UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Rebeka Čorba

MOGUĆNOST PREZENTOVANJA NEKIH OBAVEZNIH I NEKIH NAPREDNIH SADRŽAJA IZ MATEMATIKE MTE-MODELOM NASTAVE U PRVOM RAZREDU SREDNJE ŠKOLE

– Master rad –

Novi Sad, 2014.

Predgovor

Ovaj master rad se bavi mogućnostima korišćenja jednog novijeg, takozvanog MTE-modela izvođenja nastave matematike. Naziv modela potiče od engleskih reči: Motivation test– Teaching – Examination test.

Ključna reč ovog modela nastave je *motivacija*, jer je motivisanost učenika jedna od najbitnijih stvari u učenju matematike. Zbog toga su u prvom delu rada opisane različite teorijske orijentacije u oblasti motivacije u matematičkom obrazovanju, vrste motivacija i rezultati nekih istraživanja.

U drugom delu rada je opisana ideja MTE-modela nastave, kao i jedan predlog izvođenja nastave putem opisanog modela, vezano za konkretnu temu iz trigonometrije, koja predstavlja obavezan sadržaj iz gradiva prvog razreda gimnazije. Prikazani su i rezultati eksperimenta koji je izveden ovim modelom u Gimnaziji u Bečeju, na času obrade tema *Trigonometrijske funkcije oštrog ugla* i *Vrednosti trigonometrijskih funkcija nekih oštrih uglova*. Priloženi su i testovi uz pomoć kojih se eksperiment realizovao, kao i rezultati anketiranja učenika posle prvog susreta sa MTE-modelom nastave.

Treći deo rada je posvećen jednoj temi kombinatorne geometrije: Izoperimetrijskom problemu. Dat je opis ovog problema, relevantna tvrđenja sa dokazima. Izložen je i jedan predlog izvođenja ovog naprednog sadržaja putem MTE-modela, i opisan je drugi eksperiment koji je izveden na ovaj način sa istom grupom đaka. Takođe su priloženi testovi, rezultati i analiza istih. Crteži u delu teksta koji se odnosi na izoperimetrijski problem su preuzeti iz [3] uz saglasnost autora.

Zahvaljujem se svom mentoru, prof. dr Olgi Bodroža-Pantić na svim savetima, sugestijama, pomoći i razumevanju.

Posebnu zahvalnost dugujem mojoj porodici: roditeljima i mužu, na razumevanju, strpljenju i podršci tokom celog mog studiranja.

Novi Sad, decembar 2013. Rebeka Čorba

Sadržaj

Uvod

Istraživači koji se bave motivacijom za učenje u oblasti školske matematike uglavnom ispituju odnos koji postoji između matematike kao socijalno izgrađenog polja i želje učenika za postizanjem uspeha. Statistički podaci su ukazali da deca uživaju u matematici u osnovnoj školi, ali taj nivo uživanja dramatično opada kako deca napreduju ka srednjoj školi. Pored toga, iako učenici smatraju da je matematika važna, broj učenika koji želi da ima više matematike u školi značajno opada. Nacionalni savet profesora matematike (NCTM – the National Council of Teachers of Mathematics) u SAD ([9]) smatra da deca nemaju matematičko znanje potrebno da se snađu bez problema u savremenom društvu u kojem tehnologija stalno napreduje, te je postavio *motivacione domene*:

– Učenje vrednovanja matematike
– Postati siguran u sopstvene sposobnosti.

Ova dva cilja su najvažnija za učenike kao pokušaj da se promeni dosadašnji pristup matematici u sistemu obrazovanja.

Šta je motivacija?

Jednostavno rečeno, *motivacija* je skup razloga koje pojedinac ima za određeno ponašanje u određenim situacijama. Motivi postoje kao deo nečijih ciljeva, ubeđenja u tome šta je značajno, i određuju da li će se neko upustiti u nešto ili ne. Postoje dve vrste školske motivacije:

1. unutrašnja motivacija
2. spoljašnja motivacija

Unutrašnja motivacija je želja učenika da se uključi u učenje “zarad sebe”. Učenici sa unutrašnjom motivacijom prihvataju zadatke zato što uživaju u njima. Smatraju da je učenje značajno zbog samog sebe, i tragaju za aktivnostima učenja radi radosti učenja. Njihovi motivi se fokusiraju na ciljeve učenja kao što su razumevanje i savladanje matematičkih pojmova. Učenici koji su na ovaj način motivisani pokazuju veliki broj pedagoški željenih oblika ponašanja, kao što su duže vreme utrošeno na rešavanje zadatka, istrajnost u slučaju poraza, viši nivo razmišljanja i shvatanja, odabir težih zadataka, veća kreativnost i preuzimanje rizika, odabir komplikovanijih i efikasnijih strategija učenja i izbor aktivnosti u odsustvu očekivane nagrade.

Spoljašnja motivacija: Učenici koji su na ovaj način motivisani prihvataju zadatke radi nagrada (npr. dobre ocene, pohvale) ili da bi izbegli kaznu (npr. loše ocene, neodobravanje). Motivi ovih učenika se fokusiraju na ciljeve učenja da bi zadobili dobro mišljenje o svojoj kompetenciji od strane nastavnika, roditelja ili drugara, ili da bi izbegli negativno mišljenje o svojoj kompetenciji.

Unutrašnja motivacija se povezuje sa zapažanjem učenika o njihovoj kompetenciji u matematici (da li su motivisani radoznalošću ili ocenom). Iako uspeh, sposobnost i opažanje sopstvene kompetencije svaki doprinosi želji za učenjem matematike, unutrašnja motivacija je kompleksnija od ovih dodatnih efekata. Naime, učenici koji shvate da su sposobni za napredovanje u matematici vrednuju i cene matematiku više od učenika koji sebe ne smatraju sposobnim za napredovanje.

1. Teorijske orijentacije u oblasti motivacije

U [9] istraživanja koja se bave motivacijom u matematičkom obrazovanju se dele na sledeće teorije:

- Bihejvorističke teorije
- Atributivne teorije i teorije naučene bespomoćnosti
- Teorije cilja (Goal teorije)
- Teorije prave prirode: personalno-konstruktivne teorije
- Deskriptivna istraživanja

1.1. Bihejvorističke teorije

Ove teorije su dominirale tokom većeg dela 20. veka. Motivacije su viđene kao podsticaj za primenu datog ponašanja. Reformulacije ovih teorija su fokusirane na potencijalnom konfliktu između potrebe pojedinca za uspehom i potrebe za izbegavanje neuspeha.

Ova teorijska orijentacija je obezbedila moćno znanje o motivaciji učenika za matematiku. Kao prvo, istraživanja ukazuju da uspeh iz matematike ima veliki uticaj na motivaciju. Učenike uspeh ohrabruje, i oni se uključuju u matematiku ukoliko očekuju da će biti uspešni. Pored toga, učenici ne samo da se više uključuju, nego i uživaju u zadacima kod kojih je manja verovatnoća uspeha.

Kao drugo, i mnogo važnije, orijentacija ka postizanju uspeha iz matematike može se izgraditi na časovima matematike. Kada se učenici podstiču, tada se motivacija i postignuće čitavog razreda mogu poboljšati. Na primer, kada se nagrađuje grupni rezultat, učenici su motivisani da pomažu jedni drugima u grupi i pod pritiskom su da i sami dobro nauče. Ovaj način omogućava učenicima da uspeh pripišu sami sebi, a neuspeh grupi, in a taj način se smanjuje individualna odgovornost za neuspeh proporcionalno broju učenika u grupi.

Argumenti protiv korišćenja podsticaja i prisile je „skrivena cena nagrade”. Ako je nagrada primarni razlog angažovanja, često se smanjuje unutrašnja motivacija (očekivanje nagrade slabi unutrašnju želju za učenjem). Posledično, odsustvo nagrade uzrokuje da se deca ne angažuju u budućnosti za slične zadatke.

1.2. Atributivne teorije i teorije naučene bespomoćnosti

Naučnici su 1960-ih i početkom 1970-ih godina počeli da usmeravaju svoju pažnju na ispitivanje koje faktore učenici smatraju uzrocima svojih uspeha i neuspeha. Ove teorije se bave time kako se ishodi neke aktivnosti procenjuju u odnosu na individualnu percepciju sopstvenog doprinosa (tj. sposobnost i trud) i doprinos zahteva zadatka (tj. težina, doslednost, presedan).

Učenici nižih razreda osnovne škole su uglavnom u velikoj meri motivisani za matematiku. Smatraju da su kompetentni i da će im naporan rad obezbediti uspeh. Mnogi učenici prvog i drugog razreda ne prave razliku između napora i sposobnosti kao uzroka uspeha u matematici. Do viših razreda mnogi učenici počnu da posmatraju matematiku posebnim domenom u kome pametni učenici imaju uspeha, a ostali učenici jedva "prolaze" ili padaju. Oni počinju da veruju da se uspeh i neuspeh mogu pripisati sposobnosti i da napor i trud retko dovode do uspeha.

Kada učenici pripišu svoje uspehe sposobnosti, oni tada imaju uspeha, a kada svoje neuspehe pripišu nedostatku sposobnosti, tada počinju da smatraju uspeh nedostižnim. Istraživanja su pokazala da devojčice nemaju sklonost da svoje uspehe pripisuju sposobnosti, ali su sklone da svoje neuspehe pripisuju nedostatku sposobnosti. Verovanje da je trud medijator sposobnosti i da je neuspeh prihvatljiva faza u učenju matematike doprinosi samopouzdanju učenika prilikom učenja matematike. Kada učenici smatraju da je sposobnost podložna promenama ili povećanju kroz trud, oni tada ulažu veći trud u matematiku i stoga postižu bolje rezultate od učenika koji veruju da je sposobnost fiksna. Kada se deca koja nisu iskusila teže matematičke probleme susretnu sa problemom koji se ne može rešiti na rutinski način, tada im se može poljuljati samopouzdanje osim ukoliko veruju da su povremene greške deo učenja matematike.

Zbog nedostatka uspeha i pripisivanju neuspehu nedostatak sposobnosti, pojedinci počinju da smatraju uspeh nedostižnim. Ova verovanja su rezultat edukacione okoline koja visoko vrednuje sposobnost, a nisko trud i napor, i nudi malo prilika za pojedince sa drugačijim stilom učenja da nadomeste sposobnosti kontinuiranim radom.

Zbog tog verovanja da je uspeh nedostižan i da je neuspeh posledica internih faktora, naučena bespomoćnost postaje osobina (stabilna i nepromenljiva), a ti bespomoćni pojedinci postižu manje nego što se to može pripisati njihovim sposobnostima. Međutim, postoje dokazi da se na pripisivanja može pozitivno uticati putem instrukcija na času. Glavna poteškoća u kreiranju prikladne strategije intervencija na času matematike je običaj samih profesora da porede đake i time, možda nenamerno, pojačavaju pripisivanja vezana za neuspeh i potkopavaju dalje motivaciju učenika za postizanje. Kod najuspešnijih učenika, nastavnici su skloni da pripisuju uspeh sposobnosti više kod dečaka nego kod devojčica, neuspeh devojčica često pripisuju nedostatku sposobnosti, manjem trudu i težini zadatka, dok neuspeh dečaka pripisuju samo nedostatku truda.

1.3. Teorije cilja (Goal teorije)

Naučnici koji temelje svoj rad na ovoj teoriji pokušavaju da odrede kako su razlozi za uspeh i neuspeh povezani sa onim što se vrednuje. Tipovi učenika prema njihovim orijentacijama (ciljevima):

- Pojedinac sa *mastery-orijentacijom* ili sa *ciljem učenja* vrednuje poboljšanje veštine ili znanje iz određene oblasti i veruje da uspeh zavisi od napornog rada, pokušaja da se shvati domen i saradnje sa drugima.
- Pojedinac sa *ego-orijentacijom* ili sa *ciljem predstava* veruje u uspostavljanje “superiornosti nad drugima” i veruje da uspeh zavisi od poređenja sa drugima i postizanja te superiornosti.
- Pojedinac sa orijentacijom *izbegavanje rada* veruje da je uspeh rezultat, na primer “dobrog ponašanja na času” ili drugih, sličnih ponašanja.

Učenici sa master-orijentacijom obično postižu bolji uspeh nego oni sa ego-orijentacijom.

Međutim, dete može da uživa u rešavanju nekog zadatka, ali ipak, da se oseća potcenjen od strane profesora. U ovakvim slučajevima, ego cilj - dobijanje pozitivnih procena sposobnosti (dobijanje dobre ocene) potkopava unutrašnje uživanje u zadatku.

1.4. Teorije prave prirode: Personalno-konstruktivne teorije

Ove teorije ispituju individualne razlike u razmišljanju i zasnovane su na pretpostavci da pojedinac koji gradi neko znanje o svetu koji ga okružuje koristi to znanje da predvidi ishode dešavanja.

Zaključeno je da ono kako profesor doživljava i shvata matematiku i matematičko obrazovanje igra veliku ulogu u tome kako on procenjuje svoju ulogu u podučavanju i kako pristupa predavanju. Na primer, profesor koji smatra da teža matematika pruža više uživanja isto tako smatra da je ljubopitljivost poželjna osobina kod profesora matematike. Profesor koji uživa u matematici koja je lakša, smatra ljubopitljivost najmanje poželjnom osobinom za profesora matematike.

Izgleda da je razumno pretpostaviti da su prethodna iskustva profesora tokom svog matematičkog obrazovanja (identifikacija sa svojim profesorom) utiče na određivanje toga koji aspekt matematike je motivišući za njih i kako će pristupiti predavanju.

