UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Rita Gajdač

Remzijevi brojevi

- Master rad-

Mentor:
dr Boris Šobot

Novi Sad, 2019.

Sadržaj

Predgovor

Tema master rada su Remzijevi brojevi. Remzijeva teorema je jedna od osnovnih teorema kombinatorike i diskretne matematike uopšte. Ova teorema je dobila ime po engleskom matematičaru Frank Plumpton Ramsey (1903-1930) koji ju je prvi dokazao i publikovao 1928. godine. Interesantno je da Remzi ovu teoremu nije smatrao značajnom, samo ju je koristio kao pomoćnu lemu. Međutim, od ove teoreme je nastala jedna nova teorija koja se bavi uslovima za postojanje pravilnih struktura u okviru nekih sistema.

Teorema glasi: za sve prirodne brojeve k, m, r postoji prirodan broj n takav da za svako bojenje k-torki skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u r boja postoji njegov podskup od m elemenata čije sve k-torke imaju istu boju.

Drugim rečima, Remzijeva teorema kaže da u dovoljno velikom broju objekata, uvek postoji pravilna struktura unapred zadate veličine. Možemo primetiti da je Dirihleov princip samo jedan specijalan slučaj Remzijeve teoreme.

Remzijev broj je najmanji prirodan broj n za koju važi Remzijeva teorema. Remzijeva teorema dokazuje egzistenciju Remzijevih brojeva ali tačne vrednosti tih brojeva jako teško računaju. U većini slučajeva poznajemo samo neke gornje i donje granice tih brojeva.

Master rad sastoji se od tri dela.

U prvom delu rada navedemo one definicije, teoreme, pojmove i oznake koje koristimo.

U drugom delu rada formulišemo i dokažemo Remzijevu teoremu. Posebno se bavimo slučajem kada je $k = 2$ koji možemo posmatrati kao bojenje grana grafa. U ovom delu rada definišemo i beskonačnu Remzijevu teoremu, koja se odnosi na grafove sa beskonačno mnogo čvorova odnosno na skupove sa beskonačno mnogo elemenata.

Treći deo sadrži razne procene Remzijevih brojeva. Navedemo neke gornje i donje granice i nađemo tačnu vrednost neke Remzijeve brojeve.

Na kraju je spisak korišćene literature.

Rad je pisan u programu LaTeX. Simbol $\square$ označava kraj dokaza teoreme, leme ili primera.

* * *

Ovim putem želela bih da se zahvalim svom mentoru, dr Borisu Šobotu na svim stručnim savetima, sugestijama i primedbama u toku pripreme ovog master rada. Takođe zahvaljujem se i članovima komisije, dr Vojislavu Petroviću i dr Bojanu Bašiću.

Veliku zahvalnost dugujem i svim svojim profesorima i asistentima, od kojih sam mnogo naučila u toku školovanja i studiranja.

Ovim putem želela bih da se zahvalim svojoj porodici i mužu na podršci i ukazanom poverenju koje su mi pružili tokom mog školovanja.

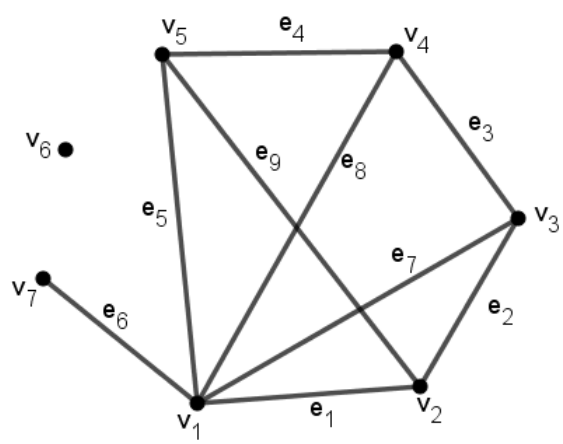
Takođe se zahvaljujem koleginicama i kolegama sa kojima sam se pripremala za ispite. Zajedničko studiranje i druženje sa njima doprinelo je da studentski dani budu lepši i nezaboravni.

Novi Sad, 2019. Rita Gajdač

1 Osnovne definicije

$\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots, n$ je skup prirodnih brojeva.
$|X|$ je kardinalni broj skupa X, tj. broj elemenata skupa X.
$[n]$ je proizvoljan skup od n elemenata. Npr. $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
$[X]^k = \{Y | Y \subset X, |Y| = k\}$ je skup svih k-elementnih podskupova skupa X.
$[X]^{\leq k} = \{Y | Y \subset X, |Y| \leq k\}$ je skup svih podskupova skupa X sa brojem elemenata manjim ili jednakim od k.
$[X]^{<\omega} = \{Y | Y \subset X, Y \text{je konačan}\}$ je skup svih konačnih podskupova skupa X.

Definicija 1.1 ***Prost graf*** *G je uređen par $(V(G), E(G))$, gde je $E \subseteq [V]^2$. Elementi skupa V zovu se* ***čvorovi****, a elementi skupa E* ***grane*** *grafa.*



Slika 1. Prost graf

Definicija 1.2 *Ukoliko je grana određena čvorovima u, v, tada umesto $\{u, v\}$ možemo pisati uv ili samo e, gde je $e = \{u, v\}$. Za granu e kažemo još i da* ***spaja*** *u i v,* ***krajevi grane*** *e* ***su čvorovi*** *u i v, e je* ***incidentno*** *sa u i v, itd.*

Definicija 1.3 *Dva čvora su* ***susedna*** *ako su incidentni sa istom granom. Skup svih suseda čvora $v \in V(G)$ označavamo sa $N_G(v)$ i pišemo $N_G(v) = \{u \in V(G) | uv \in E(G)\}$.*

Definicija 1.4 *Neka je $v \in V(G)$ čvor grafa G, i $H \subseteq V(G)$ neprazan skup čvorova , tada sa*

$$N_G(v, H) = \{w \in H, vw \in E(G)\}$$

označavamo skup svih susednih čvorova čvora v koji pripadaju skupu H.

Definicija 1.5 ***Stepen*** *$d_G(v)$, ili kratko $d(v)$, čvora v je broj grana koje su sa njim incidentne. Za prost graf G važi da $d_G(v) = |N_G(v)|$.*

Definicija 1.6 ***Minimalan stepen*** *grafa G definiše se kao*

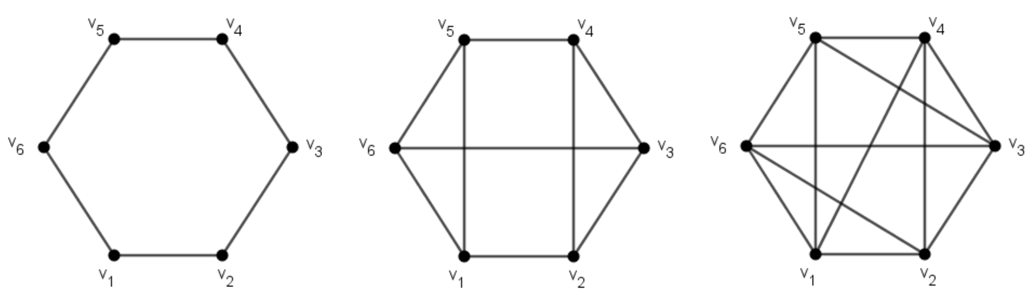
$$\delta(G) = min_{v \in V(G)} d(v).$$

Maksimalan stepen *grafa G se definiše kao*

$$\Delta(G) = max_{v \in V(G)} d(v).$$

Definicija 1.7 *Čvor koji nema suseda naziva se* ***izolovan čvor****, dok čvor sa tačno jednim susedom nazivamo* ***viseći*** *ili* ***krajnji čvor****.*

Definicija 1.8 *Graf je* ***regularan*** *ako svi čvorovi imaju isti stepen. Graf G je* ***k-regularan*** *ako je $d_G(v) = k$ za svako $v \in V(G)$.*



Slika 2. 2-regularan, 3-regularan i 4-regularan graf

Teorema 1.9 *Zbir stepena čvorova grafa jednak je dvostrukom broju grana.*

Dokaz. Kada izračunamo zbir stepena čvorova grafa, svaku granu uv računamo dva puta. Jedanput za u i jedanput za v. Zbog toga za svaki graf važi

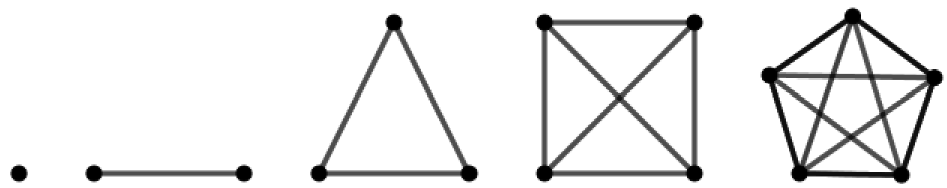
$$\sum_{u \in V(G)} d(u) = 2|E(G)|.$$

□

Teorema 1.10 *Broj čvorova neparnog stepena je u svakom grafu paran.*

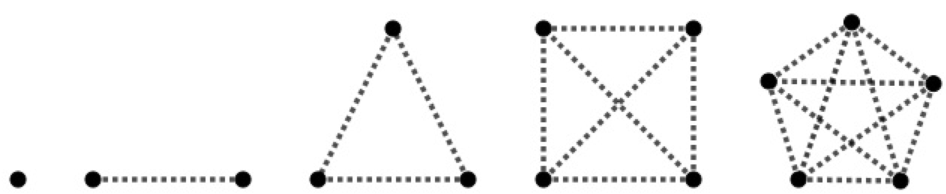
Dokaz. Znamo da je zbir stepena čvorova grafa jednak je dvostrukom broju grana, tj. zbir stepena čvorova mora biti paran broj. Ako je zbir nekoliko prirodnih brojeva paran, tada je broj neparnih sabiraka takođe paran, pa sledi tvrđenje teoreme. □

Definicija 1.11 *Graf čija su svaka dva čvora susedna zove se* ***kompletan*** *graf. Kompletan graf sa* n *čvorova označavamo sa* K_n*.*



Slika 3. K_1, K_2, K_3, K_4 i K_5

Definicija 1.12 ***Prazan graf*** *je graf u kojem ni jedna dva čvora nisu susedna, tj. svi su izolovani. Prazan graf sa* n *čvorova označavamo sa* $\overline{K_n}$*.*

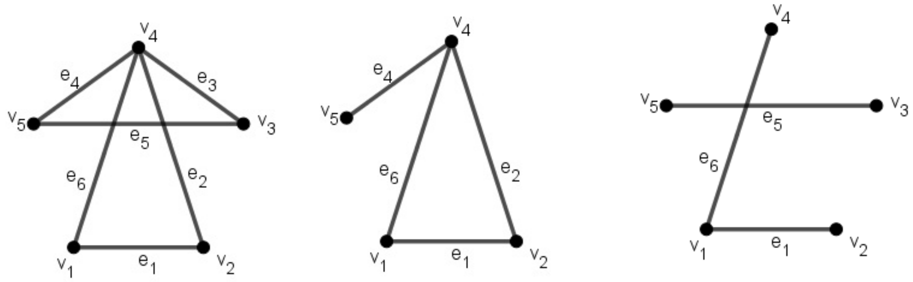


Slika 4. $\overline{K_1}$, $\overline{K_2}$, $\overline{K_3}$, $\overline{K_4}$ i $\overline{K_5}$

Definicija 1.13 *H je* ***podgraf*** *grafa G, oznaka je $H \subset G$, ako važi da $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$. Ako je H podgraf od G onda je G* ***nadgraf*** *od H.* ***Pokrivajući podgraf*** *grafa G je podgraf H, takav da je $V(H) = V(G)$.*

Definicija 1.14 *Podgraf grafa G* ***indukovan skupom čvorova*** *$V' \subset V(G)$ predstavlja graf G' sa skupom čvorova $V(G') = V'$ i skupom grana $E(G') = \{uv | u, v \in V' \wedge uv \in E\}$. Označavaćemo ga sa $G[V']$. Indukovan podgraf $G[V \backslash V']$ označavaćemo sa $G - V'$, a za $V' = \{u\}$ pisaćemo $G - u$ umesto $G - \{u\}$.*

Definicija 1.15 *Podgraf grafa G* ***indukovan skupom grana*** *$E' \subset E(G)$ predstavlja graf G' sa skupom čvorova $V(G') = \{u | \exists v \in V(G), uv \in E'\}$ i skupom grana $E(G') = E'$. Označavamo ga sa $G[E']$. Za indukovan podgraf $G[E \backslash E']$ koristiće se oznaka $G - E'$ odnosno $G - e$ umesto $G - \{e\}$ za $E' = \{e\}$.*

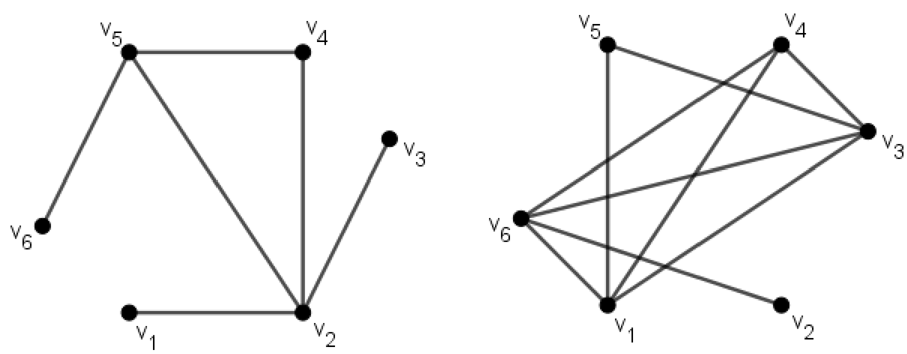


Slika 5. Grafovi G, $G - v_3$ i $G[\{e_1, e_5, e_6\}]$

Definicija 1.16 ***Nezavisan skup čvorova*** *grafa G je skup čvorova grafa G takvi da su svaka dva nesusedna.*

Podgraf grafa G indukovan čvorovima nezavisnog skupa je prazan graf.

Definicija 1.17 ***Komplement*** *grafa G je graf $\overline{G}$ takav da je $V(G) = V(\overline{G})$ i uv je grana u $\overline{G}$ ako i samo ako uv nije grana u G.*



Slika 6. Graf G i njegov komplement $\overline{G}$.

Definicija 1.18 ***k-klika*** *je kompletan podgraf grafa G koji ima k čvorova.*

Definicija 1.19 ***Bojenje grana*** *grafa G je preslikavanje $f : E(G) \rightarrow C$, gde je $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ skup boja.*

Teorema 1.20 (Dirihleov princip) *Ako su S i T konačni skupovi, takvi da važi $|S| > |T|$, onda ne postoji injektivno preslikavanje skupa S u skup T, tj. za svako preslikavanje $f : S \to T$ postoje $x_1, x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$, takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$.*

Drugim rečima, ako je $n + 1$ predmeta raspoređeno u n kutija, tada će bar jedna kutija sadržati bar dva predmeta.

Teorema 1.21 (Dirihleov princip za beskonačne skupove) *Ako beskonačan skup napišemo kao uniju konačno mnogo podskupova, onda jedan od tih podskupova će imati beskonačno mnogo elemenata.*

Iz ove teoreme sledi da ako beskonačno mnogo elemenata skupa obojimo sa konačno mnogo boja, onda beskonačno mnogo elemenata će imati istu boju.

U nastavku rada ćemo koristiti sledeće oznake:

(s, t)**-graf** je graf koji ne sadrži kao podgraf K_s, ni $\overline{K_t}$.

(s, t, n)**-graf** je (s, t)-graf sa n čvorova.

$\mathcal{R}(s, t)$ je skup svih (s, t)-grafova.

$\mathcal{R}(s, t, n)$ je skup svih (s, t, n) grafova.

