 15.

b) Iz date jednačine je $y' = \dfrac{x+y}{x}$ ili $y' = 1 + \dfrac{y}{x}$.

Smenom $\dfrac{y}{x} = u$, $\left(y = ux, \quad y' = u'x + u \right)$ dobijamo $u'x + u = 1 + u$ ili $u'x = 1$.

Nakon integracije i zamene u sa $\frac{y}{x}$ je $y = x\ln|Cx|$, $(C \neq 0)$ opšte rešenje.

Na slici 16. prikazana su tri partikularna rešenja za $C = 1$ (crveno), $C = 2$ (ljubičasto) i $C = 5$ (zeleno). Njima ne pripada koordinatni pocetak zbog uslova $x \neq 0$.



Slika 16.

Primer 16. Naći partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$xy' = y\ln\frac{y}{x}, \quad \left(\frac{y}{x} > 0\right),$$

za koje važi početni uslov

$$y(1) = e^2.$$

Rešenje. Opšte rešenje koje dobijamo postupkom kao u 1. zadatku glasi:

$$y = xe^{1+Cx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

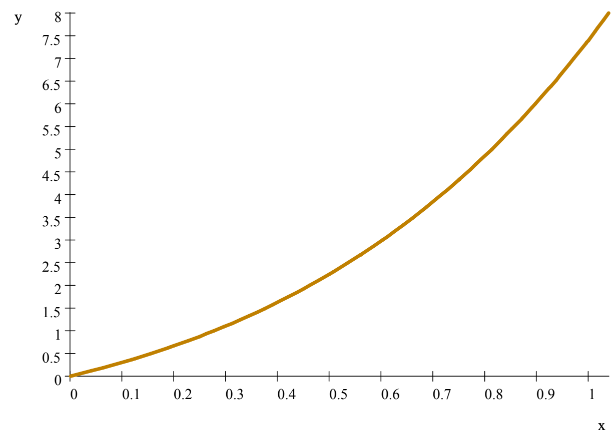
Zbog početnog uslova

$$e^2 = e^{1+C}$$

je

$$1 + C = 2, \quad C = 1.$$

Traženo partikularno rešenje $y = xe^{1+x}$ prikazano je na slici 17. Dobijenoj krivoj ne pripada koordinatni početak zbog uslova $x \neq 0$.



Slika 17.

Komentar

Već pri rešavanju homogenih jednačina učenici počinju da pitaju kako da prepoznaju tip diferencijalne jednačine. Zato treba insistirati na definicijama svih tipova jednačina koje izučavamo. Prepoznavanje tipa svodi se na proveru važenja neke od tih definicija. Npr. provera, da li je data diferencijalna jednačina homogena, je izražavanje y' *a zatim provera, da li se izraz na desnoj strani jednačine može prikazati kao funkcija od* $\frac{y}{x}$.

Domaći zadatak

1. Da li su sledeće diferencijalne jednačine homogene:

a) $xy' = 2\mathrm{x} - y$,

b) $yy' = x$,

c) $xyy' = 1$,

d) $xy' = e^{\frac{y}{x}}$,

e) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$?

2. Rešiti homogene jednačine iz 1. zadatka.

3. Naći ono partikularno rešenje jednačine $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$, za koje važi $y(e) = 0$.

2.8 Homogena diferencijalna jednačina prvog reda, vežbe

2.8.1 Šesti čas

Nakon analize domaćeg zadatka i ocenjivanja rada učenika, saopštavamo da ćemo na ovom času, na jednom zadataku, videti primenu homogene jednačine.

Primer 17. Naći sve krive linije u ravni kod kojih je odsečak tangente od ose x do tačke dodira sa krivom jednak odsečku koga ta tangenta gradi na osi Ox.

Rešenje. Neka je

$$Y - y = f'(x)(X - x)$$

jednačina tangente a u tački (x, y) tražene krive. U tački preseka sa osom Ox je $Y = 0$ pa je

$$-y = Xf'(x) - xf'(x), \quad X = \frac{xf'(x) - y}{f'(x)}.$$

Prema uslovu u zadatku je

$$\sqrt{\left(x - \frac{xf'(x) - y}{f'(x)}\right)^2 + y^2} = \left|\frac{xf'(x) - y}{f'(x)}\right|$$

odakle se kvadriranjem i sređivanjem dobija

$$\left(f'(x)\right)^2 y^2 = x^2 \left(f'(x)\right)^2 - 2xyf'(x).$$

Odavde je, zbog $f'(x) \neq 0$

$$f'(x)\, y^2 = x^2 f'(x) - 2xy .$$

Tako dobijamo

$$y'y^2 = x^2y' - 2xy$$

$$\left(x^2 - y^2\right) y' = 2xy,$$

odakle je

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Uočavamo da je ova jednačina homogena pa nakon deobe brojioca i imenioca razlomka na desnoj strani sa x^2 dobijamo

$$y' = \frac{2\dfrac{y}{x}}{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}.$$

Posle smene $\frac{y}{x} = u$, $\left(y = ux, \quad y' = u'x + u\right)$ je

$$u'x + u = \frac{2u}{1-u^2}.$$

Odavde je

$$u'x = \frac{u+u^3}{1-u^2},$$

$$u'x = \frac{u+u^3}{1-u^2},$$

ili, nakon razdvajanja promenljivih

$$\frac{\left(1-u^2\right)du}{u\left(1+u^2\right)} = \frac{dx}{x}.$$

Nakon integracije i sređivanja dobijamo

$$u = Cx\left(1+u^2\right)$$

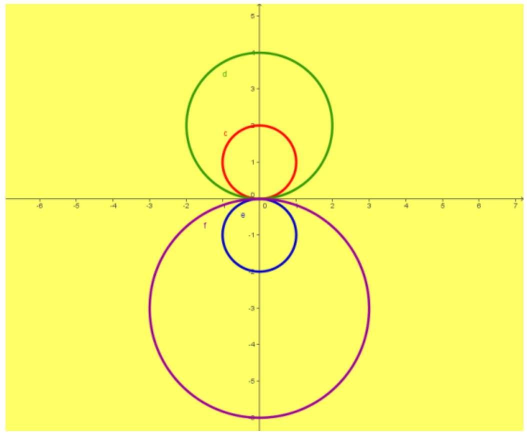
ili

$$\frac{y}{x} = Cx\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right),$$

odakle je

$$x^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{4},$$

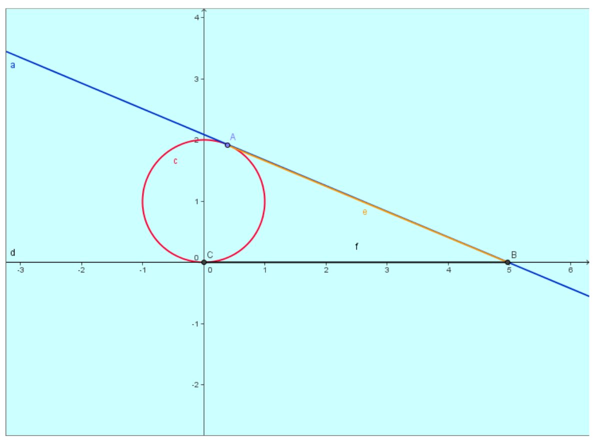
Traženo rešenje zadatka su sve kružnice sa centrima u tačkama $\left(0, \frac{C}{2}\right)$ i poluprečnikom $\frac{|C|}{2}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. One čine dva (parabolična) pramena kružnica kojima je osa x zajednička tangenta, (slika 18). Očigledno, $y(x) = 0$ je takođe rešenje. Možemo ga posmatrati i kao kružnicu $(0, \infty)$ i poluprečnikom ∞.



Slika 18.

Komentar

Jednaki odsečci su tangentne duži povučene na ove kružnice iz tačaka preseka tangenata sa osom Ox. Ovde je dokazano da su sa tom osobinom jedino dobijene kružnice. Situacija je predočena na slici 19.



Slika 19.

Ovaj zadatak je veoma zahtevan i zbog formiranja diferencijalne jednačine i njenog rešavanja. Zato je potrebno ranije naći integral $\int \frac{\left(1-x^2\right)dx}{x\left(1+x^2\right)}$ *i u radu ga koristiti.*

Domaći zadatak

Naći krivu koja prolazi kroz tačku $(1,1)$ sa osobinom da je u svakoj njenoj tački količnik odsečka koga gradi tangenta te krive sa y-osom i odsečka koga, u istoj tački, gradi normala na krivu sa x-osom, jednak količniku apscise i ordinate tačke u kojoj je povučena tangenta.

Uputstvo

- Jednačina tangente u proizvoljnoj tački (x, y) krive je
  $Y - y = y'(X - x), \quad (y' = f'(x))$.
- Jednačina normale u istoj tački je $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$.
- Odsečak tangente na y-osi je $y - xy'$.
- Odsečak normale na x-osi je $x + yy'$.
- Diferencijalna jednačina ?
- $y' =$? (homogena)
- (Tražena kriva je $y = \sqrt{2x - x^2}$).

Komentar

Za davanje uputstva treba obezbediti dovoljno vremena kako bi u tome što više učestvovali učenici.

2.9 Linearna diferencijalna jednačina prvog reda

2.9.1 Sedmi čas

Definicija 9. *Linearna diferencijalna jednačina prvog reda je jednačina oblika*

$$y' + f(x)y = g(x),$$

gde su f *i* g *date neprekidne funkcije nezavisno promenljive* x *na nekom intervalu* $(a,b) \subset \mathbb{R}$.

Ako je $g(x) \equiv 0$, dobijamo jednačinu oblika

$$y' + f(x)y = 0.$$

To je homogena linearna diferencijalna jednačine prvog reda. Uočavamo da se u njoj promenljive mogu razdvojiti, pa je kod homogene linearne diferencijalne jednačine

$$\frac{dy}{dx} = -f(x)y,$$

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx, \quad (y \neq 0),$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx,$$

$$\ln|y| + C_1 = -\int f(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int f(x)\,dx - C_1,$$

i konačno,

$$y = Ce^{-\int f(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R},$$

opšte rešenje.

Ova formula nam sugeriše nalaženje rešenja i ako je jednačina ne homogena. Njeno opšte rešenje potražićemo u obliku

$$y = C(x)e^{-\int f(x)dx}.$$

Tada je

$$y' = C'(x)e^{-\int f(x)dx} - C(x)f(x)e^{-\int f(x)dx}$$

Zamenom y i y' u jednačinu

$$y' + f(x)y = g(x),$$

dobijamo

$$C'(x)e^{-\int f(x)dx} - C(x)f(x)e^{-\int f(x)dx} + f(x)C(x)e^{-\int f(x)dx} = g(x),$$

odakle je

$$C'(x) = g(x)e^{\int f(x)dx}.$$

Dalje je

$$\frac{dC(x)}{dx} = g(x)e^{\int f(x)dx}$$

i

$$C(x) = C + \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx, \; C \in \mathbb{R}.$$

Konačno je

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left(C + \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx\right)$$

traženo opšte rešenje.

Komentar

Ovaj način nalaženja rešenja zovemo metod varijacije konstanti. Potrebno je odmah reći učenicima da ćemo pri rešavanju zadataka ovim postupkom koristiti jedino poslednji obrazac.

Do istog obrasca dolazi se ako se rešenje traži u tzv. obliku proizvoda neodređenih funkcija, tj.

$$y = u(x)v(x).$$

Tada je

$$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

pa se jednačina može pisati u obliku

$$\big(u'(x) + f(x)u(x)\big)v(x) + v'(x)u(x) = g(x).$$

Funkciju u(x) određujemo tako da je

$$u'(x) + f(x)u(x) = 0.$$

Ova funkcija postoji jer je tražena funkcija y proizvod dveju još neodređenih funkcija pa se jedna od njih može birati tako da ispunjava zadati uslov.

Odavde je

$$u(x) = e^{-\int f(x)dx},$$

pa zamenom u jednačinu

$$v'(x)u(x) = g(x),$$

dobijamo

$$v'(x) = g(x)e^{\int f(x)dx},$$

odakle je

$$v(x) = C + \int e^{\int f(x)dx} dx,$$

i konačno

$$y = u(x)v(x) = e^{-\int f(x)dx}\left(C + \int g(x)e^{\int f(x)dx} dx\right).$$

Primer 18. Rešiti jednačinu

$$y' + \frac{y}{x} = x\,.$$

Rešenje. Smenom

$$y = uv, \quad \left(y' = u'v + uv'\right)$$

dobijamo diferencijalnu jednačinu

$$\left(u' + \frac{u}{x}\right)v + uv' = x\,.$$

Funkciju u određujemo tako da je

$$u' + \frac{u}{x} = 0\,,$$

odnosno

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x},$$

$$\ln|u| = -\ln|x| + C_1,$$

$$\ln|u| = -\ln|x| + \ln C_2, \quad \left(C_2 > 0\right),$$

$$\ln|u| = \ln\left|\frac{C_2}{x}\right|,$$

pa je

$$u = \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Kakos u u i v privremeno neodređene funkcije i $y = uv$, za funkciju u možemo proglasiti ma koju iz dobijene familije funkcija. Najlakši je izbor ako u postupku integracije biramo broj nula za vrednost integracione konstante C_1, ili broj 1 za konstantu C u dobijenoj familiji. U daljem rešavanju linearnih jednačina ovim postupkom, uvek ćemo postupati na prvi od navedenih načina. Obično se kaže da se integraciona konstanta izostavlja. Tako je i funkcija v, zbog $uv' = x$, određena sa tačnošću do na konstantu.

Zamenom funkcije u u gornju diferencijalnu jednačinu dobijamo

$$\frac{1}{x}v' = x, \text{ tj. } v = \frac{x^3}{3} + C\,.$$

Opšte rešenje date jednačine je

$$y = u(x)v(x) = \frac{1}{x}\left(C + \frac{x^3}{3}\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

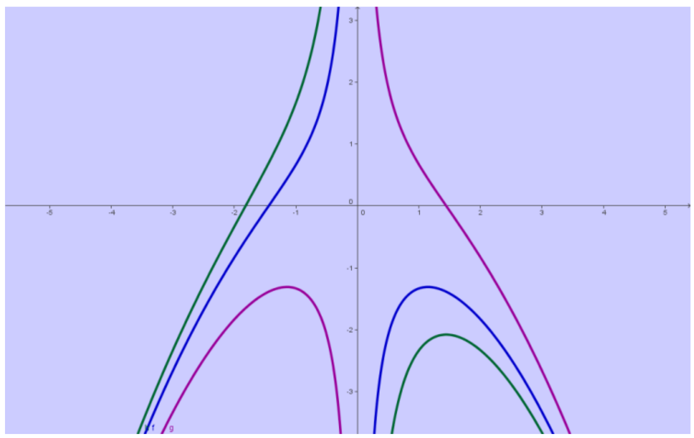
Opšte rešenje dobijeno pomoću računara:

Exact solution is: $-\frac{1}{x}\left(C_1 - \frac{1}{3}x^3\right) \quad x \neq 0$.

Komentar

Ovde treba razjasniti sa učenicima da smo dobili isto rešenje kao i bez upotrebe računara.

Šest partikularnih rešenja ove jednačine prikazano je na slici 20.



Slika 20.

Primer 19. Odrediti ono rešenje jednačine $(y\sin x - 1)dx + \cos x dy = 0$ za koje važi $y(\pi) = 1$.

Rešenje. Traženo partikularno rešenje dobićemo pomoću opšteg rešenja i uslova navedenog u zadatku. Znači, moramo prvo naći opšte rešenje. Jednačinu pišemo u obliku

$$\frac{dy}{dx}\cos x + y\sin x = 1,$$

odakle je

$$y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ (linearna diferencijalna jednačina).}$$

Njeno opšte rešenje je

$$y = e^{-\int tgxdx}\left(C + \int \frac{1}{\cos x} e^{\int tgxdx} dx\right)$$

$$= e^{\ln|\cos x|}\left(C + \int \frac{1}{\cos x} e^{-\ln|\cos x|} dx\right)$$

$$= \cos x\left(C + \int \frac{dx}{\cos^2 x}\right)$$

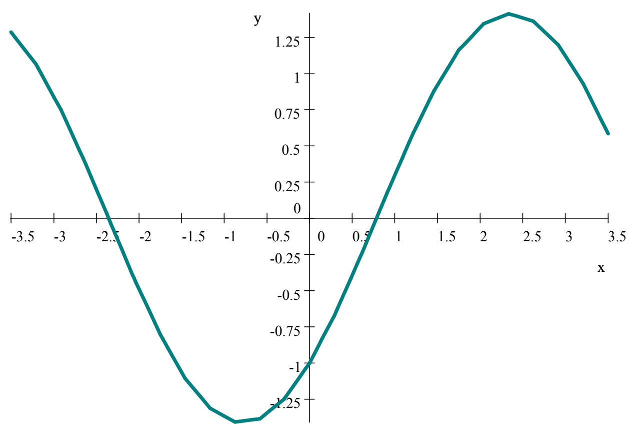
$$= \cos x\left(C + tgx\right)$$

i konačno

$$y = C\cos x + \sin x\,.$$

Iz $y(\pi) = 1$ nalazimo da je $-C = 1, C = -1$ pa je traženo partikularno rešenje

$y = \sin x - \cos x$, (slika 21).



Slika 21.

Domaći zadatak

1. Naći opšte rešenje jednačine $y' + \frac{y}{x} = x^2 + 1,\ \left(x \neq 0\right)$:

a) metodom varijacije konstanti,

b) metodom neodređenih funkcija.

2. Naći partikularno rešenje jednačine $y' + e^x y = e^{2x}$ za koje važi $y(0) = 1$.

2.10 Linearna diferencijalna jednačina prvog reda, vežbe

2.10.1 Osmi čas

Nakon analize domaćeg zadatka i ocenjivanja učenika, saopštavamo da ćemo na ovom času, kroz nekoliko zadataka, sagledati neke primene linearnih jednačina.

Primer 20. Naći sve krive kod kojih je odsečak koji tangenta gradi na osi Oy jednak apscisi tačke dodira.

Rešenje. Neka je $y = f(x)$ jedna takva kriva i a tangenta u njenoj proizvoljnoj tački $A(x, y)$. Neka je B tačka preseka tangente sa osom Oy.

Jednačina tangente t je

$$Y - y = f'(x)(X - x).$$

U tački B je $X = 0,\ Y = x$, pa je

$$x - y = -xf'(x).$$

Dobijamo jednačinu

$$x - y = -xy',$$

odnosno

$$y' \frac{1}{x} y = -1.$$

Uočavamo da je zadnja jednačina homogena ali i linearna diferencijalna jednačina prvog reda. Rešićemo je kao linearnu.