Deca koja imaju visoku sposobnost za matematiku smatraju matematiku lakšom, uživaju više u matematici i smatraju matematikom korisnijom od dece manjih sposobnosti. Međutim, kada se od dece koja uživaju u matematici traži da obave neki rutinski zadatak (npr. učenje bez razmišljanja), oni postaju razočarana matematikom. Pored toga, otkrivene su razlike među polovima u načinu na koji dečaci visokih sposobnosti i devojčice nižih sposobnosti doživljavaju uspeh u matematici. Samopouzdanje dečaka u svoje sposobnosti je prilično jako uprkos neuspehu, dok devojčice nižih sposobnosti uspeh doživljavaju sa ustručavanjem, tj. njihova nesigurnost dolazi do izražaja čak i kada su uspešne.

Rezultati ovih istraživanja su pokazala da su motivacije u matematičkom obrazovanju strogo individualne i povezane sa uočenim sposobnostima i relativno stabilne u vezi sa uspehom i neuspehom.

1.5. Deskriptivna istraživanja

Osobe koje matematiku smatraju teškom i svoju sposobnost za bavljenje matematikom slabom, generalno izbegavaju matematiku ukoliko je to moguće. Takvi učenici se nazivaju zabrinutim matematikom. Matematička *anksioznost*, osećanje neadekvatnosti i sramote kod učenika su bili zajednički u njihovoj interpretaciji njihovih loših iskustava u matematici. Učenici se uglavnom bolje sećaju loših iskustava iz matematike nego iz drugih predmeta.

Neka deca već na uzrastu trećeg razreda počinju da osećaju nedostatak efikasnosti u matematici (*unutrašnji govor* već na početku rešavanja zadatka; na primer:,,Ako ovo ne uradim dobro, neću dobiti dobru ocenu...”).

Ovakve negativne lične percepcije vezane za matematiku mogu potkopati sposobnost učenika i volju da istraju kada se suoče sa težim zadatkom.

U srednjoj školi, motivacije prema matematici se kristališu na nivou odraslog čoveka. Oni koji ,,vole matematiku” tvrde da su je zavoleli u sedmom razredu, a oni koji tvrde da ,,ne vole matematiku” govore da su počeli tako da se osećaju takođe u sedmom razredu.

Istraživanja razlika u polovima su pokazala da je matematika kod devojčica doživljena kao oblast koja leži muškim osobama.

Saznanja raznih teorijskih orijentacija ukazuju da shvatanja učenika o uspehu u matematici veoma utiču na formiranje njihovih motivacionih stavova. Istraživanje ukazuje da je trud koji osoba spremna da uloži u zadatak određen očekivanjem da će učestvovanje u zadatku rezultirati pozitivnim ishodima. Učenicima je potreban relativno visok nivo uspeha iz matematike da bi se uključivanje u matematiku smatralo vrednim, i potrebno je da osete da se uspeh iz matematike pripisuje njihovoj sposobnosti i trudu. Naučena bespomoćnost, nedostatak uspeha i shvatanje da do neuspeha dolazi zbog nedostatka sposobnosti ozbiljno potkopavaju motivaciju za učenjem. Učenici takođe usvajaju zdravo razumevanje uloge neuspeha u rešavanju matematičkih problema. Verovatnoća neuspeha u nekom zadatku povećava težinu zadatka, a stoga se povećava i vrednost uspeha. Stoga matematičke aktivnosti moraju biti dovoljno teške da se učenici ne bi dosađivali, a opet moraju i omogućavati visok nivo uspeha kada se posveti odgovarajući trud od strane učenika. Pored toga, učenike treba ohrabriti da uspeh pripisuju kombinaciji sposobnosti i truda, a svoje neuspehe nedovoljnom trudu (tako da se neuspesi mogu prevazići marljivim radom). Učenicima se ne sme dati razlog da veruju da su njihovi neuspesi posledica nedostatka sposobnosti, iz straha da se ne pogoršaju njihova osećanja naučene bespomoćnosti.

Motivacija ka matematici se razvija rano, veoma je stabilna tokom vremena i na nju u mnogome utiču delovanje i stavovi nastavnika. Učenici obrazuju svoje motivacione stavove ka matematici u nižim razredima srednje škole. Prevlađivanje loših iskustava učenika delimično objašnjava zašto sviđanje matematike kod učenika opada kako postaju stariji. S obzirom da zabrinuti ili otuđeni učenici učenici neće imati niti razviti motivaciju za učenje matematike, nastavnik treba da bude strpljiv, da ohrabruje i podržava individualne stilove učenja kod učenika. Učenici će se osećati bezbednije da preuzimaju rizike ukoliko znaju da neće biti kritikovani ili poniženi ukoliko pogreše. Učenici svoja osećanja prema matematici pripisuju svojoj identifikaciji sa uticajnim nastavnicima ili svojim reakcijama na loša iskustva za koje krive nastavnike.

Ukoliko učenici shvate da su njihovi uspesi značajni i da su rezultat i njihovih sposobnosti i visokog stepena truda, verovatno će poverovati da im matematika može ići ukoliko se potrude. Obezbeđivanje grupnih podstreka može dovesti do saradnje i recipročnog delovanja prilikom rešavanja matematičkih problema tako da sva deca imaju mogućnosti za uspeh. Stvaranjem zanimljivih konteksta u okviru kojih se nalaze problemi stimuliše se mašta učenika i ilustruje im se na taj način da je matematika korisna u raznim primenama.

2. Ideja MTE-modela nastave

2.1. Karakteristike MTE-modela nastave

Nedavno ([2]) je uveden jedan novi model nastave koji je nazvan MTE-model (M-Motivation test, T-Teaching, E-Examination test), i ima za cilj pre svega da motiviše đake.
Nastava po MTE-modelu se izvodi tako što se jedan školski čas (u srednjim školama dvočas) deli na sledeće tri celine:

1. faza – izrada M-testa (motivacionog testa)
2. faza – izlaganje nastavnika putem rešavanja M-testa
3. faza – provera usvojenog znanja, izrada E-testa

Prvi, takozvani M-test učenici rešavaju na početku (prvog) časa. Ovaj test je uvodnog karaktera, za cilj ima da se đaci podsete potrebnih pojmova i tvrđenja vezanih za temu koja se obrađuje i da se postupno „zagreju”, zainteresuju za temu časa. Neki od zadataka služe da nastavnik ispita prag znanja i intuitivne sposobnosti đaka kako bi imao jasan uvid u to koliko „duboko” sme da zalazi sa njima u tu problematiku. Zadaci koji se biraju za ovaj test nisu “svakodnevni“, ali se pretpostavlja da učenici ipak, imaju neko predznanje potrebno za pokušaj rešavanja istih.

U okviru druge faze nastavnik izlaže gradivo putem rešavanja zadataka iz M-testa. Tako se zadržava zainteresovanost đaka, jer njih interesuje da li su dobili tačno rešenje. Nastavnik dopunjuje svoje izlaganje detaljnijim obrazloženjima, uvodi nove pojmove, formule itd.

Na kraju (drugog) časa se radi takozvani E-test, što je na neki način provera usvojenog znanja na času. Ovaj test sadrži teže zadatke od prvog, ali po svojoj formulaciji oni podsećaju na zadatke prvog testa, te ne predstavljaju iznenađenje za učenike.

Ciljevi MTE-modela nastave su: ispitivanje praga znanja iz odgovarajuće oblasti (M-testom), ponavljanje već usvojenog znanja, uvođenje novih pojmova na pristupačniji (zabavan) način, produbljivanje ranije usvojenih znanja, dublje poimanje određenih pojmova, iznošenje osnovnih novih ideja vezanih za zadatu temu, povezivanje gradiva sa već obrađenim na prethodnim časovima, održati pažnju učenika tokom oba časa i stvoriti kod đaka utisak da se igraju.

Ovaj model nastave se već pokazao uspešnim u više eksperimenata ([4],[6],[8],[11]). Eksperiment na temi „Razlaganje ravni“ je izveden u Srednjoj građevinskoj školi „Jovan Vukanović“ u Novom Sadu 2006. godine ([6]), a eksperiment na temi „Određivanje površine i obima kruga i njegovih delova“, kao i na temi „Određivanje površine četvorougla i trouglova“ je izveden u Osnovnoj školi „Petefi brigada“ u Kuli i u Osnovnoj školi „Vuk Karadžić“ u Crvenki, 2009. godine ([8],[11]). Ovaj model se dobro pokazao i u radu sa decom sa posebnim potrebama ([4]).

2.2. Način biranja zadataka na M- i E-testu

Zadatke za testove koji se koriste u ovom modelu nastave treba birati jako pažljivo. Nastavnik, prvo, treba da ima u vidu uzrast i predznanje učenika. Ako nastavnik redovno predaje u datom razredu, to nije problem, jer on već poznaje učenike, i može u velikoj meri pravilno da proceni znanje sa kojim učenici raspolažu.

M-test treba da sadrži 3-4 zadatka, zavisno od težine zadataka. Osnovna ideja je da se M-test radi oko 10 ili 20 minuta (zavisno od toga da li je reč o jednom ili o dvočasu). M-test treba da sadrži barem 50% realno rešivih zadataka kako se učenici ne bi demotivisali, ali treba da sadrži i bar jedan teži zadatak za koji se pretpostavlja da ga učenici ne mogu uspešno rešiti sa svojim predznanjem, ali imaju dovoljno predznanje da pokušavaju rešavati zadatak. Zadaci na M-testu ne smeju biti obični, zato je važno da test sadrži slike koje služe za pomoć u rešavanju zadataka. Zbog vremenskog ograničenja M-test ne sme da sadrži zadatke koje zahtevaju dugačke račune. Bolje je izabrati zadatke koji zahtevaju logičko mišljenje, povezivanje novih pojmova sa već naučenim. Test može da sadrži zadatke tipa zaokruživanja tačnog odgovora od više ponuđenih, ili zadatke čije rešenje je samo jedna reč ili formula koju učenik sam treba da upiše, ali zavisno od kreativnosti nastavnika može se dati zadatke tipa popunjavanja tabele, povezivanje odgovarajućih stvari strelicom itd.

E-test se radi na kraju časa, takođe oko 10, odnosno 20 minuta. Ovaj test treba da liči na M-test, ali zadaci trebaju biti teži. Zadaci ne smeju da predstavljaju iznenađenje učenicima, od njih ne treba tražiti više od onog što su čuli u drugoj fazi, kad nastavnik izlagao gradivo. I kod ovog testa su važne slike, ali sada one služe kao podsećanje na ono što su učenici u drugoj fazi čuli i naučili. Zadaci i na ovom testu mogu biti tipa zaokruživanja i slični, ali sad već se može tražiti malo više računanja od učenika, jer zadaci i gradivo više nisu njima nepoznati, kao što je to bilo na M-testu.

3. Realizacija MTE-modela nastave

3.1. Prva tema – Trigonometrijske funkcije oštrog ugla i vrednosti trigonometrijskih funkcija nekih oštrih uglova

Navedena tema predstavlja obavezan sadržaj iz gradiva prvog razreda gimnazije.

IZVOD IZ OPERATIVNOG PLANA RADA

Redni broj časa	Naziv nastavne jedinice	Tip časa
136	Trigonometrijske funkcije oštrog ugla	obrada
137	Trigonometrijske funkcije oštrog ugla	vežbe
138	Vrednosti trigonometrijskih funkcija nekih oštrih uglova	kombinovani
139	Vrednosti trigonometrijskih funkcija nekih oštrih uglova	vežbe
140	Važniji trigonometrijski identiteti	kombinovani
141	Važniji trigonometrijski identiteti	vežbe
142	Važniji trigonometrijski identiteti	vežbe
143	Rešavanje pravouglog trougla	kombinovani
144	Rešavanje pravouglog trougla	vežbe
145	Kontrolni zadatak	provera

3.1.1. Realizacija eksperimenta

Ovde izložen plan obrade navedene teme je izveden u Gimnaziji u Bečeju, 27.05.2013. godine, u mađarskom odeljenju I_4.

Učenici pre eksperimenta nisu ništa učili o trigonometrijskim funkcijama, oni prvi put čuju i sam naziv *trigonometrija*. Međutim, učili su o podudarnosti i o sličnosti trouglova, i to znanje će biti potrebno za rešavanje zadataka M-testa.

Prva faza – rešavanje M-testa

Prva faza eksperimenta (rešavanje M-testa) traje oko 20 minuta.

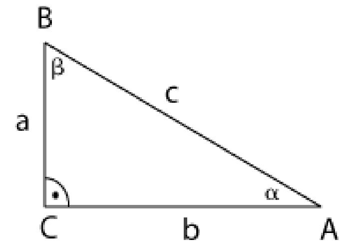
Ciljevi M-testa:

- da se đaci „zagreju“ za temu časa
- da se ispita prag znanja i intuitivne sposobnosti đaka
- ponavljanje već usvojenog znanja
- iznošenje osnovnih novih ideja vezanih za zadatu temu

M-test

Kandidat:______________________

1. Dat je pravougli trougao sa pravim uglom kod temena *C*. (slika 1.)



slika 1.

a) *Sinus* oštrog ugla je po definiciji jednak vrednosti količnika **naspramne katete** i **hipotenuze**.

Odrediti: $sin\alpha =$ ________ $sin\beta =$___________

b) *Kosinus* oštrog ugla je po definiciji jednak vrednosti količnika **nalegle katete** i **hipotenuze**.

Odrediti: $cos\alpha =$_________ $cos\beta =$___________

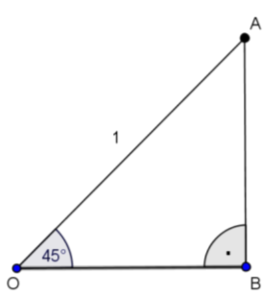
c) *Tangens* oštrog ugla je po definiciji jednak vrednosti količnika **naspramne katete** i **nalegle katete**.

Odrediti: $tg\alpha =$_________ $tg\beta =$___________

d) *Kotangens* oštrog ugla je po definiciji jednak vrednosti količnika **nalegle katete** i **naspramne katete**.

