



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU



Sanja Vukašinović

ALTERNATIVNI PRISTUPI U IZUČAVANJU RAVANSKIH KRIVIH

- master rad -

Mentor:
Dr Sanja Konjik, vanr. prof.

Novi Sad, 2016.

Predgovor

Mnoge krive se još od antičkih vremena koriste pri rešavanju nekih praktičnih problema. Na primer, u fizici kriva c opisuje kretanje čestice u vremenu t . Ako parametru t pridružimo položaj čestice $c(t)$ dobijamo parametrizaciju krive i kriva je tada parametrizovana. Krive se najlakše matematički izučavaju u ovom obliku. Međutim, kao što ćemo videti, dve parametrizacije mogu opisivati istu krivu. Ovaj nedostatak je doveo do pojave različitih alternativnih načina zadavanja krivih koji mogu biti od posebne važnosti u određenim slučajevima, pre svega implicitno zadavanje krivih, ili pak u polarnim koordinatama.

Osnovni pojmovi teorije krivih kao što su regularna kriva, dužina luka krive, prirodna parametrizacija, Freneova kriva, tangentni i normalni vektor, krivina, biće pregledno dati u uvodnom delu rada. Zatim, u prvom delu rada razmatraće se implicitno zadate krive i upoređivati sa onima koje su definisane parametarski. Ukazaće se na prednosti, a u pojedinim slučajevima i nužnost ovog alternativnog pristupa. Kao ilustracija, biće dati primjeri krivih koje su nula skupovi jednačina trećeg i četvrtog stepena. Drugi način će biti opisanje krivih polarnim koordinatama. To će omogućiti upoznavanje sa familijama zatvorenih krivih i izučavanje različitih vrsta spirala.

U drugom delu rada pažnja će biti posvećena izvođenju novih krivih od date ravanske krive različitim konstrukcijama. Na taj način dobijaju se posebne klase krivih koje se primenjuju u mehanici, geometrijskoj optici i mašinstvu. Razmatraće se četiri klasična primera konstrukcije jedne ravanske krive od druge koja je data. To su evolute, involute, paralelne krive i pedalne krive. Biće pokazano kako se mogu konstruisati normala i tangenta na krivu i njene oskulatorne kružnice, sa ciljem da se, uz dodatna tvrđenja, omogući pogodna vizuelizacija evolute. Slike su crtane u Mathematica-i i Geogebra-i, a neke su preuzete iz [5], [8].

Ovom prilikom bih želela da se zahvalim svom mentoru, dr Sanji Konjik, na izboru teme, pomoći i podršci koju mi je pružila prilikom izrade ovog rada.

Novi Sad, februar 2016.

Sanja Vukašinović

Sadržaj

Predgovor	i
1 Uvod	1
2 Alternativni načini zadavanja ravanskih krivih	10
2.1 Implicitno zadate ravanske krive	10
2.2 Dekartov list	14
2.3 Kasinijevi ovali	16
2.4 Ravanske krive u polarnim koordinatama	18
2.5 Vrste spirala	21
2.6 Pedalne, bipolarne i unutrašnje koordinate	26
3 Neki tipovi izvedenih krivih	28
3.1 Evolute	28
3.2 Involute	38
3.3 Oskulatorne kružnice ravanskih krivih	42
3.4 Paralelne krive	44
3.5 Pedalne krive	47
Zaključak	55
Literatura	56
Biografija	57

Glava 1

Uvod

Uvodna glava daje pregled osnovnih pojmova i rezultata teorije krivih u \mathbb{R}^n . Prostor \mathbb{R}^n je definisan kao skup svih uredenih n -torki realnih brojeva koje zapisujemo sa $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, sa operacijom sabiranja

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

koja zadovoljava aksiome Abelove grupe. Ako je množenje skalarom (elementom polja realnih brojeva) definisano po komponentama

$$a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n),$$

tada važe aksiome vektorskog prostora. Na ovom vektorskom prostoru definišemo *euklidski skalarни производ* sa

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Dužinu vektora definišemo pomoću *norme*

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}},$$

kao i *ugao* φ između vektora \mathbf{x} , $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ sa

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}.$$

Rastojanje izmedju dve tačke \mathbf{x} , \mathbf{y} je norma razlike vektora $\mathbf{y} - \mathbf{x}$.

Pošto ćemo se baviti ravanskim krivama, fokusiraćemo se na \mathbb{R}^2 . Koristićemo linearno preslikavanje $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dato sa

$$J(x_1, x_2) = (-x_2, x_1),$$

koje geometrijski predstavlja rotaciju za ugao $\pi/2$ u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu. Preslikavanje J ima sledeća svojstva:

$$J^2 = -Id,$$

$$(J\mathbf{x}) \cdot (J\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

$$(J\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = 0,$$

za $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.

Uređene parove realnih brojeva možemo posmatrati kao kompleksne brojeve:

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2) \leftrightarrow p_1 + ip_2 = \operatorname{Re} \mathbf{p} + i\operatorname{Im} \mathbf{p},$$

gde $\operatorname{Re} \mathbf{p}$ označava realni, a $\operatorname{Im} \mathbf{p}$ imaginarni deo kompleksnog broja \mathbf{p} . Prisetimo se da su *konjugovano kompleksan broj* i *modul* kompleksnog broja \mathbf{p} definisani sa

$$\bar{\mathbf{p}} = \operatorname{Re} \mathbf{p} - i\operatorname{Im} \mathbf{p}$$

i

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{\mathbf{p}\bar{\mathbf{p}}}.$$

Sledeća lema, koja se lako dokazuje, opisuje skalarni proizvod i linearno preslikavanje J kada za argumente imaju kompleksne brojeve:

Lema 1.1. Neka $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, gde ravan \mathbb{R}^2 identifikujemo sa skupom kompleksnih brojeva \mathbb{C} . Tada važi:

$$J\mathbf{p} = i\mathbf{p},$$

$$|\mathbf{p}| = \|\mathbf{p}\|$$

i

$$\mathbf{p}\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + i\mathbf{p} \cdot J\mathbf{q}.$$

Podsetićemo se pojma diferencijabilnosti kao osnovnog koncepta koji se koristi u teoriji krivih:

Definicija 1.2. Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Funkcija $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ je *diferencijabilna* u tački $x \in U$ ako postoji linearne preslikavanje $A_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ takvo da u ϵ -okolini tačke x važi:

$$F(x + \xi) = F(x) + A_x(\xi) + o(\|\xi\|).$$

$$(\text{Ekvivalentno: } \lim_{\|\xi\| \rightarrow 0} \frac{F(x + \xi) - F(x) - A_x(\xi)}{\|\xi\|} = 0)$$

Identifikovaćemo linearne preslikavanje A_x sa njegovom matricom, koja predstavlja Jakobijan funkcije F :

$$J_x F = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Big|_x \right)_{i,j}.$$

Preslikavanje F u tački x je istog ranga kao Jakobijan. Za nas je najvažniji slučaj kada je funkcija F diferencijabilna u svakoj tački $x \in U$ i rang svuda maksimalan. Značaj ovog svojstva se vidi u teoremi o implicitnoj funkciji:

Teorema 1.3. Neka su $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ i $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ otvoreni skupovi i neka je $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ neprekidno diferencijabilno preslikavanje. Pretpostavimo da za tačku $(a, b) \in U_1 \times U_2$ važe sledeći uslovi:

(i) $F(a, b) = \mathbf{0}$

(ii) Kvadratna matrica $\frac{\partial F}{\partial y} := \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right)_{i,j=1,\dots,m}$ je invertibilna.

Tada postoje otvorena okolina $V_1 \subset U_1$ tačke a , otvorena okolina $V_2 \subset U_2$ tačke b i jedinstveno neprekidno diferencijabilno preslikavanje $g : V_1 \rightarrow V_2$ takvo da je $g(a) = b$ i za sve $(x, y) \in V_1 \times V_2$ važi implicitna jednačina $F(x, y) = \mathbf{0}$ ako i samo ako je zadovoljena eksplicitna jednačina $y = g(x)$.

Jedna njena posledica je teorema o inverznoj funkciji:

Teorema 1.4. Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i neka je $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilna funkcija. Pretpostavimo da za tačku $a \in U$ važe sledeći uslovi:

(i) $b := f(a) \in \mathbb{R}^n$

(ii) Jakobijan $Df(a)$ je invertibilna matrica.

Tada postoje okolina $U_0 \subset U$ tačke a i okolina $V \subset \mathbb{R}^n$ tačke b takve da je $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ bijekcija i $g := (f|_{U_0})^{-1} : V_0 \rightarrow U_0$ neprekidno diferencijabilna funkcija.

Prelazimo na krive u \mathbb{R}^n . One se mogu definisati kao neprekidna preslikavanja iz intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ u \mathbb{R}^n . Međutim, za analitičko izučavanje krivih neprekidnost je isuvise slab uslov. Zato u sledećoj definiciji uvodimo dodatne prepostavke:

Definicija 1.5. Regularna parametrizovana kriva je neprekidno diferencijabilno preslikavanje $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, definisano na realnom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, za koje važi

$$c'(t) = \frac{dc}{dt} \neq \mathbf{0},$$

za svako $t \in I$. Ukoliko postoje tačke neprekidno diferencijabilnog preslikavanja $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ u kojima je $c'(t) = \mathbf{0}$, tada se one nazivaju singularne tačke.

Vektor $c'(t)$ je tangentni vektor na krivu c u tački $c(t)$. Uslov regularnosti znači da u svakoj tački krive postoji nenula tangentni vektor. Jednačina tangente na krivu c u tački $c(t_0)$ je $t \mapsto c(t_0) + tc'(t_0)$. Iz Tejlorove¹ teoreme $c(t_0 + t) = c(t_0) + tc'(t_0) + o(t)$ sledi da je tangenta najbolja linearna aproksimacija krive c u tački $c(t_0)$.

1.0.1 Primeri (i) $c(t) = (at, bt)$, $a, b \in \mathbb{R}$ je parametrizacija prave u ravni. Ona će biti regularna ako i samo ako je $c'(t) = (a, b) \neq \mathbf{0}$.

(ii) Parametrizacija kružnice $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sa centrom u tački $(0, 0)$ poluprečnika $r > 0$ je $c(t) = (r \cos t, r \sin t)$. Kako je

$$\|c'(t)\| = \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r \neq 0,$$

za svako $t \in [0, 2\pi]$, sledi $c'(t) \neq \mathbf{0}$, za svako $t \in [0, 2\pi]$. Dakle, kružnica sa centrom u tački $(0, 0)$ poluprečnika $r > 0$ je regularna kriva.

¹Bruk Tejlor, 1685-1731

(iii) *Nilova² parabola* $c(t) = (t^2, t^3)$ nije regularna kriva u $t = 0$, jer za tangentni vektor $c'(t) = (2t, 3t^2)$ važi $c'(0) = (0, 0)$.

Parametrizacije $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, date sa $\gamma(t) = \sigma(t) = (r \cos 2t, r \sin 2t)$, opisuju istu kružnicu kao u (ii). Međutim, $\gamma'(t) = (-2r \sin 2t, 2r \cos 2t) = 2c'(2t)$, a u slučaju parametrizacije σ kružnica se obilazi dva puta. To je motivacija za sledeću definiciju:

Definicija 1.6. Regularna kriva je klasa ekvivalencije regularnih parametrizovanih krivih u odnosu na sledeću relaciju ekvivalencije:

Neka su $c_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $c_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ regularne parametrizovane krive. Kriva c_1 je *ekvivalentna* sa krivom c_2 ako postoji diferencijabilna funkcija $\varphi : I_1 \rightarrow I_2$ takva da je $c_1 = c_2 \circ \varphi$. Ako je $\varphi' > 0$, pri promeni parametra se očuvava orientacija.

Pojam dužine luka krive je intuitivno jasan. Sada ćemo dati preciznu definiciju:

Definicija 1.7. *Dužina luka* krive $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je

$$L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt.$$

Dužina luka krive ne zavisi od parametrizacije krive:

Lema 1.8. Neka su $c_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $c_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ regularne parametrizovane krive takve da je $c_1 = c_2 \circ \varphi$, gde je $\varphi : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ odgovarajuća reparametrizacija. Tada je $L_a^b(c_1) = L_\alpha^\beta(c_2)$.

Dokaz. Kako je $c_1 = c_2 \circ \varphi$, na osnovu pravila o izvodu složene funkcije sledi $c'_1(t) = c'_2(\varphi(t))\varphi'(t)$. Ako je $\varphi' > 0$, na osnovu prethodne definicije i pozitivne homogenosti norme sledi

$$L_a^b(c_1) = \int_a^b \|c'_1(t)\| dt = \int_a^b \|c'_2(\varphi(t))\varphi'(t)\| dt = \int_a^b \|c'_2(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt.$$

Uvodeći smenu $\tau = \varphi(t)$ dobijamo

$$L_a^b(c_1) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \|c'_2(\tau)\| d\tau = \int_\alpha^\beta \|c'_2(\tau)\| d\tau = L_\alpha^\beta(c_2).$$

Dokaz je sličan za $\varphi' < 0$. □

Definicija 1.9. Parametrizacija krive $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ se naziva *prirodna parametrizacija* ako važi $\|c'(t)\| = 1$, za svako $t \in I$.

Za prirodno parametrizovanu krivu važi $L_a^b(c) = b - a$. Zato se za prirodno parametrizovane krive kaže da su *parametrizovane dužinom luka*.

Teorema 1.10. Svaka regularna kriva može da se parametrizuje dužinom luka. Svake dve parametrizacije dužinom luka su ekvivalentne do translaciju.

²Vilijam Nil, 1637-1670

Dokaz. Neka je $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ data kriva čija je dužina luka $l := L_a^b(c)$. Definišemo parametar dužine luka s_c sa

$$s_c(t) := L_a^t(c) = \int_a^t \|c'(\tau)\| d\tau.$$

Tada $s_c : [a, b] \rightarrow [0, l]$ i važi $s'_c(t) = \|c'(t)\| > 0$, jer je c regularna kriva. Na osnovu teoreme o inverznoj funkciji sledi da $t \mapsto s_c(t)$ ima inverz. U nastavku dobijamo da je $\bar{c} = c \circ s_c^{-1}$ odgovarajuća reparametrizacija dužinom luka:

$$\begin{aligned} \|\bar{c}'(u)\| &= \|(c \circ s_c^{-1})'(u)\| = \left\| c'(s_c^{-1}(u)) \frac{1}{s'_c(s_c^{-1}(u))} \right\| = \\ &= \|c'(s_c^{-1}(u))\| \frac{1}{s'_c(s_c^{-1}(u))} = \frac{\|c'\|}{\|c'\|}(s_c^{-1}(u)) = 1. \end{aligned}$$

Dalje, ako su c i $c \circ \varphi$ dve parametrizacije dužinom luka i $\varphi' > 0$, tada važi:

$$1 = \|(c \circ \varphi)'\| = \|c'\| \varphi' = \varphi'.$$

Sledi $\varphi(t) = t + a$, $a \in \mathbb{R}$, tj. φ je translacija. Dokaz je sličan za $\varphi' < 0$. \square

Kada nema opasnosti od zabune, s_c skraćeno zapisujemo sa s .

Nadalje ćemo sa $c(s)$ označavati krivu parametrizovanu dužinom luka, a sa $c'(s)$ tangentni vektor u parametrizaciji dužinom luka. Važi

$$c'(t) = \frac{dc}{dt} = \frac{dc}{ds} \frac{ds}{dt} = c'(s) \|c'(t)\|. \quad (1.1)$$

Lema 1.11. Ako je kriva c parametrizovana dužinom luka, tada važi $c'(s) \perp c''(s)$, za svako $s \in I$.

Dokaz. Znamo $\|c'(s)\| = 1$, za svako $s \in I$. Diferenciranjem izraza $c'(s) \cdot c'(s) = 1$ dobijamo $2c'(s) \cdot c''(s) = 0$, pa je $c'(s) \perp c''(s)$, za svako $s \in I$. \square

1.0.2 Primeri (i) Prava u ravni iz Primera 1.0.1(i) je prirodno parametrizovana ako i samo ako je $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$.

(ii) Kriva $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data sa $c(s) = \frac{1}{2}(\cos(2s), \sin(2s))$ je kružnica sa centrom $(0, 0)$ poluprečnika $\frac{1}{2}$ koja je prirodno parametrizovana:

$$\|c'(s)\| = \sqrt{(-\sin(2s))^2 + (\cos(2s))^2} = \sqrt{\sin^2(2s) + \cos^2(2s)} = 1.$$

Vidimo da izvodi krive imaju važnu ulogu u opisivanju same krive. Ako su c', c'', c''', \dots još i linearno nezavisni u svakoj tački krive c , onda oni formiraju ortonormirani sistem koji dobro opisuje krivu c . U nastavku ćemo ortonormirani sistem u \mathbb{R}^n zvati *n-okvir* (engl. *n-frame*).

Definicija 1.12. Neka je $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regularna kriva klase C^n (n puta neprekidno diferencijabilna) koja je parametrizovana dužinom luka. c se naziva *Freneova³ kriva* ako su vektori $c', c'', \dots, c^{(n-1)}$ linearne nezavisne u svakoj tački krive. Odgovarajući *Freneov n-okvir* je tada jedinstveno određen sledećim uslovima:

- (i) $\{e_1(s), \dots, e_n(s)\}$ je pozitivno orijentisan ($\det(e_1|e_2|\dots|e_n) > 0$) ortonormiran sistem vektora u \mathbb{R}^n , za svako $s \in I$.
- (ii) $\text{span}\{c'(s), c''(s), \dots, c^{(k)}(s)\} = \text{span}\{e_1(s), \dots, e_k(s)\}$ (srp. lineal), za svako $k = 1, \dots, n-1$ i za svako $s \in I$.
- (iii) $c^{(k)} \cdot e_k > 0$, za svako $k = 1, \dots, n-1$ i za svako $s \in I$.

Za konstrukciju Freneovog n -okvira koristi se *Gram⁴-Šmitov⁵ postupak*:

$$\begin{aligned} e_1 &= c', \\ e_2 &= c''/\|c''\|, \\ e_3 &= (c''' - c''' \cdot e_1 e_1 - c''' \cdot e_2 e_2)/\| \dots \|, \\ &\dots \\ e_j &= (c^{(j)} - \sum_{i=1}^{j-1} c^{(j)} \cdot e_i e_i)/\| \dots \|, \\ &\dots \\ e_{n-1} &= (c^{(n-1)} - \sum_{i=1}^{n-2} c^{(n-1)} \cdot e_i e_i)/\| \dots \|. \end{aligned}$$

Poslednji vektor e_n je tada jedinstveno određen u skladu sa uslovom (i) prethodne definicije.

Svaka regularna ravanska kriva je Freneova. Tada je $e_1(s) = c'(s)$, a $e_2(s)$ se konstruiše rotacijom vektora $e_1(s)$ za $\pi/2$ uлево. Na osnovu Leme 1.11. zaključujemo da je i vektor c'' ortogonalan na e_1 , pa postoji funkcija $\kappa[c] = \kappa[c](s)$ takva da važi

$$c''(s) = \kappa[c](s)e_2(s). \quad (1.2)$$

$\kappa[c]$ se naziva *krivina* krive c . Krivina meri koliko kriva krivi, tj. koliko odstupa od prave. Izostavljamo c u notaciji $\kappa[c]$ tamo gde se razmatra samo jedna kriva.