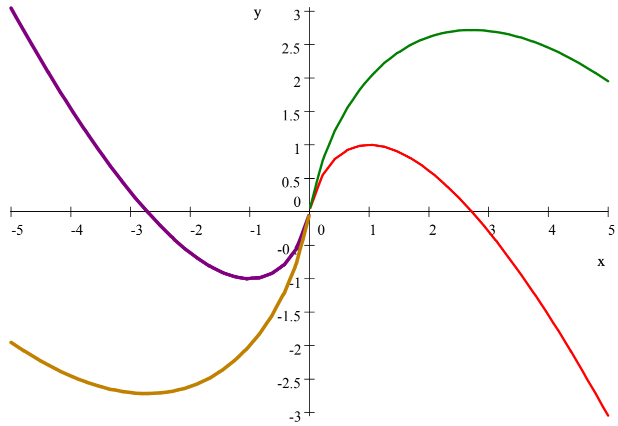
Ovde je

$$f(x) = -\frac{1}{x}, \quad g(x) = -1.$$

Njeno opšte rešenje je

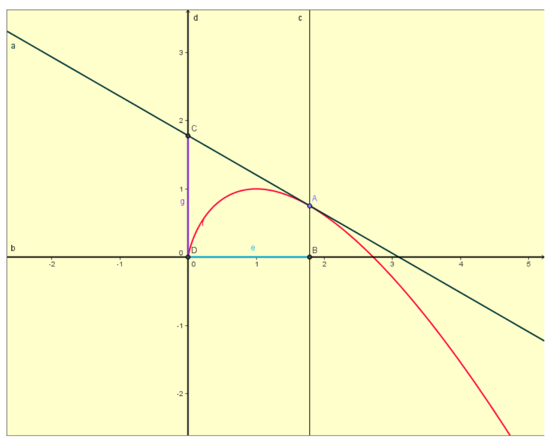
$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{1}{x} dx \left(C - \int e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx \right)} \\ &= e^{\ln x} \left(C - \int e^{-\ln x} dx \right) \\ &= x \left(C - \int \frac{1}{x} dx \right) \\ &= Cx - x \ln |x|, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

Neka partikularna rešenja, pri izboru vrednosti integracione konstante $C = 1$ (crveno), $C = 2$ (zeleno) $C = -1$ (ljubicasto) i $C = -2$ (oker), prikazana su na slici 22.



Slika 22.

Uslov $|DC| = |DB|$ koji zadovoljavaju sva rešenja predočen je na slici 23, pri čemu je $D(0,0)$ i B normalna projekcija tačke A na apscisnu osu.



Slika 23.

Primer 21. Početni ulog od 10000 evra stavljen je na račun uz kamatnu stopu od 8% pri čemu je kamata pripisivana neprekidno.Nakon toga, novac je kontinuirano skidan po stopi od 1000 evra godišnje, sve do njegovog ispražnjenja.

a) Odrediti iznos na računu u bilo kom trenutku t.

b) Kada će iznos na računu pasti na nulu?

Rešenje.

a) Neka je A iznos na računu nakon t godina uz pretpostavku da nema skidanja sa računa. Tada važi

$$\frac{dA}{dt} = 0.08A, \quad A(0) = 10000.$$

Kako se novac kontinuirano skida po navedenoj stopi, onda je

$$\frac{dA}{dt} = 0.08A - 1000,$$

ili

$$\frac{dA}{dt} - 0.08A = -1000.$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina prvog reda. Njeno opšte rešenje je

$$A(t) = 12500 + Ce^{0.08t}$$

i ono određuje iznos na računu u bilo kom trenutku t.

Primena početnog uslova $A(0) = 10000$ daje

$$10000 = 12500 + Ce^{0.08t},$$

odakle je

$$10000 = 12500 + C$$

$$C = -2500.$$

Zamenom dobijene vrednosti za C u opšte rešenje dobijamo partikularno rešenje

$$A(t) = 12500 - 2500e^{0.08t}$$

Ono daje iznos na računu u proizvoljnom trenutku t.

b) Treba rešiti jednačinu

$$A(t) = 0,$$

odnosno

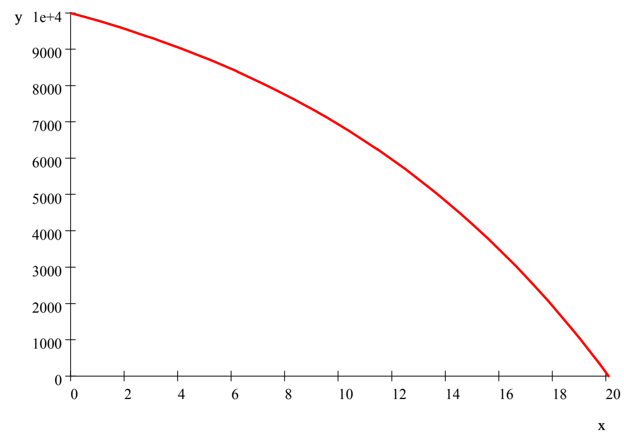
$$0 = 12500 - 2500e^{0.08t},$$

$$e^{0.08t} = 5,$$

$$t = \frac{\ln 5}{0.08} \approx 20 \text{ godina i } 43 \text{ dana.}$$

Dakle, račun će biti anuliran nakon 20 godina i 43 dana.

Slika 24. grafički prikazuje stanje na računu.



Slika 24.

Komentar

Ovaj primer, nakon rešavanja, pogodan je za komentar zbog primenjivosti u realnim situacijama. Učenici mogu i sami izmišljati i samostalno rešavati slične zadatke.

Domaći zadatak

Na kraju časa učenicima će biti podeljena sledeća tri urađena primera koje će proučiti kod kuće i tako se pripremiti za komentar na početku narednog časa.

Primer 22. Za priraštaj stanovništva velikog grada važe sledeća dva zakona:

1°Prirodni priraštaj stanovništva proporcionalan je broju stanovnika u vremenskom intervalu:

$$\Delta y_1 = k_1 y \Delta t .$$

2° Brzina porasta stanovništva putem imigracije proporcionalna je sa vremenom:

$$\Delta y_2 = k_2 t \Delta t .$$

Napisati izraz $y(t)$ za stvarni (ukupni) priraštaj stanovništva pa zatim naći zavisnost broja stanovnika grada od vremena, ako je u trenutku $t = t_0$ bilo $y(t_0) = y_0$ stanovnika.

Rešenje. Zamenom odnosa priraštaja broja stanovnika i priraštaja odgovarajućeg vremena odnosima njihovih diferencijala (za mali priraštaj vremena), dobijamo:

$$\frac{dy_1}{dt} = k_1 y \ , \frac{dy_2}{dt} = k_2 t .$$

Ukupan priraštaj je

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} ,$$

odnosno

$$\frac{dy}{dt} = k_1 y + k_2 t .$$

Dobijamo jednačinu

$y' - k_1 y = k_2 t$ (linearna diferencijalna jednačina prvog reda).

Njeno opšte rešenje je

$$y = Ce^{k_1 t} - \frac{k_2}{k_1^2}\left(k_1 t + 1\right).$$

Koristeći početni uslov

$$y\left(0\right) = y_0 ,$$

sledi

$$y_0 = C - \frac{k_2}{k_1^2} ,$$

odakle je

$$C = y_0 + \frac{k_2}{k_1^2} .$$

Zamenom dobijene vrednosti za C u opšte rešenje dobijamo

$$y\left(t\right) = \left(y_0 + \frac{k_2}{k_1^2}\right)e^{k_1 t} - \frac{k_2}{k_1^2}\left(k_1 t + 1\right).$$

Ovo je tražena funkcija koja daje zavisnost broja stanovnika grada od vremena.

Primer 23. Fabrika ima rezervoar kapaciteta 1000 američkih galona, (jedan američki galon $\approx$ 3.785 l) koji se koristi za kontrolu ispuštanja zagađivača u kanalizaciju. Rezervoar u početku sadrži 500 galona vode. Svaki galon sadrži dve internacionalne funte zagađivača,(jedna internacionalna funta $\approx$453.59 g).U rezervoar dodatno pristiže zagađena voda koja sadrži 5 funti zagađivača po galonu po stopi od 100 galona u jednom satu. Ta voda se potpuno izmeša sa postojećom vodom u rezervoaru. Istovremeno, iz rezervoara se u kanalizaciju ispušta već sasvim izmešana voda, po stopi od 75 galona u satu vremena. Cela procedura traje 5 sati. Na kraju tog perioda odrediti:

a) Ukupnu količinu zagađivača u rezervoaru,

b) Stopu (u funtama po galonu, odnosno gramima po litru) po kojoj se zagađivač ispušta u kanalizaciju.

Rešenje. Neka je $p(t)$ ukupna količina (u funtama) zagađivača u rezervoaru t sati nakon otpočinjanja procesa. Kako se u rezervoaru u početku nalazi 500 galona vode a svaki galon sadrži 2 funte zagađivača, onda važi

$$p(0) = 2 * 500 = 1000 .$$

Zagađena voda utiče u rezervoar i iz njega ističe različitim brzinama i sa različitim koncentracijama zagađivača. Zato će stopa promene količine zagađivača u rezervoaru biti razlika stope po kojoj zagađivač ulazi i stope po kojoj on izlazi iz rezervoara. Iz ove činjenice slediće odgovarajuća diferencijalna jednačina koju dalje treba rešavati uz dati početni uslov $p(0) = 1000$.

Zagađivač ulazi u rezervoar po konstantnoj stopi od 100∗5=500 funti u jednom satu. Stopa po kojoj zagađivač izlazi iz rezervoara zavisiće od njegove količine u trenutku t i količine vode u rezervoaru u istom trenutku. Pošto količina vode raste po stopi od 25 galona po satu, onda je ukupna količina vode u trenutku t jednaka $500 + 25t$ galona.

Količina zagađivača po jednom galonu u trenutku t je količnik ukupne količine zagađivača i ukupne količine vode u rezervoaru, tj.

$$\frac{p(t)}{500 + 25t} .$$

Kako voda ističe po stopi od 25 galona po satu, onda je stopa po kojoj zagađivač izlazi iz rezervoara

$$\frac{25p(t)}{500 + 25t} = \frac{p(t)}{20 + t} .$$

Dakle, za stopu promene važi

$$p'(t) = 500 - \frac{p(t)}{20 + t}, \quad p(0) = 1000 .$$

Dobijena diferencijalna jednačina može se napisati u obliku

$$p'(t) + \frac{1}{20 + t} p(t) = 500$$

(linearna diferencijalna jednačina prvog reda).

Njeno opšte rešenje je

$$p(t) = 250(20 + t) + \frac{C}{20 + t} .$$

Konstantu C dobićemo iz početnog uslova, pa je

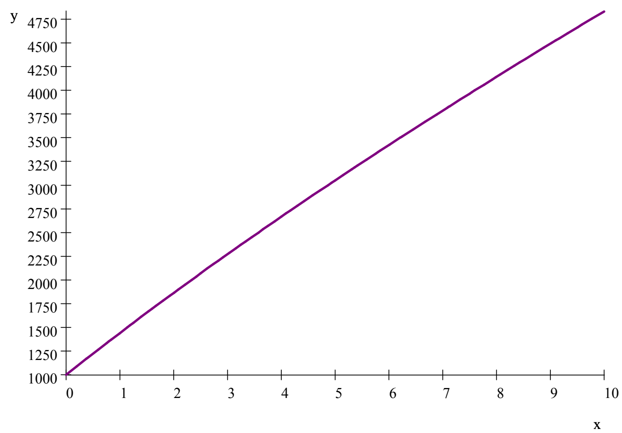
$$1000 = 5000 + \frac{C}{20} .$$

Odavde je

$$C = -80000,$$

pa je traženo parcijalno rešenje

$$p(t) = 250(20+t) - \frac{80000}{20+t} \text{ (slika 25).}$$



Slika 25.

Nakon 5 sati, ukupna količina zagađivača u rezervoaru je

$$p(5) = 250*25 - \frac{80000}{25} = 3050 \, funti \approx 3050*453.59 = 1.3834 \times 10^6 g.$$

b) Nakon 5 sati u rezervoaru će biti $625 \, galona \approx 625 \cdot 3.785 = 2365.6l$ vode. Stopa po kojoj se zagađivač ispušta u kanalizaciju je $\frac{3050}{625} = 4.88$ funti po galonu ≈ 584.80 grama po litru.

Komentar

Cilj ovog primera je da se sagleda da matematika može pomoći u rešavanju nekih najvažnijih problema naše civilizacije kakvi su ekološki.

Primer 24. Odrediti jačinu struje u električnom kolu u kome se nalazi izvor elektromotorne sile E koji proizvodi struju jačine I, otpornik R koji izaziva pad elektromotorne sile veličine RI, kalem indukcije L koji izaziva pad elektromotorne sile veličine $L\frac{dI}{dt}$, i kondenzator kapaciteta C koji izaziva pad elektromotorne sile $\frac{Q}{C}$ (Q-punjenje).

Rešenje. Prema Kirhofovom pravilu, zbir svih elektromotornih sila u zatvorenom kolu jednak je nuli, tj.

$$E - RI - L\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0.$$

Ako u kolu nema kondenzatora, ova jednačina se svodi na linearnu jednačinu

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}.$$

Njeno rešenje je, uz uslov da je E stalna veličina:

$$I=\frac{E}{R}+Ce^{\frac{-Rt}{L}}.$$

Koristeći početni uslov

$$I(0)=I_0,$$

dobijamo da je

$$C=I_0-\frac{E}{R},$$

pa je konačno

$$I=\frac{E}{R}+\left(I_0-\frac{E}{R}\right)e^{\frac{-Rt}{L}}$$

traženi izraz za jačinu struje.

Komentar

U saradnji sa profesorom fizike, potrebno je podsetiti učenike na pojmove iz fizike koji se koriste u ovom zadatku.

2.11 Bernulijeva diferencijalna jednačina

2.11.1 Deveti čas

Na početku časa ukratko se komentarišu zadaci dati za domaći i vrednuje se dobro razumevanje i valjani komentari u vezi sa njima. Zatim se prelazi na novu nastavnu jedinicu.

Definicija 10. *Bernulijeva diferencijalna jednačina je jednačina oblika*

$$y'+f(x)y=g(x)y^k,$$

gde su f i g date neprekidne funkcije i k realan broj.

Ako je $k=0$, tada dobijamo

$$y'+f(x)y=g(x),$$

a to je linearna diferencijalna jednačina prvog reda. Za $k=1$ se dobija

$$y' + f(x)y = g(x)y,$$

odnosno

$$y' = \left(f(x) - g(x)\right)y.$$

U poslednjoj jednačini se očigledno promenljive mogu razdvojiti. Bernulijeva diferencijalna jednačina se može rešavati smenom

$$y(x) = u(x)v(x), \quad y = uv,$$

ili smenom

$$z(x) = y^{1-k}(x), \quad z = y^{1-k},$$

kojom se svodi na linearnu. Ako je

$$z = y^{1-k},$$

onda je

$$z' = (1-k)y^{-k}y',$$

pa polazna Bernulijeva jednačina postaje

$$z'(x) + (1-k)f(x)z(x) - (1-k)g(x) = 0,$$

što je, očigledno, linearna jednačina.

Primer 25. Rešiti jednačinu $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$ koristeći smenu:

a) $y = uv$,

b) $z = y^{1-k}$.

Rešenje.

a) Zamenom $y = uv, \quad y' = u'v + uv'$, u diferencijalnu jednačinu dobijamo

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = -xu^2v^2,$$

$$\left(u' + \frac{u}{x}\right)v + uv' = -x^2y^2.$$

Odredićemo u tako da je

$$u' + \frac{u}{x} = 0.$$

Odavde je

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$$

pa je

$$u = \frac{1}{x}.$$

Ako dobijenu funkciju u uvrstimo u jednačinu

$$uv' = -x^2 y^2$$

dobijamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x} v' = -\frac{1}{x} v^2, \\
&v' = -v^2, \\
&\frac{dv}{dx} = -v^2, \\
&v^{-2} dv = -dx, \\
&-\frac{1}{v} = -(x + C), \\
&v = \frac{1}{x + C}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Rešenje polazne diferencijalne jednačine je $y = uv$, odnosno

$$y = \frac{1}{x(x + C)}.$$

b) $z = y^{-1}$, odakle je

$$y = \frac{1}{z}, \quad y' = -z^{-2} z'.$$

Polazna jednačina se svodi na jednačinu

$$-z' z^{-2} + \frac{1}{zx} = -\frac{x}{z^2},$$

pa je

$$z' - \frac{z}{x} = x$$

(linearna diferencijalna jednačina) (smena: $z = uv$, $z' = u'v + uv'$)

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x$$

$$\left(u' - \frac{u}{x}\right)v + uv' = x\,.$$

Iz uslova

$$u' - \frac{u}{x} = 0$$

sledi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u}{x}$$

$$u = x\,.$$

Ako sada u jednačini

$$uv' = x$$

zamenimo u sa x, dobijamo

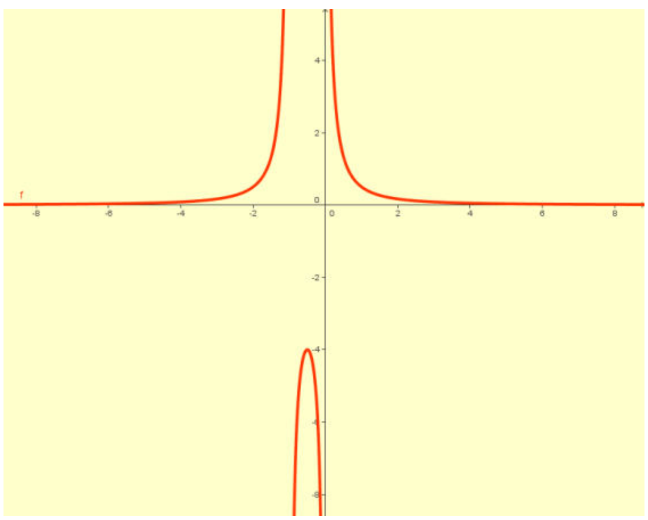
$$xv' = x\,,$$

$$v' = 1, \quad v = x + C, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Dalje je

$$z = x(x + C) \text{ i } y = \frac{1}{x(x + C)}\,.$$

Za $C = 1$, partikularna rešenja prikazana su na slici 26.



Slika 26.

Primer 26. Naći sve krive kod kojih je odsečak koji tangenta gradi na osi Oy jednak kvadratu ordinate tačke na krivoj u kojoj je povučena tangenta.