Odrediti: $ctg\alpha =$_________ $ctg\beta =$___________

2. Dat je pravougli trougao *OBA*, tako da je $\measuredangle ABO = 90°$, $\measuredangle AOB = 45°$ i dužina hipotenuze *OA* je 1. (slika 2.)



slika 2.

a) Koji ugao je veći: $\measuredangle AOB$ ili $\measuredangle OAB$? Zaokružiti tačan odgovor.

i. $\measuredangle AOB < \measuredangle OAB$
ii. $\measuredangle AOB > \measuredangle OAB$
iii. $\measuredangle AOB = \measuredangle OAB$

b) Koja kateta je veća: *OB* ili *AB*? Zaokružiti tačan odgovor.

i. $OB = AB$
ii. $OB < AB$
iii. $OB > AB$

c) Koristeći Pitagorinu teoremu odrediti dužinu kateta.

$AB =$________ $OB =$_________

d) Koristeći 1.zadatak odrediti:

$sin\measuredangle AOB =$ _________ $cos\measuredangle AOB =$ __________

3. Dat je jednakostraničan trougao ABC , dužine stranice *a*, tako da je CC' visina iz temena C. (slika 3.)

a) Odrediti:

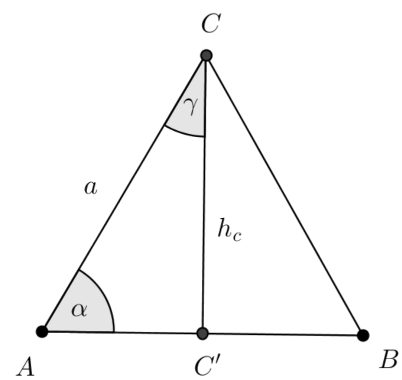
$\alpha =$__________
$\gamma =$__________

b) Izraziti visinu pomoću dužine stranice *a*:

$h_c =$__________

c) Odrediti:

$sin\alpha =$________
$cos\alpha =$________



slika 3.

Analiza zadataka M-testa

Prvi zadatak M-testa pripada nastavnoj jedinici *Trigonometrijske funkcije oštrog ugla*. U zadatku su date definicije trigonometrijskih funkcija oštrog ugla, i slika pravouglog trougla. Učenici imaju zadatak da na osnovu datih definicija i date slike, napišu čemu je jednak $sin\alpha$, $sin\beta$, $cos\alpha$, $cos\beta$ itd. Cilj ovog zadatka je da učenici protumače i usvoje ove definicije uz upotrebu simbola. Da bi tačno rešili ovaj zadatak, učenici moraju znati šta znače pojmovi: količnik, kateta, hipotenuza, naspramna (nalegla) stranica nekog ugla itd. Ovi pojmovi njima nisu nepoznati, učili su ih još u osnovnoj školi.

Drugi i treći zadatak M-testa pripada nastavnoj jedinici *Vrednosti trigonometrijskih funkcija nekih oštrih uglova*. Tačnije, kod drugog zadatka učenici računaju vrednost trigonometrijskih funkcija za ugao od $45°$, a kod trećeg zadatka vrednost trigonometrijskih funkcija za ugao od 60°. Kod drugog zadatka se očekuje da većina učenika daje tačno rešenje na zadatke pod a) i b), slično, kod trećeg zadatka pod a). Pojmovi i osnovne osobine vezane za njih koje učenici već moraju znati su:

- pojam jednakokrakog i jednakostraničnog trougla
- tvrđenje: zbir unutrašnjih uglova u trouglu je 180°
- tvrđenje: uglovi na osnovici jednakokrakog trougla su međusobno jednaki
- tvrđenje: svi unutrašnji uglovi jednakostraničnog trougla su 60°
- tvrđenje: visina jednakostraničnog (jednakokrakog) trougla polovi odgovarajući ugao

Deo pod c) drugog zadatka i deo pod b) trećeg zadatka već zahteva malo više razmišljanja. Učenici trebaju da se sete Pitagorine teoreme, i da to i koriste. Deo pod d) drugog, i deo pod c) trećeg zadatka su najteži zadaci na ovom M-testu. Da bi učenici mogli da reše, morali su tačno uraditi 1. zadatak i 2.c) , odnosno 3.b) zadatak.

Druga faza – izlaganje nastavnika

Ova faza traje oko 45 minuta (eksperiment se radi na dvočasu). Izvođenje nastave se odvija putem rešavanja zadataka M-testa uz potrebna dodatna objašnjenja. Učenike zanima da li su dobili tačna rešenja, i na taj način može da se zadržava zainteresovanost učenika. Međutim, nije dovoljno da nastavnik samo prelazi na zadatke iz M-testa. On upoznaje učenike sa poreklom naziva ove matematičke oblasti – *trigonometrija* (grčke reči *trigonos* (trougao) i *metron* (mera)). Nastavnik uvodi pojmove sinus, kosinus, tangens i kotangens nekog ugla, koji su tzv. *trigonometrijske funkcije* datog ugla, putem rešavanja 1. zadatka M-testa. Na osnovu datih definicija, nastavnik treba da skrene pažnju učenicima na trigonometrijske funkcije komplementnog ugla, tj. da za oštar ugao α važi:

$$sin\alpha = cos\ (90° - \alpha)$$

$$cos\alpha = sin\ (90° - \alpha)$$

$$tg\alpha = ctg\ (90° - \alpha)$$

$$ctg\alpha = tg\ (90° - \alpha)$$

Putem rešavanja 2. i 3. zadatka obrađuju se trigonometrijske funkcije uglova od 45° , 60° i 30° , i to pomoću slika datih na M-testu. Pored toga, nastavnik skreće pažnju i obrazlaže učenicima zašto ne postoji oštar ugao čiji je sinus ili kosinus veći ili jednak 1, tj. da za oštre uglove funkcije *sin* i *cos* uzimaju sve vrednosti iz intervala $(0,1)$. Kao dodatnu informaciju, nastavnik može objasniti kako se mogu uporediti kosinusi, sinusi dva ugla, odnosno kosinus jednog i sinus drugog ugla.

Treća faza – rešavanje E-testa

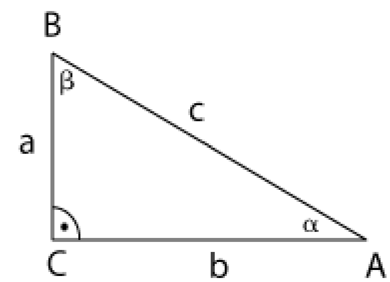
Treća faza eksperimenta je rešavanje E-testa u trajanju od oko 25 minuta. Prvi zadatak predstavlja proveru usvojenih definicija. U drugom zadatku učenici trebaju da se sete da za oštre uglove funkcija *sin* uzima vrednosti iz intervala $(0,1)$. U trećem zadatku oni trebaju uporediti vrednosti datih trigonometrijskih funkcija. U ovom zadatku se očekuje od učenika da koristeći crtež uoče da se sa povećavanjem ugla povećava hipotenuza, a nalegla stranica ostaje fiksne dužine, što znači da je kosinus većeg ugla manji. Takođe, trećim zadatkom proveravamo da li su zapamtili sa časa vezu između trigonometrijskih funkcija uglova α i $90° - \alpha$. U četvrtom zadatku se očekuje od učenika da izračunaju vrednosti trigonometrijskih funkcija za uglove od 45°, 60° i 30°, što je i bila glavna tema časa.

Na sledećoj stranici se nalazi E-test uz pomoć kojeg je eksperiment izveden.

E-test

Kandidat:_______________________

1. Povezati strelicom veličine iz prvog reda sa jednakom vrednosti iz drugog reda:



$sin\alpha \qquad cos\alpha \qquad tg\alpha \qquad ctg\alpha$

$\frac{a}{b} \qquad \frac{b}{a} \qquad \frac{c}{a} \qquad \frac{a}{c} \qquad \frac{c}{b} \qquad \frac{b}{c}$

2. Da li postoji ugao čiji je sinus:

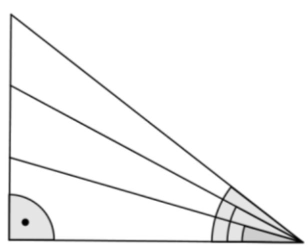
a) $\frac{1}{4}$ DA NE

b) $\frac{5}{3}$ DA NE

c) $\sqrt{2}$ DA NE

d) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ DA NE

3. U kvadratić upisati jedan od znakova $<, >, =$ tako da zapis bude tačan:



a) $cos8° \boxed{} cos26°$

b) $cos70° \boxed{} sin20°$

c) $\sin\ 70° \boxed{} \sin\ 57°$

Obrazložiti:______________________________

4. Popuniti tabelu:

α	$30°$	$45°$	$60°$
$sin\alpha$	$\frac{1}{2}$		
$cos\alpha$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$tg\alpha$			$\sqrt{3}$
$ctg\alpha$			

3.1.2. Rezultati eksperimenta

U razredu ima ukupno 11 devojčica i 8 dečaka. Na dan testiranja jedan dečak je bio odsutan.

- **Rezultati M-testa**

U sledećim tabelama su date vrednosti izražene u procentima koje predstavljaju broj tačnih odgovora u M-testu.

1. zadatak

Zadatak	a	b	c	d
Devojčice	77.27%	81.82%	63.64%	72.73%
Dečaci	71.43%	42.86%	42.86%	42.86%
Ukupno	75%	66.67%	55.56%	61.11%

Tabela 1

2. zadatak

Zadatak	a	b	c	d
Devojčice	90.91%	81.82%	27.27%	36.36%
Dečaci	100%	100%	28.57%	21.43%
Ukupno	94.44%	88.89%	27.78%	25%

Tabela 2

3. zadatak

Zadatak	a	b	c
Devojčice	45.45%	18.18%	15.91%
Dečaci	57.14%	14.29%	7.14%
Ukupno	55.56%	16.67%	12.50%

Tabela 3

Kao što je bilo očekivano, učenici su najbolje uradili 2a) i 2b) zadatak (94.44%, odnosno 88.89%), što znači da su prepoznali i znali osnovne osobine jednakokrakog trougla. Bilo je još očekivanje da će u velikom broju rešiti zadatak 3a), odnosno da će znati osnovne osobine jednakostraničnog trougla, međutim, ovaj zadatak je samo malo više od polovine razreda rešio tačno (55.56%). Sva tri pomenuta zadatka su dečaci bolje uradili od devojčica. I prvi zadatak je odrađen sa slabijim uspehom od očekivanog, ali je interesantno da su ovaj zadatak devojčice mnogo bolje uradile od dečaka. Na primer zadatak 1b) 81.83% od devojčica je tačno rešila, a od dečaka je samo 42.86% upisao tačan odgovor.

Zadaci 2c) i 2d) su bili teži, što se i vidi iz rezultata. Slično, u zadacima 3b) i 3c) su rezultati slabi, ovi zadaci su bili sa najmanjim uspehom rešeni (16.67%, odnosno 12.50%). Verovatno zbog toga, jer je ovaj već bio poslednji zadatak. (Inače, zadaci 3b) i 2c) su jako slični, kod oba zadataka treba da se koristi Pitagorina teorema. Isto tako su i zadaci 3c) i 2d) slični.)

M-test je odeljenje uradilo uspešno u proseku **52.65%**.

- **Rezultati E-testa**

U sledećim tabelama su date vrednosti izražene u procentima koje predstavljaju broj tačnih odgovora u E-testu.

Zadatak	**1. zadatak**			
	$sin\alpha$	$cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
Devojčice	81.82%	54.55%	63.64%	54.55%
Dečaci	85.71%	71.43%	71.43%	57.14%
Ukupno	83.33%	61.11%	66.67%	55.56%

Tabela 4

Zadatak	**2. zadatak**			
	a	**b**	**c**	**d**
Devojčice	72.73%	72.73%	63.64%	63.64%
Dečaci	85.71%	85.71%	71.43%	28.57%
Ukupno	77.78%	77.78%	66.67%	50%

Tabela 5

Zadatak	3. zadatak		
	a	b	c
Devojčice	81.82%	54.55%	63.64%
Dečaci	85.71%	85.71%	85.71%
Ukupno	83.33%	66.67%	72.22%

Tabela 6

Zadatak	4. zadatak								
	$cos30°$	$tg30°$	$ctg30°$	$sin45°$	$tg45°$	$ctg45°$	$sin60°$	$cos60°$	$ctg60°$
Devojčice	18.18%	45.45%	72.73%	63.64%	90.91%	90.91%	27.27%	54.55%	54.55%
Dečaci	57.14%	71.43%	85.71%	85.71%	100%	100%	57.14%	71.43%	71.43%
Ukupno	33.33%	55.56%	77.78%	72.22%	94.44%	94.44%	38.89%	61.11%	61.11%

Tabela 7

Prvi zadatak E-testa predstavlja proveru koliko su učenici zapamtili definicije trigonometrijskih funkcija. Najbolje su zapamtili definiciju sinusa (83.33%), a najveći problem su imali sa definicijom kotangensa oštrog ugla (samo 55.56% je tačno rešio). Većina đaka u razredu je tačno rešila drugi zadatak, što znači da je većina zapamtila da za oštre uglove funkcije *sin* i *cos* uzimaju vrednosti iz intervala $(0,1)$. Problemi su se javili kod zadatka 2d), jer su dobili složeniji izraz sa korenima. Zadatak 2d) su dečaci jako loše uradili (samo 28.57% je tačno rešio, dok kod devojčica ovaj procenat je 63.64%). Zadatak 3a) su i dečaci i devojčice jako dobro uradili, što znači da su znali da uporede kosinuse dva zadata oštra ugla (devojčice: 81.82%, dečaci: 85.71%). Kod upoređivanja sinusa dva ugla su već više grešili, a kod trećeg zadatka najslabije je urađen deo pod b), gde je trebalo uporediti kosinus jednog ugla sa sinusom drugog ugla. Ovde je uspeh devojčica 54.55%, a uspeh dečaka 85.71%. U četvrtom zadatku su rezultati jako različiti. Na primer, uspeh u određivanju $cos30°$ je samo 33.33%, a u određivanju $tg45°$ i $ctg45°$ već 94.44%. Većina učenika je zapamtila osobine trigonometrijskih funkcija komplementnog ugla (znali su da $sin30° = cos60°$ i da $tg60° = ctg30°$).