Uvodimo *Freneove jednačine* za ravansku krivu:

$$e'_1(s) = (c'(s))' = \kappa(s)e_2(s) \quad (1.3)$$

Kako je $e_1 \cdot e_2 = 0$, diferenciranjem dobijamo $e'_1 \cdot e_2 + e_1 \cdot e'_2 = 0$. Na osnovu (1.3) je

$$e_1 \cdot e'_2 = -e'_1 \cdot e_2 = -(\kappa e_2) \cdot e_2 = -\kappa(e_2 \cdot e_2) = -\kappa.$$

Dalje, iz $e_2 \cdot e_2 = 1$ diferenciranjem dobijamo $2e'_2 \cdot e_2 = 0$. Sledi

$$e'_2 = e_1 \cdot e'_2 e_1 + e_2 \cdot e'_2 e_2 = -\kappa e_1, \quad (1.4)$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

³Žan Frederik Frene, 1816-1900

⁴Jorgen Pedersen Gram, 1850-1916

⁵Erhard Šmit, 1876-1959

Freneove jednačine omogućavaju da se izvede formula za krivinu krive $c(s) = (x(s), y(s))$ u zavisnosti od c' i c'' :

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \kappa(s)(e_2(s) \cdot e_2(s)) = (\kappa(s)e_2(s)) \cdot e_2(s) = c''(s) \cdot e_2(s) = c''(s) \cdot Je_1(s) = \\ &= (x''(s), y''(s)) \cdot (-y'(s), x'(s)) = \det \begin{pmatrix} x'(s) & x''(s) \\ y'(s) & y''(s) \end{pmatrix} = \det(c'(s), c''(s))\end{aligned}$$

Pokazaćemo da je formula za krivinu ravanske krive $c(t)$ u proizvoljnoj parametrizaciji data sa

$$\kappa(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3} = \frac{c''(t) \cdot Jc'(t)}{\|c'(t)\|^3}. \quad (1.5)$$

Na osnovu (1.1) je $c'(s) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$. Dalje je

$$\begin{aligned}c''(s) &= \frac{dc'}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dc}{dt} \frac{dt}{ds} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dc}{dt} \frac{dt}{ds} \right) \frac{dt}{ds} = \frac{d^2 c}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{dc}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|c'(t)\|} \right) \frac{dt}{ds} = \\ &= c''(t) \frac{1}{\|c'(t)\|^2} + c'(t) \frac{1}{\|c'(t)\|} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|c'(t)\|} \right).\end{aligned}$$

Iz formule za krivinu ravanske krive $c(s)$ u prirodnoj parametrizaciji sledi

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \det(c'(s), c''(s)) = \det \left(\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}, \frac{c''(t)}{\|c'(t)\|^2} + \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|c'(t)\|} \right) \right) = \\ &= \det \left(\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}, \frac{c''(t)}{\|c'(t)\|^2} \right) = \frac{1}{\|c'(t)\|^3} \det(c'(t), c''(t)).\end{aligned}$$

Ostaje da pokažemo jednakost $\det(c'(t), c''(t)) = c''(t) \cdot Jc'(t)$:

$$\det(c'(t), c''(t)) = \det \begin{pmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{pmatrix} = x'y'' - y'x''$$

$$c''(t) \cdot Jc'(t) = (x'', y'') \cdot (-y', x') = -x''y' + y''x'$$

Krivina ravanske krive ne zavisi od njene parametrizacije do na znak:

Teorema 1.13. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna kriva i neka je $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dato sa $\beta = \alpha \circ h$, gde je $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$ diferencijabilna funkcija. Tada važi

$$\kappa[\beta](u) = (\text{sign } h'(u))\kappa[\alpha](h(u)), \quad (1.6)$$

gde je $h'(u) \neq 0$.

Dokaz. Na osnovu pravila o izvodu složene funkcije imamo $\beta' = (\alpha' \circ h)h'$, tako da je

$$J\beta' = J(\alpha' \circ h)h'$$

i

$$\beta'' = (\alpha'' \circ h)h'^2 + (\alpha' \circ h)h''.$$

Sledi

$$\kappa[\beta] = \frac{((\alpha'' \circ h)h'^2 + (\alpha' \circ h)h'') \cdot J(\alpha' \circ h)h'}{\|(\alpha' \circ h)h'\|^3} = \frac{(\alpha'' \circ h) \cdot J(\alpha' \circ h)h'^3 + (\alpha' \circ h) \cdot J(\alpha' \circ h)h''h'}{\|(\alpha' \circ h)h'\|^3}.$$

Kako je $(\alpha' \circ h) \cdot J(\alpha' \circ h) = 0$ i važi pozitivna homogenost norme, dobijamo

$$\kappa[\beta] = \left(\frac{h'^3}{|h'|^3} \right) \frac{(\alpha'' \circ h) \cdot J(\alpha' \circ h)}{\|(\alpha' \circ h)\|^3}.$$

Otuda važi (1.6). \square

Teorema 1.14. Regularna ravanska kriva ima konstantnu krivinu ako i samo ako je deo prave ($\kappa = 0$) ili deo kružnice poluprečnika $\frac{1}{|\kappa|}$ ($\kappa \neq 0$).

Dokaz. Ako je c prava parametrizovana sa

$$c(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \quad (1.7)$$

tada je $c'(t) = \mathbf{v}$, $c''(t) = \mathbf{0}$ i $\kappa = 0$. Ovaj rezultat dobijamo analogno u prirodnjoj parametrizaciji. Obrnuto, ako je $\kappa = 0$, onda $\|c''\| = |\kappa| = 0$ implicira $c'' = \mathbf{0}$. Otuda je c prava (1.7) koju dobijamo ako dva puta integralimo prethodnu jednakost.

Pretpostavimo sada da je $K(s) = M + r(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r})$, $M \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$, prirodno parametrizovana kružnica sa centrom u M poluprečnika r . Tada je

$$K'(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right),$$

$$K''(s) = \frac{1}{r} \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right),$$

odakle sledi

$$|\kappa(s)| = \|K''(s)\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}\right)^2 + \left(-\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{r^2} \left(\cos^2 \frac{s}{r} + \sin^2 \frac{s}{r}\right)} = \frac{1}{r},$$

za sve $s \in [0, 2\pi]$, tj. krivina je konstantna. Primetimo da tada važi

$$M = K(s) - r \left(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r} \right) = K(s) + r^2 K''(s) = K(s) + \frac{K''(s)}{\kappa^2} = K(s) + \frac{K''(s)}{\|K''(s)\|^2}. \quad (1.8)$$

Obrnuto, ako je krivina κ regularne krive c konstantna, tada iz (1.8) sledi da je

$$M(s) := c(s) + \frac{e_2(s)}{\kappa}$$

konstantno, jer je

$$M'(s) = c'(s) + \frac{e'_2(s)}{\kappa} = e_1(s) - \frac{\kappa e_1(s)}{\kappa} = \mathbf{0}.$$

Prema tome,

$$\|c(s) - M\| = \left\| \frac{e_2(s)}{\kappa} \right\| = \frac{1}{|\kappa|},$$

odakle sledi da je c kružnica sa centrom u M poluprečnika $\frac{1}{|\kappa|}$. \square

Krivina se može definisati koristeći dužinu luka krive i nagib ϕ tangente na x -osu:

Definicija 1.15. Krivina je mera brzine promene ugla nagiba tangente u odnosu na dužinu luka data sa

$$\kappa = \frac{d\phi}{ds}.$$

Odredićemo formulu za izračunavanje krivine ako kriva ima jednačinu $y = u(x)$. Kako je

$$\kappa = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dx}}{\frac{ds}{dx}},$$

koristeći

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d}{dx}(\arctg u'(x)) = \frac{1}{1 + [u'(x)]^2} u''(x),$$

dobijamo

$$\kappa = \frac{u''(x)}{(1 + [u'(x)]^2)^{3/2}}. \quad (1.9)$$

Glava 2

Alternativni načini zadavanja ravanskih krivih

Do sada smo se bavili krivama u parametarskom obliku. U literaturi se navodi još pet različitih sistema reprezentacije ravanskih krivih: implicitni, polarni, pedalni, bipolarni i unutrašnji. Mi ćemo u nastavku detaljno diskutovati prva dva sistema reprezentacije, a na kraju glave dati kratak osvrt na ostale sisteme, o kojima se više može videti u [7], [8], [9].

Koordinatne ose za parametarski i implicitni način zadavanja su normalne prave *apscisa* (x -osa) i *ordinata* (y -osa). Koordinatne ose za predstavljanje u polarnim koordinatama su tačka (*pol*) i zrak iz ove tačke (*osa*). Prepostavićemo da se pol i osa poklapaju sa koordinatnim početkom i pozitivnim delom x -ose, respektivno.

Navedeni koordinatni sistemi su u osnovi tačkasti koncepti: ako je data proizvoljna tačka P , postoji jedan i samo jedan uređen par koordinata (x, y) ili (r, θ) za tačku P .

2.1 Implicitno zadate ravanske krive

Izučavanje implicitno zadatih ravanskih krivih je uvod u oblast matematike koja se naziva algebarska geometrija i veoma je atraktivna u poslednje vreme. Definisamo ih kao nula skupove funkcije dve promenljive uvodeći dodatnu prepostavku:

Definicija 2.1. Neka je data funkcija $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Nula skup funkcije F je

$$F^{-1}(0) = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \mid F(\mathbf{p}) = 0 \}.$$

Definicija 2.2. *Implicitno zadata kriva* u \mathbb{R}^2 je nula skup diferencijabilne funkcije $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Često nula skup posmatramo kao "krivu $F(x, y) = 0$ ".

U primerima koje ćemo razmatrati funkcija F je uglavnom nenula polinom sa realnim koeficijentima i dvema nezavisnim promenljivima x, y i naziva se *realna algebarska kriva*. Njen stepen i nula skup su invarijantni u odnosu na množenje funkcije F nenula skalarom. Preciznije, realna algebarska kriva je klasa ekvivalencije na skupu svih polinoma dveju promenljivih x, y u odnosu na relaciju \approx definisanu na sledeći način: polinomi f, g su *ekvivalentni*, u oznaci

$f \approx g$, ako postoji nenula skalar λ takav da važi $g = \lambda f$. Za detalje čitaoca upućujemo na [4].

Sledeće tvrđenje je specijalan slučaj teoreme o implicitnoj funkciji:

Teorema 2.3. Neka je $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna funkcija i neka je $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ tačka u kojoj je $F(\mathbf{q}) = 0$. Prepostavimo da bar jedan od parcijalnih izvoda F_x, F_y nije nula u \mathbf{q} . Onda se "kriva $F(x, y) = 0$ " može uvek parametrizovati lokalno kao regularna parametrizovana kriva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Dokaz. Prepostavimo, na primer, da je $F_y(\mathbf{q}) \neq 0$. Teorema o implicitnoj funkciji tvrdi da postoji neprekidno diferencijabilna realna funkcija g definisana u okolini tačke q_1 u \mathbb{R} takva da važi $g(q_1) = q_2$ i za sve x, y iz odgovarajućih okolina q_1 i q_2 je $F(x, y) = 0$ ekvivalentno sa $y = g(x)$. Ako definišemo $\alpha(t) = (t, g(t))$, tvrđenje je dokazano. \square

Definicija 2.4. Neka je C podskup u \mathbb{R}^2 . Ako je $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija za koju važi $F^{-1}(0) = C$, kažemo da je jednačina $F(x, y) = 0$ *neparametarski* ili *implicitni oblik* skupa C . Ako je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ kriva dobijena lokalnom parametrizacijom "krive $F(x, y) = 0$ " kažemo da je $t \mapsto \alpha(t)$ *parametrizacija* ili *parametarski oblik* skupa C .

Počinjemo sa primerima implicitno zadatih ravanskih krivih koristeći operacije koje imaju vektore za argumente. Neka je $\mathbf{p}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ i $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Definišimo funkcije

$$F[\mathbf{p}, \mathbf{v}], G[\mathbf{p}, \mathbf{v}] : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

sa

$$\begin{aligned} F[\mathbf{p}, \mathbf{v}](\mathbf{q}) &= (\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} \\ G[\mathbf{p}, \mathbf{v}](\mathbf{q}) &= \|\mathbf{q} - \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{p} - \mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

$F[\mathbf{p}, \mathbf{v}]^{-1}(0)$ je prava kroz \mathbf{p} normalna na \mathbf{v} i kriva $G[\mathbf{p}, \mathbf{v}]^{-1}(0)$ je kružnica sa centrom u \mathbf{v} koja sadrži \mathbf{p} .

Sledeći primer implicitno zadate ravanske krive je *Dioklova cisoida*, koju ćemo geometrijski konstruisati na sledeći način. Neka je AB prečnik kružnice k sa tangentama AC i BD u tačkama A i B, respektivno. Neka je AO proizvoljna prava koja seče kružnicu u tački O i tangentu BD u tački D. Ako je P tačka na pravi AO takva da važi $AP = OD$, onda će njena putanja biti Dioklova cisoida (Slika 2.1).

Neka je P tačka sa koordinatama (x, y) u odnosu na koordinatne ose AB i AC. Stavimo $AB = 2a$ i $\angle PAM = \theta$ (Slika 2.1). Onda je

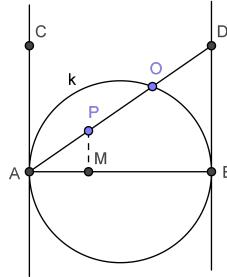
$$AP = OD = AD - AO = 2a \sec \theta - 2a \cos \theta,$$

$$x = AP \cos \theta = 2a - 2a \cos^2 \theta$$

i

$$y = AP \sin \theta = 2a \tan \theta - 2a \sin \theta \cos \theta.$$

¹Diokle, oko 240. p.n.e. - oko 180. p.n.e.



Slika 2.1

Eliminišući θ u nekoj od prethodne dve jednakosti dobijamo

$$x(x^2 + y^2) = 2ay^2, \quad (2.1)$$

što je Dioklova cisoida.

Zamenjujući izraz $y = xt$ u (2.1) dobijamo parametarski oblik

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2at^3}{1+t^2}$$

Dioklove cisoide.

Za nju je lako preći s jednog načina predstavljanja na drugi:

Definišimo

$$cissoid[a](t) = \left(\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2} \right).$$

Zamenjujući izraz $t = y/x$ u jednačinu $x = \frac{2at^2}{1+t^2}$ dobijamo neparametarski oblik Dioklove cisoide

$$x = \frac{2ay^2}{x^2 + y^2},$$

koji je ekvivalentan kubnoj jednačini $x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0$.

Njutnova² mehanička konstrukcija ove krive je data u nastavku. Duž BC, koja određuje krak pravog ugla ABC, je konstantne dužine $2a$ i tačka C se kreće duž fiksirane prave CD. Duž AB, koja određuje drugi krak pravog ugla ABC, prolazi kroz fiksiranu tačku A koja je na rastojanju $2a$ od prave CD. Onda je putanja središta P duži BC Dioklova cisoida (Slika 2.2).

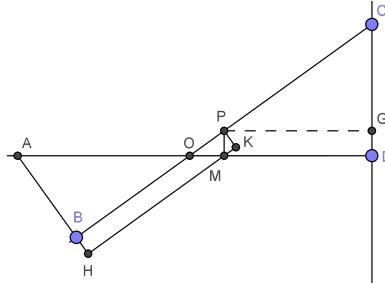
Neka je koordinatni početak središte O duži AD i $\angle BAD = \theta$. Onda je

$$x = OM = OD - MD$$

i

$$MD = OD - OM = a - x.$$

²Isak Njutn, 1642-1727



Slika 2.2

Trouglovi ABO i CDO su slični, jer imaju po jedan prav ugao i par unakrsnih uglova, pa je $\angle OAB = \angle OCD = \theta$. Ako povučemo normalu PG na pravu CD (Slika 2.2), dobijamo

$$\begin{aligned} DM &= PG = PC \sin \theta = a \sin \theta, \\ a - x &= a \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dalje je

$$\begin{aligned} a &= BP = HK = HM + MK \\ &= (x + a) \sin \theta + y \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Eliminišući θ između (2.2) i (2.3) dobijamo

$$x(x^2 + y^2) = 2ay^2,$$

što je Dioklova cisoida.

Implicitni oblik ove krive možemo izvesti i na način dat u [5]. Otkrio je grčki geometričar Diokle negde pred kraj 3. veka p.n.e. i na početku 2. veka p.n.e. i dobila je ime po njemu. Koristio je za rešavanje poznatog problema duplikacije kocke. O tome se može više videti u [8].

Davolja kriva je definisana neparametarski kao nula skup funkcije

$$devilimplicit[a, b](x, y) = y^2(y^2 - b^2) - x^2(x^2 - a^2).$$

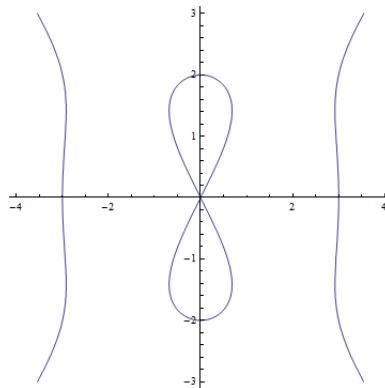
Njeni preseci sa koordinatnim osama su $(0, \pm b)$, $(\pm a, 0)$, $(0, 0)$. Vidi Sliku 2.3.

Keplerov³ list je kriva definisana neparametarski kao nula skup funkcije

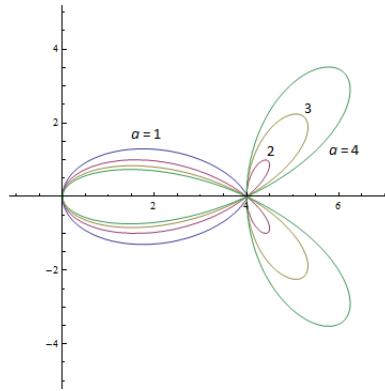
$$keplerimplicit[a, b](x, y) = ((x - b)^2 + y^2)(x(x - b) + y^2) - 4a(x - b)y^2.$$

Vidi Sliku 2.4.

³Johan Kepler, 1571-1630



Slika 2.3: Đavolja kriva

Slika 2.4: Keplerov list, $a = 1, 2, 3, 4$; $b = 4$

2.2 Dekartov list

Dekartov⁴ list je neparametarski dat jednačinom

$$x^3 + y^3 = 3axy. \quad (2.4)$$

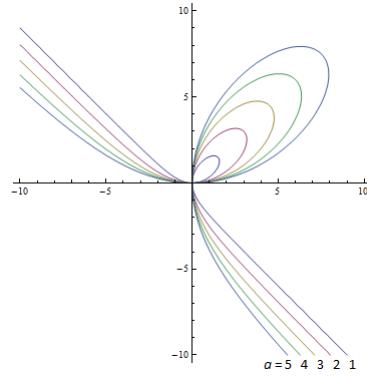
Hajgens⁵ ga je prvi ispravno nacrtao. U tački $\mathbf{p} = (0,0)$, koja se naziva *krunoda*, ima dve tangente $x = 0, y = 0$. Simetričan je u odnosu na pravu $y = x$. Njegova asimptota je prava $x + y + a = 0$.