2 Remzijeva teorema

2.1 Konačna Remzijeva teorema

Definicija 2.1 *$\chi : [S]^k \to [r]$ je **bojenje** skupa $[S]^k$ sa r različitih boja, gde boju elementa $s \in [S]^k$ označavamo sa $\chi(s)$. Kažemo da je $T \subseteq S$ **monohromatski** ako svi elementi iz $[T]^k$ imaju istu boju.*

Definicija 2.2 *Ako za svako r-bojenje skupa $[n]^k$ postoji i, $1 \leq i \leq r$ i skup $T \subseteq [n]$, $|T| = l_i$ takav da $[T]^k$ obojen sa bojom i onda pišemo:*

$$n \to (l_1, l_2, \ldots, l_r)^k$$

U slučaju da $l_1 = l_2 = \cdots = l_r = l$ pišemo $n \to (l)^k_r$. U slučaju da je $k = 2$ koristićemo oznaku $n \to (l_1, l_2, \ldots, l_r)$, a u slučaju da je $k = 2$ i $r = 2$ pišemo $n \to (l)$.

Primer 2.3 *Neka je $X = \{a, b, c, d, e\}$. Tada:*
$[X]^3 = \{\{a, b, c, \}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}\}$.
Jedno 3-bojenje skupa $[X]^3$ je $\{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}\}$.
Podskup $\{a, b, c, d\}$ je monohromatski.

$\square$

Primer 2.4 *Od šest proizvoljno izabranih ljudi biće tri koji se poznaju ili tri koji se ne poznaju. (Podrazumevamo da ako A poznaje B onda i B poznaje A).*

U ovom primeru $k = 2$, jer od tih šest ljudi uvek izaberemo dva, da bi odredili kakva veza ima među njima. Iz činjenice, da ima samo dve mogućnosti, da se poznaju ili da se ne poznaju sledi da je i $r = 2$. U ovom slučaju možemo koristiti oznaku $6 \to (3)$. Za dokaz videti Primer 2.7.

$\square$

Lema 2.5 *Za svako n, k, l važi:*

a) Ako $l_i' \leq l_i$ za $1 \leq i \leq r$, i $n \rightarrow (l_1, l_2, \ldots, l_r)$ onda $n \rightarrow (l_1', l_2', \ldots, l_r')$.

b) Ako $m \geq n$ i $n \rightarrow (l_1, l_2, \ldots, l_r)$, onda $m \rightarrow (l_1, l_2, \ldots, l_r)$.

c) Neka je σ permutacija skupa $[r]$. Tada $n \rightarrow (l_1, l_2, \ldots, l_r)$ ako i samo ako $n \rightarrow (l_{\sigma 1}, l_{\sigma 2}, \ldots, l_{\sigma r})$.

d) $n \rightarrow (l_1, l_2, \ldots, l_r)$ ako i samo ako $n \rightarrow (l_1, l_2, \ldots, l_r, 2)$.

Umesto dokaza analizirajmo Lemu 2.5 preko primera. U poslednjem delu rada ćemo dokazati da važi $25 \rightarrow (4, 5)$, tj. da između 25 proizvoljno izabranih ljudi sigurno će biti 4 koji se poznaju ili 5 koji se ne poznaju.

Lema pod a) kaže da ukoliko važi, da $25 \rightarrow (4, 5)$ onda možemo smanjiti brojeve u zagradi, jer tvrđenje ostaje tačno, tj. da $25 \rightarrow (4, 5)$ implicira na primer da $25 \rightarrow (4, 4)$. Ova imlikacija je logična. Ako između 25 ljudi ima 5 koji se ne poznaju, onda i ima 4, jer ako od tih 5 ljudi koji se ne poznaju izaberemo 4, za njih i dalje važi da se ne poznaju. Isto tako možemo smanjiti i broj ljudi koji se poznaju.

Lema pod b) kaže da iz $25 \rightarrow (4, 5)$ sledi na primer $27 \rightarrow (4, 5)$. Ako za tih 25 ljudi dodajemo još nekoliko to neće uticati na odnos među tih 25 ljudi. Ako smo već imali grupu od 4 ljudi koji su bili poznanici, oni će i dalje ostati poznanici, a oni koji su bili nepoznati, oni će i ostati.

Lema pod c) tvrdi da iz $25 \rightarrow (4, 5)$ sledi $25 \rightarrow (5, 4)$. Neka pretpostavimo suprotno, da važi $25 \rightarrow (4, 5)$, ali ne važi $25 \rightarrow (5, 4)$. Ako ne važi $25 \rightarrow (5, 4)$ to znači da možemo naći 25 ljudi tako da među njima ne postoji ni 5 koji se poznaju ni 4 koji se ne poznaju. Ako postoji takva grupa od 25 ljudi, onda možemo formulisati i grupu od 25 ljudi tako da jednostavno zamenjujemo njihov odnos, tj. da ako se A i B poznaju onda se u novoj grupi A i B ne poznaju. Na ovaj način ćemo dobiti grupu od 25 ljudi tako da među njima nema ni 4 koji se poznaju ni 5 koji se ne poznaju. To je kontradikcija sa pretpostavkom da važi $25 \rightarrow (4, 5)$. Drugi smer ide analogno.

Posmatrajmo sada lemu pod d). Pošto u zagradi ima tri broje, trebaće nam tri osobine. Neka među 25 proizvoljno izabranih ljudi svaki par se voli, mrzi ili se ne poznaje, lema kaže da iz $25 \rightarrow (4, 5)$ sledi $25 \rightarrow (4, 5, 2)$. Imamo samo dva slučaja. Ili postoji bar jedan par koji se ne poznaje ili su svi poznanici. U prvom slučaju važi $25 \rightarrow (4, 5, 2)$. U drugom slučaju ne postoji nijedan par sa trećom osobinom. Ako pretpostavimo da ne postoji ni

4 ljudi koji se vole ni 5 koji se mrze, onda pošto možemo zameniti odnose, dobijamo kontradikciju sa pretpostavkom da važi $25 \to (4,5)$. Drugi smer kaže da iz $25 \to (4,5,2)$ sledi $25 \to (4,5)$. Neka pretpostavimo suprotno, da ne važi $25 \to (4,5)$, tj. da možemo naći grupu od 25 ljudi tako da među njima nema ni 4 koji se poznaju ni 5 koji se ne poznaju. To znači da ako zamenimo osobinu da se poznaje sa osobinom da se voli i osobinu da se ne poznaje sa osobinom da se mrzi, možemo formirati grupu od 25 ljudi za koji važi da među njima nema ni 4 koji se voli ni 5 koji se mrzi ali nema ni 2 koje se ne poznaju jer među svima ima nekakav odnos. A to je kontradikcija sa pretpostavkom da važi $25 \to (4,5,2)$. □

Definicija 2.6 ***Remzijev broj*** *$R_k(l_1,\ldots,l_r)$ je najmanji broj n takav da*

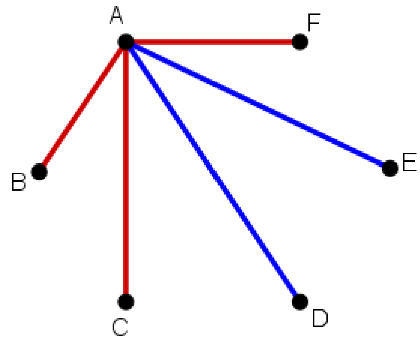
$$n \to (l_1, l_2, \ldots, l_r)^k$$

Za $k=2$ umesto $R_2(l_1,\ldots,l_r)$ koristićemo oznaku $R(l_1,\ldots,l_r)$.

Primer 2.7 *(Igra SIM)*
Igra Sim se igra spajanjem tačaka koje predstavljaju temena poligona. Na početku igre treba nacrtati $n \geq 6$ tačaka koje bi predstavljale n temena nekog poligona. Za igru treba dva igrača. Jedan igrač ima plavu, a drugi crvenu olovku. Jedan potez se sastoji u spajanju bilo koje dve tačke jednom duži. Pobednik je onaj igrač koji prvi uspe da nacrta trougao u svojoj boji. Za igru se uzima 6 ili više tačaka, jer može da se dokaže da u igri u takvom slučaju uvek pobeđuje jedan od igrača tj. da je Remzijev broj $R(3,3)=6$. U nastavku ćemo dokazati da je ova jednakost tačna.

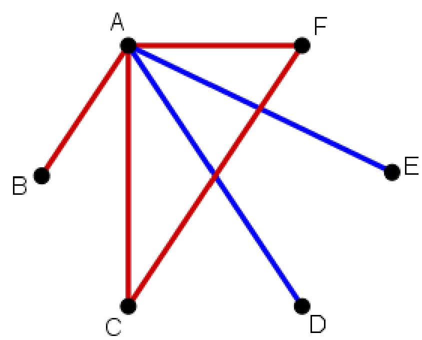
Pokazaćemo prvo da važi nejednakost: $R(3,3) \leq 6$. To znači da ako imamo 6 ili više tačaka, onda sigurno će se pojaviti bar jedan trougao čije su sve stranice crvene ili bar jedan trougao čije su sve stranice plave.

Neka smo nacrtali tačke A, B, C, D, E i F. Posmatrajmo tačku A. Tačku A možemo da spojimo preostalim tačkama sa crvenom ili plavom linijom. Pošto iz A izlazi pet linija, a mi imamo samo dve boje sledi da najmanje tri od tih pet linija su obojene istom bojom, recimo crvenom. Neka duži AB, AC i AF imaju crvenu boju.



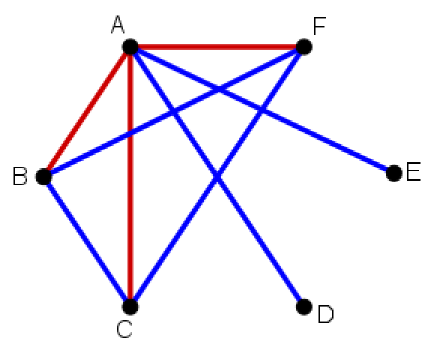
Slika 7. Tačka A povezana sa tačkama B, C i F crvenom linijom

Ako ima crvena liniija između bilo koje dve tačke skupa $\{B, C, F\}$, onda zajedno sa A obrazuju crveni trougao.



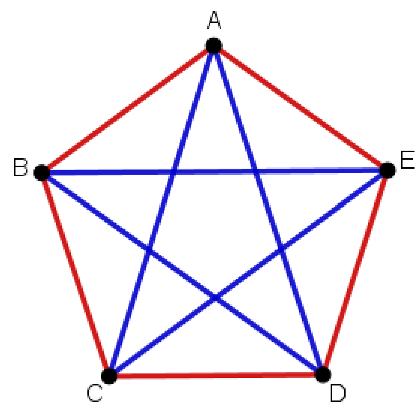
Slika 8. Tačke A, C i F obrazuju crveni trougao.

Iz ovoga sledi da tačke skupa $\{B, C, F\}$ moraju biti povezane plavom linijom. Ali onda te tačke obrazuju plavi trougao.



Slika 9. Tačke B, C i F obrazuju plavi trougao.

Dakle, ako imamo 6 ili više tačaka sigurno će se pojaviti crveni ili plavi trougao, tj. važi da je $R(3,3) \leq 6$.
Treba još dokazati, da važi nejednakost $R(3,3) > 5$ tj. da ako imamo 5 ili manje tačaka, onda postoji slučaj kada ne pobeđuje nijedan od igrača. Na Slici 10. smo nacrtali jedan primer kada su sve tačke povezane, znači nema više poteza, ali ne pojavljuje se ni crveni ni plavi trougao.



Slika 10. Nema pobednika.

Iz ovih nejednakosti sledi da važi jednakost: $R(3,3) = 6$.

□

Remzijeva teorema kaže:
Za svake prirodne brojeve $k, l_1, \ldots, l_r$ postoji broj n takav da

$$n \to (l_1, l_2, \ldots, l_r)^k.$$

Kod dokaza Remzijeve teoreme koristićemo indukciju po broju k. Slučaj $k = 1$ je poznat kao Dirihleov princip. Slučaj kada je $k = 2$ možemo posmatrati kao bojenje grana kompletnog grafa, gde je n broj čvorova grafa, a r je broj boja, kojim želimo obojiti grane.

Prvo ćemo posmatrati jedan specijalan slučaj kada je $r = 2$ i $k = 2$.

Teorema 2.8 (Remzijeva teorema za $r = 2$ i $k = 2$) *Za svake prirodne brojeve k, l postoji prirodan broj $R(k,l)$ tako da u svakom kompletnom grafu sa $R(k,l)$ ili više čvorova, čije su sve ivice obojene u crveno ili plavo, ili postoji K_k čije su sve ivice crvene boje, ili postoji K_l čije su sve ivice plave boje.*

Ovu teoremu možemo formulisati i na sledeći način:

Teorema 2.9 *Za svake prirodne brojeve k, l postoji prirodan broj $R(k,l)$ tako da svaki graf sa $R(k,l)$ ili više čvorova sadrži podgraf izomorfan sa K_k ili podgraf izomorfan sa $\overline{K_l}$.*

Kod dokaza teoreme trebaće nam još i sledeće tvrđenje:

Teorema 2.10 $R(1,k) = 1$ *i* $R(2,k) = k$

Dokaz. U prvom slučaju svako bojenje grana K_1 crvenom i plavom bojom daje crveni K_1 ili plavi K_k, jer K_1 nema grana, pa su mu sve crvene.

U drugom slučaju pitamo najmanje koliko čvorova treba da ima graf da bi imao bar jednu crvenu ivicu ili plavi K_k. Odgovor je k jer u svakom bojenju grana grafa K_k ili ima bar jedna crvena grana, tj. ima crveni K_2 ili su sve grane plave, pa imamo plavi K_k. Da rešenje ne može biti manje od k sledi iz činjenice da u grafu sa brojem čvorova manje od k ako sve grane obojimo plavom bojom ne možemo dobiti ni crveni K_2 ni plavi K_k. □

Teorema 2.11 $R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1)$

Dokaz. Kod dokaza koristićemo indukciju po $k+l$. Iz prethodne teoreme znamo da $R(2,l) = l$ i $R(k,2) = k$. Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki t, s takav da $t \leq k$ i $s < l$ ili $t < k$ i $s \leq l$. Dokazujemo da važi za k i l.

Pretpostavimo suprotno, da tvrđenje ne važi, tj. da za $n \geq R(k-1,l) + R(k,l-1)$, postoji graf G sa n čvorova koji ne sadrži nijedan podgraf izomorfan sa K_k ni podgraf izomorfan sa $\overline{K_l}$.

Neka je v proizvoljan čvor grafa G. Neka označimo sa N broj susednih čvorova čvora v . $N = d_G(v) = |N_G(v)|$. M je broj čvorova koji nisu susedni sa v (bez v). $M = |V(G) - N_G(v) - \{v\}|$.

Mora da važi da $N \leq R(k-1,l) - 1$ jer u suprotnom bi važilo da graf G sadrži podgraf izomorfan sa K_{k-1}, odnosno zajedno sa v, K_k ili $\overline{K_l}$. Zbog istog razloga važi da $M \leq R(k,l-1) - 1$.

$$n = N+M+1 \leq 1+R(k-1,l)-1+R(k,l-1)-1 = R(k-1,l)+R(k,l-1)-1$$

Dobili smo kontradikciju, pa sledi tvrđenje teoreme. □

Teorema 2.11 ne samo da dokazuje egzistenciju Remzijevog broja za svako k i l, nego daje jednu gornju granicu Remzijevih brojeva. Time smo dokazali Remzijevu teoremu za $r = 2$ i $k = 2$.

Teorema 2.12 *Ako su $R(k,l-1)$ i $R(k-1,l)$ parni brojevi tada važi stroga nejednakost:*

$$R(k,l) < R(k-1,l) + R(k,l-1)$$

Dokaz. Neka su brojevi $R(k-1,l)$ i $R(k,l-1)$ parni. Posmatrajmo proizvoljan graf G sa $n = R(k-1,l) + R(k,l-1) - 1$ čvorova. Pokazaćemo da G sadrži podgraf J koji je izomorfan sa K_k ili u sadrži podgraf L izomorfan sa $\overline{K_l}$.