Rešenje. Neka je $A(x,y)$ tačka dodira tangente t i tražene krive i $C(0,y^2)$ tačka preseka tangente i ose Oy. Jednačina tangente je

$$a:\ Y-y=k(X-x).$$

U tački C je $X=0$, $Y=y^2$, pa je

$$y^2-y=f'(x)(-x),\quad k=f'(x),$$

odnosno

$$y^2-y=-xf'(x).$$

Dobijamo

$$y^2-y=-xy',\quad y'=f'(x)$$

ili

$$xy'-y=-y^2$$

$$y'-\frac{1}{x}y=-\frac{1}{x}y^2.$$

Zadatak je sveden na rešavanje poslednje jednačine. Vidimo da je ona Bernulijeva diferencijalna jednačina, pa je sada možemo rešiti. Smenom: $y=uv$, odnosno $y'=u'v+uv'$, dobijamo

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x}=-\frac{u^2v^2}{x},$$

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x}=-\frac{u^2v^2}{x}.$$

Odredićemo u tako da je

$$u'-\frac{u}{x}=0,$$

odakle je

$$\frac{du}{dx}=\frac{u}{x},\quad u=x.$$

Data diferencijalna jednačina se svodi na

$$xv'=-xv^2,$$

pa je

$$\begin{aligned}
&v' = -v^2,\\
&v^{-2}dv = -dx,\\
&-\frac{1}{v} = -(x+C),\\
&v = \frac{1}{x+C}.
\end{aligned}$$

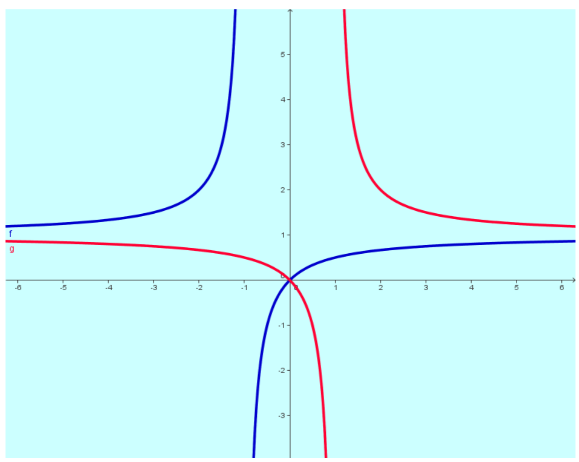
Sada je

$$y = uv = \frac{x}{x+C}.$$

Dobili smo da su sve tražene krive grafici funkcija

$$y = \frac{x}{x+C}\ , \quad C \neq 0.$$

Četiri partikularna rešenja prikazana su na slici 27.

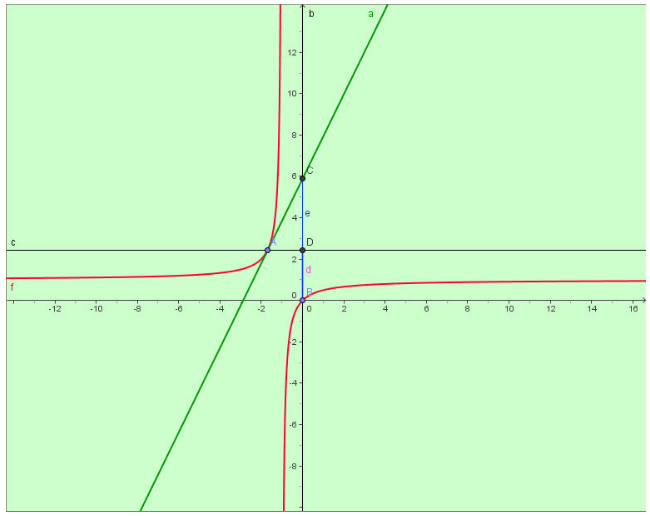


Slika 27.

Na slici 28. dat je prikaz partikularnog rešenja

$$y = \frac{x}{x+1}, \quad \left(|BC| = |BD|^2\right),$$

gde je $B(0,0)$ a D normalna projekcija tačke A na ordinatnu osu.



Slika 28.

Domaći zadatak

1. Rešiti jednačinu $y' - \frac{1}{2x}y = -\frac{1}{2}xy^{-1}$ koristeći smenu:

a) $y = uv$,

b) $z = y^{1-k}$.

(Rešenje : $x^2 + y^2 = Cx$.)

2. Rešiti početni problem $xy' - 3y = 3x^2 y^{\frac{2}{3}}, y(-1) = 8$.

(Opšte rešenje : $y = (x^2 + Cx)^3$, partikularno: $y = (x^2 - x)^3$.)

3.(daje se rešen učenicima)

Primer 27. Brzina rastvaranja neke supstance direktno je proporcionalna proizvodu njene količine u trenutku t i razlike koncentracija te supstance u trenutku t i u zasićenom rastvoru. Naći količinu nerastvorene supstance u funkciji vremena.

Rešenje. Ako je y_0 količina supstance u početnom trenutku, a koncentracija pri zasićenju, a V količina rastvarača, tada je, prema uslovima u zadatku

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(a - \frac{y - y_0}{V}\right).$$

Dalje je

$$y' + \left(\frac{ky}{V} - ka\right)y = \frac{k}{V}y^2 .$$

Ovo je Bernulijeva jednačina koju možemo rešiti smenom

$$z = y^{1}, \quad z' = -y^{-2} y'.$$

Dobija se

$$z' - \left(\frac{ky_0}{V} - ka \right) z = -\frac{k}{V},$$

uz uslov

$$z(0) = y^{-1}(0) = y_0^{-1}.$$

Rešenje ovog problema je

$$z(t) = \left(\frac{1}{aV - y_0} + \frac{1}{y_0} \right) e^{\frac{k(y_0 - aV)t}{V}} + \frac{1}{y_0 - aV},$$

odakle se dobija $y(t)$.

Komentar

Zadatak pre rešavanja treba analizirati sa profesorom hemije.

2.12 Diferencijalne jednačine oblika $y'' = k, \quad y'' = k^2 y$

2.12.1 Deseti čas

Prilikom obrade diferencijalnih jednačina drugog reda, predlažemo prvo razmatranje tri primera iz Mehanike.

Primer 28. Materijalna tačka mase m slobodno pada iz tačke koja se nalazi na visini h iznad površine Zemlje sa početnom brzinom jednakom nuli. Naći njen zakon kretanja. Neka je $x(t)$ rastojanje te tačke od Zemlje u proizvoljnom trenutku t. Tada je $x'(t)$ trenutna brzina a $x''(t)$ ubrzanje tačke koje u svakom trenutku iznosi $-g$ (g- gravitaciona konstanta). Ovo je zato što je smer ubrzanja suprotan smeru vertikalne ose Ox duž koje se tačka kreće. Zato je zakon kretanja određen formulom

$$x''(t) = -g$$

pri čemu je

$$x(0) = h \text{ i } x'(0) = 0.$$

Primer 29. Neka je na svakom vertikalnom preseku cilindrične homogene šipke temperatura ista ali se ona može menjati od jednog preseka do drugog. Osa simetrije šipke dužine b ,$(b > 0)$ je na x-osi i neka se početak šipke u tački $x = 0$ održava na stalnoj temperaturi T_1. Na kraju šipke $(x=b)$, održava se stalna temperatura T_2. Poznato je iz toplotne mehanike da nakon dovoljno dugog vremena temperatura unutar šipke dostiže ravnotežno stanje i ne menja se sa daljim tokom vremena. Funkcija $y=y(x)$ ravnotežne raspodele temperatura koja zavisi samo od mesta x, zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$y''=-\frac{1}{k}F(x) \text{ i } 0<x<b,$$

sa graničnim uslovima

$$y(0)=T_1,\ y(b)=T_2,$$

gde je F stopa zagrevanja po jedinici zapremine i k pozitivna konstanta. Negativan znak u diferencijalnoj jednačini znači da se toplota širi od toplijih ka hladnijim delovima šipke. Odrediti ravnotežnu raspodelu temperature u šipki dužine 1, ako je ona termički izolovana i nema drugih izvora toplote u njoj. Krajevi šipke se održavaju na stalnim temperaturama T_1 i T_2.

Primer 30. Oscilacije materijalne tačke mase m pod dejstvom elastične opruge kojoj su težina i trenje zanemareni opisuje diferencijalna jednačina

$$ms''=-ks$$

gde je $s(t)$ položaj tačke na osi duž koje se ona kreće i k pozitivan broj (konstanta opruge). Ova jednačina se može napisati u obliku

$$ms''+ks=0,$$

što je specijalan slučaj opšte jednačine oscilovanja

$$ms''+rs'+ks=0,$$

gde je r koeficijent otpora sredine. Naći njen zakon oscilovanja.

U prethodnim primerima zadatak je sveden na nalaženje nepoznate funkcije iz jednačine u kojoj obavezno figuriše njen drugi izvod uz početne uslove u prvom primeru, granične uslove u drugom primeru i uslove koje postavljaju konstante m, r i k u trećem primeru. To su primeri diferencijalnih jednačina drugog reda.

Diferencijalna jednačina drugog reda je svaka jednačina u kojoj figurišu jedino nezavisno promenljiva x, nepoznata funkcija y i njeni prvi i drugi izvod y' i y''. Pritom x, y i y' ne moraju biti eksplicitno zastupljeni. Jednačina

$$y''=1$$

je jedan takav primer. Neka je

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2,$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne realne konstante.

Tada je

$$y' = x + C_1, \quad y'' = 1.$$

Zato ćemo svaku funkciju oblika

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

zvati rešenjem jednačine $y'' = 1$.

Rešenje date diferencijalne jednačine drugog reda je svaka funkcija koja ima sledeće svojstvo: Kada se u jednačinu uvrste funkcija i njeni prvi i drugi izvod, dobija se identitet po x. Rešiti diferencijalnu jednačinu drugog reda znači odrediti sva njena rešenja.

Rešavanje jednačine $y'' = k, \quad k \in \mathbb{R}$

Ako uvedemo smenu $y' = z$, onda je $y'' = z'$, pa jednačina postaje $z' = k$ i zatim

$$\begin{aligned}
&\frac{dz}{dx} = k \\
&dz = kdx \\
&\int dz = k\int dx \\
&z = kx + C_1 \\
&y' = kx + C_1 \\
&\int dy = \int (kx + C_1)dx \\
&y = \frac{k}{2}x^2 + C_1x + C_2, \quad C_1, C_2 \in R.
\end{aligned}$$

Skup rešenja je familija kvadratnih funkcija.

Pomoću uvedene smene, rešavanje jednačine drugog reda svedeno je na rešavanje jednačina prvog reda. Kažemo da smo tom smenom snizili red date diferencijalne jednačine. Uopšte, neke diferencijalne jednačine višeg reda rešavamo snižavanjem njihovog reda pa ih u krajnjoj liniji svodimo na diferencijalne jednačine prvog reda. Što je viši red diferencijalne jednačine to je problem njenog rešavanja složeniji.

Primer 31. Posmatraćemo rešenja prethodna tri zadatka.

Rešenje 1. zadatka. Neka je $x(t)$ rastojanje te tačke od Zemlje u proizvoljnom trenutku t. Tada je $x'(t)$ trenutna brzina a $x''(t)$ ubrzanje tačke koje u svakom trenutku iznosi $-g$ (g-

gravitaciona konstanta). Ovo je zato što je smer ubrzanja suprotan smeru vertikalne ose Ox duž koje se tačka kreće. Zato je zakon kretanja određen formulom

$$x''(t) = -g$$

pri čemu je

$$x(0) = h \text{ i } x'(0) = 0 .$$

Nakon smene

$$x' = z, \quad x'' = z'$$

dobijamo

$$z' = -g ,$$

odakle je

$$z = -gt + C_1 ,$$

$$x' = -gt + C_1 ,$$

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2 ,$$

$$x(0) = C_2 = h, \quad x'(0) = C_1 = 0 ,$$

pa je

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h$$

traženi zakon kretanja uočene materijalne tačke.

Komentar

Zadatak pre rešavanja komentarisati sa profesorom fizike.

Rešenje 2. zadatka. Šipka je izolovana i nema izvora toplote u njoj. To znači da u jednačini

$$y' = -\frac{1}{k}F(x)$$

važi

$$F(x) = 0 ,$$

pa se dobija jednačina

$$y'' = 0 .$$

Njeno opšte rešenje je

$$y(x) = C_1 + C_2 x .$$

Pomoću graničnih uslova se dobija

$$y(0) = C_1 = T_1, \quad y(1) = C_1 + C_2 = T_2 ,$$

odakle je

$$C_2 = T_2 - T_1 .$$

Traženo rešenje problema je

$$y = T_1 + (T_2 - T_1) x .$$

Komentar

Zadatak pre postavljanja i rešavanja komentarisati sa profesorima mašinske grupe predmeta.

Rešavanje jednačine $y'' = k^2 y$, $\quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Pomoću smene

$$y = e^{\lambda x} ,$$

odakle je

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} ,$$

jednačina postaje

$$\lambda^2 e^{\lambda x} = k^2 e^{\lambda x} .$$

Dalje je

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - k^2 e^{\lambda x} = 0 ,$$

$$\left(\lambda^2 - k^2\right) e^{\lambda x} = 0 .$$

Zbog $e^{\lambda x} \neq 0$, mora biti

$$\lambda^2 - k^2 = 0 ,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\, k .$$

Rešenja su linearno nezavisne funkcije

$$y = e^{kx} \text{ i } y = e^{-kx} ,$$

pa je opšte rešenje njihova linearna kombinacija

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Napomena

Ucenici su ranije upoznati sa pojmovima linearne zavisnosti i linearne kombinacije funkcija.

U srednjoskolskim udzbenicima polazna jednačina se često rešava ovako:

dodavanjem obema stranama ky' dobijamo,

$$y'' + ky' = ky' + k^2 y.$$

Odavde je

$$\left(y' + ky\right)' = k\left(y' + ky\right).$$

Smenom:

$$y' + ky = z,$$

dobijamo

$$z' = kz,$$

$$z = K_1 e^{kx},$$

$$y' + ky = K_1 e^{kx} \text{ ....(1)},$$

gde je K_1 proizvoljna realna konstanta.

Ako obema stranama polazne jednačine dodamo $-ky'$, dobićemo

$$y'' - ky' = -ky' + k^2 y,$$

odnosno

$$\left(y' - ky\right)' = -k\left(y' - ky\right),$$

smena:

$$z = y' - ky,$$

$$z' = -kz,$$

$$z = K_2 e^{-kx},$$

$$y' - ky = K_2 e^{-kx} \text{ ....(2)},$$

$K_2 \in \mathbb{R}$ (proizvoljna konstanta).

Oduzimanjem jednakosti (2) od jednakosti (1) dobijamo,

$$2ky = K_1 e^{kx} - K_2 e^{-kx}$$

pa je

$$y = \frac{K_1}{2k} e^{kx} - \frac{K_2}{2k} e^{-kx} .$$

Ako $\frac{K_1}{2k}$ označimo sa C_1 a $-\frac{K_2}{2k}$ sa C_2, dobićemo

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Ovo je opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine .

Primer 32. Naći ono rešenje jednačine

$$y'' = y$$

za koje važi

$$y(0) = 1 + e \ , \quad y'(0) = 1 - e .$$

Rešenje. Opšte rešenje ove jednačine je

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Odavde je

$$y' = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x} .$$

Navedeni uslovi daju sistem

$$C_1 + C_2 = 1 + e \ , \quad C_1 - C_2 = 1 - e \ ,$$

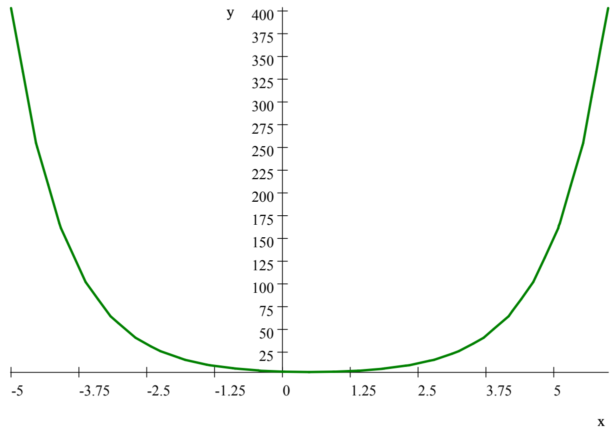
odakle je

$$C_1 = 1 \ , \quad C_2 = e .$$

Traženo (partikularno) rešenje je funkcija

$$y = e^{x} + e^{1-x}$$

prikazana na slici 29.



Slika 29.

U prethodna dva primera rešavali smo probleme u kojima je bila data diferencijalna jednačina drugog reda sa po dva početna uslova. Nakon dobijanja opšteg rešenja, ti uslovi daju sistem jednačina iz koga se dobijaju vrednosti integracionih konstanti koje određuju traženo partikularno rešenje. Kažemo da smo rešili Košijeve probleme drugog reda.

Uopšte,početni (Košijev) problem za diferencijalne jednačine drugog reda glasi: Naći ono rešenje $y(x)$ date jednačine za koje u nekoj tački x_0 u kojoj ono postoji važi:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,$$

gde su y_0 i y_1 dati brojevi. Geometrijski posmatrano, funkcijom $y(x)$ je određena integralna kriva koja prolazi kroz tačku (x_0, y_0) i u kojoj ta kriva ima tangentu čiji je koeficijent pravca y_1.

2.13 Linearna homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima

2.13.1 Jedanaesti čas

Primer 33. Neka je $y = e^x + e^{2x}$ data funkcija. Tada je

$$y' = e^x + 2e^{2x},$$

$$y'' = e^x + 4e^x,$$

pa važi

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

što se lako proverava.

U ovoj jednačini javljaju se, pored funkcije y, i njeni izvodi y' i y'' i u njoj ne postoje slobodne konstante različite od nule. Za takvu jednačinu kažemo da je linearna homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Za funkciju $y = e^x + e^{2x}$, koja zadovoljava ovu jednačinu, kažemo da je jedno njeno rešenje.

Linearna homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima je jednačina

$$y'' + py' + qy = 0,$$

gde su p i q date konstante a y nepoznata funkcija.

Primećujemo da je jednačina $y'' = k^2 y$ y njen specijalan slučaj kada je $p = 0$ i $q = -k^2$.

Rešavanje jednačine $y'' + py' + q = 0$

Njeno trivijalno rešenje je $y(x) = 0$.