Naći ćemo parametrizaciju Dekartovog lista posmatrajući ga kao približno homogen polinom. Deleći jednačinu (2.4) sa x^3 dobijamo

$$1 + t^3 = \frac{3a}{x}t,$$

⁴Rene Dekart, 1596-1650

⁵Kristijan Hajgens, 1629-1695

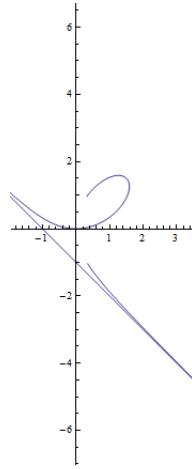


Slika 2.5: Dekartov list

gde je $t = y/x$ (kao za Dioklovu cisoidu u prethodnom potpoglavlju). Rešavajući po x i stavljajući $y = tx$ dobijamo parametrizaciju

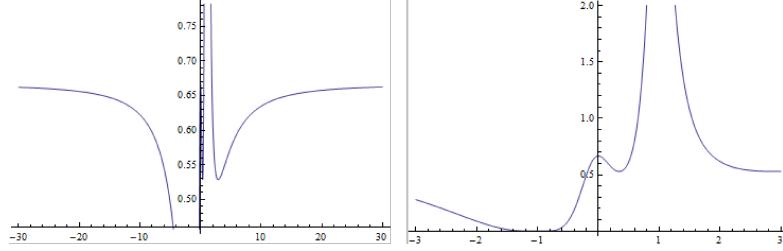
$$folium(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right). \quad (2.5)$$

Ilustrovana je na Slici 2.6 za $a = 1$, na kojoj je asimptota generisana automatski pomoću programa za crtanje. U ovom obliku kriva ima tri luka. Za $-1 < t < 0$ kriva se nalazi u drugom kvadrantu, a za $t = 0$ prolazi kroz koordinatni početak. Za $t < -1$ kriva zauzima četvrti kvadrant i teži koordinatnom početku kad $t \rightarrow -\infty$. Petlja je u prvom kvadrantu za $0 \leq t < \infty$ i orientisana je suprotno od kazaljke na satu. Primetimo da su delovi krive u prvom i četvrtom kvadrantu izostavljeni. Ovo je jedan od mogućih nedostataka parametarskog crtanja.

Slika 2.6: Dekartov list sa asimptomom za $a = 1$

Krivina Dekartovog lista se može dobiti iz parametrizacije (2.5). Predstavljena je na Slici

2.7 na domenima $-30 < t < 30$ i $-3 < t < 3$. Njena granična vrednost iznosi 0, kada t teži -1, a vrednost za $t = -1$ nije definisana. Određivanje maksimuma i minimuma krivine se može izvesti kompjuterski.



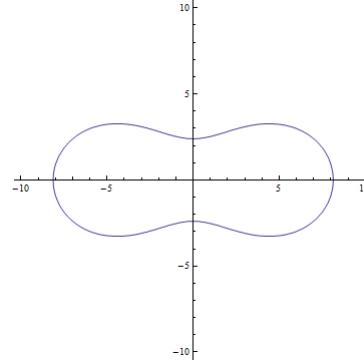
Slika 2.7: Krivina Dekartovog lista

2.3 Kasinijevi ovali

Kasinijev⁶ oval je uopštenje *Bernulijeve⁷ lemniskate*, a otuda i ellipse. To je skup tačaka

$$C_{a,b} = \{(x,y) \mid d((x,y), F_1)d((x,y), F_2) = b^2\},$$

gde su F_1, F_2 dve fiksirane tačke za koje važi $d(F_1, F_2) = 2a$. Otkrio ga je Dovani Domeniko

Slika 2.8: Kasinijev oval $a = 5.5, b = 6$

Kasini 1680. godine smatrajući da ova kriva opisuje kretanje planeta. Ako je $a = b = f$, kriva $C_{f,f}$ se poklapa sa Bernulijevom lemniskatom L defisanom u [5].

Lema 2.5. Kasinijev oval sa fokusima $(\pm a, 0)$ je implicitno zadata kriva

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = b^4 - a^4.$$

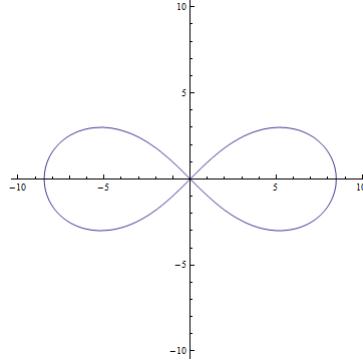
Nula skup funkcije

$$\text{cassiniimplicit}[f, f](x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 2f^2(y^2 - x^2)$$

⁶Dovani Domeniko Kasini, 1625-1712

⁷Jakob Bernuli, 1654-1705

je Bernulijeva lemniskata $L = C_{f,f}$, dok je $cassiniimplicit[0,b]$ kružnica.



Slika 2.9: Kasinijev oval $a = 6, b = 6$

Dokaz. Definišimo

$$cassiniimplicit[a,b](x,y) = (x^2 + y^2 + a^2)^2 - b^4 - 4a^2x^2.$$

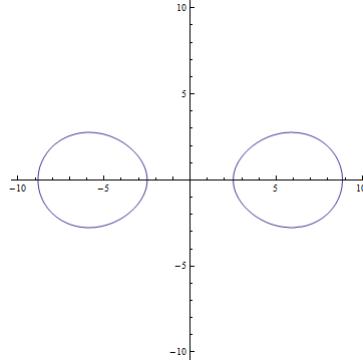
Pokazujemo da je $C_{a,b}$ nula skup ove funkcije. Neka su $(\pm a, 0)$ fokusi i $P = (x, y)$. Tada uslov da P pripada $C_{a,b}$ je dat sa

$$((x - a)^2 + y^2)((x + a)^2 + y^2) = b^4,$$

ili ekvivalentno

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) + b^4 - a^4.$$

Sledi



Slika 2.10: Kasinijev oval $a = 6.5, b = 6$

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(x^2 + y^2) + a^4 - 2a^2(x^2 - y^2) - b^4 - 2a^2(x^2 + y^2) = 0$$

tj.

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 - b^4 = 0,$$

što je i trebalo dokazati. Zamenom $a = b = f$ dobijamo da je nula skup od $cassiniimplicit[f, f](x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 2f^2(y^2 - x^2)$ Bernulijeva lemniskata $L = C_{f,f}$. \square

Kasinijev oval je simetričan u odnosu na svaku od koordinatnih osa. Ako je $a < b$ ima jednu petlju, a ako je $a \geq b$ ima dve petlje i u unutrašnjosti svake od njih se nalazi po jedna od fiksiranih tačaka F_1 i F_2 . Preseci Kasinijevog ovala sa x -osom su u tačkama $(\pm\sqrt{a^2 \pm b^2}, 0)$. Kada je $a^2 > b^2$ imamo četiri realna preseka sa x -osom, ali kada je $a^2 < b^2$ samo dva su realna. Slično, Kasinijev oval nema realnih preseka sa y -osom kada je $a^2 > b^2$, a za $a^2 < b^2$ preseci sa y -osom su u tačkama $(0, \pm\sqrt{b^2 - a^2})$. Ovo je prikazano na Slikama 2.8, 2.9, 2.10.

2.4 Ravanske krive u polarnim koordinatama

U ovom potpoglavlju prikazujemo kako izučavati i računati dužinu i krivinu ravanske krive koristeći polarne koordinate.

Definicija 2.6. *Polarna parametrizacija* je kriva $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ oblika

$$\gamma(\theta) = \mathbf{r}[\gamma](\theta)(\cos \theta, \sin \theta), \quad (2.6)$$

gde je $\mathbf{r}[\gamma](\theta) \geq 0$ za $a < \theta < b$. $\mathbf{r}[\gamma]$ nazivamo *radijus funkcijom* krive γ i to skraćeno zapisujemo sa \mathbf{r} kada nema opasnosti od zabune.

Da bi se kriva opisala u polarnim koordinatama najčešće se zadaje samo radijus funkcija, jer kompletno određuje polarnu parametrizaciju.

Formule za dužinu luka i krivinu polarne parametrizacije takođe zavise samo od radijus funkcije. Dajemo ih u sledećoj lemi:

Lema 2.7. Zavisnost dužine i krivine polarne parametrizacije (2.6) od radijus funkcije $\mathbf{r} = \mathbf{r}[\gamma]$ je data formulama

$$L_a^b[\gamma] = \int_a^b \sqrt{\mathbf{r}'(\theta)^2 + \mathbf{r}(\theta)^2} d\theta, \quad (2.7)$$

$$\kappa[\gamma] = \frac{-\mathbf{r}''\mathbf{r} + 2\mathbf{r}'^2 + \mathbf{r}^2}{(\mathbf{r}'^2 + \mathbf{r}^2)^{3/2}}. \quad (2.8)$$

Dokaz. Koristeći kompleksne brojeve, jednačina (2.6) se može zapisati u obliku

$$\gamma(\theta) = \mathbf{r}(\theta)e^{i\theta}.$$

Tada računamo

$$\begin{aligned} \gamma'(\theta) &= (\mathbf{r}'(\theta) + i\mathbf{r}(\theta))e^{i\theta}, \\ \gamma''(\theta) &= (\mathbf{r}''(\theta) + 2i\mathbf{r}'(\theta) - \mathbf{r}(\theta))e^{i\theta}. \end{aligned}$$

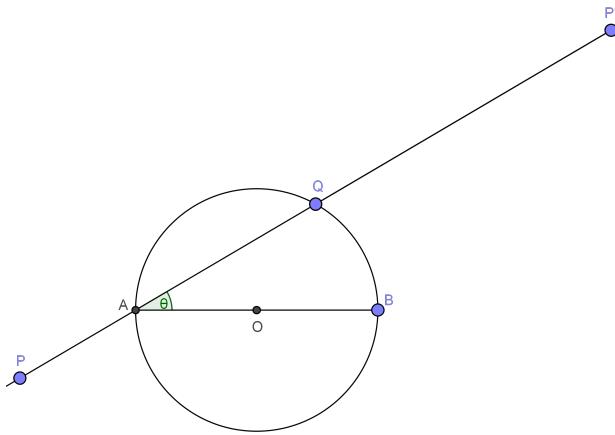
Dakle,

$$\|\gamma'(\theta)\|^2 = \mathbf{r}'(\theta)^2 + \mathbf{r}(\theta)^2, \quad (2.9)$$

i (2.7) sledi odmah iz definicije dužine luka krive. Štaviše, koristeći Lemu 1.1. dobijamo

$$\begin{aligned}\gamma''(\theta) \cdot J\gamma'(\theta) &= Re \left\{ (\mathbf{r}''(\theta) + 2i\mathbf{r}'(\theta) - \mathbf{r}(\theta))e^{i\theta} \overline{(i(\mathbf{r}'(\theta) + i\mathbf{r}(\theta))e^{i\theta})} \right\} \\ &= Re \{ (\mathbf{r}''(\theta) + 2i\mathbf{r}'(\theta) - \mathbf{r}(\theta))(-i\mathbf{r}'(\theta) - \mathbf{r}(\theta)) \} \\ &= -\mathbf{r}''(\theta)\mathbf{r}(\theta) + 2\mathbf{r}'(\theta)^2 + \mathbf{r}(\theta)^2.\end{aligned}$$

Sada (2.8) sledi iz (2.9) i (1.5). □



Slika 2.11

U nastavku dajemo primer krive zadate u polarnim koordinatama. *Paskalov⁸ puž* je uopštenje *kardioide*. Otkrio ga je Etjen⁹ Paskal, otac Bleza Paskala, po kom je dobio ime, a proučavao Roberval¹⁰ između 1630. i 1640. godine. Crtamo ga na sledeći način:

Konstruišimo kružnicu i istaknimo jedan njen prečnik $AB (= 2a)$. Neka je Q tačka na kružnici. Povucimo pravu kroz tačke A i Q . Označimo tačke P , P' na fiksnom rastojanju b sa obe strane tačke Q , gde je $b > 2a$ (Slika 2.11). Ponovimo postupak više puta počevši od $Q = B$ pomerajući je postepeno po kružnici. Nacrtajmo slobodnom rukom krivu kroz označene tačke. Ova kriva je Paskalov puž. Ako je $\angle BAQ = \theta$ i $AP' = r$, onda je $AQ = 2a \cos \theta$ i

$$r = 2a \cos \theta + b.$$

Za $b = 2a$ Paskalov puž postaje kardioida, a kada je $b = a$ trisektrisa.

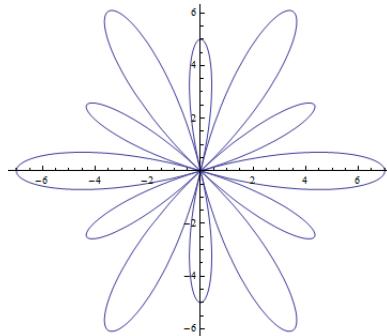
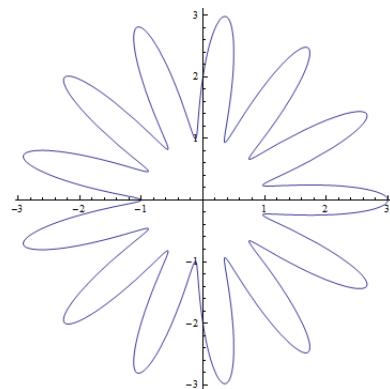
Dajemo uopštenje kardioide i Paskalovog puža zadajući radijus funkciju

$$limaconpolar[n, a, b](\theta) = 2a \cos n\theta + b.$$

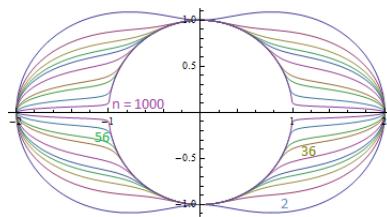
⁸Blez Paskal, 1623-1662

⁹Etjen Paskal, 1588-1651

¹⁰Žil Person de Roberval, 1602-1675

Slika 2.12: *limaconpolar*[6, 3, 1]Slika 2.13: *limaconpolar*[13, $\frac{1}{2}$, 2]

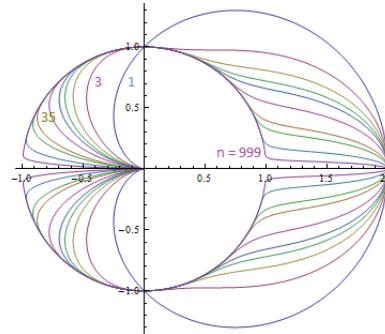
Uočimo da je $\text{limaconpolar}[1, a, 2a](\theta) = 2a \cos \theta + 1$ radijus funkcija standardne kardioide. Komplikovaniji primeri su izloženi na Slikama 2.12 i 2.13.

Slika 2.14: *pacman*[n], n parno

Analogna polarna parametrizacija je data sa

$$\text{pacman}[n](\theta) = 1 + \cos^n \theta,$$

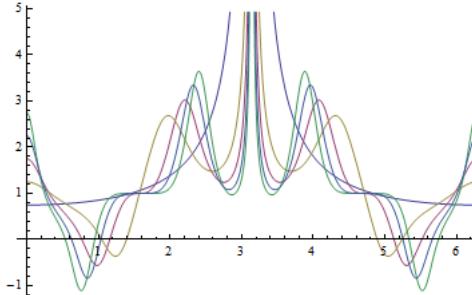
i njeno ime je opravdano Slikom 2.15 za $n = 999$. Na Slikama 2.14 i 2.15 vidimo da se različito ponaša kada je n parno ili neparno. Prema formuli (2.8) dobijamo da za $\theta = 0$

Slika 2.15: $pacman[n]$, n neparno

$pacman[n]$ ima krivinu koja iznosi $\frac{n+2}{4}$. Za $\theta = \pi$ vrednost krivine je

$$\frac{(1 + (-1)^n)(1 + (-1)^n + n(-1)^n)}{(1 + (-1)^n)^3}.$$

Kada je n parno, ovaj izraz ima vrednost takođe $\frac{n+2}{4}$. U slučaju da je n neparno, funkcija krivine ima vertikalnu asimptotu za $\theta = \pi$, kao što je prikazano na Slici 2.16.

Slika 2.16: Krivina krive $pacman[n]$ za $n = 1, 3, 5, 7, 9$

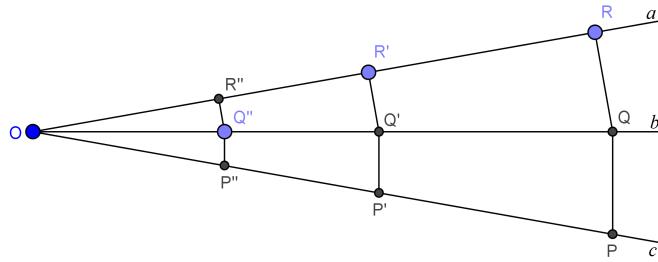
2.5 Vrste spirala

Dobri primeri polarne parametrizacije su *spirale*. Njihova radijus funkcija nije periodična funkcija ugla nego ima beskonačno mnogo različitih vrednosti kada ugao raste za $2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Zbog toga prava seče spiralu u beskonačno mnogo tačaka i spirala je transcendentna kriva.

Najpre razmatramo *jednakougaonu spiralu*. Nacrtajmo prave a , b i c koje prolaze kroz fiksiranu tačku O (koja se naziva *pol*) tako da su uglovi izmedju njih međusobno jednak (pogodno je da iznose 10°). U tački R koja pripada pravoj a postavimo normalu na tu pravu. Zatim u tački Q preseka normale i prave b povucimo normalu na tu pravu i tako redom. Ponavljamo postupak iz tačaka R' i R'' i dobijamo nizove tačaka P' , Q' , R' i P'' , Q'' , R'' (Slika 2.17). Kriva se onda može nacrtati slobodnom rukom kroz sve tačke konstruisane

na ovaj način.

Trouglovi OPQ , OQR , \dots , su slični, jer su im odgovarajući uglovi jednaki. Sledi $OQ/OP =$



Slika 2.17

$=OR/OQ = \dots$, i dužine OP , OQ , OR , \dots , su u geometrijskoj progresiji. Trouglovi $OP'Q'$, $OQ'R'$, \dots , su delovi navedenih trouglova i OP' , OQ' , OR' , \dots , su u navedenoj geometrijskoj progresiji. OP'', OQ'', OR'' , \dots , takođe formiraju geometrijsku progresiju, jer je odnos OP'' sa članovima koji slede konstantan. Ovo obezbeđuje korisnu proveru tačnosti crtanja, pogotovo u delu blizu pola.

Drugu geometrijsku progresiju formiraju dužine PQ , QR , \dots , $P'Q'$, $Q'R'$, \dots . Četvorouglovi $PQQ'P'$, $QRR'Q'$, \dots , su svi slični jer su im odgovarajući uglovi jednaki i parovi stranica proporcionalni.

Da smo na prave a , b i c nanosili dužine OP , OQ , OR , \dots , koje čine geometrijsku progresiju zadržala bi se ista svojstva sličnosti. Dakle, uglovi OQP , ORQ , \dots , ne moraju biti nužno pravi.

Ovaj metod sigurno određuje tačke P , Q , R , ali ne i tačke između. Da bismo očuvali svojstva sličnosti tj. da bi se ona mogla primeniti na sve tačke krive, samo je potrebno obezbediti da poluprečnici označeni na pravama a , b i c čine geometrijsku progresiju. Problem određivanja tačaka između se svodi na uvođenje geometrijskih sredina između dužina OP , OQ , \dots , postojećih poluprečnika.

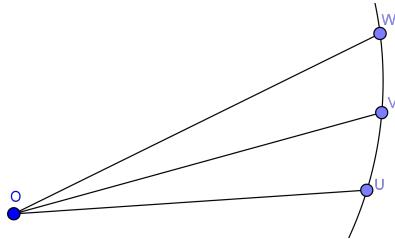
Neka je POQ jedinični ugao i $OQ/OP = OR/OQ = k$. Ako je $OP = r_0$, onda je $OQ = r_0k$ i $OR = r_0k^2$. U tački tri jedinična ugla od OP poluprečnik će biti r_0k^3 i tako dalje. Sada možemo definisati tačke između, a zapravo i sve tačke na krivoj, pomoću jednačine

$$r = r_0k^\theta,$$

gde je r dužina poluprečnika θ jediničnih uglova od početnog poluprečnika OP dužine r_0 .

Konstanta k u ovoj jednačini može biti veća ili manja od 1. U iznetoj metodi je manja od 1 i poluprečnici OP , OQ , OR , \dots se smanjuju kako θ raste. Ako je veća od 1, r raste sa θ . Ako je vrednost k recipročna svojoj prethodnoj vrednosti dobija se kriva osno simetrična prethodnoj.