Iz pretpostavke da su $R(k-1,l)$ i $R(k,l-1)$ parni brojevi sledi, da je n neparan broj. Iz Teoreme 1.10 sledi da graf G sadrži bar jedan čvor parnog stepena. Neka je v čvor grafa G čiji je stepen paran.

Ako je $d_G(v) \geq R(k-1,l)$ onda podgraf $G' = [N_G(v)]$ indukovan susednim čvorovima čvora v ili sadrži podgraf H izomorfan sa K_{k-1} ili sadrži podgraf L. (sledi iz definicije Remzijeveg broja i činjenice da $|V(G')| \geq R(k-1,l)$). U prvom slučaju $\{v\} \cup V(H)$ indukuje J u grafu G, jer je čvor v povezan sa svim čvorovima iz H. U drugom slučaju iz $G' \subseteq G$ sledi da je L podgraf grafa G.

Ako je $d_G(v) < R(k-1,l)$, tada je $d_G(v) \leq R(k-1,l) - 2$, jer su i $d_G(v)$ i $R(k-1,l)$ parni brojevi. S obzirom da G ima $R(k-1,l) + R(k,l-1) - 1$ čvorova i stepen čvora $v \in G$ manje ili jednako sa $R(k-1,l) - 2$, sledi da je broj čvorova grafa G koji nisu susedni sa v veće ili jednako sa $R(k,l-1)$. Neka je podgraf G'' indukovan čvorovima koji nisu susedni sa v bez v. Iz $|V(G'')| \geq R(k,l-1)$ sledi da je graf G'' ili sadrži podgraf J izomorfan sa K_k ili sadrži podgraf M izomorfan sa $\overline{K_{l-1}}$. U prvom slučaju i G sadrži J kao podgraf jer $G'' \subseteq G$. U drugom slučaju iz pretpostavke da v nije povezan čvorovima grafa G'' sledi da čvorovi grafa G'' koji obrazuju M, zajedno sa čvorom v obrazuju graf L.

Time smo dokazali da ukoliko su brojevi $R(k-1,l)$ i $R(k,l-1)$ parni, onda svaki graf sa $n = R(k-1,l) + R(k,l-1) - 1$ čvorova sadrži J ili L kao podgraf. Iz ovoga sledi da $R(k,l) \leq n$, pa $R(k,l)$ ne može biti jednako sa $R(k-1,l) + R(k,l-1) = n + 1$. □

Teorema 2.13

$$R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$$

Dokaz. Dokazaćemo indukcijom po $k+l$. Prvo ćemo dokazati da nejednakost važi za $R(k,2)$ i $R(2,l)$.

$$R(k,2) \leq \binom{k+2-2}{k-1} = \binom{k}{k-1} = \frac{k!}{(k-1)!(k-(k-1))!} = \frac{k}{1} = k$$

i

$$R(2,l) \leq \binom{2+l-2}{2-1} = \binom{l}{1} = l$$

Da su ove dve nejednačnine tačne sledi iz Teoreme 2.10 .

Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki prirodan broj t i s takvih da $t \leq k$ i $s < l$ ili $t < k$ i $s \leq l$.

Treba dokazati da važi za k i l.

$$R(k,l) \leq R(k-1,l)+R(k,l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-2}+\binom{k+l-3}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1}$$

Prva nejednakost sledi iz Teoreme 2.11, a jednakost važi zbog Paskalove formule. (Paskalova formula: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.) $\square$

Lema 2.14 *Za svaki broj $r \in \mathbb{N}$ važi:*

$$R(l_1, l_2, \ldots, l_r) \leq R(l_1, l_2, \ldots, l_{r-2}, R(l_{r-1}, l_r))$$

Dokaz. Neka je G graf sa $R(l_1, l_2, \ldots, l_{r-2}, R(l_{r-1}, l_r))$ čvorova. Iz definicije Remzijeveg broja znamo da je $n = R(l_1, l_2, \ldots, l_r)$ najmanji broj takav da graf sa n čvorova sigurno sadrži podgraf izomorfan sa K_{l_i} obojeno sa bojom i za neko $1 \leq i \leq r$. Ako dokažemo da i graf G ima istu osobinu, onda dobijemo tvrđenje teoreme:

$$n = R(l_1, l_2, \ldots, l_r) \leq R(l_1, l_2, \ldots, l_{r-2}, R(l_{r-1}, l_r))$$

Neka je $\chi : E(G) \to [r]$ bojenje grafa G sa r bojom. Definisaćemo bojenje grafa G sa $r-1$ bojom $\chi^* : E(G) \to [r-1]$ na sledeći način:

$$\chi^*(e) = \begin{cases} \chi(e) & \text{ako } \chi(e) \in \{1, 2, \ldots, r-2\} \\ \\ r-1 & \text{ako } \chi(e) \in \{r-1, r\} \end{cases}$$

Zbog definicije broja $R(l_1, l_2, \ldots, l_{r-2}, R(l_{r-1}, l_r))$ graf G mora da sadrži monohromatski podgraf izomorfan sa K_{l_i} obojen bojom i za neko $1 \leq i \leq$

$r-2$ ili podgraf izomorfan sa $K_{R(l_{r-1},l_r)}$ obojen sa bojama $r-1$ i r . U prvom slučaju smo završili dokaz.
U drugom slučaju posmatrajmo podgraf H koji je izomorfan sa $K_{R(l_{r-1},l_r)}$. Znamo da ima $R(l_{r-1}, l_r)$ čvorova,a zbog definicije broja $R(l_{r-1}, l_r)$ dobijamo da H sadrži $(r-1)$-monoromatski $K_{l_{r-1}}$ ili r-monohromatski K_{l_r}. U oba slučaja smo dokazali teoremu jer je graf izomorfan sa $K_{R(l_{r-1},l_r)}$ podgraf grafa G, pa su svi njegovi podgrafovi ujedno i podgrafovi grafa G. □

Teorema 2.15 (Remzijeva teorema za $k = 2$) *Za sve prirodne brojeve $l_1, l_2, \dots, l_r$ postoji broj n takav da*

$$n \to (l_1, l_2, \dots, l_r).$$

Dokaz. Teoremu ćemo dokazati matematičkom indukcijom po r.

Da teorema važi za $r = 2$ dokazuje Teorema 2.11. Neka pretpostavimo da važi tvrđenje za $r-1$, tj. da za svaki prirodan broj $l_1, \dots, l_{r-1}$ postoji Remzijev broj $n_0 = R(l_1, \dots, l_{r-1})$. Treba dokazati da postoji i za r. Iz Leme 2.1.16. sledi da ako postoji Remzijev broj za $r-1$, onda postoji i za svako r, i daje još i jedno gornje ograničenje za taj broj. □

Slučaj, kada je $k \neq 2$ ćemo ispitivati u nastavku.

Teorema 2.16 (Uopštena Remzijeva teorema) *Za sve prirodne brojeve $k, l_1, \dots, l_r$ postoji broj n takav da*

$$n \to (l_1, l_2, \dots, l_r)^k.$$

Dokaz. Kod dokaza ove teoreme koristićemo indukciju po k.

Za $k = 2$ smo već dokazali da važi teorema.

Neka pretpostavimo da teorema važi za $k-1$, tj. da postoji broj

$$R_{k-1}(l_1, \dots, l_r)$$

sa navedenim osobinama.

Da teorema važi za broj k ćemo dokazati indukcijom po S_l, gde je

$$S_l = l_1 + l_2 + \cdots + l_r$$

Za $l_1 = l_2 = \cdots = l_r = 1$, tj. $S_l = r$ teorema očigledno važi jer ako obojimo skup $[n]^k$ sa r boja onda sigurno će biti jedan elemenat koji je obojen jednom bojom od r. Moramo još napomenuti da $n \geq k$ uvek mora da važi jer inače ne bismo imali k-elementne podskupove.

Pretpostavimo da teorema važi za $S_l = m - 1$.

Dokazaćemo da teorema važi za $S_l = m$. Na osnovu indukcijske hipoteze, znamo da postoje brojevi

$$A_i = R_k(l_1, l_2, \dots, l_{i-1}, l_i - 1, l_{i+1}, \dots, l_r) \text{ za sve } i = 1, 2, \dots, r.$$

A prema indukcijskoj hipotezi glavne indukcije sledi da postoji broj

$$R_{k-1}(A_1, A_2, \dots, A_r).$$

Neka je X proizvoljan skup sa n elemenata, gde je:

$$n = R_{k-1}(A_1, A_2, \dots, A_r) + 1$$

i

$$\chi : [X]^k \to [r]$$

proizvoljno bojenje svih k-članih podskupova skupa X sa r različitih boja. Neka je $x \in X$ proizvoljan član skupa X i neka je skup $Z = X \backslash \{x\}$ podskup skupa X. Neka je

$$\chi^* : [Z]^{k-1} \to [r]$$

bojenje $(k-1)$-članih podskupova od skupa Z definisano sa

$$\chi^*(T) = \chi(T \cup \{x\})$$

Po induktivnoj pretpostavci, postoji i , $1 \leq i \leq r$ i $M \subset Z$ sa A_i elemenata čiji su svi $(k-1)$-člani podskupovi obojeni bojom i.

Kako A_i ima $R_k(l_1, l_2, \dots, l_{i-1}, l_i - 1, l_{i+1}, \dots, l_r)$ elemenata, iz definicije Remzijevih brojeva znamo da postoji boja j i $Y \subset M$ sa l_j elemenata čiji su svi k-člani podskupovi obojeni sa bojom j. Ako je $j \neq i$ onda Y je traženi skup. U slučaju da je $j = i$ i $|Y| = l_i - 1$, u taj skup dodajemo element x i dobijamo l_i-člani podskup od X sa traženim svojstvom. □

2.2 Beskonačna Remzijeva teorema

U prethodnom delu smo definisali konačnu Remzijevu teoremu. Dokazali smo da za svaki prirodan broj k i l postoji Remzijev broj. U ovom delu rada ćemo se baviti izučavanjem slučaja kada kompletan graf ima beskonačno mnogo čvorova.

Definicija 2.17 *Ako je skup čvorova $V(G)$ grafa G ekvipotentan skupu prirodnih brojeva, odnosno ako postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \to V(G)$ onda kažemo da je graf* ***beskonačan prebrojiv****.*
Beskonačan prebojiv kompletan graf ćemo označavati sa $K_{\mathbb{N}}$.

Beskonačna Remzijeva teorema glasi:

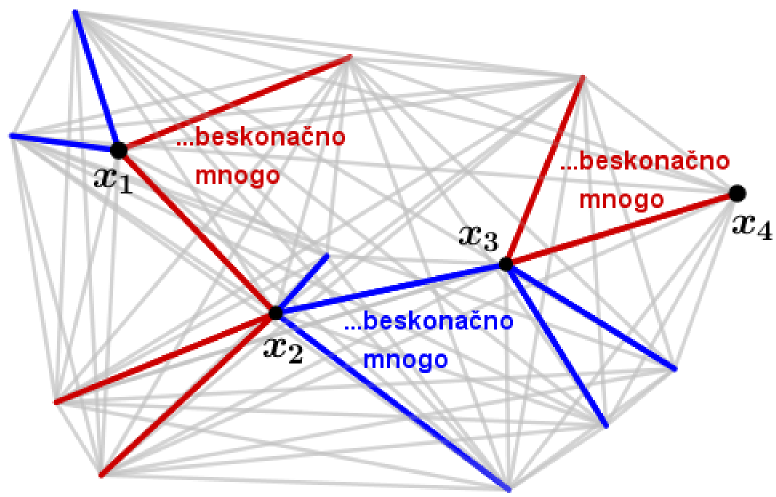
Teorema 2.18 *U svakom beskonačnom kompletnom grafu $K_{\mathbb{N}}$ čije su grane obojene u crveno ili plavo postoji monohromatski podgraf izomorfan sa $K_{\mathbb{N}}$.*

Dokaz. Neka je dat beskonačan kompletan graf $K_{\mathbb{N}}$ čije su grane obojene sa plavom i crvenom bojom. Čvorove grafa označavamo sa brojevima $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Posmatrajmo čvor x_1 koji smo označili sa brojem 1. Pošto $K_{\mathbb{N}}$ ima beskonačno mnogo čvorova, na osnovu Dirihleovog principa, sledi da x_1 ili ima beskonačno mnogo suseda kojima je povezan crvenom granom, ili ima beskonačno mnogo suseda kojima je povezan plavom granom. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da iz x_1 izlazi beskonačno mnogo crvenih grana. (U slučaju da je broj plavih grana beskonačan dokaz je analogan).

Neka je $X_1 = \{\omega \,|\, 1\omega \,\text{je crvena}\}$. Znači X_1 je skup svih susednih čvorova čvora x_1 takvih da je sa njima povezan crvenom granom. Neka je $x_2 \in X_1$ i $x_2 > x_1$ (broj kojim smo označili čvor x_2 veći od broja kojim smo označili čvor x_1). X_1 ima beskonačno mnogo elemenata, pa opet zbog Dirihleovog principa postoji ili beskonačno mnogo crvenih grana ili beskonačno mnogo plavih grana koje su incidentne sa x_2.

Neka je $X_2 \subset X_1$ takav da X_2 sadrži beskonačno mnogo elemenata koji su povezani sa čvorom x_2 istom bojom (plavom ili crvenom). Neka je $x_3 > x_2$ i $x_3 \in X_2$. Tada opet postoji beskonačno mnogo čvorova skupa X_2 takvih da sa x_3 su povezani istom bojom. Neka je X_3 beskonačan skup čvorova koji su sa x_3 povezani istom bojom i važi $X_3 \subset X_2$.



Slika 11. $K_{\mathbb{N}}$ obojen sa crvenom i plavom bojom.

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo skup čvorova:

$$V = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \subseteq K_{\mathbb{N}}$$

Neka je E skup grana koje povezuju čvorove iz skupa V:

$$E = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \ldots, \{x_2, x_3\}, \ldots\}$$

Elementi skupa E su crvene i plave grane. Boju grana određuje čvor sa manjim rednim brojem, npr. ako je sa x_1 bilo incidentno beskonačno mnogo crvenih grana onda svaka grana u E koja počinje sa x_1 ima crvenu boju). To je, ako pretpostavimo da je boja svake grane skupa $\{x_1 a_1 | a_1 \in X_1\}$ crvena, svaka grana skupa $\{x_2 a_2 | a_2 \in X_2\}$ plava i svaka grana skupa $\{x_3 a_3 | a_3 \in X_3\}$ crvena, onda svaka grana $x_1 v$ za $v \in V$ mora bit crvena, svaka grana $x_2 v$ za $v \in V \backslash \{x_1\}$ mora biti plava i svaka grana $x_3 v$ za $v \in V \backslash \{x_1, x_2\}$ mora biti crvena i tako dalje.

Sada obojimo čvorove skupa V tako da svaki čvor $x_i \in V$ dobije crvenu boju ukoliko su sve grane $x_i x_j$ za $j > i$ crvene ili obojimo plavom bojom ako su sve grane $x_i x_j$ za $j > i$ plave. Pošto V sadrži beskonačno mnogo čvorova obojeno sa dve boje na osnovu Dirihleovog principa znamo da V sadrži jedan beskonačan monohromatski skup, koji ćemo označiti sa M. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da M sadrži crvene čvorove.

$$M = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\} \subset V$$

M je podskup skupa V pa za čvorove skupa M važi da svaka grana $x_{i_1}m$ crvena za $m \in M$, svaka grana $x_{i_2}m$ crvena za $m \in M \backslash \{x_{i_1}\}$, svaka grana $x_{i_3}m$ crvena za $m \in M \backslash \{x_{i_1}, x_{i_2}\}$, i tako dalje. To znači da svaka grana koja povezuje čvorove skupa M ima crvenu boju.