E-test je odeljenje uradilo uspešno u proseku **67.50%**, to znači bolje od M-testa, što znači da su učenici usvojili definicije i zapamtili osobine trigonometrijskih funkcija, i pokazali sposobnost da primene to znanje kroz zadatke.

3.1.3. Anketiranje

Na kraju dvočasa su učenici dobili anketne listiće, što su anonimno popunili. Važno je da nastavnik naglasi da je anketiranje anonimno, jer će učenici samo u tom slučaju odgovoriti ono što stvarno misle, a ne ono što misle da nastavnik očekuje od njih. Na taj način nastavnik dobija uvid u to koliko takav način održanja nastavnog časa ima prijema kod učenika.

Jedan primer mogućih pitanja na anketiranju:

1. Današnji čas matematike je po tvom mišljenju bio:
   a) veoma dosadan
   b) dosadan
   c) nemam neki stav
   d) interesantan
   e) veoma interesantan
   f) ________________
2. Uporedi ga sa ranijim časovima: a) manje mi se dopada nego inače
   b) kao i inače
   c) interesantnije nego inače
3. Kojom ocenom bi ocenio današnji čas? 1 2 3 4 5
4. Da li si danas nešto novo naučio? DA NE
5. Da li bi voleo da i drugi put imamo takav čas? DA NE

Rezultati anketiranja su dati u sledećim tabelama:

1.pitanje

a	b	c	d	e
0%	0%	27.78%	50%	22.22%

Tabela 8

2.pitanje

a	b	c
11.11%	11.11%	77.78%

Tabela 9

3.pitanje

1	2	3	4	5
0%	5.56%	22.22%	16.67%	55.56%

Tabela 10

4.pitanje

DA	NE
100%	0%

Tabela 11

5.pitanje

DA	NE
88.89%	11.11%

Tabela 12

Na osnovu analiziranja rezultata anketiranja možemo zaključiti da je većini učenika dopao taj način izvođenja nastave. Na pitanje „Da li bi voleo da i drugi put imamo takav čas?" 88.89% od učenika odgovorio sa „Da". Učenicima je čas bio interesantan, i na pitanje „Da li si danas nešto novo naučio?" svi su odgovorili sa „Da".

3.2. Druga tema – Izoperimetrijski problem

3.2.1. Opis izoperimetrijskog problema

Osnovni izoperimetrijski problem se odnosi na određivanje ravne figure najveće moguće površine zadatog perimetra (obima). Blisko je povezan sa tzv. *Didoninim problemom* (prema legendi osnivač i prva kraljica Kartagine) koji traži oblast maksimalne površine među svim oblastima koje su ograničene pravom linijom i krivom zadate dužine sa krajevima na toj pravoj.

Prema legendi, ovaj problem je nastao za vreme osnivanja drevnog grada Kartage na obali Severne Afrike. Feničanka Didona, koja posle smrti roditelja nije mogla podnositi samovolju brata Pigmaliona, je pobegla na obalu Severne Afrike. Tamo se dogovorila sa kraljem Jarbasom da od njega kupi onoliko zemljišta koliko se može obuhvatiti kožom jednog bika. Ona je izrezala kožu na tanke kaiševe, povezala im krajeve i uspela obuhvatiti zemljište na kojem je kasnije izgrađena Kartagina.

Osnovni izoperimetrijski problem se može formulisati na sledeći način:

Između svih zatvorenih krivih linija u ravni, koje imaju isti obim, naći onu koja ograničava najveću površinu.

Sledeći problem je ekvivalentan osnovnom izoperimetrijskom problemu:

Među svim zatvorenim krivama u ravni koje određuju oblast fiksne površine, odrediti krivu (ako postoji) minimalnog perimetra.

Iako se krug javlja kao očigledno rešenje osnovnog izoperimetrijskog problema, dokazati ovu činjenicu je prilično teško. Prvi progres prema rešenju je dao švajcarski matematičar Jakob Štajner [1] 1838 godine. Koristeći geometrijske konstrukcije koje su lake za razumevanje on je dokazao da ako rešenje postoji, tada to mora biti krug.

3.2.2. Osnovna izoperimetrijska teorema

Osnovna izoperimetrijska teorema rešava sledeći problem:

1. *Među svim ograničenim dvodimenzionim figurama perimetra* 1 *odrediti onu koja ima najveću površinu.*

[1] Jacob Steiner (1796 – 1863)

2. *Odrediti onu prostu zatvorenu krivu minimalnog obima koja određuje figure površine* 1.

<u>Dokaz ekvivalentnosti ova dva problema:</u>

Dokazujemo prvo da se rešavanjem prvog problema dobija rešenje i drugog problema.

Označimo sa $S(\Phi)$ površinu, a sa $p(\Phi)$ perimetar figure Φ. Odnos površine i kvadrata perimetra za slične figure je konstantan (videti 2. zadatak M-testa na temi Izoperimetrijski problem), tj. važi:

$$\frac{S(\Phi_1)}{p^2(\Phi_1)} = \frac{S(\Phi_2)}{p^2(\Phi_2)}, \quad za\ \Phi_1 \sim \Phi_2.$$

Neka su dati skupovi:

$\mathcal{F} = \{\Psi |\ p(\Psi) = 1\}$ i $\mathcal{F}' = \{\Psi' |\ S(\Psi') = 1\}$.

Pretpostavimo da postoji figura $\Phi \in \mathcal{F}$ čija je površina veća ili jednaka površini bilo koje druge figure perimetra 1, tj. da je Φ rešenje prvog problema. Pokažimo da je figura Φ' koja je slična figuri Φ i ima perimetar $\frac{1}{\sqrt{S(\Phi)}}$ rešenje drugog problema.

$\Phi' \in \mathcal{F}'$, očigledno. Treba još dokazati da je perimetar figure Φ' manji od perimetra bilo koje druge figure iz $\mathcal{F}'$.

Neka je φ' proizvoljna figura površine 1, a φ homotetična slika od φ', gde je koeficijent homotetije $\frac{1}{p(\varphi')}$. Tada $\varphi \in \mathcal{F}$.

Imamo:

$$\frac{1}{p^2(\Phi')} = \frac{S(\Phi')}{p^2(\Phi')} = \frac{S(\Phi)}{p^2(\Phi)} = \frac{S(\Phi)}{1} \geq \frac{S(\varphi)}{1} = \frac{S(\varphi)}{p^2(\varphi)} = \frac{S(\varphi')}{p^2(\varphi')} = \frac{1}{p^2(\varphi')}$$

Dakle,

$$p(\Phi') \leq p(\varphi'), \text{ za sve figure } \varphi' \text{ za koje je } S(\varphi') = 1,$$

što znači da je Φ' zaista rešenje drugog problema.

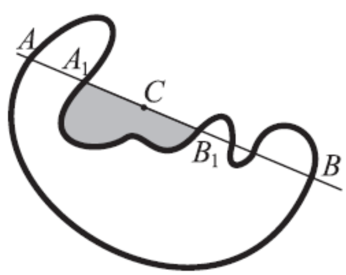
Slično se može pokazati da ako bi neka figura Φ' bila rešenje drugog problema, tada bi figura slična njoj, ali jediničnog perimetra bila tražena figura prvog problema. ■

Pokazujemo sada sledeće tvrđenje:

Teorema 1. *Ako postoji figura fiksnog perimetra* p *a maksimalne površine, ona mora biti konveksna.*

<u>Dokaz</u>

Neka je Φ proizvoljna nekonveksna figura perimetra *p*. Zbog nekonveksnosti, postoje kolinearne tačke A, B i C takve da se A i B nalaze na rubu figure Φ, a C u spoljašnjosti figure Φ, i važi raspored tačaka $A - C - B$. Označimo sa A_1 tačku preseka ruba figure Φ sa polupravom $pp[C, A)$ koja je najbliža tački C, i sa B_1 tačku preseka ruba figure Φ sa polupravom $pp[C, B)$ koja je najbliža tački C (*Slika 4*). Tada cela otvorena duž $]A_1B_1[$ pripada spoljašnjosti figure Φ i deli je na dve oblasti od kojih je tačno jedna ograničena. Ovu ograničenu oblast određuje duž $[A_1B_1]$ i onaj deo ruba figure Φ koji je određen tačkama A_1 i B_1. Ovaj deo ruba ćemo označiti sa *l*. Ako luk l zamenimo sa duži $[A_1B_1]$, umesto figure Φ dobijamo drugu figuru. Ova nova figura ima manji perimetar a veću površinu od figure Φ. Homotetijom možemo ovu novu figuru „uvećati“ , i na taj način dobiti sličnu figuru perimetra *p*. Ali tada će se površina još uvećati, što znači da polazna figura Φ ne može biti figura perimetra *p* sa maksimalnom površinom.



Slika 4 ■

Štajnerov pokušaj

Štajner je pokušao da reši osnovni izoperimetrijski problem, i dao dokaz sledećeg tvrđenja:

Teorema 2. *Za svaku konveksnu figuru koja nije krug postoji druga figura istog perimetra a veće površine.*

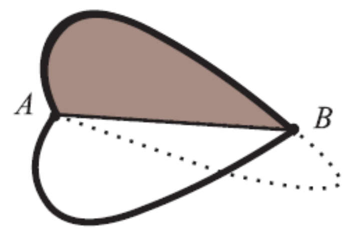
Smatrao je da iz ovog tvrđenja direktno sledi da je rešenje izoperimetrijskog problema krug. Međutim, ovo tvrđenje samo sugeriše rešenje izoperimetrijskog problema, a ne daje dokaz za egzistenciju figure datog perimetra a maksimalne površine.

Dokaz

Neka je data konveksna figura Φ (koja nije krug) i neka tačke A i B polove rub date figure. Tada tetiva $[AB]$ deli figuru na dva dela, koje su površine S_1 i S_2.

1. slučaj: $S_1 > S_2$

Veći deo figure Φ, tj. deo površine S_1 preslikamo osnom simetrijom u odnosu na osu $p(A,B)$. Ako manji deo figure Φ zamenjujemo ovom osno simetričnom slikom, dobijamo figuru istog perimetra, ali veće površine od polazne (*Slika 5*), što je i trebalo dokazati.



Slika 5

Analogno se dokazuje za slučaj $S_2 > S_1$.

2. slučaj: $S_1 = S_2$

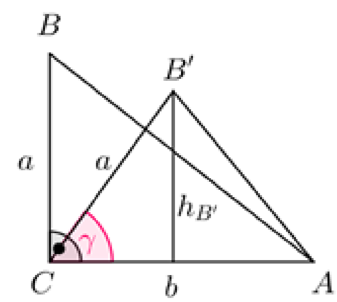
Za dokaz je potrebno prvo dokazati pomoćno tvrđenje:

- *Među svim trouglovima sa zadatim dužinama dve stranice najveću površinu ima onaj kod koga su te stranice ortogonalne.*

Dokaz: *Neka je dat trougao ABC, $BC = a$ i $AC = b$, i važi: $a \perp b$. Neka je $AB'C$ trougao za koji važi: $B'C = a$ i $B' \neq B$ (Slika 6).*

Tada za površinu trougla ABC važi:

$$S(\triangle ABC) = \frac{ab}{2} \geq \frac{a \cdot sin\gamma \cdot b}{2} = \frac{h_{B'} \cdot b}{2} = S(\triangle AB'C)$$



■

Slika 6

Sada se može nastaviti dokaz Teoreme 2. za 2. slučaj.

Figura Φ nije krug, što znači da je bar jedan od dobijenih delova figure različit od polukruga. Sledi da postoji tačka P na rubu figure Φ takva da važi: $\angle APB \neq 90°$. Duži $[AP]$ i $[PB]$ dele ovu površinu (deo polazne figure površine $S_1 = S_2$) na tri dela: trougao APB i dva odsečka koji odgovaraju tetivama $[AP]$ i $[PB]$. Formirajmo sada novu figuru koja se sastoji od pravouglog trougla $A'P'B'$ sa pravim uglom kod temena P' i stranicama $[A'P'] \cong [AP]$ i $[B'P'] \cong [BP]$, i od dva odsečka koji su podudarni odsečcima koji odgovaraju tetivama $[AP]$ i $[PB]$. Površina ove figure je veća od S_1, jer je trougao $A'P'B'$ pravougli, pa je njegova površina veća od površine trougla APB. Ako dobijenu figuru spojimo sa njenom osno simetričnom slikom u odnosu na osu $p(A',B')$, dobijamo figuru koja ima isti perimetar kao figura Φ, ali veću površinu. ■

Kao što smo već rekli, ovo tvrđenje ne rešava izoperimetrijski problem, jer ne daje dokaz za postojanje figure datog perimetra i maksimalne površine. Pitanje egzistencije takve figure jeste važno, što se vidi iz sledećeg primera:

Primer 1. *Među svim konveksnim figurama perimetra manjeg od* 1 *pronaći onu koja ima najveću površinu.*

Dokazujemo da takva figura ne postoji. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji tražena figura Φ. Tada je njen perimetar jednak nekoj vrednosti $1-\delta$, gde je $\delta \in (0,1)$. Homotetijom koeficijenta $\frac{1-\frac{\delta}{2}}{1-\delta}$ dobijamo figuru sličnu figuri Φ, a perimetra $1-\frac{\delta}{2}$. Ova nova figura tada ima veću površinu od figure Φ, ali je i njen perimetar manji od 1. Ovo daje kontradikciju, jer smo pretpostavili da figura Φ ima najveću površinu među svim konveksnim figurama perimetra manjeg od 1.

Dakle, Štajnerov pokušaj nije dovoljan za rešavanje izoperimetrijskog problema. Problem možemo rešiti na drugi način, koji ne zahteva dokaz egzistencije figure datog perimetra a maksimalne površine.

Teorema 3. (Osnovna izoperimetrijska teorema) *Krug ima veću površinu od bilo koje druge ograničene dvodimenzione figure istog perimetra.*

Dokaz

1. slučaj – za nekonveksne figure

Prvo dokazujemo da konveksni pokrivač nekonveksne figure (tj. najmanji konveksni skup koji sadrži datu nekonveksnu figuru) konveksna figura manjeg perimetra a veće površine od posmatrane.

Neka je data nekonveksna figura Φ. Deo ruba konveksnog pokrivača figure Φ koji ne pripada rubu Φ se može predstaviti kao unija otvorenih duži čije krajnje tačke pripadaju rubu figure Φ. Svakoj takvoj duži $]PQ[$ pridružujemo luk $l]PQ[$ koji je deo ruba figure Φ sa krajnjim tačkama u P i Q. Zamenjujući luk $l]PQ[$ sa duži $]PQ[$ od figure Φ dobijamo novu figuru koja ima veću površinu a manji perimetar od Φ. Ako se svi pridruženi lukovi zamene odgovarajućim dužima, od figure Φ dobijamo njegov konveksni pokrivač, koji ima manji perimetar a veću površinu od Φ.

Sledi, da je odnos površine i kvadrata perimetra nekonveksne figure manji od odnosa površine i kvadrata perimetra njegovog konveksnog pokrivača. Dakle, dovoljno je dokazati teoremu za konveksne figure.

2. slučaj – za konveksne figure

Za dokaz je potrebna sledeća lema:

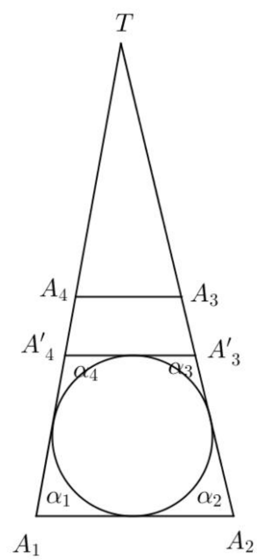
- ***Lema 1.*** *Među svim konveksnim n-touglovima* $(n \geq 4)$ *zadatog perimetra i sa zadatim veličinama uglova* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(0 < \alpha_i < \pi,\ za\ i = 1, \ldots, n;\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\pi)$, *datim u cikličnom redu, tangentni i samo tangentni ima najveću površinu.*

Dokaz leme

Dokaz izvodimo indukcijom po *n*.

Za $n = 4$ tražimo četvorougao zadatih uglova kod koga je odnos površine i kvadrata perimetra maksimalan. U klasi paralelograma tražena figura je romb (videti Zadatak 16., poglavlja 2.10 reference [1]), što je tangentni četvorougao, pa je tvrđenje leme u ovom slučaju ispunjeno.

Dokazujemo sada tvrđenje za četvorouglove kod kojih dati uglovi nisu takvi da je zbir svaka dva susedna jednak π. Neka je $A_1A_2A_3A_4$ proizvoljan četvorougao sa datom osobinom koji nije tangentan. Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da za uglove α_3 i α_4 važi: $\alpha_3 + \alpha_4 > \pi$. Neka je $A_1A_2A_3'A_4'$ tangentni četvorougao sa zadatim uglovima α_1, α_2, $\alpha_3\ i\ \alpha_4$ (ugao α_i odgovara temenu A_i, odnosno A_i', $i = 1, \ldots, 4$). Iz $\alpha_3 + \alpha_4 > \pi$ sledi da se prave $p(A_1, A_4) \equiv p(A_1, A_4')$ i $p(A_2, A_3) \equiv p(A_2, A_3')$ seku u nekoj tački *T* (*Slika 7*).



Slika 7

Dokazujemo sledeću nejednakost:

$$\frac{S(A_1A_2A_3'A_4')}{p^2(A_1A_2A_3'A_4')} > \frac{S(A_1A_2A_3A_4)}{p^2(A_1A_2A_3A_4)} \tag{1}$$

Neka je

$$l \stackrel{\text{def}}{=} d(T,A_4') + d(T,A_3') - d(A_3',A_4') \quad \text{i} \quad k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d(A_4,A_3)}{d(A_4',A_3')} \ (\neq 1).$$ [2]

Zbog sličnosti trouglova A_3A_4T i $A_3'A_4'T$ važi:

$$d(T,A_4) + d(T,A_3) - d(A_3,A_4) = kl$$

i

$$S(A_3A_4T) = k^2 S(A_3'A_4'T)$$

Nejednakost (1) je tada ekvivalentna sa

$$\frac{S(A_1A_2T) - S(A_3'A_4'T)}{(p(A_1A_2T) - l)^2} > \frac{S(A_1A_2T) - k^2 S(A_3'A_4'T)}{(p(A_1A_2T) - kl)^2}$$

Znamo da važi: $S(A_1A_2T) = \frac{1}{2} rp(A_1A_2T)$ i $S(A_3'A_4'T) = \frac{1}{2} rl$, gde je r poluprečnik upisane kružnice u trouglu A_1A_2T. Uvrstanjem ovog u prethodnu nejednakost, posle skraćivanja dobijamo:

$$(k-1)^2 l\, p(A_1A_2T) > 0,$$

što je tačno, pa i nejednakost (1) koja je ekvivalentna ovoj takođe tačna.

Dakle, dokazivali smo lemu za slučaj $n = 4$.

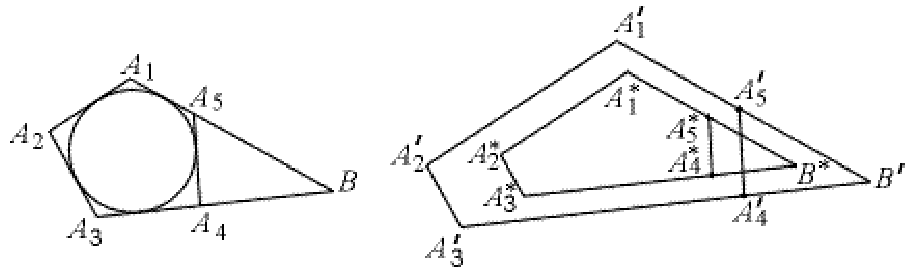
Pretpostavimo sada da tvrđenje leme važi za slučaj $(n-1)$-tougla i dokazujemo za slučaj *n*- tougla.

Neka je $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ tangentni *n*-tougao sa uglovima α_1,α_2,...,α_n redom kod temena $A_1, A_2, \dots, A_n$ i sa poluprečnikom upisane kružnice *r*. Neka je $A_1'A_2' \dots A_{n-1}'A_n'$ proizvoljan *n*-tougao sa uglovima α_1,α_2,...,α_n redom kod temena $A_1', A_2', \dots, A_n'$ koji nije sličan prvom (*Slika 8*). Dokazujemo da važi nejednakost:

$$\frac{S(A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n)}{p^2(A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n)} > \frac{S(A_1'\, A_2' \dots A_{n-1}'A_n')}{p^2(A_1'A_2' \dots A_{n-1}'A_n')} \ . \qquad (2)$$

[2] $d(X,Y)$ predstavlja oznaku za rastojanje između tačaka X i Y

Među uglovima α_1,α_2,...,α_n postoje dva susedna čiji je zbir veći od π. Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da su to uglovi α_{n-1} i α_n. Iz $\alpha_{n-1} + \alpha_n > \pi$ sledi da se poluprave $pp[A_1, A_n)$ i $pp[A_{n-2}, A_{n-1})$, odnosno poluprave $pp[A'_1, A'_n)$ i $pp[A'_{n-2}, A'_{n-1})$ seku u nekim tačkama B i B', redom. Dobijeni $(n-1)$-touglovi $A_1A_2 \dots A_{n-2}B$ i $A'_1A'_2 \dots A'_{n-2}B'$ su dva konveksna $(n-1)$-tougla sa podudarnim odgovarajućim uglovima, pri čemu je prvi tangentan.



Slika 8

Uvedimo još jedan n-tougao $A^*_1A^*_2 \dots A^*_{n-1}A^*_n$ (odnosno $(n-1)$-tougao $A^*_1A^*_2 \dots A^*_{n-2}B^*$) sličan n-touglu $A'_1A'_2 \dots A'_{n-1}A'_n$ (odnosno $(n-1)$-touglu $A'_1A'_2 \dots A'_{n-2}B'$) takav da važi:

$$p(A^*_1A^*_2 \dots A^*_{n-2}B^*) = p(A_1A_2 \dots A_{n-2}B)$$

$(n-1)$-touglovi $A^*_1A^*_2 \dots A^*_{n-2}B^*$ i $A'_1A'_2 \dots A'_{n-2}B'$ su slični, pa na osnovu induktivne pretpostavke sledi:

$$\frac{S(A_1A_2 \dots A_{n-2}B)}{p^2(A_1A_2 \dots A_{n-2}B)} \geq \frac{S(A'_1\,A'_2 \dots A'_{n-2}B')}{p^2(A'_1A'_2 \dots A'_{n-2}B')} = \frac{S(A^*_1\,A^*_2 \dots A^*_{n-2}B^*)}{p^2(A^*_1A^*_2 \dots A^*_{n-2}B^*)}$$

Zbog $p(A^*_1A^*_2 \dots A^*_{n-2}B^*) = p(A_1A_2 \dots A_{n-2}B)$ imamo:

$$S(A_1A_2 \dots A_{n-2}B) \geq S(A^*_1\,A^*_2 \dots A^*_{n-2}B^*)$$

što znači da postoji broj $q \in (0,1]$ takav da važi

$$S(A^*_1\,A^*_2 \dots A^*_{n-2}B^*) = qS(A_1A_2 \dots A_{n-2}B)$$

Primetimo da su trouglovi BA_nA_{n-1} i $B^*A^*_nA^*_{n-1}$ slični, sa koeficijentom sličnosti

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d(A^*_n, A^*_{n-1})}{d(A_n, A_{n-1})}$$

Neka je $l \stackrel{\text{def}}{=} d(B, A_n) + d(B, A_{n-1}) - d(A_n, A_{n-1})$.

Tada važi:

$$kl = d(A^*_n, B^*) + d(A^*_{n-1}, B^*) - d(A^*_n, A^*_{n-1})$$

i

$$S(B^* A_n^* A_{n-1}^*) = k^2 S(BA_n A_{n-1})$$

Iz sličnosti n-touglova $A_1^* A_2^* \dots A_{n-1}^* A_n^*$ i $A_1' A_2' \dots A_{n-1}' A_n'$ sledi da je izraz (2) ekvivalentan sa

$$\frac{S(A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n)}{p^2(A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n)} > \frac{S(A_1^*\, A_2^* \dots A_{n-2}^* A_n^*)}{p^2(A_1^* A_2^* \dots A_{n-2}^* A_n^*)}$$

što je opet ekvivalentan sa

$$\frac{S(A_1 A_2 \dots A_{n-2} B) - S(BA_n A_{n-1})}{(p(A_1 A_2 \dots A_{n-2} B) - l)^2} > \frac{qS(A_1 A_2 \dots A_{n-2} B) - k^2 S(BA_n A_{n-1})}{(p(A_1 A_2 \dots A_{n-2} B) - kl)^2}$$

Iskoristimo sada činjenicu da je površina tangentnog n-tougla jednaka polovini proizvoda perimetra i poluprečnika upisane kružnice, kao i vezu između površine trougla i poluprečnika spolja upisane kružnice, pa dobijamo:

$$\frac{\frac{1}{2} rp(A_1 A_2 \dots A_{n-2} B) - \frac{1}{2} rl}{(p(A_1 A_2 \dots A_{n-2} B) - l)^2} > \frac{\frac{1}{2} qrp(A_1 A_2 \dots A_{n-2} B) - \frac{1}{2} k^2 rl}{(p(A_1 A_2 \dots A_{n-2} B) - kl)^2}$$

Sređivanjem, ova nejednakost se svodi na:

$$(1-q)(p(A_1 A_2 \dots A_{n-2} B) - l)p(A_1 A_2 \dots A_{n-2} B) + (1-k)^2 lp(A_1 A_2 \dots A_{n-2} B) > 0$$

Kako je $(1-k)^2 \geq 0$ i $p(A_1 A_2 \dots A_{n-2} B) > l$, to je leva strana poslednje nejednakosti nenegativan broj. Dokažimo da ona ne može biti jednaka nuli.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je ova vrednost jednaka nuli. Tada $q = k = 1$. Iz $q = 1$ sledi da su oba $(n-1)$-tougla $A_1 A_2 \dots A_{n-2} B$ i $A_1^*\, A_2^* \dots A_{n-2}^* B^*$ tangentna, a kako su istog perimetra, to moraju biti i podudarni. Međutim, kako n-touglovi $A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$ i $A_1^*\, A_2^* \dots A_{n-2}^* A_n^*$ nisu slični, pa time ni međusobno podudarni, sledi da ni trouglovi $BA_n A_{n-1}$ i $B^* A_n^* A_{n-1}^*$ nisu podudarni. Sledi, $k \neq 1$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom. Dakle, leva strana poslednje nejednakosti je uvek veća od 0. Zbog tačnosti poslednje nejednakosti je izraz (2) tačan, zbog ekvivalentnosti ova dva izraza. ■

Sada možemo nastaviti dokaz osnovne izoperimetrijske teoreme.

Ako sa $\mathcal{D}$ označimo krug proizvoljnog poluprečnika, a sa Φ proizvoljnu ograničenu konveksnu figuru različitu od kruga, treba dokazati nejednakost

$$\frac{S(\mathcal{D})}{p^2(\mathcal{D})} > \frac{S(\Phi)}{p^2(\Phi)}$$

Neka je $\{\Pi_n^{\mathcal{D}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz poligona opisanih oko kruga $\mathcal{D}$ formiranih tako da svi spoljašnji uglovi poligona $\Pi_n^{\mathcal{D}}$ teže nuli, kad $n \to \infty$. Za svaki n-tougao $\Pi_n^{\mathcal{D}} \equiv A_1^n A_2^n \dots A_n^n$, $n \in \mathbb{N}$, formiramo poligon Π_n^{Φ} opisan oko figure Φ , dobijen pomoću paralelnih pravih orijentisanih pravaca redom vektora $\overrightarrow{A_1^n A_2^n}$, $\overrightarrow{A_2^n A_3^n}$, ..., $\overrightarrow{A_{n-1}^n A_n^n}$, $\overrightarrow{A_n^n A_1^n}$. Na ovaj način dobijamo niz poligona $\{\Pi_n^{\Phi}\}_{n\in\mathbb{N}}$ opisanih oko figure Φ, pri čemu svaki Π_n^{Φ} ima iste vrednosti za uglove kao i $\Pi_n^{\mathcal{D}}$. Na osnovu Leme 1 imamo:

$$\frac{S(\Pi_n^{\mathcal{D}})}{p^2(\Pi_n^{\mathcal{D}})} \geq \frac{S(\Pi_n^{\Phi})}{p^2(\Pi_n^{\Phi})}, \text{za sve } n \in \mathbb{N}$$

Kada $n \to \infty$ dobijamo

$$\frac{S(\mathcal{D})}{p^2(\mathcal{D})} = \lim_{n\to\infty} \frac{S(\Pi_n^{\mathcal{D}})}{p^2(\Pi_n^{\mathcal{D}})} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{S(\Pi_n^{\Phi})}{p^2(\Pi_n^{\Phi})} = \frac{S(\Phi)}{p^2(\Phi)}$$

Da jednakost ne može da važi sledi iz Teoreme 2. ■

Sledi jedan noviji dokaz [5] osnovne izoperimetrijske teoreme.

Teorema 4. *Za svaki konveksni mnogougao* Π *važi* $p^2(\Pi) \geq 4\pi S(\Pi)$, *gde je sa* $p(\Pi)$ *označen perimetar, a sa* $S(\Pi)$ *površina mnogougla* Π.

Dokaz

Neka je $\Pi \equiv A_1 A_2 \dots A_n$ konveksan n-tougao, $n \in \mathbb{N}$. Neka je M tačka na rubu n-tougla takva da važi:

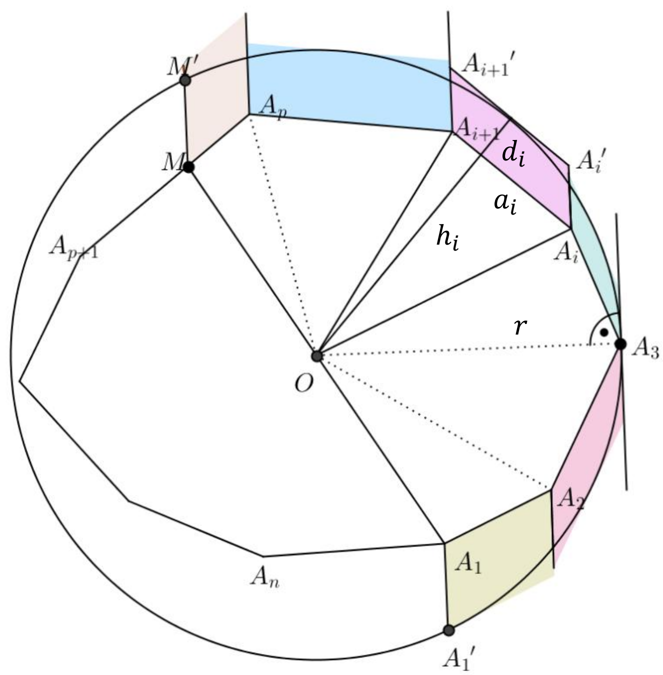
1.) $d(A_1A_2) + d(A_2A_3) + \cdots + d(A_pM) = \frac{P(\Pi)}{2}$
2.) $S(A_1A_2 \dots A_pM) \geq \frac{S(\Pi)}{2}$

Neka je tačka O središte duži MA_1. Posmatrajmo najudaljeniju tačku A_j, $j \in \{1,2,\dots,n\}$, od tačke O (na *Slici 9* tačka A_3) i označimo njeno rastojanje od tačke O sa r. Povlačimo tangentu u tački A_j na kružnicu sa centrom u O i poluprečnika r. Označimo sa A_1' presek kružnice i normale na OA_j iz tačke A_1 (onu presečnu tačku koja se nalazi u istoj poluravni određenoj sa $p(O, A_j)$ kao i tačka A_1) i sa M' presek kružnice i normale na OA_j iz tačke M (onu presečnu tačku koja se nalazi u istoj poluravni određenoj sa $p(O, A_j)$ kao i tačka M). Tada važi: $A_1A_1' \cong MM'$, pa je površina dela kruga $A_1A_1'A_3M'MOA_1$ jednaka polovini površini celog kruga, tj.

$$S(A_1A_1'A_jM'MOA_1) = \frac{1}{2}\pi r^2$$

U spoljašnjosti poligona $A_1A_2 \dots A_pM$ konstruišemo paralelograme za koje važi da im je jedna stranica $a_i = A_iA_{i+1}$, za $i = 1,2,\dots,p-1$, odnosno $a_i = A_iM$, naspramna stranica je deo tangente na kružnicu, a ostale dve stranice su paralelne sa tangentom koja dodiruje kružnicu u tački A_j (*Slika 9*).

Neka je sa h_i označena visina trougla OA_iA_{i+1} , a sa d_i visina paralelograma $A_iA_i'A_{i+1}'A_{i+1}$. Tada važi: $r = h_i + d_i$.



Slika 9

Označimo sa S_1 površinu poligona $A_1A_2 \dots A_pM$, što je jednako zbiru površina trouglova $OA_1A_2, OA_2A_3, \dots, OA_pM$, tj.

$$S_1 = S(A_1A_2 \dots A_pM) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} a_ih_i$$

Označimo sa S_2 zbir površina paralelograma. Tada važi:

$$S_2 = \sum_{i=1}^{p} a_id_i = \sum_{i=1}^{p} a_i(r-h_i) = r\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=1}^{p} a_ih_i = r\frac{p(\Pi)}{2} - 2S_1$$

Pošto $S_1 + S_2 \geq S\big(A_1 A_1' A_j M' M O A_1\big) = \frac{1}{2}\pi r^2$, sledi

$$r\frac{p(\Pi)}{2} - S_1 \geq \frac{1}{2}\pi r^2$$

što je ekvivalentno sa

$$rp(\Pi) - 2S_1 \geq \pi r^2$$

tj. sa

$$r^2\pi - rp(\Pi)\frac{2\pi}{2\pi} + 2S_1 \pm \frac{p^2(\Pi)}{4\pi} \leq 0$$

Dobijamo:

$$\pi\left(r - \frac{p(\Pi)}{2\pi}\right)^2 - \left(\frac{p^2(\Pi)}{4\pi} - 2S_1\right) \leq 0$$

Stoga sledi: $p^2(\Pi) \geq 4\pi \cdot 2S_1 \geq 4\pi S(\Pi)$, što je i trebalo dokazati. ■

Ako sa Φ označimo proizvoljnu ograničenu dvodimenzionu figuru, onda važi:

$$\frac{S(\Phi)}{p^2(\Phi)} = \lim_{n\to\infty}\frac{S(\Pi_n^{\Phi})}{p^2(\Pi_n^{\Phi})}$$

gde je $\{\Pi_n^{\Phi}\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz poligona upisanih u rub figure Φ. Tada na osnovu prethodne teoreme sledi:

$$\frac{S(\Phi)}{p^2(\Phi)} \leq \frac{1}{4\pi}$$

odnosno

$$p^2(\Phi) \geq 4\pi S(\Phi)$$

što znači da Teorema 4 važi ne samo za poligone nego i za bilo koju ograničenu dvodimenzionu figuru. Dakle, prethodna teorema daje dokaz i za osnovnu izoperimetrijsku teoremu, jer za proizvoljnu ograničenu dvodimenzionu figuru Φ važi:

$$\frac{S(\Phi)}{p^2(\Phi)} \leq \frac{1}{4\pi} = \frac{r^2\pi}{(2r\pi)^2} = \frac{S(\mathcal{D})}{p^2(\mathcal{D})}$$

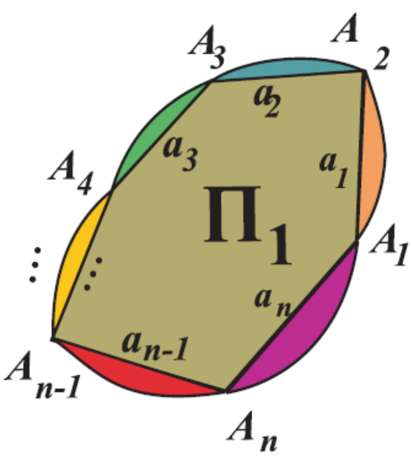
gde je $\mathcal{D}$ krug poluprečnika r.

3.2.3. Teoreme o tetivnim poligonima

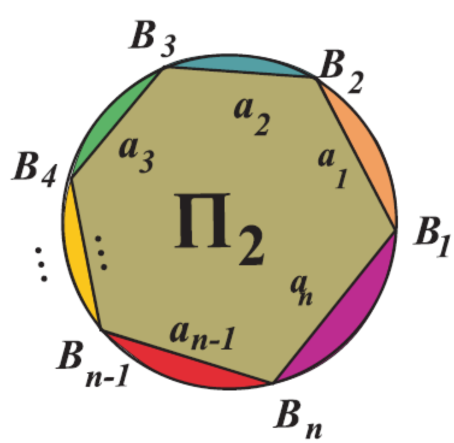
Teorema 5. Tetivni *n-tougao sa stranicama dužina* $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$, *ima veću površinu od proizvoljnog n-tougla čije su stranice takođe dužina* $a_1, a_2, \dots, a_n$.

__Dokaz__

Neka je $\Pi_1 \equiv A_1 A_2 \dots A_n$ proizvoljan n-tougao sa stranicama dužina $a_1 = d(A_1, A_2), a_2 = d(A_2, A_3), \dots, a_n = d(A_n, A_1)$,$n \in \mathbb{N}$, i neka je $\Pi_2 \equiv B_1 B_2 \dots B_n$ tetivni n-tougao sa stranicama dužina $a_1, a_2, \dots, a_n$ tako da važi $d(B_1, B_2) = a_1, d(B_2, B_3) = a_2, \dots, d(B_n, B_1) = a_n$ (*Slika 11*). Π_2 je tetivan, pa možemo opisati kružnicu oko njega. Sa O_i označavamo odsečak koji obrazuju tetiva a_i i manji kružni luk koji odgovara tetivi a_i , $i = 1,2, \dots n$. Sada n-touglu Π_1 možemo „docrtati“ odsečke O_i' koji su podudarni odsečcima O_i, redom, tako da stranici dužine a_i odgovara odsečak O_i' (*Slika 10*).



Slika 10



Slika 11

Dobijena figura je istog perimetra kao kružnica opisana oko Π_2, pa na osnovu osnovne izoperimetrijske teoreme sledi da ima manju površinu od kruga. Pošto su odsečci O_i' i O_i, $i = 1,2, \dots n$, podudarni, dakle imaju jednake površine, sledi da n-tougao Π_1 ima manju površinu od Π_2. ■

Teorema 6. *Za svaki poligon sa zadatim stranicama dužina* $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$ *postoji tetivni poligon sa istim nizom dužina svojih stranica.*

Dokaz

Neka je dat poligon sa stranicama dužina $a_1, a_2, \dots, a_n$, datim u cikličnom redu pojavljivanja, koji nije tetivan.

Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da $a_1 = \max_{1 \le i \le n} a_i$. Na kružnici poluprečnika $r > \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ označimo dve dijametralno suprotne tačke A i A_0. Na svakom od dva luka koja su određena sa ove dve tačke, označimo po jedan niz tačaka: $A_2, A_3, \dots, A_n$ na jednom luku i $A_2', A_3', \dots, A_n'$ na drugom, datim u smeru kretanja od tačke A ka tački A_0, pri čemu je zadovoljeno $d(A, A_2) = d(A, A_2') = a_2, d(A_2, A_3) = d(A_2', A_3') = a_3, \dots, d(A_{n-1}, A_n) = d(A_{n-1}', A_n') = a_n$. Označimo sa A_1 tačku sa onog luka kojem pripadaju tačke $A_2, A_3, \dots, A_n$ i za koju važi $d(A, A_1) = a_1$. Za dovoljno veliko r tačka A_1 se nalazi na onom luku kružnice sa krajnjim tačkama A i A_n na kojem se nalaze i tačke $A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$. Ako sada neprekidno smanjujemo poluprečnik r kružnice, u jednom momentu će doći do poklapanja tačke A_1 sa A_n ili A_n', pa tako dobijamo tetivni poligon sa istim nizom dužina stranica kao i polazni poligon.

Teorema 7. *Neka je* Π_1 *tetivni n-tougao perimetra p sa stranicama dužina* $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$, *koje su date u cikličnom redu , pri čemu je zadovoljeno* $a_1 < \frac{p}{n} < a_n$. *Tada postoji tetivni n-tougao* Π_2 *istog perimetra a koji ima bar za jedan veći broj stranica dužina* $\frac{p}{n}$.

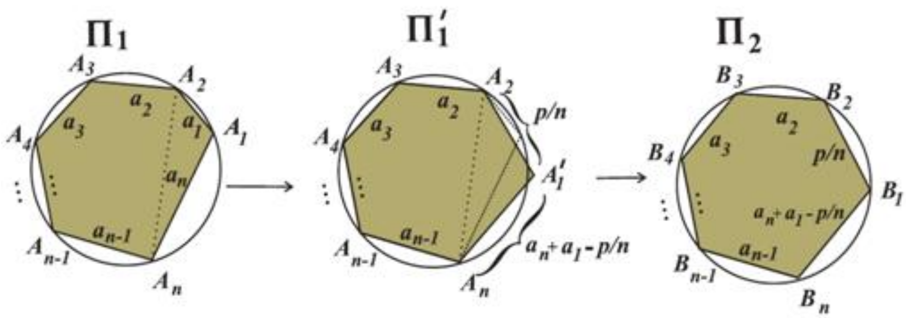
Dokaz

Neka je $\Pi_1 \equiv A_1 A_2 \dots A_n$ tetivan n-tougao sa stranicama dužina $a_1 = d(A_1, A_2), a_2 = d(A_2, A_3), \dots, a_n = d(A_n, A_1)$, $n \in \mathbb{N}$. Od Π_1 formiramo novi poligon Π_1' (koji ne mora biti tetivan) na sledeći način: teme A_1 zamenimo sa novim temenom A_1' tako da važi

$$d(A_1', A_2) = \frac{p}{n} \ \text{ i } \ d(A_1', A_n) = a_1 + a_n - \frac{p}{n}$$

Tako se perimetar poligona ne menja, tj. $p(\Pi_1) = p(\Pi_1')$.

Na osnovu prethodnog tvrđenja postoji tetivni poligon Π_2 sa stranicama dužina $\frac{p}{n}, a_2, \dots a_{n-1}, a_1 + a_n - \frac{p}{n}$, to u cikličnom redu. Sledi da je Π_2 traženi tetivni n-tougao, jer je istog perimetra kao i Π_1 i ima za jedan veći broj stranica dužina $\frac{p}{n}$.



Slika 12

Može se još dokazati da poligon Π_2 ima veću površinu od poligona Π_1, tj. da važi

$$S(\Pi_2) > S(\Pi_1)$$

Da je $S(\Pi_2) \geq S(\Pi_1')$, sledi iz činjenice da je Π_2 tetivni poligon sa istim nizom dužina stranica kao i Π_1'.

Treba još dokazati da $S(\Pi_1') > S(\Pi_1)$.

Prvo dokazujemo sledeću lemu:

- <u>**Lema 2**</u>: *Ako dva trougla sa zajedničkom stranicom imaju isti perimetar, tada veću površinu ima onaj kod koga je razlika dužina preostale dve stranice manja.*

<u>**Dokaz leme**</u>

Neka su dati trouglovi ABC i $A'BC$, sa zajedničkom stranicom $BC = a$, i istog perimetra, i neka važi $S(ABC) \geq S(A'BC)$. Za trouglove ABC i $A'BC$ postoje jednoznačno određeni brojevi $h \geq 0$ i $k \geq 0$ tako da vrednosti a, $b + h$ i $b - h$ predstavljaju dužine stranica trougla ABC, a vrednosti a, $b + k$ i $b - k$ predstavljaju dužine stranica trougla $A'BC$.

Dokazujemo da $(b + h) - (b - h) \leq (b + k) - (b - k)$, tj. da važi: $h \leq k$.

Površine datih trouglova izrazimo pomoću Heronove formule:

$$S(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b-h)(s-b+h)}$$

$$S(A'BC) = \sqrt{s(s-a)(s-b-k)(s-b+k)}$$

gde je s poluobim trouglova.

Iz $S(ABC) \geq S(A'BC)$ sledi

$$\sqrt{s(s-a)(s-b-h)(s-b+h)} \geq \sqrt{s(s-a)(s-b-k)(s-b+k)}$$

tj.

$$\sqrt{(s-b-h)(s-b+h)} \geq \sqrt{(s-b-k)(s-b+k)}$$

što je ekvivalentno sa

$$(s-b)^2 - h^2 \geq (s-b)^2 - k^2$$

Sledi:

$$h \leq k$$

što je i trebalo dokazati. Zbog ekvivalentnosti gornjih izraza važi i obrnut smer, tj. ako $(b+h)-(b-h) \leq (b+k)-(b-k)$ onda $S(ABC) \geq S(A'BC)$. ■

Sada možemo nastaviti dokaz Teoreme 7, tj. da važi $S(\Pi_1') > S(\Pi_1)$.

Posmatramo trouglove $A_1A_2A_n$ i $A_1'A_2A_n$. Ova dva trougla imaju zajedničku stranicu A_2A_n. Dokazujemo da

$$|d(A_1', A_n) - d(A_1', A_2)| < d(A_1, A_n) - d(A_1, A_2),$$

tj. da važi:

$$|d(A_1', A_n) - d(A_1', A_2)| < a_n - a_1$$

Gornja nejednakost je tačna, jer $d(A_1', A_n) \in (a_1, a_n)$ i $d(A_1', A_2) \in (a_1, a_n)$.

Na osnovu Leme 2 sledi da je tada $S(\Pi_1') > S(\Pi_1)$. Iz ovog i iz $S(\Pi_2) \geq S(\Pi_1')$ sledi $S(\Pi_2) > S(\Pi_1)$. ■

Teorema 8. (Osnovna izoperimetrijska teorema za poligone): *Među svim n-touglovima zadatog perimetra pravilni ima najveću površinu.*

Dokaz

Teoremu ćemo dokazati za slučaj tetivnog *n*-tougla, jer za nekonveksni poligon uvek postoji konveksan poligon istog perimetra (konveksan ima veću površinu), i na osnovu već dokazanih tvrđenja za svaki konveksan poligon koji nije tetivan postoji tetivan poligon istog perimetra a veće površine.

Neka je Π proizvoljan tetivan *n*-tougao koji nije pravilan. Ako promenimo redosled pojavljivanja stranica površina tetivnog *n*-tougla neće se menjati.

Formiramo sada niz tetivnih poligona $\Pi_1 \equiv \Pi, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_k$, pri čemu su svi istog perimetra p, a poslednji u nizu Π_k je pravilan n-tougao, i svaki u nizu ima za bar jedan veći broj stranica dužine $\frac{p}{n}$ od prethodnog u nizu.

Na osnovu prethodne teoreme važi: $S(\Pi) < S(\Pi_2) < \ldots < S(\Pi_{k-1}) < S(\Pi_k)$ i $p(\Pi) = p(\Pi_2) = \ldots = p(\Pi_{k-1}) = p(\Pi_k)$. ■

3.2.4. Realizacija eksperimenta na temi Izoperimetrijski problem

Eksperiment na temi Izoperimetrijski problem je izveden 17. 06. 2013. u odeljenju I_4 u Gimnaziji u Bečeju.

Ideja eksperimenta je da se đaci upoznaju sa ovim naprednim matematičkim sadržajem, na nivou koji odgovara njihovom uzrastu.

Ciljevi eksperimenta:

- da se đaci upoznaju sa osnovnim izoperimetrijskom problemom
- da dobijaju alate za rešavanje izoperimetrijskog problema (korišćenje osne simetrije, „docrtavanje“ odsečak kruga datoj figuri, itd.)
- da oni sami dolaze do zaključka da je rešenje izoperimetrijskog problema „najpravilnija figura“

Prva faza – rešavanje M-testa

Ciljevi M-testa:

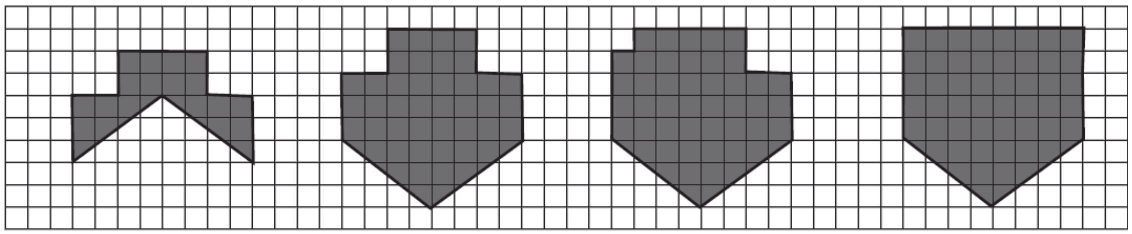
- ponavljanje već usvojenog znanja – određivanje površine i obima date figure (1. zadatak)
- da učenici sami dođu do zaključka da slične figure imaju isti odnos površine i kvadrata perimetra (2. zadatak)
- da se zaključi da među trouglovima sa zadatim dužinama dve stranice najveću površinu ima onaj kod koga su te stranice ortogonalne (3. i 4. zadatak)

Sledi M-test uz pomoć kojeg je eksperiment izveden i tabele u kojima su date vrednosti izražene u procentima koje predstavljaju broj tačnih odgovora u M-testu.

M-test

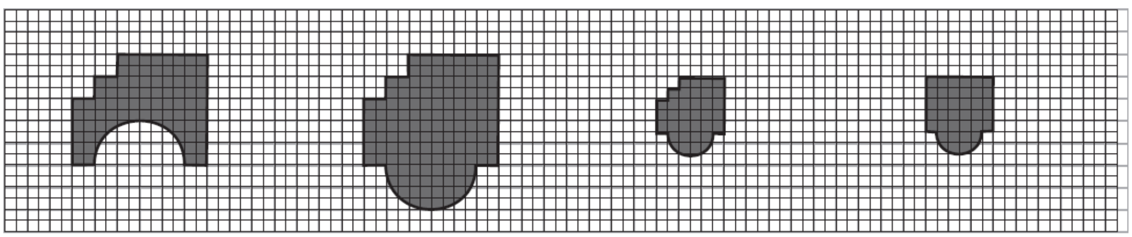
Kandidat:______________________

1. Odrediti perimetar (obim) i površinu svake figure sa slike:



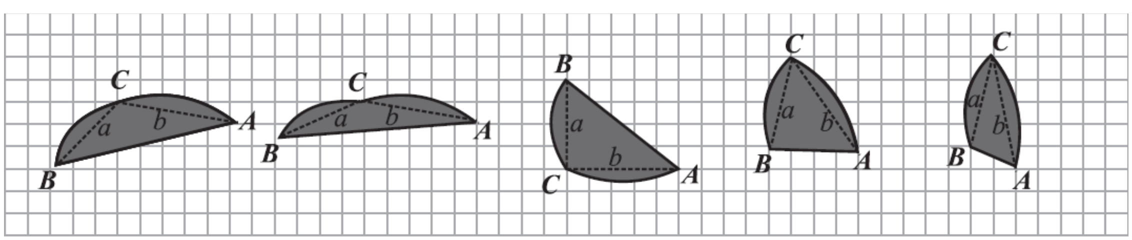
1. p(F)= S(F)= *2. p(F)= S(F)=* *3. p(F)= S(F)=* *4. p(F)= S(F)=*

2. Koja figura ima najveći odnos površine i kvadrata perimetra, tj. $\frac{S(F)}{p^2(F)}$?



F_1 F_2 F_3 F_4

3. Odsečci (delovi figura) koji naležu na stranicu $a = BC$ (isto važi i za $b = AC$) su međusobno podudarni kod svih figura sa slike. Koja figura ima najveću površinu?



F_1 F_2 F_3 F_4 F_5

4. Formulisati tvrđenje koje se odnosi na površinu trougla sa zadatim veličinama dve stranice (a i b) koje se primenjuje u prethodnom zadatku.

____

____

- **Analiza rezultata M-testa**

Devojčice	11
Dečaci	8
Ukupno	19

Tabela 13

Zadatak	1. zadatak							
	1P	**1S**	**2P**	**2S**	**3P**	**3S**	**4P**	**4S**
Devojčice	9.09%	63.64%	18.18%	36.36%	9.09%	27.27%	9.09%	45.45%
Dečaci	37.50%	75.00%	25.00%	75.00%	25%	62.50%	50.00%	37.50%
Ukupno	21.05%	68.42%	21.05%	52.63%	15.79%	42.11%	26.32%	42.11%

Tabela 14

Zadatak	2. zadatak	3. zadatak	4. zadatak
Devojčice	81.82%	90.91%	63.63%
Dečaci	87.50%	62.50%	62.50%
Ukupno	84.21%	78.95%	63.16%

Tabela 15

Prvi zadatak nije jako komplikovan, đaci trebaju samo na osnovu slike da računaju obim i površinu datih figura. Zadatak olakšava mreža u kojoj se nalaze figure. Međutim, rezultati su lošiji od očekivanog, i to ne zbog toga da đaci nisu znali kako da odrede obim i površinu, nego je većina učenika grešila samo u jednom ili dva broja (na primer, za perimetar je tačno rešenje bio 28, a mnogi đaci su dobili kao rešenje 27 ili 26). Interesantno je da su više grešili u izračunavanju perimetra nego u izračunavanju površine.

U drugom zadatku učenici su trebali da primete kako se od figure F_1 dobija figura F_2, a da se pri tome perimetar ne menja, a površina raste. Upoređujući F_2 i F_3, trebali su da primete sličnost ove dve figure, i da one imaju isti odnos $\frac{S(F)}{p^2(F)}$. Uočavanjem dela figure F_3 koji se može zameniti odgovarajućim delom figure F_4 tako da se od F_3 može dobiti figura F_4, može se zaključiti da je tačno rešenje figura F_4. Većina đaka je tačno rešio ovaj zadatak (84.21%).

Kod trećeg zadatka nije trebalo računati, nego samo dobro pogledati slike, i primetiti da odsečci kod svake figure imaju istu površinu. Na osnovu toga lako se zaključuje da među trouglovima sa zadatim veličinama dve stranice najveću površinu ima onaj kod koje su te stranice ortogonalne. Treći zadatak je 78.95% učenika tačno rešio, a formirati tvrđenje znalo samo 63.16% .

M-test je odeljenje uradilo uspešno u proseku **46.89%**.

Druga faza – izlaganje nastavnika

U drugoj etapi nastavnik ima teži posao u odnosu na prvi eksperiment. Ova tema nije laka za razumevanje, đaci tog uzrasta još nikada nisu čuli o izoperimetrijskim problemima.

Jedan predlog za izlaganje nastavnika

- formulisati osnovni izoperimetrijski problem
- ispričati legendu o Didoni
- izvesti Štajnerov pokušaj putem rešavanja M-testa:
  - preko prvog zadatka demonstrirati kako se putem osnih simetrija od prve figure dobija druga, od druge treća, od treće četvrta, a da se pri tome perimetar ne menja, a površina raste
  - na osnovu drugog zadatka zaključiti da slične figure imaju isti odnos površine i kvadrata perimetra
  - preko trećeg i četvrtog zadatka dokazati da među svim trouglovima sa zadatim dužinama dve stranice najveću površinu ima onaj kod koga su te stranice ortogonalne (tako povezati temu sa gradivom koje su na prvom eksperimentu usvojili – sinus oštrog ugla)
- dokazati tvrđenje da tetivni n-tougao sa stranicama dužina $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$, ima veću površinu od proizvoljnog n-tougla čije su stranice takođe dužina $a_1, a_2, \dots, a_n$ (koristiti ideju docrtavanja odsečaka kruga datoj figuri)
- formulisati sledeća tvrđenja bez dokaza:
  - *Ako postoji figura fiksnog perimetra* p *a maksimalne površine, ona mora biti konveksna.*
  - *Krug ima veću površinu od bilo koje druge ograničene dvodimenzione figure istog perimetra.*
  - *Među svim n-touglovima zadatog perimetra pravilni ima najveću površinu.*

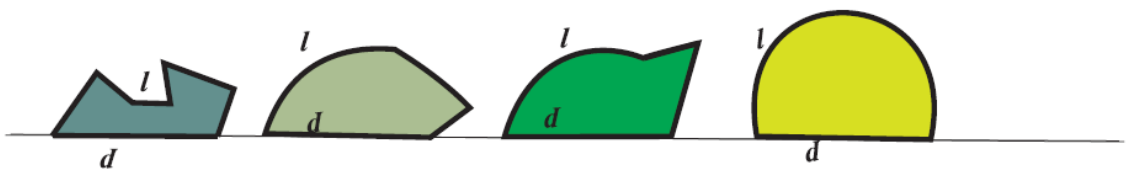
Iz gornjeg predloga ja nisam mogla sve da odradim sa đacima prvog razreda. Delove Štajnerovog dokaza putem rešavanja M-testa sam iznela, ali ceo dokaz više bi odgovarao za stariji uzrast. Objasnila sam ideju docrtavanja odsečaka kruga datoj figuri, i formulisala sam gore navedena tvrđenja. Da su ova tvrđenja tačna, đaci mogu da „osete“ i bez dokaza. Na osnovu ovih teorema učenici su sami zaključili da rešenje izoperimetrijskog problema mora biti što pravilnija figura, dakle da je rešenje krug.

Treća faza – rešavanje E-testa

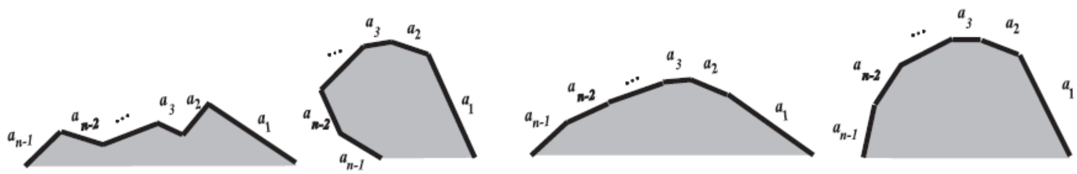
E-test

Kandidat:______________________

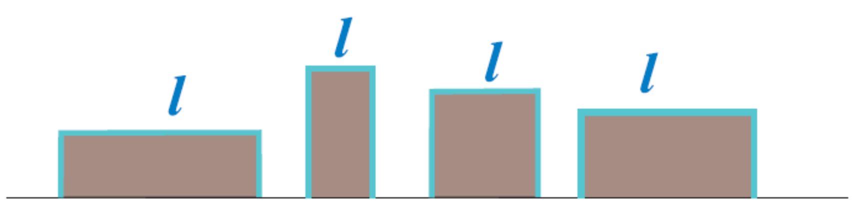
1. Odrediti figuru maksimalne površine čiji rub se sastoji od duži dužine d i proizvoljne krive dužine l, pri čemu je $l > d$.



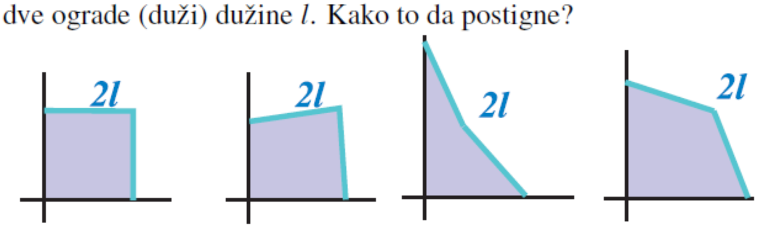
2. Odrediti n-tougao najveće površine kod koga su zadate dužine $(n-1)$ stranica $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$.



3. Čovek treba da ogradi što veće parče zemlje oblika pravougaonika uz put (prava linija). Uz put ne treba da diže ogradu, a raspolaže materijalom dužine l. Kako da to uradi?



4. Čovek treba da ogradi što veće parče zemlje uz dva puta koja se seku pod pravim uglom, a raspolaže sa dve ograde (duži) dužine l. Kako to da postigne?



- **Rezultati E-testa**

U tabeli su date vrednosti izražene u procentima koje predstavljaju broj tačnih odgovora u E-testu.

Zadatak	**1**	**2**	**3**	**4**
Devojčice	100%	100%	81.82%	100%
Dečaci	100%	100%	62.50%	100%
Ukupno	100%	100%	73.68%	100%

Tabela 16

E-test su učenici izuzetno dobro uradili, a iz toga možemo zaključiti da sledeći put bi trebalo i pored ponuđenih odgovora tražiti i obrazloženje od učenika. Ideja zadataka je da korišćenjem osne simetrije ili kod prvog zadatka dodavanjem svakoj figuri odsečak kruga koji odgovara tetivi *d* se dobije figura za koju sigurno znamo da ima veću površinu od ostalih: krug (1. zadatak), tetivni (2. zadatak) ili pravilni mnogougao (3. i 4. zadatak). Većina đaka je samo pogledala sliku i zaokružila onu figuru koja na prvi pogled ima najveću površinu. To se vidi iz 3. zadatka, jer svi oni koji su grešili, zaokružili treću figuru (kvadrat).

E-test je odeljenje uradilo uspešno u proseku **93.42%**.

4. Zaključak

Motivacija je važna u učenju matematike, i nastavnici imaju veliku ulogu u jačanju ili slabljenju motivacije učenika. MTE-model nastave je dobar način za jačanje motivacije, preko prvog, motivacionog testa. Pokušaj aktivnog rešavanja problema koji je jasno izložen i za čije rešavanje učenik nema dovoljno predznanje izaziva veću zainteresovanost učenika.

U ovom radu je dat jedan predlog kako da se izlaže gradivo u nastavi matematike kad nastavniku stoji na raspolaganju blok časova. Eksperimenti koje sam izvela u prvom razredu gimnazije su pokazali da je ovaj model nastave ostvariv, i uspešan je u usvajanju novih znanja i u održavanju pažnje i aktivnosti učenika na oba časa blok nastave. Ovakav način izlaganja je bio prihvaćen kod učenika, i ne samo u slučaju obaveznog gradiva, nego i u slučaju naprednih matematičkih sadržaja. Jeste da nastavnik ima više posla sa pripremom za jedan takav čas nego za jedan „tradicionalan“ čas (nije lako izabrati dobre zadatke za M- i E-test), ali verujem, i to su i eksperimenti pokazali, da ovaj model nastave motiviše učenike za veću pažnju i aktivnost.

Preko izvršenih eksperimenata sam videla uspešnost MTE-modela nastave, i zbog toga smatram da bi nastavnike matematike trebalo upoznati sa tim načinom izlaganja gradiva, da đaci više ne bi rekli da su časovi matematike „dosadni“ i da bi i oni učenici dobili motivaciju za matematiku kojima ovaj predmet teže ide.

Literatura

[1] Bodroža-Pantić O., *Kombinatorna geometrija*, Univerzitetski udžbenik 132, Novi Sad (2001)

[2] Bodroža-Pantić O., Matić -Kekić S., Jakovljev B., Marković Đ. , On MTE-Model of Mathematics Teaching: Studying the Problems Related to a Plane Division Using the MTE-Model, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **39** (2), 197-213 (2008)

[3] Bodroža-Pantić O., Motivacioni testovi i njihova uloga u nastavi, Akreditovani program stručnog usavršavanja: *Kako da motivišemo učenike za matematiku*, Subotica 2009.-2012., materijal sa izlaganja.

[4] Cucić V., *Jedan novi model nastave matematike u radu sa decom sa posebnim potrebama*, Diplomski rad, Novi Sad (2009)

[5] Nikolaos Dergiades, An Elementary Proof of the Isoperimetric Inequality, *Forum Geometricorum Volume* **2**, 129-130 (2002)

[6] Jakovljev, B., *Metodički pristup izučavanju problema vezanih za razlaganje ravni u nastavi geometrije*, Magistarska teza, Novi Sad (2006)

[7] Kazarinoff N.D., *Geometric Inequalities*, Math. Ass. Amer.,Washington (1978)

[8] Marmila S., *Motivisanost učenika na času utvrđivanja gradiva u nastavi matematike za VII razred – Određivanje površine i obima kruga i njegovih delova*, Diplomski rad, Novi Sad (2009)

[9] Middleton, J.A., Spanias Ph.A., Motivation for achievement in mathematics: finding, generalisations, and Criticisms of research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (1), 65-88. (1999)

[10] Miličić P., Stojanović V., Kadelburg Z., Boričić B., *Matematika za I. razred srednje škole*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd (1997) (prevod na mađarski)

[11] Pejanović G., *Motivisanost učenika na času utvrđivanja gradiva u nastavi matematike za VI razred – Određivanje površine četvorougla i trouglova*, Diplomski rad, Novi Sad (2010)

[12] Zech F., *Grundkurs Mathematik didaktik – Theoretische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik*, Beltz Verlag, Weinheim und Basel, 1999. (prevod na srpski)

Biografija

Rođena sam 16.11.1988. u Novom Sadu. Osnovnu školu sam završila u Temerinu u školi „Kokai Imre“, a Gimnaziju 2007. godine u Bečeju. Osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Profesor matematike, sam završila 2012. godine sa prosekom 9,27 i stekla zvanje Diplomirani profesor matematike. Iste godine sam upisala master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu, smer Nastava matematike, i počela sam da radim u mojoj bivšoj školi, u Gimnaziji u Bečeju kao profesor matematike, gde sam i sad zaposlena.

Rebeka Čorba

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*
TD
Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*
TZ
Vrsta rada: *Master rad*
VR
Autor: *Rebeka Čorba*
AU
Mentor: *dr Olga Bodroža-Pantić*
MN
Naslov rada: *Mogućnost prezentovanja nekih obaveznih i nekih naprednih sadržaja iz matematike MTE-modelom nastave u prvom razredu srednje škole*
NR
Jezik publikacije: *Srpski (latinica)*
JP
Jezik izvoda: *srpski/engleski*
JI
Zemlja publikovanja: *Srbija*
ZP
Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP
Godina: *2014.*
GO
Izdavač: *Autorski reprint*
IZ
Mesto i adresa: *Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad*
MA
Fizički opis rada: 4/52/1/12/12/16/0
(broj poglavlja/strana/fotografija/slika/literatura/tabela/grafika)
FO
Naučna oblast: *Matematika*

NO
Naučna disciplina: *Metodika nastave matematike*
ND
Ključne reči: *motivacija, trigonometrijske funkcije, izoperimetrijski problem*
PO
UDK
Čuva se: *Biblioteka Departmana za metematiku, PMF, Novi Sad*
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: *Implementacija MTE-modela na časove matematike u prvom razredu srednje škole*
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 25.09.2013.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije: *Predsednik: dr Siniša Crvenković, redovni profesor, PMF, Novi Sad*
KO *Mentor:dr Olga Bodroža-Pantić, redovni profesor, PMF, Novi Sad*
Član: dr Petar Đapić, docent, PMF, Novi Sad

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: *Monograph type*

DT

Type of record: *Printed text*

TR

Contents Code: *Master thesis*

CC

Author: *Rebeka Csorba*

AU

Mentor: *dr Olga Bodroža-Pantić*

MN

Title: *The possibility of presenting some mandatory and some advanced math contents using MTE-model of Mathematics Teaching in the first year of secondary school*

TI

Language of text: *Serbian (latin)*

LT

Language of abstract: *Serbian/English*

LA

Country of publication: *Serbia*

CP

Locality of publication: *Vojvodina*

LP

Publication year: 2014.

PY

Publisher: *Author's reprint*

PU

Publication place: *Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad, Serbia*

PP

Physical description: 4/52/1/12/12/16/0

(chapters/pages/photographs/pictures/references/tables/charts)

PD

Scientific field: *Mathematics*
SF
Scientific discipline: *Methodic of Mathematics*
SD
Key words: *motivation, trigonometric functions, isoperimetric problem*
SKW
UC
Holding data: *Library of Department of Mathematics, Faculty of Science, Novi Sad*
HD
Note:
N
Abstract: *Implementation of MTE-model in Mathematics Teaching in the first year of secondary school*
AB
Accepted by the Scientific Board on*: September 25th 2013.*
ASB
Defended on:
DE
Thesis defend board:
DB
President: dr Siniša Crvenković, Full Professor, Faculty of Science, Novi Sad
Mentor: dr Olga Bodroža-Pantić, Full Professor, Faculty of Science, Novi Sad
Member: dr Petar Đapić, docent, Faculty of Science, Novi Sad