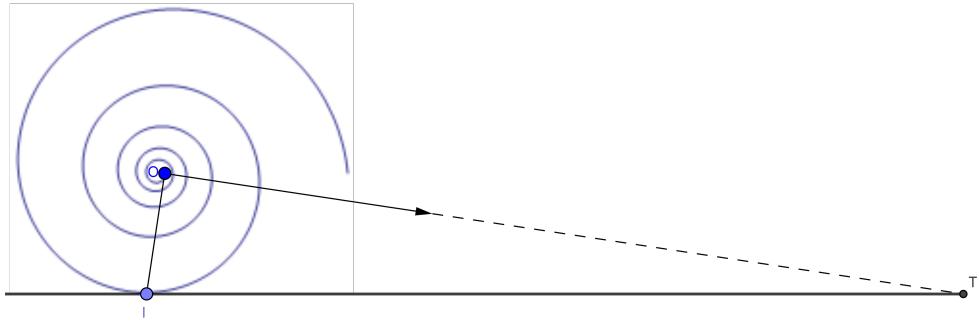
Treba napomenuti da odnos k zavisi od izbora jediničnog ugla: ako jedinični ugao iznosi



Slika 2.18

10° , $k = \cos 10^\circ = 0.9848$, a ako se jedinični ugao promeni za 360° , nova vrednost od k je 0.9848^{36} .

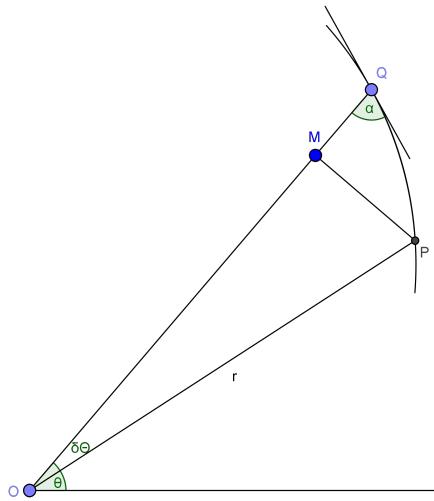
Ako su sada OU, OV, OW, \dots , poluprečnici u bilo kom delu krive koji zaklapaju međusobno jednake uglove (Slika 2.18), iz gornje jednačine i činjenice da su vrednosti od θ , date sa $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$, članovi aritmetičke progresije sledi da su vrednosti od r , date sa r_1, r_2, r_3, \dots , članovi geometrijske progresije: za $r_2/r_1 = k^{\theta_2-\theta_1} = k^{\theta_3-\theta_2} = r_3/r_2$. Otuda su trouglovi OUV, OVW, \dots , slični. Ako su sada tačke U, V, W, \dots , izabrane na veoma malom razstojanju, uglovi OUV, OVW, \dots , će biti veoma bliski uglovima između tangenti na krivu i poluprečnika OU, OV, \dots . Kako su uglovi OUV, OVW, \dots , svi jednaki, u limesu je ugao između tangente na krivu i poluprečnika konstantan.



Slika 2.19

Da bismo odredili dužinu spirale od neke njene tačke do pola posmatraćemo spiralu koja se uvija (bez klizanja) duž svoje tangente. Tačku dodira ćemo uvek obeležavati sa I (Slika 2.19). Kako poluprečnik OI zaklapa konstantan ugao α sa tangentom, onda će se pol O kretati po normali na OI dok ona u tački T ne preseće tangentu. Sledi da je $IT = OI \sec \alpha$ i da dužina spirale od tačke I do pola iznosi $OI \sec \alpha$.

Očigledno je da mora postojati odnos između k i α , jer određuju oblik krive. Neka je $k > 1$. θ sada merimo u radijanima. Neka je dalje M presek OQ i normale na OQ spuštene iz tačke P i $\angle POQ = \delta\theta$, $OP = r$ i $OQ = r + \delta r$ (Slika 2.20). Onda je aproksimativno $MQ = \delta r$ i $PM = r\delta\theta$. Aproksimativno, $\angle PQM = \alpha$ i u limesu je $\operatorname{ctg} \alpha = dr/(rd\theta)$. Razdvajajući



Slika 2.20

promenljive dobijamo

$$\ln r = \theta \operatorname{ctg} \alpha + \text{const.}$$

Ako je početna vrednost od r (tj. vrednost kada je $\theta = 0$) r_0 , konstanta integracije je $\ln r_0$. Sledi

$$\ln r = \theta \operatorname{ctg} \alpha + \ln r_0,$$

što se može zapisati kao

$$\ln(r/r_0) = \theta \operatorname{ctg} \alpha$$

ili

$$r = r_0 e^{\theta \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Ovo je radijus funkcija jednakougaone spirale. Kriva se takođe naziva *logaritamska spirala*. Otkrio ju je Dekart 1638. godine. Sličnog oblika su ljuštura glavonošca Nautilusa i raspored semena suncokreta. Rogovi, nokti i raspored dlaka se formiraju u ovom obliku, kao i borove šišarke.

Da bismo dobili vrednosti za k spomenuto u ranijim paragrafima samo je potrebno staviti umesto θ bilo koju vrednost u radijanima uzetu za jedinični ugao.

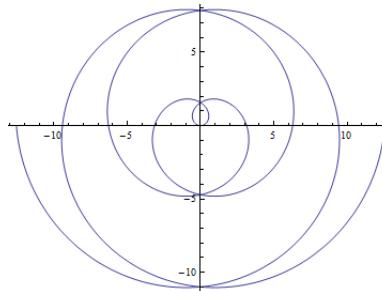
Nešto intuitivnija jednačina spirale u polarnim koordinatama je

$$r^n = a^n \theta, \quad (2.10)$$

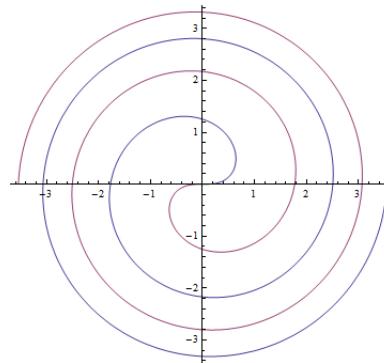
gde je n nenula celobrojno, a θ se meri u radijanima. Spirala (2.10) ima dve grane koje se sastaju kada je eksponent n pozitivan. Druga grana se dobija za negativnu radijus funkciju. Neke spirale imaju posebna imena i nacrtaćemo ih u nastavku.

Za $n = 1$ dobija se *Arhimedova*¹¹ spirala. Opisuje je tačka koja uniformno odstupa od

¹¹Arhimed, 287. p.n.e. - 212. p.n.e.

Slika 2.21: Arhimedova spirala $r = \theta$

koordinatnog početka, dok se radius funkcija u njoj takođe uniformno menja sa promenom ugla. Dve grane Arhimedove spirale su simetrične u odnosu na vertikalnu y -osu (Slika 2.21). Izučavao je Arhimed i verovatno koristio pri pokušajima kvadrature kruga.

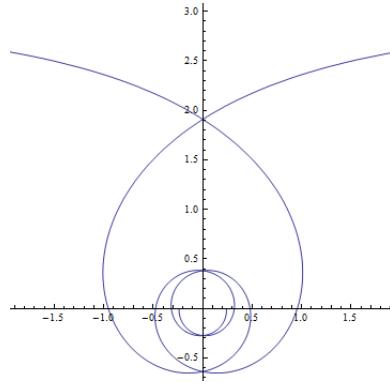
Slika 2.22: Fermaova spirala $r^2 = \theta$

*Fermaova*¹² spirala je u polarnim koordinatama data sa $r^2 = a^2\theta$. Otkrio je Ferma 1636. godine. Jedna njena grana se dobija od druge rotacijom za 180° (Slika 2.22).

Slično ponašanje se može uočiti na Slikama 2.23 i 2.24. Međutim, kada je n negativno θ ne može biti nula, pa se dve grane ne sastaju.

Recipročna ili hiperbolična spirala se dobija iz (2.10) za $n = -1$, a *lituus* za $n = -1/2$. Hiperbolična spirala ima asimptotu $y = a$, a lituus ima asimptotu $y = 0$. Naziv hiperbolična potiče iz analogije oblika jednačine hiperbolične spirale sa jednačinom hiperbole $xy = a$ u Dekartovim koordinatama. Termin *lituus* znači pastirski (ili lovački) štap ili ratna truba starih Rimljana, koja je bila sličnog oblika kao ova kriva. Ako *lituus* nacrtamo samo za pozitivne vrednosti od r , on liči na spiralni ukras na kapitelu jonskog stuba. Treba spomenuti svojstvo ove krive da je površina kružnog isečka ograničenog x -osom i radius funkcijom sa centrom u koordinatnom početku konstantna i iznosi $\frac{r^2\theta}{2} = \frac{a^2}{2}$.

¹²Pjer de Ferma, 1601-1665

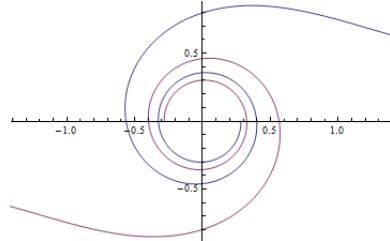
Slika 2.23: Hiperbolična spirala $r = 3/\theta$

Konačno, koristimo formulu (2.8) da izračunamo krivinu spirale date sa (2.10) kao funkciju ugla θ . Rezultat

$$\kappa(\theta) = \frac{n\theta^{1-a/n}(1+n+n^2\theta^2)}{a(1+n^2\theta^2)^{3/2}}$$

je konačan za sve θ . U specijalnom slučaju $n = -1$ i $a = 3$ (Slika 2.23) dobijamo

$$\kappa(\theta) = -\frac{\theta^6}{3(1+\theta^2)^{3/2}}.$$

Slika 2.24: Lituus $r^2 = 1/\theta$

2.6 Pedalne, bipolarne i unutrašnje koordinate

Sada ćemo objasniti kako se ravanske krive mogu opisati u ostalim sistemima reprezentacije.

Neka je O fiksirana tačka (pedalna tačka ili pol) koja se poklapa sa koordinatnim početkom i neka je C regularna kriva (tj. kriva čija tangenta postoji). U tački P na krivoj C konstruišimo tangentu L na krivu C . *Pedalne koordinate* tačke P (u odnosu na krivu C i tačku O) su radikalno rastojanje r tačke O od tačke P i normalno rastojanje p tačke O od tangente L .

Neka su O_1 i O_2 dve fiksirane tačke (polovi) na rastojanju $2c$. Rastojanja r_1 i r_2 tačke P od tačaka O_1 i O_2 , redom, su *bipolarne koordinate* tačke P . Tačke O_1 , O_2 i P su temena

trougla, tako da rastojanja r_1 , r_2 i c moraju zadovoljavati nejednakosti

$$r_1 + r_2 \geq 2c,$$

$$|r_1 - r_2| \leq 2c.$$

Dalje, kako su rastojanja r_1 , r_2 i c pozitivni brojevi, svaka jednačina u bipolarnim koordinatama opisuje putanju simetričnu u odnosu na duž O_1O_2 .

Jednačina krive će biti *unutrašnja* ako se kriva može definisati pomoću sledećih invariјanti: površine, dužine luka, krvine, broja singulariteta itd. Navedene veličine su invarijante ako su dužina i ugao očuvani. Vevelova¹³ jednačina povezuje dužinu luka s i tangencijalni ugao ϕ , gde se ugao ϕ meri od tangente na krivu u početnoj tački luka, dok Cezarova¹⁴ jednačina povezuje dužinu luka s i poluprečnik krvine ρ .

¹³Vilijam Vevel, 1794-1866

¹⁴Ernesto Cezaro, 1859-1906

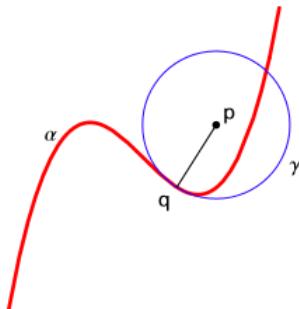
Glava 3

Neki tipovi izvedenih krivih

U nastavku ćemo razmatrati načine na koje možemo iskoristiti neka od svojstava ravanskih krivih, zajedno sa pomoćnim tačkama, pravama i krivama, da dobijemo nove krive.

3.1 Evolute

Tačka $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ se naziva *centar krivine* u tački \mathbf{q} krive $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ako postoji kružnica γ sa centrom \mathbf{p} koja ima zajedničku tangentu sa krivom α u tački \mathbf{q} tako da su krivine pogodno orijentisanih krivih α i γ jednake u tački \mathbf{q} . Na osnovu ove definicije sledi da postoji prava l u tački \mathbf{p} normalna na krivu α u tački \mathbf{q} . Rastojanje od tačke \mathbf{p} do tačke \mathbf{q} se naziva *poluprečnik krivine* krive α u tački \mathbf{q} i iznosi $1/|\kappa[\alpha]|$. Primer je prikazan na Slici 3.1.



Slika 3.1: Centar krivine kubne krive

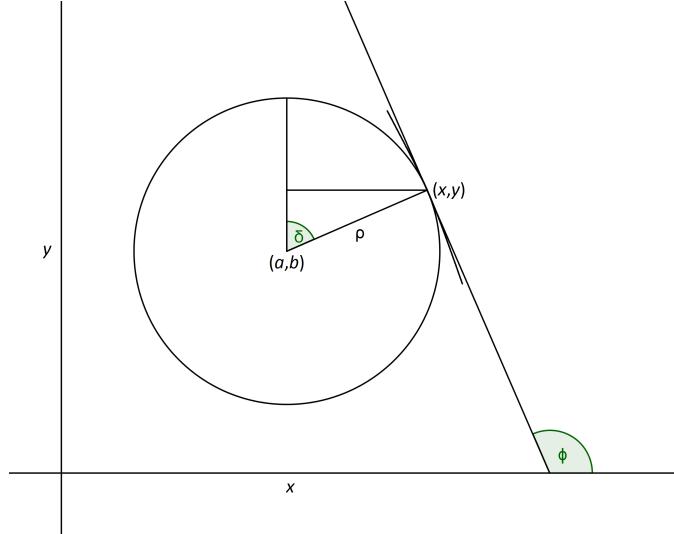
Centri krivine krive α formiraju novu ravansku krivu koja se naziva evoluta krive α . Izvešćemo njene parametarske jednačine:

Na Slici 3.2 vidimo da su δ i ϕ uglovi sa normalnim kracima, pa je $\delta = \pi - \phi$. Sledi

$$x - a = \rho \sin \phi, \quad y - b = -\rho \cos \phi,$$

tj.

$$a = x - \rho \sin \phi, \quad b = y + \rho \cos \phi. \tag{3.1}$$



Slika 3.2

Kako je $\operatorname{tg}\phi = y'$, dobijamo

$$\sin \phi = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}. \quad (3.2)$$

Iz (3.1), (3.2) i (1.9) sledi

$$a = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad b = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Za parametarske jednačine $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ je $\operatorname{tg}\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$,

$$\sin \phi = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}, \quad \cos \phi = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}. \quad (3.3)$$

Koristeći (3.1) i (3.3) dobijamo

$$\begin{aligned} a &= x(t) - \frac{1}{\kappa[\alpha](t)} \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}, \\ b &= y(t) + \frac{1}{\kappa[\alpha](t)} \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}. \end{aligned}$$

Precizna definicija evolute krive α je data u nastavku:

Definicija 3.1. *Evoluta* regularne ravanske krive α je kriva data sa

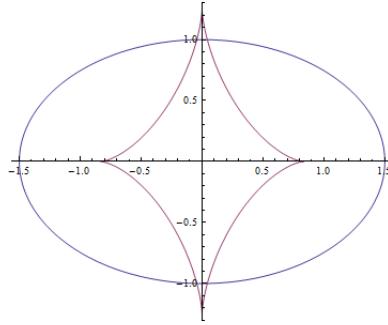
$$\operatorname{evolute}[\alpha](t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa[\alpha](t)} \frac{J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}. \quad (3.4)$$

Sledi da će kružnica sa centrom $\text{evolute}[\alpha](t)$ i poluprečnikom $1/|\kappa[\alpha](t)|$ biti tangentna na ravansku krivu α u tački $\alpha(t)$. Ovo je kružnica koja najbolje aproksimira krivu α u okolini tačke $\alpha(t)$ i zove se *oskulatorna kružnica*, što će biti razmatrano u Potpoglavlju 3.3.

Koristeći formulu (1.5), jednačinu evolute možemo zapisati kraće sa

$$\text{evolute}[\alpha] = \alpha + \frac{\|\alpha'\|^2}{\alpha'' \cdot J(\alpha')} J\alpha'. \quad (3.5)$$

Neposredna posledica (3.1) i (1.6) je sledeća važna činjenica:



Slika 3.3: Elipsa i njena evoluta

Lema 3.2. Definicija evolute krive α je nezavisna od parametrizacije, tj.

$$\text{evolute}[\alpha \circ h] = \text{evolute}[\alpha] \circ h,$$

za bilo koju diferencijabilnu funkciju $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$.

Dokaz. Na osnovu (3.1) imamo

$$\text{evolute}[\alpha \circ h](t) = (\alpha \circ h)(t) + \frac{1}{\kappa[\alpha \circ h](t)} \frac{J(\alpha \circ h)'(t)}{\|(\alpha \circ h)'(t)\|},$$

pa iz (1.6) sledi

$$\text{evolute}[\alpha \circ h](t) = (\alpha \circ h)(t) + \frac{1}{(\text{sign } h'(t))\kappa[\alpha](h(t))} \frac{J(\alpha' \circ h)(t)h'(t)}{\|(\alpha' \circ h)(t)h'(t)\|}.$$

Dalje je na osnovu (1.5) i pozitivne homogenosti norme

$$\text{evolute}[\alpha \circ h](t) = (\alpha \circ h)(t) + \frac{\|\alpha'(h(t))\|^3}{(\text{sign } h'(t))\alpha''(h(t)) \cdot J\alpha'(h(t))} \frac{J(\alpha' \circ h)(t)h'(t)}{|h'(t)| \|\alpha'(h(t))\|}.$$

Kako je $h'(t) = |h'(t)| \text{ sign } h'(t)$, dobijamo

$$\text{evolute}[\alpha \circ h](t) = (\alpha \circ h)(t) + \frac{\|\alpha'(h(t))\|^3}{\alpha''(h(t)) \cdot J\alpha'(h(t))} \frac{J(\alpha' \circ h)(t)}{\|\alpha'(h(t))\|}$$

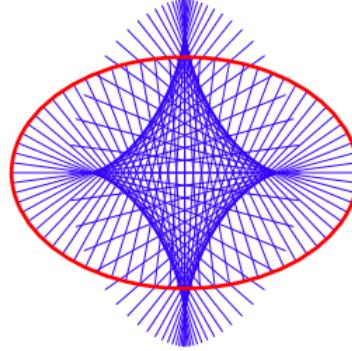
i

$$\begin{aligned}
evolute[\alpha \circ h](t) &= (\alpha \circ h)(t) + \frac{\|(\alpha' \circ h)(t)\|^3}{(\alpha'' \circ h)(t) \cdot J(\alpha' \circ h)(t)} \frac{J(\alpha' \circ h)(t)}{\|(\alpha' \circ h)(t)\|} \\
&= (\alpha \circ h)(t) + \frac{\|(\alpha' \circ h)(t)\|^3}{(\alpha'' \circ h)(t) \cdot J(\alpha' \circ h)(t)} \frac{(J\alpha' \circ h)(t)}{\|(\alpha' \circ h)(t)\|} \\
&= \left(\alpha(t) + \frac{1}{\kappa[\alpha](t)} \frac{J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right) \circ h = (evolute[\alpha] \circ h)(t),
\end{aligned}$$

za sve $t \in (c, d)$, što je i trebalo dokazati. \square

Smatra se da je do ideje o evolutama došao Hajgens 1673. godine proučavajući svetlost. Međutim, ovom konceptu je u trag ušao Apolonije¹ oko 200. godine p.n.e. i javlja se u petoj knjizi njegovih *Kupinih preseka*.