Beskonačan skup čvorova M indukuje jedan beskonačan monohromatski kompletan podgraf grafa $K_{\mathbb{N}}$. Svaki čvor u M je povezan svakim čvorom u M, i svaki čvor skupa M ima istu boju, znači svaka grana grafa indukovana sa M mora da ima istu boju. $\square$

Teorema 2.19 *U svakom beskonačnom kompletnom grafu $K_{\mathbb{N}}$ čije su grane obojene sa r različitih boja postoji monohromatski podgraf izomorfan sa $K_{\mathbb{N}}$.*

Dokaz. Teoremu ćemo dokazati matematičkom indukcijom po r.
Iz Teoreme 2.18 znamo da tvrđenje važi za $r = 2$.

Pretpostavimo da teorema važi za $r - 1$, tj. da ako obojimo grane beskonačnog grafa $K_{\mathbb{N}}$ sa $r-1$ različitih boja onda sigurno postoji beskonačan monohromatski podgraf.

Dokazujemo da teorema važi za r. Neka obojimo grane grafa $K_{\mathbb{N}}$ sa r različitih boja. Neka označimo sa B skup boja koje koristimo.

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$$

Skup B možemo podeliti na dva disjunktna skupa:

$$B_1 = \{b_1\} \text{ i } B_2 = \{b_2, b_3, \ldots, b_r\}.$$

Iz Teoreme 2.18 sledi da, ili postoji podgraf izomorfan sa $K_{\mathbb{N}}$ koji ima boju b_1, ili postoji podgraf izomorfan sa $K_{\mathbb{N}}$ koji je obojen bojama iz skupa B_2. U prvom slučaju smo završili dokaz, našli smo monohromatsi podgraf izomorfan sa $K_{\mathbb{N}}$.
U drugom slučaju postoji kompletan podgraf izomorfan sa $K_{\mathbb{N}}$ čije su grane obojene bojama skupa B_2. Pošto skup B_2 sadrži $r-1$ elemenata, iz indukcijske hipoteze sledi da sadrži monohromatski podgraf izomorfan sa $K_{\mathbb{N}}$. $\square$

Teorema 2.20 *Neka je A jedan beskonačan skup sa prebrojivo mnogo elemenata. Ako skup $[A]^k$ obojimo sa r boja, onda A sadrži monohromatski beskonačan skup M takav da je $[M]^k$ monohromatski.*

Dokaz. Teoremu ćemo dokazati matematičkom indukcijom po k.

Za $k = 1$ teorema očigledno važi jer u ovom slučaju skup A je podeljen na jednoelementne podskupove i svaki element obojimo jednom bojom iz skupa $\{1, 2, \ldots, r\}$. Skup A ima beskonačno mnogo elemenata, a mi imamo konačan broj boja na osnovu Dirihleovog principa, za beskonačan slučaj dobijemo da sigurno postoji monohromatski beskonačan podskup.

Neka pretpostavimo da je teorema tačna za podskupove veličine manje od k, tj. da za svako r-bojenje skupa $[A]^q$ gde je A beskonačan skup sa prebrojivo mnogo elemenata i q je prirodan broj takav da $q < k$, A sadrži monohromatski beskonačan skup.

Neka obojimo skup $[A]^k$ sa r boja. Definisaćemo skup $\{a_0, a_1, \ldots\}$ i jedno bojenje $\chi*$ tog skupa na sledeći način. Neka izaberemo elemenat skupa A, $a_0 \in A$ i definišemo skup B_1 tako da je $B_1 = A \backslash \{a_0\}$. Tada možemo definisati jedan r-bojenje χ_1 $(k-1)$-članovih podskupova B_1. Bojenje skupa svih $(k-1)$-članovih podskupova skupa B_1 ćemo definisati na sledeći način:

$$\chi_1(T) = \chi(T \cup \{a_0\})$$

gde je T $(k-1)$-člani podskup skupa B_1. Iz indukcijske hipoteze znamo da B_1 mora da sadrži beskonačan skup A_1 čiji svi $(k-1)$-članovi podskupovi imaju istu boju i_0. Neka je $\chi^*(a_0) = i_0$.

Sada izaberemo $a_1 \in A_1$ i definišemo $B_2 = A_1 \backslash \{a_1\}$. Obojimo sa r boja svih $(k-1)$-članovih podskupova skupa B_2 na sledeći način:

$$\chi_2(T) = \chi(T \cup \{a_1\})$$

gde je T podskup skupa B_2 takav da važi $|T| = k-1$. Opet zbog indukcijske hipoteze B_2 mora da sadrži beskonačan skup A_2 čiji svi podskupovi sa $(k-1)$-članova imaju istu boju i_1. Neka je $\chi^*(a_1) = i_1$.

Ovaj postupak možemo ponoviti beskonačno mnogo puta i na kraju dobijamo beskonačan niz obojen sa r boja:

$$\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$$

Skup $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ ima beskonačno mnogo elemenata a mi imamo samo r boja, pa na osnovu Dirihleovog principa sledi da postoji beskonačan monohromatski (za bojenje χ^*) podskup skupa $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ obojen bojom i. Svaki elemenat a_i mora da ima istu boju kao sve $(k-1)$-torke skupa A_{i+1} zbog načina kako smo obojili $(k-1)$-članove podskupove. Neka uzmemo proizvoljnu k-torku $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots a_{i_k})$, gde $i_1 < \cdots < i_k$. Kako je $\chi^*(a_{i_1}) = i$, sledi da je $\chi(a_{i_1}, \ldots a_{i_k}) = i$. Svaki k-elementan podskup tog monohromatskog podskupa je monohromatski. $\square$

Postoji veliki broj rezultata iz beskonačne Remzijeve teorije koje možemo videti u knjizi [14].

Kasnije se razvila i strukturna Remzijeva teorija, čiji rezultati se odnose ne samo na skupove, već na složenije matematičke strukture i tvrde postojanje podstruktura izomorfnih datoj. Mnogi rezultati ovog tipa mogu se naći u knjizi [15].

3 Remzijevi brojevi

Remzijeva teorema nam garantuje egzistenciju Remzijevih brojeva, ali ona nam nije od velike pomoći pri nalaženju istih. Tačne vrednosti Remzijevih brojeva i za relativno male brojeve k i l veoma se teško računaju. Neki brojevi još uvek nisu izračunati, već su samo ograničeni na nekom intervalu. Na sledećoj tabeli možemo videti neke do sada izračunate vrednosti i neke granice.

R(k,l)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3	6	9	14	18	23	28	36
4	1	4	9	18	25	35-41	49-61	56-84	69-115
5	1	5	14	25	43-48	58-87	80-143	101-216	121-316
6	1	6	18	35-41	58-87	102-165	113-298	127-495	169-780
7	1	7	23	49-61	80-143	113-298	205-540	216-1031	232-1713
8	1	8	28	56-84	101-216	127-495	216-1031	282-1870	317-3583
9	1	9	36	69-115	121-316	169-780	232-1713	317-3583	565-6588

Slika 3. Vrednosti i granice za $R(k, l)$

Možemo videti da je od Remzijevih brojeva $R(k, l)$, gde su $k, l > 2$ poznato samo devet, odnosto 16 jer je tabela simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu što je posledica činjenice da $R(k, l) = R(l, k)$. Za ostale brojeve su date samo gornje i donje granice. Za određivanje donje granice uglavnom se koriste tri metode. To su konstruktivna metoda, metoda prebrajanja i verovatnosna metoda.

Konstruktivna metoda podrazumeva konstrukciju kompletnog grafa sa određenim brojem čvorova koji ne sadrži ni monohromatski podgraf izomorfan sa K_k ni monohromatski podgraf izomorfan sa K_l. Mana ove metode je da je teško konstruisati takav graf.

Metoda prebrajanja znači da pretpostavimo da treba da dokažemo da postoji kompletan graf sa n čvorova koji ima neku datu osobinu. Ako se putem prebrajanja pokaže da je broj kompletnih grafova sa n čvorova koji nemaju tu osobinu manji od ukupnog broja kompletnih grafova sa n čvorova, time je dokazano postojanje kompletnog grafa sa traženom osobinom. Ova metoda dokazuje samo postojanje traženog kompletnog grafa, ali o njegovoj strukturi ništa se ne zna.

Verovatnosna metoda (probabilistički metod) podrazumeva sledeće: Na određenom skupu objekata, u ovom slučaju kompletnih grafova, definiše se verovatnosni prostor. Dodelimo verovatnoću elementarnim događajima, tj. verovatnoću da neka grana dobije boju i. Ovu verovatnoću sami biramo, jer u stvari i boju grana možemo odrediti bilo kako. Jedino moramo paziti da zbir tih verovatnoća mora biti 1. Neka je događaj A da postoji kompletan graf koji ima željenu osobinu. Ako uspemo da pomoću teorije verovatnoće dokažemo da A ima pozitivnu verovatnoću, tada je u stvari dokazana egzistencija traženog kompletnog grafa. O probabilističkom metodu možemo čitati u knjizi [13].

3.1 Gornje i donje granice Remzijevih brojeva

Sledeće teoreme ćemo dokazati pomoću probablilističkog metoda.

Teorema 3.1 *Ako važi nejednakost*

$$\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$$

onda $R(k,k) > n$.

Dokaz. Teorema kaže da ukoliko važi nejednakost onda postoji 2-bojenje grafa K_n takav da K_n ne sadrži monohromatski podgraf izomorfan sa K_k.

Posmatrajmo bilo koje 2-bojenje grafa K_n gde koristimo crvenu i plavu boju. Dodelimo verovatnoću događaja da je neka grana plava i događaja da je grana crvena, pa za svako $u, v \in V(K_n)$ biramo verovatnoću na sledeći način:

$$P[uv \text{ je crvena}] = \frac{1}{2} \qquad P[uv \text{ je plava}] = \frac{1}{2}$$

Neka je S jedan k-elementan skup čvorova, $|S| = k$. Sa A_s označimo događaj da je S monohromatski, tj. elementi skupa S obrazuju plavi ili crveni K_k. Tada važi:

$$P[A_s] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}$$

U jednačini potrebno je množenje sa 2 jer monohromatski S može biti i crvena i plava. A $\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$ važi, jer ako je verovatnoća da jedna grana ima određenu boju $\frac{1}{2}$, onda je verovatnoća da k grana ima određenu boju $\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$. Sa $\bigvee_{|S|=k} A_s$ označimo događaj da je neki k-elementan skup S monohromatski.

$$P\left[\bigvee_{|S|=k} A_s\right] \leq \sum_{|S|=k} P[A_s] \leq \binom{n}{k}\, 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$$

Poslednja nejednakost je pretpostavka teoreme. Znači događaj da postoji k-elementan monohromatski skup nije siguran, pa postoji bojenje grafa K_n koji ne sadrži monohromatski podgraf izomorfan sa K_k. □

Posledica 3.2 *Ako važi nejednačina*

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$$

onda za svaki prirodan broj $k \geq 3$ važi:

$$R(k,k) > 2^{\frac{k}{2}}.$$

<u>Dokaz.</u> Možemo posmatrati dva slučaja. Ako je $n \geq 2^{\frac{k}{2}}$ za $k \geq 3$ onda na osnovu prethodne teoreme dobijemo:

$$R(k,k) > n \geq 2^{\frac{k}{2}},$$

pa je tvrđenje posledice je tačno. U drugom slučaju kada je $n < 2^{\frac{k}{2}}$ važi sledeće:

$$P\left[\bigvee_{|S|=k} A_s\right] \leq \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{n^k}{k!} 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{\left(2^{k/2}\right)^k\ 2^{1-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{\frac{k+2}{2}}}{k!}$$

Ako dokažemo da je poslednji razlomak manji od 1 za svaki $k \geq 3$ onda smo dokazali posledicu, jer onda za $n < 2^{\frac{k}{2}}$ je verovatnoća da postoji k-elementan monohromatski skup manje od 1, pa nije sigurna, tj. postoji bojenje grafa K_n sa dve boje tako da ne sadrži ni plavi ni crveni podgraf izomorfan sa K_k.

Da bi dokazali nejednakost $\frac{2^{\frac{k+2}{2}}}{k!} < 1$ koristićemo matematičku indukciju.

- Prvo proverimo da li tvrđenje važi za $k = 3$ i $k = 4$.
  Za $k = 3$ dobijamo:

$$\frac{2^{\frac{k+2}{2}}}{k!} = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{3!} < \frac{5,66}{6} < 1$$

  Za $k = 4$ imamo:

$$\frac{2^{\frac{k+2}{2}}}{k!} = \frac{2^{\frac{6}{2}}}{4!} = \frac{1}{3} < 1$$

- Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za broj k, tj. da za svako $k \geq 3$

$$\frac{2^{\frac{k+2}{2}}}{k!} < 1.$$

- Dokazujemo tačnost tvrđenja za $k + 1$.

$$\frac{2^{\frac{k+1+2}{2}}}{(k+1)!} = \frac{2^{\frac{k+2}{2}} 2^{\frac{1}{2}}}{k!(k+1)} = \frac{2^{\frac{k+2}{2}}}{k!} \frac{2^{\frac{1}{2}}}{k+1}$$

  Iz indukcijske pretpostavke znamo da je prvi razlomak manji od 1 za svaki $k \geq 3$. Posmatrajmo drugi razlomak. Za $k = 3$ vrednost razlomka:

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}}{k+1} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{4} < 0,3536 < 1$$

  Kad povećamo k, vrednost razlomaka biće sve manja i manja, pa sledi tačnost tvrđenja za svaki $k \geq 3$, tj. važi:

$$R(k,k) \geq n \geq 2^{\frac{k-1}{2}}$$

□

Teorema 3.3 *Ako za neki broj p, $0 \leq p \leq 1$ važi*

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}} < 1$$

onda $R(k,l) > n$.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazom Teoreme 3.1. Sa p ćemo označiti verovatnoću da je grana uv grafa K_n crvena. Pošto je svaka grana u grafu ili crvena ili plava sledi da je verovatnoća da je uv plava jednako sa $1 - p$.

$$P[uv \text{ je crvena}] = p \qquad P[uv \text{ je plava}] = 1 - p$$

za svako $uv \in V(K_n)$.

Neka je S jedan k-elementan skup čvorova, a T je l-elementan skup čvorova. Sa A_S ćemo označiti događaj da su svi čvorovi u S povezani crvenom granom. B_T će biti događaj da su svi čvorovi u T povezani plavom granom. Verovatnoća da graf K_n sadrži crveni K_k ili plavi K_l kao podgraf je sledeća:

$$P\left[\bigvee_{|S|=k} A_S \vee \bigvee_{|T|=l} B_T\right] \leq \sum_{|S|=k} P[A_S] + \sum_{|T|=l} P[B_T] \leq \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}}$$

Po pretpostavci teoreme poslednja suma je manja od 1, tj. događaj nije siguran. Znači postoji bojenje grafa K_n koji ne sadrži ni crveni podgraf izomorfan sa K_k ni plavi podgraf izomorfan sa K_l. □

3.2 Poznati Remzijevi brojevi

Teorema 3.4 $R(3,3) = 6$

Dokaz. Ovu teoremu smo dokazali u primeru 2.7.

Teorema 3.5 $R(3,4) = 9$

Dokaz. Već smo dokazali da za svaki k i l važi nejednakost:

$$R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$$

Pa iz ovoga sledi

$$R(3,4) \leq \binom{3+4-2}{3-1} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$$

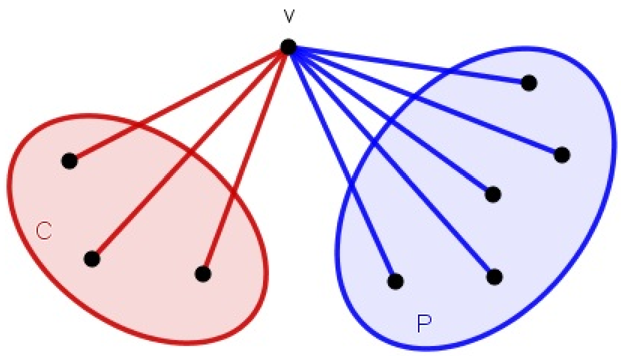
Pretpostavimo da je $R(3,4) = 10$. To bi značilo, da kompletan graf K_9 možemo obojiti plavom i crvenom bojom tako da ne sadrži ni crveni podgraf izomorfan sa K_3 , ni plavi podgraf izomorfan sa K_4. Neka je v proizvoljan čvor grafa K_9. Neka je C skup svih susednih čvorova čvora v takvih da su sa v povezani crvenom granom.

$$C = \{w | w \in N_{K_9}(v) \wedge vw \ je \ crvena\}$$

Elementi skupa C ne mogu biti povezani crvenom granom, jer ako su bilo koja dva čvora povezana sa crvenom granom, onda zajedno sa v dobili bi crveni trougao, a pretpostavka je bila da K_9 ne sadrži crveni podgraf izomorfan sa K_3. Znači grane koje povezuju čvorove skupa C moraju biti plave. Pošto K_9 ne sme da sadrži plavi podgraf izomorfan sa K_4 sledi da $|C| \leq 3$. To znači da ima najviše 3 čvora grafa K_9 koji su sa v povezani crvenom bojom.
Neka je P skup svih susednih čvorova čvora v takvih da su sa v povezani plavom bojom.

$$P = \{w | w \in N_{K_9}(v) \wedge vw \ \text{ je } \ \text{plava}\}$$

Čvorovi iz skupa P ne mogu da obrazuju ni crveni, ni plavi podgraf izomorfan sa K_3. Ne mogu crveni, jer na početku dokaza smo pretpostavili da smo obojili K_9 tako da ne sadrži crveni podgraf izomorfan sa K_3, a plavi ne mogu, jer zajedno sa čvorom v dobili bi plavi podgraf izomorfan saK_4, a na početku dokaza smo pretpostavili da nema. Iz primera 2.7 znamo da $R(3,3) = 6$, pa sledi da $|P| \leq 5$. Znamo, da u grafu K_9 svaki čvor ima 8 suseda. Čvor v ima najviše 3 iz skupa C, pa mora da ima 5 suseda iz skupa P, pa važi jednakost $|P| = 5$
Sledi da svaki čvor ima 3 suseda kojima je povezan crvenom granom, i 5 suseda kojima je povezan plavom granom.



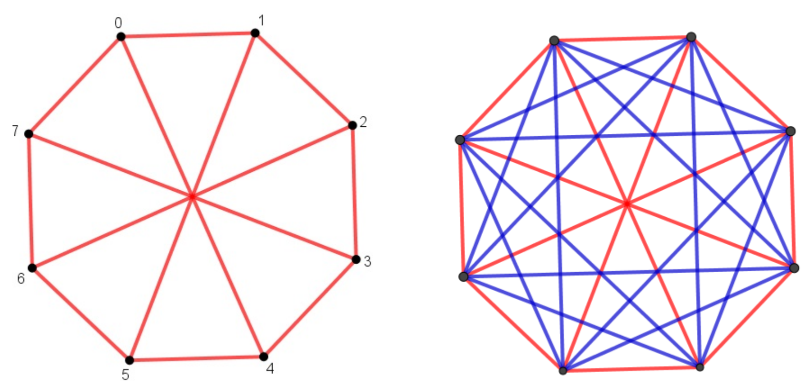
Slika 12. Susedi čvora v.

Izračunaćemo sada broj crvenih grana u grafu K_9. Iz svakog čvora izlaze 3 crvene grane, pa treba pomnožiti 9 sa 3, ali ovaj rezultat treba da podelimo sa 2, jer na ovaj način svaku granu smo računali dva puta. Dobijamo:

$$\frac{9 \cdot 3}{2} = \frac{27}{2} = 13,5$$

Broj crvene grane mora biti prirodan broj, ali 13,5 nije, pa sledi da ne možemo obojiti grane grafa K_9 tako da ne sadrži ni crveni podgraf izomorfan sa K_3, ni plavi podgraf izomorfan sa K_4. Time smo dokazali da $R(3,4) \neq 10$, pa mora da važi nejednakost $R(3,4) \leq 9$.

Treba još dokazati da važi i nejednakost $R(3,4) > 8$, tj. da možemo obojiti grane grafa K_8, tako da ne sadrži ni crveni podgraf izomorfan sa K_3, ni plavi podgraf izomorfan sa K_4. Na slici je pokazan takvo bojenje, tj. jedan $(3,4,8)$-graf.



Slika 13. $(3,4,8)$-graf.

Na prvoj slici se vidi da nema crvenog trougla. Na drugoj slici možemo posmatrati plave četvorouglove. Vidimo da svaki četvorougao sadrži ili stranicu ili veliku dijagonalu osmougla, koje su crvene, pa zbog toga nema plavog podgrafa izomorfnog sa K_4. □

Teorema 3.6 $R(3,5) = 14$

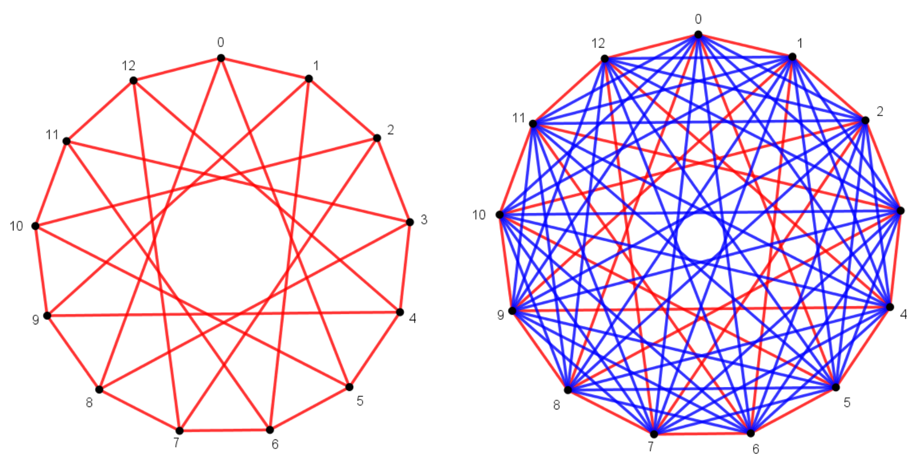
Dokaz. Iz Teoreme 2.11 znamo da važi: $R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1)$. Pa sledi:

$$R(3,5) \leq R(2,5) + R(3,4)$$

Iz Teoreme 2.10 i Teoreme 3.5 znamo da $R(2,5) = 5$ i $R(3,4) = 9$, pa dobijamo:

$$R(3,5) \leq 5 + 9 = 14$$

Treba još dokazati da važi: $R(3,5) > 13$, tj. da graf K_{13} možemo obojiti tako da ne sadrži ni crveni podgraf izomorfan sa K_3, ni plavi podgraf izomorfan sa K_5. Posmatrajmo sliku 14.:



Slika 14. $(3,5,13)$-graf.

Označili smo čvorove grafa K_{13} sa brojevima $\{0,1,2,\ldots,12\}$. Ukoliko razlika oznake dva čvora pripada skupu $\{1,5,8,12\}$, onda granu koja povezuje ta dva čvora smo obojili crvenom bojom. Ovako dobijen graf ne sadrži crveni trougao kao podgraf jer zbir dva broja iz skupa $\{1,5,8,12\}$ (po modulu 13) nije u skupu $\{1,5,8,12\}$.

Da ne postoji ni plavi podgraf izomorfan sa K_5 to već nije očigledno. Posmatrajmo čvor 1. Taj čvor je povezan sa 0,2,9 i 6 čvorovima crvenom granom, pa ostaje 8 čvorova sa kojima je povezan plavom granom. To su čvorovi : 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12.

Želimo dokazati da ne postoji plavi podgraf izomorfan sa K_5. Pretpostavićemo suprotno, da ima, tj. da postoji pet čvorova grafa K_{13} takvih da je svaki sa svakim povezan plavom granom. Neka je jedan od tih čvorova čvor 1. Tražimo još četiri. Skup mogućih čvorova ćemo podeliti na tri dela:

$$\{\underbrace{3,4,5}_{A}, \underbrace{7,8}_{B}, \underbrace{10,11,12}_{C}\}$$

Iz tri skupa moramo izabrati četiri elementa, pa na osnovu Dirihleovog principa bar iz jednog skupa moramo izabrati dva čvora. Iz skupa B ne možemo izabrati oba elementa, jer oni su susedni brojevi, i ti brojevi su povezani sa crvenom granom. Ako iz skupa B ne izaberemo nijedan elemenat onda iz skupa A i iz skupa C moramo izabrati po dva elementa. (Ni iz jednog skupa ne možemo izabrati tri elementa, jer u skupovima imamo susedne brojeve, a oni su povezani crvenom granom.) Pošto izabrani brojevi ne mogu biti susedni, jedina je mogućnost $3, 5, 10, 12$ i naravno peti čvor 1. Iz činjenice da $10-5=5$ sledi da je grana između čvorova 5 i 10 već obojena crvenom bojom. Znači ovaj slučaj otpada. Moramo da izaberemo tačno jedan elemenat iz skupa B.

Ako izaberemo 7 iz skupa B, onda iz C ne možemo 12, jer je $12-7=5$, ta grana je već crvena, a izabrani elementi ne mogu biti susedni, pa sledi da iz skupa C moram da izaberem tačno jedan element, tj. iz skupa A moram dva elementa. Ti elementi ne mogu biti susedni brojevi, pa sledi da su izabrani brojevi:1, 3, 5, 7. Treba još jedan iz skupa C. 10 ne može jer je $10-5=5$, 11 ne može jer je $11-3=8$, i već smo rekli da 12 ne može.

Ako izaberemo 8 iz skupa B, onda iz A ne možemo 3, jer je $8-3=5$, ta grana je već crvena, a izabrani elementi ne mogu biti susedni, pa sledi da iz skupa A moramo da izaberemo tačno jedan element, tj. iz skupa C moramo dva elementa. Ti elementi ne mogu biti susedni brojevi, pa sledi da su izabrani čvorovi: 1, 8, 10, 12. Treba još jedan iz skupa A. 4 ne može jer je$12-4=8$, 5 ne može jer je $10-5=5$, i već smo rekli da 3 ne može.

Znači ne postoji plavi podgraf izomorfan sa K_5 koji sadrži čvor 1. Provera za sve ostale čvorove je ista, ali nepotrebna. Bez umanjenja opštosti skup sadrži 1, jer inače možemo rotirati petougao tako da mu jedno teme padne u 1, a pritom se boje grana ne menjaju jer zavise samo od razlika.

Teorema 3.7 $R(4,4)=18$

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da važi nejednakost $R(4,4) \leq 18$, tj. da ako kompletan graf ima 18 ili više čvorova, onda bilo kako obojimo njegove grane sa crveom i plavom bojom, imaćemo plavi ili crveni podgraf izomorfan sa K_4. Ovaj smer možemo dokazati i koristeći Teoremu 2.11 i Teoremu 3.5, ali možemo i na sledeći način:
Neka je v proizvoljan čvor grafa K_{18}. Neka je C skup svih susednih čvorova čvora v takvih da su sa v povezani crvenom granom, a P je skup svih suseda kojima je povezan plavom granom.

$$C = \{w | w \in N_{K_{18}}(v), vw \text{ je } \text{ crvena}\}$$

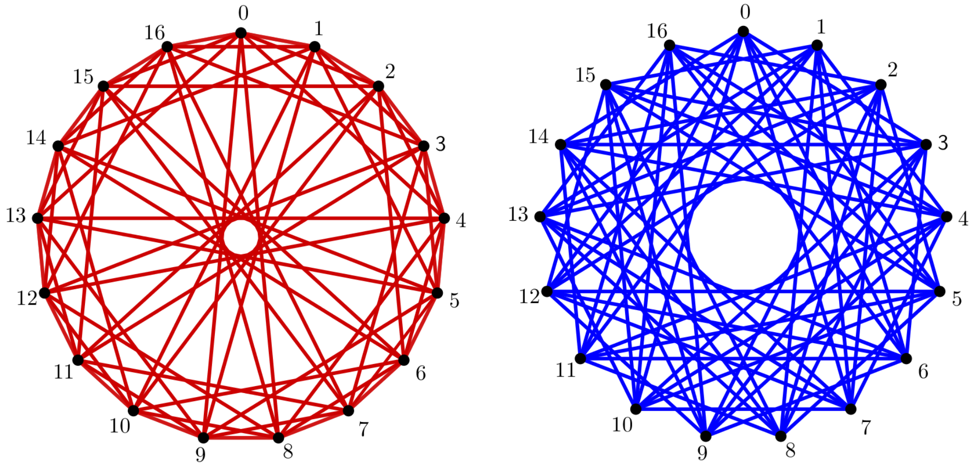
,

$$P = \{w | w \in N_{K_{18}}(v), vw \text{ je } \text{ plava } \}$$

Pretpostavimo suprotno, da kompletan graf ima više od 17 čvorova, a ne sadrži ni crveni, ni plavi podgraf izomorfan sa K_4. Čvorovi skupa C ne mogu da obrazuju ni plavi podgraf izomorfan sa K_4, ni crveni podgraf izomorfan sa K_3, jer bi onda zajedno sa v dobili crveni podgraf izomorfan sa K_4, a pretpostavili smo da nema. Iz Teoreme 3.2.2 znamo da $R(3,4) = 9$ sledi da $|C|$ ne može biti veći od 8. Zbog istog razloga ni skup P ne može da ima više od 8 elemenata. Sledi da čvor v ima najviše $8 + 8 = 16$ suseda. Dobili smo kontradikciju, jer je pretpostavka bila da kompletan graf ima više od 17 čvorova, tj. svaki čvor ima više od 16 suseda.
Treba još dokazati da $R(4,4) > 17$, tj. da K_{17} možemo obojiti tako da ne sadrži ni plavi ni crveni podgraf izomorfan sa K_4, tj. da postoji $(4,4,17)$-graf.
Neka označimo čvorove grafa K_{17} sa brojevima $0, 1, \ldots, 16$. Ako je razlika dva čvora kvadratni ostatak, tj. pripada skupu

$$X = \{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}$$

onda obojimo crvenom bojom. Sve ostale grane obojimo plavom.



Slika 15. Crvene i plave grane $(4, 4, 17)$-grafa.

Pretpostavimo suprotno, da postoje čvorovi a, b, c, d takvi, da je razlika između bilo koja dva kvadratni ostatak, tj. pripada skupu X. Možemo primetiti, da ukoliko neka grana uv ima crvenu boju, onda i grana $(u+x)(v+x)$ ima crvenu boju za bilo koji x, jer ako $u - v$ pripada skupu X, onda i $(u+x)-(v+x)$ pripada X, jer važi: $(u+x)-(v+x) = u + \cancel{x} - v - \cancel{x} = u-v$. Iz ovoga sledi, da ako postoje čvorovi a, b, c, d koji su čvorovi crvenog podgrafa H koji je izomorfan sa K_4, onda su i 0, $b - a = x$, $c - a = y$, $d - a = z$ čvorovi podgrafa H. Za čvorove x, y i z mora da važi $x \in X, y \in X, z \in X, y - x \in X, z - x \in X, z - y \in X$. Posmatrajmo nekoliko slučajeva za čvor x:

- $x = 1$
  Pošto mora da važi da i y, $y - 1$, z, i $z - 1$ pripada skupu X, sledi da vrednost za y i z moramo izabrati iz skupa $\{2, 9, 16\}$, ali razlika između brojeva u skupu (7 i 14) ne pripada skupu X, pa $z - y \notin X$. Sledi da 1 ne može biti čvor grafa H.

- $x = 2$
  U ovom slučaju mora da važi da y, $y - 2$, z, i $z - 2$ pripada skupu X. Jedino broj 4 zadovoljava ovaj uslov, ali nama trebju dve različite vrednosti. Sledi da ni 2 ne može biti čvor grafa H.

- $x = 4$
  Jedino brojevi 8 i 13 zadovoljavaju uslov da i $y, z, y - 4$ i $z - 4$ pripada

skupu X, ali pošto $13 - 8 \notin X$ sledi da ni 4 ne može biti čvor crvenog H.

- $x = 8$
  Brojevi 9 i 16 zadovoljavaju uslov da $y, z, y - 8$ i $z - 8$ pripada skupu X, ali pošto njihova razlika 7 sledi da $z - y \notin X$, pa ni 8 nije čvor crvenog H.

- $x = 9$
  Samo broj 13 zadovoljava uslov da i 13 i $13 - 9 = 4$ pripada skupu X, ali nama trebaju dva broja. Sledi da ni 9 nije čvor crvenog H.

- $x = 13$
  Samo broj 15 zadovoljava uslove, ali mi tražimo dva broja. Sledi da ni 13 ne pripada H.

- $x = 15$ ili $x = 16$
  Ostalo nam je dva broja a mi tražimo tri, pa ni 15 ni 16 ne mogu biti čvorovi crvenog H.

Ostalo je još da dokažemo da graf na slici ne sadrži ni plavi podgraf J izomorfan sa K_4. Pretpostavimo suprotno, da imamo plavi podgraf J izomorfan sa K_4. Posmatrajmo čvor 0. Ovaj čvor je već povezan crvenom granom sa čvorovima $X = \{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}$. Skup čvorova kojima je čvor 0 povezan plavom granom ćemo podeliti u četiri grupe.

$$\{\underbrace{3}_{A}, \underbrace{5, 6, 7}_{B}, \underbrace{10, 11, 12}_{C}, \underbrace{14}_{D}\}$$

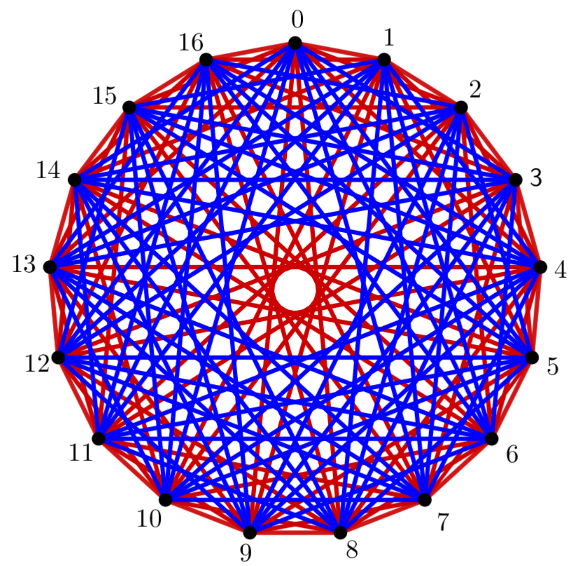
Znamo da, ukoliko je razlika dva čvora manja od 3, onda su te grane povezane crvenom granom. Iz ovoga sledi da iz svake grupe možemo izabrati najviše jedan element. Imamo 4 grupe, a nama trebaju 3 elementa koja zajedno sa 0 obrazuju J, pa iz jedne grupe nećemo izabrati nijedan elemenat. Imamo 4 slučaja:

- **Izostavimo grupu A** , tj. nećemo birati 3. Pošto skup D ima samo jedan elemenat, sledi da moramo izabrati **14**. Iz skupa B ne možemo 5, jer $14 - 5 = 9 \in X$, a ne možemo ni 6, jer $14 - 6 = 8 \in X$, pa ostaje **7**. Treba još jedan čvor iz C. 10 ne može jer $14 - 10 = 4 \in X$, 11 ne može, jer $11 - 7 = 4 \in X$, a ne može ni 12, jer $14 - 12 = 2 \in X$.

- **Izostavimo grupu B** , tj. nećemo birati $5, 6, 7$. Moramo birati **3** i **14**. Treba još jedan element iz skupa C. 10 ne može jer $14 - 10 = 4 \in X$, 11 ne može jer $11 - 3 = 8 \in X$, a ne može ni 12, jer $14 - 12 = 2 \in X$.

- **Izostavimo grupu C** , tj. nećemo birati $10, 11, 12$. Moramo **3** , **14** i još jedan čvor iz skupa B. Ne možemo 5 jer $5 - 3 = 2 \in X$, ne možemo 6, jer $14 - 6 = 8 \in X$, a ne možemo ni 7, jer $7 - 3 = 4 \in X$.

- **Izostavimo skup D** , tj. nećemo birati 14, ali moramo **3**. Iz skupa B ne možemo birati 5, jer $5 - 3 = 2 \in X$, ne možemo ni 7, jer $7 - 3 = 4 \in X$, pa moramo **6**. Posmatrajmo skup C. 10 ne može, jer $10 - 6 = 4 \in X$, 11 ne može jer $11 - 3 = 8 \in X$, a ne može ni 12, jer $12 - 3 = 9 \in X$.



Slika 16. $(4, 4, 17)$-graf obojen sa crvenom i plavom bojom.

$\square$

3.3 R(4,5)

Remzijev broj $R(4, 5)$ je najmanji prirodan broj n za koji ne postoji $(4, 5, n)$-graf. U ovom delu rada ćemo opisati ideju dokaza da je $n = 25$.
Iz Teoreme 2.11, i činjenice da je $R(3, 5) = 14$ i $R(4, 4) = 18$ dobijamo sledeću gornju granicu: $R(4, 5) \leq 31$. Ova granica je bila poznata još i 1955. godine. 1956. godine Kalbfleisch je konstruisao jedan $(4, 5, 24)$-graf i time je našao

jednu jako dobru donju granicu: $R(4,5) \geq 25$. Pored toga našao je i gornju granicu $R(4,5) \leq 30$. Kasnije Walker je dokazao da je $R(4,5) \leq 28$.
1992. godine Mc Kay i Radziszowski su dokazali da je $R(4,5) \leq 26$. I na kraju, u radu [2] pomoću računarskog programa su uspeli da dokažu da je $R(4,5) = 25$. U ovom delu rada ćemo objasniti kako su to radili.

3.3.1 Ideja

Definicija 3.8 *Neka je x proizvoljan čvor grafa F. Tada sa*

$$G_x = G_x(F) = F[N_F(x)]$$

označavamo podgraf indukovan susedima čvora x, a sa

$$H_x = H_x(F) = F[V(F) - N_F(x) - x]$$

označavamo podgraf indukovan čvorovima koji nisu povezani sa x i nije ni x.

Možemo primetiti da, ako je F $(4,5,25)$-graf i $x \in V(F)$ ima stepen d, tada G_x je $(3,5,d)$-graf, a $H(x)$ je $(4,4,24-d)$-graf. Da je G_x $(3,5,d)$-graf, tj. ne sadrži ni podgraf H izomorfan sa K_3, ni podgraf L izomorfan sa $\overline{K_5}$ sledi iz činjenice, da ukoliko bi G_x sadržao H kao podgraf, onda zajedno sa čvorom x imali bi K_4 u grafu F, a pretpostavili smo da nema. Isto važi da, ukoliko bi G_x sadržao L, onda bi i u F imali, ali pretpostavili smo da nema. Da G_x ima d čvorova sledi iz definicije G_x i iz pretpostavke da čvor x ima d suseda. Na sličan način možemo proveriti da važi, da H_x ne sadrži ni podgraf izomorfan sa K_4,(jer onda bi i graf F imao K_4), ni podgraf izomorfan sa $\overline{K_4}$ (jer elementi skupa H_x nisu povezani sa x, pa zajedno sa x bi imali $\overline{K_5}$ u grafu F). Da graf H_x ima $24-d$ čvorova sledi iz definicije grafa H_x.

U prethodnom delu rada smo dokazali da važi $R(3,5) = 14$ i $R(4,4) = 18$. Iz jednakosti $R(3,5) = 14$ sledi da $d \leq 13$, a iz $R(4,4) = 18$ da $24-d \leq 17$, tj. da $d \geq 7$. Znači $7 \leq d \leq 13$.

Naš cilj da je konstruišemo jednu familiju $(4,5,24)$-grafova definisanu tako da svaki $(4,5,25)$-graf možemo dobiti iz bar jednog člana te familije dodavanjem jednog čvora i nekoliko grana koje taj čvor povezuje sa $(4,5,24)$-grafom iz familije.

$\mathcal{R}'(3,5,k)$ će biti neki skup $(3,5)$-grafova reda manjeg od k, za $k \in \{7,8,9,10\}$, takvih da svaki $(3,5,k)$-graf sadrži najmanje jedan od njih kao podgraf.

Slično, $\mathcal{R}'(4,4,k)$ će biti neki skup $(4,4)$-grafova reda manjeg od k, za $k \in \{11,12\}$, takvih da svaki $(4,4,k)$-graf ima bar jedan podgraf iz te familije.

Neka je F^* jedan $(4,5,25)$-graf. F^* ne može biti 11-regularan, jer iz Teoreme 1.10 znamo da broj čvorova neparnog stepena je u svakom grafu paran, a graf F^* ima 25 čvorova. Iz toga sledi da postoji bar jedan čvor x za koji možemo izabrati čvor v grafa F^* sa sledećem osobinama:

a.) ako je x čvor grafa F^* stepena manjeg od 11 ($d \leq 10$), onda neka v bude čvor grafa $G_x(F^*)$ tako da $G_x(F^*) - v$ sadrži nekoliko članova skupa $\mathcal{R}'(3,5,d)$ kao podgraf.

b.) ako je x čvor grafa F^* stepena većeg od 11 ($d \geq 12$), onda neka v bude čvor grafa $H_x(F^*)$ tako da $H_x(F^*) - v$ sadrži nekoliko članova skupa $\mathcal{R}'(4,4,24-d)$ kao podgraf.

Znači ako postoji $(4,5,25)$-graf F^* onda taj graf možemo konstruisati tako, da nađemo jedan čvor x za koji postoji v sa prethodnim osobinama, pa G_x i H_x spajamo granama i dodajemo još čvor x. Spajanjem G_x i H_x dobijamo $(4,5,24)$-graf. Dakle, bar jedan podgraf F grafa F^* se javlja u skupu svih $(4,5,24)$-grafova.

U sledećoj tabeli su prikazane mogućnosti kako možemo izabrati predstavnika za G_x i H_x.

G_x	H_x
$\mathcal{R}'(3,5,7)$	$\mathcal{R}(4,4,17)$
$\mathcal{R}'(3,5,8)$	$\mathcal{R}(4,4,16)$
$\mathcal{R}'(3,5,9)$	$\mathcal{R}(4,4,15)$
$\mathcal{R}'(3,5,10)$	$\mathcal{R}(4,4,14)$
$\mathcal{R}(3,5,12)$	$\mathcal{R}'(4,4,12)$
$\mathcal{R}(3,5,13)$	$\mathcal{R}'(4,4,11)$

Slika 17. Mogući izbor za (G_x, H_x).

Postupak konstruisanja $(4,5,24)$-grafa F od (G_x, H_x) ćemo zvati **lepljenje**.

3.3.2 Lepljenje

U ovom delu rada ćemo dati detaljan opis algoritma lepljenja za prva četiri slučaja tabele. Za ostala dva ćemo dati kratko objašnjenje.

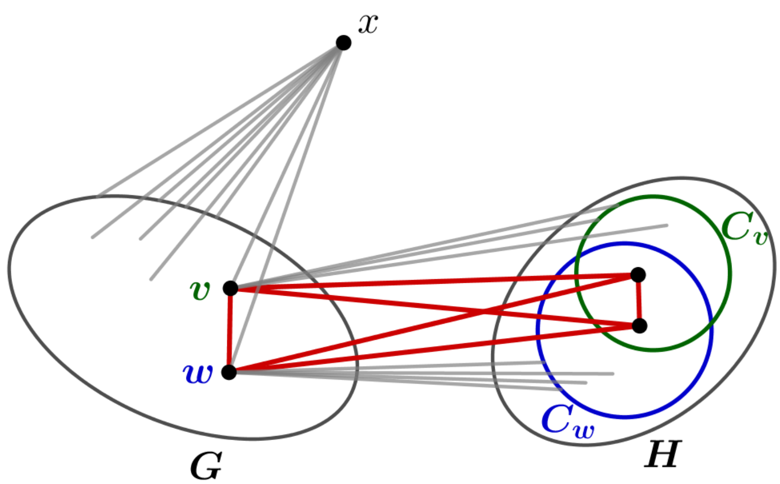
Za $k = 7, 8, 9$ smo uzeli da $\mathcal{R}'(3,5,k) = \mathcal{R}(3,5,k-1)$ da bi izračunali kompletan skup $(4,5,24)$-grafova za čvor stepena manjeg od 9. Za $\mathcal{R}'(3,5,10)$ smo uzeli skup od 53 $(3,5,9)$-grafova koji su izabrani tako da budu što ređi.

Neka su redom G i H $(3,5)$-graf i $(4,4)$-graf. Sa $\mathcal{F}(G,H)$ označavamo skup svih $(4,5)$-grafova F, takvih da za neki čvor $x \in V(F)$ važi $G_x(F) = G$ i $H_x(F) = H$. Pretpostavimo da su čvorovi grafa G označeni sa brojevima $0, 1, 2, 3, \ldots$ i indukovani podgrafovi su isto označeni sa brojevima $0, 1, 2, \ldots$ tako da, ako važi da čvor je x dobio manju oznaku od čvora y u grafu G, onda će x dobiti manju oznaku od y i u podgrafu.

Definicija 3.9 ***Izvodljiv konus*** *čvora v je podskup skupa čvorova $V(H)$ koji su sa v povezani i koji ne obrazuju K_3.*

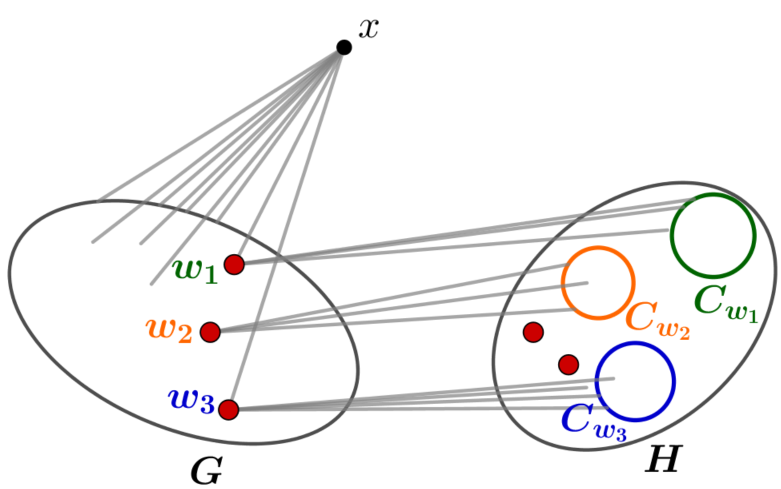
Možemo primetiti da je $N_F(v, V(H))$ izvodljiv konus za svaki čvor v grafa G, zato što skup $N_F(v, V(H))$ ne može da sadrži K_3, jer u suprotnom zajedno sa v bi imali K_4, a pretpostavili smo da je F $(4,5)$-graf, tj. da ne sadrži K_4. Naš zadatak je da izmislimo kako da izaberemo izvodljive konuse $C_0, C_1, C_2, \ldots$, jedan za svaki čvor grafa G, tako da se u grafu F ne pojavljuje ni K_4, ni $\overline{K_5}$. Znači moramo izbegavati sledeće slučajeve:

E_1: Postoje dva čvora skupa $V(H)$ koji su povezane i pripadaju skupu $C_v \cap C_w$ za neke susedne čvorove $v, w \in V(G)$.



Slika 18. Slučaj E_1.

E_t: Postoji skup od $5-t$ nezavisnih čvorova u grafu H od kojih nijedan ne pripada uniji $C_{w_0} \cup C_{w_1} \cup \ldots C_{w_{t-1}}$ za neke nezavisne čvorove $w_0, \ldots w_{t-1}$ grafa G. ($t = 2, 3, 4$).



Slika 19. Slučaj E_3.

Operacija lepljenja se može postići i tako da za svaki čvor grafa G nađemo svaki mogući izvodljiv konus, ali umesto toga mi ćemo podeliti skup izvodljivih konusa na delove koje možemo obraditi paralelno.

Definicija 3.10 ***Interval izvodljivih konusa*** *je skup izvodljivih konusa*

$$[B,T] = \{X, B \subseteq X \subseteq T\}$$

gde je B ***donja granica*** *intervala, a T je* ***gornja granica*** *intervala.*

Možemo primetiti da svaki interval $[B,T]$ sadrži $2^{|T|-|B|}$ izvodljivih konusa jer ima $|T|-|B|$ elemenata koji pripadaju skupu T, ali ne pripadaju skupu B, i svaki od tih čvorova može, ali ne mora da pripada izvodljivom konusu.

Neka je $|V(G)| = m$. Ako su $C_0, \ldots, C_{m-1}$ izvodljivi konusi, tada sa $F(G,H;C_0,\ldots,C_{m-1})$ ćemo označavati graf F sa čvorom x tako da važi $G_x(F) = G, H_x(F) = H$ i $C_i = N_F(i, V(H))$, za $0 \leq i \leq m-1$. Naravno, F ne može biti $(4,5,24)$-graf ukoliko važi bilo koji od uslova E_1, E_2, E_3, E_4. Slično, ako su $I_0, I_1, \ldots, I_{m-1}$ intervali, tada $\mathcal{F}(G,H;I_0,\ldots,I_{m-1})$ predstavlja skup svih $(4,5,24)$-grafova $F(G,H;C_0,\ldots,C_{m-1})$ tako da $C_i \in I_i$ za svako $0 \leq i \leq m-1$.

Za dato H, definišemo tri funkcije $H_1, H_2, H_3 : P(V(H)) \to P(V(H))$. Neka je $X \subseteq V(H)$, tada:

$H_1(X) = \{w \in V(H), vw \in E(H)$ za neke $v \in X\}$

$H_2(X) = \{w \in V(H), vw \notin E(H)$ za neke $v \notin X\}$

$H_3(X) = \{w \in V(H), \{u,v,w\}$ je skup od 3 nezavisnih čvorova u H za neke $u, v \notin X\}$

Koristeći ove funkcije možemo definisati nekoliko pravila sužavanja koji važe za niz intervala $I_0, \ldots, I_{m-1}$. Pomoću pravila sužavanja svaki interval ćemo zameniti nekim njegovim podintervalom ili ćemo dobiti FAIL (vrednost koja će označavati da posmatrani interval ne daje nijedno rešenje).

Neka je $I_i = [B_i, T_i]$ za svaki $0 \leq i \leq m-1$. **Pravila za sužavanje** ćemo definisati na sledeći način:

a) Neka je $uv \in E(G)$.
Ako $B_u \cap B_v \cap H_1(B_u \cap B_v) \neq \emptyset$ onda FAIL, u suprotnom

$$T_u := T_u - (H_1(B_u \cap B_v) \cap B_v).$$

Ako postoji neki čvor $c \in H$ takav da $c \in B_u \cap B_v \cap H_1(B_u \cap B_v)$ tada $c \in H_1(B_u \cap B_v)$, pa na osnovu definicije funkcije H_1 postoji neki drugi čvor $d \in B_u \cap B_v$ koji je sa c povezan, i dobijamo slučaj E_1. U suprotnom, od T_u oduzimamo elemente koji pripadaju skupu $H_1(B_u \cap B_v) \cap B_v$. Ovako dobijen T_u i dalje je izvodljiv konus za u, i još uvek važi da $B_u \subseteq T_u$.

b) Neka je $uv \notin E(G)$.
Ako $H_3(T_u \cup T_v) \nsubseteq T_u \cup T_v$ onda FAIL, u suprotnom

$$B_u := B_u \cup (H_3(T_u \cup T_v) - T_v).$$

Ako $H_3(T_u \cup T_v) \nsubseteq T_u \cup T_v$ tj. postoji neki čvor c takav da $c \in H_3(T_u \cup T_v)$, ali $c \notin T_u \cup T_v$, onda iz definicije skupa H_3 sledi da postoje čvorovi d i e koji ne pripadaju skupu $T_u \cup T_v$ i sa c obrazuju skup od tri nezavisna čvora, pa dobijemo slučaj E_2. U suprotnom za B_u dodajemo elemente koji pripadaju skupu T_u i ne obrazuju skup od tri nezavisna čvora sa elementima koji nisu u $T_u \cup T_v$. Ovako dobijen B_u i dalje je izvodljiv konus za u, i još uvek važi da $B_u \subseteq T_u$.

c) Neka je $\{u, v, w\}$ skup od 3 nezavisna čvora u G.
Ako $H_2(T_u \cup T_v \cup T_w) \nsubseteq T_u \cup T_v \cup T_w$ onda FAIL, u suprotnom

$$B_u := B_u \cup (H_2(T_u \cup T_v \cup T_w) - (T_v \cup T_w)).$$

Ako postoji neki čvor c takav da $c \in H_2(T_u \cup T_v \cup T_w)$, ali $c \notin T_u \cup T_v \cup T_w$ tada na osnovu definicije funkcije H_2 sledi da postoji neki drugi čvor y koji nije povezan sa c i ne pripada skupu $T_u \cup T_v \cup T_w$. Dobijamo slučaj E_3. Inače u skup B_u čvorova koji moraju biti povezani sa u dodajemo sve one koji bi, u suprotnom, sa u, v, w i još jednim čvorom (koji nije u $T_u \cup T_v \cup T_w$) činio nezavisan skup.

d) Neka je $\{u, v, w, z\}$ skup od 4 nezavisna čvora u G.
Ako $T_u \cup T_v \cup T_w \cup T_z \neq V(H)$ onda FAIL, u suprotnom

$$B_u := B_u \cup (V(H) - (T_v \cup T_w \cup T_z)).$$

Ako postoji neki čvor c takav, da $c \in H$ ali $c \notin T_u \cup T_v \cup T_w$, onda dobijamo E_4, tj. $\{u, v, w, z, c\}$ je skup nezavisnih čvorova. U suprotnom za B_u dodajemo elemente koji pripadaju skupu T_u, ali ne pripadaju skupu $T_v \cup T_w \cup T_z$. Ovako dobijen B_u i dalje je izvodljiv konus za u, i važi da $B_u \subseteq T_u$.

Lema 3.11 *Neka je primenjeno neko pravilo sužavanja na $I_0, \dots, I_{m-1}$. Ako se pojavljuje FAIL, onda $\mathcal{F}(G, H; I_0, \dots, I_{m-1}) = \emptyset$.*
Inače $\mathcal{F}(G, H; I_0, \dots, I_{m-1}) = \mathcal{F}(G, H; I'_0, \dots, I'_{m-1})$ gde je $I'_0, \dots, I'_{m-1}$ niz intervala dobijen posle primene pravila sužavanja.

Dokaz. Posmatrajmo pravilo a). Neka je $cd \in E(H)$ jedna grana takva da je $c \in B_u \cap B_v$ i $d \in T_u \cap B_v$. Jasno, u ne može biti povezan čvorom d, jer tada bi dobili K_4 sa čvorovima u, v, w, d. (sledi iz slučaja E_1). Prema tome $\mathcal{F}(G, H; I_0, \dots, I_{m-1}) = \emptyset$ za $d \in B_u$. Inače d možemo eliminisati iz T_u.

Kod pravila b) neka su c i d čvorovi grafa H takvi da $c, d \notin T_u \cup T_v$ i neka je e čvor grafa $H \backslash T_v$ koji nije povezan sa čvorovima c i d. Jasno je da e mora biti povezan čvorom u, jer inače bi dobili $\{u, v, c, d, e\}$ kao skup nezavisnih čvorova, tj. slučaj E_2. Prema tome $\mathcal{F}(G, H; I_0, \dots, I_{m-1}) = \emptyset$ za $e \notin T_u$. Inače e možemo dodati skupu B_u.

Kod pravila c) neka je $c \in H \backslash T_u \cup T_v \cup T_w$ i neka je d čvor grafa $H \backslash T_v \cup T_w$ koji nije povezan sa čvorom c. Jasno je da d mora bit povezan sa u jer inače bi imali skup nezavisnih čvorova $\{u, v, w, c, d\}$, tj. dobili bi slučaj E_3. Prema tome $\mathcal{F}(G, H; I_0, \dots, I_{m-1}) = \emptyset$ za $d \notin T_u$. Inače d možemo dodati skupu B_u.

Analogno, ako posmatramo pravilo d)i pretpostavimo da postoji čvor $c \in H \backslash T_u \cup T_v \cup T_w \cup T_z$ onda dobijamo $\mathcal{F}(G, H; I_0, \dots, I_{m-1}) = \emptyset$ jer čvorovi $\{u, v, w, z, c\}$ obrazuju skup od pet nezavisnih čvorova, tj. imamo slučaj E_4. Jasno je da c mora biti povezan sa u pa možemo dodati skupu B_u. $\square$

Ako više puta primenimo pravila sužavanja, posle nekokiko koraka ćemo dobiti FAIL, ili ćemo doći u situaciju da ne možemo više smanjiti interval. U nastavku ćemo dokazati da krajnji rezultat ne zavisi od redosleda primena pravila sužavanja.

Definicija 3.12 *Neka je $(X, \leq)$ parcijalno uređen skup i neka je Φ familija funkcije koje preslikavaju X u X. Ako za $\phi \in \Phi$ važi da:*

(F1): za svako $x \in X$, $\phi(x) \leq x$, onda kažemo da je ϕ ***regresivna funkcija***

(F2): za svako $x, x' \in X$, $x \leq x' \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(x')$, onda kažemo da je ϕ ***neopadajuća funkcija.***

(F3): za svako $x, x' \in X$, $x \leq x' \Rightarrow \phi(x) \geq \phi(x')$, onda kažemo da je ϕ ***nerastuća funkcija.***

Definicija 3.13 *Neka svaka funkcija $\phi \in \Phi$ ima osobinu $(F1)$ i $(F2)$ za $x, x' \in X$. Ako je $\phi(x) = x$ za $\forall\phi \in \Phi$ tada za x kažemo da je* Φ***-stabilan****.*

Sa $\Phi^*(x)$ ćemo označiti skup svih mogućih kompozicija funkcije familije Φ .

$$\Phi^*(x) = \{\phi_n \circ \phi_{n-1} \circ \cdots \circ \phi_1(x) \mid \phi_1, \ldots \phi_n \in \Phi, n \in \mathbb{N}\}$$

Lema 3.14 *Za svaki $x \in X$, $\Phi^*(x)$ sadrži tačno jedan Φ-stabilan elemenat.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji dva Φ-stabilna elementa.
Neka su

$$y = \phi_r(\ldots \phi_1(x) \ldots)$$
$$y' = \phi'_s(\ldots \phi'_1(x) \ldots)$$

Φ-stabilni za $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r, \phi'_1, \phi'_2, \ldots \phi'_s \in \Phi$. Iz pretpostavke da je y Φ-stabilan sledi da važi jednakost

$$y = \phi'_s(\ldots(\phi'_1(\phi_r(\ldots \phi_1(x) \ldots).$$

Iz osobine $(F1)$ znamo da $\phi_r(\ldots \phi_1(x) \ldots) \leq x$. Iz ove nejednakosti i osobine $(F2)$ dobijamo da $\phi'_s(\ldots(\phi'_1(\phi_r(\ldots \phi_1(x) \ldots) \leq \phi'_s(\ldots \phi'_1(x) \ldots)$, tj. da $y \leq y'$.

Analogno, iz pretpostavke da je y' Φ-stabilan sledi:

$$y' = \phi_r(\ldots(\phi_1(\phi'_s(\ldots \phi'_1(x) \ldots)$$

Iz osobine $(F1)$ i $(F2)$ dobijamo nejednakost $\phi_r(\ldots(\phi_1(\phi'_s(\ldots \phi'_1(x) \ldots) \leq \phi_r(\ldots \phi_1(x) \ldots)$, tj. da $y' \leq y$

Na kraju iz te dve nejednakosti dobijamo da je $y = y'$, tj. imamo samo jedan Φ-stabilan elemenat. □

Da bi primenili prethodnu lemu za date G i H, pretpostavimo da je X skup svih m-torki intervala $(I_0, \ldots, I_{m-1})$ zajedno sa FAIL. Kažemo da je $x \leq x'$ ako je $x =$ FAIL ili ako za $x = (I_0, \ldots, I_{m-1})$ i $x' = (I'_0, \ldots, I'_{m-1})$ važi $I_i \subseteq I'_i$ za $0 \leq i < m$. Neka je Φ skup svih pravila sužavanja koja imamo na raspolaganju i svako pravilo sužavanja prošireno tako da još FAIL slika u FAIL.

Posmatrajmo funkcije H_1, H_2 i H_3.

Teorema 3.15 *a) Funkcija $H_1(X)$ je monotono neopadajuća funkcija.*

b) Funkcija $H_2(X)$ je monotono nerastuća funkcija.

c) Funkcija $H_3(X)$ je monotono nerastuća funkcija.

Dokaz.

a) Sa $H_1(X)$ označavamo skup čvorova u H koji su povezani nekim čvorovima iz skupa X, gde je $X \subseteq H$. Ako smanjimo skup X, onda će se i skup $H_1(X)$ smanjiti ili će ostati isti, jer ako imamo manji skup, onda broj elemenata koji su povezani sa elementima datog skupa sigurno se neće povećati. To znači da je funkcija H_1 monotono neopadajuća funkcija, tj. za svako $X_1, X_2 \in V(H)$ važi da iz $X_1 \subseteq X_2$ sledi $H_1(X_1) \subseteq H_1(X_2)$.

b) Posmatrajmo definiciju skupa $H_2(X)$
$H_2(X) = \{w \in V(H), vw \notin E(H)$ za neke $v \notin X\}$. Ako smanjimo skup X, onda ćemo imati više elemenata v koji ne pripadaju skupu X, pa broj elemenata w u H za koji važi $vw \notin E(H)$ sigurno se neće smanjiti. To znači da je funkcija $H_2(X)$ monotono nerastuća funkcija, tj. za svako $X_1, X_2 \in V(H)$ važi da iz $X_1 \subseteq X_2$ sledi $H_2(X_1) \supseteq H_2(X_2)$.

c) Sa $H_3(X)$ označavamo skup čvorova u H koji obrazuju skup od tri nezavisna čvora u H sa nekim čvorovima koji nisu u skupu X. Opet važi da, ako smanjimo skup X, onda se skup $H_3(X)$ neće smanjiti, jer ćemo imati više elemenata koji ne pripadaju skupu X, pa ćemo imati više ili jednako mogućnosti da nađemo čvorove koji obrazuju skup od tri nezavisna čvora. Sledi da je funkcija $H_3(X)$ monotono nerastuća funkcija, tj. da za svako $X_1, X_2 \in V(H)$ važi da iz $X_1 \subseteq X_2$ sledi $H_3(X_1) \supseteq H_3(X_2)$.

□

Naš cilj je, da pomoću pravila sužavanja povećamo donje granice i smanjimo gornje granice intervala. Sada posmatrajmo pravila.

Pod a) ako uspemo da povećavamo B_u i B_v ili bar jedan od njih, onda će se povećati i $B_u \cap B_v$. Znamo da je H_1 monotono neopadajuća funkcija, pa sledi da će se povećati i $H_1(B_u \cap B_v)$ ili će ostati isti. To znači da ćemo iz T_u oduzeti veći ili isti skup, tj. T_u će se smaniti ili će ostati isti.

Pod b) ako smanjimo T_u i T_v ili bar jedan od njih, onda će se smanjiti i $T_u \cup T_v$. Pošto je H_3 monotono nerastuća funkcija dobijamo da $H_3(T_u \cup T_v)$

će se povećati ili će ostati isti. Vrednost zagrade $(H_3(T_u \cup T_v) - T_v)$ će biti veća ili će ostati ista, pa sledi da novi B_u će biti veći ili jednak sa starim B_u.

Pod c) Ako smanjimo T_u, T_v i T_w ili bar jedan od njih onda će se $H_2(T_u \cup T_v \cup T_w)$ povećati ili će ostati isti zbog činjenice da je H_2 monotono nerastuća funkcija. Vrednost zagrade $(H_2(T_u \cup T_v \cup T_w) - (T_v \cup T_w))$ će se povećati ili će ostati ista, pa novi B_u će biti veći ili jednako sa starim B_u.

Pod d) se ne pojavljuje nijedna od tri funkcije, ali možemo videti da smanjenjem T_v, T_w i T_z zagrada će se povećati, pa novi B_u će biti veći nego stari B_u.

Gore navedene osobine funkcije H_1, H_2 i H_3 i činjenica da je Φ^* konačan garantuje da ima najmanje jedan Φ-stable element. Rezultat korišćenja pravila sužavanja sve dok ne dobijemo FAIL ili interval koji ne možemo više smanjiti ćemo nazvati **sužavanje**. Sužavanjem zapravo zamenimo niz intervala $(I_0, \ldots, I_{m-1})$ sa $C(G, H; I_0, \ldots, I_{m-1})$, gde je $C(G, H; I_0, \ldots, I_{m-1})$ ili FAIL ili Φ-stabilan niz intervala $(I'_0, \ldots, I'_{m-1})$ takav da $I'_i \subseteq I_i$ za $0 \leq i < m$.

Fundamentalna teorema o sužavanju glasi ovako:

Teorema 3.16 *Ako $C(G, H; I_0, \ldots, I_{m-1})$ =FAIL onda $\mathcal{F}(G, H, I_0, \ldots, I_{m-1}) = \emptyset$, inače definišemo niz intervala kao $(I'_0, \ldots, I'_{m-1}) = C(G, H; I_0, \ldots, I_{m-1})$. Tada $\mathcal{F}(G, H, I'_0, \ldots, I'_{m-1}) = \mathcal{F}(G, H, I_0, \ldots, I_{m-1})$ i za $|I'_0| = |I'_1| = \cdots = |I'_{m-1}| = 1$ važi da $\mathcal{F}(G, H, I'_0, \ldots, I'_{m-1})$ sadrži jedan $(4,5)$-graf.*

Dokaz. Ako je $C(G, H; I_0, \ldots, I_{m-1})$ =FAIL onda $\mathcal{F}(G, H, I_0, \ldots, I_{m-1}) = \emptyset$, tj. ako dobijemo FAIL pri korišćenju pravila sužavanja onda ne postoji $(4, 5, 24)$-graf $F(G, H, C_0, \ldots, C_{m-1})$ takav da $C_i \in I_i$ za svako $0 \leq i \leq m-1$, gde smo C_i definisaali kao skup susednih čvorova čvora i u skupu $V(H)$. Ako se ne pojavljuje FAIL onda svaki interval I_i možemo smanjiti, tj. zameniti sa nekim drugim intervalom $I'_i \subseteq I_i$ tako da važi $\mathcal{F}(G, H, I'_0, \ldots, I'_{m-1}) = \mathcal{F}(G, H, I_0, \ldots, I_{m-1})$. Sve ovo smo dokazali kod Leme 3.3.4. Jedino što je ostalo da dokažemo je, da ako $|I'_0| = |I'_1| = \cdots = |I'_{m-1}| = 1$ onda $\mathcal{F}(G, H, I'_0, \ldots, I'_{m-1})$ se sastoji od jednog $(4,5)$-grafa. Ovaj deo teoreme sledi iz činjenice da postojanje K_4 i skupa od pet nezavisnih čvorova bi uzrokovalo da odgovarajućim pravilima sužavanja dobijemo FAIL. $\square$

Svaki put kada pravilo sužavanja modifikuje interval, broj izvodljivih konusa koje taj interval sadrži je prepolovjen. Zato je i ovaj način lepljenja uspešan.

Sada možemo videti kako izgleda lepljenje pomoću intervala. Pretpostavimo induktivno da imamo niz intervala $(I'_0, \dots I'_{r-1})$ za $G[\{0, 1, \dots, r-1\}]$ takav da nijedan interval niza ne možemo više smanjiti. Posmatrajmo graf $G[\{0, 1, \dots, r\}]$.

$G[\{0, 1, \dots, r\}]$ ima oblik $C(G[\{0, 1, \dots, r\}], H; I'_0 \dots I'_{r-1}, I_r)$ gde je I_r interval koji ne uzrokuje FAIL.

Ako imamo niz intervala $(I'_0, \dots I'_{m-1})$ za G gde nijedan interval niza ne može više da se smanji, onda lako možemo naći $\mathcal{F}(G, H)$. Nizovi takvi da $|I'_0| = |I'_1| = \cdots = |I'_{m-1}| = 1$ imaju samo jedno rešenje kao što smo dokazali kod Teoreme 3.14. Nizovi kod kojih za neke I'_i važi da $I'_i = [B'_i, T'_i]$ za $B'_i \neq T'_i$ mogu biti podeljeni na disjunktne delove $C(G, H; I'_0, \dots, [B'_i \cup \{w\}, T'_i], \dots, I'_{m-1})$ i $C(G, H; I'_0, \dots, [B'_i, T'_i - \{w\}], \dots, I'_{m-1})$ za neke $w \in T'_i - B'_i$. Naravno elemente koje uzrokuju FAIL izbacujemo.

Problem ovog metoda, da obično postoji oko 100 intervala koji mogu biti izabrani za I_r, i većina njih dovodi do FAIL. Autori su koristili dodatne ideje (koje ovde nećemo objašnjavati) da ubrzaju postupak lepljenja.

Za poslednja dva reda tabele sa Slike 17. autori su koristiti sličan algoritam, ali zamenili su uloge grafa G i H. Pošto je H $(4, 4)$-graf neće nam trebati pravilo sužavanja pod $d.$), ali trebaće nam novo pravilo za trouglove u H. Pošto je broj $(4, 4)$-grafova veći u odnosu na broj $(3, 5)$-grafova, autori su izabrali $\mathcal{R}'(3, 5, k)$ tako da sadrži grafove sa brojem čvorova manje od $k - 1$.

Za $k = 12$ koristili su $23(4, 4, 7)$-grafova i $51(4, 4, 8)$-grafova. Za $k = 11$ su koristili $28(4, 4, 8)$-grafova i $113(4, 4, 9)$-grafova. Pomoću algoritma lepljenja dobili su grafove sa 21 ili 22 čvorova koji su na sve moguće načine bili prošireni na 24 čvora.

3.3.3 Dodavanje čvora v

U ovom delu rada pokažemo kako su autori napravili algoritam koji dodaje jedan čvor $(4, 5)$-grafu.

Neka je F jedan $(4, 5, n)$-graf. Želimo naći sve moguće načine kako novi čvor v može biti povezan grafom F da bi dobili $(4, 5, n + 1)$-graf.

Jasno je da je potreban i dovoljan uslov da $N(v, V(F))$ ne sadrži nijedan podgraf izomorfan sa K_3 i seče svaki skup od četiri nezavisna čvora u F.

Neka je $X_1, X_2, \ldots, X_r$ spisak koji sadrži sve trouglove i skupove od četiri nezavisna čvora u F. Slično kao kod lepljenja možemo konstruisati intervale podskupova $[B, T]$ u $V(F)$. Neka je $\mathcal{I}$ skup svih ovakvih intervala, tj. $\mathcal{I} := \{[\emptyset, V(F)]\}$

Algoritam proširenja treba da proveri za svako X_i da li je trougao ili skup od četiri nezavisna čvora.

Ako je X_i trougao onda za svaki interval $[B, T]$ takav da $X_i \subseteq T$ proverava da li je $X_i \subseteq B$. Ako jeste, onda briše interval $[B, T]$ iz skupa svih intervala $\mathcal{I}$. Ako nije, onda interval $[B, T]$ zamenjuje intervalima
$[B \cup \{y_1, \ldots, y_{j-1}\}, T \backslash \{y_j\}]$ za $j = 1, 2, \ldots, k$, gde $X_i \backslash B = \{y_1, \ldots, y_k\}$.

Ako je X_i skup četiri nezavisna čvora, onda za svako $[B, T] \in \mathcal{I}$ takav da $X_i \cap B = \emptyset$ treba da proveri da li je $X_i \cap T = \emptyset$. Ako jeste, onda treba da briše interval $[B, T]$ iz $\mathcal{I}$. Ako nije, onda treba da interval $[B, T]$ zameni intervalom $[B \cup \{y_j\}, T \backslash \{y_1, \ldots, y_{j-1}\}]$ za $j = 1, 2, \ldots, k$ gde je $X_i \cap T = \{y_1, \ldots, y_k\}$.

Po završetku algoritma, $\mathcal{I}$ će sadržati skup disjunktnih intervala čija unija je skup svih mogućih suseda čvora v.

3.3.4 Rezultat istraživanja

Bile su konstruisane dve odvojene implementacije algoritama opisanih u prethodnim delovima rada, jedan od svakog autora. Ove dve implementacije su zahtevale više od 3 godine.

Kao rezultat ovih istraživanja pronađeno je oko 250000 $(4, 5, 24)$-grafa. Koristeći dva nezavisna programa za proširenje $(4, 5, n)$-grafa do $(4, 5, n+1)$-grafa pokazalo se da ovi grafovi ne mogu biti prošireni do $(4, 5, 25)$-grafa. Znači dobili smo glavnu teoremu:

Teorema 3.17 *R(4,5)=25*

Zaključak

U radu smo formulisali i dokazali konačnu i beskonačnu Remzijevu teoremu. Definisali smo pojam Remzijevog broja i dali smo neke gornje i donje granice tih brojeva.

Upoznali smo se sa različitim metodama za dobijanje granice Remzijevih brojeva kao što je na primer probabilistički metod.

Dokazali smo da važi $R(3,3) = 6$, $R(3,4) = 9$, $R(3,5) = 14$, $R(4,4) = 18$ i u poslednjem delu rada opisali smo ideju dokaza da je $R(4,5) = 25$. Ovu poslednju jednačinu su dokazali McKay i Radziszowski 1995. godine pomoću računara. Oni su izmislili algoritme kojim su skratili vreme potrebno da nađu grafove sa 25 čvorova koji ne sadrže ni podgraf izomorfan sa K_4 ni podgraf izomorfan sa $\overline{K_5}$. Njihovi računari su radili više od 3 godine i na kraju su dobili da ne postoji nijedan takav graf, tj. važi $R(4,5) \geq 25$. Da je $R(4,5) \leq 25$ je dokazano ranije, pa iz ove dve nejednačine sledi da važi $R(4,5) = 25$.

Iz ovog primera se vidi koliko se teško računaju Remzijevi brojevi $R(k,l)$ i za relativno male k i l.

Erdős Pál (1913-1996), mađarski matematičar, jednom je rekao da ako zamislimo da dolaze vanzemaljci i traže da odredimo broj $R(5,5)$ ili uništavaju planetu, onda će nam trebati rad svakog matematičara i kompjutera da bi našli vrednost tog broja, ali ako traže vrednost broja $R(6,6)$, onda trebalo bi da učinimo sve što možemo da ih pobedimo.

Literatura

[1] R. L. Graham, B. L. Rothschild, J. H. Spencer: *Ramsey Theory* , John Wiley and Sons, 1990.

[2] B. D. McKay, S. P. Radziszowski: *R(4,5)=25*, Department of Computer Science, Australian National Universitiy, Australia, Department of Computer Science, Rochester Institute of Technology, Rochester, 1995.

[3] D. Jojić: *Elementi enumerativne kombinatorike*, Banja Luka

[4] V. Petrović: *Teorija Grafova*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1998.

[5] G. E. W. Taylor: *Ramsey Theory*, PhD teza

[6] A. Solymos: *Ramsey-számok*, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi kar, Budapest, 2010.

[7] I. Tamaga: *Ramsey -típusú tételek*, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi kar, Budapest, 2011.

[8] S. P. Radziszowski: *Small Ramsey numbers*, Technical Report RIT-TR-93-009, Dept. of Computer Science, Rochester Institute of Technology, 1993.

[9] D. Stevanović: *Diskretna matematika*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2004.

[10] A. Trokicić, N. Milosavljević: *Odredjivanje granica Ramzejevih brojeva metodom slučajnih grafova*, gimnazija Svetozar Marković, Niš, 2007.

[11] http:// matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/FazekasTunde/ramsey

[12] E. Neuberger: *A kombinatorikus geometria néhány kérdése*, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi kar, Budapest, 2011.

[13] M. Aigner, G. M. Ziegler: *Proofs from THE BOOK* , Institut für Mathematic, Frie Universität Berlin, Berlin, 2018.

[14] P. Erdős, A. Hajnal, A. Máté, R. Rado: *Combinatorial set theory: Partition relations for cardinals*, Akadémia kiadó, Budapest, North-Holland publishing company, Amsterdam, New York, Oxford, 1984.

[15] S. Todorcevic: *Introduction to Ramsey Spaces*, Princeton University, Princeton and Oxford, 2010.

Biografija

Rita Gajdač (rođena Adam) rođena je 20.08.1990. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu ,,Kokai Imre" u Temerinu završila je 2005. godine kao nosilac Vukove diplome. Iste godine je upisala Ekonomsko-trgovinsku školu u Bečeju, na mađarskom nastavnom jeziku koju je završila 2009. godine takođe sa odličnim uspehom. Nakon završene srednje škole upisuje osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer diplomirani profesor matematike. Studiranje na master studijama na istom fakultetu je nastavila u oktobru 2013. godine. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom time i je stekla uslov za odbranu ovog master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Rita Gajdač
AU

Mentor: dr Boris Šobot
MN

Naslov rada: Remzijevi brojevi
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski **JI**

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2019.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića

4
MA
Fizički opis rada: 3/48/15/0/19/0/0
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Kombinatorika
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: teorija grafova, Remzijeva teorema, Remzijevi brojevi, skupovi, bojenje grana grafa
PO

UDK:

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Remzijeva teorema je osnovna teorema kombinatorike i diskretne matematike uopšte. Ova teorema je dobila ime po engleskom matematičaru Frank Plumpton Ramsey (1903-1930) koji je prvi dokazao teoremu i publikovao 1928. Od ove teoreme je nastala jedna nova teorija koja se bavi uslovima za postojanje pravilnih struktura u okviru nekih sistema. Remzijev broj je najmanji prirodan broj n za koji važi Remzijeva teorema. Remzijeva teorema dokazuje egzistenciju Remzijevih brojeva, ali tačne vrednosti tih brojeva jako se teško računaju. U većini slučajeva poznajemo samo neke gornje i donje granice tih brojeva. Master rad sastoji se od tri dela. U prvom delu su navedene one definicije, teoreme, pojmovi i oznake koje koristimo u celom radu.U drugom delu rada je formulisana i dokazana Remzijeva teorema. Treći deo sadrži razne procene Remzijevih brojeva i tačnu vrednost nekih Remzijevih brojeva.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 22. 10. 2018.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:

Predsednik: dr Vojislav Petrović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: dr Boris Šobot, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Bojan Bašić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
KO