Univerzitet u Novom Sadu,
Prirodno–Matematički Fakultet,
Departman za Matematiku i Informatiku

PRIMENA KOMPLEKSNIH BROJEVA U ANALITIČKOJ GEOMETRIJI, ALGEBRI I ANALIZI

Master rad

Autor: Siniša Feher

Mentor: prof. dr Arpad Takači

Novi Sad, 27. juni 2017

Sadržaj

PREDGOVOR

Oblast matematike kompleksni brojevi je izuzetno široka. Odavno je poznata izreka "najkraći put u realnom domenu je kroz kompleksni domen". Ova izreka na najslikovitiji način odslikava ideju ovog master rada.

U radu je obradjeno nekoliko matematičkih tema uz pomoć metoda u kojima se primenjuju kompleksni brojevi.

Osim osnovnih definicija i istorijskog osvrta na nastanak pojma kompleksnog broja prikazana je primena ovih brojeva, na elementarnom nivou, u nekoliko oblasti matematike.

Sistematično izloženo i po poglavljima je obradjeno:

U prvom poglavlju je dato istorijsko nastajanje kompleksnog broja i motivi koji su proizašli prvenstveno iz rešavanja algebarskih jednačina. Sam pojam kompleksnog broja je neodvojivo vezan za rešavanje algebarskih jednačina uz pomoć "radikala".

U drugom poglavlju je dato nekoliko elementarnih definicija koje utvrdjuju strukturu polja kompleksnih brojeva.

U trećem poglavlju obradjene su jednačine prave, kruga, elipse i hiperbole. Poseban osvrt je dat na Apolonijevu kružnicu. U ovom poglavlju je obradjeno nekoliko problema koji pokazuju efikasnost primene kompleksnog broja na rešavanje geometrijskih problema u ravni. Tačnije ovde je prvenstveno ukazana prednost kompleksnih brojeva u rešavanju problema koji zahtevaju "rotacije". Same rotacije u analitičkoj geometriji su analitički zahtevne! U ovom poglavlju je dokazano i nekoliko teorema vezanih za planimeriju, dokazi su direktno implicirani algebarskim operacijama sa kompleksnim brojevima.

U četvrtom poglavlju obradjena je primena kompleksnih brojeva na izračunavanje zbirova i proizvoda trigonometrijskih funkcija. Ova oblast pokazuje snagu i efikasnost kompleksnih brojeva u punom kapacitetu. Naime, standardne metode bez upotrebe ove metode su uglavnom mnogo zahtevnije i zahtevaju mnoštvo trigonometrijskih transformacija i domišljatosti da bi se došlo do željenog rešenja. U nekoliko primera je pokazano koliko je efikasno kombinovanje algebre sa kompleksnim brojevima u cilju dobijanja vrednosti trigonometrijskih funkcija za ne tipične vrednosti uglova. Kao još jednu primenu kompleksnog broja u algebri obrazloženo je na koji način možemo rešavati trigonometrijske jednačine.

U petom poglavlju prikazana je primena Ojlerovog oblika kompleksnog broja na rešavanje nekoliko tipova integrala. U primeru 2 je jedan integral rešen na više načina iz razloga "uporedjivanja jednostavnosti".

Poglavlje šest je rezervisano za vezu nejednakosti i kompleksnih brojeva. U dva primera je dokazana nejednakost za trougao dok su u ostala tri primera date nejednakosti koje utvrdjuju veze izmedju kompleksnih brojeva.

U sedmom poglavlju su dati primeri takmičarskih zadataka koji uglavnom ilustruju primenu kompleksnih brojeva na planimetriju. Zadaci su pažljivo izabrani sa ciljem da iskažu pun kapacitet kompleksnih brojeva.

U osmom poglavlju je dokazana fundamentalna teorema algebre (osnovna teorema algebre) koja predstavlja jedan od najznačajnijih rezultata u matematici.

* * *

Ovim putem bih da se zahvalim svom mentoru dr. Arpadu Takačiju i profesorici dr. Djurdjici Takači na svim stručnim savetima, sugestijama i primedbama u toku pripreme ovog master rada. Takodje se zahvaljujem i članovima komisije dr. Nenadu Teofanovu i dr. Milici Žigić.

Veliku zahvalnost dugujem i svojoj porodici i prijateljima na podršci tokom osnovnih i master studija.

Takodje se zahvaljujem i kolegama Draganu Rukavini, Veliboru Željiu, Slavici Zečević, Siniši Mišoviću, Stanku Crnobrnji na pomoći u pripremanju ispita, kompjuterskoj, lektorskoj i svakoj drugoj podršci.

Profesori koje nikako ne mogu da izostavim su dr. Aleksandar Pavlović prvi koga sam upoznao na fakultetu i koji mi je dao sve informacije, savete i uvek bio dostupan za bilo koji problem, kao i dr. Neveni Pušić na razumevanju i svakoj pomoći pri izboru mentora i prilikom studiranja.

Novi Sad, jun 2017.

Siniša Feher

1 ISTORIJA KOMPLEKSNIH BROJEVA

Kompleksni brojevi su se pojavili usled potrebe da se reše kubne jednačine, a ne kvadratne kao što je ustaljeno verovanje. Ovu tvrdnju možemo potkrepiti istorijskim činjenicama.

Abu Abdula Muhamed bin Musa Al-Huarizmi (780-850) u svom delu Algebra nudi rešenja za kvadratne jednačine različitih tipova. Ta rešenja se poklapaju sa onim koje se danas uče u školama, odnosno striktno su ograničena na pozitivna rešenja. Dokazi su geometrijske prirode. Kao izvore najverovatnije je koristio grčka i indijska matematička otkrića. Prema rečima G. J. Trumera, pod kalifom Al Mamunom, Al-Huarizmi je postao član "Kuće Mudrosti" (Dar al-Hikma), odnosno preteče modernih akademija nauka koja je bila osnovana u Bagdadu. "Kuća Mudrosti" je verovatnije osnovana od strane kalifa Haruma al-Rašida, medjutim svoj visok status duguje al-Mamunu, velikom pokrovitelju obrazovanja i nauke. Upravo je za al-Mamuna al-Huarizmi napisao svoj astronomski esej, a i sama Algebra je takodje posvećena ovom vladaru.

Algebarske metode koje su već bile poznate arapima su u Italiju uvedene putem latinskog prevoda Algebre Al-Huarizmija od strane Gerarda od Kremone (1114-1187), kao i kasnije kroz radove Leonarda iz Pize (1170-1250), poznatijeg kao Fibonači.

Oko 1225, za vreme predsedavanja Fredrika II na Siciliji, Leonardo iz Pize je doveden pred cara. Lokalni matematičar je njemu postavio nekoliko problema, koje je Leonardo uspeo da reši. Jedno od tih problema je bilo i rešenje jednačine

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

Uopštena kubna jednačina

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

se može svesti na jednostavniju formu

$$x^3 + px + q = 0$$

smenom promenljive $x' = x + \frac{1}{3}a$. Ova smena promenljive se prvi put javlja krajem 14-og veka u dva anonimna manuskripta iz Firence.

Ako se uvrste jedino pozitivni koeficijenti i pozitivne vrednosti promenljive x, javljaju se tri slučaja koji se zajedno nazivaju nepravim kubnim jednačinama

(1)

$$x^3 + px = q$$

(2)

$$x^3 = px + q$$

(3)

$$x^3 + q = px$$

Prvi koji je rešio jednačinu (1) (a možda i (2) i (3)) je bio Scipione del Fero, profesor na Univerzitetu u Bolonji do svoje smrti 1526. godine. Na svojoj samrtničkoj postelji, del Fero je formulu poverio svom učeniku Antoniju Mariji Fioreu. Fiore je izazvao Tartalju na matematičko takmičenje i noć pre tog okršaja, Tartalja je takodje ponovo otkrio tu formulu i pobedio na takmičenju. Nakon toga je Tartalja formulu (ali ne i njen dokaz) predočio Djerolamu Kardanu, koji se zakleo na tajnost. Znajući formulu, Kardano je uspeo da rekonstruiše dokaz. Kasnije je Kardano saznao da je del Fero znao formulu i on je to potvrdio intervjuišući rodjake koje su mu dali uvid u Ferove dokumente. Kardano je tada formule za sva tri slučaja objavio u knjizi Ars Magna 1545. godine. Vredi pomenuti da je Kardano naveo del Fera kao prvog autora, i Tartalju kao nekoga koje uspeo da kasnije dodje do formule nezavisno od njih dvojice.

Otežavajuća okolnost u slučaju (2) koja nije prisutna u rešenju slučaja (1) je mogućnost javljanja kvadratnog korena negativnog broja unutar numeričkog izraza koji daje formula. Izvodjenje je sledeće: smenom $x = u + v$ u $x^3 = px + q$ se dobija

$$x^3 - px = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) - p(u + v) = q$$

Postaviti $3uv = p$ iznad kako bi se dobilo $u^3 + v^3 = q$ i, takodje, $u^3v^3 = (\frac{p}{3})^3$. Odnosno, zbir i proizvod dva kuba su poznati. Ovo se koristi kako bi se formirala kvadratna jednačina koja je laka za rešavanje:

$$x = u + v = \sqrt{\frac{1}{2}q + \omega} + \sqrt{\frac{1}{2}q - \omega}$$

gde je

$$\omega = \sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 - (\frac{1}{3}p)^3}$$

Takozvani nesvodljivi slučaj (casus irreducibilis, latinski) se javlja kada je izraz ispod korena u izrazu ω negativan. Kardano je izbegao raspravu o ovom slučaju u Ars Magni. Možda je, po njegovoj logici, ovo izbegavanje i bilo opravdano (netačnim) poklapanjem izmedju nesvodljivog slučaja i nedostatka pravog, pozitivnog rešenja za kub.

Kardano je bio prvi koji je uveo kompleksne brojeve $a + \sqrt{-b}$ u algebru, medjutim sumnjao je u tu svoju odluku. U Poglavlju 37 Ars Magne postavljen je sledeći problem: "Kako podeliti 10 na dva dela, tako da je proizvod ta dva dela 40?".

Kada postavimo ovaj zadatak imamo:

$$x + y = 10$$

$$xy = 40$$

Posle nekoliko transformacija:

$$y = \frac{40}{x}$$

$$x + \frac{40}{x} = 10$$

Dobijamo kvadratnu jednačinu:

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

Čija su rešenja:

$$x_1 = 5 + \sqrt{-15} \quad i \quad x_2 = 5 - \sqrt{-15}$$

Kako u to vreme nisu znali šta je to koren iz negativnog broja nisu znali šta da rade sa ovim rezultatom.

Rafael Bombeli je autor Algebre (L'Algebra), tri toma izdata izmedju 1572 i 1579. Bombeli uvodi notaciju za $\sqrt{-1}$ i naziva je "piu di meno". Razmatranje vezano za kubove u Algebri se nastavlja na Kardanoa, medjutim sada je nesvodljivi slučaj razmotren u potpunosti. Bombeli razmatra jednačinu

$$x^3 = 15x + 4$$

za koju Kardanoova formula daje

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Bombeli primećuje da je rešenje kubne jednačine $x = 4$, i zatim tumači izraz izveden Kardanovom formulom kao još jedan izraz za $x = 4$ na sledeći način. On postavlja jednakost

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + bi$$

iz koje zakljucuje da je

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - bi$$

i dobija, putem algebarskih transformacija, $a = 2$ i $b = 1$. Stoga je

$$x = a + bi + a - bi = 2a = 4$$

Nakon ove procedure, Bombeli naglašava:

"Iz prva mi se činilo da je ovo verovatnije zasnovano na sofizmu nego na istini, medjutim ja sam tragao sve dok nisam našao dokaz."

Rene Dekart (1596-1650) je bio filozof čije delo, Geometrija (La Geometrie, fran), uključuje i njegovu primenu algebre na geometriju, iz koje potiče moderna Kartezijanska geometrija. Dekarta su prijatelji podstrekivali da objavi svoje radove i on je napisao esej o nauci pod naslovom 'Diskusija o metodi za dobrim vodjenjem razumom i potrage za istinom u naukama' . Postojala su tri dodatka ovom delu, Dioptrija, Meteori i Geometrija. Esej je objavljen u Lajdenu 1637. godine. Dekart je povezivao imaginarne brojeve sa geometrijskom nemogućnošću. Ovo se može videti iz geometrijske konstrukcije koju je upotrebio da reši jednačinu $z^2 = az - b^2$, gde su promenljive a i b^2 obe pozitivne. Dekart je uveo reč imaginaran:

'Za bilo koju jednačinu možemo zamisliti onoliko korena koliko to njen stepen dopušta, medjutim u mnogim slučajima nema te količine koja odgovara onome što možemo zamisliti'.

Džon Volis (1616-1703) u svom delu Algebra primećuje da negativni brojevi, što je dugo bilo vidjeno sa sumnjom od strane matematičara, imaju savršeno dobro fizičko objašnjenje bazirano na liniji sa označenom nulom, gde su negativni brojevi oni sa leve strane te nule, a pozitivni oni sa desne strane. On je takodje načinio neke korake ka davanju geometrijske interpretacije korenu -1.

Abraham de Moavr (1667-1754) je napustio Francusku sa 18 godina kako bi našao religijsko utočište u Londonu, gde je postao prijatelj sa Njutnom. 1698. godine on pominje da je Njutn znao za verziju onog što mi danas nazivamo de Moavrovom teoremom čak od 1676. godine:

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

gde je n celobrojna vrednost. Očigledno je Njutn koristio ovu formulu za proračune kvadratnih korena koji se javljaju u Kardanoovim formulama, u nesvodljivom slučaju. De Moavr je bio upoznat sa i koristio formulu koja danas nosi njegovo ime, što je jasno iz njegovih spisa uprkos tome što on tu formulu nije nikada eksplicitno ispisao.

L. Ojler (1707-1783) je uveo notaciju $i = \sqrt{-1}$, i grafički prikazao kompleksne brojeve kao tačke sa trougaonim koordinatama, medjutim on ipak nije dao zadovoljavajuće utemeljenje što se tiče kompleksnih brojeva. Ojler je koristio formulu $x + iy = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, i grafički je predstavio korene od $z^n = 1$ kao vektore pravouglog mnogougla. On je definisao kompleksni eksponent i dokazao identitet $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Kaspar Vesel (1745-1818), Norvežanin, je bio prvi čovek koji je došao do prikladnog prikaza kompleksnih brojeva i objavio ga. Desetog marta 1797. godine Vesel je svoj rad pod nazivom "O analitičkom prikazu smera" koji je prezentovao Danskoj Kraljevskoj Akademiji Nauka. Rad je objavljen u Akademijinim Memoarima iz 1799. Kvalitet rada je toliko visoko ocenjen da je ujedno postao i prvi naučni rad koji je izdao izdavač koji nije član akademije.

Veselov rad, napisan na danskom, je ostao neprimećen do 1897. godine, kada ga je pronašao antikvar i kada je njegovu vrednost prepoznao danski matematičar Sofus Kristian Juel.

Veselov pristup je koristio ono što mi danas nazivamo vektorima. On koristi geometrijsko sabiranje vektora (zakon paralelograma) i definisano množenje vektora u smislu onoga sto danas nazivamo sabiranjem polarnih uglova i množenjem magnituda.

Žan-Rober Aržan (1768-1822) je bio knjigovodja iz Pariza, i nije poznato da li je bio matematički obučen. 1806 Aržan je izdao letak u slobodnoj štampi i ograničenom tiražu, i pri tome se nije potpisao. Naslov je bio "Esej o geometrijskoj interpretaciji imaginarnih veličina". Jedna od kopija je završila u rukama matematičara A.Ležendra (1752-1833), koji dati esej spominje u pismu Fransoi Francesu, profesoru matematike. Posle Fransoove smrti, njegove spise nasledjuje brat Jakes, matematičar i profesor ratne umetnosti. On je pronašaoLežendrovo pismo koje opisuje Aržanov matematički rezultat, medjutim Ležendr nigde ne spominje Aržana. Zakes izdaje članak 1813. godine u Analima Matematike (fran), gde opisuje osnove kompleksnih brojeva. U zadnjem paragrafu Jakes odaje priznanje Ležendrovom pismu, i poziva nepoznatog autora da se predstavi javnosti. Aržan je čuo za ovo i njegov odgovor je štampan u sledećem izdanju žurnala.

Vilijam Rovan Hamilton (1805-1865) je u svom memoaru iz 1831. godine definisao uredjene parove realnih brojeva (a,b) kao uredjen par. On je definisao sabiranje i množenje parova:

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ i $(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad)$.

Ovo je zapravo algebarska definicija kompleksnih brojeva.

Karl Fridrih Gaus (1777-1855). Postoje indicije da je Gaus u svom posedu imao geometrijsku reprezentaciju kompleksnih brojeva čak od 1796., ali ih nije objavio sve do 1831. godine; kada je svoje ideje dao na proveru

Kraljevskom Društvu Gotingena. Gaus je uveo termin kompleksni broj.

U pismu iz 1811. godine, Gaus Beselu pominje teoremu koja kasnije postaje poznata kao Košijeva teorema. Ovo nikada nije publikovano, nego je kasnije otkriveno od strane Košija i Vajerštrasa.

Augustin-Lui Koši (1789-1857) je započeo teoriju kompleksnih funkcija u memoaru iz 1814. godine, koji je predao Francuskoj Akademiji Nauka. Termin analitička funkcija nije pomenut u tom memoaru, medjutim sam koncept je tu. Memoar je objavljen 1925. godine. Integrali po konturama se takodje nalaze u memoaru, medjutim Poason je prvi 1820. godine objavio rad sa putanjom koja nije na realnoj liniji. Koši je konstruisao skup kompleksnih brojeva $\frac{R[x]}{x^2+1}$.

2 NEKE OZNAKE, DEFINICIJE

U ovom poglavlju definišemo kompleksne brojeve.

Definicija 1. *Skup svih kompleksnih brojeva u oznaci* $\mathbb{C}$ *je skup svih uredjenih parova* $Z = (x, y)$ *realnih brojeva za koje važe aksiome:*

a) *Aksioma sabiranja:* $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = ((x_1 + x_2), (y_1 + y_2))$

b) *Aksioma množenja:* $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

Definicija 2. *Kompleksan broj* $(0, 0)$ *zove se kompleksna nula, a broj* $(1, 0)$ *kompleksna jedinica.*

Definicija 3. *Suprotan broj proizvoljnog kompleksnog broja* (Z) *u oznaci* $(-Z)$ *je kompleksan broj takav da je:*

$$Z + (-Z) = (0, 0).$$

Definicija 4. *Recipročan broj kompleksnog broja* $Z \neq (0, 0)$ *u oznaci* $\frac{1}{Z}$, *je takav kompleksan broj za koji je:*

$$Z \cdot \frac{1}{Z} = (1, 0).$$

Teorema *Za proizvoljne kompleksne brojeve* Z_1, Z_2, Z_3 *važi da je:*

1) $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$

2) $Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1$

3) $(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$

4) $(Z_1 \cdot Z_2) \cdot Z_3 = Z_1 \cdot (Z_2 \cdot Z_3)$

5) $Z_1 + (0, 0) = Z_1$

6) $Z_1 \cdot (1, 0) = Z_1$

7) $Z_1 + (-Z_1) = 0$

8) $Z_1 \cdot \frac{1}{Z_1} = (1, 0)$; $Z_1 \neq (0, 0)$

9) $Z_1 \cdot (Z_2 + Z_3) = Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3$

Drugim rečima skup svih kompleksnih brojeva čini **polje** u odnosu na operacije $(+)$ i $(\cdot)$ to jest $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je polje.

Definicija 5. *Kompleksan broj* $(0, 1)$ *zove se imaginarna jedinica i označavamo je sa* i*.*

Definicija 6. Kompleksni brojevi se mogu pisati i na sledeći način:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, y) \cdot (0, 1) = x + iy.$$

Obično se kompeksan broj $x + iy$ označava sa Z, to jest $Z = x + iy$. To je takozvani **algebarski oblik** kompleksnog oblika. Realni broj x naziva se **realni deo** kompleksnog broja Z i označava se sa $x = ReZ$, a realni broj y naziva se **imaginarni deo** kompleksnog broja Z i označava se sa $z = ImZ$.

Definicija 7. *Ako je* $Z = x + iy$ *kompleksan broj, tada je* $\overline{Z} = x - iy$, *njemu konjugovano kompleksan broj.*

Definicija 8. *Neka je* $Z = x + iy$ *kompleksan broj. Posmatrajmo izraz:*

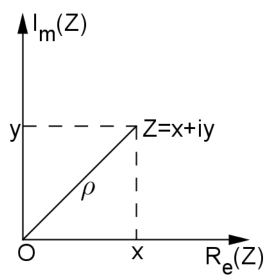
$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

odnosno

$$|Z| = Z\overline{Z}$$

$|Z|$ *se naziva* ***moduo*** *kompleksnog broja.*

Kompleksni brojevi su definisani kao uredjene dvojke, pa se za njihovo predstavljanje može koristiti ravan sa pravouglim koordinatnim sistemom.