Evoluta bilo koje ravanske krive γ se može fizički interpretirati na sledeći način. Zamislimo svetlosne zrake koji izviru u svim tačkama krive γ normalno na krivu γ . U slučaju kružnice, ovi zraci se sekut u centru. Za krivu γ zraci se sekut u centrima kružnica, najboljih aproksimacija krive γ , koji se nalaze duž evolute krive γ .



Slika 3.4: Presek normala na elipsu

Nadimo evolutu elipse $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$, parametrizovane sa $ellipse[a, b](t) = (a \cos t, b \sin t)$, $0 \leq t < \pi$:

Koristeći (3.5) dobijamo

$$evolute[ellipse](t) = (a \cos t, b \sin t) + \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{(-a \cos t, -b \sin t) \cdot (-b \cos t, -a \sin t)} (-b \cos t, -a \sin t).$$

Dalje je

$$evolute[ellipse](t) = (a \cos t, b \sin t) + \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab \cos^2 t + ab \sin^2 t} (-b \cos t, -a \sin t)$$

¹Apolonije, 262. p.n.e. - 190. p.n.e.

i

$$\text{evolute}[ellipse](t) = (a \cos t, b \sin t) + \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} (-b \cos t, -a \sin t),$$

tj.

$$\text{evolute}[ellipse](t) = (a \cos t, b \sin t) + \left(\frac{a}{b} \sin^2 t + \frac{b}{a} \cos^2 t \right) (-b \cos t, -a \sin t).$$

Sledi

$$\text{evolute}[ellipse](t) = (a \cos t, b \sin t) + \left(-a \sin^2 t \cos t - \frac{b^2}{a} \cos^3 t, -\frac{a^2}{b} \sin^3 t - b \cos^2 t \sin t \right)$$

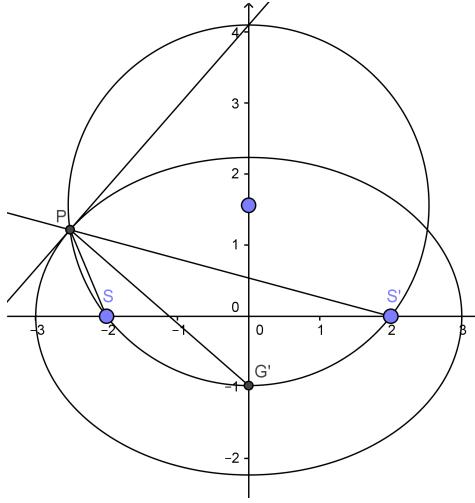
i

$$\text{evolute}[ellipse](t) = \left(a \cos^3 t - \frac{b^2}{a} \cos^3 t, -\frac{a^2}{b} \sin^3 t + b \sin^3 t \right).$$

Konačno,

$$\text{evolute}[ellipse](t) = \left(\frac{(a^2 - b^2) \cos^3 t}{a}, \frac{(b^2 - a^2) \sin^3 t}{b} \right). \quad (3.6)$$

Ova evoluta predstavlja astroidu o kojoj se više može videti u [7], [8], [9]. Ona ima četiri



Slika 3.5

špica. Dva špica na velikoj osi su na rastojanju b^2/a od bližih krajeva velike ose, a dva na maloj osi su na rastojanju a^2/b od daljih krajeva male ose. Ako stavimo $a = b$ u (3.6) potvrđujemo da je evoluta kružnice jednostavno njen centar. Na Slici 3.3 su predstavljene elipsa i njena evoluta istovremeno. Ipak je svojstvo fokusiranja najočiglednije na Slici 3.4.

Nizovi normala se mogu nacrtati sledećom metodom. Neka kružnica sa centrom u proizvoljnoj tački male ose prolazi kroz fokuse S i S', seče elipsu u tački P i malu osu u tački G', kao što je prikazano na Slici 3.5. Periferijski uglovi sa temenom P nad jednakim kružnim lukovima $\widehat{SG'}$ i $\widehat{S'G'}$ su jednaki, pa je $\angle PG'S'$ simetrala ugla $\angle SPS'$ između radijusa vektora. Ugao sa

kracima SP i produžetkom radijus vektora S'P je spoljašnji ugao trougla SS'P. Poznato optičko svojstvo elipse je da tangenta na elipsu u tački P polovi taj ugao. Sledi da je PG' normala na elipsu u tački P.

Do sada smo tangente i normale na krivu spominjali kao čisto intuitivne pojmove. Zato dajemo njihovu matematičku definiciju:

Definicija 3.3. *Tangenta i normala na krivu $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ u proizvoljnoj tački $\alpha(t)$ krive α su prave koje prolaze kroz $\alpha(t)$ sa pravcima $\alpha'(t)$ i $J\alpha'(t)$, redom.*

Karakterizaciju evolute krive pomoću tangenata i normala, kao i singularne tačke evolute daje sledeća teorema:

Teorema 3.4. Neka je $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ kriva parametrizovana dužinom luka. Tada:

- (i) Evoluta krive β je jedinstvena kriva oblika $\gamma = \beta + f J\beta'$ za neku funkciju f za koju se tangenta na krivu γ u svakoj tački $\gamma(s)$ poklapa sa normalom na krivu β u tački $\beta(s)$.
- (ii) Prepostavimo da $\kappa[\beta]$ nigde nije nula. Evoluta krive β ima singularne tačke za one vrednosti s za koje je $\kappa[\beta]'(s) = 0$.

Dokaz. Diferencirajmo (3.4):

$$\text{evolute}[\beta]' = \beta' + \frac{-\kappa[\beta]' \|\beta'\| - \kappa[\beta] \|\beta'\|^2}{\kappa[\beta]^2 \|\beta'\|^2} J\beta' + \frac{1}{\kappa[\beta] \|\beta'\|} J\beta''.$$

Koristeći (1.2), dobijamo

$$\text{evolute}[\beta]' = \beta' + \frac{-\kappa[\beta]' \|\beta'\| - \kappa[\beta] \|\beta'\|^2}{\kappa[\beta]^2 \|\beta'\|^2} J\beta' - \frac{1}{\kappa[\beta] \|\beta'\|} \kappa[\beta] \beta'.$$

Kako je $\|\beta'\| = 1$, onda je

$$\text{evolute}[\beta]' = -\frac{\kappa[\beta]'}{\kappa[\beta]^2} J\beta'. \quad (3.7)$$

Sledi da se tangenta na $\text{evolute}[\beta]$ u tački $\text{evolute}[\beta](s)$ poklapa sa normalom na krivu β u tački $\beta(s)$.

Obratno, prepostavimo $\gamma = \beta + f J\beta'$. Opet, koristeći (1.2), dobijamo

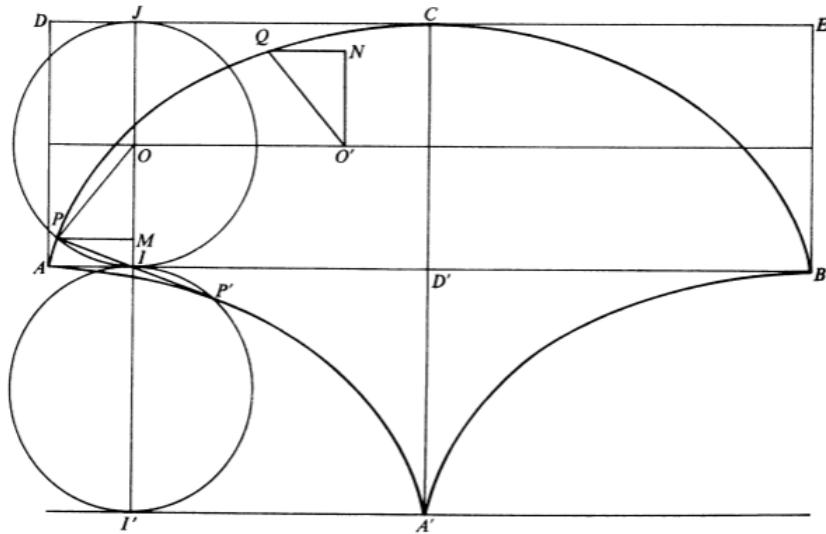
$$\gamma' = (1 - f \kappa[\beta]) \beta' + f' J\beta'.$$

Ako se tangenta na krivu γ u svakoj tački $\gamma(s)$ poklapa sa normalom na krivu β u tački $\beta(s)$, onda je $f = 1/\kappa[\beta]$, pa je kriva γ evoluta krive β .

Ovo dokazuje (i). (ii) je posledica (3.7). \square

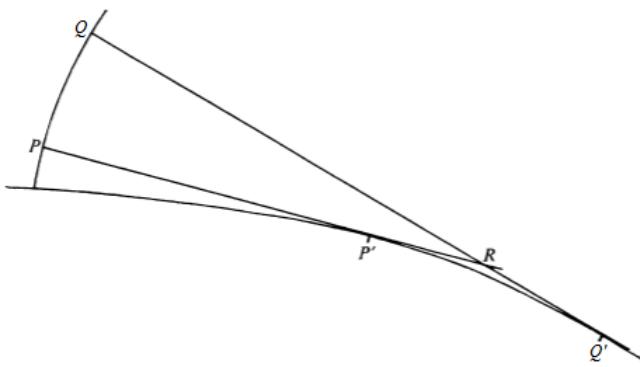
Nastavljamo sa primerima evoluta. Ako se krug kotrlja po pravoj bez klizanja, onda je putanja proizvoljne tačke periferije tog kruga cikloida. O njoj se može više videti u [7], [8], [9]. Pokazaćemo da je evoluta cikloide druga cikloida:

Neka je P tačka kružnice koja opisuje cikloidu kao na Slici 3.6. Na osnovu poznate geometrijske činjenice znamo da je periferijski ugao sa temenom P nad prečnikom IJ kružnice sa Slike 3.6 prav. Prema tome, PJ je tangenta, a PI normala na cikolidu. Ako je kružnica



Slika 3.6

koja prolazi kroz tačku I' centralno simetrična slika kružnice sa centrom O u odnosu na centar simetrije I , onda je $PI = IP'$. Takođe su rastojanja tačke P' od tačaka desno i ispod A kroz koje je prošla tačka P' i rastojanja tačke Q od tačaka levo i ispod C kroz koje je prošla tačka P međusobno jednaka, gde je Q preimenovana tačka P . Ova rastojanja iznose $at + a \sin t$ i $a - a \cos t$, respektivno. Mogu se dobiti na sličan način kao parametarske jednačine cikloide koje su izvedene u [8]. Sledi da je putanja tačke P' ista cikloida, gde je središte jednog luka u tački A . Ova cikloida će biti putanja tačke P' sa periferije kruga poluprečnika a koji se kotrlja duž prave $I'A'$. Kako je periferijski ugao sa temenom P' nad prečnikom II' prav, sledi da je PIP' tangenta nove cikloide i normala početne. Dakle, nova cikloida je evolutne.



Slika 3.7

Neka su PP' i QQ' normale na cikloidu u tačkama P i Q , redom (Slika 3.7). Neka je R njihova tačka preseka, a evolutu dodiruju u tačkama P' i Q' , respektivno. Što je tačka Q

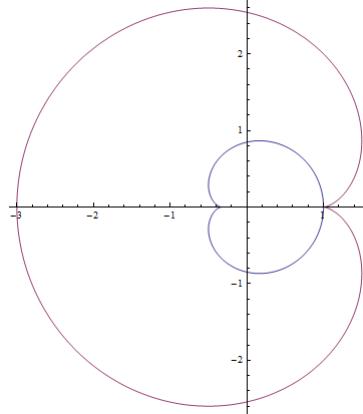
bliža tački P, uglovi QPR i PQR će biti bliži pravim uglovima i dužine RP i RQ će još više težiti da se izjednače. Onda je dužina QQ' - PP' veoma bliska dužini P'R+RQ', koje su opet vrlo bliske dužini luka P'Q' evolute. Prema tome, ako stavimo kanap duž evolute od tačke Q' do tačke P', dalje duž prave P'P i pomerimo ga na duž Q'Q, utrudujemo da su dužine $\widehat{Q'P'} + P'P$ i $Q'Q$ jednake. Analogno dobijamo da je dužina luka AP' evolute jednaka dužini $PP' = 2IP'$.

Kardiodu smo spominjali u prethodnom poglavlju. Ona se može definisati i kao epicikloidu koju opisuje tačka sa periferije kruga koji se kotrlja po spoljašnjoj strani fiksiranog kruga istog poluprečnika. Parametarske jednačine za tu tačku, sa koordinatnim početkom u centru fiksiranog kruga i oznakom θ zamenjenom sa t , su $x = 2a \cos t - a \cos 2t$, $y = 2a \sin t - a \sin 2t$. Ideja za njihovo izvođenje data je u [7], a više o kardiodi se takođe može videti u [7] i u [8], [9]. Koristeći (3.5) dobijamo da je evoluta kardioide kardioida čiji fiksiran krug ima isti centar kao fiksiran krug početne kardioide, ali mu je poluprečnik tri puta manji:

$$\begin{aligned}
& \text{evolute}[cardioid](t) = (2a \cos t - a \cos 2t, 2a \sin t - a \sin 2t) + \\
& + \frac{(-2a \sin t + 2a \sin 2t)^2 + (2a \cos t - 2a \cos 2t)^2}{(-2a \cos t + 4a \cos 2t, -2a \sin t + 4a \sin 2t) \cdot (-2a \cos t + 2a \cos 2t, -2a \sin t + 2a \sin 2t)} \cdot \\
& \cdot (-2a \cos t + 2a \cos 2t, -2a \sin t + 2a \sin 2t) \\
& = (2a \cos t - a \cos 2t, 2a \sin t - a \sin 2t) + \\
& + \frac{4a^2(\sin^2 t - 2 \sin t \sin 2t + \sin^2 2t + \cos^2 t - 2 \cos t \cos 2t + \cos^2 2t)}{4a^2 \cos^2 t - 4a^2 \cos t \cos 2t - 8a^2 \cos 2t \cos t + 8a^2 \cos^2 2t + 4a^2 \sin^2 t - 4a^2 \sin t \sin 2t - 8a^2 \sin 2t \sin t + 8a^2 \sin^2 2t} \cdot \\
& \cdot (-2a \cos t + 2a \cos 2t, -2a \sin t + 2a \sin 2t) \\
& = (2a \cos t - a \cos 2t, 2a \sin t - a \sin 2t) + \\
& + \frac{4a^2(1 - 2 \sin t \sin 2t + 1 - 2 \cos t \cos 2t)}{4a^2 - 12a^2 \cos t \cos 2t + 8a^2 - 12a^2 \sin t \sin 2t} (-2a \cos t + 2a \cos 2t, -2a \sin t + 2a \sin 2t) \\
& = (2a \cos t - a \cos 2t, 2a \sin t - a \sin 2t) + \\
& + \frac{8a^2(1 - \sin t \sin 2t - \cos t \cos 2t)}{12a^2(1 - \cos t \cos 2t - \sin t \sin 2t)} (-2a \cos t + 2a \cos 2t, -2a \sin t + 2a \sin 2t) \\
& = (2a \cos t - a \cos 2t, 2a \sin t - a \sin 2t) + \frac{2}{3}(-2a \cos t + 2a \cos 2t, -2a \sin t + 2a \sin 2t) \\
& = \left(\frac{2}{3}a \cos t + \frac{1}{3}a \cos 2t, \frac{2}{3}a \sin t + \frac{1}{3}a \sin 2t \right),
\end{aligned}$$

gde je $\sin t \sin 2t + \cos t \cos 2t \neq 1$, za sve $0 \leq t < 2\pi$. Suprotno je orijentisana u odnosu na početnu krivu (Slika 3.8).

U prethodnom poglavlju smo izveli radijus funkciju logaritamske spirale. Sada ćemo pokazati da je evoluta logaritamske spirale druga logaritamska spirala. Neka je P proizvoljna tačka na spirali sa konstantnim uglom α između OP i tangente. Neka je PN normala koja u tački N seče normalu kroz tačku O na OP (Slika 3.9). Onda je $\angle ONP = \alpha$, jer su mu kraci normalni na krake ugla između OP i tangente. Kako je ON u fiksnom odnosu sa OP i gradi konstantan ugao sa OP, putanja tačke N je spirala. Iz činjenice da je $\angle ONP = \alpha$ takođe sledi da je PN tangenta na ovu novu spiralu. Pošto je PN i normala na početnu spiralu, nova spirala je evoluta početne i N je centar krivine za početnu spiralu u P.



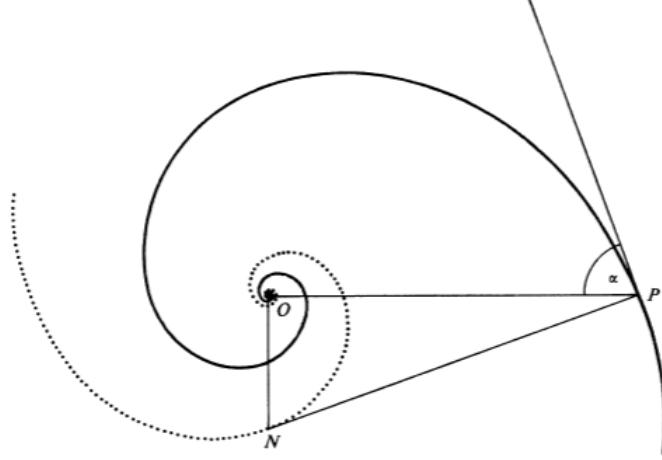
Slika 3.8: Kardioida i njena evoluta

U slučaju cikolide smo pokazali da je dužina luka evolute jednak razlici dužina poluprečnika krivine u njegovim krajnjim tačkama. Dužina nove spirale od tačke N do pola je onda jednak razlici između dužine NP i dužine koja može biti bliska nuli. Tako možemo reći da je $NP = ON \sec \alpha$ dužina nove spirale od tačke N do pola O, što se slaže sa rezultatom dobijenim u prethodnom poglavlju.

Utvrđićemo na osnovu (ii) za koje vrednosti t je evoluta elipse singularna:

$$\kappa(t) = \frac{(-a \cos t, -b \sin t) \cdot (-b \cos t, -a \sin t)}{\|(-a \sin t, b \cos t)\|^3} = \frac{ab \cos^2 t + ab \sin^2 t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

$$\kappa'(t) = -\frac{3ab(2a^2 \sin t \cos t + 2b^2 \cos t(-\sin t))}{2(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{5/2}} = \frac{3ab(b^2 - a^2) \sin 2t}{2(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{5/2}}$$



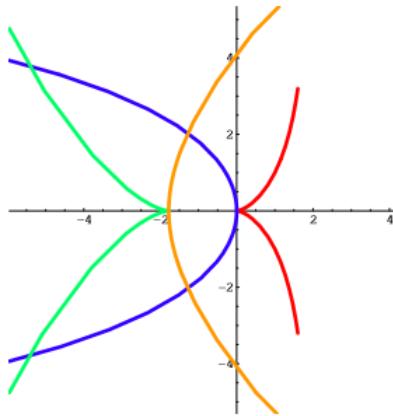
Slika 3.9

Sledi da je $\kappa'(t) = 0$ kada t uzima jednu od četiri vrednosti $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Diferenci-

rajući (3.6) dobijamo

$$\text{evolute}[ellipse]'(t) = \left(-\frac{3(a^2 - b^2) \cos^2 t \sin t}{a}, \frac{3(b^2 - a^2) \sin^2 t \cos t}{b} \right),$$

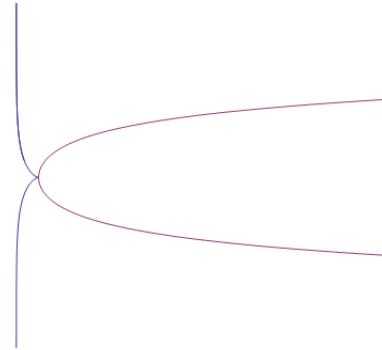
odakle uslov regularnosti $\text{evolute}[ellipse]'(t) \neq \mathbf{0}$ nije zadovoljen za vrednosti t izračunate gore. Ovaj rezultat potvrđuje i Slika 3.3.