Potražićemo sada ostala rešenja u obliku

$$y = e^{kx},$$

gde je k konstanta.

Kako je

$$y' = ke^{kx},$$

$$y'' = k^2 e^{kx},$$

zamenom u jednačinu dobijamo

$$e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0.$$

Odavde je

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Ovo je tzv. karakteristična jednačina polazne diferencijalne jednačine. U zavisnosti od prirode njenih korena koje nazivamo karakteristični koreni te jednačine, razlikovaćemo tri slučaja.

a)Neka je njena diskriminanta $p^2 - 4q > 0$. Tada su njena rešenja k_1 i k_2 realna i različita.

Jasno je da su funkcije $y = e^{k_1 x}$ i $y = e^{k_2 x}$ linearno nezavisna rešenja polazne jednačine.

Njeno opšte rešenje je linearna kombinacija ovih rešenja:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne realne konstante.

b) Ako je $p^2 - 4q = 0$ rešenja k_1 i k_2 su realna i jednaka.

Pokazacemo da je pored funkcije $y = e^{k_1 x}$ i funkcija $y = xe^{k_1 x}$ rešenje polazne jednačine. Zaista, kako je

$$y' = e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x},$$

$$y'' = 2k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x},$$

zamenom u polaznu diferencijalnu jednačinu,

nakon sređivanja, dobijamo

$$\left(k_1^2 + pk_1 + q\right) x e^{k_1 x} + \left(2k_1 + p\right) e^{k_1 x} = 0.$$

Ovo je identitet jer je

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0 \text{ i } k_1 + k_2 = -p \text{ (Vietova formula),}$$

odakle je

$$2k_1 + p = 0.$$

Opšte rešenje je

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$$

ili

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{k_1 x}$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

c) Ako je $p^2 - 4q < 0$, rešenja karakteristične jednačine su dva konjugovano kompleksna broja $k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Tada su $e^{k_1 x}$ i $e^{k_2 x}$ rešenja polazne jednačine i važi

$$e^{k_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right)$$

$$= e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Zapažamo da je rešenje $y = e^{k_1 x}$ linearna kombinacija funkcija $y = e^{\alpha x} cos\beta x$ i $y = e^{\alpha x} sin\beta x$.

To nam sugeriše da su i ove funkcije takođe rešenja zadate diferencijalne jednačine što se lako i proverava.

Kao i u slučaju a), opšte rešenje je

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primer 34. Naći opšta rešenja jednačina:

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$,

b) $y'' - 4y' + 4y = 0$,

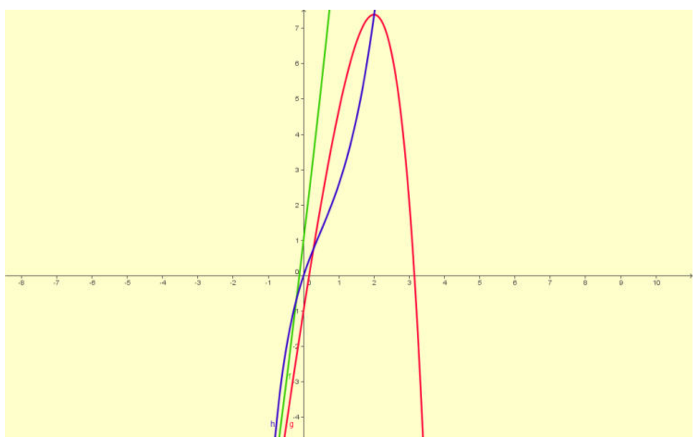
c) $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Rešenje.

a) Karakteristična jednačina ove jednačine je $k^2 - 3k + 2 = 0$. Njeni koreni su $k_1 = 1, \quad k_2 = 2$, pa je opšte rešenje

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Na slici 30. prikazana su tri partikularna rešenja, i to: za $C_1 = C_2 = 1$ (zeleno), za $C_1 = -1, \quad C_2 = 1$ (crveno), i za $C_1 = 1, \quad C_2 = -1$ (plavo).



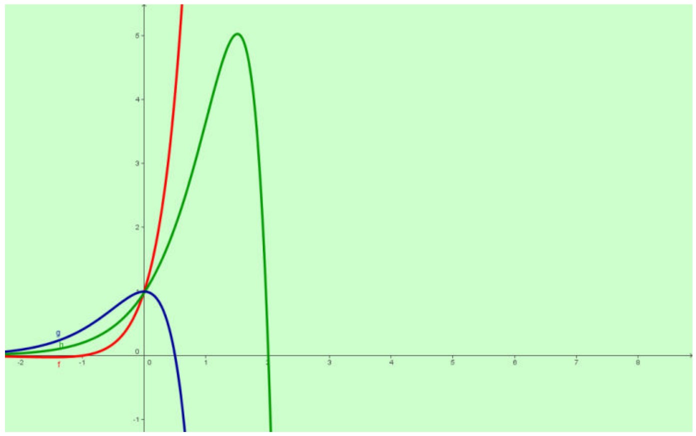
Slika 30.

b) Karakteristična jednačina je $k^2 - 4k + 4 = 0$, odnosno $(k-2)^2 = 0$ odakle je $k_1 = k_2 = 2$.

Opšte rešenje je

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{2x}.$$

Prikazana su tri partikularna rešenja i to za $C_1 = C_2 = 1$ (crveno), $C_1 = 1, \quad C_2 = -\frac{1}{2}$ (zeleno), $C_1 = 1, \quad C_2 = -2$ (plavo), (slika 31).



Slika 31.

c) Ovde je karakteristična jednačina $k^2 - 2k + 2 = 0$. Njeni koreni su $1+i$, $1-i$

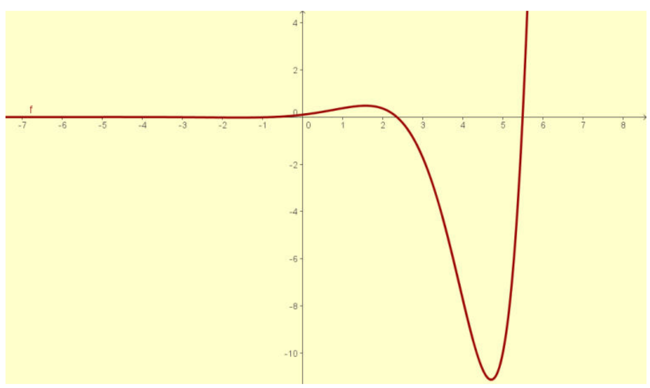
pa je

$$\alpha = \beta = 1.$$

Opšte rešenje je

$$y = e^x\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Na slici 32. prikazano je partikularno rešenje za $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{10}$.



Slika 32.

Domaći zadatak

Rešiti jednačine:

a) $y'' - y' - 2y = 0$,

b) $y'' + 6y' + 9y = 0$,

c) $y'' + 4y' + 5 = 0$.

2.14 Homogena jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima, vežbe

2.14.1 Dvanaesti čas

Učenici saopštavaju rešenja iz domaćeg zadatka. Profesor posvećuje posebnu pažnju slabijim učenicima pošto je ovo prilika i za njih i ocenjuje uspešno rešavanje.

Primer 35. Naći ono rešenje diferencijalne jednačine $y'' - 2y' + 5y = 0$ za koje važi

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Rešenje.

Odgovarajuća karakteristična jednačina je $k^2 - 2k + 5 = 0$. Njena rešenja su $k_1 = 1 + 2i$ i $k_2 = 1 - 2i$, pa je opšte rešenje date jednačine

$$y = e^x\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right).$$

Odavde je

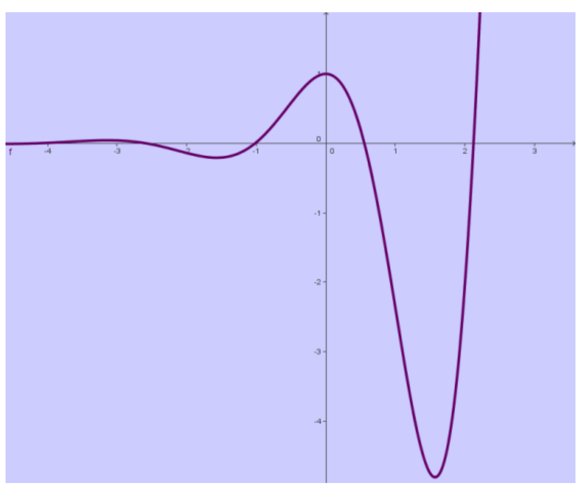
$$y' = e^x\left(C_1 cos 2x + C_2 sin 2x - 2C_1 sin 2x + 2C_2 cos 2x\right).$$

Iz početnih uslova dobijamo sistem

$$C_1 = 1, \quad C_1 + 2C_2 = 0,$$

odakle je $C_2 = -\frac{1}{2}$. Traženo partikularno rešenje je

$$y = e^x\left(\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right), \text{(slika 33)}.$$



Slika 33.

Primer 36. Rešiti 3. zadatak.

Rešenje. U prvom delu zadatak je sveden na traženje zakona oscilovanja koga opisuje jednačina

$$ms'' = -ks .$$

Odavde je

$$s''(t) = -\frac{k}{m}s ,$$

odnosno

$$s''(t) = -\omega^2 s$$

gde je

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} ,$$

pa je

$$s''(t) + \omega^2 s = 0 .$$

Karakteristična jednačina ove diferencijalne jednačine je

$$k^2 + \omega^2 = 0 .$$

Dalje je

$$\mathrm{k}^2 = -\omega^2 ,$$

$$k = \pm i\omega , \quad \alpha = 0 , \quad \beta = \omega .$$

Opšte rešenje je

$$s(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t ,$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad C_1 \neq 0 \ \text{ ili } \ C_2 \neq 0 .$$

Ova jednačina opisuje položaj uočene tačke u proizvoljnom trenutku t.

Ako uvedemo oznaku $A = \frac{1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$, onda se ova jednačina može pisati u obliku

$$s(t) = A\left(\frac{C_1}{A}\cos\omega t + \frac{C_2}{A}\sin\omega t\right), \quad \frac{C_1}{A} = \cos\varphi, \quad -\frac{C_2}{A} = \sin\varphi ,$$

pa je

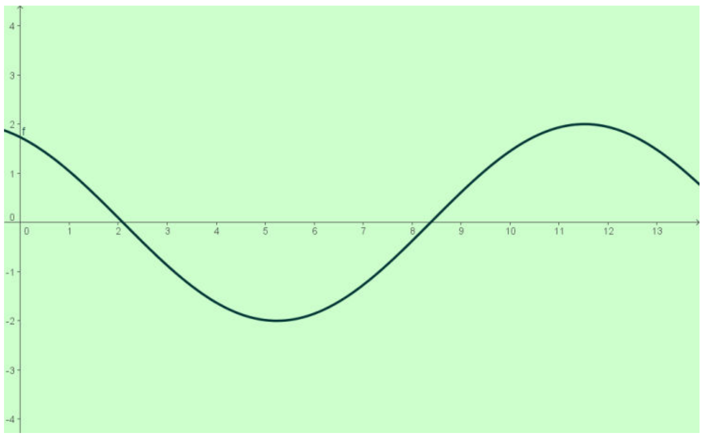
$$s(t) = A(\cos\varphi\cos\omega t - \sin\varphi\sin\omega t)$$

ili

$$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Odavde se vidi da je kretanje harmonijsko pri čemu je broj A amplituda, ω je kružna brzina, φ početna faza ovih harmonijskih oscilacija.

Jednačina $s'' = -\omega s$ zove se jednačina harmonijskih oscilacija, (slika 34).



Slika 34.

U drugom delu ovog zadatka došli smo do jednačine $ms'' + rs' + ks = 0$. Ovo je očigledno linearna homogena jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Njena karakteristična jednačina je $m\lambda^2 + r\lambda + k = 0$. U zavisnosti od znaka njene diskriminante $r^2 - 4km$ razlikovaćemo tri slučaja:

a) Ako je $r^2 - 4km > 0$, tj. $r > \sqrt{4km}$, imamo neoscilatorno kretanje opisano jednačinom

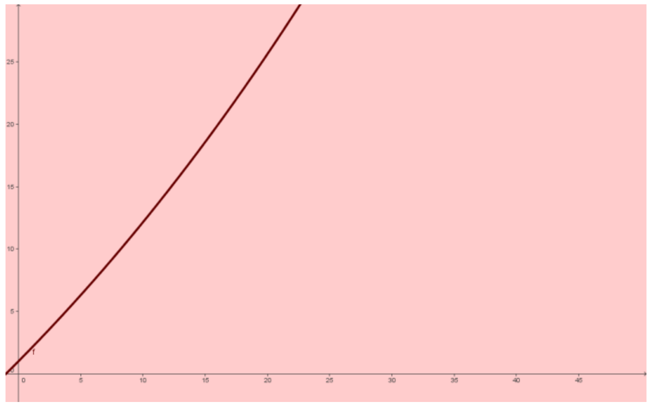
$$s(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

gde su λ_1 i λ_2 koreni karakteristične jednačine a C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

2) Ako je $r = 4km$, onda je zakon kretanja

$$s(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\lambda_1 t},$$

gde je $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{r}{2m}$. Ovo kretanje je takođe neoscilatorno. Jedno rešenje je prikazano na slici 35 , za pretpostavljene vrednosti $C_1 = C_2 = 1$ i $\lambda = -0.01$.



Slika 35.

3) Ako je $r < \sqrt[2]{4km}$, koreni karakteristične jednačine su

$$\lambda_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4km}}{2m} = -\frac{r}{2m} \pm i\frac{\sqrt{4m - r^2}}{2m}$$

pa je

$$\alpha = -\frac{r}{2m}, \quad \beta = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} = \omega_1 .$$

Zakon kretanja opisan je jednačinom

$$s(t) = e^{-\alpha t}\left(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t\right)$$

što se može napisati u obliku

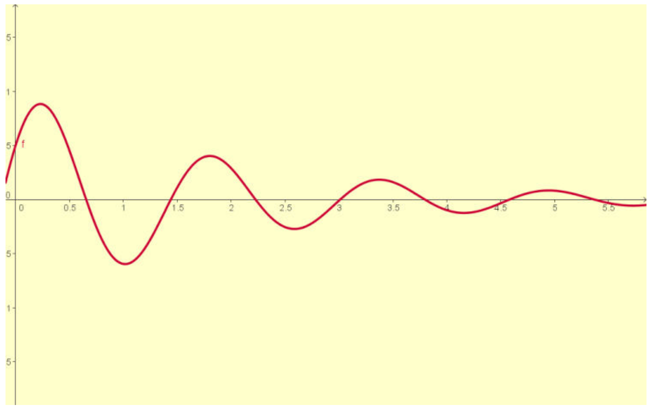
$$s(t) = Ae^{-\alpha t} \sin\left(\omega_1 t + \varphi\right).$$

Amplituda A i početna faza φ ovog kretanja dobijaju se iz uslova $s(0) = s_0$ i $s'(0) = v_0$ pa je

$$A = \sqrt{s_0^2 + \frac{v_0 + \alpha s_0}{\omega_1}},$$

$$\sin\varphi = \frac{s_0}{A}, \quad \cos\varphi = \frac{v_0 + \alpha s_0}{\omega_1 A}.$$

Ovo kretanje predstavlja tzv. prigušene oscilacije. Iz zakona kretanja se vidi da $s(t) \to 0$ kada $t \to \infty$, (slika 36).



Slika 36.

Komentar

Pre rešavanja ovog zadataka poželjne su konsultacije sa predmetnim nastavnicima fizike i mašinske grupe zbog povezivanja sa obrađenim sadržajima u tim predmetima.

2.15 Pismena priprema za čas

Zakon o osnovama sistema obrazovanja i vaspitanja, (Službeni glasnik Republike Srbije broj 72/09), Pravilnik o pedagoškoj normi svih oblika obrazovno-vaspitnog rada nastavnika i stručnih saradnika u srednjoj školi, (Prosvetni glasnik Republike Srbije 1/92,23/97 i 2/2000) i Pravilnik o načinu vođenja evidencije u srednjoj školi,(Službeni glasnik Republike Srbije broj 59/99,40/2002 i 67/2010), nalažu nastavnicima i saradnicima pisanje priprema za svaki čas nastave u školskoj godini, i to prema utvrđenom obrascu za pripreme.

Ova priprema je pisana prema aktuelnom obrascu koji se koristi u Srednjoj mašinskoj školi u Novom Sadu.

Predmet: Matematika

Odeljenje: 406 KK.

Nastavna tema: Diferencijalne jednačine

Nastavna jedinica: Diferencijalne jednačine koje dopuštaju razdvajanje promenljivih

Tip časa: Obnavljanje i utvrđivanje gradiva

Metode rada: verbalno-tekstualna i ilustrativno-demonstrativna

Oblici rada: nastavnikovo izlaganje, razgovor sa učenicima i razgovor učenika, polusamostalan i samostalan rad učenika, rad u paru ili u grupi, rad na formiranju modela i rad na graficima.

Cilj časa: (vaspitni i obrazovni zadaci)

Sagledavanje primene diferencijalnih jednačina u raznim područjima i značaja matematike u razvoju civilizacije, osposobljavanje učenika da sami modeliraju jednostavnije probleme raznih oblasti diferencijalnim jednačinama, dalje usavršavanje tehnike rešavanja ovih jednačina

Nastavna sredstva : grafici rešenja diferencijalnih jednačina dobijenih na računaru

Korelacija sa drugim nastavnim predmetima: Biologija, Sociologija

Literatura : Jovan D. Kečkić: Matematika sa zbirkom zadataka za IV razred srednje škole, (za učenike),

Milutin Obradović, Dušan Georgijević: Matematika za IV razred srednje škole, (za učenike),

Zoran Kadelburg, Vladimir Mićić, Srđan Ognjenović: Analiza sa algebrom, udžbenik sa zbirkom zadataka za IV razred Matematičke gimnazije, (za nastavnika),

Srđan Ognjanović, Živorad Ivanović: Matematika 4, zbirka zadataka i testova za IV razred gimnazija i tehničkih škola, (za učenike),

Raymond A. Barnett, Michael R. Zigler, Karl E. Byleen: Applied mathematics for business, economics life sciences, and social sciences, (za nastavnika).

Tok časa

Uvodni deo časa: (10) minuta

Analiziraju se sledeći zadaci koji su bili zadati prethodnog časa za domaći zadatak :

1. Rešiti diferencijalne jednačine

a) $e^{x+y}y' = x$,

b) $y' = (y+1)ctgx, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

c) $y'tgx = y^2, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

d) $\sqrt{xy'} = \sqrt{y}$, $\quad x, y \geq 0$

e) $xyy' = 1 - x^2$.