Slika 2: Kompleksna ravan

Definicija 9. *Tačku Z sa Dekartovskim koordinatama (x, y) ćemo nazivati geometrijskom slikom kompleksnog broja $Z = (x, y)$ (ili $Z = x + iy$ u algebarskom obliku). Skup svih tačaka ravni koje identifikujemo sa kompleksnim brojevima nazivamo kompleksnom ravni, ili* ***Gausovom kompleksnom ravni****. Pošto se skup realnih brojeva pri ovakvoj identifikaciji preslikava na x osu nju nazivamo realnom osom, a skup čisto imaginarnih kompleksnih brojeva (za koje je $ReZ = 0$) se preslikava na z osu, pa je zato nazivamo imaginarnom osom.*

Definicija 10. *Argument kompleksnog broja Z u oznaci* $\arg(Z)$*, merni je broj konveksnog orijentisanog ugla čiji je prvi krak pozitivni deo realne ose, a drugi poluprava OZ, gde je $0 = 0 + 0i$ kompleksan broj O.*
Kako je merni broj konveksnog orijentisanog ugla uvek iz intervala $(-\pi, \pi]$, to jest $arg(Z) \in (-\pi, \pi]$, ekvivalentna definicija Argumenta kompleksnog broja bi bila: *Argument u oznaci* $\arg(Z)$ *je sirjektivna funkcija koja preslikava skup ne nula kompleksnih brojeva u interval realnih brojeva* $(-\pi, \pi]$ *odnosno:*

$$f(Z) = \arg(Z) : C \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi]$$

definisana sa

$$\arg(Z) = \arg(x + iy) = \begin{cases} arctan(\frac{x}{y}) & za \quad x > 0 \\ \pi + arctan(\frac{x}{y}) & za \quad x < 0 \land y \geq 0 \\ -\pi + arctan(\frac{x}{y}) & za \quad x < 0 \land y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & za \quad x = 0 \land y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & za \quad x = 0 \land y < 0 \end{cases}$$

Ukoliko na slici 2. definišemo ugao xOZ kao ugao φ tada iz osnovnih trigonometrijskih identiteta u pravouglom trouglu važe sledeće relacije:

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$x = \rho \cos \varphi.$$

Kako imamo da je $Z = x + iy$, onda važi da je:

$$Z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

tako smo dobili takozvani **trigonometrijski oblik** kompleksnog broja.

Na osnovu Ojlerove formule:

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

dobija se takozvani **eksponencijalni oblik** kompleksnog broja

$$Z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho \mathrm{e}^{i\varphi}$$

Obično se eksponencijalni oblik kompleksnog broja verifikuje preko razvoja funkcija $\cos(x)$ i $\sin(x)$ u stepeni red odnosno

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{ix} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\
\mathrm{e}^{ix} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\mathrm{e}^{ix} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i)^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i)^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
\mathrm{e}^{ix} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
\mathrm{e}^{ix} &= \cos x + i \sin x.
\end{aligned}$$

Za zadati broj rešenje jednačine $\omega^n = Z$ (n-ti koren kompleksnog broja Z) je višeznačna funkcija data sa:

$$\omega = \sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot (\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}), k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

Jasno, $\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{\rho}\mathrm{e}^{i(\frac{\varphi+2k\pi}{n})}, \quad k = \{0.1, ..., n\}$, videti glavu 8. lemu 2.

3 KOMPLEKSNI BROJEVI I ANALITIČKA GEOMETRIJA

Učenici se sa pojmovima prave, kruga, elipse i hiperbole upoznaju kroz analitičku geometriju čija je osnovna ideja da je lakše rešavati jednačine nego geometrijske probleme, što se realizuje uvodjenjem koordinata tačaka što omogućava jednoznačno preslikavanje izmedju tačaka i njihovih koordinata, predstavljanjem geometrijskih figura jednačinama i predstavljanjem jednačina geometrijskim figurama.

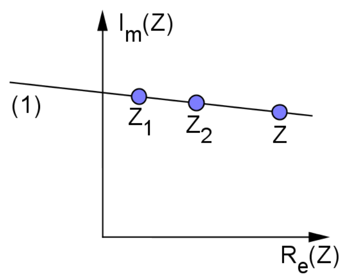
Jednačine prave, kruga, elipse i hiperbole mogu se interpretirati i uz pomoć kompleksnih brojeva čime se proširuju znanja stečena u okviru analitičke geometrije.

3.1 Analitička geometrija

Jednačina prave

Jednačine prave je odredjena dvema tačkama A i B. Smatra se da je čitalac upoznat sa jednačinom prave u Dekartovom koordinatnom sistemu. Za zadate tačke A i B, svaka tačka C na pravoj koja prolazi kroz A i B je linearna kombinacija tačaka A i B, odnosno postoji $t \in \mathbb{R}$ tako da je $C = tA + (t-1)B$.

Neka su Z_1, Z_2 dati kompleksni brojevi, ako se posmatra prava koja prolazi kroz Z_1 i Z_2 gde su Z_1 i Z_2 dati kompleksni brojevi i ako tačka Z pripada toj pravoj (slika 3), onda je jednačine prave (1) je istovetna formiranju vektorskog oblika jednačine prave u Dekartovom koordinatnom sistemu.



Slika 3: Proizvoljan kompleksan broj na pravoj

Broj $Z - Z_1$ proporcionalan broju $Z_2 - Z_1$ gde je faktor proporcionalnosti realan broj t, to jest: $(1) : Z - Z_1 = t(Z_2 - Z_1); \forall t \in \mathbb{R}$.

Poslednju jednačinu možemo transformisati uz pomoć algebarskog oblika kompleksnih brojeva:

$$\begin{aligned} Z &= x + iy \\ Z_1 &= x_1 + iy_1 \\ Z_2 &= x_2 + iy_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z - Z_1 &= t(Z_2 - Z_1) \\ (x + iy) - (x_1 + iy_1) &= t((x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)) \\ (x - x_1) + i(y - y_1) &= t((x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)). \end{aligned}$$

Izjednačavanjem realnog i imaginarnog dela dobijamo:

$$\begin{aligned} (x - x_1) &= t(x_2 - x_1) \\ (y - y_1) &= t(y_2 - y_1) \\ x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1)\ (parametarski\ oblik). \end{aligned}$$

Naravno eliminacijom parametra (t) dobijamo poznatu jednačinu prave kroz dve tačke:

iz sistema

$$\begin{cases} x - x_1 = t(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

sledi,

$$\begin{cases} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = t \\ \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = t \end{cases}$$

pa je

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

odnosno

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Iz oblika jednačine prave:

$$Z - Z_1 = t(Z_2 - Z_1)$$

dobijamo:

$$\frac{Z - Z_1}{Z_2 - Z_1} = t \in \mathbb{R}.$$

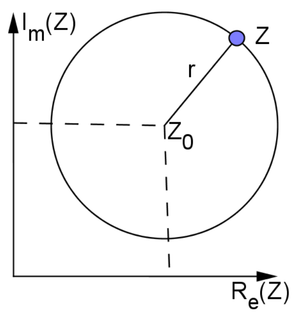
Kružnica

Krive drugog reda (kružnica, elipsa, hiperbola i parabola), imaju jednostavne definicije u kojima se koriste samo udaljenost od zadatih tačaka (tačke) ili prave. Samim tim jednačine pomenutih krivih je lako definisati imajući u vidu da je udaljenost dveju tačaka u kompleksnoj ravni jednaka modulu razlike odgovarajućih kompleksnih brojeva

$$d(Z_1, Z_2) = |Z_1 - Z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

što ćemo koristiti u interpretaciji kružnice.

Definicija 11. *Kružnicu čine sve tačke ravni čija je udaljenost od jedne fiksne tačke (centra) konstantna.*



Slika 4: Kružnica u kompleksnoj ravni

Neka je dat centar kruga $Z_0 = x_0 + iy_0$.
Neka je dat r poluprečnik kružnice.

Ako je Z proizvoljan kompleksan broj na kružnici sa centrom u Z_0, poluprečnika r imamo:

$$\begin{aligned}
k :& |Z - Z_0| = r \\
k :& |(x + iy) - (x_0 + iy_0)| = r \\
k :& |(x - x_0) + i(y - iy_0)| = r \\
k :& \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \\
k :& (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.
\end{aligned}$$

Ovo je poznata relacija iz analitičke geometrije.

Jednačina kružnice se može zapisati i u nekim drugim oblicima:

$$\begin{aligned}
k :&|Z - Z_0| = r \\
k :&|Z - Z_0|^2 = r^2 \\
k :&(Z - Z_0)(\overline{Z - Z_0}) = r^2 \\
k :&(Z - Z_0)(\overline{Z} - \overline{Z_0}) = r^2 \\
k :&Z\overline{Z} - Z\overline{Z_0} - \overline{Z_0}Z + Z_0\overline{Z_0} = r^2 \\
k :&|Z|^2 - Z\overline{Z_0} - \overline{Z_0}Z + |Z_0|^2 - r^2 = 0 \\
k :&|Z|^2 - Z\overline{Z_0} - \overline{Z_0}Z + \beta = 0; \quad \beta = |Z_0|^2 - r^2.
\end{aligned}$$

Ovo je jednačina kružnice sa centrom u Z_0 i poluprečnikom r.

Prethodnu jednačinu možemo transformisati:

$$\begin{aligned}
k :&|Z|^2 - (Z\overline{Z_0} + Z_0\overline{Z}) + \beta = 0 \\
k :&|Z|^2 - (Z\overline{Z_0} + \overline{\overline{Z_0}Z}) + \beta = 0 \\
k :&|Z|^2 - 2 \cdot R_e(\overline{Z_0}Z) + \beta = 0
\end{aligned}$$

Kompleksni brojevi se mogu primeniti i u rešavanju drugih problema vezanih za kružnicu.

Problem odredjivanja jednačine kružnice koja prolazi kroz tri tačke rešava se u analitičkoj geometriji ali se može rešiti i primenom kompleksnih brojeva što ćemo pokazati u sledećem zadatku.

Zadatak *Odrediti jednačinu kružnice koja prolazi kroz tri zadate tačke.*

Rešenje. Analitičko rešenje sledi geometrijsku konstrukciju: potrebno je pronaći jednačine dve stranice, njihova središta, postaviti jednačine simetrala stranica, odrediti njihov presek, a zatim udaljenost ovog preseka od jednog od datih temena.

Ovde će biti izložen analitički metod uz primenu kompleksnih brojeva. Krećemo od jednačine proizvoljne kružnice sa centrom u a i poluprečnikom r:

$$k : |Z|^2 - \overline{a}Z - a\overline{Z} + \beta = 0,$$

gde je $\beta = |a|^2 - r^2$,

$$k : Z\overline{Z} - \overline{a}Z - a\overline{Z} + \beta = 0$$

Ovoj kružnici pripadaju tačke: Z_1, Z_2 i Z_3 t.j.

$$S : \begin{cases} Z_1\overline{Z_1} - \overline{a}Z_1 - a\overline{Z_1} + \beta = 0 \\ Z_2\overline{Z_2} - \overline{a}Z_2 - a\overline{Z_2} + \beta = 0 \\ Z_3\overline{Z_3} - \overline{a}Z_3 - a\overline{Z_3} + \beta = 0 \end{cases}$$

Odnosno

$$S : \begin{cases} \overline{a}Z_1 + a\overline{Z_1} - \beta = |Z_1|^2 \\ \overline{a}Z_2 + a\overline{Z_2} - \beta = |Z_2|^2 \\ \overline{a}Z_3 + a\overline{Z_3} - \beta = |Z_3|^2 \end{cases}$$

Ovaj sistem treba da bude odredjen po nepoznatim veličinama: $\overline{a}$, a i β. Sistem (S) ima rešenje ako je $D \neq 0$:

$$D = \begin{vmatrix} Z_1 & \overline{Z_1} & -1 \\ Z_2 & \overline{Z_2} & -1 \\ Z_3 & \overline{Z_3} & -1 \end{vmatrix}.$$

Broj (a) (centar kružnice) koji je rešenje ovog sistema može se iskazati formulom:

$$a = \frac{D_1}{D}$$

gde je:

$$D_1 = \begin{vmatrix} Z_1 & |Z_1|^2 & -1 \\ Z_2 & |Z_2|^2 & -1 \\ Z_3 & |Z_3|^2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Nepoznatu veličinu (β) dobijamo kao:

$$\beta = \frac{D_2}{D}$$

gde je:

$$D_2 = \begin{vmatrix} Z_1 & \overline{Z_1} & |Z_1|^2 \\ Z_2 & \overline{Z_2} & |Z_2|^2 \\ Z_3 & \overline{Z_3} & |Z_3|^2 \end{vmatrix}.$$

Na taj način je odredjena jednačina kružnice definisana sa tri nekolinearne tačke.

Uslov da je $(D = 0)$ bi predstavljao uslov kolinearnosti tačaka Z_1, Z_2 i Z_3 (tačnije ne bi bilo moguće odrediti kružnicu sa parametrima (a) i (β)).

Apolonijeva definicija kružnice

Interesantno je napomenuti da je jedna od prvih definicija kružnice već gotovo zaboravljena. Starogrčki matematičar Apolonije kružnicu je definisao kao skup svih tačaka u ravni čiji je odnos udaljenosti od dve fiksne tačke konstantan! (i različit od 1).

Na jeziku kompleksnih brojeva, to je skup svih tačaka kompleksne ravni koje zadovoljavaju jednačinu:

$$k : |Z - Z_1| = k|Z - Z_2|; \quad k \neq 1 \wedge k > 0.$$

Dokazaćemo da je prethodna jednačina zaista jednačina kružnice!
Polazimo od date jednačine:

$$k : |Z - Z_1| = k|Z - Z_2|$$

Nakon kvadriranja dobijamo:

$$\begin{aligned}
k :& |Z - Z_1|^2 = k^2|Z - Z_2|^2 \\
k :& (Z - Z_1)(\overline{Z - Z_1}) = k^2(Z - Z_2)(\overline{Z - Z_2}) \\
k :& (Z - Z_1)(\overline{Z} - \overline{Z}_1) = k^2(Z - Z_2)(\overline{Z} - \overline{Z}_2) \\
k :& Z\overline{Z} - Z\overline{Z}_1 - Z_1\overline{Z} + Z_1\overline{Z_1} = k^2(Z\overline{Z} - Z\overline{Z}_2 - Z_2\overline{Z} + Z_2\overline{Z_2}) \\
k :& |Z|^2 - Z\overline{Z_1} - Z_1\overline{Z} + |Z_1|^2 = k^2(|Z|^2 - Z\overline{Z_2} - Z_2\overline{Z} + |Z_2|^2) \\
k :& (1 - k^2)|Z|^2 - (\overline{Z_1} - k^2\overline{Z^2}) - (Z_1 - k^2Z_2)\overline{Z} + |Z1|^2 - k|Z_2|^2 = 0 \\
k :& |Z|^2 - \frac{(\overline{Z_1} - k^2\overline{Z^2})}{1 - k^2}Z - \frac{(Z_1 - k^2Z_2)}{1 - k^2}\overline{Z} + \frac{|Z1|^2 - k|Z_2|^2}{1 - k^2} = 0 \\
k :& |Z|^2 - \overline{a}Z - a\overline{Z} + \beta = 0
\end{aligned}$$

Usvojene su oznake: $a = \frac{(\overline{Z_1} - k^2\overline{Z^2})}{1-k^2}; \quad \beta = \frac{|Z1|^2 - k|Z_2|^2}{1-k^2}.$

Poslednja jednačina predstavlja jednačinu kružnice sa centrom u (a) i poluprečnikom $r = \sqrt{|a|^2 - \beta}$.

Elipsa i hiperbola

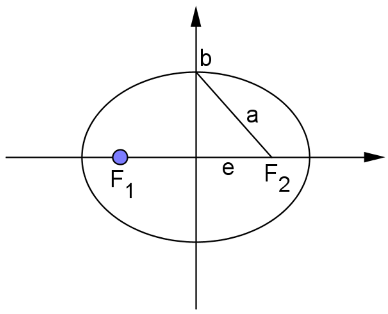
Jednačine elipse i hiperbole možemo izvesti pozivajući se na njihovu geometrijsku interpretaciju.

Definicija 12. *Elipsa je skup svih tačaka čiji je zbir udaljenosti od dve fiksne tačke F_1 i F_2 (žiže elipse) konstantan.*

Neka su koordinate žiže (F_1 i F_2):

$$F_1(-e, 0); \quad F_2(e, 0),$$

odnosno $F_1 = -e + 0i$, $F_2 = e + 0i$ što je prikazano na slici 5.



Slika 5: Elipsa

Sada je očigledno da elipsu predstavlja skup tačaka Z koje zadovoljavaju jednačinu:

$$\epsilon : |Z - F_1| + |Z - F_2| = 2a$$

Zamenom: $(Z = x + iy)$

$$\epsilon : |x + iy + e| + |x + iy - e| = 2a$$

odakle nakon dvostrukog kvadriranja dobijamo:

$$\epsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad b^2 = a^2 - e^2$$

Naravno same žiže F_1 i F_2 ne moraju da se nalaze na realnoj osi. Generalno jednačina elipse može biti zadata sa:

$$\epsilon : |Z - F_1| + |Z - F_2| = 2a$$

Uz uslov da je $2a > |F_2 - F_1|$, gde su F_1 i F_2 zadate žiže elipse.

Sve što je rečeno za elipsu može se reinterpretirati na hiperbolu.

Definicija 13. *Hiperbola je skup tačaka ravni čija je apsolutna vrednost udaljenosti od dve fiksne tačke F_1 i F_2 (žiže hiperbole) konstantan i iznosi $2a$.*

Jednačina hiperbole je zadata sa:

$$|Z - F_1| + |Z - F_2| = \mp 2a$$

Izbor pojedinog predznaka sa desne strane daje nam tačke sa jedne strane hiperbole. Kod hiperbole je nužan uslov: $2a < |F_1 - F_2|$.

3.2 Kompleksnim brojevi i geometrija u ravni

Metrički odnosi i koordinate tačaka u ravni mogu se ilustrovati primenom rotacije kompleksnih brojeva i korenovanja kompleksnih brojeva što je izloženo u sledećim zadacima preuzetim iz [21], [22] i [23].

Ako su dati $Z = \rho e^{i\varphi}$ i $\omega = re^{i\theta}$ onda je

$$Z \cdot \omega = \rho e^{i\varphi} \cdot re^{i\theta} = \rho re^{i(\varphi+\theta)}.$$

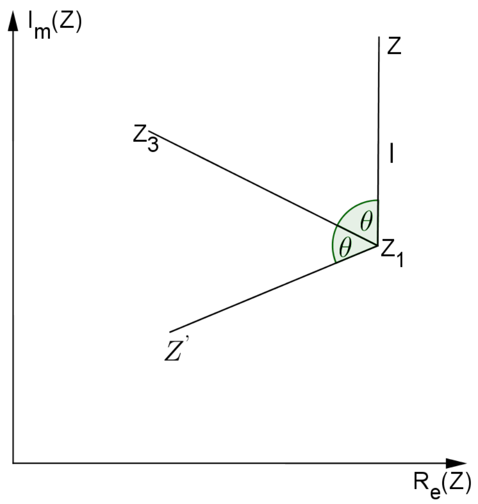
Vidimo da se proizvod može dovesti u vezu sa rotacijom oko Z za ugao θ.

Zadatak 1 Neka su Z_1 i Z_3 kompleksni brojevi i neka je l realan broj i θ ugao takvi da važi: $l \geq 0$ i $\theta \in (0, \pi]$.

a) U zavisnosti od Z_1, Z_3, θ, l izraziti kompleksan broj (Z) za koji važi $|Z - Z_1| = l$ i $\angle Z_3 Z_1 Z = \theta$.

b) Ako su Z_1 i Z_3 temena pravilnog šestougla $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6$ koja pripadaju njegovoj kraćoj dijagonali, izraziti temena Z_2, Z_4, Z_5, Z_6 u zavisnosti od Z_1 i Z_3.