Slika 3.10: Iterirane evolute od *cisoid*[1]

Konstrukcija evolute se može primeniti više puta, odnosno, moguće je naći evolutu evolute krive i ponoviti taj postupak.

Primer ovog fenomena je crtež prve tri evolute cisoide na Slici 3.10, parametrizovane u prethodnom poglavlju. Nasuprot cisoide koja ima "špic", njena prva evoluta (koja prolazi kroz $(-2, 0)$) i treća evoluta (koja prolazi kroz $(0, 0)$) nemaju.



Slika 3.11: *tractrix*[1] i njena evoluta lančanica

Drugi primer krive sa "špicem" čija evoluta nema "špic" je traktrisa, parametrizovana u [5]. Evoluta od $\text{tractrix}[a]$ je kriva

$$t \mapsto \left(a \frac{1}{\sin t}, \log \left(\tan \frac{t}{2} \right) \right).$$

Da bismo pokazali da je ova kriva zapravo lančanica, uvedimo smene $\tau = \tan(t/2)$ i $u = \log \tau$. Onda je

$$e^u + e^{-u} = \frac{\tau^2 + 1}{\tau} = \frac{2}{\sin t}.$$

Tako evoluta traktrise može biti reparametrizovana sa $u \mapsto a(\cosh u, u)$, što je umnožak od *catenary*[1], kao što je definisano u [5].

3.2 Involute

Involuta je geometrijski važna operacija inverzna preslikavanju $\alpha \mapsto \text{evolute}[\alpha]$ koje pridružuje krivoj njenu evolutu. Zapravo, evoluta se odnosi prema involuti na isti način kao što se diferenciranje odnosi prema neodređenom integralu. Nalaženje involute zavisi od proizvoljne konstante analogne integracionoj konstanti. Štaviše, dokazaćemo da je evoluta involute krive γ ponovo γ , što odgovara činjenici da je izvod neodređenog integrala funkcije f ponovo f .

Prvo dajemo definiciju involute krive parametrizovane dužinom luka.

Definicija 3.5. Neka je $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ kriva parametrizovana dužinom luka i neka je $a < c < b$. Involuta krive β s početkom u tački $\beta(c)$ je kriva data sa

$$\text{involute}[\beta, c](s) = \beta(s) + (c - s)\beta'(s). \quad (3.8)$$

Pošto je evoluta ravanske krive β linearna kombinacija β i $J\beta'$, involuta krive β je linearna kombinacija β i β' . Iako koristimo s kao parametar dužinom luka krive β , s ne mora biti i parametar dužinom luka involute krive β .

Lema 3.6. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna parametrizovana kriva. Tada je involuta krive α s početkom u c (gde je $a < c < b$) data sa

$$\text{involute}[\alpha, c](t) = \alpha(t) + (s(c) - s(t)) \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad (3.9)$$

gde $t \mapsto s(t)$ označava dužinu luka krive α merenu iz proizvoljne tačke.

Dokaz. Iz dokaza Teoreme 1.10. sledi da je $\beta = \alpha \circ s^{-1}$ odgovarajuća reparametrizacija dužinom luka, gde je $s : (a, b) \rightarrow (0, l)$ definisano sa

$$s(t) := L_a^t(\alpha) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$$

i važi

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\|, \quad (3.10)$$

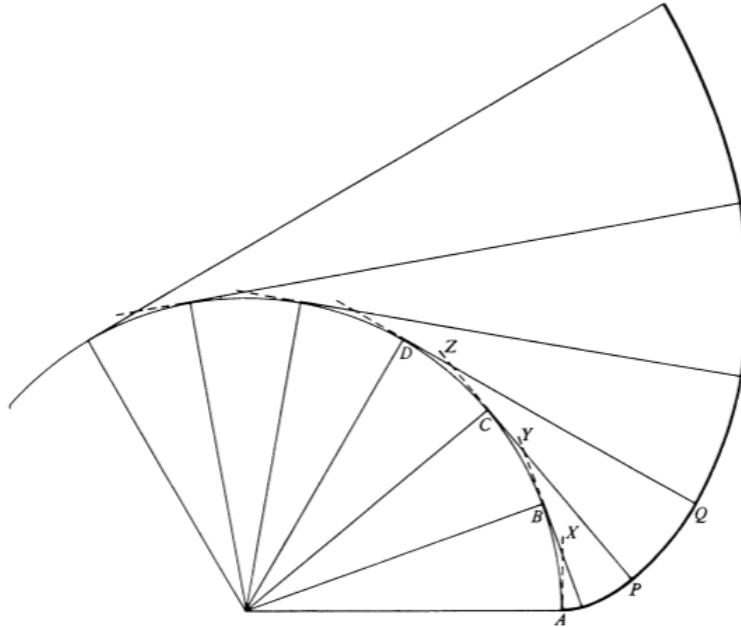
$l := L_a^b(\alpha)$. Kako je $\alpha = \beta \circ s$, iz (3.10) dobijamo $\alpha' = \beta'(s)s' = \beta'(s)\|\alpha'\|$, a sa (3.8) je

$$\text{involute}[\alpha, c](t) = \alpha(t) + (s(c) - s(t)) \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

□

Involuta date krive se može približno nacrtati na sledeći način:

Povucimo tangente na datu krivu. Nacrtajmo luk sa centrom u preseku dve susedne tangentе ograničen ovim tangentama koji prolazi kroz tačku dodira jedne od njih (Slika 3.12). Ponovimo postupak za sledeće parove tangenti koristeći poluprečnike takve da se lukovi nadovezuju.



Slika 3.12

Greška u ovoj metodi nastaje zbog činjenice da je dužina luka početne krive zamenjena sumom segmenata tangenti koja je nužno veća od stvarne dužine luka. Ipak, greška se može učiniti proizvoljno malom uzimajući tangentne dovoljno blizu.

Involuta krive se može opisati mehanički:

Teorema 3.7. Involuta regularne ravanske krive β se dobija kao putanja zategnute žice odmotane sa krive β .

Ovaj rezultat je ilustrovan na Slici 3.13, na kojoj je žica "presećena" u tački $\beta(c)$ na krivoj i postepeno se odmotava iz te tačke.

Dokaz. Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je kriva β parametrizovana dužinom luka. Tada je

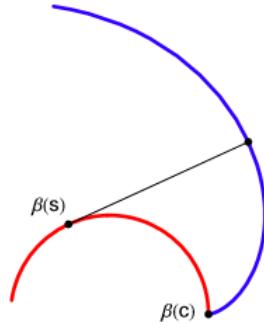
$$\text{involute}[\beta, c](s) - \beta(s) = (c - s)\beta'(s),$$

pa je

$$\|\text{involute}[\beta, c](s) - \beta(s)\| = |s - c|. \quad (3.11)$$

Ovde je $|s - c|$ rastojanje od tačke $\beta(s)$ do tačke $\beta(c)$ mereno duž krive β , dok je leva strana

od (3.11) rastojanje od $involute[\beta, c](s)$ do $\beta(s)$ mereno duž tangente na krivu β u tački $\beta(s)$. \square



Slika 3.13: Definicija involute

Najpoznatija involuta je involuta kružnice. Pošto su $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$ parametarske jednačine centralne kružnice poluprečnika a , dobijamo

$$\begin{aligned} involute[circle[a], b](t) &= (a \cos t, a \sin t) + (b - t)(-a \sin t, a \cos t) \\ &= a(\cos t - (b - t) \sin t, \sin t + (b - t) \cos t) = a(\cos t + (t - b) \sin t, (b - t) \cos t + \sin t). \end{aligned}$$

Involuta kružnice je interesantna zbog svojih primena. Hajgens je 1693. godine koristio u vezi sa svojim izučavanjima satova bez klatna kojim su se služili pomorci. Takođe se koristi za oblikovanje zupčanika. Želimo da se dva zupčanika sa centrima u tačkama A i B okreću u suprotnim smerovima kao dve spregnute kružnice s tačkom dodira P (Slika 3.27). Duž QPR crtamo pod odgovarajućim uglom (koji obično iznosi 20°) na zajedničku tangentu u tački P. Tačke Q i R su podnožja normala iz tačaka A i B. Krugovi osnove se crtaju sa centrima A i B i poluprečnicima AQ i BR. Bočne strane zubaca se onda crtaju kao involute dve kružnice osnove. Zgodno je da poluprečnici spregnutih kružnica budu u odnosu 4 : 3. Crtanje je lakše ako je ugao između QPR i zajedničke tangente manji od 25° . Da bismo našli pozicije uzastopnih zubaca obeležimo jednak rastojanje duž spregnutih kružnica. Vrhovi zubaca bi trebalo da budu lukovi neznatno većih kružnica koncentričnih sa spregnutim kružnicama. Da bismo ovo videli, posmatrajmo dve tačke Q' i R' koje će se kretati ka pozicijama Q i R u istom vremenskom intervalu. Ako su Q'Y i R'Z tangente na kružnice osnove u tačkama Q' i R', sledi

$$Q'Y + ZR' = QP + PR. \quad (3.12)$$

Iz $Q'Y = \widehat{Q'Q} + QP$, $ZR' = PR - \widehat{R'R}$ i (3.12) je $\widehat{Q'Q} = \widehat{R'R}$ i tačke Q i R se kreću jednakim brzinama. Pošto su poluprečnici u proporciji, tačke fiksirane na spregnutim kružnicama će se kretati jednakim brzinama.

Dalje nalazimo korisnu vezu između krivine krive i krivine involute.

Lema 3.8. Neka je $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ kriva parametrizovana dužinom luka i neka je γ involuta

krive β sa početkom u c , gde je $a < c < b$. Tada je krivina involute γ data sa

$$\kappa[\gamma](s) = \frac{\operatorname{sign}(\kappa[\beta](s))}{|s - c|}. \quad (3.13)$$

Dokaz. Prvo, koristimo (3.8) i (1.2) da izračunamo

$$\gamma'(s) = \beta'(s) - \beta'(s) + (c - s)\beta''(s) = (c - s)\kappa[\beta](s)J\beta'(s), \quad (3.14)$$

i

$$\begin{aligned} \gamma''(s) &= -\kappa[\beta](s)J\beta'(s) + (c - s)\kappa[\beta]'(s)J\beta'(s) + (c - s)\kappa[\beta](s)J\beta''(s) \\ &= (-\kappa[\beta](s) + (c - s)\kappa[\beta]'(s))J\beta'(s) - (c - s)(\kappa[\beta](s))^2\beta'(s). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Iz (3.12) i (3.13) dobijamo

$$\begin{aligned} \gamma''(s) \cdot J\gamma'(s) &= -(c - s)\kappa[\beta](s)(-\kappa[\beta](s) + (c - s)\kappa[\beta]'(s))J\beta'(s) \cdot \beta'(s) + \\ &\quad +(c - s)^2(\kappa[\beta](s))^3\beta'(s) \cdot \beta'(s). \end{aligned}$$

Kako je $\beta'(s) \cdot \beta'(s) = 1$, a vektori $J\beta'(s)$, $\beta'(s)$ su normalni pa je $J\beta'(s) \cdot \beta'(s) = 0$, sledi

$$\gamma''(s) \cdot J\gamma'(s) = (c - s)^2(\kappa[\beta](s))^3. \quad (3.16)$$

Sada (3.11) sledi iz (3.12), (3.14) i definicije $\kappa[\gamma]$:

$$\kappa[\gamma](s) = \frac{(c-s)^2(\kappa[\beta](s))^3}{|c-s|^3|\kappa[\beta](s)|^3\|J\beta'(s)\|^3} = \frac{(\operatorname{sign}(\kappa[\beta](s)))^3}{|c-s|} = \frac{\operatorname{sign}(\kappa[\beta](s))}{|s-c|}. \quad \square$$

Lema 3.8. implicira da je absolutna vrednost krivine involute krive uvek opadajuća kao funkcija po s u intervalu $s \geq c$.

Teorema 3.9. Neka je $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ kriva parametrizovana dužinom luka i neka je γ involuta krive β sa početkom u c , gde je $a < c < b$. Tada je β evoluta krive γ .

Dokaz. Po definiciji evoluta krive γ je kriva ζ data sa

$$\zeta(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa[\gamma](s)} \frac{J\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|}. \quad (3.17)$$

Kada zamenimo (3.8), (3.11) i (3.12) u (3.15) dobijamo

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \beta(s) + (c - s)\beta'(s) + \frac{|s - c|}{\operatorname{sign}(\kappa[\beta](s))} \frac{-(c - s)\kappa[\beta](s)\beta'(s)}{|c - s||\kappa[\beta](s)|\|J\beta'(s)\|} \\ &= \beta(s) + (c - s)\beta'(s) + \frac{1}{\operatorname{sign}(\kappa[\beta](s))}(-(c - s)\operatorname{sign}(\kappa[\beta](s))\beta'(s)) \\ &= \beta(s) + (c - s)\beta'(s) - (c - s)\beta'(s) = \beta(s). \end{aligned}$$

Prema tome, β i ζ se poklapaju. \square

Prethodni rezultat je saglasan sa uspostavljanjem analogije između "evolucije" i diferenciranja i "involucije" i integracije na početku ovog potpoglavlja. Otuda je svaki primer evolute

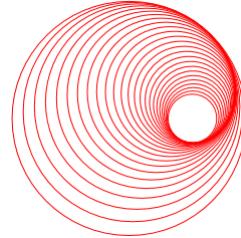
ujedno i primer involute. Tako je lančanica evoluta traktrise i traktrisa involuta lančanice. Tangenta na evolutu je normala na involutu i njena dužina, merena između dve krive, je poluprečnik krivine involute. Za očekivati je nastavak Teoreme 3.9. koji tvrdi da je involuta evolute krive β ista kao kriva β "do na konstantu". Može se pokazati da je involuta evolute krive β zapravo *paralelna kriva* krive β definisana u Potpoglavlju 3.4.

3.3 Oskulatorne kružnice ravanskih krivih

Kao što je tangenta najbolja linearna aproksimacija krive u nekoj njenoj tački \mathbf{p} , oskulatorna kružnica je najbolja kružnica koja aproksimira krivu u tački \mathbf{p} .

Definicija 3.10. Neka je α regularna ravanska kriva definisana na intervalu (a, b) i neka je $a < t < b$ tako da je $\kappa[\alpha](t) \neq 0$. Onda je *oskulatorna kružnica* krive α u tački $\alpha(t)$ kružnica sa poluprečnikom $1 / |\kappa[\alpha](t)|$ i centrom $\alpha(t) + \frac{1}{\kappa[\alpha](t)} \frac{J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$.

Termin "oskulatorna" znači priljubljena. Zapravo, oskulatorna kružnica u tački \mathbf{p} na krivu aproksimira krivu mnogo bolje od tangente. Ne samo da kriva α i njena oskulatorna kružnica u tački $\alpha(t)$ imaju istu tangentu i normalu, nego i istu krivinu. To je kružnica spomenuta u definiciji centra krivine na početku prethodnog potpoglavlja. Tamo smo takođe videli da centri oskulatornih kružnica krive formiraju evolutu krive.



Slika 3.14: Oskulatorne kružnice od *logspiral*[1, -1.5]

Oskulatorne kružnice logaritamske spirale su primer dobre aproksimacije krive. Slika 3.14 predstavlja ove kružnice bez spirale.

Dalje, pokazujemo da je oskulatorna kružnica ravanske krive granična vrednost kružnica koje prolaze kroz tri tačke krive dok tačke teže tački dodira oskulatorne kružnice.

Teorema 3.11. Neka je α ravanska kriva definisana na intervalu (a, b) i neka je $a < t_1 < t_2 < t_3 < b$. Označimo sa $C(t_1, t_2, t_3)$ kružnicu koja prolazi kroz različite tačke $\alpha(t_1), \alpha(t_2), \alpha(t_3)$ koje ne leže na istoj pravoj. Prepostavimo da je $\kappa[\alpha](t_0) \neq 0$. Onda je oskulatorna kružnica krive α u tački $\alpha(t_0)$ kružnica

$$C = \lim_{t_1 \rightarrow t_0, t_2 \rightarrow t_0, t_3 \rightarrow t_0} C(t_1, t_2, t_3).$$

Dokaz. Označimo sa $\mathbf{p}(t_1, t_2, t_3)$ centar kružnice $C(t_1, t_2, t_3)$ i definišimo $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sa

$$f(t) = \|\alpha(t) - \mathbf{p}(t_1, t_2, t_3)\|^2.$$

Tada

$$f'(t) = 2\alpha'(t) \cdot (\alpha(t) - \mathbf{p}(t_1, t_2, t_3)), f''(t) = 2\alpha''(t) \cdot (\alpha(t) - \mathbf{p}(t_1, t_2, t_3)) + 2 \|\alpha'(t)\|^2. \quad (3.18)$$

Kako je f diferencijabilna i $f(t_1) = f(t_2) = f(t_3)$, postoji u_1 i u_2 sa $t_1 < u_1 < t_2 < u_2 < t_3$ takvi da

$$f'(u_1) = f'(u_2) = 0. \quad (3.19)$$

Slično, postoji v sa $u_1 < v < u_2$ takvo da

$$f''(v) = 0. \quad (3.20)$$

(Jednačine (3.19) i (3.20) slede iz Rolove² teoreme.) Jasno, kako t_1, t_2, t_3 teže ka t_0 , onda to važi i za u_1, u_2, v . Jednačine (3.18)-(3.20) impliciraju

$$\alpha'(t_0) \cdot (\alpha(t_0) - \mathbf{p}) = 0, \alpha''(t_0) \cdot (\alpha(t_0) - \mathbf{p}) = -\|\alpha'(t_0)\|^2, \quad (3.21)$$

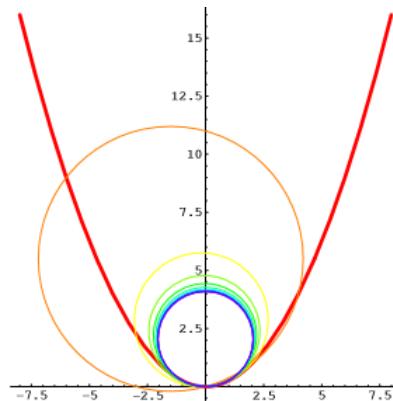
gde je

$$\mathbf{p} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0, t_2 \rightarrow t_0, t_3 \rightarrow t_0} \mathbf{p}(t_1, t_2, t_3).$$

Sledi iz (3.21) i definicije κ da je

$$\alpha(t_0) - \mathbf{p} = \frac{-1}{\kappa[\alpha](t_0)} \frac{J\alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|}.$$

Prema tome, po definiciji, C je oskulatorna kružnica krive α u tački $\alpha(t)$.



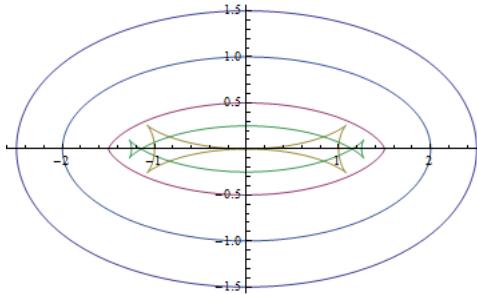
Slika 3.15: Kružnice konvergiraju ka oskulatornoj kružnici parabole

Slika 3.15 prikazuje različite kružnice, gde svaka prolazi kroz tri tačke na paraboli $4y = x^2$. Kako tri tačke konvergiraju ka temenu parabole, kružnica kroz tri tačke konvergira ka oskulatornoj kružnici u temenu. Pošto je krivina parabole u temenu $1/2$, oskulatorna kružnica u temenu ima poluprečnik 2.