2. Naći (ako postoji) ono partikularno rešenje jednačine $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$ za koje važi $y(0) = 1$.

3. Formirati diferencijalnu jednačinu familije krivih $x^2 + \left(\frac{1}{y^2}\right) = b, \quad b \in \mathbb{R}$.

U analizi učestvuju svi učenici i profesor. Pomaže se učenicima koji nisu uradili tačno neke od zadataka. Na kraju, dobijaju ocene svi učenici koji su uspešno rešili zadatke i koji su aktivno učestvovali u analizi.

Glavni deo časa: (30) minuta

Saopštavamo učenicima da je cilj ovoga časa da se rešavanjem nekoliko zadataka iz raznih oblasti u kojima se kao modeli javljaju diferencijalne jednačine u kojima se promenljive mogu razdvojiti, sagleda njihov značaj u drugim područjima. U ovim primerima je formiranje diferencijalne jednačine kao modela problema najvažniji ali i najteži deo zadatka. Taj deo zadatka ne može da uradi računar nego mi sami. Zatim formulišemo

1. primer:

Masa stabla je trenutno približno 1.8t. Ako njegov godišnji koeficijent prirasta iznosi $k = 0.02$:

a) naći zakon tog prirasta,

b) izračunati masu koju će stablo imati kroz 9 meseci.

Rešenje.

a) Traženi zakon prirasta biće funkcija $M(t)$, koju treba odrediti. Da bismo dobro formirali odgovarajuću diferencijalnu jednačinu, na osnovu koje će se dobiti taj zakon,podsećamo se da količnik $\frac{dM}{M}$ predstavlja približno promenu mase stabla u veoma kratkom vremenskom periodu i da je ona direktno proporcionalna koeficijentu prirasta i vremenu. Nakon toga, sastavljamo odgovarajuću jednačinu:

$$\frac{dM}{M} = 0.02dt \text{, uz uslov } M(0) = 1.8 .$$

Dalje je

$$\int \frac{dM}{M} = 0.02 \int dt ,$$

$$\ln M = 0.02t + C$$

$$M(t) = Ce^{0.02t} .$$

Učenici sada koriste početni uslov koji su prethodno sami, ili uz malu nastavnikovu pomoć, formulisali.

Pomoću početnog uslova dobijamo

$$C = 1.8 ,$$

pa je traženi zakon rasta

$$M(t) = 1.8e^{0.02t} .$$

Zatim se prikazuje grafički dobijeni zakon.

Uočavamo da je stopa promene veličine M s obzirom na vreme t proporcionalna trenutnoj masi M. Dobijeni zakon nazivamo zakon eksponencijalnog rasta.

Zaključujemo da ovaj zakon gubi smisao u dugom vremenskom periodu, već da se može primenjivati za približno određivanje mase samo u kraćem intervalu. Dakle, naša jednačina nije dobar matematički model za duži vremenski period jer ne uzima u obzir neke ograničavajuće faktore rasta.

b) Tražena masa će biti približno

$$M\left(0.75\right)=1.8e^{0.015}\approx 1.8272t\,.$$

Komentar

Posebnu pažnju treba obratiti na postavljanje diferencijalne jednačine kao matematičkog modela za rešavanje problema iz raznih oblasti. Za uspešno rešavanje neophodno je znati i pojmove tih oblasti. Veoma je važno da se, nakon postavljanja i rešavanja odgovarajuće jednačine, pravilno protumače dobijena rešenja.

Primer 37. 2. Novac se kontinuirano ulaže na račun po stopi od 2000 evra godišnje uz kamatnu stopu od 8% koja se pripisuje neprekidno. Iznos A na računu nakon t godina zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dA}{dt}=0.08A+2000\,.$$

a) Naći opšte rešenje ove jednačine.

b) Nacrtati grafike parcijalnih rešenja koja zadovoljavaju početne uslove

$$A\left(0\right)=0 \;\text{ i }\; A\left(0\right)=1\,.$$

c) Uporediti parcijalna rešenja iz prethodne tačke tokom dugog vremenskog perioda. Razmotriti uticaj vrednosti $A\left(0\right)$ na tekući iznos na računu.

Rešenje.

a) Nakon razdvajanja promenljivih i integracije dobija se opšte rešenje

$$A(t)=Ce^{0.08t}-25000,\quad C\geq 25000$$

b)

$$\begin{array}{ll} A\left(0\right)=0 & \qquad A\left(0\right)=1 \\ C-25000=0 & \qquad C-25000=1 \\ C=25000 & \qquad C=25001 \end{array}$$

$$A\left(t\right)=25000e^{0.08t}-25000,\quad A\left(t\right)=25001e^{0.08t}-25000\,.$$

Ovaj primer rade učenici samostalno ili uz neophodnu nastavnikovu pomoć. Oko učenika koji su ga uradili, formiraju se male grupe u kojima oni pomažu ostalim učenicima. Na kraju se crtaju grafici dobijenih partikularnih rešenja kao i rešenja za C=26000 i za C=30000 radi što boljeg upoređivanja tih rešenja.

c)

Zaključujemo da su i nakon dugog vremenskog perioda male su razlike između ovih partikularna rešenja. Ako je $A(0)$ veće, onda se tokom vremena uvećava razlika u rešenjima u odnosu na ona rešenja u kojima je $A(0)$ manje.

Završni deo časa: (5) minuta

Domaći zadatak

1. Rešiti diferencijalne jednačine

a) $x^2y^2 = (x-1)y'$;

b) $xy' = y + y^3$;

c) $y' = \dfrac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$.

2. Matematički model širenja glasina je diferencijalna jednačina

$$\frac{dN}{dt} = Ne^{-0.5t} \text{ (Gonpercov zakon rasta),}$$

gde je $N(t)$ broj osoba koje su čule glasinu u vreme t.

a) Naći opšte rešenje ove jednačine i izračunati $\overline{N} = \lim_{t\to\infty} N(t)$.

b) Nacrtati grafove partikularnih rešenja koja zadovoljavaju početne uslove

$$N(0) = 100 \text{ i } N(0) = 200.$$

c) Analizirati učinak $N(0)$ na širenje glasina tokom dugog vremenskog perioda.

Ako je potrebno, dati neophodna uputstva za rad. Nastavnik: Krunić Slavko

3 O diferencijalnim jednačinama

3.1 Pojam diferencijalne jednačine i egzistencija rešenja

Dinamiku procesa u raznim oblastima moguće je matematički modelirati jednačinama koje sadrže izvode nepoznatih funkcija jedne ili više promenljivih. Te jednačine ćemo zvati diferencijalne jednačine. Ako su procesi kompleksni, složeni su i modeli koji ih opisuju i rad na njima, najčešće, nije moguć bez upotrebe računara. Ako nepoznata funkcija zavisi samo od jedne promenljive, tada se javljaju samo obični izvodi, pa se takva diferencijalna jednačina naziva obična.

Kada nepoznata funkcija zavisi od više promenljivih, javljaju se parcijalni izvodi, pa se jednačina naziva parcijalna.

Svaka jednačina koja sadrži izvod nepoznate funkcije ne mora biti diferencijalna. Na primer jednačine

$$y'(x) = y(x)\int_a^x ty(t)\,dt \text{ i } y'(x) + \Delta y(x) = 0, \text{ gde je } \Delta y(x) = y(x+1) - y(x),$$

ne smatraju se diferencijalnim u navedenom smislu. Prva od njih sadrži nepoznatu funkciju i pod znakom integrala i zato je ona integro-diferencijalna jednačina. Druga sadrži diferencni operator Δ pa je ona diferencijalno-diferencna jednačina. Potrebno je, dakle, preciznije objasniti ovaj pojam kao i njegove osobine.

Definicija 11. *Neka je funkcija $y(x)$ neprekidna i n puta diferencijabilna na intervalu (a,b) na kome su definisane i neprekidne funkcije $y'(x),\ldots,y^{(n)}(x)$.*

Opšti oblik obične diferencijalne jednačine n-tog reda je

$$G\left(x, y(x), y'(x),\ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0,$$

a njen normalni oblik je

$$y^{(n)}(x) = F\left(x, y(x), y'(x),\ldots, y^{(n-1)}(x)\right),$$

gde su F i G poznate funkcije.

Definicija 12. *Red diferencijalne jednačine je red najvišeg izvoda koji se u njoj nalazi.*

Definicija 13. *Funkcija $y = f(x)$ koja je neprekidna i n puta diferencijabilna na intervalu (a,b) je rešenje diferencijalne jednačine n-tog reda ako za svako $x \in (a,b)$ važi*

$$f^{(n)}(x)=F\left(x,f(x),f'(x),\ldots,f^{(n-1)}(x)\right).$$

Na primer, funkcija $y=e^x$ je rešenje jednačine $y''-y=0$, što je očigledno. Rešenje ove jednačine je i funkcija $y=e^{-x}$ a rešenje je i ma koja funkcija oblika $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$, gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante, što je lako proveriti. Za ovu funkciju kažemo da je linearna kombinacija prethodnih rešenja. Dakle,diferencijalne jednačine mogu imati i više rešenja.

Definicija 14. *Opšte rešenje ili opšti integral diferencijalne jednačine n-tog reda je familija funkcija $y=\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$ neprekidno zavisnih od n proizvoljnih konstanti $C_1,C_2,\ldots,C_n$ ako svaka od tih funkcija identički zadovoljava posmatranu jednačinu po x.*

Definicija 15. *Svako pojedinačno rešenje, koje se dobija iz opšteg rešenja pri nekom konkretnom izboru njegovih konstanti, naziva se partikularno rešenje ili partikularni integral te jednačine. Grafik partikularnog rešenja naziva se njegova integralna linija.*

Te konkretne vrednosti konstanti obično se određuju nekim dopunskim uslovima koji se daju zajedno sa jednačinom. Zadavanje dopunskih uslova ekvivalentno je izboru vrednosti konstanti.

Opšte rešenje (integral) diferencijalne jednačine može biti izraženo u implicitnom obliku. Za jednačine prvog reda taj oblik je $\varphi(x,y,C)=0$. Kod ovih jednačina rešenje može biti izraženo i u obliku rešenom po C: $\psi(x,y)=C$, gde su φ i ψ poznate funkcije.

Diferencijalne jednačine mogu imati i singularna rešenja. Rešenje $y=\omega(x)$ jednačine $y'=F(x,y)$ je singularno ako kroz svaku njegovu tačku, osim njega, prolazi i neko drugo rešenje koje u toj tački ima istu tangentu kao i rešenje $y=\omega(x)$, a razlikuje se od njega u ma kojoj okolini tačke dodira. Integralna kriva singularnog rešenja je singularna integralna kriva. Tako je, npr. prava $y=0$ singularno rešenje diferencijalne jednačine $y'=2\sqrt{y}$.

Definicija 16. *Rešiti diferencijalnu jednačinu znači odrediti njeno opšte rešenje, sva singularna rešenja i ispitati ponašanje rešenja u okolini singularnih tačaka.*

Veoma je malo tipova diferencijalnih jednačina čija se rešenja mogu izraziti elementarno, tj. pomoću konačnog broja elementarnih funkcija i njihovih integrala. Među jednačinama viseg reda postoje samo izolovani primeri koji se mogu rešiti elementarno. Veliki je istorijski značaj i ovih malobrojnih tipova jer su one poslužile kao prvi modeli dinamičkih problema tada aktuelnih pre svega u fizici. Tako je motiv za prva saznanja o diferencijalnim jednačinama bila mogućnost njihove primene.

Ključna tačka u postupku njihovog rešavanja je integracija kao operacija inverzna diferenciranju. Zato su ovi tipovi nazvani integrabilni, a njihova rešenja integralima tih jednačina. Ta terminologija, vidimo, važi i danas.

Integrabilni tipovi, iako malobrojni i odavno proučeni te stoga nezanimljivi sa teorijskog stanovišta, i sada čine značajan aparat u raznim područjima primene. Osnovna ideja ovoga rada proizašla je iz naše želje da prikažemo neke mogućnosti primene nekoliko najjednostavnijih tipova tih jednačina.

Znači, opšte rešenje u navedenom smislu moguće je dobiti uglavnom za jednostavne klase jednačina a najčešće, naročito u praksi, traže se i proučavaju ona rešenja koja zadovoljavaju neke dopunske uslove: početne, granične, da li su periodična ili ograničena itd. Ne postoji opšti metod za rešavanje diferencijalnih jednačina pa se njihova teorija bavi i sistematskim izučavanjem tipova koje je moguće rešiti.

U savremenoj teoriji diferencijalnih jednačina ne traže se, dakle, njihova rešenja već se, koristeći samu jednačinu, proučavaju osobine tih rešenja kao što su ograničenost, asimptote, ponašanje u okolini singularnih tačaka, monotonost ili oscilatornost. Taj deo teorije se naziva kvalitativna analiza.

Sa druge strane, numerička analiza na nenadmašan način daje veoma precizne brojevne podatke o integralnim krivama. Tako je moguće napraviti program za konkretnu jednostavniju jednačinu uz date početne uslove i nacrtati na nekom intervalu približan grafik rešenja ne znajući njegov analitički izraz.

Numerička i kvalitativna analiza ne ukidaju jedna drugu već se uzajamno prožimaju i dopunjuju.

Proučavaju se dva osnovna tipa problema: početni i granični problem.

3.2 Početni (Košijev) problem

Ovaj problem se sastoji u tome da se nađe ono rešenje jednačine

$$y^{(n)}(x) = F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right)$$

koje zadovoljava početne uslove

$$y^{(k)}(x_0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

pri čemu je x_0 proizvoljna tačka intervala (a, b) a y_k su ma koji izabrani realni brojevi. Ako takvo rešenje postoji, ono se zove Košijevo rešenje. Navedeni početni uslovi zovu se još i Košijevi uslovi, a dati brojevi x_0, $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ početne vrednosti Košijevog problema.

Početni problemi su matematički modeli mnogih pojava u raznim područjima. Obično se zahteva da imaju sledeća svojstva:

1. postoji rešenje početnog problema,
2. rešenje je jedinstveno,
3. rešenje neprekidno zavisi od početnih uslova.

Ako su ovi zahtevi ispunjeni tada se kaže da je problem korektno postavljen u smislu Adamara.

Postavlja se pitanje uslova pod kojima postoji rešenje početnog problema. Koši je 1842. godine dokazao egzistenciju i jedinstvenost rešenja pod uslovima analitičnosti funkcije F i funkcija $y^{(k)}, \quad k = 0,1,\dots,n-1$ koje određuju početne uslove.

3.3 Granični problem

3.3.1 Peanova teorema o egzistenciji

Osnovno pitanje teorije diferencijalnih jednačina prvog reda je pod kojim uslovima o funkciji F(x,y) definisanoj u oblasti

$$G_{a,b}(x_0, y_0) = \{(x, y) \mid |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\},$$

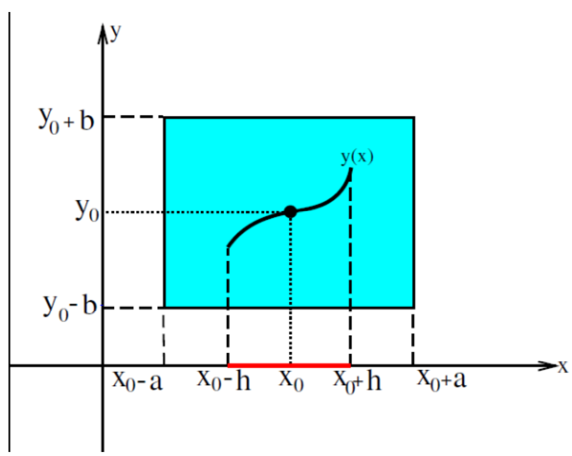
postoji rešenje početnog problema

1. $y' = F(x, y)$
2. $y(x_0) = y_0$.

U toj oblasti važi

$$x_0 - a \le x \le x_0 + a, \quad y_0 - b \le y \le y_0 + b,$$

pa je $G_{a,b}(x_0, y_0)$ zatvoren pravougaonik čije je središte tačka (x_0, y_0) (Slika 37).



Slika 37.

To rešenje je diferencijabilna funkcija $y(x)$ takva da za svako x iz nekog intervala $(x_0 - h, x_0 + h)$ važi:

$$y'(x) = F(x, y(x)), \quad (x, y(x)) \in G_{a,b}(x_0, y_0), \quad y(x_0) = y_0.$$

Da bi se dao odgovor na ovo pitanje potrebno je prvo da se podsetimo nekih poznatih pojmova i činjenica.

Definicija 7.

Definicija 17. *Neka je* $C[a,b]$ *skup neprekidnih funkcija na intervalu* $[a,b]$ *i neka je* $y(x)$ *proizvoljan element tog skupa. Ako ma kom broju* $\varepsilon > 0$ *odgovara broj* $\delta > 0$ *tako da za svaku funkciju iz tog skupa važi*

$$\left|y(x_1) - y(x_2)\right| < \varepsilon \ \ za \ \left|\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2\right| < \delta,$$

gde su x_1 *i* x_2 *proizvoljne tačke intervala* $[a,b]$, *onda kažemo da je skup* $C[a,b]$ *skup podjednako neprekidnih funkcija.*

Definicija 18. *Skup* $C[a,b]$ *zove se skup uniformno ograničenih funkcija na intervalu* $[a,b]$ *ako za ma koji njegov element* $y(x)$ *postoji konstanta* M *tako da je* $\left|y(x)\right| \le M$ *za* $x \in [a,b]$.

Važi sledeća

Teorema 1. *(Arzel-Askoli) Da bi skup* $C_1 \subset C[a,b]$ *bio kompaktan, potrebno je i dovoljno da njegovi elementi budu podjednako neprekidne i uniformno ograničene funkcije na intervalu* $[a,b]$.

Ovim se tvrdi da se iz svakog beskonačnog niza $\{y_n(x)\} \subset C_1$ može izdvojiti parcijalni niz $\{y_{n_k}(x)\}$ koji uniformno konvergira na intervalu $[a,b]$. ■

Važi i sledeća

Lema.

Teorema 2. *Neka je funkcija* $F(x,y)$ *neprekidna u zatvorenoj oblasti* $G_{a,b}(x_0,y_0)$. *Tada je svako rešenje* $y(x)$, *definisano u intervalu* $[x_0 - h, x_0 + h]$, $0 < h \le a$, *početnog problema*

$$y' = F(x,y)$$

$$y(x_0) = y_0.$$

i neprekidno rešenje integralne jednačine

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y(t))\,dt,$$

i obrnuto.