Rešenje. *a*)



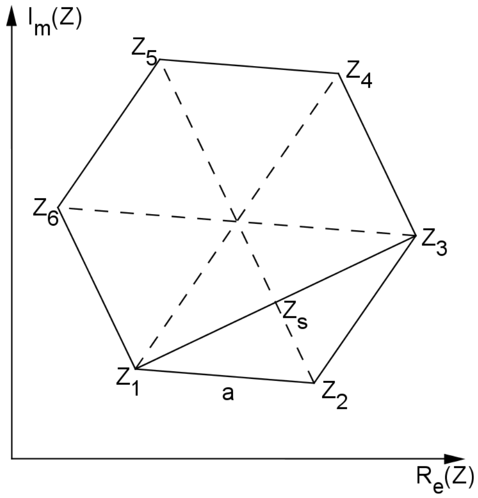
Slika 6: Šestougao, dva moguća rešenja

Sa slike 6. uočavamo da za zadati ugao θ možemo dobiti dve vrednosti Z i $\acute{Z}$. Rotacija oko Z_1 za uglove $-\theta$ i θ vektora $\frac{Z_3 - Z_1}{|Z_3 - Z_1|}$ se vrši uz pomoć eksponencijalnog oblika kompleksnog broja, pa su rešenja:

$$Z = Z_1 + \frac{(Z_3 - Z_1)}{|Z_3 - Z_1|} \cdot l \cdot e^{-i\theta}$$

$$\acute{Z} = Z_1 + \frac{(Z_3 - Z_1)}{|Z_3 - Z_1|} \cdot l \cdot e^{i\theta}$$

b) Sa slike 7. uočavamo sledeće relacije:



Slika 7: Šestougao u kompleksnoj ravni

$$|Z_3 - Z_1| = 2\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{\sqrt{3}|Z_3 - Z_1|}{3}$$

$$Z_s = \frac{1}{2}(Z_1 + Z_3)$$

Ako sa α označimo središte kružnice opisane oko pravilnog šestougla.

$$\begin{aligned}
\alpha =& Z_s + \frac{(Z_3 - Z_s)}{|Z_3 - Z_s|} \cdot \frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} \\
\alpha =& \frac{1}{2}(Z_1 + Z_3) + \frac{(Z_3 - \frac{1}{2}(Z_1 + Z_3))}{|Z_3 - \frac{1}{2}(Z_1 + Z_3)|} \cdot \frac{\sqrt{3}|Z_3 - Z_1|}{3} i \\
\alpha =& \frac{1}{2}(Z_1 + Z_3) + \frac{(\frac{Z_3 - Z_1}{2})}{|\frac{Z_3 - Z_1}{2}|} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}|Z_3 - Z_1| i \\
\alpha =& \frac{1}{2}(Z_1 + Z_3) + \frac{Z_3 - Z_1}{|Z_3 - Z_1|} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}|Z_3 - Z_1| i \\
\alpha =& \frac{1}{2}(Z_1 + Z_3) + \frac{\sqrt{3}}{3}(Z_3 - Z_1) i
\end{aligned}$$

Sada je ostala temena lako dobiti:

$Z_2 = \alpha + 2(Z_3 - \alpha), Z_4 = Z_1 + 2(\alpha - Z_2), Z_5 = Z_4 + (Z_1 - Z_2), Z_6 = \alpha + (\alpha - Z_3)$

Zadatak 2 *Odrediti kompleksne brojeve α i β kao i sva rešenja jednačine $(Z - \alpha)^6 = \beta$, tako da 0 i 1 budu rešenja te jednačine, pri čemu imaginarni delovi svih rešenja su nenegativni. Koju figuru u ravni obrazuju rešenja jednačine $(Z - \alpha)^6 = \beta$?*

Rešenje: Ako u opštem slučaju posmatramo jednačinu $Z^n = a$; $a \in C$, uočavamo da je:

$$\begin{aligned}
Z^n =& a \\
Z =& \sqrt[n]{a} \\
Z =& \sqrt[n]{|a|\mathrm{e}^{i\alpha}} \\
Z =& \sqrt[n]{|a|}\mathrm{e}^{i\frac{\alpha + 2k\pi}{n}}; k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\} \\
Z =& \sqrt[n]{|a|}\mathrm{e}^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})}
\end{aligned}$$

Z_k predstavljaju temena pravilnog mnogougla na kružnici poluprečnika $\sqrt[n]{|\alpha|}$.

Ako sada posmatramo uopšteniju jednačinu:

$$\begin{aligned}(Z-\alpha)^n =&\beta; \quad \alpha,\beta \in \mathbb{C}; \quad n \in \mathbb{N}\\ Z-\alpha =& \sqrt[n]{\beta}\\ Z =&\alpha + \sqrt[n]{\beta}\\ Z_k =&\alpha + \sqrt[n]{|\beta| \mathrm{e}^{i\theta}}\\ Z_k =&\alpha + \sqrt[n]{|\beta|}\mathrm{e}^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}; \quad k \in \{0,1,2,...,n-1\}\end{aligned}$$

Z_k predstavljaju temena pravilnog n-tougla na kružnici poluprečnika $\sqrt[n]{|\beta|}$ sa centrom u (α).

Konkretno u našem slučaju:

$$(Z-\alpha)^6 = \beta$$

Rešenja ove jednačine su:

$$Z_k; k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

to su temena pravilnog šestougla, sa centrom u (α).

Odredićemo prvo α:

$a = |1-0| = 1$

$$\begin{aligned}\alpha =&0 + (1-0)\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\\ \alpha =&\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\\ \alpha =&\cos(\frac{\pi}{3}) + isin(\frac{\pi}{3})\\ \alpha =&\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Zamenom (α) u $(Z-\alpha)^6 = \beta$ dobijamo:

$$(Z-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}})^6 = \beta, \quad \beta = ?$$

$Z = 0$ zadovoljava jednačinu:

$$\begin{aligned}\beta =&(Z-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}})^6\\ \beta =&\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\\ \beta =&1\end{aligned}$$

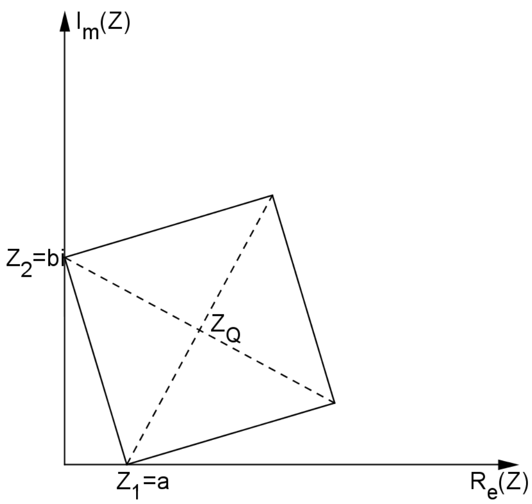
Dakle:

$$\begin{aligned}(Z-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}})^6 =& 1\\ Z-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} =& \sqrt[6]{1}\\ Z =& \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}+\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{6}};\quad k\in\{0,1,2,...,n-1\}\end{aligned}$$

(Ovde će se naravno pojaviti i temena (rešenja), $Z=0$ i $Z=1$)

Zadatak 3 *Odrediti rastojanje temena (c) pravouglog trougla (abc) od centra kvadrata (Q) konstruisanog nad hipotenuzom pravouglog trougla.*

Rešenje.



Slika 8: Udaljenost centra kvadrata od temena

Postavimo ovaj trougao u kompleksnu ravan i uzmimo da je teme c u koordinatnom početku, da je teme a kompleksan broj Z_1, a tema b kompleksan broj Z_2.

Ideja za rešavanje zadatka je da dodjemo do kompleksnog broj Z_q samim tim na osnovu modula od Z_Q dobijamo i rastojanje od temena c.

Kompleksan broj Z_2 dobijamo rotacijom Z_1 oko Z_Q za orijentisani ugao $-\frac{\pi}{2}$:

$$Z_2-Z_Q=(a-Z_Q)\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}i}$$

Iz ove relacije želimo da odredimo Z_Q:

$$\begin{aligned} Z_2 - Z_Q =& (a - Z_Q)(-i) \\ Z_2 - Z_Q =& Z_Q i - ai \\ -Z_Q - Z_Q i =& - ai - bi \\ Z_Q(1+i) =& (a+b)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_Q =& \frac{(a+b)i}{1+i} \\ Z_Q =& \frac{(a+b)i(1-i)}{2} \\ Z_Q =& \frac{1}{2}(a+b)(1+i) \end{aligned}$$

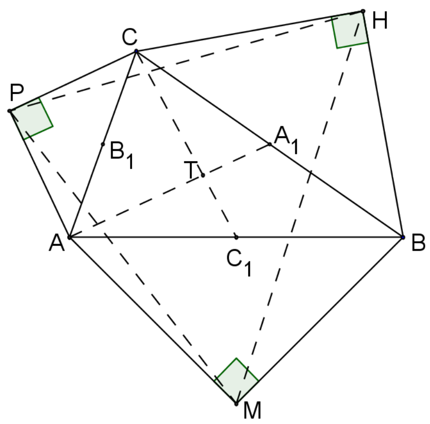
Izračunaćemo sada modul Z_Q:

$$\begin{aligned} |Z_Q| =& |\frac{1}{2}(a+b)(1+i)| \\ |Z_Q| =& \frac{1}{2}(a+b)|(1+i)| \\ |Z_Q| =& \frac{1}{2}(a+b)\sqrt{1^2+i^2} \\ |Z_Q| =& \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b). \end{aligned}$$

Samim tim smo odredili udaljenost temena c od centra kvadrata.

Zadatak 4. *Dat je trougao ABC. Nad stranicama tog trougla konstruisani su pravougli trouglovi ABM, BCH i CAP, čije su hipotenuze stranice trougla ABC. Dokazati da se težišta trougla ABC i MHP poklapaju.*

Rešenje.



Slika 9: Težišta trouglova

Pridružimo temenima trougla ABC odgovarajuće kompleksne brojeve Z_A, Z_B i Z_C respektivno.

$$Z_{A_1} = \frac{1}{2}(Z_B + Z_C)$$

$$Z_{B_1} = \frac{1}{2}(Z_A + Z_C)$$

$$Z_{C_1} = \frac{1}{2}(Z_A + Z_B)$$

Poznato je da je:

$$Z_T = \frac{1}{3}(Z_A + Z_B + Z_C)$$

gde je sa (T) obeleženo težište trougla ABC.

$$Z_H = Z_{A_1} + \frac{1}{2}(Z_C - Z_B)\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$Z_P = Z_{B_1} + \frac{1}{2}(Z_A - Z_C)\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$$

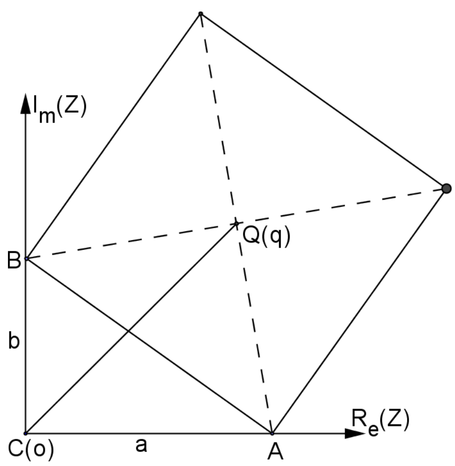
$$Z_M = Z_{C_1} + \frac{1}{2}(Z_B - Z_A)\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Označimo sa T_1 težište trougla MPH.

$$
\begin{aligned}
Z_{T_1} =& \frac{1}{3}(Z_H + Z_P + Z_M) \\
Z_{T_1} =& \frac{1}{3}(Z_{A_1} + Z_{B_1} + Z_{C_1} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}((Z_C - Z_B) + (Z_A - Z_C) + (Z_B - Z_A)) \\
Z_{T_1} =& \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2(Z_A + Z_B + Z_C) \\
Z_{T_1} =& \frac{1}{3}(Z_A + Z_B + Z_C)
\end{aligned}
$$

Zadatak 5 *Odrediti rastojanje temena (C) pravouglog trougla ABC od centra Q kvadrata konstruisanog nad hipotenuzom (AB) tog trougla koji sa njim nema zajedničkih unutrašnjih tačaka i ako su dužine kateta (BC) i (AC) trougla jednake a i b.*

Rešenje.



Označimo: $Z_A = a$ i $Z_B = b$

Za dijagonalu kvadrata imamo $d = \sqrt{2}c = \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}$

Tačku (Q) možemo izraziti kao:

$$
\begin{aligned}
q =& a + \frac{(bi-a)}{|bi-a|}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{2}d \\
q =& a + \frac{-a+bi}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \\
q =& a + (-a+bi)\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
q =& a + (-a+bi)(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
q =& a + (-a+bi)(1-i) \cdot \frac{1}{2} \\
q =& a - \frac{1}{2}(a-bi)(1-i)
\end{aligned}
$$

Rastojanje (Q) od temena (C) možemo izračunati na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
\overline{CQ}^2 =& |q|^2 \\
=& q \cdot \overline{q} \\
=& (a - \frac{1}{2}(a-bi)(1-i))(a - \frac{1}{2}(a+bi)(1+i)) \\
=& a^2 - a \cdot R_e((a+bi)(1+i)) + \frac{1}{2}(a^2+b^2) \\
=& a + (-a+bi)(1-i) \cdot \frac{1}{2} \\
=& ab + \frac{a^2+b^2}{2} \\
=& \frac{a+b}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

3.3 Dokazivanje identiteta vezanih za trougao

U zadatku 1 je ilustrovana primena kompleksnih brojeva na dokaz jedne relacije u "specijalnom" trouglu, čiji su uglovi generisani geometrijskom progresijom. U zadacima 2 i 3 je ilustrovana primena kompleksnih brojeva u dokazivanju dva trigonometrijska identiteta koja su vezana za trougao. Zadaci su preuzeti iz [24].

Zadatak 1 *Unutrašnji uglovi α, β, γ kod temena A, B i C trougla ABC obrazuju geometrijsku progresiju čiji je količnik dva. Dokazati da stranice $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$ i $c = \overline{AB}$ tog trougla zadovoljavaju jednakost:*

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a}.$$

Rešenje. Iz uslova zadatka sledi

$$\begin{aligned} \alpha =& \alpha, \\ \beta =& \alpha q = 2\alpha, \\ \gamma =& \alpha q^2 = 4\alpha. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma =& \pi \\ \alpha + 2\alpha + 4\alpha =& \pi \\ 7\alpha =& \pi \end{aligned}$$

odakle je $\alpha = \frac{\pi}{7}$, $\beta = \frac{2\pi}{7}$ i $\gamma = \frac{4\pi}{7}$.

Iz sinusne teoreme dobijamo:

$$\frac{a}{\sin(\frac{\pi}{7})} = \frac{b}{\sin(\frac{2\pi}{7})} = \frac{c}{\sin(\frac{4\pi}{7})} = 2R$$

$$\begin{aligned} a =& 2R\sin(\frac{\pi}{7}) \\ b =& 2R\sin(\frac{2\pi}{7}) \\ c =& 2R\sin(\frac{4\pi}{7}) \end{aligned}$$

Uzmimo da je $z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{7}}$, znamo $z^7 = -1$.

Sada dobijamo da je:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2R\sin(\frac{\pi}{7})}+\frac{1}{2R\sin(\frac{4\pi}{7})}$$

Korišćenjem relacije:

$$\sin(nz)=\frac{z^{2n}-1}{2iz^n}$$

Dobijamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=&\frac{1}{2R}(\frac{1}{\sin(\frac{2\pi}{7})}+\frac{1}{2R}(\frac{1}{\sin(\frac{4\pi}{7})})\\
\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=&\frac{1}{2R}(\frac{1}{\frac{z^4-1}{2iz^2}}+\frac{1}{\frac{z^8-1}{2iz^4}})\\
\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=&\frac{2iz^2}{2R}(\frac{1}{z^4-1}+\frac{z^2}{z^8-1})\\
\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=&\frac{2iz^2}{2R(z^4-1)}(1+\frac{z^2}{z^4+1})\\
\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=&\frac{2iz^2}{2R(z^4-1)}\cdot\frac{z^4+z^2+1}{z^4+1}\\
\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=&\frac{2iz^2}{2R}\cdot\frac{\frac{1-(z^2)^3}{1-z^2}}{z^8-1}\\
\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=&\frac{2iz^2}{2R}\cdot\frac{1-z^6}{(z\cdot z^7-1)(1-z^2)}.
\end{aligned}$$

Kako je $Z^7=-1$, važi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=&\frac{iz^2}{R}\cdot\frac{1-z^7\cdot z^{-1}}{(-z-1)(1-z^2)}\\
\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=&\frac{iz^2}{R}\cdot\frac{z+1}{z(z+1)(z^2-1)}\\
\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=&\frac{iz^2}{R}\cdot\frac{1}{z(z^2-1)}\\
\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=&\frac{2iz}{2R(z^2-1)}\\
\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=&\frac{1}{2R\frac{(z^2-1)}{2iz}}\\
\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=&\frac{1}{2R\cdot\sin(\frac{\pi}{7})}=\frac{1}{a}.
\end{aligned}$$

Zadatak 2 *Neka su α, β i γ uglovi proizvoljnog trougla. Dokazati da važi sledeća jednakost:*

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$$

Rešenje. Transformisaćemo izraz korišćenjem jednakosti: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

$$\begin{aligned}
\gamma =& \pi - (\alpha + \beta) \\
\cos\gamma =& \cos(\pi - (\alpha + \beta)) \\
\cos\gamma =& -\cos(\alpha + \beta)
\end{aligned}$$

Na osnovu toga dobijamo:

$$\begin{gathered}
\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \\
\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta)
\end{gathered}$$

Uvedimo smenu:

$$\cos\alpha = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

$$\cos\beta = \frac{\omega^2 + 1}{2\omega}$$

Izrazićemo sada $\cos(\alpha + \beta)$ pomoću z i ω:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) =& \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha + \beta) =& \frac{z^2 + 1}{2z} \cdot \frac{\omega^2 + 1}{2\omega} - \frac{z^2 - 1}{2iz} \cdot \frac{\omega^2 - 1}{2i\omega} \\
\cos(\alpha + \beta) =& \frac{(z^2 + 1)(\omega^2 + 1)}{4\omega z} + \frac{(z^2 - 1)(\omega^2 - 1)}{4\omega z} \\
\cos(\alpha + \beta) =& \frac{2z^2\omega^2 + 2}{4\omega z} \\
\cos(\alpha + \beta) =& \frac{z^2\omega^2 + 1}{2\omega z}
\end{aligned}$$

Odredimo vrednost izraza $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha + \beta)$:

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha + \beta) =& (\frac{z^2 + 1}{2z})^2 + (\frac{\omega^2 + 1}{2\omega})^2 + (\frac{z^2\omega^2 + 1}{2\omega z})^2 \\
=& \frac{(z^2 + 1)^2}{4z^2} + \frac{(\omega^2 + 1)^2}{4\omega^2} + \frac{(z^2\omega^2 + 1)^2}{4\omega^2 z^2} \\
=& \frac{z^4 + 2z^2 + 1}{4z^2} + \frac{\omega^4 + 2\omega^2 + 1}{4\omega^2} + \frac{z^4\omega^4 + 2z^2\omega^2 + 1}{4\omega^2 z^2} \\
=& \frac{\omega^2 z^4 + \omega^2 + z^2\omega^4 + z^2 + z^4\omega^4 + 1 + 6\omega^2 z^2}{4\omega^2 z^2}
\end{aligned}$$

Sada posmatrajmo izraz $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$:

$$\begin{aligned}
2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =& -2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)\\
=& -2\frac{z^2+1}{2z}\cdot\frac{\omega^2+1}{2\omega}\cdot\frac{z^2\omega^2+1}{2\omega z}\\
=& -2\frac{z^4\omega^4+z^4\omega^2+z^2\omega^4+2z^2\omega^2+z^2+\omega^2+1}{8\omega^2z^2}\\
=& -\frac{z^4\omega^4+z^4\omega^2+z^2\omega^4+2z^2\omega^2+z^2+\omega^2+1}{4\omega^2z^2}
\end{aligned}$$

Konačno dobijamo:
$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=$

$$\begin{aligned}
=&\frac{\omega^2z^4+\omega^2+z^2\omega^4+z^2+z^4\omega^4+1+6\omega^2z^2}{4\omega^2z^2}\\
-&\frac{z^4\omega^4+z^4\omega^2+z^2\omega^4+2z^2\omega^2+z^2+\omega^2+1}{4\omega^2z^2}\\
=&\frac{4\omega^2z^2}{4\omega^2z^2}\\
=&1
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Dokažimo sada korišćenjem istog metoda sledeću jednakost:

Zadatak 3 *Neka su α, β i γ unutrašnji uglovi trougla. Dokazati jednakost:*

$$\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = -1$$

i na osnovu ove jednakosti dokazati da je trougao ABC pravougli ako i samo ako važi:

$$\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) = -1$$

Rešenje. Datu jednakost možemo transformisati uz pomoć formule:
$2\cos^2\theta - 1 = \cos(2\theta)$
Na taj način dobijamo:

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma &= -1 \\
(2\cos^2\alpha - 1) + (2\cos^2\beta - 1) + (2\cos^2\gamma - 1) + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma &= -1 \\
2\cos^2\alpha + 2\cos^2\beta + 2\cos^2\gamma + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma &= 2 \\
\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma &= 1
\end{aligned}$$

To je jednakost koju smo već dokazali.
Ako je trougao pravougli (recimo da je npr. $\gamma = 90^0$, onda je $\cos\gamma = 0$).

Dobijamo da je:

$$\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) = -1.$$

Dokažimo da važi i obrnuto:

$$\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) + 1 = 0$$

Posmatraćemo levu stranu jednakosti i koristimo uslov: $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$.

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) + 1 =& 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos(2(\alpha+\beta)) + 1 \\
=& 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\cos^2(\alpha+\beta) \\
=& 2\cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)) \\
=& 2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta
\end{aligned}$$

Ovaj izraz je jednako nuli ako važi: $\alpha = 90^0$ ili $\beta = 90^0$ ili $\alpha + \beta = 90^0$, što je i trebalo dokazati.

4 KOMPLEKSNIH BROJEVA I ALGEBRA

Kompleksne brojeve možemo primeniti u algebri prilikom rešavanja raznih problema, a mi smo se bazirali na odredjivanje konačnih zbirova i suma, odredjivanje suma koje su generisane binomnim obrascem, prilikom izračunavanja konačnih proizvoda, kod faktorizacije polinima, kao i pri rešavanju trigonometrijskih jednačina.

4.1 Konačni zbirovi i sume

Jedna od velikih primena kompleksnih brojeva predstavlja izračunavanje konačnih zbirova. Ta primena se najlepše vidi na sumama u kojima figurišu trigonometrijske funkcije. Često se u ovim problemima koristi i geometrijska progresija!

Posmatrajmo konačni niz:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$$

sa osobinom:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = ... = \frac{a_n}{a_{n=1}} = q \neq 1$$

(ako bi bilo $q = 1$, imali bi slučaj stacionarnog niza u kojem bi svaki član bio dat sa: $a_k = a_1$; $k \in \{1, 2, ..., n\}$, a taj slučaj nam ovde nije interesantan!)

Iz prethodne jednakosti dobijamo:

$$\begin{aligned}
\frac{a_2}{a_1} &= q \Rightarrow a_2 = a_1 q \\
\frac{a_3}{a_2} &= q \Rightarrow a_3 = a_2 q = a_1 q^2 \\
\frac{a_4}{a_3} &= q \Rightarrow a_4 = a_3 q = a_1 q^3 \\
&... \\
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= q \Rightarrow a_n = a_{n-1} q = a_1 q^{n-1}
\end{aligned}$$

Ono što nas interesuje, to je zbir prvih n članova niza t.j.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Ovaj izraz izrazimo preko a_1 i q, a zatim prvo proširimo sa q pa sa (-1):

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} / \cdot q$$

$$S_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^n / \cdot (-1)$$

Nakon sabiranja ova dva izraza dobijamo:

$$\begin{aligned} S_n - S_nq &= a_1 - a_aq^n \\ S_n(1-q) &= a_1(1-q^n) \\ S_n &= a_1\frac{1-q^n}{1-q}; q \neq 1 \end{aligned}$$

Kako koristimo kompleksne brojeve za sumiranje pokazaćemo na izolovanom skupu problema. U zadacima 1, 2 i 3 preuzetih iz [25] data je primena geometrijske progresije na izračunavanje konačnih zbirova.

Zadatak 1. Izračunati zbirove:

$$\begin{aligned} S &= \sin\varphi + \sin(2\varphi) + ... + \sin(n\varphi) \\ T &= \cos\varphi + \cos(2\varphi) + ... + \cos(n\varphi) \end{aligned}$$

Rešenje. Formiramo kompleksan broj $T + iS$:

$$\begin{aligned} T + iS &= (\cos\varphi + \cos(2\varphi) + ... + \cos(n\varphi)) + i(\sin\varphi + \sin(2\varphi) + ... + \sin(n\varphi)) \\ &= (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)) + ... + (\cos(n\varphi)) + i\sin(n\varphi) \\ &= \mathrm{e}^{i\varphi} + (\mathrm{e}^{i\varphi})^2 + ... + (\mathrm{e}^{i\varphi})^n \\ &= \mathrm{e}^{i\varphi}\frac{1-(\mathrm{e}^{i\varphi})^n}{1-\mathrm{e}^{i\varphi}} \\ &= \mathrm{e}^{i\varphi}\frac{\mathrm{e}^{\frac{in\varphi}{2}}\mathrm{e}^{\frac{-in\varphi}{2}} - (\mathrm{e}^{\frac{in\varphi}{2}})^2}{\mathrm{e}^{\frac{i\varphi}{2}}\mathrm{e}^{\frac{-i\varphi}{2}} - (\mathrm{e}^{\frac{i\varphi}{2}})^2} \\ &= \mathrm{e}^{i\varphi}\frac{\mathrm{e}^{\frac{in\varphi}{2}}(\mathrm{e}^{\frac{-in\varphi}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{in\varphi}{2}})}{\mathrm{e}^{\frac{i\varphi}{2}}(\mathrm{e}^{\frac{-i\varphi}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{i\varphi}{2}})} \\ &= (\mathrm{e})^{i(\frac{\varphi}{2}+\frac{n\varphi}{2})}\frac{-2i\sin(\frac{n\varphi}{2})}{-2i\sin(\frac{\varphi}{2})} \\ &= (\mathrm{e})^{i(n+1)\frac{\varphi}{2}}\frac{\sin(\frac{n\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})} \\ &= \frac{\sin(\frac{n\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}(\cos((n+1)\frac{\varphi}{2}) + i\sin((n+1)\frac{\varphi}{2})) \end{aligned}$$

Nakon izjednačavanja realnih i imaginarnih delova sa leve i desne strane jednakosti dobijamo:

$$T = \frac{\sin(\frac{n\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}\cos((n+1)\frac{\varphi}{2})$$

$$S=\frac{\sin(\frac{n\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}\sin((n+1)\frac{\varphi}{2})$$

Odnosno:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(k\varphi)=\frac{\sin(\frac{n\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}\sin((n+1)\frac{\varphi}{2})$$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(k\varphi)=\frac{\sin(\frac{n\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}\cos((n+1)\frac{\varphi}{2});n\in\mathbb{N}$$

Ova dva identiteta ćemo koristiti za izračunavanje komplikovanijih suma.

Zadatak 2. Izračunati zbirove:
a)$S=\sin^2 x+sin^2(3x)+...+\sin^2((2n-1)x)$
b)$T=\cos^2 x+\cos^2(3x)+...+\cos^2((2n-1)x)$

Rešenje. a)

$$S=\sum_{k=1}^{n}\sin^2((2k-1)x)$$

Korišćenjem izraza $\sin^2 x=\frac{1-\cos(2x)}{2}$ dobijamo:

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\cos(2(2k-1)x)}{2}$$

$$S=\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n}\cos(2(2k-1)x))$$

$$S=\frac{1}{2}(n-\sum_{k=1}^{n}\cos((2k-1)\varphi))$$

Gde smo uzeli da je $2x=\varphi$;

$$S=\frac{1}{2}(n-A)$$

$$A=\sum_{k=1}^{n}\cos((2k-1)\varphi)$$

$$A=\cos\varphi+\cos(3\varphi)+\cos(5\varphi)+...+\cos((2n-1)\varphi)$$

Da bi izračunali (A) koristićemo formiranje dodatne sume:

$$B=\sin\varphi+\sin(3\varphi)+\sin(5\varphi)+...+\sin((2n-1)\varphi)$$

Formiraćemo kompleksan broj $A + iB$:

$$A + iB = (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi) + ... + \cos((2n-1)\varphi)$$
$$A + iB = \mathrm{e}^{i\varphi} + \mathrm{e}^{3i\varphi} + ... + \mathrm{e}^{(2n-1)i\varphi}$$
$$A + iB = \mathrm{e}^{i\varphi}\frac{1-(\mathrm{e}^{2i\varphi})^n}{1-\mathrm{e}^{2i\varphi}}$$
$$A + iB = \mathrm{e}^{i\varphi}\frac{\mathrm{e}^{n\varphi i}\mathrm{e}^{-n\varphi i}-(\mathrm{e}^{n\varphi i})^2}{\mathrm{e}^{i\varphi}\mathrm{e}^{-i\varphi}-\mathrm{e}^{(i\varphi)^2}}$$
$$A + iB = \mathrm{e}^{i\varphi}\frac{\mathrm{e}^{n\varphi i}(\mathrm{e}^{-n\varphi i}-\mathrm{e}^{n\varphi i})}{\mathrm{e}^{i\varphi}(\mathrm{e}^{-i\varphi}-\mathrm{e}^{i\varphi})}$$
$$A + iB = \mathrm{e}^{n\varphi i}\frac{-2i\sin n\varphi}{-2i\sin\varphi}$$
$$A + iB = \mathrm{e}^{n\varphi i}\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$$
$$A + iB = \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova dobijamo:

$$A = \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}\cos(n\varphi)$$
$$B = \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}\sin(n\varphi)$$

Ove izraze uz pomoć transformacije za dvostruke uglove možemo napisati u homogenijem obliku:

$$A = \frac{1}{2}\frac{2\sin(n\varphi)\cos(n\varphi)}{\sin\varphi}$$

$$B = \frac{\sin^2(n\varphi)}{\sin\varphi}$$

Konačno imamo:

$$A = \frac{\sin(2n\varphi)}{2\sin\varphi}$$
$$B = \frac{1-\cos(2n\varphi)}{2\sin\varphi}$$

Ako vratimo smenu $\varphi = 2x$ dobijamo:

$$A = \frac{\sin(4nx)}{2\sin(2x)}$$

Dakle, da rezimiramo:

$$\begin{aligned}A =& \cos\varphi + \cos(3\varphi) + \cos(5\varphi) + ... + \cos((2n-1)\varphi)\\A =& \cos(2x) + \cos(6x) + \cos(10x) + ... + \cos(2(2n-1)x)\\A =& \frac{\sin(4nx)}{2\sin(2x)}\end{aligned}$$

Odnosno, početna suma:

$$\begin{aligned}S =& \sum_{k=1}^{n} \sin^2((2k-1)x)\\S =& \frac{1}{2}(n-A)\\S =& \frac{1}{2}(n-\frac{\sin(4nx)}{2\sin(2x)})\\S =& \frac{n}{2}-\frac{\sin(4nx)}{4\sin(2x)}\end{aligned}$$

b) da bismo rešili problem pod b) biće nam potrebna vrednost (A) koju smo izračunali:

$$\begin{aligned}T =& \cos^2 x + \cos^2(3x) + ... + \cos^2((2n-1)x)\\T =& (\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x))^2\\T =& \sum_{k=1}^{n} \frac{1+\cos(2(2k-1)x))}{2}\\T =& \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n} 1 + \cos(2(2k-1)x))\\T =& \frac{1}{2}(n+A)\\T =& \frac{1}{2}(n+\frac{\sin(4nx)}{2\sin(2x))})\\T =& \frac{n}{2}+\frac{\sin(4nx)}{4\sin(2x))}\end{aligned}$$

Zadatak 3. Izračunati zbirove:

$$a)A = \cos^2 x + \cos^2(2x) + ... + \cos^2(nx)$$
$$b)B = \sin^2 x + \sin^2(2x) + ... + \sin^2(nx)$$

Rešenje. a)

$$A = \cos^2 x + \cos^2(2x) + ... + \cos^2(nx)$$
$$A = \sum_{k=1}^{n} \cos^2(kx)$$
$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 + \cos(2kx)}{2}$$
$$A = \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n} \cos(k \cdot 2x); \varphi = 2x$$
$$A = \frac{1}{2}(n + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\varphi))$$
$$A = \frac{1}{2}(n + \frac{\sin(\frac{n\varphi}{2})\cos(\frac{(n+1)\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}$$
$$A = \frac{n}{2} + \frac{\sin(nx)\cos((n+1)x)}{2\sin x}$$

Koristili smo ranije izvedenu relaciju $\sum_{k=1}^{n} \cos(k\varphi) = \frac{\sin(\frac{n\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})} \cos((n+1)\frac{\varphi}{2})$.

b) Slično dobijamo i za drugu sumu:

$$B = \sin^2 x + \sin^2(2x) + ... + \sin^2(nx)$$
$$B = \sum_{k=1}^{n} \sin^2(kx)$$
$$B = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \cos(2kx)}{2}$$
$$B = \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} \cos(k \cdot 2x); \varphi = 2x$$
$$B = \frac{1}{2}(n - \sum_{k=1}^{n} \cos(k\varphi))$$
$$B = \frac{1}{2}(n - \frac{\sin(\frac{n\varphi}{2}) \cos(\frac{(n+1)\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}$$
$$B = \frac{1}{2}(n - \frac{\sin(nx)\cos((n+1)x)}{\sin x}$$
$$B = \frac{n}{2} - \frac{\sin(nx)\cos((n+1)x)}{2\sin x}$$

4.2 Sume generisane binomnim obrascem

Dokazaćemo sada nekoliko trigonometrijskih identiteta korišćenjem binomnog obrasca. U ovom odeljku analizirano je nekoliko zbirova koji su kombinacija binomnih koeficijenata i trigonometrijskih funkcija. Zadaci 1 (preuzet iz [21]), 2 i 3 (preuzeti iz [26]) ilustruju date veze unutar konačnih zbirova.

Zadatak 1. Dokazati da za svako $x \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ važi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(x + 2k\varphi) = 2^n \cos^n \varphi \sin(x + n\varphi)$$

Rešenje:

$$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(x + 2k\varphi)$$

i formiraćemo dodatno:

$$B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x + 2k\varphi)$$

Formiramo sada kompleksan broj $B + iA$:

$$\begin{aligned}
B + iA =& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x + 2k\varphi) + i \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(x + 2k\varphi) \\
B + iA =& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos(x + 2k\varphi) + i \sum_{k=0}^{n} \sin(x + 2k\varphi)) \\
B + iA =& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{i(x+2k\varphi)} \\
B + iA =& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{2\varphi k i} \\
B + iA =& \mathrm{e}^{ix} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{(2\varphi i)k} \\
B + iA =& \mathrm{e}^{ix}(1 + \mathrm{e}^{2\varphi i})^n \\
B + iA =& \mathrm{e}^{ix}(\mathrm{e}^{i\varphi}\mathrm{e}^{-i\varphi} + (\mathrm{e}^{i\varphi})^2)^n \\
B + iA =& \mathrm{e}^{ix}(\mathrm{e}^{i\varphi})^n(\mathrm{e}^{-i\varphi} + \mathrm{e}^{i\varphi})^n \\
B + iA =& \mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{in\varphi}(2\cos\varphi)^n \\
B + iA =& 2^n \cos^n \varphi \cdot \mathrm{e}^{i(n\varphi + x)} \\
B + iA =& 2^n \cos^n \varphi \cos(n\varphi + x) + i 2^n \cos^n \varphi \sin(n\varphi + x)
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova dobijamo:

$$B = 2^n \cos^n \varphi \cos(n\varphi + x)$$

$$A = 2^n \cos^n \varphi \sin(n\varphi + x)$$

Što je i trebalo dokazati.

Zadatak 2. Izračunati zbirove:

$$C = \cos x + \binom{n}{1} \cos(2x) + \binom{n}{2} \cos(3x) + ... + \binom{n}{n} \cos((n + 1)x)$$

$$D = \sin x + \binom{n}{1} \sin(2x) + \binom{n}{2} \sin(3x) + ... + \binom{n}{n} \sin((n + 1)x)$$

Rešenje. Formiramo sada kompleksan broj $C+iD$:

$$
\begin{aligned}
C+iD =&(\cos x+\binom{n}{1}\cos(2x)+\binom{n}{2}\cos(3x)+...+\binom{n}{n}\cos((n+1)x))\\
&+i(\sin x+\binom{n}{1}\sin(2x)+\binom{n}{2}\sin(3x)+...+\binom{n}{n}\sin((n+1)x))\\
C+iD =&(\cos x+i\sin x)+\binom{n}{1}(\cos(2x)+i\sin(2x))+\binom{n}{2}(\cos(3x)+i\sin(3x)+\\
&...+\binom{n}{n}(\cos((n+1)x)+i\sin((n+1)x))\\
C+iD =&\binom{n}{0}\mathrm{e}^{ix}+\binom{n}{1}(\mathrm{e}^{ix})^2+\binom{n}{2}(\mathrm{e}^{ix})^3+...+\binom{n}{n}(\mathrm{e}^{ix})^{n+1}\\
C+iD =&\mathrm{e}^{ix}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\mathrm{e}^{ix})^k\\
C+iD =&\mathrm{e}^{ix}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\mathrm{e}^{ix})^k\cdot 1^{n-k}\\
C+iD =&\mathrm{e}^{ix}(\mathrm{e}^{ix}+1)^n\\
C+iD =&\mathrm{e}^{ix}((\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}})^2+\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{-i\frac{x}{2}})^n\\
C+iD =&\mathrm{e}^{ix}(\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}})^n(\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^{-i\frac{x}{2}})^n\\
C+iD =&\mathrm{e}^{i(x+\frac{nx}{2})}(2\cos(\frac{x}{2}))^n\\
C+iD =&2^n\cos^n(\frac{x}{2})\mathrm{e}^{i(\frac{n+2}{2})x}\\
C+iD =&2^n\cos^n(\frac{x}{2})(\cos((\frac{n+2}{2})x)+i\sin((\frac{n+2}{2})x))
\end{aligned}
$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova dobijamo:

$$C=2^n\cos^n(\frac{x}{2})\cos(\frac{n+2}{2}x)$$

$$D=2^n\cos^n(\frac{x}{2})\sin(\frac{n+2}{2}x)$$

Zadatak 3 Izračunati zbirove:

$$E=\cos x-\binom{n}{1}\cos(2x)+\binom{n}{2}\cos(3x)+...+(-1)^n\binom{n}{n}\cos((n+1)x)$$

$$F=\sin x-\binom{n}{1}\sin(2x)+\binom{n}{2}\sin(3x)+...+(-1)^n\binom{n}{n}\sin((n+1)x)$$

Rešenje. Primenjujemo postupak kao u prethodnom problemu:

$$
\begin{aligned}
E+iF =&(\cos x-\binom{n}{1}\cos(2x)+\binom{n}{2}\cos(3x)+...+(-1)^n\binom{n}{n}\cos((n+1)x))\\
&+i(\sin x-\binom{n}{1}\sin(2x)+\binom{n}{2}\sin(3x)+...+(-1)^n\binom{n}{n}\sin((n+1)x))\\
E+iF =&(\cos x+i\sin x)-\binom{n}{1}(\cos(2x)+i\sin(2x))+\binom{n}{2}(\cos(3x)+i\sin(3x)+\\
&...+(-1)^n\binom{n}{n}(\cos((n+1)x)+i\sin((n+1)x))\\
E+iF =&\binom{n}{0}\mathrm{e}^{ix}-\binom{n}{1}(\mathrm{e}^{ix})^2+\binom{n}{2}(\mathrm{e}^{ix})^3+...+(-1)^n\binom{n}{n}(\mathrm{e}^{ix})^{n+1}\\
E+iF =&\mathrm{e}^{ix}(1-\binom{n}{1}\mathrm{e}^{ix}+\binom{n}{2}(\mathrm{e}^{ix})^2+...+(-1)^n\binom{n}{n}\mathrm{e}^{nix}\\
E+iF =&\mathrm{e}^{ix}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(\mathrm{e}^{ix})^k\\
E+iF =&\mathrm{e}^{ix}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\mathrm{e}^{ix})^k\\
E+iF =&\mathrm{e}^{ix}(1-\mathrm{e}^{ix})^n\\
E+iF =&\mathrm{e}^{ix}(\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{-i\frac{x}{2}}-(\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}})^2)^n\\
E+iF =&\mathrm{e}^{ix}(\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}})^n(\mathrm{e}^{-i\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}})^n\\
E+iF =&\mathrm{e}^{i(x+\frac{nx}{2})}(-2i\sin(\frac{x}{2}))^n\\
E+iF =&2^n\sin^n(\frac{x}{2})(-i)^n\mathrm{e}^{i(\frac{n+2}{2})x}\\
E+iF =&2^n\sin^n(\frac{x}{2})\mathrm{e}^{i(-\frac{n\pi}{2}+\frac{n+2}{2}x)}\\
E+iF =&2^n\sin^n(\frac{x}{2})\mathrm{e}^{i(\frac{(x-\pi)n+2x}{2})}\\
E+iF =&2^n\sin^n(\frac{x}{2})\cos(\frac{(x-\pi)n+2x}{2})+i\sin(\frac{(x-\pi)n+2x}{2})
\end{aligned}
$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova dobijamo:

$$E=2^n\sin^n(\frac{x}{2})\cos(\frac{(x-\pi)n+2x}{2})$$

$$F=2^n\sin^n(\frac{x}{2})\sin(\frac{(x-\pi)n+2x}{2})$$

4.3 Izračunavanje konačnih proizvoda

U ovom odeljku dokazano je nekoliko identiteta za konačne proizvode. U problemima 1 i 2 je korišćena faktorizacija polinoma nad poljem realnih brojeva. Zadatak 1 preuzet iz [26], a zadatak 2 iz [27].