²Mišel Rol, 1652-1719

3.4 Paralelne krive

Inolute Hajgensa su navele Lajbnica³ da prvi razmatra paralelne krive od 1692. do 1694. godine. Svaka kriva ima jednu evolutu, a involuta ima beskonačno mnogo. Početna tačka u kojoj involuta seče originalnu krivu može biti proizvoljno izabrana. Svake dve tako dobijene krive su na konstantnom rastojanju merenom duž zajedničke normale. Ove uslove možemo uopštiti tako što ćemo konstruisati kriju γ na fiksiranom rastojanju $r > 0$ od date krije α , gde r nije mnogo veliko:



Slika 3.16: Četiri paralelne krive od $\text{ellipse}[2,1]$

Neka su krije α i γ definisane na intervalu (a, b) . Prepostavimo da važi

$$\|\gamma(t) - \alpha(t)\| = r, \quad (\gamma(t) - \alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 0,$$

za $a < t < b$. Drugi uslov znači da je potrebno samo nacrtati nekoliko normala i obeležiti jednaka rastojanja duž svake od njih da bismo nacrtali paralelne krive na datu kriju.

Ovo nas dovodi do sledeće definicije:

Definicija 3.12. *Paralelna kriva* regularne ravanske krije α na rastojanju r je ravanska kriva data sa

$$\text{parcurve}[\alpha, r](t) = \alpha(t) + \frac{r J \alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}. \quad (3.22)$$

Zapravo, sada možemo dozvoliti da r u (3.22) bude ili pozitivno ili negativno, tako da dobijamo paralelne krive na drugoj strani krije α , bez promene t .

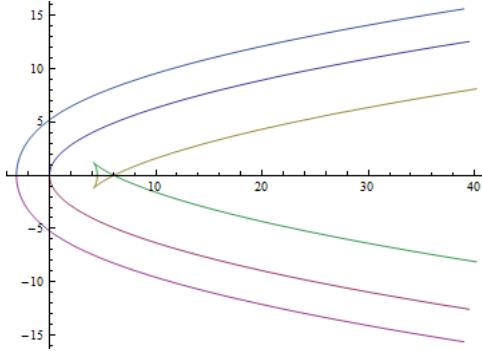
Definicija paralelne krije ne zavisi od izbora pozitivne reparametrizacije:

Lema 3.13. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ravanska kriva i neka je $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$ diferencijabilna funkcija. Tada

$$\text{parcurve}[\alpha \circ h, r](u) = \text{parcurve}[\alpha, r \operatorname{sign} h'](h(u)).$$

Dokaz. Na osnovu (3.22) imamo

³Gotfrid Vilhelm Lajbnic, 1646-1716

Slika 3.17: Paralelne krive parabola $\alpha_1(t) = (t^2, 2t)$, $\alpha_2(t) = (t^2, -2t)$ za $|r| = 3.1, 4.5$

$$\text{parcurve}[\alpha \circ h, r](u) = (\alpha \circ h)(u) + r \frac{J(\alpha \circ h)'(u)}{\|(\alpha \circ h)'(u)\|},$$

pa iz definicije izvoda složene funkcije sledi

$$\text{parcurve}[\alpha \circ h, r](u) = (\alpha \circ h)(u) + r \frac{J(\alpha' \circ h)(u)h'(u)}{\|(\alpha' \circ h)(u)h'(u)\|}.$$

Dalje je na osnovu pozitivne homogenosti norme

$$\text{parcurve}[\alpha \circ h, r](u) = (\alpha \circ h)(u) + r \frac{J(\alpha' \circ h)(u)h'(u)}{|h'(u)| \|\alpha'(h(u))\|}.$$

Kako je $h'(u) = |h'(u)| \text{sign } h'(u)$, dobijamo

$$\text{parcurve}[\alpha \circ h, r](u) = (\alpha \circ h)(u) + r \frac{J(\alpha' \circ h)(u)\text{sign } h'(u)}{\|\alpha'(h(u))\|}$$

i

$$\begin{aligned} \text{parcurve}[\alpha \circ h, r](u) &= (\alpha \circ h)(u) + r \text{sign } h'(u) \frac{J(\alpha' \circ h)(u)}{\|(\alpha' \circ h)(u)\|} \\ &= \left(\alpha(u) + r \text{sign } h'(u) \frac{J\alpha'(u)}{\|\alpha'(u)\|} \right) \circ h = \text{parcurve}[\alpha, r \text{sign } h'](h(u)). \end{aligned}$$

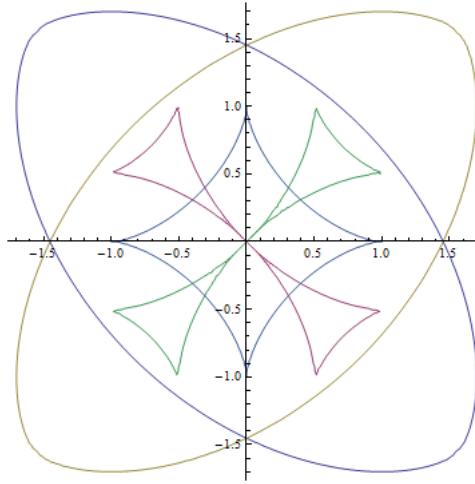
□

Za neke vrednosti r paralelna kriva se možda neće razlikovati po izgledu od date krive, ali se za druge vrednosti r može potpuno razlikovati. Ako je $|r|$ suviše veliko, paralelna kriva može seći samu sebe. Ove osobine su uočljive na Slikama 3.16, 3.17, 3.18, 3.19.

Izračunajmo krivinu paralelne krive:

Lema 3.14. Neka je α regularna ravanska kriva. Tada je kriva $\text{parcurve}[\alpha, r]$ regularna za one vrednosti t za koje je $1 - r\kappa[\alpha](t) \neq 0$. Štaviše, njena krivina je data sa

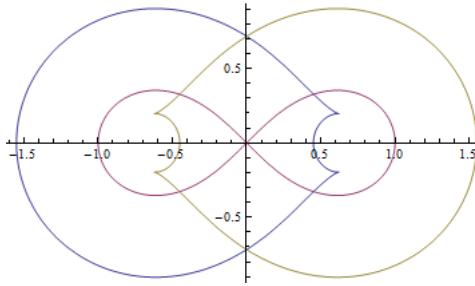
$$\kappa[\text{parcurve}[\alpha, r]](t) = \frac{\kappa[\alpha](t)}{1 - r\kappa[\alpha](t)}.$$

Slika 3.18: Paralelne krive astroide za $|r| = 1.7, 0.5$

Dokaz. Prema Teoremi 1.12. i Lemi 3.13. možemo pretpostaviti da je kriva α parametri-zovana dužinom luka. Pišemo $\beta(t) = \text{parcurve}[\alpha, r](t)$. Onda je $\beta = \alpha + rJ\alpha'$, tako da na osnovu (1.2) imamo

$$\beta' = \alpha' + rJ\alpha'' = \alpha' + rJ^2\kappa[\alpha]\alpha' = (1 - r\kappa[\alpha])\alpha'.$$

Sledi regularnost. Takođe, dobijamo

Slika 3.19: Paralelne krive lemniskate za $|r| = 0.55$

$$\beta'' = (1 - r\kappa[\alpha])\kappa[\alpha]J\alpha' - r\kappa[\alpha]'\alpha'.$$

Stoga,

$$\kappa[\beta] = \frac{\beta'' \cdot J\beta'}{\|\beta'\|^3} = \frac{((1 - r\kappa[\alpha])\kappa[\alpha]J\alpha' - r\kappa[\alpha]'\alpha') \cdot (1 - r\kappa[\alpha])J\alpha'}{\|1 - r\kappa[\alpha]\|^3 \|\alpha'\|^3}.$$

Kako je $J\alpha' \cdot J\alpha' = 1$, a vektori α' , $J\alpha'$ su normalni pa je $\alpha' \cdot J\alpha' = 0$, sledi

$$\kappa[\beta] = \frac{(1 - r\kappa[\alpha])^2\kappa[\alpha]}{\|1 - r\kappa[\alpha]\|^3} = \frac{\kappa[\alpha]}{\|1 - r\kappa[\alpha]\|},$$

što je i trebalo dokazati. □

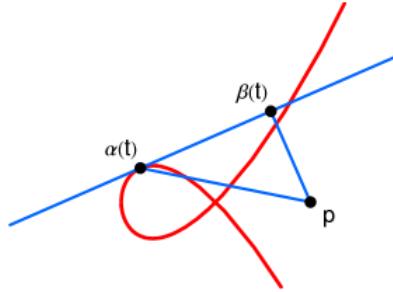
3.5 Pedalne krive

Neka je α kriva u ravni i neka je $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$. Putanja preseka normale $\beta(t)$ spuštenе iz fiksirane tačke \mathbf{p} (pedalne tačke) sa tangentom krive α u tački $\alpha(t)$ se naziva *prva (pozitivna) pedalna kriva* krive α u odnosu na tačku \mathbf{p} . Sledi da je vektor $\beta(t) - \mathbf{p}$ projekcija vektora $\alpha(t) - \mathbf{p}$ u pravcu vektora normale $J\alpha'(t)$, kao što je prikazano na Slici 3.20. Ovo nam omogućava da damo formalniju definiciju:

Definicija 3.15. Prva (pozitivna) pedalna kriva regularne krive $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ u odnosu na fiksiranu tačku $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ je definisana sa

$$\text{pedal}[\alpha, \mathbf{p}](t) = \mathbf{p} + \frac{(\alpha(t) - \mathbf{p}) \cdot J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^2} J\alpha'(t).$$

Prva negativna pedalna kriva je kriva koja u svakoj od svojih tačaka dodiruje svaku od



Slika 3.20: Definicija prve pozitivne pedalne krive

normala iz proizvoljne tačke krive α na radijus vektor iz pedalne tačke, tj. ona je envelopa⁴ ovih normala. Pozitivne i negativne pedalne krive viših redova se definišu indukcijom na analogan način.

Dokaz sledeće leme sledi iz dokaza Teoreme 1.13.:

Lema 3.16. Definicija prve pozitivne pedalne krive krive α je nezavisna od parametrizacije krive α , tj.

$$\text{pedal}[\alpha \circ h, \mathbf{p}] = \text{pedal}[\alpha, \mathbf{p}] \circ h, \quad (3.23)$$

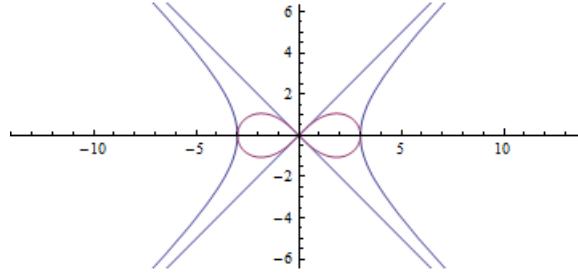
za bilo koju diferencijabilnu funkciju $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$.

Dokaz. Na osnovu (3.23) imamo

$$\text{pedal}[\alpha \circ h, \mathbf{p}](t) = \mathbf{p} + \frac{((\alpha \circ h)(t) - \mathbf{p}) \cdot J(\alpha \circ h)'(t)}{\|(\alpha \circ h)'(t)\|^2} J(\alpha \circ h)'(t),$$

pa iz definicije izvoda složene funkcije sledi

⁴Envelopa je kriva koja u svakoj od svojih tačaka dodiruje krivu familije integralnih krivih. Detaljnije o envelopama se može videti u [9], [2].

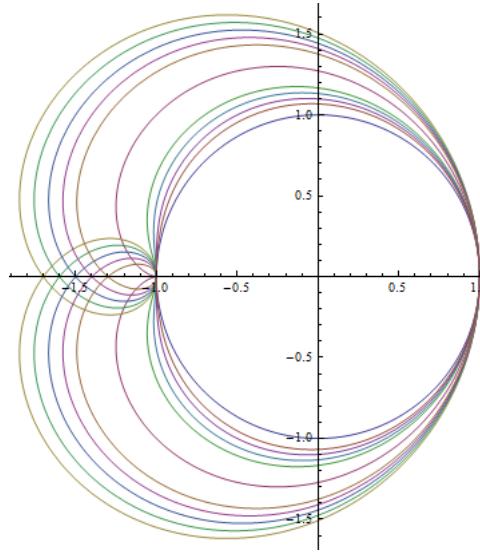
Slika 3.21: Prva pozitivna pedalna kriva hiperbole $hyperbole[3, 3]$ u odnosu na njen centar

$$pedal[\alpha \circ h, \mathbf{p}](t) = \mathbf{p} + \frac{((\alpha \circ h)(t) - \mathbf{p}) \cdot J(\alpha' \circ h)(t)h'(t)}{\|(\alpha' \circ h)(t)h'(t)\|^2} J(\alpha' \circ h)(t)h'(t).$$

Dalje je na osnovu homogenosti skalarmog proizvoda i pozitivne homogenosti norme

$$pedal[\alpha \circ h, \mathbf{p}](t) = \mathbf{p} + \frac{h'(t)((\alpha \circ h)(t) - \mathbf{p}) \cdot J(\alpha' \circ h)(t)}{\|(\alpha' \circ h)(t)\|^2 |h'(t)|^2} J(\alpha' \circ h)(t)h'(t)$$

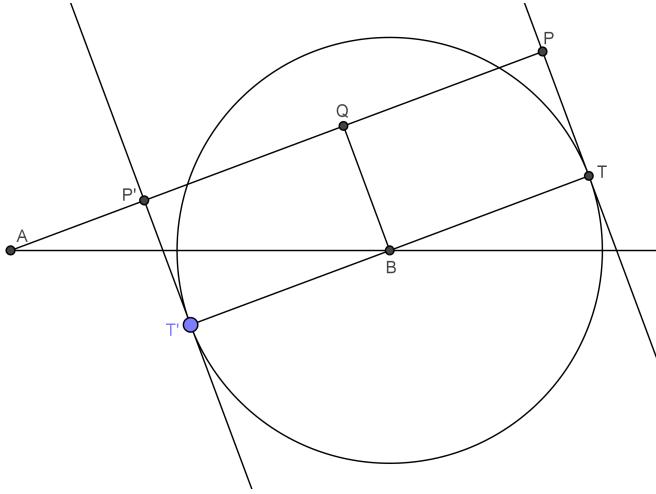
i



Slika 3.22: Prve pozitivne pedalne krive kružnice u odnosu na tačke unutar, na i van kružnice

$$\begin{aligned} pedal[\alpha \circ h, \mathbf{p}](t) &= \mathbf{p} + \frac{((\alpha \circ h)(t) - \mathbf{p}) \cdot (J\alpha' \circ h)(t)}{\|(\alpha' \circ h)(t)\|^2} (J\alpha' \circ h)(t) \\ &= \left(\mathbf{p} + \frac{(\alpha(t) - \mathbf{p}) \cdot J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^2} J\alpha'(t) \right) \circ h = (pedal[\alpha, \mathbf{p}] \circ h)(t), \end{aligned}$$

za sve $t \in (c, d)$, što je i trebalo dokazati. □



Slika 3.23

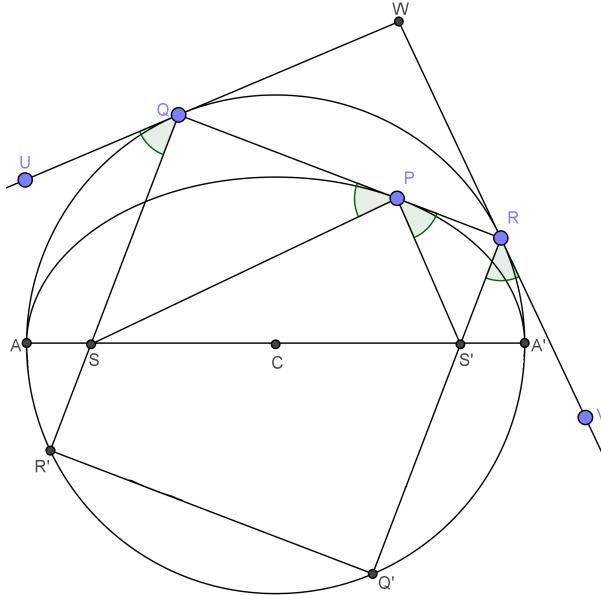
Izračunaćemo po definiciji prvu pozitivnu pedalnu krivu hiperbole $hyperbole[a, a](t) = (a \sec t, a \tan t)$ u odnosu na njen centar:

$$\begin{aligned}
 pedestal[hyperbole[a, a], (0, 0)](t) &= (0, 0) + \frac{\left(\left(\frac{a}{\cos t}, a \tan t\right) - (0, 0)\right) \cdot \left(-\frac{a}{\cos^2 t}, \frac{a \tan t}{\cos t}\right)}{\frac{a^2 \sin^2 t}{\cos^4 t} + \frac{a^2}{\cos^4 t}} \left(-\frac{a}{\cos^2 t}, \frac{a \tan t}{\cos t}\right) \\
 &= \frac{\left(\frac{a}{\cos t}, a \tan t\right) \cdot \left(-\frac{a}{\cos^2 t}, \frac{a \tan t}{\cos t}\right)}{\frac{a^2 (\sin^2 t + 1)}{\cos^4 t}} \left(-\frac{a}{\cos^2 t}, \frac{a \tan t}{\cos t}\right) = \frac{-\frac{a^2}{\cos^3 t} + \frac{a^2 \sin^2 t}{\cos^3 t}}{\frac{a^2 (\sin^2 t + 1)}{\cos^4 t}} \left(-\frac{a}{\cos^2 t}, \frac{a \sin t}{\cos^2 t}\right) \\
 &= -\frac{\cos^3 t}{\sin^2 t + 1} \left(-\frac{a}{\cos^2 t}, \frac{a \sin t}{\cos^2 t}\right) = \left(\frac{a \cos t}{\sin^2 t + 1}, -\frac{a \sin t \cos t}{\sin^2 t + 1}\right).
 \end{aligned}$$

Dobili smo parametarske jednačine lemniskate (Slika 3.21).

Pokazaćemo da je Paskalov puž prva pozitivna pedalna kriva kružnice u odnosu na bilo koju tačku različitu od njenog centra. Nacrtajmo kružnicu poluprečnika k i obeležimo fiksiranu tačku A na rastojanju $2a$ od njenog centra B. Neka su dalje TP i T'P' paralelne tangente na tu kružnicu, P i P' podnožja normala iz A i duž BQ paralelna tim dvema tangentama. Onda je AQ tetiva kružnice prečnika AB i $QP = QP' = k$ (Slika 3.23). Sledi da je putanja tačaka P i P' Paskalov puž. Ako tačka A leži na kružnici, Paskalov puž se svodi na kardioidu. Prva pozitivna pedalna kriva kružnice u odnosu na njen centar je ta ista kružnica.

Prve negativne pedalne krive kružnice u odnosu na tačku unutar ili van kružnice su elipsa i hiperbola, respektivno. Nacrtajmo kružnicu sa centrom C i prečnikom AA'. Označimo tačku S na prečniku AA' (na njegovom produžetku, respektivno). Iz proizvoljne tačke Q na kružnici povucimo tetivu QR pod pravim uglom na SQ (Slika 3.24). Ponovimo postupak za brojne pozicije tačke Q tako da tačka S ostane fiksirana. Envelopa tetrici QR (produžene tetrici QR) će biti elipsa (hiperbola), jer je ispunjeno optičko svojstvo elipse da se svetlosni



Slika 3.24

zraci koji izviru iz jedne žiže odbijaju na elipsi kroz drugu žižu (u slučaju hiperbole, duž pravaca iz druge žiže).