Dokaz. Integracijom obeju strana jednačine $y' = F(x,y)$ u granicama od x_0 do x, $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ (što je izvodljivo zbog neprekidnosti), i na osnovu početnog uslova dobija se tražena integralna jednačina. Obrnuto tvrđenje se dokazuje diferenciranjem obeju strana te integralne jednačine i stavljajući $x_0 = x$. ■

Sada možemo formulisati poznatu Peanovu teoremu.

Teorema 3. *(Peano) Ako je početni problem*

$$y' = F(x,y)$$

$$y(x_0) = y_0.$$

gde je funkcija $F(x,y)$ neprekidna u zatvorenoj oblasti $G_{a,b}(x_0,y_0)$, tada ovaj problem ima bar jedno rešenje u intervalu

$$|x - x_0| \leq \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

gde je $M = \max|f(x,y)|$ u oblasti G.

Dokaz. U njenom dokazu prvo se konstruiše niz funkcija $\{y_n(x)\}$ u intervalu $[x_0, x_0 + h]$, gde je $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, na sledeći način:

$$y_n(x) = \left\{ \begin{array}{c} y_0, \quad za\ x_0 \leq x \leq x_0 + h/n \\ y_0 + \int_{x_0}^{x - \frac{h}{n}} f(t, y_n(t))\,dt, \quad za\ x_0 + k\frac{h}{n} \leq x \leq x_0 + (k+1)\frac{h}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \end{array} \right\}.$$

Za ovaj niz se, indukcijom po k, može dokazati da važi

$$|y_n(x) - y_0| \leq b, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

odakle sledi

$$|y_n(x)| \leq b + |y_0|.$$

Dakle, posmatrani niz je uniformno ograničen u intervalu $|x - x_0| \leq a$.

Pored toga, za svaki par tačaka x' i x'' važi

$$\left|y_n(x'') - y_n(x')\right| \le M\left|x'' - x'\right|,$$

pa je konstruisani niz i niz podjednako neprekidnih funkcija za $|x - x_0| \le a$.

Na osnovu teoreme Arcel-Askolija niz $\{y_n(x)\}$ sadrži podniz $\{y_{n_\nu}(x)\}$ koji, za $|x - x_0| \le a$, uniformno konvergira ka neprekidnoj funkciji $\varphi(x)$.

Zatim se može dokazati da je ova funkcija traženo rešenje početnog problema postavljenog u teoremi. ■

3.3.2 Koši-Pikarova teorema o egzistenciji i jedinstvenosti

Postavljaju se sledeća pitanja: može li kroz neku tačku (x_0, y_0) u oblasti $G:\{(x,y): x \in [a,b],\quad y \in [\alpha,\beta]\}$ u kojoj je funkcija $F(x,y)$ neprekidna da prolazi više integralnih linija date diferencijalne jednacine $y' = F(x,y)$? Pod kojim uslovima postoji samo jedna takva linija za bilo koju untrašnju tacku (x_0, y_0) oblasti G ? Odgovor na prvo pitanje daju sledeći primeri:

Primer 38. Neka je $F(x,y) = \sqrt{y}$. Opšti integral diferencijalne jednačine $y' = F(x,y)$ je $y = \dfrac{(x+C)^2}{4}$, $C \in \mathbb{R}$. Rešenje jednačine je i prava $y = 0$ kroz čiju svaku tačku prolaze bar dve integralne krive ove jednačine.

Primer 39. Neka je $F(x,y) = 3y^{\frac{2}{3}}$. Lako je pokazati da je $y(x) = (x - C)^3$ rešenje ove jednačine za svako realno C. No, rešenje je i funkcija

$$y(x) = \left\{ \begin{array}{l} (x-C)^3, x < C \\ 0, \quad C \le x \le D \\ (x-D)^3,\ x > D \end{array} \right\},$$

jer postoji $y'(x)$ u tačkama C i D, pri čemu je $y'(x) = 0$. Prema tome, kroz svaku tačku $(\mathrm{x}_0, 0)$, $\mathrm{C} \le \mathrm{x}_0 \le \mathrm{D}$, prolazi beskonačno mnogo krivih koje se dobijaju raznim izborima za C i D.

Drugo pitanje je mnogo složenije. Ono traži odgovor o uslovima egzistencije i jedinstvenosti rešenja već posmatranog početnog problema.

Može se obezbediti i druga važna osobina početnog problema

$$y' = F(x,y)$$
$$y(x_0) = y_0.$$

a to je njegova jedinstvenost, ako se za funkciju $F(x,y)$ uvedu dodatne pretpostavke, na što se odnosi sledeća teorema.

Teorema 4. ***(Koši-Pikar)*** *Neka je funkcija* $F(x,y)$ *neprekidna u zatvorenoj oblasti*

$$G:\{(x,y): x\in[a,b],\quad y\in[\alpha,\beta]\}$$

i zadovoljava Lipšicov uslov po y*, tj. postoji pozitivan broj* K *tako da je za svake dve tačke* $(x,y_1),(x,y_2)$ *iz* G

$$|F(x,y_2)-F(x,y_1)|\le K|y_2-y_1|,$$

tada postoji jedinstveno rešenje početnog problema

$$y'=F(x,y), y(x_0)=y_0\ x_0\in(a,b); y_0\in(\alpha,\beta).$$

koje je definisano u intervalu $[\mathrm{a}',\mathrm{b}']$ *gde je*

$$a'=\max\left\{a,\ x_0-\frac{\beta-y_0}{M},\ x_0-\frac{y_0-\alpha}{M}\right\},\quad b'=\min\left\{b,\ x_0+\frac{\beta-y_0}{M},\ x_0+\frac{y_0-\alpha}{M}\right\},$$

$M=\sup|f(x,y)|$ *u oblasti* G.

Dokaz. U dokazu ove teoreme koristi se dokazana lema, prema kojoj je dovoljno dokazati egzistenciju i jedinstvenost rešenja integralne jednačine

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}F(t,y(t))dt.$$

Zato se definiše niz $\{y_n(x)\}$ ovako:

$$y_0(x)=y_0, y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_{n-1}(t))dt, n=1,2,\ldots\ .$$

Može se dokazati indukcijom da za $x\in[a',b']$ i $n=1,2,\ldots$ važi $(x,y_n(x))\in G$, što znači da je niz dobro definisan kao i da u oblasti G važi

$$|y_n(x)-y_0|\le M|x-x_0|.$$

Iz ovog sledi da su svi članovi niza $\{y_n(x)\}$ definisane i neprekidne funkcije na $[a',b']$.

Za ovaj niz dalje se dokazuje da je, kad $n\to\infty$,

$$|y_{n+p}(x)-y_n(x)|<\varepsilon,$$

za $n \geq n_1(\varepsilon)$, gde je ε proizvoljno mali unapred dati broj, za svako $p = 0,1,\dots$, i za svako $x \in [a', b']$. Na osnovu Košijevog kriterijuma uniformne konvergencije sledi da, kad $n \to \infty$, ovaj niz uniformno konvergira ka nekoj funkciji $y(x)$.

Dalje se dokazuje da je ova funkcija rešenje postavljenog početnog problema a zatim i da je njegovo jedinstveno rešenje. ■

Članovi niza $\{y_n(x)\}$ nazivaju se uzastopne aproksimacije rešenja $y(x)$ i u njima svaki sledeći član bolje aproksimira rešenje u intervalu $[a', b']$ od prethodnog člana. Ovaj postupak dokaza naziva se metod uzastopnih aproksimacija.

Lipšicov uslov je samo dovoljan ali ne i potreban uslov za jedinstvenost rešenja početnog problema.

To pokazuje sledeći

Primer 40.

$$y' = \begin{cases} y \ln y, & 0 < y < 1 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}, y(x_0) = y_0 .$$

Rešenje. Rešenje je

$$y(x) = \begin{cases} \ln y_0 e^{e^{x-x_0}}, za & 0 < y_0 < 1 \\ y_0, \quad za & y_0 \leq 0 \end{cases},$$

pa se vidi da kroz svaku tačku (x_0, y_0) prolazi samo jedno rešenje. Ovde, međutim, nije ispunjen Lipšicov uslov po y u okolini nule pošto tada za par $(y_1, 0)$, nejednakost

$|y_1 \ln y_1 - 0| \leq K|y_1 - 0|$ očigledno ne važi za male vrednosti y_1. Dakle, teorema o jedinstvenosti rešenja može se dati i pod uslovima različitim od onih u Koši-Pikarovoj teoremi. Jedna od njih je **Osgudova**:

Teorema 5. *Ako je funkcija $F(x, y)$ neprekidna u zatvorenoj oblasti $G_{a,b}(x_0, y_0)$ i ako je*

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq \varphi(|y_1 - y_2|),$$

gde je funkcija $\varphi(u)$ neprekidna i pozitivna za $u > 0$ i

$$\int_{0^+}^{A} \frac{du}{\varphi(u)} = \infty, \quad (A > 0)$$

tada je rešenje početnog problema $y' = F(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ *jedinstveno.*

Prethodne tri teoreme lokalne su prirode. One daju egzistenciju i jedinstvenost rešenja početnog problema

$$y' = F(x,y)$$

$$y(x_0) = y_0 .$$

u nekoj okolini početne tačke (x_0, y_0).

Primer 41. Neka je

$$y'(x) = y^2, \quad y(x_0) = y_0 ,$$

pri čemu je

$$a < x_0 < b,\ y_0 > 0 \text{ i } \frac{1}{y_0} + x_0 < b \le \beta .$$

Rešenje. Rešenje ovog početnog problema je funkcija

$$y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}$$

pa $y(x) \to \infty$ kad $x \to \left(\frac{1}{y_0} + x_0\right)_{-0}$. Dakle, ne postoji rešenje početnog problema u čitavom intervalu $[a,b]$.

Ako pretpostavimo da uslovi Koši-Pikarove teoreme važe u traci

$$S\ : a \le x \le b ,$$

umesto u oblasti G, onda je rešenje definisano u celom intervalu $[a,b]$, a ne samo u intervalu $[a',b']$ na koji se odnosi teorema.

Definicija 19. *Neka su* $y(x)$ *i* $z(x)$ *dva rešenja jednačine* $y' = F(x,y)$ *koja su definisana redom u intervalima* I_y *i* I_z. *Ako važi*

1° $\mathrm{I}_y \subset \mathrm{I}_z$,

2° $y(x) = z(x),\ x \in I_z \setminus I_y$,

zasićeno ako se dalje ne može produžiti, a interval na kome je ono definisano naziva se maksimalni interval definisanosti.

Važi sledeća

Teorema 6. *Neka funkcija* $F(x,y)$ *zadovoljava uslove Peanove teoreme u zatvorenoj oblasti* G *iz te teoreme. Tada je zasićeno rešenje* $y(x)$ *početnog problema*

$$\begin{aligned} y' &= F(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned},$$

ako je jedinstveno, definisano na zatvorenom intervalu $\left[\underline{a},\overline{b}\right]$ *gde je* $x_0 - a \le \underline{a} < x_0 < \overline{b} \le x_0 + a$ *a tačke* $\left(\underline{a}, y(\underline{a})\right)$, $\left(\overline{b}, y(\overline{b})\right)$ *pripadaju rubu oblasti* G.

Teorema 7. *Ako funkcija* $F(x,y)$ *ispunjava uslove Peanove teoreme u otvorenoj oblasti* $G\ : a < x < b,\ \alpha < y < \beta$*, tada sve tačke nagomilavanja kad* $x \to \overline{b} -_0$ *ili kad* $x \to \underline{a} +_0$ *grafika zasićenog rešenja početnog problema iz te teoreme, ako je jedinstveno, pripadaju rubu oblasti* G. *Interval* $\left(\underline{a},\overline{b}\right)$ *je maksimalan interval definisanosti.*

3.4 Diferencijalne jednačine prvog reda

Opšti oblik diferencijalne jednačine prvog reda je

$$G(x,y,y') = 0,$$

a normalni oblik

$$y' = F(x,y),$$

gde je x nezavisno promenljiva, y nepoznata funkcija od x, y' njen prvi izvod a G i F su poznate funkcije.

Funkcija $y = f(x)$ koja je definisana i diferencijabilna na intervalu (a,b) je rešenje ove jednačine ako za svako $x \in (a,b)$ važi

$$G\big(x, f(x), f'(x)\big) = 0,$$

odnosno

$$f'(x) = F\big(x, f(x)\big).$$

Do pojmova opšteg i partikularnog rešenja ovih jednačina možemo doći sledećim razmatranjem.

Definicija 20. *Neka je funkcija* $F(x,y)$ *definisana i neprekidna u oblasti* G *i neka je* $y = f(x)$ *rešenje jednačine*

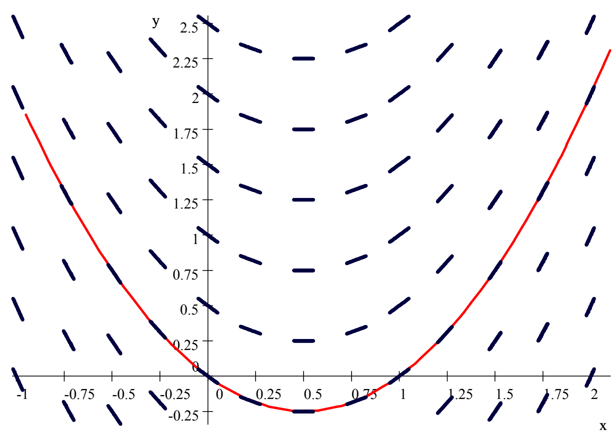
$$y' = F(x,y)$$

u nekom intervalu (a,b). *Uređena trojka* $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ *gde je* $F(x_0, y_0)$ *u ma kojoj tački* (x_0, y_0) *određeno sa* $y'(x_0, y_0) = F(x_0, y_0)$ *naziva se linijski element a skup svih linijskih elemenata je polje pravaca te jednačine.*

Tako ova diferencijalna jednačina kazuje da tangenta grafika rešenja $y = f(x)$ u ma kojoj njegovoj tački (x_0, y_0) ima koeficijent pravca $F(x_0, y_0)$. Za rešenje sa ovom osobinom kažemo da je saglasno sa poljem pravaca određenih jednačinom $y' = F(x,y)$. Skup svih krivih saglasnih sa poljem pravaca je opšte rešenje te jednačine. Rešenje koje prolazi kroz tačku (x_0, y_0), odnosno ono rešenje za koje važi početni uslov $y'(x_0) = y_0$, je njeno partikularno rešenje.

Dakle, rešiti diferencijalnu jednačinu prvog reda sa geometrijskog stanovišta znači naći sve krive čiji su grafici saglasni sa poljem pravaca.

Linijske elemente obično predstavljamo tačkama (x,y) kroz koje postavljamo odsečak prave sa koeficijentom pravca y'. Tako formiramo grafičku predstavu polja pravaca, pomoću koje možemo približno konstruisati ma koje partikularno rešenje, i tako steći predstavu i o opštem rešenju, (Slika 38).



Slika 38.

Definicija 21. *Neka je* $y' = F(x,y)$ *data diferencijalna jednačina prvog reda. Skup tačaka domena funkcije F koje imaju paralelne pravce polja jednačine* $y' = F(x,y)$ *zove se izoklina te jednačine.*

Familija izoklina određena je jednačinom

$$L : F(x, y) = a ,$$

gde je a realan parametar koji ne zavisi od x i y. Sve integralne linije koje seku uočenu izoklinu , u tačkama preseka imaju paralelne tangente. Na ovoj činjenici se zasniva metod grafičke integracije diferencijalnih jednačina.

Opisana geometrijska interpretacija rešenja omogućuje formiranje približnih rešenja jednačine

$$y' = F(x, y)$$

u vidu tzv. Ojlerovih poligonalnih linija. Konstruišu se ovako: posmatrani interval (a, b) podelimo na n delova tačkama

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b .$$

Postavimo kroz tačku $A_0(x_0, y_0)$ pravu L_0 čiji je koeficijent pravca $F(x_0, y_0)$. Njena jednačina je

$$L_0 : y = y_0 + (x - x_0) F(x_0, y_0) .$$

Ako je tačka x_1 dosta blizu x_0, za očekivati je da u toj tački ordinata prave L_0 određena sa

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0) F(x_0, y_0)$$

neće mnogo odstupati od ordinate rešenja u x_1. Zatim postavimo pravu L_1 kroz tačku $A_1(x_1, y_1)$ sa nagibom $F(x_1, y_1)$. Dobijamo:

$$L_1 : y = y_1 + (x - x_1) F(x_1, y_1) .$$

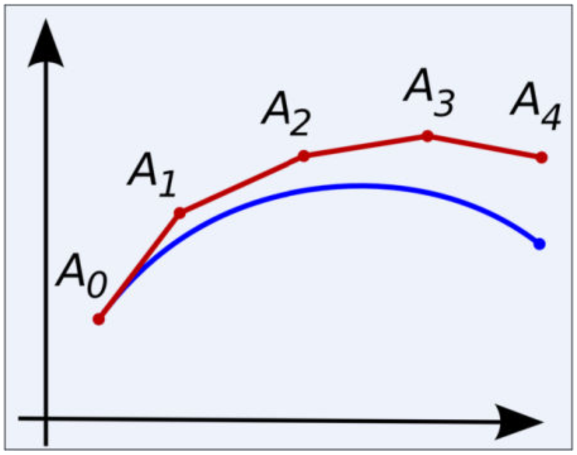
Nakon k koraka je

$$L_k : y = y_k + (x - x_k) F(x_k, y_k), \quad x_k \le x \le x_{k+1} .$$

Odavde sledi obrazac

$$L_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k) F(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 .$$

Na ovaj način smo polaznu diferencijalnu jednačinu aproksimirali ovom diferencnom jednačinom a jedno njeno rešenje, nad nekim intervalom, poligonalnom linijom $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$, slika 39.



Slika 39.

Ovaj postupak je značajan u pitanjima egzistencije rešenja i u numeričkom rešavanju diferencijalnih jednačina.

Definicija 22. *Tačka kroz koju prolazi samo jedno rešenje diferencijalne jednačine* $y' = F(x, y)$ *zove se tačka jedinstvenosti ili obična tačka te jednačine.*

Partikularna rešenja prolaze kroz obične tačke a singularna rešenja prolaze samo kroz singularne tačke. Singularna linija može biti i integralna linija, što se neposredno proverava.

Prethodne teoreme daju odgovor na pitanje o egzistenciji rešenja diferencijalne jednačine prvog reda. Za nas su posebno važne teoreme 2. 3. i 4. jer daju odgovor na pitanje o egzistenciji, odnosno i egzistenciji i jedinstvenosti rešenja. Sve navedene teoreme su neke od osnovnih teorema u teoriji diferencijalnih jednačina.

3.4.1 Jednačina sa razdvajanjem promenljivih

Definicija 23. *Diferencijalna jednačina koja može da se napiše u obliku*

$$y' = f(x)g(y),$$

gde je

$$f \in C(a,b),\ g \in C(\alpha,\beta)\ \ i\ \ g(y) \neq 0\ \ za\ \ y \in (\alpha,\beta),$$

je diferencijalna jednačina koja dopušta razdvajanje promenljivih.

Egzistenciju, jedinstvenost i konstrukciju rešenja ovih jednačina daje sledeća

Teorema 8. *Neka je funkcija* $f(x)$ *neprekidna u (konačnom ili beskonačnom) intervalu* (a,b) *a funkcija* $g(y)$ *neprekidna i različita od nule u (konačnom ili beskonačnom) interval* (α,β). *Neka je* $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (\alpha,\beta)$. *Tada postoji jedinstveno rešenje jednačine*

$$y' = f(x)\,g(y)$$

za koje važi početni uslov $y(x_0) = y_0$ *a koje je definisano u nekoj okolini tačke* x_0. *To rešenje je dato obrascem*

$$y(x) = G^{-1}\left(G(y_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right),$$

gde je $G(y)$ *primitivna funkcija funkcije* $\dfrac{1}{g(y)}$ *u intervalu* (α, β) *a* $G^{-1}(y)$ *njena inverzna funkcija.*

Dokaz. Neka je $y(x)$ rešenje jednačine $y' = f(x)\,g(y)$ u nekoj okolini tacke x_0, tj.

$$y'(x) = f(x)\,g(y(x))$$

Zbog $g(y) \neq 0$, dalje je

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x),$$

$$\frac{dy(x)}{g(y(x))} = f(x)\,dx\,.$$

Nakon smene $u = y(x)$ i integracije u granicama od x_0 do x dobija se

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\,.$$

Zbog $y(x_0) = y_0$ sledi

$$G(y(x)) = G(y_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\,.$$

Kako je $g(u) \neq 0$, to znači da je G monotona u intervalu (α, β) pa postoji G^{-1}.

Zato iz poslednjeg obrasca dobijamo obrazac iz teoreme kao njemu ekvivalentan.

Prethodnim dokazom je opisan i postupak rešavanja ovih jednačina. On se zapravo sastoji od jedne integracije i od nalaženja jedne inverzne funkcije.

Obrnuto, svaka funkcija data formulom

$$y(x) = G^{-1}\left(G(y_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)$$

ili njoj ekvivalentnom

$$G\big(y(x)\big) = G(y_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

zadovoljava jednačinu

$$y' = f(x)\,g(y).$$

To se neposredno dobija diferenciranjem obe strane obrasca

$$G\big(y(x)\big) = G(y_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt. \ \blacksquare$$

3.4.2 Homogena diferencijalna jednačina prvog reda

Definicija 24. *Diferencijalna jednačina prvog reda koja se može svesti na oblik*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

gde je f *poznata neprekidna funkcija u nekoj oblasti* G *je homogena jednačina prvog reda.*

Za nalaženje rešenja ove jednačine potrebno je uvesti novu funkciju $u = u(x)$ na sledeći način:

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}, \quad y(x) = xu(x).$$

Pretpostavljamo da je funkcija $f(u)$ neprekidna na (a,b) i da je za svako $u \in (a,b)$ $f(u) \neq u$.

Odavde je

$$y' = u(x) + xu'(x),$$

što zamenom u jednačinu

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

daje

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u),$$

odnosno

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u}, \quad f(u) - u \neq 0, \quad x \in (a, b).$$

U ovoj jednačini promenljive su razdvojene, pa je rešavamo poznatim postupkom.

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{f(u) - u}$$

$$\ln|x| = \int \frac{du}{f(u) - u}$$

$$x = Ce^{\int \frac{du}{f(u)-u}}.$$

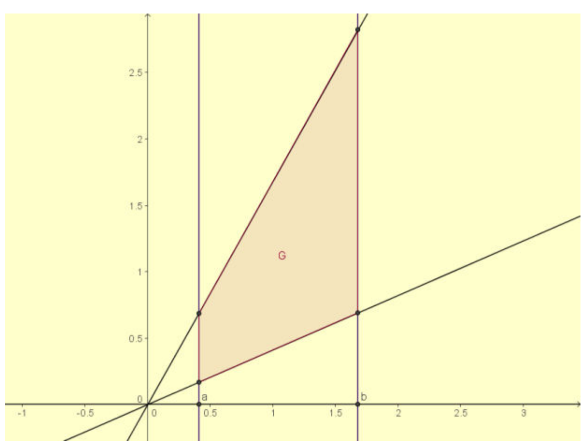
Nakon integracije na desnoj strani treba zameniti u sa $\frac{y}{x}$.

Ako je $f(u) - u \neq 0$ za $x \in (a, b)$, tada se može primeniti teorema 3 prema kojoj kroz svaku tačku (x_0, y_0) oblasti

$$G: \; a < x < b, \quad ax < y < bx, \; (x \neq 0), \text{ (slika 40)},$$

prolazi samo jedno rešenje $y(x) = xu(x)$, gde je $u(x)$ dato sa

$$\int_{u_0}^{u(x)} \frac{dt}{f(t) - t} = \ln\left|\frac{x}{x_0}\right|, \quad \left(u_0 = \frac{y_0}{x_0}\right).$$



Slika 40.

Ako je $f(u_0) - u_0 = 0$ za neko u_0 iz intervala (a, b), tada je i $y(x) = u_0 x$ rešenje posmatranog početnog problema, ali ono ne mora biti jedinstveno.

U slučaju $f(u)-u\equiv 0$, jednačina $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ se svodi na $y'=\frac{y}{x}$ pa razdvaja promenljive.

Homogena diferencijalna jednačina prvog reda je specijalan slučaj jednačine $y'=F(x,y)$. Ovu jednačinu možemo posmatrati i u tzv. obliku sa tačnim diferencijalima

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0,\quad N(x,y)\neq 0.$$

Pretpostavimo da su funkcije M i N homogene funkcije istog stepena m.

Tada je

$$M(tx,ty)=t^m M(x,y), N(tx,ty)=t^m N(x,y).$$

Ako izaberemo da je $t=\frac{1}{x}$, onda je

$$M(tx,ty)=M\left(1,\frac{y}{x}\right)=M(x,y):x^m, N(tx,ty)=N\left(1,\frac{y}{x}\right)=N(x,y):x^m.$$

Na osnovu jednačine

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0,$$

dalje je

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=-\frac{x^m M\left(1,\frac{y}{x}\right)}{x^m N\left(1,\frac{y}{x}\right)}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dakle, navedena jednačina sa tačnim diferencijalima čiji su koeficijenti M i N homogene funkcije istog stepena je homogena diferencijalna jednačina prvog reda

3.4.3 Linearna diferencijalna jednačina prvog reda

Definicija 25. *Linearna diferencijalna jednačina prvog reda je jednačina oblika*

$$y'+f(x)y=g(x),$$

gde su f *i* g *date neprekidne funkcije nezavisno promenljive* x *na intervalu* (a,b).

Egzistencija, jedinstvenost i konstrukcija rešenja ovih jednačina date su sledećom teoremom:

Teorema 9. *Ako su funkcije* $f(x)$ *i* $g(x)$ *neprekidne u (konačnom ili beskonačnom) intervalu* (a,b), *onda postoji jedinstveno rešenje jednačine* $y' + f(x)y = g(x)$ *koje zadovoljava početni uslov*

$$y(x_0) = y_0,\ x_0 \in (a,b),\ y_0 \in \mathbb{R}$$

i definisano je u (a,b). *To rešenje dato je formulom*

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{t} f(t)dt}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} f(u)du} g(t)\,dt\right).$$

Dokaz. Neka je $y(x)$ jedinstveno rešenje jednačine

$$y' + f(x)y = g(x)$$

u nekoj okolini tačke x_0. Množenjem obe strane ove jednačine sa

$$e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt},$$

dobija se

$$\frac{d}{dx}\left\{y(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}\right\} = e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt} g(x).$$

Integracijom obe strane u granicama od x_0 do x i koristeći početni uslov, dobija se navedeni obrazac kojim je određeno traženo jedinstveno rešenje. Obrnuto, diferenciranjem obeju strana obrasca za jedinstveno rešenje dobija se da je funkcija $y(x)$ rešenje jednačine $y' + f(x)y = g(x)$, i to u čitavom intervalu (a,b) jer postoje integrali koji se nalaze u tom obrascu zbog neprekidnosti funkcija f i g u (a,b). Početni uslov očigledno važi. ■

Prethodnim dokazom opisan je jedan od postupaka rešavanja ovih jednačina.

Izraz

$$e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}$$

kojim se množi data jednačina naziva se integracioni činilac. Navodimo još jedan postupak rešavanja linearnih jednačina prvog reda.

Opšte rešenje potražićemo u obliku proizvoda

$$y = u(x)v(x),$$

gde su u i v zasad neodređene funkcije. Tada je

$$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

pa se jednačina može pisati u obliku

$$\big(u'(x) + f(x)u(x)\big)v(x) + v'(x)u(x) = g(x).$$

Funkciju u(x) biramo tako da bude

$$u'(x) + f(x)u(x) = 0.$$

Odavde je

$$u(x) = e^{-\int f(x)dx},$$

pa zamenom u gornju diferencijalnu jednačinu dobijamo

$$v'(x) = g(x)e^{\int f(x)dx}$$

odakle je

$$v = C + \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx$$

i konačno opšte rešenje

$$y = u(x)v(x) = e^{-\int f(x)dx}\left(C + \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx\right).$$

Uočavamo da se formula za jedinstveno rešenje iz Teoreme 4 dobija ako se konstanta C iz obrasca za opšte rešenje odredi iz početnog uslova $y(x_0) = y_0$.

3.5 Diferencijalne jednačine drugog reda

Neka je funkcija $y(x)$ neprekidna i dvostruko diferencijabilna na intervalu (a,b) na kome je definisana i neprekidna i funkcija $y''(x)$.

Diferencijalna jednačina drugog reda je svaka jednačina oblika

$$G\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big) = 0, \text{ (implicitni oblik)},$$

ili oblika

$$y''(x) = F\big(x, y(x), y'(x)\big), \text{ (normalni oblik)}$$

gde su F i G poznate funkcije. U toj jednačini x, y i y'ne moraju biti eksplicitno zastupljeni. Jednačina $y''=1$ je jednostavan primer takve jednačine.

Neka je

$$y=\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2,$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne realne konstante.

Tada je

$$y'=x+C_1, \quad y''=1.$$

Zato ćemo svaku funkciju oblika $y=\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2$ zvati rešenjem jednačine $y''=1$.

Rešenje diferencijalne jednačine drugog reda je svaka funkcija koja ima sledeće svojstvo: Kada se u datu jednačinu zamene ta funkcija i njeni prvi i drugi izvod, dobija se identitet po x. Rešiti diferencijalnu jednačinu drugog reda znači odrediti sva njena rešenja.

Dokazano je da pod veoma opštim uslovima, difefrencijalna jednačina n-tog reda

$$y^{(n)}(x)=F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right),$$

ima opšte rešenje oblika

$$y=f\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right),$$

gde su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ proizvoljne realne konstante. Za jednačinu drugog reda to rešenje je oblika

$$y=f\left(x, C_1, C_2\right).$$

Neke diferencijalne jednačine višeg reda rešavamo snižavanjem reda tih jednačina pa ih u krajnjoj liniji svodimo na diferencijalne jednačine prvog reda.

Neka je, npr.

$$y^{(n)}(x)=F(x),$$

gde je F neprekidna funkcija u intervalu (a,b). Uvedimo smenu

$$y^{(n-1)}(x)=z(x).$$

Tada je

$$z'(x) = F(x) \text{ i } z(x) = y^{(n-1)}(x) = \int F(x)dx = F_1(x) + C_1.$$

Dalje, dobijamo

$$y^{(n-2)}(x) \ = \int (F_1(x) + C_1)dx = F_2(x) + C_1(x) + C_2.$$

Nakon n koraka dobijamo opšte rešenje polazne jednačine:

$$y(x) = F_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{1!}x + C_n, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}.$$

Tako prethodno posmatranu jednačinu

$$y'' = 1$$

možemo rešiti uvodeći smenu $y' = z$, odakle je $y'' = z'$. Dobijamo jednačinu :

$$z' = 1,$$

pa je

$$z = x + C_1,$$

$$y' = x + C_1,$$

i konačno, opšte rešenje

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2.$$

Jasno je da je postupak rešavanja ovih jednačina složeniji što je viši red diferencijalne jednačine.

Početni (Košijev) problem za diferencijalne jednačine drugog reda glasi: Naći ono rešenje $y(x)$ date jednačine za koje u nekoj tački x_0 u kojoj ono postoji važi:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,$$

gde su y_0 i y_1 dati brojevi. Geometrijski posmatrano, funkcijom $y(x)$ je određena integralna kriva koja prolazi kroz tačku (x_0, y_0) i u kojoj ta kriva ima tangentu čiji je koeficijent pravca y_1 (ili $y'(x_0)$).

Definicija 26. *Linearna homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima je jednačina*

$$y'' + py' + qy = 0,$$

gde su p i q date konstante a y nepoznata funkcija. □

Očigledno je da važi sledeća teorema.

Teorema 10. *Ako je $f(x)$ rešenje jednačine*

$$y'' + py' + qy = 0,$$

onda je i $Cf(x)$, gde je C proizvoljna konstanta, takođe njeno rešenje.

Za rešavanje ovih jednačina važna je i sledeća drfinicija.

Definicija 27. *Neka je $(a,b) \subset \mathbb{R}$ i neka su $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ f,g:(a,b)→ℝ date funkcije. Funkcije f i g su linearno nezavisne funkcije nad poljem realnih brojeva ako iz*

$$\alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) = 0, \quad x \in (a,b)$$

gde su $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, sledi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Funkcije koje nisu linearno nezavisne zovemo linearno zavisne funkcije.

Analogno se definiše linearna zavisnost skupa od $n, (n > 2)$ funkcija.

Definicija 28. *Neka su $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ i $\alpha_1, \ \alpha_2 \in \mathbb{R}$ proizvoljni brojevi.*

Izraz $\alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x)$ je jedna linearna kombinacija funkcija f i g.

I ovaj pojam se može proširiti na proizvoljan broj funkcija.

Primer 42. Funkcije

$$f(x) = 1, \, g(x) = x, \, h(x) = x^2$$

su linearno nezavisne nad $\mathbb{R}$ jer iz identiteta

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

sledi $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, dok su funkcije

$$f_1(x) = 1, \ g_1(x) = \sin^2(x) \text{ i } h_1(x) = \cos^2(x)$$

linearno zavisne nad $\mathbb{R}$ jer važi $-1 \cdot 1 + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}$.

Takođe je jasno da važi i sledeća

Teorema 11. *Ako su* $f_1(x)$ *i* $f_2(x)$ *dva rešenja jednačine*

$$y'' + py' + qy = 0$$

tada je i njihova linearna kombinacija $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$, *takođe rešenje te jednačine.*

Teorema 12. *Ako su* $f_1(x)$ *i* $f_2(x)$, $x \in (a,b)$ *rešenja jednačine*

$$y'' + py' + qy = 0$$

i zadovoljavaju uslov

$$W(x) \equiv \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

tada je opšte rešenje ove jednačine

$$y(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x),$$

gde su C_1 *i* C_2 *ma koje realne konstante. Ono obuhvata sva Košijeva rešenja.*

Definicija 29. *Determinantu* $W(x)$ *nazivamo determinanta Vronskog (vronskijan) od funkcija* f_1 *i* f_2.

Teorema 13. *Rešenja jednačine*

$$y'' + py' + qy = 0$$

su linearno nezavisna ako i samo ako je $W(x) \neq 0$,

Definicija 30. *Skup svih linearno nezavisnih partikularnih rešenja linearne homogene diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima čini osnovni ili fundamentalni skup rešenja.*

Prethodne tri teoreme mogu se uopštiti na proizvoljnu linearnu homogenu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

3.6 Osvrt na istoriju diferencijalnih jednačina

Diferencijalne jednačine su se pojavile u vreme otkrića diferencijalnog i integralnog računa, dakle u vreme Njutna i Lajbnica. Pokušaji da se reše pre svega fizički problemi, doveli su postepeno do matematičkih modela; jednačina u kojima se javljaju promenljive i njihovi diferencijali. Međutim, sa teoretskog stanovišta, razvoj ove grane matematike - Teorije diferencijalnih jednačina, ima začetak u jednom malom broju matematičkih problema. Ovi problemi i njihova rešenja vodili su ka posebnoj disciplini u kojoj je rešavanje ovih jednačina činilo suštinu samo po sebi.

Rad na opštim metodama rešavanja počeo je kada je Njutn objavio svoje delo "Metoda fluksija i beskonačnih redova" 1671. godine. U nemu je ukazao na važnost diferencijalnih jednačina i ukazao na način rešavanja nekih tipova. Jednačine prvog reda podelio je u tri grupe. Prve dve grupe činile su jednačine danas poznate kao obične diferencijalne jednačine prvog reda a treću grupu parcijalne jednačine prvog reda. Njutn je kao rešenje pretpostavljao beskonačan red u kome bi se dalje tražili koeficijenti. Komentarisao je da se konstantni koeficijenti mogu izabrati na bezbroj načina i zaključio da jednačina ima beskonačno mnogo partikularnih rešenja. Sve do sredine 18. veka nije u potpunosti shvaćena važnost ove činjenice, tj. da opšte rešenje diferencijalne jednačine prvog reda zavisi od proizvoljne konstante.

Godine 1682. Lajbnic, u Lajpcigu osniva časopis Acta Eruditorum. U njemu, 1684. objavljuje epohalni rad na 6 strana o diferencijalnom računu a zatim, 1686. i rad koji je sadržao grube osnove integralnog računa. U međuvremenu, Johan Bernuli i njegov brat Jakob Bernuli, otkrivaju tajne diferencijalnog i integralnog računa , i to bez neposredne pomoći Lajbnica. U intenzivnoj prepisci koju su zatim vodili sa Lajbnicom, razmenjena su mnoga nova otkrića u ovoj oblasti. Johan Bernuli je pronašao metod rešavanja homogene diferencijalne jednačine prvog reda 1692. godine, a uskoro i linearne jednačine prvog reda. Za "vladavine" Bernulijevih došlo je do otkrića praktično svih znanih metoda rešavanja diferencijalnih jednačina prvog reda. Johan se bavio i problemom izohrone, tj. krive u čijoj svakoj tački telo pada konstantnom vertikalnom brzinom. Ovaj problem ga je doveo do diferencijalne jednačine koja je prikazivala jednakost dva diferencijala. Iz toga je zaključio da su integali ta dva člana jednaki. Tako se reč "integral" prvi put pojavila u Acta Eruditorum 1693. godine. Zato je drugi od dva glavna dela novog računa, dotad zvani Calculus summatorius, promenio ime u Calculus integralis ili, Inregralni račun, kako ga i danas zovemo.

Iz problema izohrone nastala je ideja o formiranju jednačine neke krive koja ima kinematičku i dinamičku definiciju izraženu diferencijalnom jednačinom koja se, zatim, rešava pod određenim početnim uslovima. Jedna takva kriva je logaritamska spirala.

Lajbnic je implicitno otkrio metod razdvajanja promenljivih radeći na inverznom problemu tangenata. Zasluga za sam postupak pripada Jakobu Bernuliju. Opisao ga je 1694. godine i nazvao ga je Separatio indeterminatorum (metod razdvajanje promenljivih).On je 1696. dao veliki zamah proučavanju diferencijalnih jednačina kada je postavio čuveni Brahistohroni problem. To je problem pronalaženja jednačine putanje niz koju će čestica padati iz jednog položaja u drugi za najkraće vreme. Godine 1695. kao rešenje je ponudio jednačinu danas poznatu kao Bernulijeva jednačina:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n.$$

Sledeće godine Lajbnic je rešio ovu jednačinu, koristeći zamene i tako je pojednostavljujući na linearnu, postupkom koji je sličan današnjem.

Početkom 18. veka rad na nizu problema je vodio do diferencijalnih jednačina drugog i trećeg reda. Johan Bernuli je 1701. objavio rešenje svog izoperimetrijskog problema, odnosno problema u kome se traži da integral date funkcije bude maksimalan ili minimalan dok se integral druge date funkcije održava konstantnim. To je zahtevalo diferencijalnu jednačinu trećeg reda.

Rikati je u to vreme proučavao neke specijalne krive kod kojih zakrivljenost zavisi isključivo od ordinata njihovih tačaka. Zato se njegovo ime povezuje sa jednačinom

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 .$$

Rikati nije dao svoje rešenje ove jednačine. Rešio je Danijel Bernuli, iako je ona poznata pod imenom Rikatijeva jednačina.

Ojler je bio sledeći koji je dao značajan doprinos razvoju ove oblasti kada je postavio i rešio problem redukovanja određene klase diferencijalnih jednačina drugog reda na jednačine prvog reda. Njegov postupak pronalaženja drugog rešenja iz poznatog rešenja sastoji se od redukcije jednačine drugog reda na jednačinu prvog reda i pronalaženja integralnog faktora.

Ojler je uspešno radio i na homogenim linearnim diferencijalnim jednačinama sa konstantnim koeficijentima. To se vidi iz pisma koje je uputio Jakobu Bernoulliju 1739. koje je kasnije i objavljeno. Kasnije je je kompletirao ovaj rad i svoju pažnju je usmerio na nehomogene diferencijalne jednačine. Metod sukcesivne redukcije reda jednačine uz pomoć integralnih faktora prvo je doveo do jednačina integrabilnih (rešivih) u konačnoj formi. Ojler je prvo redukovao ove jednačine korak po korak, a zatim ih integrisao. Za one jednačine koje nisu bile integrabilne u konačnoj formi, Ojler je koristio metod integraljenja po serijama (grupama).

Klero je primenio postupak diferenciranja na jednačinu:

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

koja je danas poznata kao Kleroova jednačina i 1734. objavio je svoje istraživanje na ovoj klasi jednačina. Klero je bio među prvima koji su rešili problem singularnih rešenja - pronalaženje jednačine omotača (obvojnice) familije krivih predstavljenih opštim rešenjem.

Lagranž je formalizovao koncept adjungovane (pridružene) jednačine dok je radio na problemu određivanja integracionog faktora za linearnu jednačinu n-tog reda. Lagranž ne samo da je odredio integracioni faktor za ovu jednačinu nego je dao dokaz opšteg rešenja homogene linearne jednačine n-tog reda. Osim ovoga, Lagranž je otkrio metod varijacije konstanti.

Nadograđujući se na Lagranžov rad, Dalamber je pronašao uslove pod kojima se može sniziti red linearne diferencijalne jednačine. Dalamber je rešio i problem linearnih jednačina sa konstantnim koeficijentima i započeo proučavanje sistema linearnih diferencijalnih jednačina. U traktatu koji je napisao 1747. Dalamber se posvetio problemu vibrirajućih žica gde je došao do parcijalnih diferencijalnih jednačina i na ovom polju je ostvario glavni deo svog rada u matematici.

Period početnih otkrića opštih metoda rešavanja običnih diferencijalnih jednačina završen je do 1775. Za mnoge probleme opšte metode nisu bile dovoljne. Tražila su se rešenja sa specijalnim osobinama i prema tome kriterijumi koji su garantovali postojanje takvih rešenja postajali su sve važniji. Problemi sa graničnim vrednostima vodili su do običnih diferencijalnih jednačina, kao što je Beselova jednačina, gde je bilo neophodno proučavati Ležandrove i Hermitove polinome. Proučavanje ovih i drugih funkcija koje su rešenja jednačina hipergeometrijskog tipa vodili su prema modernim numeričkim metodama.

Tako je potraga za opštim metodama rešavanja običnih diferencijalnih jednačina bila završena a sva pažnja je usmerena ka analitičkim metodama rešavanja i problemima postojanja rešenja.

Istorijski gledano, razvoj diferencijalnih jednačina podstakle su potrebe mehanike i delova prirodnih nauka. Zato je njihov značaj sa tog stanovišta veliki jer su prve izučavane diferencijalne jednačine bile modeli problema tada aktuelnih u tim naukama. Sva prva saznanja iz ove oblasti su i stečena izučavanjem takvih tipova jednačina tokom skoro dva veka od njihovog nastanka.U toku XVIII veka teorija diferencijalnih jednačina omogućila je rešavanje problema iz zemaljske i nebeske mehanike, plime i oseke, u meteorologiji i drugim oblastima fizike. Zbog uspeha ove teorije pojavila se i filozofska teza o njenoj sveopštoj primeni. Ona je u svoje vreme odigrala veliku ulogu u oslobađanju nauke od teologije i sholastike.

U ranijem periodu razvoja teorije diferencijalnih jednačina preovladavalo je rešavanje tih jednačina pomoću kvadratura. Jednačina $y' = f(x, y)$ se smatrala rešenom kada se dobije opšti integral $y = \phi(x, C)$ ili $\psi(x, y, C) = 0$, pri čemu su u datim izrazima mogli figurisati i integrali tipa $\int f(x)dx$ ili $\int f(y)dy$. Sredinom XIX veka završen je gotovo ovaj period traženja rešenja diferencijalnih jednačina. Kako je zadatak svođenja na kvadrature nerešiv za opštije tipove jednačina, ovaj put nije mogao dovesti do opšte teorije.

Kada su ustanovljeni fundamentalni stavovi o egzistenciji rešenja (Koši i drugi), stvoreni su uslovi za intenzivan razvitak kvalitativne analize (odnosno integracije) rešenja diferencijalnih jednačina, čijim se osnivačem smatra veliki francuski matematičar Poenkare. Klasična je Koši-Pikarova teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja diferencijalne prvog reda $y' = f(x, y)$, gde se, uz pretpostavku neprekidnosti funkcije $f(x, y)$ u jednoj otvorenoj oblasti ravni xy i uz važenje Lipšicovog uslova, dobija rezultat da kroz svaku tačku (x_0, y_0) uočene oblasti prolazi jedna i samo jedna integralna kriva produžena do ruba te oblasti.

Tako je u XIX veku opšta teorija diferencijalnih jednačina obogaćena razvojem teorije o egzistenciji rešenja. Raznovrsnost pretpostavki o egzistenciji rešenja čini ovu teoriju veoma bogatom. Ovo je oblast od osnovnog značaja jer prirodno prethodi svim drugim istraživanjima. Ona omogućuje da proučavanjem same jednačine, dakle, bez njenog eksplicitnog rešavanja zaključimo da li rešenja postoje, odnosno da li postoje krive, koje su grafici tih rešenja. Moguće je ustanoviti da li su rešenja ograničene ili neograničene funkcije, da li su monotone i oscilatorne i imaju li i kakvih ekstrema. Pojavili su se novi tipovi diferencijalnih jednačina i njihova rešenja. Tako je nastala Furijeova analiza i specijalne funkcije. Došlo je do novih primena ne samo u klasičnoj mehanici već i u termodinamici, optici i elektrotehnici, posebno pod uticajem Maksvela.

U XX veku opšta teorija se dalje razvijala, ali je bila pod uticajem dolazeće teorije skupova u matematičku analizu. Nove primene su nastale u kvantnoj mehanici, dinamičkim sistemima i teoriji relativnosti. Skoro istovremeno kad i metode kvalitativne analize diferencijalnih jednačina, javljaju se i metode njihovog približnog rešavanja. One su imale značajnu ulogu u razvoju opšte teorije diferencijalnih jednačina. Poznate su metode sukcesivnih aproksimacija, neodređenih koeficijenata, analitička, Ojlerova, poligonalnih linija, Adamsova, Milnova,.. .

Oblast diferencijalnih jednačina u sadašnje vreme ima veoma raznovrsnu primenu, posebno u prirodnim i tehničkim naukama. Računari omogućuju da se njihova rešenja nalaze sa zadanom tačnošću kao i da se grafički prikazuju.

Prvi se u Srbiji, i to sa velikim uspehom, diferencijalnim jednačinama bavio naš čuveni matematičar Mihailo Petrović (1868-1943). Njegova doktorska teza "O nulama i beskonačnosti integrala algebarskih diferencijalnih jednačina", koju je odbranio 1894. u Parizu, upravo je iz ove oblasti. Teza je bila odmah zapažena u tadašnjem matematičkom svetu, a Emil Pikar u istoj godini, pri štampanju svog obimnog dela iz analize, unosi Petrovićeve rezultate iz teze. Mihailo Petrović u svom opusu beleži 87 bibliografskih jedinica iz diferencijalnih jednačina.

Prva doktorska teza iz matematičkih nauka odbranjena u Beogradu kod M. Petrovića, takođe je iz ove oblasti. To je teza Mladena Berića: "Figurativni poligoni diferencijalnih jednačina prvog reda i njihova veza sa osobinama integrala" odbranjena 1912. godine. Sledeća je bila teza "Opšta Rikatijeva jednačina prvog reda" 1913. Sime Markovića. U periodu između dva svetska rata i posle Drugog svetskog rata, diferencijalnim jednačinama su se sa uspehom bavili: Tadija Pejović, a zatim Milorad Bertolino, Časlav Đaja, Vojislav Marić, Vojislav Avakumović i Ostoja Rakić.

4 Literatura

[1] Belajčić Dušan, Diferencijalne jednačine, elementi teorije i zadaci sa rešenjima, Naučna knjiga, Beograd, 1992.

[2] Bertolino Milorad, Metode primenjene analize,Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd, 1970.

[3] Božičković Nataša, Poša Mihalj, Popović Jovan, Praktikum vežbi iz farmakokinetike, Medicinski fakultet Novi Sad, 2008.

[4] Goldvin Bill, Engineering Diferential Eqations, Springer Science,Busines media , New York, 2011.

[5] Hadžić Olga, Takači Đurđica, Matematika za studente prirodnih nauka,Univerzitet u Novom Sadu 1998.

[6] Kečkić Jovan, Nikčević Stana, Matematika, jednogodišnji kurs, Trilenium, Beograd, 2002.

[7] Krunić Slavko, Diferencijalne jednačine-obrada u mašinskoj školi, specijalistički rad, Novi Sad 2008.

[8] Marić Vojislav, Budinčević Mirko, Diferencijalne i diferencne jednačine, Univerzitet u Novom Sadu 2005.

[9] Marić Vojislav, Kovačević Ilija, Novković Momčilo, Obične diferencijalne jednačine, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, 1998.

[10] Rašajski Borivoje, Teorija običnih diferencijalnih jednačina, Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd 1970.

[11] Raymond A. Barnett, Michael R. Zigler, Karl E. Byleen, Applied mathematics for business, economics life sciences, and social sciences, Pearson Education, Inc, publishing as Prentice Hall 2003.

[12] Sasser E. John, History of Ordinary Differential Eqations, The first 100 Years, Modern Logic Publishing, Miami University, Oxford, Ohio,1997.

[13] Šćepanović Radoje, Knežević-Miljanović Julka, Protić Ljubomir, Diferencijalne jednačine, Vesta Company, Beograd, 1997.

[14] Vulanović Relja, Herceg Dragoslav, Numerička analiza, teorija, zadaci i programi, Viša škola za organizaciju rada, Novi Sad, 1994.

5 PREGLED OZNAKA

$\mathbb{R}$	- skup realnih brojeva
(a,b)	- otvoren interval realnih brojeva između brojeva a i b
$[a,b]$	- zatvoren interval realnih brojeva između brojeva a i b
$\square$	- kraj definicije
$\blacksquare$	- kraj teoreme ili kraj dokaza teoreme
p	-ravnotežna cena nekog proizvoda (u ekonomiji)
k_{10}	-treba čitati "k jedan nula", konstanta eliminacije leka (u farmaciji)
Δ	- diferencijalni operator
$y^{(n)}$	- n-ti izvod funkcije y
$G_{a,b}(x_0,y_0)$	-skup $\{(x,y) \mid \lvert x-x_0\rvert \le a, \lvert y-y_0\rvert \le b\}$
$C_{(a,b)}$	-skup neprekidnih funkcija na intervalu (a,b)
$C_{[a,b]}$	-skup neprekidnih funkcija na intervalu $[a,b]$
G	-skup $\{(x,y) \mid x\in[a,b], y\in[\alpha,\beta]\}$ (ako nije drugačije rečeno)
I_y	-interval rešenja oblika $y(x)$ diferencijalne jednačine $y' = F(x,y)$
$M(x,y)$	- homogena funkcija promenljivih x i y
$f(x,C_1,C_2,...,C_n)$	- oznaka za opšte rešenje diferencijalne jednačine n-tog reda
$W(x)$ W(x)	- determinanta Vronskog (Vronskijan)

6 Biografija

Rođen sam 22.2.1951. u mestu Unač, opština Plužine, Republika Crna Gora. Osnovnu školu sam završio u svom mestu, gimnaziju u Foči, a zatim Višu pedagošku školu, grupa za matematiku u Zrenjaninu 1971. godine. Diplomirao sam na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, grupa matematika 1977. godine. Specijalističke studije metodike nastave matematike završio sam 2008. godine odbranom rada “Diferencijalne jednačine- obrada u mašinskoj školi”. Školske 2009/2010. upisao sam diplomske akademske studije "diplomirani matematičar-master". Od školske 1974/1975. godine radio sam u gimnaziji “Sava Šumanović” u Šidu a zatim u školi zajedničkog srednjeg obrazovanja i vaspitanja “25. maj” u Vrbasu. Sada radim u Srednjoj mašinskoj školi u Novom Sadu.Radio sam i kao saradnik u školi za matematičke talente “Integral” školske 1997/1998. godine.

Oženjen sam, imamo ćerku i sina.

Novi Sad, juna 2012. Slavko Krunić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije:
TD Monografska dokumentacija
Tip zapisa:
TZ Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada:
VR Master rad
Autor:
AU Slavko Krunić
Mentor:
MN dr Dragoslav Herceg
Naslov rada:
NR Neke obične diferencijalne jednačine sa primenama-metodička obrada
Jezik publikacije:
JP srpski (latinica)
Jezik izvoda:
JI srpski/engleski
Zemlja publikovanja:
ZP Srbija
Uže geografsko područje:
UGP Vojvodina
Godina:
GO 2012.
Izdavač:
IZ Autorski reprint
Mesto i adresa:
MA Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Fizički opis rada:
FO
Naučna oblast:
NO Metodika matematike
Naučna disciplina:
ND Metodika nastave matematike
Predmetna odrednica/ ključne reči:
PO
UDK Diferencijalne jednačine, rešenje, matematički model
Čuva se:
ČU Biblioteka departmana za matematiku , PMF-a u Novom Sadu
Važna napomena:
VN Izvod: Tema ovog master rada su neke osnovne vrste običnih diferencijalnih jednačna prvog i drugog reda.Nakon uvođenja pojma i uslova egzistencije rešenja,obrađeni su pojedini tipovi i urađeni odabrani zadaci iz matematike i primene bez računara i uz njegovu upotrebu.
Izvod:
IZ

Datum prihvatanja teme od NN veća: 7. 12. 2011.
DP 2011.
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik:dr Mirko Budinčević, redovni profesor PMF u Novom Sadu
član: dr Dragoslav Herceg, redovni profesor PMF u Novom Sadu
član: dr Aleksandar Pavlović, docent PMF u Novom Sadu

FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type:
DT Monograph publication
Type of record:
TR Textual printed material
Content code: Master operation
CC
Author: Slavko Krunić
AU
Mentor/comentor: Dragoslav Herceg, Ph.D
MN
Title: Some ordinary diferential eqations with aplications-methodical treatment
TI
Language of text:
LT Serbian (Latin)
Language of abstract:
LA Serbian and English
Country of publication:
CP Serbia
Locality of publication:
LP Vojvodina
Publication year:
PY 2012th.
Publisher:
PU Author's reprint
Publication place:
PP University of Novi Sad,Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Physical description:
PD 5/182/32/0/71/0/3
Scientific field:
SF Mathematics
Scientific discipline:
SD Theacing of mathematics
Subject/ Key words:Diferential eqations,solution of the mathematical model
SKW
UC
Holding data:
HD Library of Department of Mathematics and Informatics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Note:
N none

Abstract: The topics of this master thesis are some basic types of first order ordinary diferential eqations. After the introduction of the term and conditions of existence of solutions certian of types of tasks from mathematics have been processed and made. The are selected and applied without a computer and with its use.
AB

Accepted by the Scientific Board: 7. 12. 2011.
ASB
Defended on:
DE
Thesis defend board:
DB
President: Mirko Budinčević, Ph.D, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:Dragoslav Herceg, Ph.D, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Aleksandar Pavlović, Ph.D, docent, Faculty of Sciences, University of Novi Sad