Zadatak 1 Dokazati identitet

$$x^{2n+1}+1=(x+1)\prod_{k=1}^{n}(x^2+2x\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})+1)$$

i na osnovu njega dokazati sledeće identitete vezane za proizvode:

a) $\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{k\pi}{2n+1})=\frac{1}{2^n}$

b) $\prod_{k=1}^{n}\sin(\frac{k\pi}{2n+1})=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$

c) $\prod_{k=1}^{n}\tan(\frac{k\pi}{2n+1})=\sqrt{2n+1}$

d) $\prod_{k=1}^{n}\cot(\frac{k\pi}{2n+1})=\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+1}$

Rešenje. Zbog faktorizacije polinoma $P(x)=x^{2n+1}+1$ izvršićemo prvo rešavanje jednačine $P(x)=0$.

$$\begin{aligned}
&x^{2n+1}+1=0\\
&x^{2n+1}=-1\\
&x=\sqrt[2n+1]{-1}\\
&x_k=\mathrm{e}^{i\frac{\pi+2k\pi}{2n+1}};k\in\{0,1,2,...,2n\}
\end{aligned}$$

Kada nadjemo rešenja imamo dalje da je:

$$\begin{aligned}
P(x)=&x^{2n+1}+1\\
P(x)=&(x+1)\prod_{k=0}^{n-1}(x-\mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}})(x-\mathrm{e}^{-i\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}})\\
P(x)=&(x+1)\prod_{k=0}^{n-1}(x^2-2x\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n+1})+1)
\end{aligned}$$

Ako izvršimo pomeranje indeksa:

$$\begin{aligned}
P(x) =&(x+1)\prod_{k=1}^{n}(x^2-2x\cos(\frac{(2(k-1)+1)\pi}{2n+1})+1)\\
P(x) =&(x+1)\prod_{k=1}^{n}(x^2-2x\cos(\frac{(2k-1)\pi}{2n+1})+1)\\
P(x) =&(x+1)\prod_{k=1}^{n}(x^2-2x\cos(\frac{(2(n-k+1)-1)\pi}{2n+1})+1)\\
P(x) =&(x+1)\prod_{k=1}^{n}(x^2-2x\cos(\frac{(2(n-(k-1))-1)\pi}{2n+1})+1)\\
P(x) =&(x+1)\prod_{k=1}^{n}(x^2-2x\cos(\frac{(2n-2k+2-1))-1)\pi}{2n+1})+1)\\
P(x) =&(x+1)\prod_{k=1}^{n}(x^2-2x\cos(\frac{2n+1}{2n+1}\pi-\frac{2k\pi}{2n+1})+1)\\
P(x) =&(x+1)\prod_{k=1}^{n}(x^2-2x\cos(\pi-\frac{2k\pi}{2n+1})+1)\\
P(x) =&(x+1)\prod_{k=1}^{n}(x^2+2x\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})+1)
\end{aligned}$$

Što je i trebalo dokazati. Dakle,

$$\begin{aligned}
x^{2n+1}+1 =&(x+1)\prod_{k=1}^{n}(x^2+2x\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})+1)\\
x^{2n+1}+1 =&(x+1)f(x) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Radi dokaza izraza za numeričke proizvode krenemo od:

$$\begin{aligned}
\frac{x^{2n+1}+1}{x+1} =&\frac{1-(-x)^{2n+1}}{1-(-x)}\\
\frac{x^{2n+1}+1}{x+1} =&1-x+x^2-x^3+...+(-x)^{2n}; x\neq -1
\end{aligned}$$

Dakle, $x^{2n+1}+1=(x+1)(1-x+x^2-x^3+...+x^{2n})$

Ako uporedimo poslednji izraz sa (1) dobijamo da je:

$$1 - x + x^2 - x^3 + ... + x^{2n} = f(x)$$
$$1 - x + x^2 - x^3 + ... + x^{2n} = \prod_{k=1}^{n}(x^2 + 2x\cos(\frac{2k\pi}{2n+1}) + 1) \tag{2}$$

Ako u (2) uvrstimo $x = 1$ dobijamo:

$$\prod_{k=1}^{n}(2 + 2\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})) = 1$$
$$2^n \prod_{k=1}^{n}(1 + \cos(\frac{2k\pi}{2n+1})) = 1$$
$$2^n \prod_{k=1}^{n} 2(\cos(\frac{k\pi}{2n+1}))^2 = 1$$
$$2^{2n} \prod_{k=1}^{n}(\cos(\frac{k\pi}{2n+1}))^2 = 1$$
$$\prod_{k=1}^{n}(\cos(\frac{k\pi}{2n+1}))^2 = \frac{1}{2^{2n}}$$
$$\prod_{k=1}^{n}(\cos(\frac{k\pi}{2n+1})) = \frac{1}{2^n}$$

Sa $x = -1$ zamenom u (2) dobijamo:

$$\prod_{k=1}^{n}(1 - 2\cos(\frac{2k\pi}{2n+1}) + 1) = 2n + 1$$
$$\prod_{k=1}^{n} 2(1 - \cos(\frac{2k\pi}{2n+1})) = 2n + 1$$
$$\prod_{k=1}^{n} 2 \cdot 2\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1}) = 2n + 1$$
$$\prod_{k=1}^{n} \sin^2(\frac{k\pi}{2n+1}) = \frac{2n+1}{2^{2n}}$$
$$\prod_{k=1}^{n} \sin(\frac{k\pi}{2n+1}) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

Sada se lako vidi da je:

$$\prod_{k=1}^{n} \tan(\frac{k\pi}{2n+1}) = \sqrt{2n+1}$$

$$\prod_{k=1}^{n} \cot(\frac{k\pi}{2n+1}) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+1}$$

Zadatak 2 Proveriti relaciju

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}(x^2 - 2x\cos(\frac{k}{n}) + 1)$$

i na osnovu nje dokazati sledeće jednakosti za proizvode:

a) $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{2n}) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

b) $\prod_{k=1}^{n-1} \cos(\frac{k\pi}{2n}) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

c) $\prod_{k=1}^{n} \tan(\frac{k\pi}{2n}) = 1$

d) $\prod_{k=1}^{n} \cot(\frac{k\pi}{2n}) = 1$

Rešenje. Zbog faktorizacije polinoma $P(x) = x^{2n} - 1$ izvršićemo prvo rešavanje jednačine $P(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
&x^{2n} - 1 = 0\\
&x^{2n} = 1\\
&x = \sqrt[2n]{1}\\
&x_k = \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}; k \in \{0, 1, 2, ..., 2n-1\}
\end{aligned}$$

Kada nadjemo rešenja imamo dalje da je:

$$\begin{aligned}
P(x) =& x^{2n} - 1\\
P(x) =& (x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{n-1}(x - \mathrm{e}^{i\frac{(k\pi}{n}})(x - \mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}})\\
P(x) =& (x^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}(x^2 - 2x\cos(\frac{k\pi}{n}) + 1)
\end{aligned}$$

Da bismo dokazali formule za numeričke proizvode krenimo od izraza:

$$P(x) = (x^2 - 1)g(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} &= \frac{1-(x^2)^n}{1-x^2} \\
\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} &= 1 + x^2 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + ... + (x^2)^{n-1} \\
x^{2n} - 1 &= (x^2-1)(1 + x^2 + x^4 + ... + x^{2n-2})
\end{aligned}$$

Dakle, važi:

$$g(x) = 1 + x^2 + x^4 + ... + x^{2n-2}$$

Odnosno:

$$\prod_{k=1}^{n-1}(x^2 - 2x\cos(\frac{k\pi}{n}) + 1) = 1 + x^2 + x^4 + ... + x^{2(n-1)} \tag{3}$$

Za $x = 1$ iz izraza (3) imamo:

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1 - 2\cos(\frac{k\pi}{n}) + 1) = n$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} 2(1 - \cos(\frac{k\pi}{n})) = n$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 2\sin^2(\frac{k\pi}{2n}) = n$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin^2(\frac{k\pi}{2n}) = \frac{n}{2^{2n}}$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{2k\pi}{n}) = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$$

Slično za $x = -1$ dobijamo:

$$\prod_{k=1}^{n-1} 2(1 + 2\cos(\frac{k\pi}{n})) = n$$
$$\prod_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 2\cos^2(\frac{k\pi}{2n}) = n$$
$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos^2(\frac{k\pi}{2n}) = \frac{n}{2^{2n}}$$
$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos(\frac{k\pi}{2n}) = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$$

Sada prosto dobijamo:

$$\prod_{k=1}^{n} \tan(\frac{k\pi}{2n}) = 1$$

$$\prod_{k=1}^{n} \cot(\frac{k\pi}{2n}) = 1$$

4.4 Kompleksni brojevi i algebra polinoma

U ovom odeljku korišćena je faktorizacija nad poljem kompleksnih i realnih brojeva u cilju odredjivanja nekoliko partikularnih zbirova i proizvoda, kao i izračunavanje vrednosti trigonometrijskih funkcija za nekoliko netipičnih vrednosti argumenta.

U zadacima 1 i 2 preuzetim iz [21] i [28] korišćena je struktura polinoma zasnovana na generisanju monoma čiji opšti član predstavlja elemente geometrijske progresije. U problemu 2 c) je iskorišćena majorizacija kvadratne funkcije za majorizaciju polinoma. U zadacima 3 i 4 peuzeti iz [24] izračunate su vrednosti jednog zbira i jednog proizvoda vazanog za umnoške ugla $\frac{\pi}{7}$.

Zadatak 1 Neka je polinom $P(x)$ definisan sa:

$$P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

a) Polinom $P(x)$ napisati kao proizvod nesvodljivih polinoma nad $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$

b) Ako je P^* faktorizacija polinoma P^* nad poljem $\mathbb{R}$, tada izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene u jednakosti $P^* = P$ izračunati $\cos(\frac{\pi}{5}) + \cos(\frac{3\pi}{5})$ i $\cos(\frac{\pi}{5})\cos(\frac{3\pi}{5})$.

c) Napisati polinom drugog stepena sa celobrojnim koeficijentima čiji su koreni $\cos(\frac{\pi}{5})$ i $\cos(\frac{3\pi}{5})$.

d) Koristeći rezultat pod c) izračunati prorodne brojeve p, q i r tako da je $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{p+q\sqrt{r}}{r}$.

Rešenje.

a)

$$\begin{aligned}
P(x) =& x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \\
P(x) =& 1 \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \\
P(x) =& 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 = 0
\end{aligned}$$

Rešićemo prethodnu jednačinu $P(x) = 0$, korišćenjem geometrijske progresije:

$$a_1 = 1; q = -x; n = 5$$

$$\begin{aligned}
P(x) =& 0 \\
\frac{1 - (-x)^5}{1 - x} =& 0 \\
\frac{1 + x^5}{1 + x} =& 0
\end{aligned}$$

Iz ovoga imamo $x^5 + 1 = 0$ i $x \neq -1$

$$\begin{aligned}
x^5 + 1 &= 0 \\
x^5 &= -1 \\
x &= \sqrt[5]{-1} \\
x &= \sqrt[5]{\mathrm{e}^{i(\pi + 2k\pi)}} \\
x_k &= \mathrm{e}^{i\frac{(\pi+2k\pi)}{5}}; k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}
\end{aligned}$$

Pa za rešenja ove jednačine imamo:

$$\begin{aligned}
x_1 =& \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}} \\
x_2 =& \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{5}} \\
x_3 =& \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{5}} = -1; (kontradiktorno) \\
x_4 =& \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{5}} \\
x_5 =& \mathrm{e}^{i\frac{9\pi}{5}}
\end{aligned}$$

Faktorizacija polinoma $P(x)$ nad poljem $(\mathbb{C})$ glasi:

$$P(x) = 1 \cdot (x - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}})(x - \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{5}})(x - \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{5}})(x - \mathrm{e}^{i\frac{9\pi}{5}})$$

Faktorizacija polinoma $P(x)$ nad poljem $(\mathbb{R})$ glasi:

$$\begin{aligned}
P(x) =&(x - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}})(x - \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{5}})(x - \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{5}})(x - \mathrm{e}^{i\frac{9\pi}{5}})\\
P(x) =&(x - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}})(x - \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{5}})(x - \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{5}})(x - \mathrm{e}^{i\frac{-3\pi}{5}})\\
P(x) =&(x^2 - x\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{5}} - x\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}} + 1)(x^2 - x\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{5}} - x\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{5}} + 1)\\
P(x) =&(x^2 - x(\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{5}} + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}}) + 1)(x^2 - x(\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{5}} + \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{5}}) + 1)\\
P(x) =&(x^2 - 2x\cos(\frac{\pi}{5}) + 1)(x^2 - 2x\cos(\frac{3\pi}{5}) + 1)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
P^*(x) =&(x^2 - 2x\cos(\frac{\pi}{5}) + 1)(x^2 - 2x\cos(\frac{3\pi}{5}) + 1)\\
P^*(x) =&x^4 - 2x^3\cos(\frac{3\pi}{5}) + x^2 - 2x^3\cos(\frac{\pi}{5}) + 4x^2\cos(\frac{\pi}{5})\cos(\frac{3\pi}{5}) - 2x\cos(\frac{\pi}{5}) + x^2 - 2x\cos(\\
P^*(x) =&x^4 - 2x^3(\cos(\frac{3\pi}{5}) + \cos(\frac{\pi}{5})) + (4\cos(\frac{\pi}{5})\cos(\frac{3\pi}{5}) + 1)x^2 - 2x(\cos(\frac{\pi}{5}) + \cos(\frac{3\pi}{5})) + 1
\end{aligned}$$

Po uslovu zadatka imamo $P^* = P$, pa izjadnačavanjem odgovarajućih koeficijenata imamo:

$$-2(\cos(\frac{\pi}{5}) + \cos(\frac{3\pi}{5})) = -1$$

$$4\cos(\frac{\pi}{5})\cos(\frac{3\pi}{5}) + 2 = 1$$

Konačno za tražene vrednosti pod b) imamo:

$$\cos(\frac{\pi}{5}) + \cos(\frac{3\pi}{5}) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\frac{\pi}{5})\cos(\frac{3\pi}{5}) = -\frac{1}{4}$$

c) Na osnovu Vijetovih formula za polinom drugog stepena lako dobijamo:

$$t^2 - (t_1 + t_2)t + t_1t_2 = 0$$

$$t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8} = 0$$

$$8t^2 - 4t - 1 = 0$$

d) Koristeći rezultat pod c) imamo:

$$\begin{aligned}
t_{1,2} =& \frac{4 \mp \sqrt{16+32}}{2 \cdot 8} \\
t_{1,2} =& \frac{4 \mp \sqrt{48}}{16} \\
t_{1,2} =& \frac{4 \mp 4\sqrt{3}}{16} \\
t_{1,2} =& \frac{1 \mp 1\sqrt{3}}{4} \\
t_1 =& \frac{1-\sqrt{3}}{4} \qquad \vee \qquad t_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \\
\cos(\frac{3\pi}{5})) =& \frac{1-\sqrt{3}}{4} < 0 \qquad \vee \qquad \cos(\frac{\pi}{5})) = \frac{1+\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

Odgovarajuće vrednosti gde su p, q i r prirodni brojevi su: $p = 1, q = 1$ i $r = 4$.

Zadatak 2 Neka je polinom $Q(x)$ definisan sa:

$$Q(x) = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$$

a) Polinom $Q(x)$ napisati kao proizvod nesvodljivih polinoma nad $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$.

b) Korišćenjem minimuma kvadratne funkcije minimizovati polinom $Q(x)$.

Rešenje.

a)

$$\begin{aligned}
Q(x) =& x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 \\
Q(x) =& 1 \cdot (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_7)(x-x_8) \\
Q(x) =& 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 = 0
\end{aligned}$$

$$a_1 = 1$$

$$q = x^2$$

Broj članova

$$n = 5$$

Koristeći izraz za zbir članova geometrijske progresije dobijamo:

$$\begin{aligned} Q(x) =& 0 \\ \frac{1-(x^2)^5}{1-x} =& 0 \\ \frac{1-x^{10}}{1-x} =& 0 \end{aligned}$$

Iz ovoga imamo $1 - x^{10} = 0$ i $1 - x^2 \neq 0$

$$\begin{aligned} 1 - x^{10} =& 0 \quad \wedge \quad 1 - x^2 \neq 0 \\ x^{10} =& 1 \quad \wedge \quad x \neq \mp 1 \\ x =& \sqrt[10]{1} \\ x =& \sqrt[10]{\mathrm{e}^{i\cdot 0}} \\ x_k =& \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{10}} \\ x_k =& \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{5}}; k \in \{0, 1, 2, ..., 9\} \end{aligned}$$

Pa za rešenja ove jednačine dobijamo:

$$\begin{aligned} x_0 =& \mathrm{e}^{i\cdot 0} = 1 \\ x_1 =& \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}} \\ x_2 =& \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}} \\ x_3 =& \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{5}} \\ x_4 =& \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{5}} \\ x_5 =& \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{5}} \\ x_6 =& \mathrm{e}^{i\frac{6\pi}{5}} \\ x_7 =& \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{5}} \\ x_8 =& \mathrm{e}^{i\frac{8\pi}{5}} \\ x_9 =& \mathrm{e}^{i\frac{9\pi}{5}} \end{aligned}$$

Faktorizacija polinoma $Q(x)$ nad poljem $(\mathbb{C})$ glasi:

$$Q(x) = 1\cdot(x-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}})(x-\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}})(x-\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{5}})(x-\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{5}})(x-\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{5}})(x-\mathrm{e}^{i\frac{6\pi}{5}})(x-\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{5}})(x-\mathrm{e}^{i\frac{8\pi}{5}})(x-\mathrm{e}^{i\frac{9\pi}{5}})$$

Faktorizacija polinoma $Q(x)$ nad poljem $(\mathbb{R})$ glasi:

$$\begin{aligned} Q(x) =& (x - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}})(x - \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{5}})(x - \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}})(x - \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{5}})(x - \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{5}})(x - \mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{5}})(x - \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{5}})(x - \mathrm{e}^{-i\frac{4\pi}{5}}) \\ Q(x) =& (x^2 - 2x\cos(\frac{\pi}{5}) + 1)(x^2 - 2x\cos(\frac{2\pi}{5}) + 1)(x^2 - 2x\cos(\frac{3\pi}{5}) + 1)(x^2 - 2x\cos(\frac{4\pi}{5}) + 1) \end{aligned}$$

Iz faktorizacije polinoma $Q(x)$ nad $\mathbb{R}$, za $x = i$ dobijamo sledeću jednakost:

$$\cos(\frac{\pi}{5})\cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{3\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) = \frac{1}{16}.$$

Zato što je:

$$\begin{aligned} Q(i) =& i^8 + i^6 + i^4 + i^2 + 1 \\ Q(i) =& 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \\ Q(i) =& 1 \end{aligned}$$

Sa druge strane imamo:

$$\begin{aligned} Q(x) =& (i^2 - 2i\cos(\frac{\pi}{5}) + 1)(i^2 - 2i\cos(\frac{2\pi}{5}) + 1)(i^2 - 2i\cos(\frac{3\pi}{5}) + 1)(i^2 - 2i\cos(\frac{4\pi}{5}) + 1) \\ Q(x) =& (-2i\cos(\frac{\pi}{5}))(-2i\cos(\frac{2\pi}{5}))(-2i\cos(\frac{3\pi}{5}))(-2i\cos(\frac{4\pi}{5})) \\ Q(i) =& 16\cos(\frac{\pi}{5})\cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{3\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) \end{aligned}$$

Dakle,

$$\cos(\frac{\pi}{5})\cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{3\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) = \frac{1}{16}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) =& ax^2 + bx + c; \quad a \neq 0 \wedge a > 0 \\ f(x) =& a((x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}) \end{aligned}$$

$f(x)$ ima min za $x = -\frac{b}{2a}$ koji iznosi:

$$f_{min} = f(x = -\frac{b}{2a}) = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Posmatramo uopšteno izraz oblika:

$$f(x) = x^2 - 2x\cos\theta + 1$$

$$\begin{aligned} f(x) \geq& \frac{4 \cdot 1 \cdot 1 - 4\cos^2\theta}{4} \\ f(x) \geq& 1 - \cos^2\theta \\ f(x) \geq& 2\sin^2\theta \end{aligned}$$

Primenimo prethodno na:

$$Q(x) = (x^2-2x\cos(\frac{\pi}{5})+1)(x^2-2x\cos(\frac{2\pi}{5})+1)(x^2-2x\cos(\frac{3\pi}{5})+1)(x^2-2x\cos(\frac{4\pi}{5})+1)$$

Dobijamo:

$$Q(x) \geq 2\sin^2(\frac{\pi}{5})2\sin^2(\frac{2\pi}{5})2\sin^2(\frac{3\pi}{5})2\sin^2(\frac{4\pi}{5})$$

odnosno:

$$Q_{min} = 16\sin^2(\frac{\pi}{5})\sin^2(\frac{2\pi}{5})\sin^2(\frac{3\pi}{5})\sin^2(\frac{4\pi}{5})$$

Zadatak 3 *Dokazati da je:*

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{3\pi}{7}) = \frac{1}{2}$$

Rešenje. Označimo sa $S = \cos\frac{\pi}{7} - \cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{3\pi}{7})$

Posmatrajmo $z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ imamo da je:

$$z^7 = \mathrm{e}^{i\pi}$$
$$z^7 = -1$$

Iz ranije korišćenih relacija:

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{2i\theta} + 1}{\mathrm{e}^{i\theta}}$$

$$\cos\theta = \frac{z^2+1}{2z} \quad i \quad \cos(n\theta) = \frac{z^{2n}+1}{2z^n}$$

Koristeći ove relacije imamo:

$$S = \frac{z^2+1}{2z} - \frac{z^4+1}{2z^2} + \frac{z^6+1}{2z^3}$$
$$S = \frac{z^4+z^2-z^5-z+z^6+1}{2z^3}$$
$$S = \frac{\frac{1+z^7}{1+z}+z^3}{2z^3}$$
$$S = \frac{0+z^3}{2z^3}$$
$$S = \frac{1}{2}$$

Zadatak 4 *Izračunati bez upotrebe tablica:*

$$R = \cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos(\frac{4\pi}{7})\cdot\cos(\frac{5\pi}{7})$$

Rešenje. Transformisaćemo izraz $\cos(\frac{4\pi}{7})$:

$$\begin{aligned}\cos(\frac{4\pi}{7}) &= \cos(\frac{7\pi-3\pi}{7})\\ \cos(\frac{4\pi}{7}) &= \cos(\pi-\frac{3\pi}{7})\\ \cos(\frac{4\pi}{7}) &= \cos(\frac{3\pi}{7})\end{aligned}$$

Transformisaćemo i izraz $\cos(\frac{5\pi}{7})$:

$$\begin{aligned}\cos(\frac{5\pi}{7}) &= \cos(\frac{7\pi-2\pi}{7})\\ \cos(\frac{5\pi}{7}) &= \cos(\pi-\frac{2\pi}{7})\\ \cos(\frac{5\pi}{7}) &= \cos(\frac{2\pi}{7})\end{aligned}$$

Korišćenjem izraza iz prethodnog problema dobijamo:

$$\begin{aligned}R &= \frac{z^2+1}{2z}\cdot\frac{z^4+1}{2z^2}\cdot\frac{z^6+1}{2z^3}\\ R &= \frac{(z^2+1)(z^4+1)(z^6+1)}{8z^6}\\ R &= \frac{(z^6+z^4+z^2+1)(z^6+1)}{8z^6}\\ R &= \frac{z^{12}+z^{10}+z^8+z^6+z^5+z^3+z}{8z^6}\end{aligned}$$

Izračunajmo sada z^{12}:

$$\begin{aligned}z^{12} &= (\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{7}})^{12}\\ z^{12} &= \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{7}}\cdot\mathrm{e}^{i\pi}\\ z^{12} &= -z^5\end{aligned}$$

Izračunajmo i z^{10}:

$$\begin{aligned}z^{10} &= \mathrm{e}^{i\frac{10\pi}{7}}\\ z^{10} &= \mathrm{e}^{\frac{7\pi+3\pi}{7}}\\ z^{10} &= \mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{7}}\\ z^{10} &= -z^3\end{aligned}$$

Takodje imamo da je $z^8 = -z$.

Sredjivanjem izraza dobijamo da je $R = \frac{1}{8}$.

4.5 Rešavanje trigonometrijskih jednačina

Zadatak preuzet iz [24].

Zadatak 4.5.1 *Korišćenjem kompleksnih brojeva rešiti jednačinu:*

$$\cos^2 x + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 1$$

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\cos^2 x + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) &= 1\\
\frac{1+\cos(2x)}{2} + \frac{1+\cos(4x)}{2} + \frac{1+\cos(6x)}{2} &= 1\\
\cos(2x) + \cos(4x) + \cos(6x) &= -1
\end{aligned}$$

Uzmimo da je

$$z = \mathrm{e}^{ix}$$

$$\begin{aligned}
\cos(nx) =& \frac{\mathrm{e}^{nxi} + \mathrm{e}^{-nxi}}{2}\\
\cos(nx) =& \frac{(\mathrm{e}^{ix})^{2n} + 1}{2\mathrm{e}^{nxi}}\\
\cos(nx) =& \frac{z^{2n} + 1}{2z^n}
\end{aligned}$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned}
\cos(2x) + \cos(4x) + \cos(6x) &= -1\\
\frac{z^4+1}{2z^2} + \frac{z^8+1}{2z^4} + \frac{z^{12}+1}{2z^6} &= -1\\
z^{12} + z^{10} + z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1 + z^6 &= 0\\
\frac{(z^2)^7 - 1}{z^2 - 1} + z^6 &= 0\\
\frac{z^{14} - 1}{z^2 - 1} + z^6 = 0 \quad i \quad z^2 &\neq 1\\
z^{14} - z^6 + z^8 - 1 &= 0\\
(z^6 + 1)(z^8 - 1) &= 0
\end{aligned}$$

Dakle, rešenja ove jednačine su: $(x = \frac{\pi+2k\pi}{6} \vee x = \frac{\pi+2k\pi}{4} \vee x = \frac{\pi+2k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z})$.

5 KOMPLEKSNI BROJEVI I ANALIZA

U ovom poglavlju je data primena kompleksnih brojeva u analizi, sa akcentom na rešavanje tipa integrala ilustrovanom u odeljku 5.1. u zadatku 1.

U zadatku 2 a, b i c data su tri različita načina rešavanja jednog tipa integrala u cilju prikaza efektivnosti primene kompleksnih brojeva.

5.1 Primena kompleksnih brojeva u rešavanju nekoliko tipova neodredjenih integrala

Neke tipove integrala moguće je rešavati primenom eksponencijalnog i trigonometrijskog oblika kompleksnog broja uz izvodjenje postupka "linearizacije" što uprošćava problem.

Ako posmatramo eksponencijalni i trigonometrijski oblik kompleksnog broja:

$$z = \rho \cdot \mathrm{e}^{i\theta}$$

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Tada važi:

$$z = z$$

$$\rho \cdot \mathrm{e}^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

i za $\rho \neq 0$ dobijamo:

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{4}$$

Uvodjenjem u (4) $-\theta$ umesto θ i korišćenjem parnosti kosinusne funkcije i neparnosti kosinusne funkcije dobijamo:

$$\mathrm{e}^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

odnosno:

$$\mathrm{e}^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \tag{5}$$

Kombinovanjem (4) i (5) dobijamo sistem:

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$$\mathrm{e}^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Nakon sabiranja dobijamo:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$$

sredjivanjem:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \tag{6}$$

Nakon množenja (5) sa -1 i sabiranjem sa jednačinom (4) dobijamo:

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$$

sredjivanjem:

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{7}$$

Uz pomoć jednačina (6) i (7) možemo vršiti tako zvanu "linearizaciju" izraza oblika:
a) $(\sin(ax))^n \cdot (\cos(bx))^m$
b) $(\sin(ax))^n \cdot (\sin(bx))^m$
c) $(\cos(ax))^n \cdot (\cos(bx))^m$;$n, m$

Što ćemo iskoristiti za rešavanje integrala tipa (I):
a1) $\int (\sin(ax))^n \cdot (\cos(bx))^m dx$
b1) $\int (\sin(ax))^n \cdot (\sin(bx))^m dx$
c1) $\int (\cos(ax))^n \cdot (\cos(bx))^m dx$

Naravno ovde ću napomenuti da je specijalan tip integrala u kome $(a = b)$ ima jednostavniji algoritam za rešavanje:

$$\int (\sin(x))^n \cdot (\cos(x))^m dx \tag{8}$$

U sledećem zadatku koji je preuzet iz [29] je primenjen postupak "linearizacije".

Zadatak 1 $\int \cos^2(3x)\sin^3(2x)dx$

Rešenje.
$\cos^2(3x)\sin^3(2x) =$
$(\cos(3x))^2(\sin(2x))^3 =$
$(\frac{e^{3xi}+e^{-3xi}}{2})^2 \cdot (\frac{e^{2xi}+e^{-2xi}}{2})^3 =$
$\frac{-1}{32i}(e^{6xi} + 2 + e^{-6xi}) \cdot (e^{6xi} - 3e^{2xi} + 3e^{-2xi} - e^{-6xi}) =$
$\frac{i}{32}(e^{12xi} - 3e^{8xi} + 3e^{4xi} + 2e^{6xi} - 6e^{2xi} + 6e^{-2xi} - 2e^{-6xi} - 3e^{-4xi} + 3e^{-8xi} - e^{-12xi}) =$
$\frac{i}{32}((\frac{e^{12xi}+e^{-12xi}}{2i})2i - 3(\frac{e^{8xi}+e^{-8xi}}{2i})2i + 2(\frac{e^{6xi}+e^{-6xi}}{2i})2i + 3(\frac{e^{4xi}+e^{-4xi}}{2i})2i - 6(\frac{e^{2xi}+e^{-2xi}}{2i})2i) =$
$\frac{1}{16}(\sin(12x) - 3\sin(8x) + 2\sin(6x) + 3\sin(4x) - 6\sin(2x))$

Nakon ovoga i korišćenjem: $\int \sin(\alpha x)dx = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x) + c, \quad \alpha \neq 0$ lako dobijamo:

$$\int \cos^2(3x)\sin^3(2x)dx =$$

$$\frac{1}{16}(-\frac{1}{12}\cos(12x) + \frac{3}{8}\cos(8x) - \frac{1}{3}\cos(6x) - \frac{3}{4}\cos(4x) + 3\cos(2x)) + c$$

Tip neodredjenog integrala datog u sledećem zadatku preuzetom iz [30] moguće je uraditi na više načina, što ćemo uraditi u cilju prikaza efektivnosti primene kompleksnih brojeva.

Zadatak 2 Često se u analizi susrećemo sa tipom integrala
$\int e^{ax} \cdot \cos(bx)dx$ ili $\int e^{ax} \cdot \sin(bx)dx, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$
Ima više načina da se ovaj tip integrala reši, ilustrovaćemo neke od njih:

Rešenje.

I način

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx = Ae^{ax}\cos(bx) + Be^{ax}\sin(bx)$$

diferenciramo prethodnu relaciju:

$$e^{ax}\cos(bx)dx = A(ae^{ax}\cos(bx) - be^{ax}\sin(bx)) + B(ae^{ax}\sin(bx) + be^{ax}\cos(bx))$$

$$e^{ax}\cos(bx)dx = e^{ax}(Aa\cos(bx) - Ab\sin(bx)) + aB\sin(bx) + Bb\cos(bx))$$

$$\cos(bx)dx = (Aa + Bb)\cos(bx) + (-Ab + aB)\sin(bx)$$

Dobijamo sistem:

$$Aa + Bb = 1$$

$$-Ab + aB = 0$$

Rešavanjem sistema dobijamo:

$$A = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$B = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

.

Konačno dobijamo:

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx)) + c$$

II način

Identičnim postupkom smo mogli odrediti i $\int e^{ax} \cdot \sin(bx)dx$, ali ćemo ga odrediti metodom parcijalne integracije:

$$I = \int e^{ax} \cdot \sin(bx)dx$$

$u = \sin(bx) \qquad dv = e^{ax}dx$
$du = b\cos(bx)dx \qquad v = \frac{1}{a}e^{ax}$

$$\int e^{ax} \cdot \sin(bx)dx =$$

$$\sin(bx) \cdot \frac{1}{a}e^{ax} - \int \frac{1}{a}e^{ax} \cdot b\cos(bx)dx =$$

$$\frac{1}{a}\sin(bx) \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}\int e^{ax} \cdot \cos(bx)dx$$

$$I = \frac{1}{a}\sin(bx) \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}I_1$$

Sada ćemo primeniti metod parcijalne integracije I_1:

$$I_1 = \int \mathrm{e}^{ax} \cdot \cos(bx)dx$$

$$\begin{array}{rr} u = \cos(bx) & dv = \mathrm{e}^{ax}dx \\ du = -b\sin(bx)dx & v = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} \end{array}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \cdot \cos(bx)dx =$$

$$\cos(bx) \cdot \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} - \int \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} \cdot (-b\sin(bx))dx =$$

$$\frac{1}{a}\cos(bx) \cdot \mathrm{e}^{ax} + \frac{b}{a}\int \mathrm{e}^{ax} \cdot \sin(bx)dx$$

Odnosno, dobili smo:

$$I_1 = \frac{1}{a}\cos(bx) \cdot \mathrm{e}^{ax} + \frac{b}{a} \cdot I$$

$$I = \frac{1}{a}\sin(bx) \cdot \mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}(\frac{1}{a}\cos(bx) \cdot \mathrm{e}^{ax} + \frac{b}{a} \cdot I)$$

$$I = \frac{1}{a}\sin(bx) \cdot \mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a^2}\cos(bx) \cdot \mathrm{e}^{ax} - \frac{b^2}{a^2} \cdot I$$

$$I(1 + \frac{b^2}{a^2}) = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + c$$

$$I = \frac{1}{a^2 + b^2}\mathrm{e}^{ax}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + c$$

III način

Prethodna dva načina su data radi poredjenja postupaka u odnosu na sledeći:

$$I_1 = \int \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)dx$$

$$I_2 = \int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)dx$$

Posmatraćemo formalno:

$$\begin{aligned}
I_2 + iI_1 &= i\int \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)dx + \int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)dx \\
&= \int \mathrm{e}^{ax}(i\sin(bx) + \cos(bx))dx \\
&= \int \mathrm{e}^{ax}\cdot \mathrm{e}^{bxi}dx \\
&= \int \mathrm{e}^{(a+bi)x}dx \\
&= \frac{1}{a+bi}\mathrm{e}^{(a+bi)x} \\
&= \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}\mathrm{e}^{ax+bxi} \\
&= \frac{a-bi}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{bxi} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a-bi)(\cos(bx)+i\sin(bx)) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx)+a\sin(bx)i-b\cos(bx)i+b\sin(bx)) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}((a\cos(bx)+b\sin(bx))+i(a\sin(bx)-b\cos(bx))
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova dobijamo:

$$I_1 = \int \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)dx = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx)-b\cos(bx))+c$$

$$I_2 = \int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)dx = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx)+b\sin(bx))+c$$

6 KOMPLEKSNI BROJEVI I NEJEDNAKOSTI

U ovom poglavlju analizirana je veza kompleksnih brojeva i nejednakosti. U zadacima 1 i 2 preuzetim iz [14] ilustrovana je metoda dokazivanja nejednakosti za elemente trougla u ravni korišćenjem kompleksne ravni i nejednakosti vezanih za module. Zadaci 3, 4 i 5 preuzeti iz [31] ilustruju direktno nejednakosti za kompleksne brojeve.

Zadatak 1 *Neka je S središte opisane kružnice trougla ABC. Ako su d_a, d_b, d_c redom udaljenosti tačke S od prava BC, CA, AB, dokažite da važi nejednakost:*

$$|AB| \cdot |BC| \cdot |CA| \leq 4(d_a^2 \cdot |BC| + d_b^2|CA| + d_c^2 \cdot |AB|$$

Rešenje. Postavimo centar opisane kružnice u koordinatni početak, t.j. neka je $S(O)$. Tada je $d_a = |SP_{BC}|$, $d_b = |SP_{CA}|$, $d_c = |SP_{AB}|$ gde su P_{BC}, P_{CA}, P_{AB} redom središta stranica $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$.

Imamo

$$P_{BC}(\frac{b+c}{2}), \quad P_{CA}(\frac{c+a}{2}), \quad P_{AB}(\frac{a+b}{2})$$

Dobijamo

$$2d_a = |b+c|, \quad 2d_b = |c+a|, \quad 2d_c = |a+b|$$

Kako važi

$$|a-b| \cdot |a-c| \cdot |b-c| \leq |b-c| \cdot |b+c|^2 + |c-a| \cdot |c+a|^2 + |a-b| \cdot |a+b|^2$$

odnosno

$$|AB| \cdot |BC| \cdot |CA| \leq 4(d_a^2 \cdot |BC| + d_b^2|CA| + d_c^2 \cdot |AB|$$

Zadatak 2 *Dokaži da za svaku unutrašnju tačku P stranice $\overline{AB}$ trougla ABC važi:*

$$|PC| \cdot |AB| < |PA| \cdot |BC| + |PB| \cdot |AC|$$

Rešenje. Postavimo duž $\overline{AB}$ na pozitivni deo realne ose. Tada neka je $A(O)$, $B(b)$, $C(c)$ i $P(p)$, gde su $b, p \in \mathbb{R}$, takvi da je $0 < p < b$. Uočimo da važi

$$b(c-p) = p(c-b) + c(b-p)$$

što nam primenom nejednakosti trougla povlači

$$|b| \cdot |c-p| \leq |p| \cdot |c-b| + |c| \cdot |b-p|$$

odnosno

$$|AB| \cdot |PC| < |AP| \cdot |PC| + |AC| \cdot |BP|$$

Zadatak 3 Državno prvenstvo Hrvatske, 2004. godine *Neka je n prirodan broj i neka su $z_1, z_2, ..., z_n, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ kompleksni brojevi takvi da za svaki izbor brojeva $\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n$ iz skupa {-1,1} važi:*

$$|\epsilon_1 z_1 + ... + \epsilon_n z_n| \leq |\epsilon_1 \omega_1 + ... + \epsilon_n \omega_n|.$$

Dokažite da je

$$|z_1|^2 + ... + |z_n|^2 \leq |\omega_1|^2 + ... + |\omega_n|^2$$

Rešenje. Koristićemo identitet $|u-v|^2 + |u+v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$ i matematičku indukciju.

Za **n=1** je očigledno da važi.

Za **n=2** posmatramo dva slučaja:

$$1^0 \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |z_1 + z_2|^2 \leq |\omega_1 + \omega_2|^2$$

$$2^0 \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |z_1 - z_2|^2 \leq |\omega_1 - \omega_2|^2$$

Sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo nejednakost

$$2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 \leq |\omega_1 + \omega_2|^2 + |\omega_1 - \omega_2|^2 = 2|\omega_1|^2 + 2|\omega_2|^2$$

koja deljenjem sa 2 postaje tražena nejednakost.

Pretpostavimo sada da važi za **n=k**.

Uzmimo da je **n=k+1**. Imamo dva slučaja:

1) $\epsilon_k = \epsilon_{k+1}$ i neka je

$$z_1' := z_1, ... \quad z_{k-1}' := z_{k-1}, \quad z_k' := z_k + z_{k+1}$$

$$\omega_1' := \omega_1, ... \quad \omega_{k-1}' := \omega_{k-1}, \quad \omega_k' := \omega_k + \omega_{k+1}$$

Po tvrdjenju zadatka nejednakost

$$|\epsilon_1 z_1' + ... + \epsilon_k z_k'| \leq |\epsilon_1 \omega_1' + ... + \epsilon_k \omega_k'|.$$

važi za proizvoljne $\epsilon_i \in \{-1, 1\}, \quad i = 1, 2, ..., k$. Tada po indukcijskoj pretpostavci važi:

$$|z_1'|^2 + ... + |z_k'|^2 \leq |\omega_1'|^2 + ... + |\omega_k'|^2$$

odnosno

$$|z_1|^2 + ... + |z_{k-1}|^2 + |z_k + z_{k+1}|^2 \leq |\omega_1|^2 + ... + |\omega_{k-1}|^2 + |\omega_k + \omega_{k+1}|^2$$

2) $\epsilon_k = -\epsilon_{k+1}$ i neka je

$$z_1' := z_1, ... \quad z_{k-1}' := z_{k-1}, \quad z_k' := z_k - z_{k+1}$$

$$\omega_1' := \omega_1, ... \quad \omega_{k-1}' := \omega_{k-1}, \quad \omega_k' := \omega_k - \omega_{k+1}$$

Po tvrdjenju zadatka nejednakost $|\epsilon_1 z_1' + ... + \epsilon_k z_k'| \leq |\epsilon_1 \omega_1' + ... + \epsilon_k \omega_k'|$. važi za proizvoljne $\epsilon_i \in \{-1, 1\}, \quad i = 1, 2, ..., k$. Tada po indukcijskoj pretpostavci važi:

$$|z_1'|^2 + ... + |z_k'|^2 \leq |\omega_1'|^2 + ... + |\omega_k'|^2$$

odnosno

$$|z_1|^2 + ... + |z_{k-1}|^2 + |z_k - z_{k+1}|^2 \leq |\omega_1|^2 + ... + |\omega_{k-1}|^2 + |\omega_k - \omega_{k+1}|^2$$

Sabiranjem ove nejednakosti i poslednje nejednakosti u prvom slučaju dobijamo:

$$2(|z_1|^2 + ... + |z_{k-1}|^2) + |z_k - z_{k+1}|^2 + |z_k + z_{k+1}|^2 \leq 2(|\omega_1|^2 + ... + |\omega_{k-1}|^2) + |\omega_k - \omega_{k+1}|^2 + |\omega_k + \omega_{k+1}|^2$$

odnosno nakon korišćenja početnog identiteta i deljenja sa 2:

$$|z_1|^2 + ... + |z_{k+1}|^2 \leq |\omega_1|^2 + ... + |\omega_{k+1}|^2$$

Ovim smo matematičkom indukcijom dokazali da tvrdjenje važi za svako $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 4. Petrovićeva nejednakost
Dokazati Petrovićevu nejednakost:

$$|\sum_{k=1}^{n} z_k| > (\cos\theta)\sum_{k=1}^{n}|z_k|,$$

gde su z_k kompleksni brojevi za koje je

$$\alpha - \theta < \arg z_k < \alpha + \theta \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2}; \alpha \textit{ realan broj}).$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} |\sum_{k=1}^{n} z_k| &= |\mathrm{e}^{-i\theta}\sum_{k=1}^{n} z_k| \geq R_e(\mathrm{e}^{-i\theta}\sum_{k=1}^{n} z_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}|z_k|\cos(-\alpha + \arg z_k) \geq (\cos\theta)\sum_{k=1}^{n}|z_k|. \end{aligned}$$

Zadatak 5. Bohrova nejednakost *Dokazati Bohrovu nejednakost*

$$|a+b|^2 \leq (1+c)\cdot|a|^2 + (1+\frac{1}{c})\cdot|b|^2,$$

gde su a i b kompleksni brojevi i $c > 0$.

Dokaz 1. Ova nejednakost ekvivalentna je nejednakosti

$$a\bar{b} + b\bar{a} \leq ca\bar{a} + \frac{1}{c}b\bar{b}, \tag{9}$$

koja se može napisati u obliku

$$\frac{1}{c}(ca - b)(c\bar{a} - \bar{b}) \geq 0.$$

Pošto je $c \geq 0$ ova nejednakost ekvivalentna je sledećoj

$$|ca - b|^2 \geq 0.$$

Kako je ova nejednakost tačna, zaključujemo da je Bohrova nejednakost takodje tačna.

Dokaz 2. Ako je $c > 0$, tada se (9) može predstaviti u obliku

$$(a\overline{a})c^2 - (a\overline{b} + b\overline{a}) + b\overline{b} \geq 0.$$

Ova nejednakost biće ispunjena za svako realno c ako i samo ako je

$$(\overline{a}b + b\overline{a})^2 - 4ab\overline{ab} < 0, \; tj. \; (a\overline{b} + b\overline{a})^2 < 0.$$

Ova nejednakost važi za svaki par kompleksnih brojeva, jer je

$$\overline{a}b + b\overline{a} = \alpha i \quad (\alpha \; realno).$$

7 TAKMIČARSKI ZADACI I KOMPLEKSNI BROJEVI

U ovom poglavlju su dati zadaci koja se mogu koristiti u pripremnoj etapi za srednjoškolska matematička takmičenja, kao i primeri takmičarskih zadataka.

7.1 PRIMERI PRIPREMNIH ZADATAKA ZA MATEMATIČKA TAKMIČENJA

Zadatak 1 ilustruje efikasnost primene kompleksnih brojeva u odredjivanju odnosa duži u jednom partikularnom slučaju. Zadatak 2 ilustruje primenu na konveksan šestougao. Napoleonova teorema (zadatak 3) daje vezu izmedju težišta sistema trougla. Zadatak 4 prikazuje primenu na pravilan sedmougao na odredjivanje odnosa uglova izmedju elemenata tog sedmougla. Zadaci su preuzeti iz [14].

Zadatak 1 *Dat je trougao $A(a), B(b)$ i $C(c)$. Odrediti odnos dužina $|AB| = |a-b|$ i $|BC| = |b-c|$ ako je $a - 2b + c = ib - ic$.*

Rešenje.
Iz uslova zadatka sledi $|AB| = |a-b|$, $|BC| = |b-c|$ i $a - b = (i+1)(b-c)$
Tada je

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|a-b|}{|b-c|} = |\frac{a-b}{b-c}| = |1+i| = \sqrt{2}.$$

Dakle, $|AB| : |BC| = \sqrt{2} : 1$.

Zadatak 2 *U konveksnom šestouglu $ABCDEF$ važi $\angle B + \angle D + \angle F =$* 360^0 i $|AB| \cdot |CD| \cdot |EF| = |BC| \cdot |DE| \cdot |FA|$ dokazati da je

$$|BC| \cdot |AE| \cdot |FD| = |CA| \cdot |EF| \cdot |DB|$$

Rešenje. Neka su $A(a), B(b), C(c), D(d), E(e) i F(f)$ temena datog šestougla. Kako je $ABCDEF$ konveksan, važi

$$\angle B = \arg\frac{a-b}{c-b}, \quad \angle D = \arg\frac{c-d}{e-d}, \quad \angle F = \arg\frac{e-f}{a-f}$$

Po formuli za udaljenost tačaka u kompleksnoj ravni važi

$$1 = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CD|}{|DE|} \cdot \frac{|EF|}{|FA|} = |\frac{a-b}{c-b}| \cdot |\frac{c-d}{e-d}| \cdot |\frac{e-f}{a-f}| = |\frac{a-b}{c-b} \cdot \frac{c-d}{e-d} \cdot \frac{e-f}{a-f}|.$$

S obzirom da je arg $\frac{a-b}{c-b}\cdot\frac{c-d}{e-d}\cdot\frac{e-f}{a-f}=\angle B+\angle D+\angle F=2\pi$, važi

$$\frac{a-b}{c-b}\cdot\frac{c-d}{e-d}\cdot\frac{e-f}{a-f}=1\cdot(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=1.$$

Uočimo da je

$$(a-b)(c-d)(e-f)-(c-b)(e-d)(a-f)=(b-c)(a-e)(f-d)-(a-c)(f-e)(b-d)$$

iz čega sledi

$$\frac{b-c}{a-c}\cdot\frac{a-e}{f-e}\cdot\frac{f-d}{b-d}=1.$$

Primenom apsolutnih vrednosti na gornji identitet dobijamo

$$\frac{|BC|}{|CA|}\cdot\frac{|AE|}{|EF|}\cdot\frac{|FD|}{|DB|}=1.$$

Zadatak 3. Napoleonova teorema *Nad stranicama trougla ABC konstruisani su jednakostranični trouglovi. Dokaži da su težišta tih jednakostraničnih trouglova vrhovi jednakostraničnih trouglova.*

Dokaz. Postavimo tačke $A(0), B(b)$ i $C(c)$. Neka su jednakostranični trouglovi konstruisani nad stranicama trouglova ABC redom trouglovi A_1BC, ABC, ABC_1, njihova težišta su redom $T_1(t_1), T_2(t_2)$ i $T_3(t_3)$. Cilj nam je izraziti koordinate a_1, b_1, c_1 tačaka A_1, B_1, C_1 i t_1, t_2, t_3 pomoći koordinata (0), b i c. Tačke A_1, B_1, C_1 dobijene su rotacijom za 60^0 tačaka B, C, A redom oko tačaka C, A, B.

Imamo

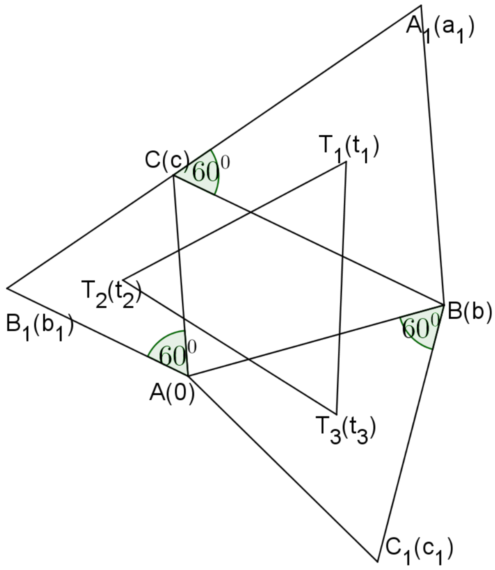
$$a_1=\omega(b-c)+c,\quad b_1=\omega c,\quad c_1=\omega(0-b)+b=(1-\omega)b$$

gde je $\omega=\cos 60^0+i\sin 60^0=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Kako su T_1, T_2, T_3 težišta važi

$$t_1=\frac{a_1+b+c}{3}=\frac{\omega(b-c)+b+2c}{3},\ t_2=\frac{0+b_1+c}{3}=\frac{(1+\omega)c}{3},\ t_3=\frac{0+b+c_1}{3}=\frac{(2-\omega)b}{3}.$$

Dovoljno je pokazati da važi $|t_1-t_2|=|t_2-t_3|=|t_3-t_1|$ i tvrdjenje je dokazano. Primetimo da važi $\omega^2-\omega+1=0$, pa je $1-2\omega=-\omega-\omega^2=-\omega(1+\omega)$ i $2-\omega=1-\omega^2$.
Sada je

$$\begin{aligned}t_1-t_2=&\frac{(1+\omega)b+(1-2\omega)c}{3}\\ =&\frac{(1+\omega)b-\omega(1+\omega)c}{3}\\ =&\frac{1+\omega}{3}\cdot(b-\omega c)\end{aligned}$$



Slika 10: Napoleonovi trouglovi

$$
\begin{aligned}
t_2 - t_3 =& \frac{(1+\omega)c - (2-\omega)b}{3} \\
=& \frac{(1+\omega)c - (1-\omega^2)b}{3} \\
=& \frac{1+\omega}{3} \cdot (c - (1-\omega)b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_3 - t_1 =& \frac{(1-2\omega)b - (2-\omega)c}{3} \\
=& \frac{-\omega(1+\omega)b - (1-\omega^2)c}{3} \\
=& \frac{1+\omega}{3} \cdot (-\omega b - (1-\omega)c)
\end{aligned}
$$

Konačno kako je

$$
\begin{aligned}
|c - (1-\omega)b| =& |c + \omega^2 b||-\omega| = |b - \omega c| = |-\omega||b - \omega c| = \\
=& |-\omega b + \omega^2 c| = |-\omega b - (1 - \omega c)|,
\end{aligned}
$$

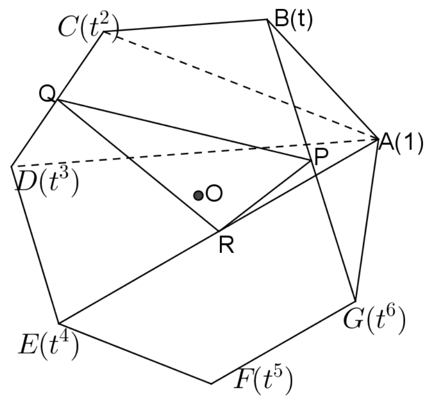
važi $|t_1 - t_2| = |t_2 - t_3| = |t_3 - t_1|$. Dakle, trougao $T_1T_2T_3$ je jednakostraničan.

Zadatak 4 *Dat je pravilan sedmougao $ABCDEFG$. Neka su tačke P, Q, R redom središta duži $\overline{BG}.\overline{CD}, \overline{AE}$. Dokaži da se uglovi trougla QPR odnose u razmeri 1:2:4.*

Rešenje. Primetimo da se uglovi trougla ADC odnose kao 1:2:4. Dovoljno je pokazati da je $\triangle ADC \sim \triangle QPR$. Označimo koordinate tačaka malim slovima njihovih naziva. Tada je dovoljno pokazati da važi:

$$\frac{a-d}{a-c} = \frac{q-p}{q-r}$$

Neka je $A(1), B(t), C(t^2), D(t^3), E(t^4), F(t^5), G(t^6)$, gde je



Slika 11: Sedmougao

$t = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$. Tada je

$$q = \frac{t^2+t^3}{2}, \quad p = \frac{t+t^6}{2}, \quad r = \frac{1+t^4}{2}$$

S obzirom da je $t^7 = 1$, sledi

$$\frac{a-d}{a-c} = \frac{1-t^3}{1-t^2} = \frac{t^7-t^3}{1-t^2} = -(1-t^2)t^3.$$

$$\frac{q-p}{q-r} = \frac{t^2+t^3-t^6-t}{t^2+t^3-1-t^4} = \frac{t^9+t^3-t^6-t^8}{t^2+t^3-1-t^4} = -(1-t^2)t^3.$$

Time smo pokazali da je $\triangle ADC \sim \triangle QPR$, čime je dokazana tvrdnja zadatka.

7.2 PRIMERI TAKMIČARSKIH ZADATAKA

U ovom delu je dato nekoliko zadataka koji su preuzeti iz [32] koji su bili zadavani na matematičkim takmičenjima srednjoškolaca na internacionalnom nivou. Zadatak 1 ilustruje (uvek inspirativan) jednakostraničan trougao, tačnije generisanje temena jednakostraničnog trougla iz datih partikularnih uslova, zadatak 2 predstavlja primer koji ilustruje vezu veličine (relacije) uglova i stranica i njihovu implikacija na odnos izmedju dužina. Zadatak 3 pokazuje jedan interesantan metrički rezultat. Zadatak 4 Ilustruje primenu kompleksnih brojeva na odredjivanje uglova izmedju duži.

Zadatak 1 Mediteransko matematičko takmičenje 2004. godine *Neka su z_1, z_2, z_3 u parovima različiti kompleksni brojevi za koje je:*

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$$

i važi jednakost

$$\frac{1}{2+|z_1+z_2|} + \frac{1}{2+|z_2+z_3|} + \frac{1}{2+|z_3+z_1|} = 1$$

Ako su tačke $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ temena oštrouglog trougla, dokažite da je trougao jednakostraničan.

Rešenje. Neka je ABC trougao sa uglovima α, β, γ. Proverimo zbir $z_1 + z_2$. Neka je $D(z_1 + z_2)$, tada je $OADB$ romb (slika 3). Cilj nam je utvrditi koliko je
$|OD| = |z_1 + z_2|$
Neka je O' presek dijagonala $\overline{OD}$ i $\overline{AB}$. Kako je $OADB$ romb važi $OD \perp AB$ i $|OO'| = |O'D|$ pa je trougao $OO'D$ pravougli, što nam daje

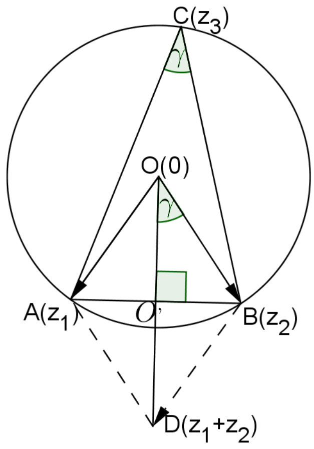
$$|z_1 + z_2| = 2|OO'| = 2|OB| \cos\angle O'OB = 2|z_1|\angle DOB = 2\cos\gamma$$

jer je prava OD simetrala ugla AOB, a prema pravilu o perifernom i centralnom uglu je $\angle AOB = 2\angle ACB = 2\gamma$.
Analogno dobijamo da je $|z_2 + z_3| = 2\cos\beta$

$$\frac{1}{2+2\cos\alpha} + \frac{1}{2+2\cos\beta} + \frac{1}{2+2\cos\gamma} = 1$$

Za uglove trougla važi $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$
Po $A - H$ (aritmetičko harmonijska sredina) nejednakosti važi

$$\frac{9}{6+2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)} \leq \frac{1}{2+2\cos\alpha} + \frac{1}{2+2\cos\beta} + \frac{1}{2+2\cos\gamma}$$



Slika 12: OADB romb

zbog $6 + 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \leq 9$, iz gornje nejednakosti dobijamo

$$1 \leq \frac{1}{2+2\cos\alpha} + \frac{1}{2+2\cos\beta} + \frac{1}{2+2\cos\gamma} = 1$$

U svim nejednakostima koje smo do sada koristili mora važiti
$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 60^0$.

Zadatak 2 Matematička olimpijada 1993. *Tačka D izabrana unutar oštrouglog trougla ABC tako da je $\angle ADB = 90^0 + \angle ACB$ i $|AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC|$. Odrediti koliko je:*

$$\frac{|AB| \cdot |CD|}{|AC| \cdot |BD|}$$

Rešenje. Neka su $A(a), B(b), C(c)$ i $D(d)$. Važi:

$$\begin{aligned}
\arg\frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)} &= \arg\frac{b-c}{a-c} \cdot \left(\frac{b-d}{a-d}\right)^{-1} \\
&= \arg\frac{b-c}{a-c} - \arg\frac{b-d}{a-d} \\
&= \angle ACB - \angle ADB = -90^0,
\end{aligned}$$

$$\left|\frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)}\right| = \frac{|b-c| \cdot |a-d|}{|a-c| \cdot |b-d|} = \frac{|BC| \cdot |AD|}{|AC| \cdot |BD|} = 1$$

što znači da je

$$\frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)} = 1(\cos(-90^0) + i\sin(-90^0)) = -1.$$

Koristeći to dobijamo

$$-i-1=\frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)}-1=\frac{-bd-ca+bc+ad}{(a-c)(b-d)}=\frac{(b-a)(c-d)}{(a-c)(b-d)}$$

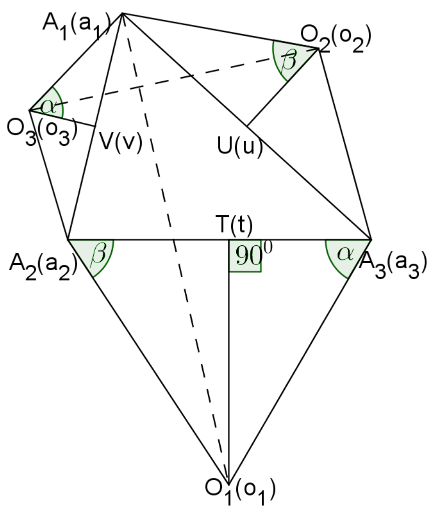
iz čega sledi

$$\frac{|AB|\cdot|CD|}{|AC|\cdot|BD|}=|\frac{(b-a)(c-d)}{(a-c)(b-d)}|=|-1-i|=\sqrt{2}$$

Zadatak 3 Iran 2000. *Jednakostranični trouglovi $A_3A_1O_2$ i $A_1A_2O_3$ su konstruisani nad stranicama trougla $A_1A_2A_3$ prema van, gde je $|O_2A_3|=|A_1O_2|$ i $|O_3A_1|=|A_2O_3|$. Data je tačka O_1 sa suprotne strane prave A_2A_3 od tačke A_1, gde je $\angle O_1A_3A_2=\frac{1}{2}\angle A_1O_3A_2$ i $\angle O_1A_2A_3=\frac{1}{2}\angle A_1O_2A_3$, neka je T podnožje normale iz O_1 na A_2A_3. Dokaži da je $A_1O_1\perp O_2O_3$ i da je:*

$$\frac{|A_1O_1|}{|O_2O_3|}=2\cdot\frac{|O_1T|}{|A_2A_3|}.$$

Rešenje. Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da je $A_1A_2A_3$ pozitivno orijentisan. Neka su tačke U i V redom središta stranica $\overline{A_1A_3}$ i $\overline{A_1A_2}$.



Postavimo središte kompleksne ravni u tačku T i neka se koordinate ostalih tačaka zovu malim slovima njihovih imena. Važi

$$t=0,\quad u=\frac{a_3+a_1}{2},\quad v=\frac{a_1+a_2}{2}.$$

Uočimo da je $\triangle TO_1A_3 \sim \triangle VA_1O_3$, pa važi

$$\frac{a_3 - t}{o_1 - t} = \frac{o_3 - v}{a_1 - v}$$

sledi

$$\begin{aligned} o_3 =& \frac{a_3}{o_1}(a_1 - v) + v \\ =& \frac{a_3}{o_1} \cdot \frac{a_1 - a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} \end{aligned}$$

Takodje, uočimo da je $\triangle TO_1A_2 \sim \triangle UA_1O_2$, pa je

$$\frac{a_2 - t}{o_1 - t} = \frac{o_2 - u}{a_1 - u}$$

sledi

$$\begin{aligned} o_2 =& \frac{a_2}{o_1}(a_1 - u) + u \\ =& \frac{a_2}{o_1} \cdot \frac{a_1 - a_3}{2} + \frac{a_1 + a_3}{2} \end{aligned}$$

Sada je

$$\frac{o_2 - o_3}{o_1 - a - 1} = \frac{-a_1(a_3 - a_2) + o_1(a_3 - a_2)}{2o_1(o_1 - a - 1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-a_2 + a_3}{o_1 - t},$$

odakle sledi
$\frac{|O_2O_3|}{|A_1O_1|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|A_2A_3|}{|O_1T|}$,b i $A_1O_1 \perp O_2O_3$, jer je $OT \perp A_2A_3$.

Zadatak 4 Hrvatsko dodatno takmičenje 2004. *Dat je polukrug sa centrom O i prečnikom AB, zatim prava koja seče polukrug u tačkama C i D, a pravu AB u tačci M (pri čemu je $|MB| < |MA|$ i $|MD| < |MC|$). Ako je K presek kružnica opisanih oko trougliva AOC i DOB, (različito od O), dokažite $\angle MKO$ je prav ugao.*

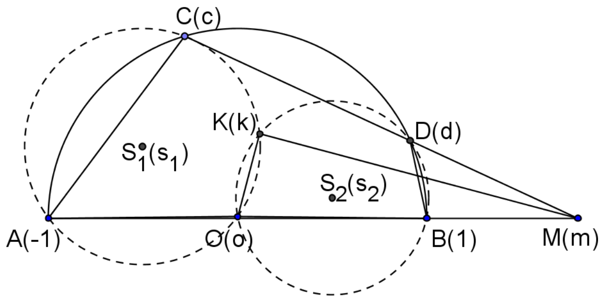
Rešenje. Bez umanjenja opštosti možemo uzeti da je $A(-1), O(o), B(1)$. Tada tačke $D(d)$ i $C(c)$ leže na jediničnoj kružnici (pa važi $|d| = |c| = 1$).

Jednačina prave CD u kompleksnim brojevima glasi

$$z + cd\overline{z} = c + d,$$

a jednačina prave AB glasi

$$z - \overline{z} = 0.$$



Tačka M je presek prava AB i CD, pa za $M(m)$ važi (rešavanjem prethodne dve jednačine):

$$m = \frac{c+d}{1+cd}.$$

Označimo sa $S_1(s_1)$ i $S_2(s_2)$ redom centre opisanih kružnica trouglova OCA i OBD.

Simetrala duži $\overline{BD}$ ima jednačinu

$$|d-z|^2 = |z-b|^2 \quad \Rightarrow \quad z - d\overline{z} = 0,$$

a simetrala duži $\overline{OB}$ jednačinu

$$z + \overline{z} = 0.$$

Budući da centar opisane kružnice (tačka S_2) trougla OBD leži na ta dva pravca, dobijamo

$$s_2 = \frac{d}{1+d}.$$

Jednačine simetrala duži $\overline{AC}$ i $\overline{AO}$ su redom

$$z + c\overline{z} = 0 \quad i \quad z + \overline{z} = -1.$$

Kako je tačka S_1 presek tih prava važi

$$s_1 = \frac{c}{1-c}.$$

Jednačina kružnice opisane oko trougla OCA je

$$|z-s_1| = |s_1| \Leftrightarrow |z-s_1|^2 = (z-s_1)\overline{(z-s_1)} = |s_1|^2 = s_1\overline{s_1},$$

što postaje

$$z\overline{z} = \overline{s_1}z + s_1\overline{z}.$$

Na isti način dobijamo da je jednačina kružnice opisane oko trougla OBD

$$z\overline{z} = \overline{s_2}z + s_2\overline{z}.$$

Preseci te dve kružnice su tačke $O(o)$ i $K(k)$. Kako je $k \neq 0$ dobijamo

$$k = \frac{s_1\overline{s_2} - s_2\overline{s_1}}{\overline{s_2} - \overline{s_1}}.$$

Koristeći činjenicu da je $\overline{c} = \frac{1}{c}$ i $\overline{d} = \frac{1}{d}$ dobijamo da je

$$\overline{s_1} = \frac{1}{c-1}, \quad \overline{s_2} = \frac{1}{d-1}.$$

Iz čega sledi

$$k = \frac{c+d}{2+d-c}.$$

Da bi bilo $OK \perp KM$, broj $t = \frac{k-0}{k-m} = \frac{1}{1-\frac{m}{k}}$ mora biti imaginaran, odnosno mora da važi $\overline{t} = -t$. Dobijamo da je

$$t = \frac{1+cd}{(c-1)(d+1)}$$

i

$$\overline{t} = \frac{\overline{1+cd}}{\overline{(c-1)} \cdot \overline{(d+1)}} = \frac{1+1/cd}{(1/c-1)(1/d+1)} = -\frac{1+cd}{(c-1)(d+1)} = -t.$$

Čime je dokazano tvrdjenje zadatka.

8 OSNOVNI STAV ALGEBRE

U ovoj glavi dokazujemo sledeću teoremu:

Teorema (Osnovni stav algebre) *Svaki polinom nad poljem kompleksnih brojeva stepena bar jedan ima bar jednu nulu u skupu kompleksnih brojeva.*

Da bi smo dokazali ovu teoremu potrebne su nam tri sledeće leme:

Lema 1 *Neka je* $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ *proizvoljan polinom nad poljem kompleksnih brojeva. Tada je* f *neprekidna funkcija u svakoj tački* $z_0 \in \mathbb{C}$.

Lema 2 *Neka su* $n \in \mathbb{N}$ *i* $z \in \mathbb{Z}$ *takvi da je* $|z| = 1$. *Tada postoji* $w \in \mathbb{C}$ *takav da je* $w^n = z$. *Taj broj se zove n-ti koren iz z.*

Lema 3 *Funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *neprekidna na kompaktnom skupu [a,b] dostiže svoj infimum, to jest ima minimum na [a,b].*

Uz ove leme koje usvajamo bez dokaza, potrebna nam je D'Alamberova lema. Dokaz je preuzet iz [20].

Lema (*D'Alamberova*) *Neka je* $p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + ... + c_1 z + c_0$ *polinom sa kompleksnim koeficijentima stepena* $n \geq 1$. *Ako je* $p(a) \neq 0$ *onda svaka okolina* D *tačke* a *sadrži tačku* b *takvu da važi* $|p(b)| < |p(a)|$.

Dokaz. Neka je D okolina tačke a poluprečnika R. Tačke unutar te okoline D su oblika $a + w$, $|w| < R$. Treba da pokažemo da postoji w za koje ovo važi i da je $|p(a + w)| < |p(a)|$.

Prvo ćemo pokazati da $p(a + w)$ možemo napisati na sledeći način:

$$p(a + w) = p(a) + cw^m(1 + r(w)), \qquad (1)$$

gde je $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $1 \leq m \leq n$, $r(w)$ je polinom stepena $n - m$ i $r(0) = 0$.

Imamo sledeće:

$$\begin{aligned}p(a+w) &= \sum_{k=0}^{n} c_k (a+w)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{i} a^{k-i} w^i \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} c_k a^{k-i}) w^i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=0}^{n} c_k a^k + \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} c_k a^{k-i}) w^i \\ &= p(a) + \sum_{i=1}^{n} d_i w^i\end{aligned}$$

Neka je $m = min\{i : d_i \neq 0\}$ i $c = d_m$, ako izvučemo cw^m dobijamo:

$$p(a+w) = p(a) + cw^m(1 + r(w)).$$

Sada želimo da ograničimo odozgo $|cw^m|$ i $|r(w)|$.

Ako je $|w| < \rho_1 := \sqrt[m]{\frac{|p(a)|}{|c|}}$ sledi $|cw^m| < |p(a)|$. Dalje, kako je $r(w)$ neprekidna funkcija i $r(0) = 0$ imamo da je $|r(w)| < 1$ za $|w| < \rho_2$.
Za $|w| < \rho := min\{\rho_1, \rho_2\}$ dobijamo

$$|cw^m| < |p(a)|, \quad r(w)| < 1. \qquad (2)$$

Neka je ξ m-ti koren od $-\frac{p(a)/c}{|p(a)/c|}$, kompleksnog broja apsolutne vrednosti 1 i neka je ε realan broj za koji važi $0 < \varepsilon < min\{\rho, R\}$. Ukoliko za w_0 uzmemo $w_0 = \varepsilon\xi$, tvrdimo da je $b = a + w_0$ tražena tačka unutar okoline D za koju važi $|p(b)| < |p(a)|$. Kao prvo, b je unutar okoline D, jer je $|w_0| = \varepsilon < R$, iz (1) dobijamo

$$|p(b)| = |p(a+w)| = |p(a) + cw_0^m(1 + r(w_0))|. \qquad (3)$$

Sada definišemo δ na sledeći način

$$cw_0^m = c\varepsilon^m\xi^m = -\frac{\varepsilon^m}{|\frac{p(a)}{c}|}p(a) = -\delta p(a).$$

gde na osnovu (2) naše δ zadovoljava

$$0 < \delta = \varepsilon^m \frac{|c|}{|p(a)|} < 1.$$

Koristeći nejednakost trougla dobijamo

$$\begin{aligned}
|p(b)| =& |p(a + w_0)| \\
=& |p(a) + cw_0^m(1 + r(w_0))| \\
=& |p(a) - \delta p(a)(1 + r(w_0))| \\
=& |(1 - \delta)p(a) - \delta p(a)r(w_0)| \\
\leq& (1 - \delta)|p(a)| + \delta|p(a)||r(w_0)| \\
<& (1 - \delta)|p(a)| + \delta|p(a)| \\
=& |p(a)|.
\end{aligned}$$

Sada dokazujemo osnovni stav algebre, jasno

$$\begin{aligned}
\lim_{|z|\to\infty} p(z)z^{-n} =& \lim_{|z|\to\infty} (c_n + \frac{c_{n-1}}{z} + \frac{c_{n-2}}{z^2} + ... + \frac{c_0}{z^n}) \\
=& c_n.
\end{aligned}$$

Takodje,

$$\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = \infty.$$

Postoji $R_1 > 0$ takvo da je $|p(z)| > |p(0)|$ za svaku tačku z koja leži na kružnici $\{z : |z| = R_1\}$. Dalje (iz leme 3) znamo da na kompaktnom skupu $D_1 = \{z : |z| \leq R_1\}$ realna neprekidna funkcija $|p(z)|$ dostiže minimum u nekoj tački z_0. Ali kako je $|p(z)| > |p(0)|$ za z koje se nalazi na kružnici D_1, z_0 se mora nalaziti u unutrašnjosti kružnice D_1. Na osnovu D'Alamberove leme ta minimalna vrednost $|p(z_0)|$ mora biti 0.

ZAKLJUČAK

Kompleksni brojevi našli su primenu u raznim sferama matematike. Nakon istorijskog pregleda i uvodjenja osnovnih definicija dat je prikaz raznovrsne i efikasne primene kompleksnih brojeva. Cilj rada bio je da pokaže kako kompleksni brojevi pružaju mogućnost da se odredjeni matematički problemi reše efikasnije i elegantnije što je primenjeno pri rešavanju zadataka u algebri, analizi i analitičkoj geometriji. Osnovni geometrijski pojmovi u analitičkoj geometriji mogu se lako izraziti preko kompleksnih brojeva, a moguće je rešiti razne geometrijske probleme uz upotrebu kompleksnih brojeva. Oni, takodje, mogu biti moćan aparat u algebri za odredjivanje konačnih zbirova i suma, suma generisanih binomnim obrascem. Kompleksne brojeve možemo koristiti za izračunavanje konačnih proizvoda, u algebri polinoma, kao i pri rešavanju trigonometrijskih jednačina. U analizi kompleksni brojevi su našli primenu u rešavanju nekoliko tipova neodredjenih integrala.

Da bi se sveobuhvatnije prikazala primena kompleksnih brojeva u radu je dat i odredjen broj takmičarskih zadataka u kojima su oni korišćeni.

U radu je dat i dokaz Osnovnog stava algebre, koja je jedan od značajnijih rezultata u matematici.

Sve što je u radu pisano radjeno je na elementarnom nivou (izuzev nekoliko integrala u poglavlju 5, kao i dokaza fundamentalne teoreme algebre u poglavlju osam) što je podrazumevalo ne korišćenje elementarne kompleksne analize već isključivo kompleksne algebre. Napisan je rad koji može ispratiti gotovo u potpunosti osoba sa srednjoškolskim nivoom matematičke kulture. Smatrano je da su čitaocu poznate standardne metode za rešavanje postavljenih problema, a samim tim da može uvek da proceni efikasnost metode koja je korišćena misleći prvenstveno na kompleksne brojeve.

Svakog momenta smo se rukovodili idejom da je lepota u jednostavnosti "a najkraći put u realnosti je kroz imaginarnost".

LITERATURA

1) Itans Schwerdtseger **“Geometry of complex numbers“** Dover Publications, INC, New York, 1979.

2) Liang shin Hahn **“Complex numbers and geometry”** Published by The Mathematical Association of America Library of Congress Catalog Card Numver, 1994.

3) Roland Deaux **“Introduction to the geometry of complex numbers”** Dover Publications, INC., Mineola, New York, 2008. 3/122 god. XXX Zagreb 1979-80. , časopis

4) Matematičko fizički list za učenike srednjih škola 4/159 god. XXIX Zagreb 1988-89., časopis

5) Matematika stručno metodički časopis Beograd 1972.

6) Bokić, Ivić, Jovanović, Kapetanović, Mihaljinec, Mijajlović, Prešić, Rašković, Rosenzweig, Šeper, Šikić, Ugrin, Šparac **“Brojevi”** školska knjiga, Zagreb, 1985.

7) Radoje Šćepanović, Snežana Delić **“Matematika 2”** za II razred gimnazije Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Podgorica, 2013.

8) D. S. Mitrinović **“Kompleksna analiza”** Izdavačko preduzeće Gradjevinska knjiga, Beograd, 1971.

9) Jovan Karamata **“Kompleksan broj”** Zavod, Beograd, 2007.

10) B. Šešelja, A. Tepavčević **“Algebra 1”** PMF, Novi Sad, 2004.

11) Siniša Ješić **“Matematika III”** Grafostil, Kragujevac 2011.

12) Milojica Jaćimović, David Kaljaj **“Uvod u kompleksnu analizu”** Univerzitet Crne Gore, Podgorica 2009.

13) Miloje Rajović, Jelena Vujaković **“Zbirka zadataka iz kompleksne analize”** Akademska misao, Beograd 2009.

14) Tvrtko Tadić **“Pripreme za matematička natjecanja”** Tisak, Zagreb 2014.

15) Pavle Mladenović, Srdjan Ognjanović **“Pripremni zadaci za matemička takmičenja za učenike srednjih škola”** Društvo matematičara Srbije, Beograd 1987.

16) Rade Doroslovački **“Principi algebre, opšte, diskretne i linearne”** FTN, Novi Sad 2013.

17) D. S. Mitrinović **“Analitičke nejednakosti”** Gradjevinska knjiga, Beograd 1970.

18) Nguyen Khac Oanh **“Diamonds in mathematical inequalites”** 1990.

19) M. A. Lavrentev, B. V. Šabat **“Metodi funkcij kompleksnogo peremennogo”** “Nauka” glavnaja redakcija fizičko - matematičeskoj literaturi, Moskva 1987.

20) M. Aigner, G. M. Ziegler **“Proofs from the book“**, Berlin 2009.

21) Rade Doroslovački, Ljubo Nedović **“Zbirka ispitnih zadataka iz diskretne matematike 1985-2006“**, Alfa Graf, Novi Sad 2006.

22) Aleksandar Damjanović **“Realna Analiza** N_0**“**, Mladost biro, Beograd 2012.

23) Neven Elezović **“Kompleksni brojevi“**, Nacionalna i sveučilišna biblioteka, Zagreb 2000.

24) Šefket Arslanagić **“Matematika za nadarene“**, Bosanska riječ, Sarajevo 2005.

25) D. S. Mitrinović, J. D. Kečkić **“Metodi izračunavanja konačnih zbirova“**, IDP naučna knjiga, Beograd 1984.

26) Andjelko Marić **“Konačni zbrojevi - zbirka rešenih zadataka“**, Element, Zagreb 1998.

27) P. M. Uščumlić, M. P. Miličić **“Zbirka zadataka iz više matematike I“**, Nauka, Beograd 1982.

28) Rade Doroslovački **“Algebra“**, FTN Novi Sad 2016.

29) Nebojša M. Ralević **“Zbirka ispitnih zadataka iz matematike 2“**, Novi Sad 2014.

30) Milan Merkle **“Matematička analiza pregled teorije i zadataka“**, Zavod Beograd 1997.

31) D. S. Mitrinović **“Nejednakosti“**, Gradjevinska knjiga, Beograd 1965.

32) Željko Hanjš **“Medjunarodne matematičke olimpijade“**, Element, Zagreb 2009.

BIOGRAFIJA

Siniša Feher je rodjen 30.3.1975. godine u Vrbasu. Osnovnu školu je završio u Vrbasu, srednju elektrotehničku u Novom sadu, a fakultet za uslužni biznis u Sremskoj Kamenici. Godine 2012 se upisao na master studije na Prirodno matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer nastava matematike. Živi i radi u Vrbasu.

KLjUČNA DOKUMENTACIJA

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Siniša Feher
AU

Mentor: dr Arpad Takači
ME

Naslov rada: Primena kompleksnih brojeva u analitičkoj geometriji, algebri i analizi
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2017
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (8/86/0/0/14/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Kompleksni brojevi
ND

Ključne reči: kubna jednačina, kompleksni brojevi, kompleksna ravan, algebarski oblik kompleksnog broja, trigonometrijski oblik kompleksnog broja, Ojlerov oblik kompleksnog broja, Apolonijeva kružnica, konačni zbirovi i sume, osnovna teorema algebre.
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Ovaj master rad se bavi kompleksnim brojevima i primenom kompleksnih brojeva u raznim matematičkim oblastima. Nakon istorijskog pregleda i uvodjenja osnovnih definicija dat je prikaz raznovrsne i efikasne primene kompleksnih brojeva. Cilj rada bio je da pokaže kako kompleksni brojevi pružaju mogućnost da se odredjeni matematički problemi reše efikasnije i elegantnije što je primenjeno pri rešavanju zadataka u algebri, analizi i analitičkoj geometriji. U poslednjem poglavlju rada je dat dokaz Osnovne

teoreme algebre.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 04.05.2016.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Milica Žigić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Arpad Takači, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Siniša Feher
AU

Mentor: dr Arpad Takači
MN

Title: Application complex numbers in analitic geometry, algebra and analysis
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2017
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (8/86/0/0/14/0/0)(chapters/ pages/quotations/tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Complex numbers
SD

Subject/Key words: cubic equation, complex numbers, complex plane, algebraic form of complex number, trigonometric form of complex number, Euler's form of complex number, Apollonian circle, finite sums and sums, basic algebraic theorem.
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This master thesis is about complex number with the application of complex numbers in various mathematical fields. After the historical review and introduction of the basic definitions, the presentation of a variety and efficient application of complex numbers is given. The aim of the thesis was to show that complex numbers give the possibility to solve certain mathematical problems more efficiently and elegantly, which was applied in

solving problems in algebra, analysis, and analytical geometry. In the last chapter of the thesis, the basic algebraic theorem is given.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 04.05.2016.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad
Member: dr Milica Žigić, associate professor at Faculty of Science in Novi Sad
Mentor: dr Arpad Takači, full professor at Faculty of Science in Novi Sad