Sada ćemo pokazati da ako je S prva pozitivna pedalna kriva krive C , onda je C prva negativna pedalna kriva krive S . Na Slici 3.25 vidimo da je ϕ spoljašnji ugao pravouglog trougla OBD, pa rastojanje p zaklapa ugao $\phi - \pi/2$ sa x -osom. Nagib prve pozitivne pedalne krive S je dat sa

$$m = \operatorname{tg} \mu = \frac{dy}{dx}. \quad (3.24)$$

Koristeći polarne koordinate $x = p \cos(\phi - \pi/2)$, $y = p \sin(\phi - \pi/2)$ tačke B i (3.24) dobijamo

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\sin(\phi - \pi/2)dp + p \cos(\phi - \pi/2)d\phi}{\cos(\phi - \pi/2)dp - p \sin(\phi - \pi/2)d\phi}. \quad (3.25)$$

Kako je spoljašnji ugao trougla jednak zbiru dva unutrašnja nesusedna ugla tog trougla, očigledno je

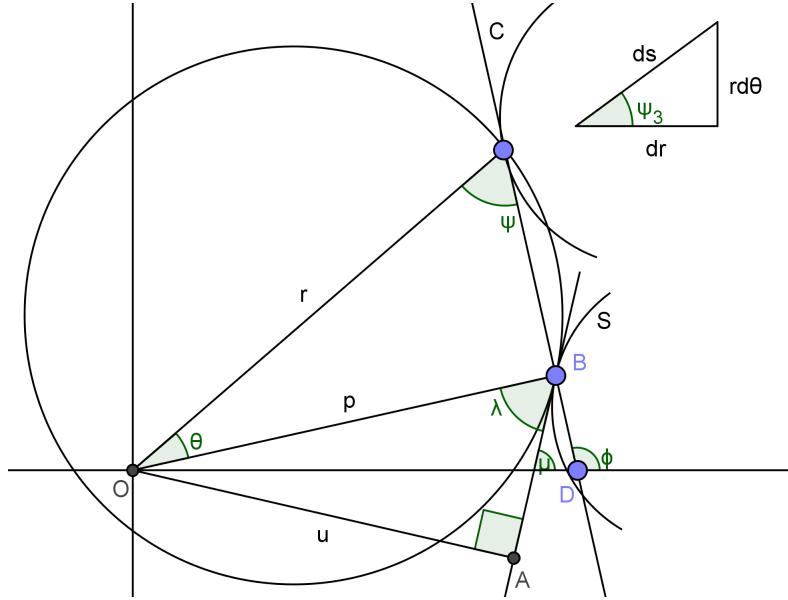
$$\lambda + (\phi - \pi/2) = \mu. \quad (3.26)$$

Iz (3.26) i adicionalnih formula sledi

$$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{tg}(\mu - (\phi - \pi/2)) = \frac{\operatorname{tg} \mu - \operatorname{tg}(\phi - \pi/2)}{1 + \operatorname{tg}(\phi - \pi/2)}. \quad (3.27)$$

Iz (3.25) i (3.27) je

$$\operatorname{tg} \lambda = p \left(\frac{d\phi}{dp} \right). \quad (3.28)$$



Slika 3.25

Dalje je

$$\operatorname{tg} \lambda \frac{dp}{ds} = p \frac{d\phi}{dp} \frac{dp}{ds} = p \frac{d\phi}{ds} = \frac{p}{\rho}. \quad (3.29)$$

Zamenom formule za poluprečnik krivine u pedalnim koordinatama $\rho = \frac{r dr}{dp}$ (koja je detaljno izvedena u [7], [9]) u (3.29) dobijamo

$$\operatorname{tg} \lambda \frac{dp}{ds} = p \frac{dp}{r dr} = r \sin \psi \frac{dp}{r dr} = \sin \psi \frac{dp}{dr}.$$

Dakle,

$$\operatorname{tg} \lambda = \sin \psi \frac{ds}{dr} = \operatorname{tg} \psi$$

(Slika 3.25), i

$$\lambda = \psi.$$

Znači, tangenta prve pozitivne pedalne krive S je takođe tangenta kružnice prečnika r . Prema tome, prva pozitivna pedalna kriva je envelopa ovih kružnica. Obratno, C je prva negativna pedalna kriva krive S .

Ideja pozitivnih i negativnih pedalnih krivih potiče od Kolina Maklorena⁵ 1718. godine. Pedalnim ih je nazvao Terkem⁶. One imaju važnu ulogu u teoriji kaustičnih krivih.

⁵Kolin Makloren, 1698-1746

⁶Olli Terkem, 1782-1862

Kriva geometrijski slična prvoj pozitivnoj pedalnoj krivi se može nacrtati kao envelopa na sledeći način. Nacrtajmo kružnicu sa centrom u proizvoljnoj tački Q date krive i poluprečnikom QO , gde je O pedalna tačka. Envelopa takvih kružnica će biti kriva slična pedalnoj krivi, sa udvostrućenim linearnim dimenzijama pedalne krive. Ova kriva se naziva *ortomična kriva* date krive u odnosu na tačku O .

Ako je data kriva u implicitnom obliku $f(x, y) = 0$, jednačina prve pozitivne pedalne krive u odnosu na koordinatni početak se dobija eliminacijom koeficijenta pravca m iz jednačina prave $y = mx + k$ i njene normale $my + x = 0$ iz koordinatnog početka, gde se presek s y -osom k određuje tako da je prava $y = mx + k$ tangenta na krivu. Na primer:

Prva pozitivna pedalna kriva parabole $y^2 = 2x$ u odnosu na njeno teme $(0, 0)$ je

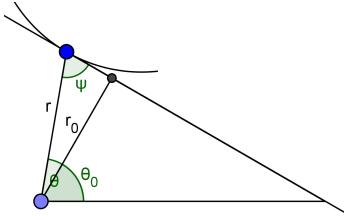
$$\begin{aligned} y &= mx + \frac{1}{2m} \\ my + x &= 0, \end{aligned}$$

gde se presek s y -osom $\frac{1}{2m}$ određuje iz uslova da je prava $y = mx + \frac{1}{2m}$ tangenta na parabolu: $1 = 2mk$, ili cisoida

$$y^2 = -\frac{2x^3}{2x + 1}.$$

Ako su (r_0, θ_0) polarne koordinate podnožja normale iz pola i u (3.26) i (3.28) stavimo oznake sa Slike 3.26, važi

$$\psi + (\theta - \theta_0) = \frac{\pi}{2}, \quad (3.30)$$



Slika 3.26

$$\operatorname{tg}\psi = r \left(\frac{d\theta}{dr} \right). \quad (3.31)$$

Sa Slike 3.26 se takođe vidi da je

$$r_0 = r \sin \psi. \quad (3.32)$$

Iz (3.31) i (3.32) sledi

$$\frac{r^2}{r_0^2} = 1 + \left(\frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2.$$

Između ovih relacija se mogu eliminisati r , θ i ψ da bi se dobila polarna jednačina prve pozitivne pedalne krive u odnosu na koordinatni početak. Kao primer ćemo razmotriti sinusoidalnu spiralu

$$r^n = a^n \cos n\theta. \quad (3.33)$$

Diferencirajući (3.33) i deleći sa (3.33) dobijamo

$$n \frac{r'}{r} = -ntgn\theta = nctg\psi.$$

Prema tome,

$$\psi = \frac{\pi}{2} + n\theta. \quad (3.34)$$

Ali, iz (3.30) i (3.34) je

$$\theta = \theta_0 + \frac{\pi}{2} - \psi = \theta_0 - n\theta$$

i

$$\theta = \frac{\theta_0}{n+1}.$$

Dalje je

$$r_0 = r \sin \psi = r \cos n\theta = a \cos^{\frac{1}{n}} n\theta \cos n\theta,$$

ili

$$r_0 = a \cos^{\frac{n+1}{n}} n\theta = a \cos^{\frac{n+1}{n}} \left[\frac{n\theta_0}{n+1} \right].$$

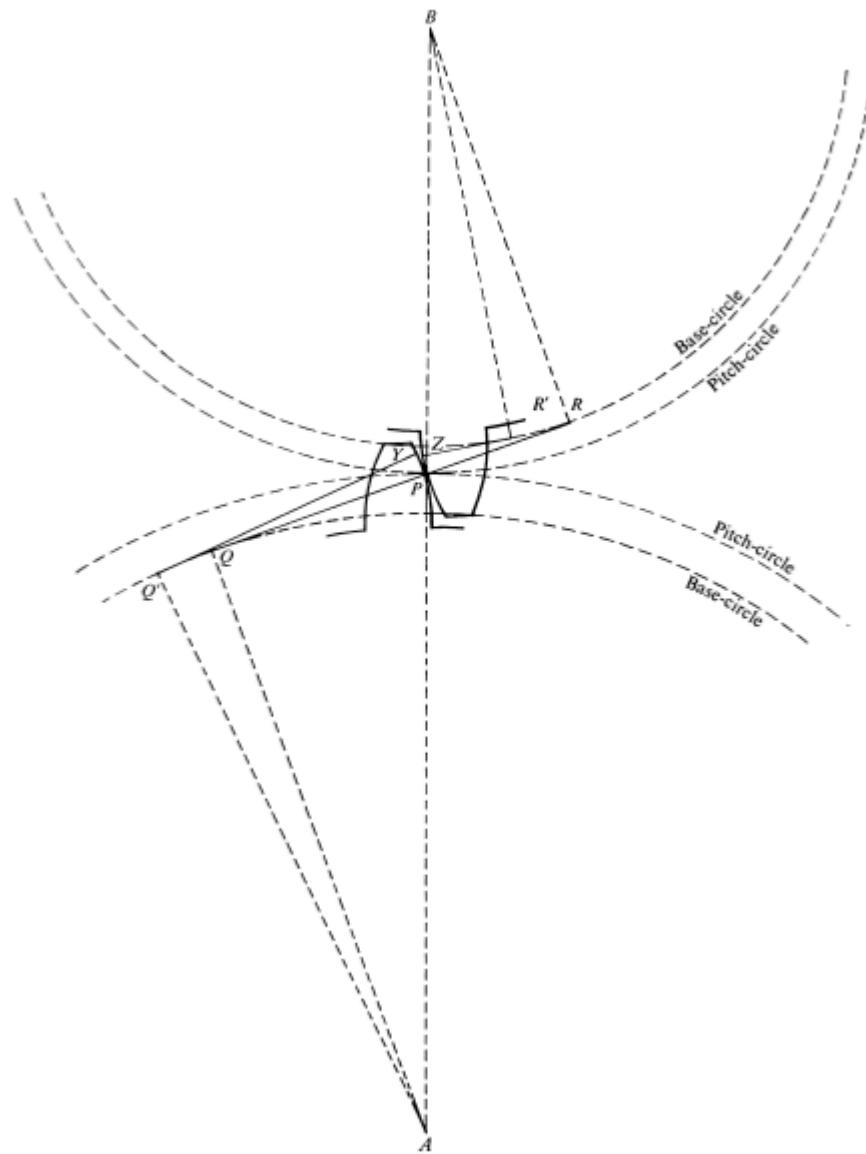
Odavde je prva pozitivna pedalna kriva u odnosu na pol $r_0^{n_1} = a^{n_1} \cos n_1 \theta_0$ druga sinusoidalna spirala, gde je $n_1 = \frac{n}{n+1}$.

Ako u definiciji pozitivne pedalne krive termin "tangenta" zamenimo "normalom" dobijamo definiciju *kontrapedalne krive*, koja se još naziva *normalna pedalna kriva*:

Definicija 3.17. Kontrapedalna kriva ravanske krive α je putanja podnožja normala spuštenih iz tačke \mathbf{p} na proizvoljnu normalu krive α i definisana je sa

$$contrapedal[\alpha, \mathbf{p}](t) = \mathbf{p} + \frac{(\alpha(t) - \mathbf{p}) \cdot \alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^2} \alpha'(t).$$

Iz činjenice da je normala na krivu tangenta evolute te krive sledi da je kontrapedalna kriva regularne ravanske krive pedalna kriva evolute te krive. Ekvivalentno, kontrapedalna kriva involute je pedalna kriva početne krive.



Slika 3.27: Involute krugova u dizajnu zupčanika

Zaključak

Praktični problemi u raznim oblastima su doveli do otkrivanja sve složenijih krivih. Neke su zadavane na drugačije načine od uobičajenog parametarskog. Mi smo detaljno izučavali implicitno zadate ravanske krive i ravanske krive u polarnim koordinatama. Dali smo primere i jednih i drugih. Objasnili smo kako se konstruktivno dobijaju neke od njih, opisivali kako se ponašaju u ravni i računali im krivinu, preseke sa koordinatnim osama i dužinu luka. U literaturi se još navode pedalni, bipolarni i unutrašnji način zadavanja ravanskih krivih, koje smo samo definisali. Potom smo iskoristili neke osobine ravanskih krivih da dobijemo nove krive. Parametarski smo definisali evolute, paralelne i pedalne krive i pokazali da su te definicije nezavisne od parametrizacije do na proizvoljnu diferencijabilnu funkciju. Svaki primer evolute je ujedno i primer involute. U istom odnosu su i prva pozitivna i prva negativna pedalna kriva. Pokazali smo da je oskulatorna kružnica ravanske krive granična vrednost kružnica koje prolaze kroz tri tačke krive dok tačke teže tački dodira oskulatorne kružnice. Paralelne krive su, na neki način, uopštenje involuta. Davali smo fizičke interpretacije i računali parametrizacije navedenih izvedenih krivih za neke poznate ravanske krive. Mnoge smo dobili i konstruktivno. Kao i u prethodnom poglavlju, računali smo im krivinu i dužinu luka. Veliki broj ravanskih krivih je detaljno izučen kroz istoriju, a mnogo više njih tek treba da bude otkriveno.

Literatura

- [1] Do Carmo, M. P. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [2] Fowler, R. H. *The elementary differential geometry of plane curves*. Fellow of Trinity College, Cambridge
- [3] Ganguli, S. *The theory of plane curves*. Calcutta University Press, 1926.
- [4] Gibson, C. G. *Elementary geometry of algebraic curves: An undergraduate introduction*. Cambridge University Press, 1998.
- [5] Gray, A. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*. Chapman Hall/CRC, 2006.
- [6] Kühnel, W. *Differential geometry: curves - surfaces - manifolds*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [7] Lawrence, J. D. *A catalog of special plane curves*. Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- [8] Lockwood, E. H. *A book of curves*. Cambridge University Press, 1961.
- [9] Yates, R. C. *Curves and their properties*. National Council of Teachers of Mathematics, 1974.
- [10] Zwikker, C. *The advanced geometry of plane curves and their applications*. Dover Publications, Inc., New York, 1963.

Biografija



Sanja Vukašinović je rođena u Šapcu, 26. septembra 1991. godine. Osnovnu školu završava 2006. godine kao nosilac Vukove diplome. Iste godine upisuje Šabačku gimnaziju, prirodno-matematički smer, koju završava takođe kao nosilac Vukove diplome. Školske 2010/2011. upisuje osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu, smer Diplomirani profesor matematike. Iste završava 2014. godine, sa prosekom 8.81 i upisuje master akademske studije na istom fakultetu, smer Master profesor matematike. Sve ispite predviđene planom i programom položila je zaključno sa septembarskim rokom 2015. godine, čime je stekla uslov za odbranu master rada.

Novi Sad, februar 2016.

Sanja Vukašinović

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Sanja Vukašinović
AU

Mentor: Dr Sanja Konjik, vanr. prof.
MN

Naslov rada: Alternativni pristupi u izučavanju ravanskih krivih
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2016.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA

Fizički opis rada: (3, 57, 10, 0, 51, 0, 0)
FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Matematička analiza/Diferencijalna geometrija

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: implicitno zadata kriva, polarna parametrizacija, evoluta, involuta, paralelna kriva, pedalna kriva

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

Master rad "Alternativni pristupi u izučavanju ravanskih krivih" je posvećen proučavanju posebnih aspekata ravanskih krivih. Uobičajeno je da se kriva u ravni zadaje parametarski, ukoliko se izučava analitički. Međutim, postoje različiti alternativni načini zadavanja krivih koji mogu biti od posebne važnosti u određenim slučajevima, pre svega implicitno zadavanje krivih, ili pak u polarnim koordinatama. Osnovni pojmovi teorije krivih kao što su regularna kriva, dužina luka krive, prirodna parametrizacija, Freneova kriva, tangentni i normalni vektor, krivina, su pregledno dati u uvodnom delu master rada. Zatim se u prvom delu rada razmatraju implicitno zadate krive i upoređuju sa onima koje su definisane parametarski. Ukazuje se na prednosti, a u pojedinim slučajevima i nužnost ovog alternativnog pristupa. Kao ilustracija su dati primjeri krivih koje su nula skupovi jednačina trećeg i četvrtog stepena. Drugi način je opisivanje krivih polarnim koordinatama. To omogućava upoznavanje sa familijama zatvorenih krivih i izučavanje različitih vrsta spirala. U drugom delu master rada pažnja je posvećena izvođenju novih krivih od date ravanske krive različitim konstrukcijama. Na taj način dobijaju se posebne klase krivih. Razmatraju se četiri klasična primera konstrukcije jedne ravanske krive od druge koja je data: to su evolute, involute, paralelne krive i pedalne krive. Pokazano je kako se mogu konstruisati normala i tangenta na krivu i njene oskulטורne kružnice, sa ciljem da se, uz dodatna tvrđenja, omogući pogodna vizuelizacija evolute.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 16.10.2015.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Milica Žigić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Jelena Stojanov, docent, Tehnički fakultet "Mihajlo Pupin" Zrenjanin, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Sanja Konjik, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monographic type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master thesis
CC

Author: Sanja Vukašinović
AU

Mentor: Sanja Konjik, PhD
MN

Title: Alternative approaches in the study of plane curves
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2016.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
PP

Physical description: (3, 57, 10, 0, 51, 0, 0)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Mathematical analysis/Differential geometry

SD

Subject/Key words: implicitly defined curve, polar parametrization, evolute, involute, parallel curve, pedal curve

SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract:

AB

Master's thesis "Alternative approaches in the study of plane curves" is dedicated to the study of specific aspects of plane curves. If we study plane curves analytically, it is common to define them in parametric form. However, there are various alternative ways of defining curves, primarily implicitly defined curves or in polar coordinates, which may be of special importance in particular cases. Basic notions of the theory of curves like a regular curve, arc length of the curve, curves parametrized by its arc length, Frenet curve, tangent and normal vector, curvature are clearly given in the Introduction of the thesis. Then, in the first part of the thesis we discuss implicitly defined curves and contrast them with those parametrized. We point to the advantages and the necessity of this alternative approach in particular cases. As an illustration, we give examples of curves which are sets of zeros of cubic and quartic equations. Another way is description of curves in polar coordinates. It enables meeting the families of closed curves and study of different types of spirals. In the second part of the thesis attention is devoted to the derivation of new curves from given plane curve with different constructions. In this way we get the special classes of curves. We consider four classic examples of construction one plane curve from another: these are evolutes, involutes, parallel curves and pedal curves. It is shown how to construct normal and tangent to the curve and its osculating circles, with the aim to enable suitable visualization of evolute with the additional of the statements.

Accepted by the Scientific Board on: 16.10.2015.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: Dr. Milica Žigić, Assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Dr. Jelena Stojanov, Assistant professor, Technical faculty "Mihajlo Pupin" Zrenjanin, University of Novi Sad

Member: Dr. Sanja Konjik, Associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad