УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И
ИНФОРМАТИКУ

Радојка Циганović

Трећи Хилбертов проблем и сродни проблеми разлагања

-Мастер рад-

Нови Сад, 2015

“ Mathematics stalks on earthly ground and at the same time touches the divine firmament.”

David Hilbert

Предговор

Проблеми који се баве разлагањем објеката интригирају људску врсту хиљадама година. Иако су се још стари Грци бавили проблемима разлагања у равни и простору, тек половином XIX дат је одговор на проблем у равни, док је решење проблема у простору пронађено почетком XX века.

Стари Грци су метод разрезивања полигона на мање делове користили приликом одређивања његове површине. У простору је ситуација нешто компликованија и само разрезивање није довољно код одређивања запремине полиедра, већ је неопходно коришћење граничних процеса. Управо ово је мотивисало Хилберта да у листу својих проблема уврсти и проблем разлагања у простору. Ако се додатно дозволи да делови на које се деле полазни објекти буду произвољни скупови тачака, ствари се додатно компликују и добија се да су свака два објекта увек међусобно разложива, без обзира на њихове запремине.

Значај Хилбертових проблема се огледа у чињеници да су они били покретач за развој многих грана математике. Истраживања на Трећем Хилбертовом проблему су означила почетак теорије разложивости која данас представља значајну област математике. Са проналаском тензора почиње примена Денове инваријанте, као значајне особине полиедра, на многе друге проблеме, који нису у директној вези са Хилбертовим оригиналним питањем. Последњих година се посебна пажња посвећује проналажењу везе између Трећег Хилбертовог проблема и алгебарске K–теорије.

Циљ овог мастер рада је био упознавање са проблемима разлагања у равни и простору. Рад се може поделити на четири целине.

Прва три поглавља су уводног карактера и она чине прву целину у раду. У овом делу је презентована листа од 23 Хилбертова проблема, са посебним акцентом на трећи проблем који ће бити разматран у раду. Дата је мотивација за постављање овог проблема, као и тачна Хилбертова формулација, са освртом на динамику налажења решења.

Други део рада је посвећен раванском аналогону Трећег Хилбертовог проблема. Ту се уводе појмови разлагања, једнакоразложивости, једнакодопуњивости и дају се њихове основне особине. Такође се уводи и специјална врста разлагања у равни, триангулација. Централно место у овом делу заузима Волас–Бољаи–Гервинова теорема која даје потврдан одговор на проблем разлагања у равни.

Наредна два поглавља су посвећена главној теми овог мастер рада, Трећем Хилбертовом проблему. Након увођења основних појмова, презентована су два различита доказа да је одговор на ово питање, у општем случају, негативан. У оба доказа битну улогу имају диедарски углови полиедра. Први доказ почива на такозваном Брикардовом услову, док је други доказ базиран на употреби Денове инваријанте. На крају другог поглавља се даје осврт на потребан и довољан услов да два полиедра буду једнакоразложива.

Четврта целина у раду се бави парадоксом Банаха и Тарског о дупликацији лопте. Ова теорема суштински почива на употреби Аксиоме избора и постојању немерљивих скупова. У овом поглављу су изложени још и докази Сјерпињски–Мазуркјевич парадокса који је у неком смислу слаба верзија парадокса Банаха и Тарског, и Парадокс о зрну грашка и Сунцу, који је његова јака верзија.

На крају желим да се захвалим свом ментору др Бојану Башићу, пре свега на указаном поверењу, а затим и на избору занимљиве теме и свим корисним саветима датим током писања овог рада. Такође, захваљујем се и члановима комисије др Војиславу Петровићу и др Борису Шоботу који су својим сугестијама допринели да овај рад добије своју финалну верзију.

Нови Сад, октобар 2015. *Радојка Циганović*

Садржај

1 Мотивација **1**

2 Хилбертови проблеми **4**
2.1 Живот и дело Давида Хилберта 4
2.2 Чувено предавање 6

3 Формулација проблема **9**

4 Разлагања у равни **11**
4.1 Триангулација 11
4.2 Једнакоразложивост 13
4.3 Теорема Волас–Бољаи–Гервин 16
4.4 Једнакодопуњивост 18

5 Трећи Хилбертов проблем **21**
5.1 Једнакоразложивост и једнакодопуњивост у простору . . . 21
5.2 Брикардов услов 24
5.3 Решење Трећег Хилбертовог проблема 31

6 Денов метод **34**
6.1 Денова инваријанта 34
6.2 Хадвигерова теорема 37
6.3 Решење проблема помоћу Денове инваријанте 39

7 Парадокс Банаха и Тарског **41**
7.1 Група ротација 42
7.2 Дупликација јединичне сфере 47
7.3 Дупликација јединичне лопте 51
7.4 Јака верзија парадокса 51

8 Закључак **55**

Литература **57**

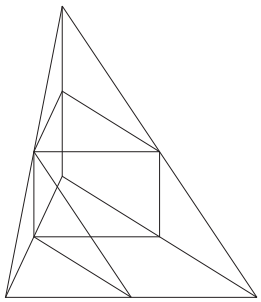
Биографија **59**

1 Мотивација

Посматрајмо троугао, као најједноставнији многоугао, и одредимо његову површину. Уочимо теме код највећег угла у троуглу и кроз њега провуцимо праву паралелну наспрамној страници троугла. Спустимо сада нормале из преостала два темена на повучену праву. За крај спустимо још и нормалу из темена код највећег угла на наспрамну страницу. На овај начин смо добили два пара подударних троуглова који формирају правоугаоник, одакле директно следи да је површина троугла једнака једној половини површине правоугаоника.

Погледајмо сада шта се дешава у простору, односно чему је једнака запремина најједноставнијег полиедра, тростране пирамиде. Еуклид у *Елементима*, у вези са овим питањем, наводи следеће две теореме.

Теорема 1.1 (Теорема 5 из XII књиге *Елемената*)**.**
Тростране пирамиде са истом висином се односе једна према другој као њихове базе.



Слика 1: Еуклидова подела пирамиде методом ексхаустије

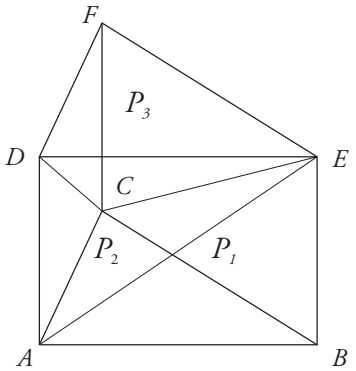
Еуклидов доказ почива на употреби метода ексхаустије[1]. Грубо описано његова идеја је била да пирамиду поделимо на две мање пирамиде, сличне полазној и међусобно једнаке, и на две призме једнаких запремина (слика 1). Збир запремина призми је сада већи од половине запремине полазне пирамиде. Исти поступак затим примењује на добијене мање пирамиде, и тако даље. На овај начин је полазна пирамида представљена као

[1]Метод ексхаустије (у преводу са грчког метод исцрпљивања) је метод развијен од стране старих Грка за решавање проблема који се тичу граничних процеса. Најчешће се као пример даје одређивање површине фигуре уписивањем полигона чије површине конвергирају ка површини посматране фигуре.

бесконачна унија пирамида сличних полазној, и призми. Ако пирамиде из теореме запишемо на малопре описани начин, тада се може показати да из једнакости одговарајућих делова следи и једнакост читавих пирамида[2].

Теорема 1.2 (Теорема 7 из XII књиге *Елемената*)**.**
Запремина тростране пирамиде је једнака једној трећини запремине призме са истом базом и истом висином.

Доказ. Призму $ABCDEF$ можемо поделити на три пирамиде $P_1 = ABCE$, $P_2 = ADCE$ и $P_3 = CDFE$ (слика 2). Пирамиде P_1 и P_2 можемо посматрати као пирамиде са врхом C и основама ABE и ADE. Како су основе једнаке једној половини стране $ABED$ призме, оне имају једнаке базе и висине, па су им на основу теореме 1.1 запремине једнаке. Слично, пирамиде P_2 и P_3 ћемо посматрати као пирамиде са врхом E и основама ADC и CDF. Сада су и запремине P_2 и P_3 једнаке на основу истог аргумента. Према томе, запремине све три пирамиде су једнаке, тј. запремина пирамиде је једнака једној трећини запремине призме. □



Слика 2: Запремина пирамиде износи једну трећину запремине призме

Природно се поставља питање да ли је заиста неопходно користити граничне процесе у доказу. Како формула једна трећина запремине призме сасвим природно генерализује равански случај, логично је да очекујемо да је и у простору могуће применити исту идеју као у равни.

Упознат са овим проблемом и са резултатом да је у равни, за дате фигуре исте површине, могуће једну од њих поделити на коначан број делова од којих се може саставити друга, Хилберт се запитао да ли је метод ексхаустије неопходан приликом одређивања запремине пирамиде. Када би и у простору важило слично тврђење, да је за полиедре једнаких запремина увек могуће разрезати један на делове од којих се може пресложити други, били бисмо у стању да дамо и више него елементарну дефиницију за запремину пирамиде. Наиме, тада бисмо призму могли да поделимо на коначан број полиедара, од којих се могу саставити три подударне пирамиде, па бисмо добили дефиницију за запремину пирамиде која

[2]За прецизан доказ погледати [16]

не захтева употребу метода ексхаустије, нити било ког другог граничног процеса.

Нажалост, испоставља се да је одговор на ово питање негативан, и да је немогуће избећи граничне процесе. Решење проблема је дао Ден, убрзо након што је Хилберт поставио проблем, тако што је показао да се регуларан тетраедар ни на који начин не може поделити на делове од којих би било могуће саставити коцку исте запремине.

Ако бисмо дозволили поделу полиедара на произвољне скупове, а не само на мање полиедре, одговор на ово питање би био другачији. Ипак, због постојања немерљивих скупова, у овом случају се добијају на први поглед чудни резултати.

У наставку рада ћемо презентовати детаљније сва три проблема: разлагања у равни, разлагања у простору и разлагања у простору на произвољне скупове, као и дати комплетна решења за њих.

2 Хилбертови проблеми

Давид Хилберт (David Hilbert) је био чувени немачки математичар који је живео крајем XIX и почетком XX века. Као један од најбољих математичара овог периода, Хилберт је оставио изузетно велики траг. Он је био један од последњих универзалних математичара који се бавио најразличитијим темама, од теорије бројева, преко геометрије и функционалне анализе, до математике у физици. Његови радови су имали огроман утицај на даљи развој математике у XX веку. Посебно је значајно предавање које је Хилберт одржао у Паризу 1900. године под називом *Математички проблеми*.

2.1 Живот и дело Давида Хилберта

Хилберт је рођен у породици Ота и Марије Хилберт 23. јануара 1862. године у Кенингсбергу, у источној Пруској. Студирао је на Универзитету у Кенингсбергу, где је 1884. године одбранио дисертацију из теорије алгебарских инваријанти. Две године касније је постао *Privatdozent*[3], а 1892. добија звање ванредног професора (*Extraordinarius*). Редован професор (*Ordinarius*) Универзитета у Кенингсбергу постаје 1893. године, када на том месту замењује свог професора Линдемана[4]. На наговор Феликса Клајна[5], Хилберт 1895. године долази на Универзитет у Гетингену[6], где предаје до 1930. године. Умро је 14. фебруара 1943. у Гетингену.

Период од 1892. до 1909.[7] године је био најзначајнији период у Хилбертовом математичком раду. Тада је интензивно истраживао алгебарску теорију бројева, геометрију, математичку логику, а у овом периоду је поставио и основе за развој функционалне анализе и математичке физике. До 1898. године, Хилберт се бавио малтене искључиво теоријом поља

[3]Виши предавач на универзитету; плату је добијао директно од студената који су похађали његова предавања

[4]Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852–1939), немачки математичар који је први показао да је π трансцендентан број

[5]Christian Felix Klein (1849–1925), немачки математичар који се бавио теоријом група, комплексном анализом и нееуклидском геометријом

[6]Иако су му током каријере нуђена места на универзитетима у Лајпцигу, Берлину и Хајделбергу, Хилберт није желео да напушта Гетинген, који је у то време био најбољи математички истраживачки центар у свету.

[7]1909. године је изненада преминуо Хилбертов најбољи пријатељ, немачки математичар Херман Минковски (Hermann Minkowski, 1864–1909), који је геометријским методама решавао проблеме из теорије бројева, математичке физике и теорије релативности

алгебарских бројева. У свом раду *Zahlbericht* (*Расправа о бројевима*), објављеном 1897. године, Хилберт је дао преглед до тада познатих ствари у овој области, као и назнаке у ком правцу би даље могла да се развија ова теорија. Након овог рада, Хилберт се окреће основама математике, а посебно основама геометрије. У свом најпознатијем делу *Grundlagen der Geometrie* (*Основи геометрије*), које је изашло 1899. године, Хилберт даје аксиоматско заснивање геометрије. Следећа област његовог интересовања биле су интегралне једначине. Увео је анализу са бесконачно много променљивих и концепт бесконачнодимензионалног векторског простора, који је по њему добио назив Хилбертов простор. Ова открића су у великој мери утицала на пут којим ће се развијати функционална анализа. У овом периоду, Хилберт је дао и нове доказе да су e и π трансцендентни, као и доказ Варинговог[8] проблема да се сваки позитиван цео број може представити као сума фиксног броја n-тих степена природних бројева.

Слика 3: Давид Хилберт (1862–1943)
(преузето са сајта owpdb.mfo.de)

Након смрти Минковског, Хилберт се окреће теоријској физици и примењује своје знање из теорије интегралних једначина на кинетичку теорију гасова и теорију радијације. Готого у исто време са Ајнштајновом[9] теоријом уопштене релативности, излазе Хилбертови *Die Grundlagen der Physik* (*Основи физике*), у којима покушава да обједини теорију гравитације и електродинамику. Од 1916. године поново почиње да се бави проблемима основа математике. Хилберт 1920. године предлаже *Програм о основама математике*, који је за циљ имао формализацију читаве математике и елиминацију бесконачности. Његово дело *Die Grundlagen der Mathematik* (*Основи математике*), објављено у два тома 1934. и 1939. године, имаће директан утицај на стварање теорије доказа.

[8]Edward Waring (1736–1798), енглески математичар који се бавио теоријом бројева, низовима, апроксимацијом корена, интерполацијом и геометријом конусних пресека

[9]Albert Einstein (1879–1955), немачки физичар који је развио уопштену теорију релативности

Као признати математичар, Хилберт је имао велики број ученика, а многим познатим математичарима је био ментор. Његови ученици су, између осталих, били Вилхелм Акерман, Ото Блументал, Хаскел Кури, Макс Ден, Курт Грелинг, Феликс Бернштајн, Ернст Цермело, и многи други. Хилберт је био добитник бројних награда и признања. Добио је награде Јанош Бољаи (1910) и Митаг–Лефлер (1939), а био је и члан Краљевског друштва у Лондону (1928) и почасни грађанин Кенингсберга (1930). Почасни члан Лондонског математичког друштва је постао 1901. године, а 1942. и Немачког математичког друштва.

2.2 Чувено предавање

Као један од најцењенијих математичара у другој половини XIX века, Хилберт је био позван да одржи предавање у Паризу на *Другом међународном конгресу математичара*, 8. августа 1900. године. Ово предавање се данас сматра једним од најзначајнијих предавања у историји математике.

Када је добио позив за конгрес, Хилберт се нашао у недоумици о чему да прича. У једном писму Минковском он пише о својој дилеми да ли да говори о чистој математици, као одговор на предавање о односу анализе и физике које је Поенкаре[10] одржао на претходном конгресу, или да укаже на проблеме којима би математичари требало да се баве у будућности. Одушевљен другим предлогом, Минковски га саветује да управо то буде тема његовог излагања и пише му: „*Са таквом темом може се десити да људи деценијама говоре о том предавању*“.[11]

Хилберт је своје предавања назвао *Mathematische Probleme* (*Математички проблеми*). Током самог говора на конгресу, Хилберт је презентовао само 10 проблема[12], док је целокупан списак од 23[13] проблема објављен након конгреса у часопису *Göttinger Nachrichten* (видети слику 4). Преводи Хилбертовог предавања на енглески и француски су објављени 1902. године. Ови преводи су у великој мери помогли да ово предавање стекне своју легендарну репутацију, јер након самог конгреса није постојао утисак да се десило ишта епохално, и сам Хилберт није био задовољан како је све протекло.

На самом почетку предавања, Хилберт је говорио о важности нових проблема за даљи развој математике. Хилбертов ученик и његов биограф, Ото Блументал је написао: „*Хилберт је човек проблема. Он сакупља и решава постојеће; он поставља нове*“.[14] Након уводног дела, Хилберт даје листу проблема, који су груписани у зависности од тематике којом се баве. Сви проблеми су из области којима се Хилберт или бавио пре

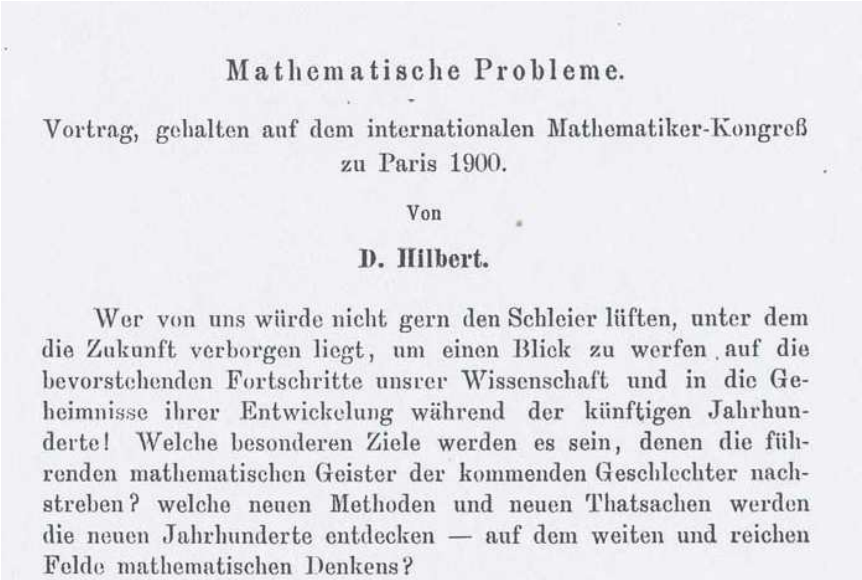
[10] Jules Henri Poincaré (1854–1912), француски математичар, теоријски физичар, инжењер и филозоф

[11] Писмо Минковског од 5. јануара 1900. године; погледати [9], стр. 256

[12] Хилберт је презентовао проблеме број 1, 2, 6, 7, 8, 13, 16, 19, 21 и 22

[13] Хилберт је у нацрту предавања имао 24 проблема, али је одлучио да последњи проблем, који је говорио о захтеву за једноставношћу у доказима, ипак изостави

[14] Видети [9], стр. 247



Mathematische Probleme.

Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900.

Von

D. Hilbert.

Wer von uns würde nicht gern den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unsrer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwickelung während der künftigen Jahrhunderte! Welche besonderen Ziele werden es sein, denen die führenden mathematischen Geister der kommenden Geschlechter nachstreben? welche neuen Methoden und neuen Thatsachen werden die neuen Jahrhunderte entdecken — auf dem weiten und reichen Felde mathematischen Denkens?

Слика 4: Предавање *Математички проблеми*, објављено у часопису *Göttinger Nachrichten* септембра 1900. године (слика преузета из [9])

конгреса, или којима ће се тек бавити у наредним годинама. Ту су проблеми везани за основе математике, теорију бројева, геометрију, анализу, алгебру, теоријску физику. Списак Хилбертових проблема изгледа овако:

1. Канторов проблем кардиналног броја континуума;
2. Непротивречност аритметичких аксиома;
3. Једнакост запремина два тетраедра са истом базом и истом висином;
4. Проблем праве линије као најкраћег растојања између две тачке;
5. Лијев појам непрекидне групе трансформација без претпоставке диференцијабилности функција које чине групу;
6. Математичко испитивање аксиома физике;
7. Ирационалност и трансцендентност одређених бројева;
8. Проблеми који се тичу простих бројева;
9. Доказ најопштијег закона реципроцитета у произвољном пољу бројева;
10. Испитивање решивости Диофантове једначине;
11. Квадратне форме са произвољним алгебарским нумеричким коефицијентима;
12. Проширење Кронекерове теореме о Абеловим пољима на произвољну алгебарску област рационалности;
13. Немогућност решења опште једначине седмог степена функцијама које имају само два аргумента;
14. Доказ коначности одређених система функција;
15. Ригорозно заснивање Шубертовог енумеративног рачуна;
16. Проблем топологије алгебарских кривих и површи;
17. Представљање дефинитних форми помоћу квадрата;
18. Грађење простора конгруентним полиедрима;

19. Да ли су решења регуларних проблема у рачуну варијација нужно аналитичка?;
20. Општи проблем граничних вредности;
21. Доказ постојања линеарних диференцијалних једначина са задатом монодромском групом;
22. Униформизација аналитичких релација аутоморфним функцијама;
23. Развијање метода рачуна варијације.

Ови проблеми су по њему требали да покажу пут којим треба да се развија математика у XX веку. Иако нису сви у први мах увидели значај *Математичких проблема*, убрзо су се многи математичари заинтересовали за проблеме које је Хилберт предложио. Један део проблема је решен, док су други, било због недовољно јасне формулације, било због комплексности проблема, остали нерешени више од 100 година након њиховог презентовања. Први проблем који је решен био је трећи проблем, и управо тим проблемом ћемо се бавити, заједно са још неким сродним проблемима, у наставку рада.

3 Формулација проблема

Трећи проблем је Хилберт насловио са *Једнакост запремина два тетраедра са истом базом и истом висином.* Објашњење које стоји уз проблем наводимо у целости.

> У два писма Герлингу[15], Гаус[16] изражава жаљење што одређене теореме из стереометрије зависе од метода ексхаустије, тј., у модерној терминологији, од аксиоме континуитета (или од Архимедове аксиоме). Гаус спомиње конкретно Еуклидову теорему, да се тростране пирамиде истих висина односе једна према другој као њихове базе. Аналогни проблем у равни сада је решен. Герлинг је такође успео да докаже једнакост запремина симетричних полиедара поделом на подударне делове. Ипак, чини ми се вероватним да је општи доказ ове врсте за малопре поменуту Еуклидову теорему немогућ, и наш задатак треба да буде налажење строгог доказа да је то немогуће. Ово бисмо добили чим бисмо успели да *пронађемо два тетраедра са једнаким базама и једнаким висинама који се ни на који начин не могу поделити на подударне тетраедре, и који не могу бити комбиновани са подударним тетраедрима тако да формирају два полиедра који сами могу бити издељени на подударне тетраедре.*[17]

Видимо дакле да ако бисмо тетраедре са једнаким запреминама могли поделити на подударне делове, тада бисмо добили елементаран доказ за запремину полиедара, који не би захтевао граничне процесе. Као што видимо из приложеног образложења, Хилберт је очекивао да ће одговор на ово питање бити одричан.

Решење овог проблема дао је Макс Ден[18], Хилбертов ученик, недуго након његовог објављивања. Он је решење презентовао у два рада: *Ueber raumgleiche Polyeder* (*О полиедрима са једнаким запреминама*) објављеном 1900. и *Ueber den Rauminhalt* (*О запремини*) објављеном 1902. године. У

[15] Christian Ludwig Gerling (1788–1864), Гаусов ученик

[16] Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), немачки математичар који се бавио теоријом бројева, алгебром, статистиком, анализом, диференцијалном геометријом, геодезијом, механиком, електростатиком, астрономијом и оптиком

[17] Видети [18], стр. 12

[18] Max Wilhelm Dehn (1878–1952), Хилбертов докторант који је први решио један од његова 23 проблема. Бавио се геометријом, алгебарском топологијом и геометријском теоријом група.

првом раду је дао пример два тетраедра са истом базом и истом висином који се не могу поделити на подударне тетраедре, а у другом раду је решио и други део проблема, односно да ни допуњавање подударним тетраедрима такође није могуће.

Денов доказ је имао само један проблем – био је изузетно компликован за разумевање. Зато су многи покушавали да га упросте. Први који је то урадио био је Каган[19] 1903. у свом раду *Über die Transformation der Polyeder* (*О трансформацијама полиедара*). Управо Каганову идеју о додељивању позитивних бројева деловима ивица у полиедру ћемо користити у поглављу 5. Средином XX века група математичара предвођена Хадвигером[20] је открила велики број резултата везан за разлагања. Њихов рад је омогућио нови приступ Деновим радовима, одакле је произашао нови доказ Трећег Хилбертовог проблема, који ће бити презентован у поглављу 6, и који се сматра стандардним доказом овог проблема.

Приметимо још да Хилберт у образложењу проблема наводи да је одговор на аналогни проблем у равни већ познат. Зато ћемо се пре него што пређемо на доказ Трећег Хилбертовог проблема позабавити његовим раванским аналогоном.

[19]Вениамин Фёдорович Каган (1869–1953), руски математичар који се највише бавио геометријом

[20]Hugo Hadwiger (1908–1981), швајцарски математичар, познат по раду у геометрији, комбинаторици и криптографији

4 Разлагања у равни

Пре него што покажемо да је одговор на трећи проблем негативан, посматраћемо аналогни проблем у равни. Занима нас да ли је за многоуглове са једнаким површина увек могуће један од њих разрезати на коначан број делова, тако да се од добијених делова може саставити други?

Испоставља се да је одговор на ово питање потврдан и даје га Волас–Бољаи–Гервинова теорема. Теорема је добила назив по математичарима Вилијаму Воласу[21], Фаркашу Бољаиу[22] и Полу Гервину[23], који су је, независно један од другог, доказали у првој половини XIX века[24].

4.1 Триангулација

Дефиниција 4.1. Нека су дате тачке у равни $A_1, A_2, \ldots, A_n$. *Полигон* P (*многоугао, n-тоугао*) је део равни ограничен са затвореном изломљеном линијом $A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup \cdots \cup A_nA_1$. Тачке $A_1, A_2, \ldots, A_n$ су *темена* полигона P, а дужи $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ су његове *странице* (*ивице*). Дужи A_iA_j, за $i \neq j$, при чему i и j нису суседни индекси, називају се *дијагонале* полигона. Ако странице полигона немају других пресечних тачака осим темена, тада за полигон кажемо да је *прост*.

Напомена. Пошто ће нас занимати само прости полигони, надаље када кажемо полигон, подразумеваћемо да је у питању прост полигон.

Један од најзначајнијих поступака који се примењује у раду са полигонима је разлагање, односно подела полигона на коначно много делова (мањих полигона).

Дефиниција 4.2. Полигони $P_1, P_2, \ldots, P_n$ чине *разлагање* (*декомпозицију*) полигона P, у ознаци $P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$, ако је $P = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$ и полигони $P_1, P_2, \ldots, P_n$ имају дисјунктне унутрашњости.

Природно се намећу разлагања која се добијају повлачењем дијагонала полигона. Најзначајније такво разлагање је триангулација.

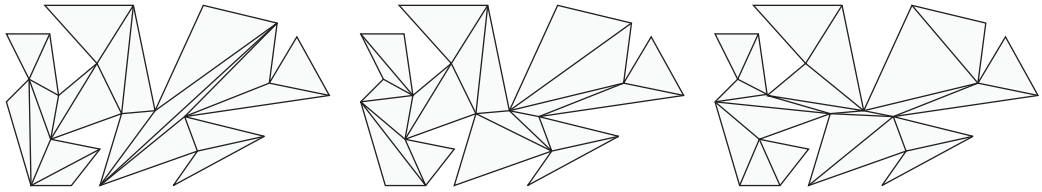
[21] William Wallace (1768–1843), шкотски математичар и астроном

[22] Farkas Bolyai (1775–1856), мађарски математичар који се пре свега бавио геометријом

[23] Paul Gerwien, немачки официр који се математиком бавио из хобија

[24] Иако се у литератури могу пронаћи различите године када су ова три математичара доказала теорему, сви аутори су јединствени у ставу да су они до својих резултата дошли самостално (погледати [34])

Дефиниција 4.3. *Триангулација* полигона P је подела полигона P на троуглове повлачењем непресецајућих дијагонала.

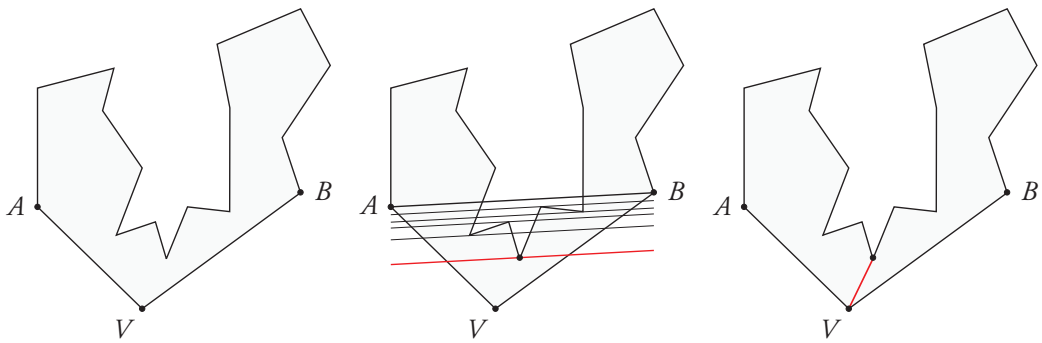


Слика 5: Три различите триангулације једног полигона

Јасно је да триангулација полигона није јединствена (слика 5), али није одмах јасно да ли сваки полигон уопште има триангулацију. Одговор на ово питање је потврдан, али да бисмо то показали потребна нам је следећа лема.

Лема 4.1. Сваки полигон са више од три темена има унутрашњу дијагоналу.

Доказ. Нека је дат полигон P. Уочимо „најниже“ теме полигона (односно теме са најмањом y координатом; ако имамо више таквих темена, онда бирамо оно са најмањом x координатом). Нека је то теме V. Уочимо сада темена A и B која су суседна темену V. Ако дуж AB лежи у унутрашњости полигона P, онда је то тражена унутрашња дијагонала. Претпоставимо да AB није у унутрашњости P. Сада се у унутрашњости троугла ABV мора налазити бар још једно теме полигона P, пошто P по претпоставци има више од три темена. Повуцимо праве паралелне са AB кроз темена полигона P која се налазе у унутрашњости троугла ABV (погледати слику 6). Када спојимо V са теменом на правој добијеном претходним поступком најближој тачки V, добијамо тражену унутрашњу дијагоналу. □



Слика 6: Поступак налажења унутрашње дијагонале полигона

Сада кад смо показали да сваки полигон има унутрашњу дијагоналу, егзистенцију триангулације добијамо лако математичком индукцијом.

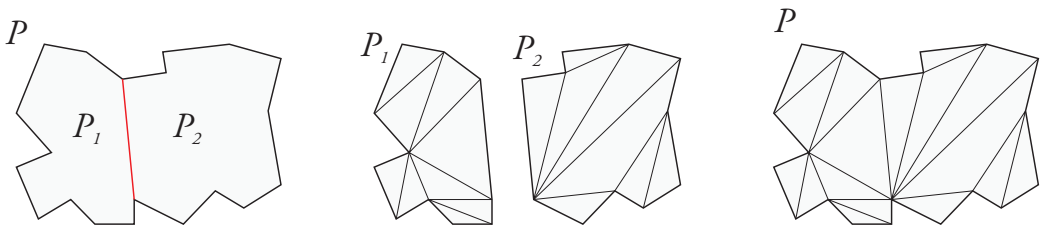
Теорема 4.1. Сваки полигон има триангулацију.

Доказ. Посматрајмо полигон са n темена. Доказ изводимо индукцијом по броју темена.

б.и. За $n = 3$ тврђење тривијално следи.

и.х. Претпоставимо да тврђење важи за све полигоне са мање од n темена.

и.к. Докажимо да тврђење важи за полигон P који има $n > 3$ темена. На основу леме 4.1 имамо да полигон P садржи унутрашњу дијагоналу. Тада дијагонала дели P на полигоне P_1 и P_2 (слика 7). Како P_1 и P_2 имају мање од n темена, на основу *и.х.* они имају триангулације. Сада је тражена триангулација полигона P заправо унија триангулација полигона P_1 и P_2. □



Слика 7: Триангулација полигона

4.2 Једнакоразложивост

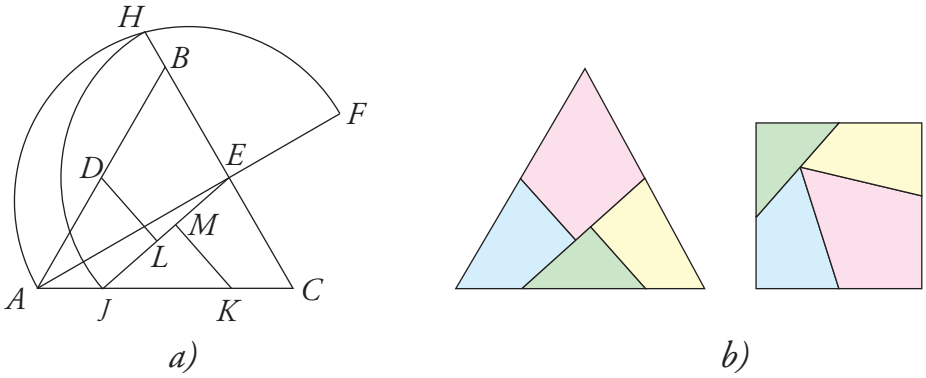
Посматрајмо сада произвољне декомпозиције полигона, а не само триангулације. Ако нам је дато разлагање полигона P, јасно је да се делови полигона P могу ротацијама и транслацијама разместити тако да добијемо неки нови полигон Q. Појам који објашњава однос полазног полигона P и новодобијеног полигона Q се назива једнакоразложивост.

Дефиниција 4.4. Полигони P и Q су *једнакоразложиви*, у ознаци $P \sim Q$, ако постоје полигони $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, такви да је испуњено $P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$, $Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$, и $P_1 \cong Q_1, P_2 \cong Q_2, \ldots, P_n \cong Q_n$.

Напомена. Дефиниција једнакоразложивости се тривијално може проширити на уније полигона.

Пример 4.1.

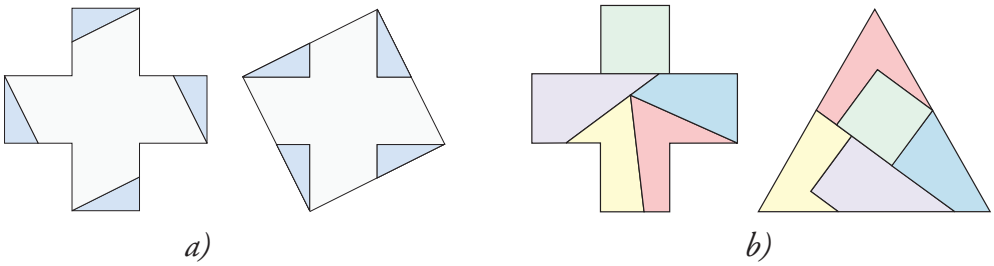
(i) Посматрајмо једнакостранични троугао ABC. Нека су D и E средишта дужи AB и BC. Продужимо дуж AE до тачке F тако да важи $|FE| = |BE|$. Опишимо полукружницу $\widehat{\mathrm{AF}}$ над пречником AF. Уочимо тачку H у пресеку праве $p(B, E)$ и описане полукружнице. Сада опишимо лук са центром у E и полупречника EH. Нека је пресек тог лука и AC тачка J. Уочимо тачку K тако да је $|JK| = |BE|$. На крају спустимо још нормале из D и K на $p(J, E)$ и добијене тачке означимо са L и M (видети слику 8a)). Ова добијена четири дела представљају једно од најједноставнијих разлагања једнакостраничног троугла и квадрата, за које нам треба само три реза (погледати слику 8b)).



Слика 8: Једнакостранични троугао и квадрат су једнакоразложиви

(ii) На слици 9a) је приказано како грчки крст можемо разложити на пет делова, од којих се може саставити квадрат.

(iii) Грчки крст је једнакоразложив и са једнакостраничним троуглом, као што можемо видети на слици 9b) (за конструкцију видети [31]).



Слика 9: Примери једнакоразложивих полигона

Покажимо сада неке основне особине које важе за једнакоразложивост. Очигледно је да важи следећа теорема.

Теорема 4.2. Нека полигони $P_1, P_2, \ldots, P_n$ чине разлагање полигона P, а $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ разлагање полигона Q. Ако важи $P_i \sim Q_i$, за свако i, тада је и $P \sim Q$.

Теорема 4.3. Нека су дати полигони P, Q и R. Тада важи:

(i) P је једнакоразложив са самим собом, тј. важи $P \sim P$.

(ii) Ако је P једнакоразложив са Q, онда је и Q једнакоразложив са P, тј. $P \sim Q \Rightarrow Q \sim P$.

(iii) Ако је P једнакоразложив са Q и Q једнакоразложив са R, тада је и P једнакоразложив са R, тј. $P \sim Q \wedge Q \sim R \Rightarrow P \sim R$.

Доказ. Тврђења (i) и (ii) следе директно из дефиниције једнакоразложивости. Остаје дакле да се покаже само (iii).

(iii) Претпоставимо да је $P \sim Q$ и $Q \sim R$. Нека полигони $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ чине разлагање полигона Q, а $P_1, P_2, \ldots, P_n$ разлагање полигона P, и притом важи $P_i \cong Q_i$, за свако $i = 1, \ldots, n$. Нека полигони $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_m$

чине друго разлагање Q, а полигони $R_1, R_2, \ldots, R_m$ разлагање R такво да је $Q'_j \cong R_j$, за свако $j = 1, \ldots, m$.
Посматрајмо следећу декомпозицију полигона Q:

$$Q_{ij} = Q_i \cap Q'_j,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

Неки Q_{ij} могу бити скупови дисјунктних тачака, или празни скупови, али ми ћемо посматрати само оне Q_{ij} који представљају полигоне. Сада за $i_1 \neq i_2$ важи $int(Q_{i_1}) \cap int(Q_{i_2}) = \emptyset$, па је и $int(Q_{i_1 j}) \cap int(Q_{i_2 j}) = \emptyset$. Аналогно показујемо за j. Одатле следи да $\{Q_{ij}\colon\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ заиста представља разлагање полигона Q.
Фиксирајмо сада индекс i. Тада важи

$$\bigcup_{j=1}^{m} Q_{ij} = \bigcup_{j=1}^{m} (Q_i \cap Q'_j) = Q_i \cap \bigcup_{j=1}^{m} Q'_j = Q_i \cap Q = Q_i.$$

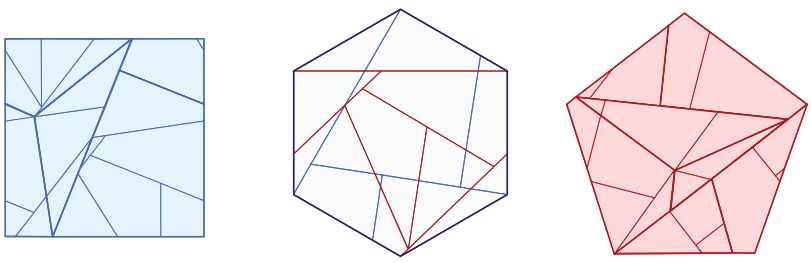
Аналогно, ако фиксирамо индекс j добијамо

$$\bigcup_{i=1}^{n} Q_{ij} = \bigcup_{i=1}^{n} (Q_i \cap Q'_j) = (\bigcup_{i=1}^{n} Q_i) \cap Q'_j = Q \cap Q'_j = Q_j.$$

Пошто је $P \sim Q$, свако P_i можемо записати као унију неких P_{ij}, где је $P_{ij} \cong Q_{ij}$, $j \leq m$. Аналогно и свако R_j можемо записати као унију неких R_{ij}, $R_{ij} \cong Q_{ij}$, за $i \leq n$. Како је подударност релација еквиваленције, добијамо $P_{ij} \cong R_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, односно P и R су једнакоразложиви, а то је и требало показати. □

Из претходне теореме следи да једнакаразложивост генерише релацију еквиваленције на скупу свих полигона.

Пример 4.2. Шестоугао је једнакоразложив са квадратом (плаво разлагање), али је такође једнакоразложив и са петоуглом (црвено разлагање). Сада због транзитивности добијамо да су и квадрат и петоугао једнакоразлозиви (слика 10).



Слика 10: Једнакоразложивост је транзитивна

4.3 Теорема Волас–Бољаи–Гервин

Јасно је да једнакоразложиви полигони имају исту површину. Заиста, ако је $P \sim Q$, и P се разлаже на $P_1, P_2, \ldots, P_n$, а Q на $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, тада је испуњено

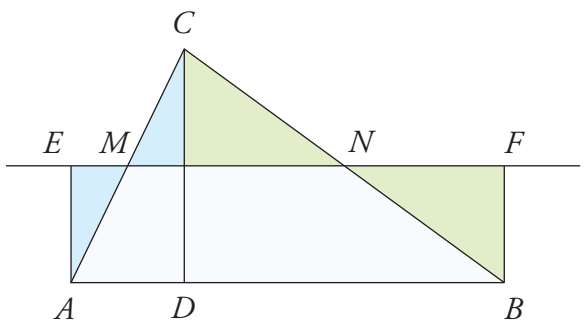
$$\begin{aligned} p(P) &= p(P_1 + P_2 + \cdots + P_n) = p(P_1) + p(P_2) + \cdots + p(P_n) \\ &= p(Q_1) + p(Q_2) + \cdots + p(Q_n) = p(Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n) = p(Q), \end{aligned}$$

где $p(L)$ представља површину полигона L.

Поставља се питање да ли важи и обрнути проблем, односно ако су полигони P_1 и P_2 истих површина, да ли тада они морају бити и једнакоразложиви? Као што смо већ рекли, одговор на ово питање је потврдан, и даје га Волас–Бољаи–Гервинова теорема. Пре него што покажемо ову теорему, показаћемо неколико помоћних лема.

Лема 4.2. Сваки троугао је једнакоразложив са неким правоугаоником.

Доказ. Посматрајмо произвољан троугао ABC и уочимо његову најдужу страницу. Нека је то, без умањења општости, AB. Нека је CD висина из C на страницу AB. Тачка D се налази између A и B (иначе AB не би била најдужа страница троугла). Повуцимо средњу линију троугла MN паралелну са AB. Спустимо нормале AE и BF на праву која садржи тачке M и N. Сада је правоугаоник $ABFE$ тражени правоугаоник који је једнакоразложив са троуглом ABC (слика 11). Његова дужина је $|AB|$, а ширина $\frac{|CD|}{2}$. □

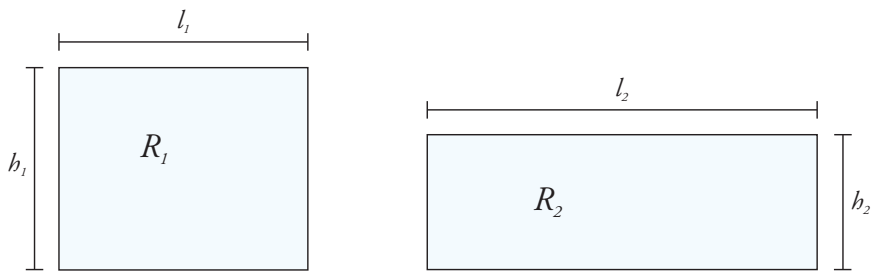


Слика 11: Троугао ABC и правоугаоник $ABFE$ су једнакоразложиви

Лема 4.3. Свака два правоугаоника исте површине су једнакоразложива.

Доказ. Нека је R_1 правоугаоник димензије $l_1 \times h_1$, а R_2 димензије $l_2 \times h_2$, и нека им је површина једнака, тј. $l_1 \cdot h_1 = l_2 \cdot h_2$. Претпоставимо, без умањења општости, да је $h_2 < h_1$. Сада је $h_2 < h_1 \leq l_1 < l_2$.

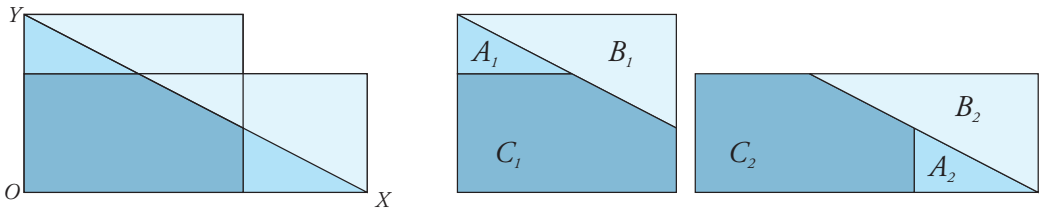
Имамо дакле да је правоугаоник R_2 дужи од R_1. За овакву конструкцију нам не одговара ни да један правоугаоник буде „превише дугачак“. Претпоставимо зато да је $h_2 < h_1 \leq l_1 < l_2 < 2l_1$ (видети слику 12).



Слика 12: Правоугаоници за које важи $h_2 < h_1 \leq l_1 < l_2 < 2l_1$

Наиме, ако је $2l_1 < l_2$, тада правоугаоник R_2 можемо поделити вертикалним резом на два мања правоугаоника, од којих затим можемо направити нови правоугаоник тако што их сложимо један на други. На овај начин добијамо правоугаоник R_2', чија је дужина $\frac{l_2}{2}$, а висина h_2. Како су површине полазних правоугаоника једнаке, и површине правоугаоника R_1 и R_2' ће бити једнаке, односно важи $l_1 \cdot h_1 = \frac{l_2}{2} \cdot 2h_2$. На основу претпоставке знамо да је испуњено $2h_2 < h_1$, па понављајући поменути поступак, правоугаоник R_2 можемо свести на правоугаоник код ког је $l_2 < 2l_1$. Због тога претпостављамо да одмах на почетку имамо баш такав правоугаоник.

Правоугаонике R_1 и R_2 сместимо у раван тако да им доња лева темена буду смештена у координатном почетку. Повуцимо сада дуж која спаја горње лево теме правоугаоника R_1 и доње десно теме R_2. На овај начин смо правоугаонике изделили на по један петоугао, један већи и један мањи троугао (слика 13).



Слика 13: Ако два правоугаоника имају исту површину, онда су они једнакоразложиви

Петоуглови C_1 и C_2 су очигледно подударни. Приметимо да су троуглови A_1, A_2 и YOX слични. Из једнакости $l_1 \cdot h_1 = l_2 \cdot h_2$ добијамо $h_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot h_1 = h_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot h_2$, односно $(l_2 - l_1)h_1 = (h_1 - h_2)l_2$. Одавде је

$$\frac{h_1 - h_2}{l_2 - l_1} = \frac{h_1}{l_2}. \tag{1}$$

Пошто су A_1 и YOX слични, и једна катета троугла A_1 је дужине $h_1 - h_2$, из (1) следи да је друга катета $l_2 - l_1$. Слично, како је једна катета троугла A_2 дужине $l_2 - l_1$ добијамо да је друга катета $h_1 - h_2$. Одавде закључујемо $A_1 \cong A_2$. Подударност B_1 и B_2 сада следи тривијално. Наиме, како су A_1 и A_2 подударни, добијамо да су катете оба троугла l_1 и h_2, односно $B_1 \cong B_2$. Одавде следи да су правоугаоници R_1 и R_2 једнакоразложиви $\square$

Последица 4.1. Сваки правоугаоник P је једнакоразложив са правоугаоником дужине 1 и ширине $p(P)$.

Теорема 4.4 (Волас–Бољаи–Гервин)**.**
Свака два полигона која имају исту површину су једнакоразложива.

Доказ. Нека су дати полигони P и Q са једнаком површином α. На основу теореме 4.1 знамо да полигон P има триангулацију. Нека дата триангулација садржи n троуглова. Сада је на основу леме 4.2 сваки од тих n троуглова једнакоразложив са неким правоугаоником. Ови правоугаоници су због леме 4.3 једнакоразложиви са n правоугаоника дужине 1. Ако тих нових n правоугаоника са основама 1 насложимо један на други, добијамо нови правоугаоник R, са висином α. Аналогним поступком, добијамо да је и Q такође једнакоразложив са R. Сада је $P \sim R$ и $Q \sim R$, па је на основу транзитивности једнакоразложивости $P \sim R$. □

Последица 4.2. Сваки полигон је једнакоразложив са квадратом који има исту површину.

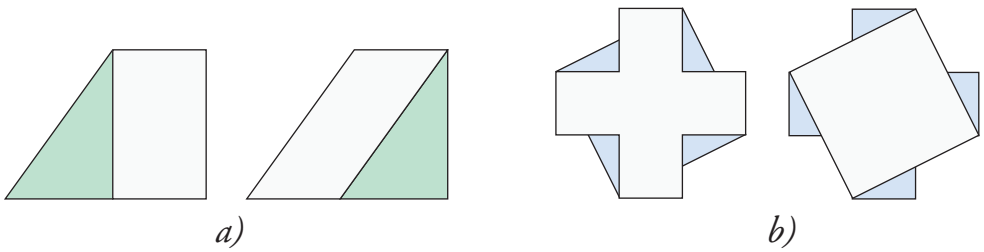
Волас–Бољаи–Гервинова теорема не само што нам даје да постоји разлагање између два полигона, већ нам даје и алгоритам како пронаћи то разлагање. Ипак, овако добијено разлагање је далеко од оптималног због помоћних разлагања која се користе у самом поступку.

4.4 Једнакодопуњивост

Основни алат који смо до сада користили било је разлагање полигона на мање делове. Сада ћемо увести још један веома значајан метод, метод допуњавања. Идеја овог метода је да се полигони допуне подударним деловима до фигура које су подударне. Уводимо зато следећи појам.

Дефиниција 4.5. За полигоне P и Q кажемо да су *једнакодопуњиви* ако постоје полигони $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ тако да је испуњено $P_1 \cong Q_1$, $P_2 \cong Q_2, \ldots, P_n \cong Q_n$ и $P + P_1 + P_2 + \cdots + P_n \cong Q + Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$.

Пример 4.3.
(i) Правоугаоник $a \times b$ и паралелограм са базом a и висином b се правоуглим троуглом могу допунити до трапеза (слика 14a)).
(ii) Грчки крст и квадрат су једнакодопуњиви (слика 14b)).

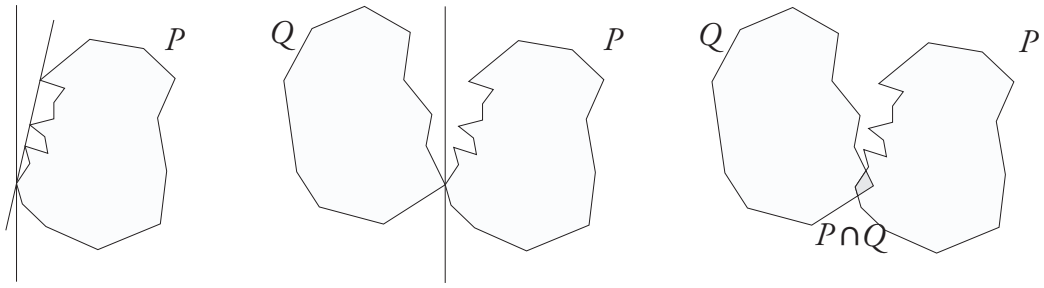


Слика 14: Примери једнакодопуњивих полигона

Јасно је да су површине једнакодопуњивих полигона једнаке. Сада на основу Волас–Бољаи–Гервинове теореме следи да су они и једнакоразложиви. Следећа теорема нам даје да важи и обрнуто тврђење.

Теорема 4.5. Једнакоразложиви полигони су и једнакодопуњиви.

Доказ. Посматрајмо једнакоразложиве полигоне P и Q. Претпоставимо, без умањења општости, да је пресек ова два полигона непразан. Наиме, ако су полигони дисјунктни можемо посматрати „најлевље“ теме полигона P и кроз њега провући праву паралелну са y-осом. Ако уочена права садржи више од једног темена полигона, тада полигон можемо заротирати за мали угао у негативном смеру око „најнижег“ темена, тако да на правој остане само једно теме. Сличан поступак можемо применити и на полигон Q и његово „најдешње“ теме. Затим транслирамо полигон Q тако да се „најлевље“ теме полигона P и „најдешње“ теме полигона Q поклопе. Ако на крају транслирамо полигон P мало улево, добићемо тражени пресек (слика 15). Зато одмах на почетку можемо претпоставити да је пресек непразан.



Слика 15: Пресек једнакоразложивих полигона

Нека је $R = P \cap Q$, а M и N фигуре за које важи $P = R + M$, $Q = R + N$. Даље, нека за полигоне P' и Q' важи $P' \cong P$, $Q' \cong Q$, и још $P \cup Q$, P' и Q' су међусобно дисјунктни. Пошто је $P \sim Q$ добијамо да је $P' \sim Q'$, тј. постоје $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, такви да је $P' = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$, $Q' = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$, и $P_1 \cong Q_1, P_2 \cong Q_2, \ldots, P_n \cong Q_n$. Због $P' \cong P$ и $Q' \cong Q$ постоје трансформације подуданости f и g за које је испуњено $P' = f(P)$, $Q' = g(Q)$. Сада је

$$\begin{aligned}
(P \cup Q) + P' + Q' &= (P + N) + f(P) + Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n \\
&= P + N + f(R) + f(M) + Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n, \\
(P \cup Q) + P' + Q' &= (Q + M) + P_1 + P_2 + \cdots + P_n + g(Q) \\
&= Q + M + P_1 + P_2 + \cdots + P_n + g(R) + g(N).
\end{aligned}$$

Добијамо дакле,

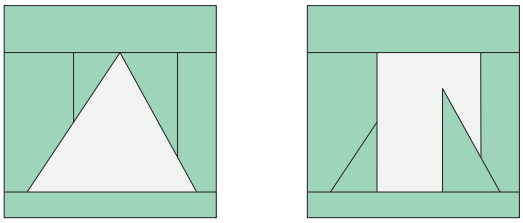
$$P + Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n + f(M) + N + f(R) = Q + P_1 + P_2 + \cdots + P_n + M + g(N) + g(R),$$

одакле следи да су P и Q једнакодопуњиви. □

Ако сумирамо претходно доказано, добијамо следеће тврђење.

Теорема 4.6. За полигоне P и Q су следећи услови еквивалентни:
(i) P и Q имају исту површину;
(ii) P и Q су једнакоразложиви;
(iii) P и Q су једнакодопуњиви.

Пример 4.4. Свака два полигона једнаких површина су једнакодопуњиви до неког квадрата. Наиме, за дате полигоне P и Q са једнаким површинама увек можемо пронаћи подударне квадрате тако да један садржи P, а други Q. Сада су комплементи P и Q у односу на квадрате, такође истих површина, па су и једнакоразложиви. Дакле, добили смо допуну P и Q до квадрата. На слици 16 видимо на који начин можемо један троугао и један шестоугао допунити до квадрата.



Слика 16: Допуњавање до квадрата

5 Трећи Хилбертов проблем

У претходном поглављу смо видели да су свака два полигона исте површине једнакоразложива. Природно се намеће питање шта се дешава у три димензије, односно да ли је за свака два полиедара са истом запремином, увек могуће један од њих разрезати на коначан број делова тако да се од тих делова може саставити други? Управо је ово питање Хилберт поставио, као једно од своја чувена 23 проблема, на конгресу математичара у Паризу 1900. године.

Одговор на ово питање је, за разлику од дводимензионалног случаја, негативан, и дао га је немачки математичар Макс Ден, недуго након што је проблем презентован. Пре него што пређемо на решавање проблема, увешћемо неке основне појмове.

5.1 Једнакоразложивост и једнакодопуњивост у простору

Дефиниција 5.1. Под *полиедром* подразумевамо део простора ограничен полигонима $P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$, при чему је свака страница ових полигона заједничка за тачно два полигона, и свака страница ових полигона садржи тачно два темена ових полигона. Полигоне $P_1, P_2, \ldots, P_n$ називамо *странама* (*пљоснима*) полиедра, њихове странице називамо *страницама* (*ивицама*) полиедра, а њихова темена називамо *теменима* полиедра. Углови многоуглова се називају *ивични углови*, а углови између пљосни су *диедарски углови* посматраног полиедра.

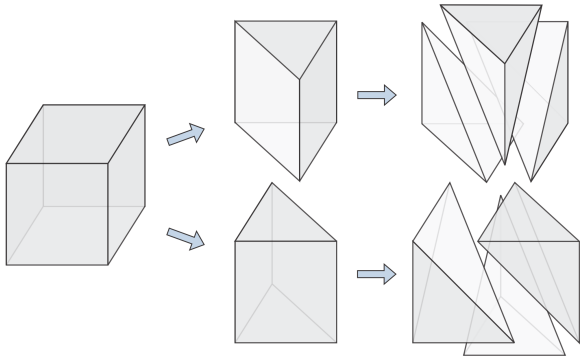
Напомена. Генарализација полиедра у више димензија се назива политоп.

Као што је то био случај у две димензије, и у тродимензионалном случају значајну улогу имају декомпозиције, односно поделе полиедра на коначно много мањих делова.

Дефиниција 5.2. Полиедар P се разлаже на полиедре $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ако је испуњено $P = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$ и полиедри $P_1, P_2, \ldots, P_n$ имају дисјунктне унутрашњости. То пишемо $P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ и кажемо да полиедри $P_1, P_2, \ldots, P_n$ представљају *разлагање* (*декомпозицију*) P.

Док смо у две димензије имали посебну врсту декомпозиције, триангулацију, коју је имао сваки полигон, у три димензије немамо тако нешто. Уопштење триангулације у тродимензионалном случају је разлагање на тетраедре чија темена се поклапају са теменима полазног полиедра, такозвана тетраедрализација, али нема сваки полиедар такву поделу.

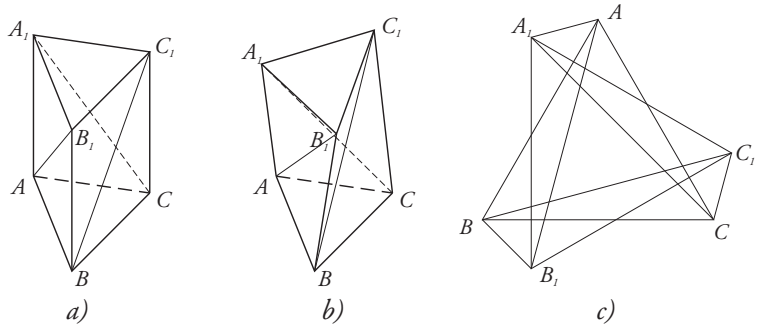
Пример 5.1. На слици 17 је приказано разлагање коцке на 6 подударних тетраедара. Сваки од ових тетраедара садржи по три узастопне, некомпланарне ивице коцке, и назива се ортошема.



Слика 17: Декомпозиција коцке на 6 подударних тетраедара

Пример 5.2. Конструишимо сада најмањи полиедар који се не може разложити на тетраедре. Овај контрапример се назива Шенхартов полиедар, по Ериху Шенхарту[25], који га је конструисао 1928. године.

Пођимо од једнакостраничног троугла ABC у xy-равни. Узећемо да су темена троугла оријентисана супротно од казаљке на сату. Транслацијом овог троугла дуж z-осе до равни $z = 1$ добијамо правилну тространу призму. Уочићемо и следеће дијагонале бочних страница: AB_1, BC_1 и CA_1 (слика 18a)). На крају треба још заротирати тругао $A_1B_1C_1$ у равни $z = 1$ за $30°$ (слика 18b)). На овај начин смо добили полиедар P који није могуће поделити на тетраедре.



Слика 18: Шенхартов полиедар

Показаћемо да у малопре конструисани полиедар P уопште није могуће уписати тетраедар чија би темена уједно била и темена P. Прво ћемо показати да се свака дуж која спаја темена полиедра P, и која притом није његова ивица, налази у спољашњости P. Како Шенхартов полиедар има 6 темена и 12 ивица, а укупан број могућих дужи између темена је $\binom{6}{2} = 15$, треба проверити само дужи AC_1, BA_1 и CB_1. Посматрајући ортогоналну

[25] Erich Schönhardt (1891–1979), немачки математичар

пројекцију полиедра P на xy-раван (слика 18c)), одмах добијамо да се дужи AC_1, BA_1 и CB_1 налазе у спољашњости. Следеће показујемо да је сваки троугао чије су странице ивице P пљосан полиедра P. Ако посматрамо, рецимо, теме A онда за сваке две ивице које излазе из A или постоји трећа ивица која са њима формира пљосан полиедра P, или уопште не постоји ивица која формира троугао. Исто важи и за темена B и C.

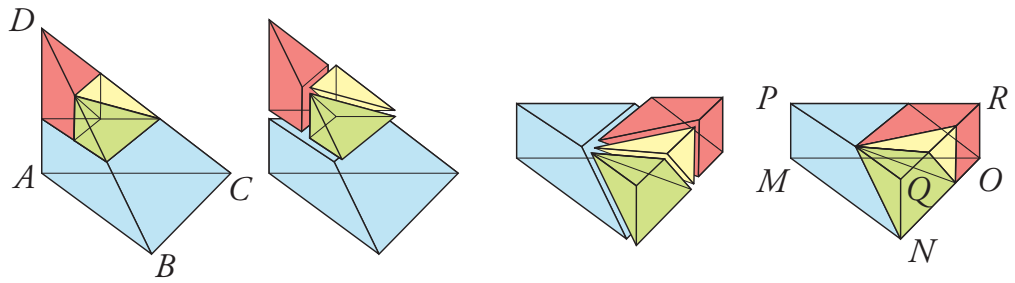
Претпоставимо да можемо уписати тетраедар T у унутрашњост P. Сада из претходно доказаног следи да свака страница T мора бити ивица полиедра P и да су све стране T плосни полиедра P. Одавде следи да је $T = P$, а то је у контрадикцији са бројем темена Шенхартовог полиедра.

Напомена. Проблем карактеризације полиедара који се могу разложити на тетраедре представља отворен проблем.

На исти начин на који смо то урадили у равни, уводимо појмове једнакоразложивости и једнакодопуњивости и у простору.

Дефиниција 5.3. Кажемо да су полиедри P и Q *једнакоразложиви*, и пишемо $P \sim Q$, ако постоје полиедри $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, такви да је $P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$, $Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$ и $P_1 \cong Q_1, P_2 \cong Q_2, \ldots, P_n \cong Q_n$.

Пример 5.3. Посматрајмо тетраедар $ABCD$ у чијој основи се налази једнакокрако-правоугли троугао ABC , са правим углом код темена C, и висином $AD = BC = AC$, и тространу призму $MNOPQR$ са основом подударном са троуглом ABC и висином $MP = \frac{1}{3}AD$. Сада се тетраедар $ABCD$ може разложити на четири полиедра од којих се затим може саставити призма $MNOPQR$ (слика 19).



Слика 19: Пример разлагања између тетраедра и призме

Дефиниција 5.4. Полиедри P и Q су *једнакодопуњиви* ако постоје полиедри $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ за које је $P_1 \cong Q_1, P_2 \cong Q_2, \ldots, P_n \cong Q_n$ и $P + P_1 + P_2 + \cdots + P_n \cong Q + Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$.

Напомена.

(i) Аналогно као у равни показује се да једнакоразложивост генерише релацију еквиваленције на скупу свих полиедара.

(ii) Једнакоразложивост и једнакодопуњивост се генерално дефинишу за произвољне политопе.

5.2 Брикардов услов

Четири године пре него што ће Хилберт поставити питање једнакоразложивости у простору, 1896, Раул Брикард[26] је објавио рад у ком је тврдио да је решио овај проблем. Брикардова идеја је била веома елегантна, али се испоставило да је доказ био непотпун и погрешан. Сматра се да је овај Брикардов покушај имао велики утицај на Дена, који је касније и решио проблем.

Већ смо напоменули да је прво упрошћење Деновог доказа већ 1903. године понудио Каган. Управо његову идеју ћемо искористити да бисмо добили комплетан, и пре свега тачан, доказ Брикардове теореме.

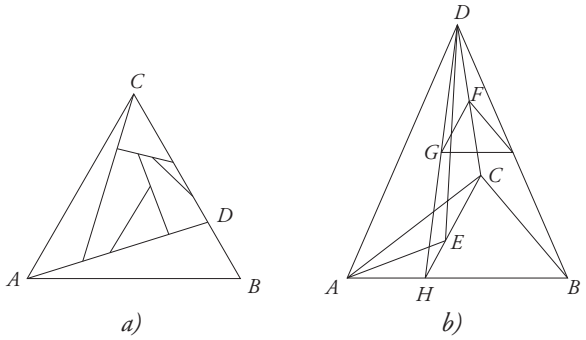
Дефиниција 5.5. Посматрајмо полиедар (респ. полигон) P и његово разлагање $P_1 + P_2 + \cdots + P_n$. Ивице полиедра (респ. полигона) P_i су теменима или ивицама других полиедара (респ. полигона) подељене на мање делове, које називамо *сегментима* ивице.

Приметимо да су у разлагању полигона крајње тачке сегмената увек темена, док код декомпозиције полиедара крајње тачке сегмената могу бити и пресеци две ивице. Илуструјмо то на примерима.

Пример 5.4.

(i) Посматрајмо троугао ABC чије је разлагање дато на слици 20a). Сада је ивица AD троугла ABD теменима других делова декомпозиције подељена на четири сегмента.

(ii) Нека је дат тетраедар $ABCD$ који је декомпонован на 3 тетраедра и зарубљену пирамиду (слика 20b)). Ивица CH зарубљене пирамиде је теменом подељена на два сегмента, док је ивица GF подељена ивицом других полиедара на два сегмента.



Слика 20: Сегменти полигона и полиедра

Лема 5.1. Ако су P и Q једнакоразложиви политопи, тада је могуће распоредити позитиван број перлица (односно придружити позитивне целе бројеве) сваком сегменту разлагања $P = P_1 + \cdots + P_n$, $Q = Q_1 + \cdots + Q_n$

[26] Raoul Bricard (1870–1944), енглески инжињер и математичар, који се највише бавио геометријом

тако да свакој ивици политопа P_k буде придружен исти број перлица као одговарајућој ивици политопа Q_k.

Да бисмо показали ову лему, неопходно је прво показати следеће помоћно тврђење.

Лема 5.2. Ако систем хомогених линеарних једначина са целобројним коефицијентима има позитивно реално решење, онда има и позитивно целобројно решење.

Доказ. Посматрајмо скуп

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{x} > \mathbf{0}\},$$

где $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$. (Скуп C представља конус, па се отуда ова лема често назива лема о конусу.) Показаћемо да ако је скуп C непразан, онда он садржи тачку са целобројним координатама, односно и скуп $C \cap \mathbb{N}^n$ је такође непразан.

Ако је $C \neq \emptyset$, онда је и скуп $\bar{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \geq \mathbf{1}\}$, где је $\mathbf{1}$ тачка чије су све координате 1, такође непразан. Ово је испуњено зато што за сваки позитиван вектор $\mathbf{x}$ можемо одабрати позитиван скалар α тако да вектор $\alpha\mathbf{x}$ има све координате веће или једнаке 1. Довољно је показати да $\bar{C}$ садржи тачку са рационалним координатама, јер множећи ту тачку са НЗС именилаца координата добијамо целобројну тачку у $\bar{C} \subseteq C$, а то је управо оно што нам треба.

Покажимо дакле да $\bar{C}$ садржи рационалну тачку. Користићемо Фурије–Моцкинову елиминацију[27] да покажемо да постоји лексикографски најмање решење система

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \tag{2}$$

и да је то решење рационално ако је матрица A целобројна.

Пошто сваку линеарну једначину $\mathbf{a}^\top\mathbf{x} = 0$ можемо еквивалентно записати као две линеарне неједначине, $\mathbf{a}^\top\mathbf{x} \geq 0$ и $-\mathbf{a}^\top\mathbf{x} \geq 0$, уместо система (2) можемо посматрати следећи систем

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \\ -A\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \geq \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Сада се наш проблем се своди на доказивање да систем облика

$$A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{1},$$

где су A[28] и $\mathbf{b}$ целобројни, има лексикографски најмање решење, и да је оно рационално.

Доказ изводимо индукцијом по броју координата вектора $\mathbf{x}$, тј. по n.

[27] Fourier–Motzkin elimination, познатија као ФМЕ метод, је поступак елиминације променљивих из система линеарних неједначина

[28] Ради једноставнијег записа, користићемо исту ознаку A и за новодобијену матрицу формата $2m \times n$.

б.и. За $n = 1$ тврђење тривијално следи.

и.х. Претпоставимо да је тврђење испуњено за системе са мање од n променљивих.

и.к. Докажимо да тврђење важи за систем $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{1}$, који садржи n променљивих. Посматрајмо последњу координату вектора $\mathbf{x}$, променљиву x_n. Систем $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ можемо поделити на три дела: неједначине у којима је коефицијент уз x_n једнак, већи или мањи од 0. То можемо, без умањења општости, записати на следећи начин

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}' &\geq b_i, \ \ i = 1, \ldots, m_1 \\ x_n + \mathbf{a}_j^\top \mathbf{x}' &\geq b_j, \ \ j = m_1 + 1, \ldots, m_2 \\ -x_n + \mathbf{a}_k^\top \mathbf{x}' &\geq b_k, \ \ k = m_2 + 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

при чему је $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$. Неједнакости које садрже x_n ће нам за фиксирано $\mathbf{x}'$ дати доњу и горњу границу за x_n (доња граница ће због услова $\mathbf{x} \geq \mathbf{1}$ бити већа или једнака 1, а горњу границу ћемо добити само у случајевима када је $m_2 < m$).

Посматрајмо сада нови систем $A'\mathbf{x}' \geq \mathbf{b}', \mathbf{x}' \geq \mathbf{1}$, са $n-1$ променљивом, који је дат са

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}' &\geq b_i, i = 1, \ldots, m_1 \\ b_j - \mathbf{a}_j^\top \mathbf{x}' &\leq \mathbf{a}_k^\top \mathbf{x}' - b_k, j = m_1 + 1, \ldots, m_2, k = m_2 + 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Овај нови систем задовољава *и.х.* па има лексикографски најмање решење $\mathbf{x}'_*$ које је рационално. На крају као најмање рационално решење за x_n бирамо $\max_j \{b_j - \mathbf{a}_j^\top \mathbf{x}'\}$. □

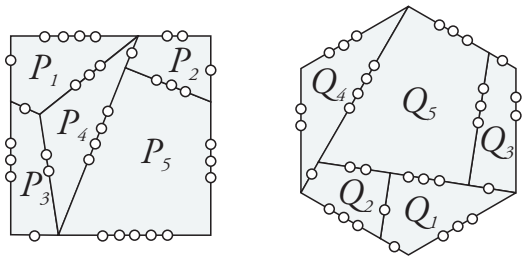
Сада када смо показали ову лему, можемо се вратити доказу леме 5.1.

Доказ Леме 5.1. Доделимо променљиве сегментима у разлагањима P и Q. Променљиве x_i придружимо сегментима у разлагању политопа P, а променљиве y_j сегментима у разлагању политопа Q. Треба пронаћи позитивне целобројне вредности за x_i и y_j тако да сума вредности x_i придружених сегментима неке ивице P_k буде иста као сума вредности y_j придружених сегментима одговарајуће ивице Q_k. Другим речима, треба да је

$$\sum_{i: s_i \subseteq e} x_i - \sum_{j: s'_j \subseteq e'} y_j = 0,$$

где се страница $e \subseteq P_k$ састоји из сегмената s_i, а одговарајућа страница $e' \subseteq Q_k$ из сегмената s'_j. Добили смо, дакле, систем линеарних једначина са целобројним коефицијентима. Сада за позитивно реално решење ове једначине можемо узети дужине сегмената, па на основу леме 5.2 добијамо да тврђење важи. □

Пример 5.5. На слици 21 је приказан један од могућих распореда перлица у једнакоразложивим разлагањима квадрата и правилног шестоугла.



Слика 21: Распоређивање перлица

Теорема 5.1 (Брикардов услов)**.**
Ако су полиедри P и Q, чији су диедарски углови $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$, једнакоразложиви, тада постоје позитивни цели бројеви $m_i, i = 1, \ldots, r$, $n_j, j = 1, \ldots, s$, и цео број k такви да је

$$m_1\alpha_1 + \cdots + m_r\alpha_r = n_1\beta_1 + \cdots + n_s\beta_s + k\pi.$$

Аналогно тврђење добијамо и када су P и Q једнакодопуњиви.

Доказ. Претпоставимо прво да су P и Q једнакоразложиви. Нека су дате декомпозиције $P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$, $Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$ и $P_i \cong Q_i$ за свако $i = 1, \ldots, n$. Сада на основу леме 5.1 сваком сегменту ових декомпозиција можемо придружити позитиван број перлица.

Обележимо са $\sum_1$ суму свих диедарских углова у свим перлицама декомпозиције полиедра P. Ако ивица полиедра P_i садржи j перлица, тада ће се у суми $\sum_1$ диедарски угао над том ивицом појавити тачно j пута. Ако нека перлица припада ивицама $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}$, у суми $\sum_1$ ће се за дату перлицу додавати редом диедарски углови $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ над посматраним ивицама. У зависности од положаја сегмента на ком се дата перлица налази, могући су следећи случајеви:

- Ако се перлица налази на ивици полиедра P, тада се у суми рачуна диедарски угао полиедра над том ивицом.
- За перлице које се налазе на рубу P, али не и на његовој ивици, сума диедарских углова ће износити π.
- Ако се перлица налази у унутрашњости полиедра, онда ће диедарски углови те перлице у збиру давати 2π или π. Сума ће износити π ако се посматрани сегмент налази у унутрашњости пљосни неког P_i, а у противном ће бити 2π.

Сада суму $\sum_1$ можемо записати

$$\sum\nolimits_1 = m_1\alpha_1 + \cdots + m_r\alpha_r + k_1\pi,$$

где су $m_i, i = 1, \ldots, r$ позитивни цели, а k_1 ненегативан цео број.

Аналогно дефинишемо $\sum_2$ као суму свих диедарских углова у свим перлицама декомпозиције полиедра Q. Притом важи

$$\sum\nolimits_2 = n_1\beta_1 + \cdots + n_s\beta_s + k_2\pi,$$

за позитивне целе $n_j, j = 1, \ldots, s$ и ненегативан цео број k_2.

Суме $\sum_1$ и $\sum_2$ можемо добити и ако сабирамо појединачне диедарске углове у свакој перлици декомпозиција полиедара P и Q (тј. ако за $\sum_1$ прво сабирамо све диедарске углове у перлицама на полиедру P_1, па затим на $P_2, \ldots, P_n$, и аналогно за $\sum_2$ и полиедре $Q_1, \ldots, Q_n$). Како су P_i и Q_i подударни, одговарајуће ивице ће имати исте диедарске углове. На основу леме 5.1 знамо и да одговарајуће ивице имају једнак број перлица који им је придружен, па добијамо да је $\sum_1 = \sum_2$, тј.

$$m_1\alpha_1 + \cdots + m_r\alpha_r + k_1\pi = n_1\beta_1 + \cdots + n_s\beta_s + k_2\pi.$$

Сада стављајући $k = k_2 - k_1$ добијамо

$$m_1\alpha_1 + \cdots + m_r\alpha_r = n_1\beta_1 + \cdots + n_s\beta_s + k\pi,$$

а то је и требало доказати.

Претпоставимо сада да су P и Q једнакодопуњиви, односно да постоје полиедри $P_1', P_2', \ldots, P_m'$ и $Q_1', Q_2', \ldots, Q_m'$, такви да је $P_i' \cong Q_i'$ за $i = 1, \ldots, m$ и $\tilde{P} = P + P_1' + P_2' + \cdots + P_m' \cong Q + Q_1' + Q_2' + \cdots + Q_m' = \tilde{Q}$. Пошто су $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ подударни, они су и једнакоразложиви, па постоје декомпозиције $P_1'' + P_2'' + \cdots + P_n''$ и $Q_1'' + Q_2'' + \cdots + Q_n''$ за које важи $P_i'' \cong Q_i''$. Користећи поново лему 5.1, сваком сегменту у поменутим декомпозицијама придружујемо перлице, али ћемо додатно захтевати да свака ивица полиедра $\tilde{P}$ садржи исти број перлица у обе декомпозиције, и аналогно за $\tilde{Q}$[29]. Обележимо са $\sum_1'$ суму диедарских углова у перлицама прве декомпозиције полиедра $\tilde{P}$, а са $\sum_1''$ суму у перлицама друге декомпозиције истог полиедра, и аналогно суме $\sum_2'$ и $\sum_2''$ за полиедар $\tilde{Q}$.

Аналогно као малопре закључујемо да важи $\sum_1'' = \sum_2''$, јер су полиедри $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ подударни, па према томе и једнакоразложиви. Суме $\sum_1'$ и $\sum_1''$ се односе на исти полиедар $\tilde{P}$, али на две његове декомпозиције. Додатни услов да број перлица на ивицама $\tilde{P}$ у обе декомпозиције мора бити исти нам, заједно са претходним разматрањима, даје да важи $\sum_1' = \sum_1'' + l_1\pi$, где је l_1 цео број. Потпуно аналогно добијамо и $\sum_2' = \sum_2'' + l_2\pi$, за $l_2 \in \mathbb{Z}$. Одавде је

$$\sum\nolimits_2' = \sum\nolimits_1' + l\pi, \text{ за } l = l_2 - l_1 \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

[29]Како се лема 5.1 суштински своди на решавање система линеарних једначина са целобројним коефицијентима, у наш систем једначина ћемо само убацити и додатни услов да суме x_i (респ. y_j) на истој ивици P (респ. Q) буду једнаке у обе декомпозиције. Даље доказ леме можемо наставити са овим новим, проширеним системом.

Знамо да се $\sum_1'$ односи на декомпозицију $\tilde{P} = P + P_1' + P_2' + \cdots + P_m'$, а $\sum_2'$ на декомпозицију $\tilde{Q} = Q + Q_1' + Q_2' + \cdots + Q_m'$, па како је $P_i' \cong Q_i'$, из једначине (3) добијамо да важи

$$n_1\beta_1 + \cdots + n_s\beta_s = m_1\alpha_1 + \cdots + m_r\alpha_r + l\pi.$$

Ако ставимо $k = -l$ добијамо

$$m_1\alpha_1 + \cdots + m_r\alpha_r = n_1\beta_1 + \cdots + n_s\beta_s + k\pi,$$

чиме смо показали да тврђење важи и за једнакодопуњиве полиедре. □

Напомена. Где је била грешка у Брикардовом доказу? Брикард је веровао да је поделом сегмената на мање делове могуће добити инваријантно пресликавање које би сегменте једног полиедра пресликавало на сегменте другог. Сада би из чињенице да постоји такво пресликавање важило да је $\sum_1 = \sum_2$, одакле би тврђење тривијално следило. Проблем је што је Брикард претпоставио да таква декомпозиција сегмената увек постоји, а то није тачно. За контрапример погледати [7].

Да бисмо могли да решимо Трећи Хилбертов проблем, неопходно је показати још једну лему.

Лема 5.3. Израз $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{\sqrt{n}}$ је ирационалан за свако $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 4\}$.

Доказ. За $n = 1$ имамо $\frac{1}{\pi}\arccos 1 = 0$. Када је $n = 2$ добијамо $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, а за $n = 4$ добијамо $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, па је израз заиста рационалан за те вредности.

Тврђење доказујемо свођењем на контрадикцију. Претпоставимо да је $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{p}{q}$, при чему су p и q позитивни цели бројеви. Ако ставимо $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{n}}$, добијамо $q\varphi = p\pi$. Одатле даље следи да је $\cos q\varphi = \pm 1$, односно $\cos q\varphi$ је цео број.

Ако у адициону формулу

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

заменимо $\alpha = (q+1)\varphi$ и $\beta = (q-1)\varphi$ добијамо

$$\cos(q+1)\varphi + \cos(q-1)\varphi = 2\cos q\varphi\cos\varphi.$$

Одавде даље добијамо идентитет

$$\cos(q+1)\varphi = \frac{2}{\sqrt{n}}\cos q\varphi - \cos(q-1)\varphi, \tag{4}$$

који ћемо користити у наставку доказа. Надаље разликујемо случајеве када је n парно и када је непарно.

Претпоставимо да је n непарно. Доказ изводимо индукцијом по q.

б.и. За $q = 1$ добијамо

$$\cos\varphi = \cos(\arccos\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Пошто је по претпоставци n непарно и различито од 1, добијамо да $\cos\varphi$ није цео број.
Када је $q = 2$ имамо

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{2}{n} - 1 = \frac{2-n}{n}.$$

Како је n непарно, $2 - n$ и n су узајамно прости, па $\cos 2\varphi$ не може бити цео број.

и.х. Претпоставимо да за $q \leq k$ важи тврђење: $\cos q\varphi = \frac{a_q}{\sqrt{n^q}}$, где су a_q и n узајамно прости.

и.к. Покажимо да тврђење важи за $q = k + 1$. Из (4) заменом $\cos k\varphi = \frac{a_k}{\sqrt{n^k}}$ и $\cos(k-1)\varphi = \frac{a_{k-1}}{\sqrt{n^{k-1}}}$ добијамо

$$\cos(k+1)\varphi = \frac{2}{\sqrt{n}}\frac{a_k}{\sqrt{n^k}} - \frac{a_{k-1}}{\sqrt{n^{k-1}}} = \frac{2a_k - na_{k-1}}{\sqrt{n^{k+1}}}.$$

Пошто су $2, a_k$ и a_{k-1} узајамно прости са n, и $2a_k - na_{k-1}$ је такође узајамно просто са n. Одатле следи да $\cos(k+1)\varphi$ није цео број.

Претпоставимо сада да је n парно, тј. да је облика $2m$. И овде доказ изводимо индукцијом по q.

б.и. За $q = 1$ важи

$$\cos\varphi = \cos(\arccos\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2m}}.$$

Како је n парно и $n \neq 2, 4$ важи да је $m > 2$, па $\cos\varphi$ није цео број.
Када је $q = 2$ добијамо

$$\cos 2\varphi = \frac{2-n}{n} = \frac{1-m}{m}.$$

Пошто су $1 - m$ и m узајамно прости, $\cos 2\varphi$ не може бити цео.

и.х. Претпоставимо сада да за $q \leq k$ важи тврђење: $\cos q\varphi = \frac{b_q}{\sqrt{2m^q}}$, где су b_q и m узајамно прости.

и.к. Доказујемо тврђење за $q = k + 1$. Аналогно као малопре добијамо

$$\cos(k+1)\varphi = \frac{2}{\sqrt{2m}}\frac{b_k}{\sqrt{2m^k}} - \frac{b_{k-1}}{\sqrt{2m^{k-1}}} = \frac{b_k}{\sqrt{m^{k+1}}} - \frac{b_{k-1}}{2\sqrt{m^{k-1}}}\sqrt{2}.$$

Сада на основу *и.х.* и ирационалности $\sqrt{2}$ добијамо да $\cos(k+1)\varphi$ не може бити цео број.

Добили смо да, за свако q, $\cos q\varphi$ није цео, а то је у контрадикцији са раније добијеним $\cos q\varphi = \pm 1$. Дакле, почетна претпоставка да је $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{\sqrt{n}}$ рационалан је била погрешна, односно $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{\sqrt{n}}$ мора бити ирационалан за свако $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 4\}$. $\square$

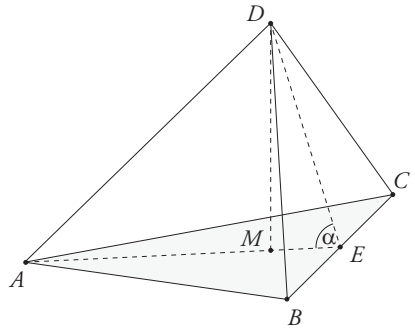
5.3 Решење Трећег Хилбертовог проблема

Пример 5.6. Посматрајмо регуларан тетраедар T_0 и израчунајмо његове диедарске углове. Посматрајмо троугао ABC у основи тетраедра и уочимо његово тежиште, тачку M (слика 22). Како је у питању регуларан тетраедар DM је висина посматраног тетраедра. Из особина тежишта знамо да тачка M дели AE у односу $2:1$. Како је $|AE| = |DE|$, добијамо

$$\cos\alpha = \frac{|ME|}{|DE|} = \frac{\frac{1}{3}|AE|}{|DE|} = \frac{1}{3},$$

односно

$$\alpha = \arccos\frac{1}{3}.$$



Слика 22: Диедарски угао регуларног тетраедра

Добијамо дакле да регуларан тетраедар и коцка не могу бити ни једнакоразложиви ни једнакодопуњиви. Ово следи из Брикардовог услова, јер би у супротном требало да важи

$$m_1 \arccos\frac{1}{3} = n_1\frac{\pi}{2} + k\pi,$$

за позитивне целе бројеве m_1, n_1 и цео број k, али тада би $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{3}$ било рационално, а то је у супротности са лемом 5.3.

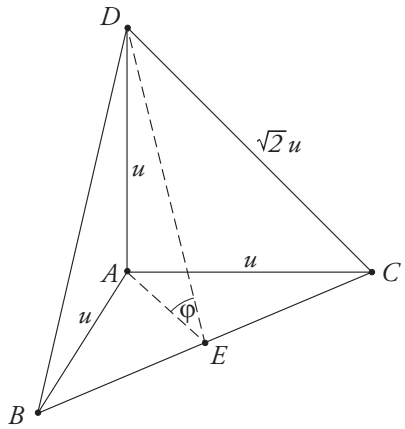
Овај пример нам даје да регуларан тетраедар није ни једнакоразложив ни једнакодопуњив ни са једном коцком, па према томе ни са оном која има исту запремину као тетраедар. Као последицу изводимо закључак да два полиедра која имају исту запремину не морају бити ни једнакодопуњиви ни једнакоразложиви.

Пример 5.7. Посматрајмо сада тетраедар T_1 који је дат на слици 23, и код кога су странице AB, AC и AD међусобно ортогоналне и једнаке дужине u. Овај тетраедар има три диедарска угла која су једнака правом углу, и три диедарска угла која износе φ. Сада важи

$$\cos\varphi = \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}u}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}u} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

односно

$$\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Слика 23: Диедарски углови тетраедра са три једнаке ортогоналне ивице

Као ни регуларан тетраедар T_0, ни тетраедар T_1 није једнакоразложив ни једнакодопуњив са коцком. Ако бисмо претпоставили да су T_1 и коцка једнакоразложиви или једнакодопуњиви, онда би због Брикардовог услова постојали позитивни цели бројеви m_1, m_2, n_1 и цео број k за које важи

$$m_1 \frac{\pi}{2} + m_2 \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} = n_1 \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Одавде добијамо да је $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ рационалан број, а то је у контрадикцији са тврђењем леме 5.3.

Пример 5.8. Следећи тетраедар који посматрамо је тетраедар T_2 чије су ивице AB, BC и CD узајамно ортогоналне и исте дужине u (видети слику 24). Јасно је да диедарски углови над ивицама AC, BC и BD износе $\frac{\pi}{2}$, а да над ивицама AB и CD износе $\frac{\pi}{4}$. Остаје још да видимо чему је једнак диедарски угао над ивицом AD.

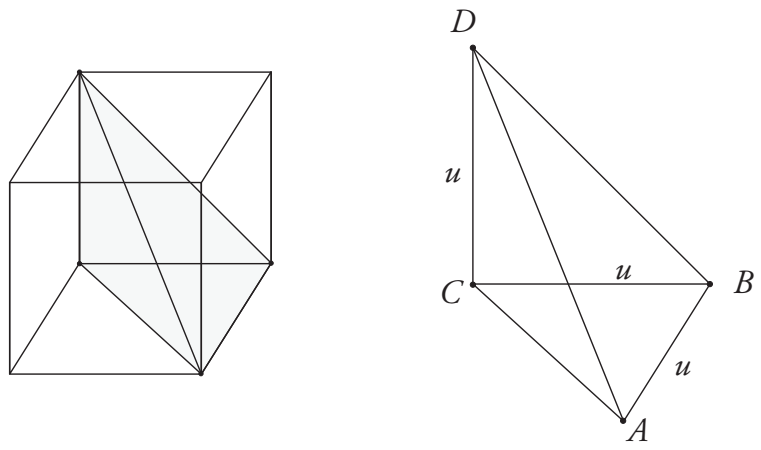
Да бисмо пронашли тражени диедарски угао, искористићемо мали трик. Наиме, коцку ивице u можемо поделити на 6 тетраедара који су подударни са тетраедром T_2 (видети слику 17). Одавде директно следи да је тражени диедарски угао једнак $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Претпоставимо да су тетраедри T_2 и T_0 једнакоразложиви (аналогно се показује и када су једнакодопуњиви). На основу Брикардовог услова постоје позитивни цели бројеви m_1, m_2, m_3, n_1, и $k \in \mathbb{Z}$ тако да важи

$$m_1 \frac{\pi}{2} + m_2 \frac{\pi}{4} + m_3 \frac{\pi}{3} = n_1 \arccos \frac{1}{3} + k\pi.$$

Сада поново добијамо контрадикцију са ирационалношћу $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$.

На сличан начин се доказује и да тетраедри T_2 и T_1 нису ни једнакоразложиви ни једнакодопуњиви.



Слика 24: Ортошема

Последња два примера нам дају решење Трећег Хилбертовог проблема. Пронашли смо два тетраедра која имају исту базу и исту висину, па према томе и исту запремину, а који нису ни једнакоразложиви ни једнакодопуњиви.

6 Денов метод

Као што смо већ напоменули, Денов оригинални доказ је доста компликован и тежак за разумевање. Доказ који ћемо презентовати у овом поглављу представља његову знатно упрошћену верзију, која је резултат рада великог броја математичара, и представља класични доказ Трећег Хилбертовог проблема.

6.1 Денова инваријанта

Посматрајмо коначан скуп $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\} \subset \mathbb{R}$. Са $V(M)$ ћемо означити векторски простор генерисан скупом M над пољем $\mathbb{Q}$, односно

$$V(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} q_i m_i : q_i \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Векторски простор $V(M)$ је коначнодимензионалан јер је генерисан коначним скупом M, па важи

$$dim_{\mathbb{Q}} V(M) \leq k = |M|.$$

Пре него што дефинишемо Денову инваријанту, увешћемо појам адитивне функције.

Дефиниција 6.1. Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ се назива *адитивна функција* ако важи

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

за свако $x, y \in \mathbb{R}$.

За адитивне функције важи следеће тврђење.

Теорема 6.1. Нека је дата адитивна функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тада за свако $\alpha \in \mathbb{Q}$ и свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Доказ. Претпоставимо прво да је α природан број. Овај део доказа изводимо математичком индукцијом.

б.и. За $\alpha = 1$ тривијално важи $f(1 \cdot x) = 1 \cdot f(x)$. Када је $\alpha = 2$ имамо $f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$, јер је функција f адитивна.

и.х. Претпоставимо сада да тврђење важи за природан број k.

и.к. Доказујемо тврђење за $\alpha = k+1$. Испуњено је

$$f((k+1)x) = f(kx+x) \overset{б.и.}{=} f(kx) + f(x) \overset{и.х.}{=} kf(x) + f(x) = (k+1)f(x),$$

а то је и требало показати.

Ако ставимо $x = 0$ добијамо

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0),$$

па је одатле $f(0) = 0$. Сада је

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x),$$

односно

$$f(-x) = -f(x),$$

па је тврђење испуњено и када је α цео број.

Нека је q природан број. Тада важи

$$f(x) = f(q\frac{1}{q}x) = qf(\frac{1}{q}x),$$

одакле је

$$f(\frac{1}{q}x) = \frac{1}{q}f(x).$$

Ако сада узмемо $\alpha = \frac{p}{q}$, где је p цео, а q природан број, добијамо

$$f(\alpha x) = f(\frac{p}{q}x) = f(p\frac{1}{q}x) = pf(\frac{1}{q}x) = p\frac{1}{q}f(x) = \frac{p}{q}f(x) = \alpha f(x).$$

□

Ми ћемо надаље посматрати адитивну функцију $f : V(M) \to \mathbb{Q}$. Приметимо да је својство адитивности еквивалентно услову да ако је испуњено $\sum_{i=1}^{k} q_i m_i = 0$ за неке $q_i \in \mathbb{Q}$, тада важи

$$f(\sum_{i=1}^{k} q_i m_i) = \sum_{i=1}^{k} q_i f(m_i) = 0.$$

Следећа лема ће нам представљати битан аргумент приликом доказивања централне теореме овог поглавља.

Лема 6.1. Нека су дати $M, M' \subseteq \mathbb{R}$, $M \subseteq M'$.

(i) Векторски простор $V(M)$ над пољем $\mathbb{Q}$ је потпростор векторског простора $V(M')$ над пољем $\mathbb{Q}$.

(ii) Адитивна функција $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ се може проширити до адитивне функције $f' : V(M') \to \mathbb{Q}$ тако да важи $f'(m) = f(m)$ за свако $m \in M$.

Доказ.

(i) Први део тврђења тривијално следи из дефиниције векторских простора $V(M)$ и $V(M')$.

(ii) Да бисмо одредили функцију f', потребно је пронаћи вредности функције у бази векторског простора $V(M')$ над пољем $\mathbb{Q}$. Претпоставимо да је, без умањења општости, $M' = M \cup \{\gamma\}$, односно да је у M' само један елемент који није и у M. Разликујемо два случаја.

Случај 1: Међу елементима скупа M' не постоји линеарна зависност облика

$$a_1m_1 + a_2m_2 + \cdots + a_km_k + a\gamma = 0,$$

у којој је a различито од 0. У овом случају за $f(\gamma)$ можемо узети било који рационалан број.

Случај 2: Претпоставимо да постоји зависност

$$a_1m_1 + a_2m_2 + \cdots + a_km_k + a\gamma = 0, \tag{5}$$

међу елементима скупа M', где је $a \neq 0$. За једну такву зависност функција f' треба да задовољава једнакост

$$a_1f'(m_1) + a_2f'(m_2) + \cdots + a_kf'(m_k) + af'(\gamma) = 0. \tag{6}$$

Дефинишимо сада $f'(m) = f(m)$, за $m \in M$ и

$$f'(\gamma) = -\frac{a_1}{a}f(m_1) - \frac{a_2}{a}f(m_2) - \cdots - \frac{a_k}{a}f(m_k).$$

Покажимо да је овако дефинисано f' тражена адитивна функција. Посматрајмо произвољну зависност елемената из M'

$$b_1m_1 + \cdots + b_km_k + b'_1m'_1 + \cdots + b'_lm'_l + b\gamma = 0, \tag{7}$$

где су $m'_1, \ldots, m'_l$ преостали елементи скупа M који нису учествовали у зависности (5). Због претпоставке овог случаја знамо да оваква зависност постоји. Показујемо да тада важи

$$b_1f'(m_1) + \cdots + b_kf'(m_k) + b'_1f'(m'_1) + \cdots + b'_lf'(m'_l) + bf'(\gamma) = 0. \tag{8}$$

Када помножимо (7) са a и одузмимо од тога једначину (5), претходно помножену са b, добијамо

$$(ab_1 - ba_1)m_1 + \cdots + (ab_k - ba_k)m_k + ab'_1m'_1 + \cdots + ab'_lm'_l = 0.$$

Овај однос садржи само елементе из M, па због адитивности функције f важи

$$(ab_1 - ba_1)f(m_1) + \cdots + (ab_k - ba_k)f(m_k) + ab'_1f(m'_1) + \cdots + ab'_lf(m'_l) = 0.$$

Ако претходној једначини додамо (6) помножено са b добијамо

$$ab_1f'(m_1) + \cdots + ab_kf'(m_k) + ab'_1f'(m'_1) + \cdots + ab'_lf'(m'_l) + abf'(\gamma) = 0. \tag{9}$$

Пошто је $a \neq 0$, дељењем (9) са a добијамо једначину (8), па је конструисана функција f' заиста адитивна функција. □

Посматрајмо сада полиедар P са диедарским угловима $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$. Са M_P ћемо обележити следећи скуп

$$M_P = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \pi\}.$$

Сада имамо све што нам је потребно да бисмо дефинисали Денову инваријанту.

Дефиниција 6.2. Нека је дата адитивна функција $f : V(M_P) \to \mathbb{Q}$ за коју важи $f(\pi) = 0$. *Денова инваријанта* полиедра P је дата са

$$D_f(P) := \sum_{e \in P} l(e) f(\alpha(e)),$$

где је e ивица полиедра P, $l(e)$ је дужина ивице e, а $\alpha(e)$ је диедарски угао над e.

Напомена.

(i) Ден је израз $l(e)f(\alpha(e))$ називао маса ивице e. Према томе, Денова инваријанта представља суму маса ивица посматраног полиедра.

(ii) Приметимо још да Денова инваријанта зависи од избора функције f. За различите изборе функције f добићемо различите вредности Денове инваријанте.

(iii) Иако Ден у свом раду није експлицитно дефинисао Денову инваријанту, његов доказ суштински почива на тој идеји.

Пример 6.1. Израчунајмо Денову инваријанту коцке C. Како је за сваку функцију f из дефиниције 6.2 испуњено

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} f(\pi) = 0,$$

добијамо да је Денова инваријанта коцке једнака 0 за сваку такву функцију f, тј.

$$D_f(C) = 0.$$

6.2 Хадвигерова теорема

Следећа теорема ће нам дати начин да пронађемо решење Трећег Хилбертовог проблема помоћу Денове инваријанте.

Теорема 6.2 (Ден–Хадвигер)**.**
Нека су дати полиедри P и Q, и нека су $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ и $\beta_1, \ldots, \beta_q$ редом диедарски углови ових полиедара. Нека је $M = \{\pi, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q\}$. Ако је $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ адитивна функција за коју важи да је $f(\pi) = 0$ и

$$D_f(P) \neq D_f(Q),$$

онда P и Q нису ни једнакоразложиви, ни једнакодопуњиви.

Пре него што покажемо ово тврђење, показаћемо да је Денова инваријанта инваријантна у односу на декомпозиције полиедара.

Теорема 6.3. Нека је дат полиедар P и нека полиедри $P_1, P_2, \ldots, P_n$ чине његово разлагање, тј. $P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$. Нека је M' скуп свих диедарских углова полиедара $P, P_1, P_2, \ldots, P_n$, уз придодат угао π. Ако је $f : V(M') \to \mathbb{Q}$ адитивна функција за коју важи $f(\pi) = 0$, тада је испуњено

$$D_f(P) = D_f(P_1) + D_f(P_2) + \cdots + D_f(P_n).$$

Доказ. Нека је дат сегмент e у декомпозицији полиедра P. Обележимо са $\alpha_1(e), \alpha_2(e) \ldots, \alpha_k(e)$ диедарске углове над e у полиедрима $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}$ који садрже дати сегмент. Сума маса дуж сегмента e у декомпозицији тада износи

$$l(e)f(\alpha_1(e)) + l(e)f(\alpha_2(e)) + \cdots + l(e)f(\alpha_k(e)),$$

што је због адитивности функције f једнако

$$l(e)f(\alpha_1(e) + \alpha_2(e) + \cdots + \alpha_k(e)). \tag{10}$$

У зависности од положаја сегмента e у полиедру P разликујемо следеће случајеве:

- Сегмент e се налази на ивици полиедра P. Ако са $\alpha(e)$ обележимо диедарски угао над ивицом P чији је e сегмент, израз (10) постаје

  $$l(e)f(\alpha(e)),$$

  а то је маса коју даје ивица која садржи сегмент e полиедра P у Деновој инваријанти.
- Сегмент e припада пљосни полиедра P. У овом случају, унија диедарских углова над e износи π, па важи

  $$l(e)f(\pi) = 0,$$

  односно e уопште не доприноси укупној маси.
- Сегмент e се налази у унутрашњости P. Овде унија диедарских углова над e износи π или 2π, што ће поново дати да нема масе над тим сегментом.

Из претходног разматрања видимо да сума маса у декомпозицији зависи само од ивица полиедра P, односно једнака је суми маса полазног полиедра. □

Вратимо се сада доказу Ден–Хадвигерове теореме.

Доказ Ден–Хадвигерове теореме. Доказ изводимо свођењем на контрадикцију. Показаћемо да тврђење важи за једнакодопуњивост, а доказ за једнакоразложивост иде аналогно.

Претпоставимо, дакле, да су полиедри P и Q једнакодопуњиви, односно да постоје $P_1, \ldots, P_n$, $Q_1, \ldots, Q_n$, где је $P_i \cong Q_i$ и

$$P + P_1 + P_2 + \cdots + P_n \cong Q + Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n. \tag{11}$$

Проширимо скуп M до скупа M' тако да M' садржи све диедарске углове из разлагања (11). Пошто посматрамо само коначне декомпозиције, скуп M' је такође коначан. Сада на основу леме 6.1 знамо да функцију f можемо проширити до адитивне функције $f' : V(M') \to \mathbb{Q}$. Како је $\pi \in M$, важиће и $f'(\pi) = 0$. Даље, због теореме 6.3 важи

$$D_{f'}(P) + D_{f'}(P_1) + \cdots + D_{f'}(P_n) = D_{f'}(Q) + D_{f'}(Q_1) + \cdots + D_{f'}(Q_n).$$

Пошто је $P_i \cong Q_i$, важи $D_{f'}(P_i) = D_{f'}(Q_i)$, па је $D_{f'}(P) = D_{f'}(Q)$. Сада је, због начина на који смо добили функцију f', $D_f(P) = D_f(Q)$, што је контрадикција са условом теореме. □

Теорема Ден-Хадвигер даје само потребан услов када су два полиедра једнакоразложива. Швајцарски математичар Сидлер[30] је 1965. године показао да ова теорема такође даје и довољан услов. Овде наводимо само формулацију тврђења, без доказа (доказ погледати у [7]).

Теорема 6.4 (Ден–Сидлер)**.**
Нека су дати полиедри P и Q који имају исту запремину, и нека скуп M садржи диедарске углове датих полиедара, заједно са π. Тада важи:

$$P \text{ и } Q \text{ су једнакоразложиви акко је } D_f(P) = D_f(Q)$$

за сваку адитивну функцију $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ за коју је $f(\pi) = 0$.

6.3 Решење проблема помоћу Денове инваријанте

Пример 6.2. Посматрајмо поново регуларан тетраедар T_0, са ивицама дужине l, из примера 5.6. Као што смо већ видели, диедарски углови тог тетраедра су $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$. Други полиедар који ћемо посматрати је коцка C. Њени диедарски углови износе $\frac{\pi}{2}$.

Сада је $M = \{\alpha, \frac{\pi}{2}, \pi\}$. Приметимо да је $V(M) = V(\{\alpha, \pi\})$, па за скуп M можемо узети само $\{\alpha, \pi\}$. Наш циљ је да конструишемо адитивну функцију $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ за коју ће важити $f(\pi) = 0$ и $D_f(T_0) \neq D_f(C)$.

Посматрајмо функцију $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ дату са

$$f(q_1\alpha + q_2\pi) = q_1.$$

Пошто свако $x \in V(M)$ на јединствен начин можемо написати као $q_1\alpha + q_2\pi$, за неке $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, функција f је добро дефинисана.

Покажимо да је f адитивна. Нека је испуњено

$$p\alpha + q\pi = 0,$$

за неке $p, q \in \mathbb{Q}$. Ако је $p \neq 0$, онда добијамо

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3} = -\frac{q}{p},$$

[30] Jean–Pierre Sydler (1921–1988), математичар и библиотекар, најпознатији по раду у геометрији

а то је у контрадикцији са лемом 5.3. Према томе, мора бити $p = 0$, тј. важи

$$f(p\alpha + q\pi) = p = 0,$$

па је функција f заиста адитивна.

Сада, када смо нашли функцију f, можемо пронаћи Денове инваријанте полиедара C и T_0. У примеру 6.1 смо показали да је Денова инваријанта коцке увек 0, без обзира на избор адитивне функције. Са друге стране имамо да за регуларан тетраедар важи

$$D_f(T_0) = 6lf(\alpha) = 6l \neq 0.$$

Добили смо $D_f(C) \neq D_f(T_0)$, па на основу Ден-Хадвигерове теореме закључујемо да коцка и регуларан тетраедар нису ни једнакоразложиви, ни једнакодопуњиви.

Пример 6.3. Као што смо видели у примеру 5.7, диедарски углови тетраедра T_1 чије су странице AB, AC и AD међусобно ортогоналне и једнаке дужине u су $\frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Исто као малопре, узећемо да је $M = \{\pi, \varphi\}$ уместо $\{\pi, \frac{\pi}{2}, \varphi\}$. Функцију $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ бирамо

$$f(q_1\varphi + q_2\pi) = q_1.$$

На исти начин на који смо то малопре урадили, показује се да је функција f адитивна и добро дефинисана, јер је $\frac{\varphi}{\pi} - \frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ ирационално.

Пронађимо чему је једнака Денова инваријанта тетраедра T_1. Важи

$$D_f(T_1) = 3\sqrt{2}uf(\varphi) + 3uf(\pi) = 3\sqrt{2}u \neq 0.$$

Пример 6.4. Нека је дата ортошема из примера 5.8. Показали смо да диедарски углови тетраедра T_2 износе $\frac{\pi}{2}$ над ивицама AC, BC и BD, $\frac{\pi}{4}$ над AB и CD и $\frac{\pi}{3}$ над ивицом AD.

Како су сви диедарски углови T_2 зависни са π, скуп M можемо записати само као $\{\pi\}$. Сада за тражену адитивну функцију поново бирамо

$$f(q_1\varphi + q_2\pi) = q_1.$$

Одатле је

$$D_f(T_2) = 3uf(\frac{\pi}{2}) + 2uf(\frac{\pi}{4}) + uf(\frac{\pi}{3}) = 0.$$

Тетраедри T_1 и T_2 имају исте базе и исте висине, а различите Денове инваријанте, па на основу Ден-Хадвигерове теореме нису ни једнакоразложиви ни једнакодопуњиви, чиме је Трећи Хилбертов проблем решен.

7 Парадокс Банаха и Тарског

Сада се може поставити питање шта се дешава ако дозволимо поделу објеката на произвољне скупове тачака, а не само разрезивање по равнима. Најпознатији резултат везан за ово питање је парадокс Банаха и Тарског о дупликацији лопте.

Пољски математичари Стефан Банах[31] и Алфред Тарски[32] су 1924. године објавили рад под називом *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes* (*О декомпозицији скупа тачака на респективно подударне делове*), у ком су формулисали и доказали теорему која на први поглед звучи немогуће. Њихово тврђење каже да је могуће извршити дупликацију лопте, тј. поделити лопту на коначан број делова од којих се могу саставити две идентичне копије полазне лопте.

Доказ овог парадокса почива на употреби Аксиоме избора, која ће нам дати да таква подела лопте постоји, и из колико делова се састоји, али нећемо бити у стању да кажемо како тачно ти делови изгледају. Једино што знамо је да су у питању немерљиви скупови, тако да им је немогуће одредити запремину. С обзиром да се ради о коначном броју делова и трансформацијама ротације и транслације, које очувавају растојање, па самим тим и запремину, јасно је зашто је овај резултат интуитивно, најблаже речено, чудан.

Следећи парадокс, који је формулисао Сјерпињски[33], а решио његов ученик Мазуркјевич[34], иако не користи Аксиому избора, даје једнако изненађујуће резултате као парадокс Банаха и Тарског.

Теорема 7.1 (Сјерпињски–Мазуркјевич парадокс)**.**
У равни постоји скуп E који је могуће поделити на два дисјунктна подскупа E_1 и E_2, таква да су подударни са полазним скупом E.

Доказ. Претпоставимо да је дата раван заправо раван комплексних бројева. Знамо да сваки комплексни број $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ можемо записати у експоненцијалном облику као $z = re^{i\theta}$. Одаберимо θ тако да $e^{i\theta}$ буде

[31] Stefan Banach (1892–1948), један од оснивача модерне функционалне анализе

[32] Alfred Tarski (1901–1983), познат по раду у теорији модела, метаматематици, алгебарској логици, топологији, геометрији, теорији мере, математичкој логици и теорији скупова

[33] Wacław Sierpiński (1882–1969), пољски математичар који се бавио теоријом скупова, теоријом бројева, теоријом функција и топологијом

[34] Stefan Mazurkiewicz (1888–1945), пољски математичар, познат по раду у математичкој анализи, топологији и теорији вероватноће

трансцендентан (пошто на јединичној кружници има само пребројиво много алгебарских бројева, знамо да такво θ постоји). Посматрајмо транслацију $\tau(z) = z + 1$ и ротацију $\rho(z) = e^{i\theta}z$. Сада у скуп E бирамо координатни почетак O и све тачке које можемо добити када на O применимо коначан број трансформација τ и ρ. Видимо да сваку тачку из скупа E можемо записати као

$$z = a_0 + a_1e^{i\theta} + a_2e^{2i\theta} + \cdots + a_ne^{ni\theta},$$

где су a_k ненегативни цели бројеви, а n је позитиван цео број. Све тачке скупа E су различите, јер ако би једна тачка имала два различита представљања, тада би $e^{i\theta}$ било решење полиномне једначине, а то је контрадикција са претпоставком да је $e^{i\theta}$ трансцедентно.

Одредимо сада подскупове E_1 и E_2. Нека се у E_1 налазе све тачке које се добијају применом транслације τ на полазни скуп E, а у E_2 све тачке које добијамо ротацијом за ρ скупа E. Сада за тачке из E_1 важи $a_0 > 0$, а за оне из E_2 је $a_0 = 0$. Из избора E_1 и E_2 сада директно добијамо $E \cong E_1$, $E \cong E_2$, $E = E_1 \cup E_2$ и $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. □

Напомена. Скуп E који смо конструисали у претходној теореми је био неограничен. Може се показати да у $\mathbb{R}^2$ не постоји ограничен скуп са непразном унутрашњошћу који се може дуплирати, тј. поделити на коначан број делова од којих се могу саставити две копије полазног скупа (за доказ погледати [27]).

У наставку показујемо да је задату лопту могуће поделити на коначан број делова од којих се затим могу саставити две лопте које су идентичне полазној лопти.

Претпоставимо, без умањења општости, да је задата јединична лопта са центром у координатном почетку, тј.

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Треба доказати да је тада могуће извршити дупликацију лопте. Доказ изводимо у неколико фаза.

7.1 Група ротација

Нека су дате ротације τ која делује у позитивном смеру за $120°$ око z-осе и σ која делује у позитивном смеру за $180°$ око праве $z = x$ у xz-равни. Ове две ротације ће нам бити основне ротације јединичне сфере, јер њиховим композицијама[35] можемо добити бесконачно много других ротација. Приметимо да важи $\tau^3 = \sigma^2 = I$, где је I идентичко пресликавање (идентичка ротација).

Свака од тих ротација (осим идентичког пресликавања) се може представити као реч над азбуком $\{\tau, \tau^2, \sigma\}$. Речи над поменутом азбуком, које

[35] Нови елементи ће се у композицију додавати са леве стране, тј. ићи ће се здесна налево

не садрже подречи $\tau\tau^2$, $\tau^2\tau$, као ни вишеструка узастопна понављања истог слова, називаћемо редуковане ротације. Дужина ротације је минималан број симбола који су неопходни да бисмо дату ротацију записали на поменути начин. Дужина идентичког пресликавања је нула.

На овај начин смо добили пребројиво много ротација. Са G ћемо обележити добијену колекцију ротација, и зваћемо је група ротација. (Лако се проверава да се на описан начин заиста добија структура групе.) Следећи корак је да скуп G поделимо на 3 дисјунктна подскупа G_1, G_2 и G_3. Рекурзивно ћемо додељивати ротације скуповима, и то тако што ћемо прво распоредити ротације дужине један, па затим дужине два, три, четири,... Пре него што разврстамо ротације у подскупове, неопходно је доказати следеће помоћно тврђење.

Теорема 7.2. Свака редукована ротација из G има јединствено представљање.

Доказ. Посматрајмо произвољну редуковану ротацију групе G, различиту од I, τ, τ^2 и σ. Сада та ротација има најмање један од следећа четири облика

$$\begin{aligned}
\alpha &= \tau^{p_1}\sigma\tau^{p_2}\sigma\ldots\tau^{p_n}\sigma \\
\beta &= \sigma\tau^{p_1}\sigma\tau^{p_2}\ldots\sigma\tau^{p_n} \\
\gamma &= \tau^{p_1}\sigma\tau^{p_2}\sigma\ldots\sigma\tau^{p_n} \\
\delta &= \sigma\tau^{p_1}\sigma\tau^{p_2}\ldots\tau^{p_n}\sigma,
\end{aligned}$$

где је $p_i \in \{1, 2\}$ и $n \geq 1$ (за γ је $n > 1$, јер бисмо у противном добили τ^p, а тај случај смо искључили). Показаћемо да ниједан од ова четири облика није једнак са I.

Знамо да ротације τ и σ имају следећи матрични облик

$$\tau = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сада је

$$\tau^p\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\pm\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\pm\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \pm\sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \pm\sqrt{3} \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

при чему се узима плус када је $p = 1$, а минус када је $p = 2$.

Потражимо чему је једнако α. Важи

$$\tau^p\sigma\tau^p\sigma = \frac{1}{2^2}\begin{bmatrix} -2 & \pm\sqrt{3} & 3 \\ \pm 2\sqrt{3} & 1 & \pm\sqrt{3} \\ 0 & \pm 2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix},$$

$$\tau^p\sigma\tau^p\sigma\tau^p\sigma = \frac{1}{2^3}\begin{bmatrix} 6 & \mp\sqrt{3} & 5 \\ \pm 2\sqrt{3} & 7 & \mp\sqrt{3} \\ -4 & \pm 2\sqrt{3} & 6 \end{bmatrix}.$$

Видимо да α можемо записати на следећи начин

$$\alpha = \frac{1}{2^n}\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12}\sqrt{3} & m_{13} \\ m_{21}\sqrt{3} & m_{22} & m_{23}\sqrt{3} \\ m_{31} & m_{32}\sqrt{3} & m_{33} \end{bmatrix},$$

где су коефицијенти $m_{11}, m_{21}, m_{31}, m_{32}, m_{33}$ парни, а $m_{12}, m_{13}, m_{22}, m_{23}$ непарни цели бројеви. Ротација α је различита од јединичне матрице I јер је $\frac{m_{23}\sqrt{3}}{2^n} \neq 0$ пошто је m_{23} непарно.

Претпоставимо да постоји ротација облика β која је једнака са I. Тада је испуњено

$$\sigma\beta\sigma = \sigma I\sigma = \sigma^2 = I.$$

Са друге стране имамо да је

$$\sigma\beta\sigma = \sigma^2\tau^{p_1}\sigma\tau^{p_2}\ldots\sigma\tau^{p_n}\sigma = \tau^{p_1}\sigma\tau^{p_2}\ldots\sigma\tau^{p_n}\sigma,$$

а то је облика α, па долазимо у контрадикцију са малопре показаним.

Посматрајмо сада ротацију облика γ најмање могуће дужине. Разликујемо два случаја: $p_1 = p_n$ и $p_1 \neq p_n$.

Случај 1: Претпоставимо $p_1 = p_n = 1$. Сада је $\gamma = \tau\sigma\tau^{p_2}\sigma\ldots\sigma\tau$, па је

$$\tau^2\gamma\tau = \sigma\tau^{p_2}\sigma\ldots\sigma\tau^2,$$

а то је облика β. Ако би важило $\gamma = I$, имали бисмо

$$\tau^2\gamma\tau = \tau^3 = I,$$

што је контрадикција са чињеницом да β не може бити I. Ако претпоставимо $p_1 = p_n = 2$, до контрадикције долазимо када посматрамо $\tau\gamma\tau^2$.

Случај 2: Нека је сада $p_1 \neq p_n$ и $\gamma = I$. За $n > 3$ важи

$$I = \sigma\tau^{p_n}\gamma\tau^{p_1}\sigma = \tau^{p_2}\sigma\ldots\sigma\tau^{p_{n-1}},$$

па је облика γ са дужином $2n-3$, а то контрадикција са избором n. Остају нам дакле случајеви $n = 2$ и $n = 3$. Када је $n = 2$ имамо $I = \tau^{p_2}\gamma\tau^{p_1} = \sigma$, што није могуће. За $n = 3$ добијамо $I = \sigma\tau^{p_3}\gamma\tau^{p_1}\sigma = \tau^{p_2}$, што је такође немогуће, па закључујемо да претпоставка $\gamma = I$ није тачна.

Ако претпоставимо да је ротација облика δ једнака са I, тада је $\sigma\delta\sigma$ облика γ, за коју смо показали да не може бити једнака I.

Сада показујемо да је свако редуковано представљање ротације јединствено. Претпоставимо да су дате две различите репрезентације исте редуковане ротације $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_s = \rho_1\rho_2\ldots\rho_t$, где је $\lambda_i, \rho_j \in \{\sigma, \tau, \tau^2\}$. Ово је испуњено у случају да је $s \neq t$ или да постоји индекс i за који је $\lambda_i \neq \rho_i$. Без умањења општости можемо претпоставити да за изабране две репрезентације важи да је $s + t$ најмање могуће. Како је

$$\begin{aligned}(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_s)(\rho_1\rho_2\ldots\rho_t)^{-1} &= (\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_s)({\rho_t}^{-1}\ldots{\rho_2}^{-1}{\rho_1}^{-1}) \\ &= (\rho_1\rho_2\ldots\rho_t)({\rho_t}^{-1}\ldots{\rho_2}^{-1}{\rho_1}^{-1}) \\ &= I,\end{aligned}$$

морало би важити $\lambda_s{\rho_t}^{-1} = I$. Одатле бисмо имали $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{s-1} = \rho_1\rho_2\ldots\rho_{t-1}$, што је у контрадикцији са минималношћу $s + t$. $\square$

Напомена. Уместо ротације σ која је ротирала око праве $z = x$ у позитивном смеру за $180°$ могли смо посматрати следећу ротацију

$$\sigma' = \begin{bmatrix} -\cos 2\theta & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin 2\theta & 0 & \cos 2\theta \end{bmatrix},$$

где σ' ротира за $180°$ око праве $x\cos\theta = z\sin\theta$ из xz-равни. Угао θ је угао између оса ротације трансформација τ и σ'. Хауздорф[36] је показао теорему да ако је $\cos 2\theta$ трансцендентан, тада је представљање редуковане ротације јединствено. Барбара Ософски је ово упростила показавши да имамо јединственост и када се изабере $\theta = 45°$, што смо ми и урадили.

Сада можемо извршити партицију скупа G. Распоредимо идентичко пресликавање I у скуп G_1, ротације σ и τ у G_2, а ротацију τ^2 у G_3. На овај начин смо распоредили ротације дужине нула и један. Даље настављамо према правилу које је дато на шеми са слике 25. Ово правило ћемо називати правило партиције.

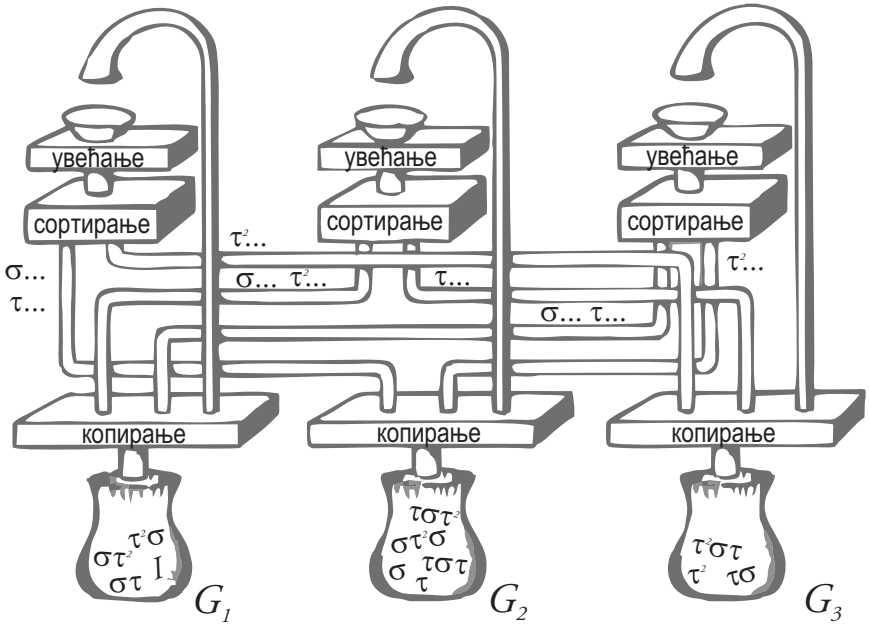
	$\alpha \in G_1$	$\alpha \in G_2$	$\alpha \in G_3$
$\alpha=\tau\ldots$ или $\alpha=\tau^2\ldots$	убаци $\sigma\alpha$ у G_2	убаци $\sigma\alpha$ у G_1	убаци $\sigma\alpha$ у G_1
$\alpha=\sigma\ldots$	убаци $\tau\alpha$ у G_2	убаци $\tau\alpha$ у G_3	убаци $\tau\alpha$ у G_1
	убаци $\tau^2\alpha$ у G_3	убаци $\tau^2\alpha$ у G_1	убаци $\tau^2\alpha$ у G_2

Слика 25: Правило за партицију скупа G на 3 дисјунктна подскупа

Распоредићемо првих неколико ротација да видимо како функционише правило. Ротација $\sigma\tau$ ће ићи у скуп G_1, јер је $\tau \in G_2$. Ротација $\sigma\tau^2$ иде у G_1, $\tau\sigma$ у G_3, а $\tau^2\sigma$ у G_1. Даље, ротацију $\tau^2\sigma\tau$ распоређујемо у G_3, а $\sigma\tau^2\sigma\tau$ иде у G_1, и тако даље. Видимо да имамо неку врсту рекурзивног правила, јер распоред дате ротације зависи од распореда ротације од које је дата ротација настала додавањем још једне основне ротације. Овај поступак је бесконачан, јер на основу теореме 7.2 имамо бесконачно много различитих редукованих ротација.

[36]Felix Hausdorff (1868–1942), немачки математичар који је најпознатији по раду у топологији, теорији скупова, теорији мере и функционалној анализи

Роберт Френч[37] је графички приказао изглед машине која конструише, а затим и сортира ротације, распоређујући их у један од три скупа G_1, G_2, G_3 (слика 26). Машина се састоји из 3 идентична дела која су међусобом повезана тако да прате правило партиције дато на слици 25. Копија претходно креиране ротације се прослеђује до дела у ком се креирају све могуће редуковане ротације чија је дужина за 1 већа од почетне. Након тога се новокреиране ротације прослеђују у део за сортирање, који их у зависности од последњег елемента, шаље даље до копира. Након копирања, једна копија се одлаже у припадајуће G_i, док се друга копија шаље назад у машину, где се поступак наставља. Процес започињемо тако што једну копију I сместимо у G_1, а другу пошаљемо да јој се дужина увећа. Након тога, поступак се аутоматски извршава у бесконачност.



Слика 26: Машина која креира и сортира ротације (слика преузета из [19])

Из правила партиције се лако види да важи

$$\tau G_1 = G_2$$
$$\tau^2 G_1 = G_3$$
$$\sigma G_1 = G_2 \cup G_3.$$

Показаћемо само прву једнакост, док се остале две једнакости изводе аналогним поступком. Показујемо да $r \in G_1$ акко $\tau r \in G_2$.

Претпоставимо да смо извршили партицију скупа G на скупове G_1, G_2 и G_3 на описани начин. Претпоставимо да је r различито од σ, τ, τ^2, јер у тим случајевима тривијално важи тражена еквиваленција. Приметимо да није нужно τ последњи елемент у ротацији τr, јер ако је $r = \tau^2 \sigma r'$, тада је $\tau r = \sigma r'$.

[37] Погледати [19]

Разликујемо следеће случајеве.
1. случај: $r = \sigma r'$
Нека $r \in G_1$. Тада је на основу правила τr у G_2. Претпоставимо сада да је τr у G_2. На основу правила партиције знамо да имамо три начина да ротацију убацимо у скуп G_2, а како је $r = \sigma r'$, закључујемо да је $r \in G_1$.

2. случај: $r = \tau r'$
Имамо да је $r' = \sigma r''$, јер је и r' редукована ротација. Нека је r у G_1. Према правилу партиције, ротацију можемо доделити скупу G_1 на један од четири начина. Како је $r = \tau r'$, закључујемо да је једино могуће $r' \in G_3$. Сада је $\tau r = \tau^2 r'$, па је τr у G_2. Ако је $\tau r = \tau^2 r'$ у G_2, онда је $r' = \sigma r''$ у G_3. Одавде је $r = \tau r'$ у G_1.

3. случај: $r = \tau^2 r'$
Поново зато што је r' редукована ротација важи $r' = \sigma r''$. Претпоставимо $r \in G_1$. Сада је $r' \in G_2$, одакле је $\tau r = r' \in G_2$. Нека се сада τr у G_2. Одавде је директно $r' \in G_2$, па је $r = \tau^2 r'$ у G_1.

Овиме смо завршили прву фазу и сада имамо све што нам је неопходно за другу фазу, која је заправо најзначајнији део нашег доказа.

7.2 Дупликација јединичне сфере

Следећи корак на путу ка доказивању теореме Банаха и Тарског је подела јединичне сфере

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

на два скупа тачака, који се затим могу сложити тако да добијемо две идентичне копије полазне сфере. У овој фази заправо доказујемо такозвани Хауздорфов парадокс.

Теорема 7.3 (Хауздорфов парадокс)**.**
Нека је дата сфера

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Могуће је избацити пребројив скуп из S тако да остатак скупа S можемо поделити на 3 дисјунктна подскупа K_1, K_2 и K_3, таква да су K_1, K_2, K_3 и $K_2 \cup K_3$ подударни.

Доказ. Прво одређујемо пребројив скуп тачака који ћемо избацити са сфере. *Пол* ротације је тачка која остаје фиксирана за дату ротацију. Свака ротација из скупа G има два пола, који се налазе на оси дате ротације. Пошто скуп G садржи пребројиво много ротација, на сфери S постоји пребројиво много полова који одговарају ротацијама из G. Обележимо са P скуп свих полова дате јединичне сфере, а са $S \setminus P$ све остале тачке на сфери. На основу кардиналних бројева скупова S и P ($|S| = \mathfrak{c}, |P| = \aleph_0$) закључујемо да је $|S \setminus P| = \mathfrak{c}$, тј. $S \setminus P$ садржи бесконачно много тачака.

За сваку тачку $p \in S \setminus P$ посматрајмо скуп свих тачака које се од ње добијају ротацијама из G. Означимо тај скуп са O_p. Сада су за сваке две тачке $p, p' \in S \setminus P$ скупови O_p и $O_{p'}$ или једнаки или дисјунктни. Скупове O_p називамо орбитама. Јасно је да постоји непребројиво много таквих орбита, и да оне чине партицију скупа $S \setminus P$.

Сада ћемо из сваке орбите изабрати по један елемент и ставити га у скуп C. Да бисмо то урадили, неопходна нам је аксиома избора.

Аксиома избора (AC).
За сваку фамилију непразних дисјунктних скупова F, постоји скуп који садржи тачно један елемент из сваког скупа дате фамилије F. Да будемо прецизнији, постоји функција избора f, која је дефинисана на фамилији F, таква да за сваки скуп $S \in F$ важи $f(S) \in S$.

Скуп C називамо изборни скуп. Лако се види да за изборни скуп C важе следеће чињенице:

- Кардинални број скупа C је континуум, тј. $|C| = \mathfrak{c}$.
- Пресек изборног скупа и скупа полова је празан, $C \cap P = \emptyset$.
- Ниједну тачку из C не можемо добити ротацијама друге тачке из C.
- Ако бисмо све тачке из C подвргли свим ротацијама скупа G, на крају бисмо добили читав скуп $S \setminus P$.

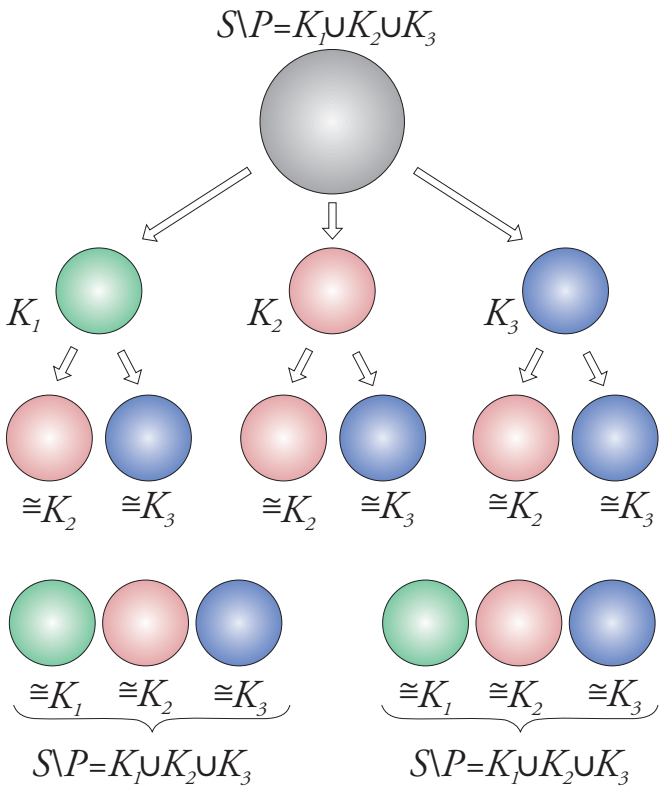
Означимо са G_1C скуп свих тачака које добијамо када на тачке из изборног скупа применимо све ротације из G_1, и аналогно дефинишемо G_2C и G_3C. Сада ови скупа праве партицију скупа $S \setminus P$. Ова три скупа ће нам бити тражени скупови из тврђења, тј. $K_i = G_iC$, $i = 1, 2, 3$.

Скупови K_1 и K_2 су подударни, $K_1 \cong K_2$, јер ако све тачке из K_1 ротирамо са основном ротацијом τ добијамо скуп K_2 (показали смо да је $\tau G_1 = G_2$). Слично је $K_1 \cong K_3$, јер је $\tau^2 G_1 = G_3$, и $K_1 \cong K_2 \cup K_3$ због $\sigma G_1 = G_2 \cup G_3$. Пошто је подударност релација еквиваленције, важи $K_1 \cong K_2 \cong K_3 \cong K_2 \cup K_3$. □

Сада имамо сферу коју смо поделили на четири дела: K_1, K_2, K_3 и P, и притом су делови K_1, K_2, K_3 међусобно подударни, и још су додатно подударни са $K_2 \cup K_3$. Наш циљ је да разделимо сферу тако да од тих делова добијемо две идентичне копије.

Прво ћемо сваки од скупова K_1, K_2, K_3 поделити на два дела уз помоћ скупа $K_2 \cup K_3$ (скуп $K_2 \cup K_3$ нам је „шаблон“ по ком сечемо K_i, тј. K_i делимо на два дисјунктна подскупа од којих је један подударан са K_2 а други са K_3). На овај начин смо добили шест подскупова скупа $S \setminus P$, од којих су три подударна K_2, а три K_3. Како су сва три скупа K_1, K_2, K_3 међусобно подударна, ову ситуацију можемо посматрати и као да имамо два дела са по три скупа, који су подударни са K_1, K_2 и K_3 (погледати слику 27).

На овај начин смо добили дупликацију скупа $S \setminus P$. Сада треба извршити и дупликацију скупа P. Тачке скупа P полазне сфере можемо искористити да „попунимо рупе“ на једној од копија коју смо добили. Пре него



Слика 27: Дупликација скупа $S \setminus P$

што видимо како ћемо „попунити рупе“ на другој сфери, направићемо малу дигресију.

Када смо дефинисали појам једнакоразложивости, захтевали смо само да политопи који учествују у декомпозицији имају дисјунктне унутрашњости, али смо занемарили шта се дешава на ивицама. На овај начин нисмо могли да направимо 1-1 кореспонденцију између тачака једнакоразложивих објеката. Начин да се ово превазиђе је увођење појма скуповне разложивости.

Дефиниција 7.1. Скуп тачака P је *скуповно разложив* на скупове тачака $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ако важи $P = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$ и $P_i \cap P_j = \emptyset$. Скуповну разложивост скупа P означавамо са $P = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$.

Дефиниција 7.2. Скупови тачака P и Q су *скуповно једнакоразложиви*, у ознаци $P \sim_s Q$, ако постоје скупови $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, такви да је $P = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$, $Q = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \cdots \oplus Q_n$ и $P_i \cong Q_i$, за свако $i = 1, \ldots, n$.

Пример 7.1.

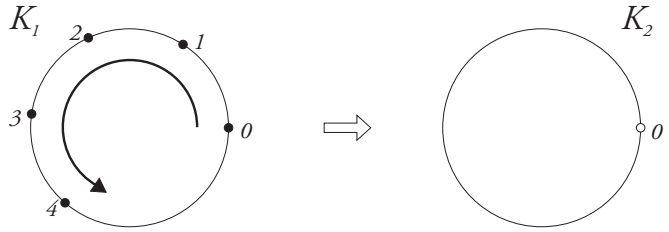
(i) Скупови $\{1, 2, 3, \ldots\}$ и $\{3, 4, 5, \ldots\}$ су подударни, јер померањем за „два корака удесно“ добијамо поклапање. Са друге стране, скупови $\{1, 2, 3, \ldots\}$ и $\{2, 4, 6, \ldots\}$ нису подударни, иако су исте кардиналности.

(ii) Скупови $\{1, 2, 3, \ldots\}$ и $\{1, 2, 3\} \cup \{5, 6, 7, \ldots\}$ нису подударни, али јесу скуповно једнакоразложиви. Ако у другом скупу део $\{5, 6, 7, \ldots\}$ померимо „уназад један корак“, добићемо скуп $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Ово се назива

померање од бесконачности. Исто тако смо могли скуп $\{1, 2, 3, \dots\}$ да поделимо на два дела $\{1, 2, 3\}$ и $\{4, 5, 6, \dots\}$. Сада померањем другог дела „унапред један корак“ добијамо поклапање. Овакво померање називамо *померање ка бесконачности.*

Користећи претходну идеју, показаћемо да су јединичне кружнице K_1 и K_2, где је K_2 заправо K_1 без једне тачке, скуповно једнакоразложиве. Са 0 означимо тачку на K_1 која одговара избаченој тачки са K_2. Померимо се у смеру обрнутом од казаљке на сату за јединичну дужину на K_1 од тачке 0, и обележимо ту тачку са 1. Сада исто урадимо померајући се од 1 за јединичну дужину да добијемо 2, па затим 3, и тако даље. Пошто је обим кружнице 2π, увек ћемо добијати нове тачке, тј. неће доћи до понављања циклуса.

Означимо са A скуп $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, а са B преостале тачке са кружнице K_1 (скуп B је непразан јер кружница има непребројиво много тачака, а A само пребројиво много). Померимо сада тачке из скупа A за један корак у смеру казаљке на сату. Померањем A ка бесконачности добили смо „рупу“ на месту где је била тачка 0, тј. добили смо K_2 (слика 28). На исти начин, само померањем од бесконачности, могли смо од кружнице K_2 добити кружницу K_1.



Слика 28: Кружнице K_1 и K_2 су скуповно једнакоразложиве

Сада када смо видели како функционише померање према и од бесконачности, можемо „попунити рупе“ које су нам остале на сфери (користићемо померање од бесконачности, јер желимо да „запушимо“ рупе, а не да створимо нове). Претпоставимо на тренутак да на сфери имамо само једну рупу. Уочимо једну кружницу на којој се налази посматрана рупа и померањем од бесконачности, на малопре описани начин, попунимо празнину. Сада смо спремни да попунимо све рупе на сфери.

Уочимо осу ротације која не пролази ни кроз једну рупу. Ово можемо урадити јер рупа има само пребројиво много, док оса ротације има непребројиво много. Приликом ротације сфере око изабране осе за све могуће углове, свака рупа ће оставити „траг“ на сфери. На овај начин ћемо добити највише пребројиво много кружница које су трагови тачака које недостају.

Треба да одаберемо угао ротације за који се ниједан од полова неће пресликати на неки други пол. Пошто је $|P| = \aleph_0$, имамо бесконачно много могућности за избор таквог угла. Нека је изабран угао θ. Сада примењујемо померање од бесконачности ротирањем за угао θ на сваку тачку

скупа P. На овај начин смо попунили све рупе и са друге сфере, тј. добили смо две идентичне копије полазне сфере. Означимо ове идентичне копије сфере S са S_1 и S_2.

7.3 Дупликација јединичне лопте

Трећа и последња фаза у доказивању парадокса Банаха и Тарског подразумева проналажење начина да добијену дупликацију сфере S проширимо до дупликације читаве лопте B.

За сваки од поскупова сфере S дефинишемо подебљање на следећи начин.

Дефиниција 7.3. Ако тачка M припада подскупу S' сфере S, тада се у *подебљању* S', у ознаци $\overline{S'}$, налазе све тачке дужи MO, осим центра сфере $O = (0, 0, 0)$. Подебљање сфере S, у ознаци $\overline{S}$ је $B \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Све релације које су важиле за подскупове K_1, K_2, K_3 и P сфере S такође важе и за њихова подебљања, тј. важи

$$\overline{K}_1 \cong \overline{K}_2 \cong \overline{K}_3 \cong \overline{K_2 \cup K_3}.$$

Дакле $\overline{S}$ је могуће подели и делове сложити тако да се добију $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, идентичне $\overline{S}$. Да бисмо доказали теорему Банаха и Тарског недостаје нам само да попунимо центре $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$.

Искористимо центар полазне лопте B да попунимо центар $\overline{S}_1$. На овај начин смо добили лопту B_1. Уочимо кружницу која пролази кроз недостајући центар $\overline{S}_2$ и у потпуности се налази у $\overline{S}_2$. Сада центар за $\overline{S}_2$ добијамо померањем од бесконачности на уоченој кружници. На овај начин смо пронашли и другу лопту B_2 идентичну полазној лопти B.

Три фазе које смо претходно показали представљају доказ чувеног парадокса Банаха и Тарског који се формално записује на следећи начин:

Теорема 7.4 (Банах–Тарски)**.**
Јединичну лопту

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

можемо поделити на два скупа тачака B_1 и B_2 за које важи $B \sim_s B_1$ и $B \sim_s B_2$.

7.4 Јака верзија парадокса

Оно што смо до сада показали је да је могуће извршити дупликацију лопте. Следећа теорема ће нам дати интуитивно још чуднији резултат од самог парадокса Банаха и Тарског.

Теорема 7.5 (Парадокс Банаха и Тарског (јака верзија))**.**
Нека су A и B ограничени скупови тачака у простору, који имају непразне унутрашњости. Тада је $A \sim_s B$.

Јака верзија парадокса Банаха и Тарског нам каже да је, рецимо, могуће зрно грашка поделити на коначан број делова, од којих се може саставити лопта величине Сунца. Због тога се ова јака верзија парадокса често назива *Парадокс о зрну грашка и Сунцу.*

Пре доказа, показаћемо такозвану Банах-Шредер-Бернштајнову теорему. Наиме, Банах је приметио да се позната теорема Шредера[38] и Бернштајна[39] из теорије скупова, која каже да ако за произвољне скупове A и B постоје инјекције $f : A \to B$ и $g : B \to A$, тада постоји и бијекција $h : A \to B$, може применити и на скуповну једнакоразложивост.

Теорема 7.6 (Банах-Шредер-Бернштајн)**.**
Нека су A и B ограничени скупови у простору са непразним унутрашњостима. Претпоставимо да је A скуповно једнакоразложив са подскупом скупа B, у ознаци $A \preceq B$, и да је такође $B \preceq A$. Тада су A и B скуповно једнакоразложиви.

Доказ. Како је $A \preceq B$ и $B \preceq A$, постоје бијекције $f : A \to B_0$, $g : B \to A_0$, где је $A_0 \subseteq A, B_0 \subseteq B$. Означимо са $C_0 = A \setminus A_0$ и дефинишимо рекурзивно низ скупова на следећи начин

$$C_{n+1} = g^{-1}(f(C_n)) \subseteq A.$$

Сада са C означимо следећу унију

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n \subseteq A.$$

Како је $C_0 \subseteq C$ и $C_0 \cap A_0 = \emptyset$, имамо

$$A \setminus C = A_0 \setminus (C \cap A_0) = A_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Сада је

$$\begin{aligned} g(A \setminus C) &= g(A_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \\ &= g(A_0) \setminus g(\bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}(f(C_{n-1}))) \\ &= B \setminus f(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{n-1}) \\ &= B \setminus f(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n) \\ &= B \setminus f(C). \end{aligned}$$

[38]Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder (1841–1902), немачки математичар најпознатији по раду у алгебарској логици

[39]Felix Bernstein (1878–1956), немачко јеврејски математичар који се највише бавио статистиком, актуарском математиком и математичком биологијом

Пре него што наставимо даље, показаћемо једну лему из које ће директно следити решење.

Лема 7.1. За скуповну једнакоразложивост важи:

(a) Ако је $A \sim_s B$, онда постоји бијекција $h : A \to B$ за коју је $C \sim_s h(C)$ за свако $C \subseteq A$.

(b) Ако је $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$ и $A_1 \sim_s B_1, A_2 \sim_s B_2$, онда је испуњено $A_1 \cup A_2 \sim_s B_1 \cup B_2$.

Доказ. (a) Нека $A \sim_s B$. Сада постоје декомпозиције $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$ и $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n$, такве да је $A_i \cong B_i$. Како је $A_i \cong B_i$, постоје бијекције $h_i : A_i \to B_i$, за свако $i = 1, \ldots, n$.
За тачку $a \in A$, са A_{i_a} означимо подскуп у ком се a налази. Сада дефинишемо $h(a) = h_{i_a}(a)$. Тривијално, h је бијекција. Треба проверити да ли је $C \sim_s h(C)$ за свако $C \subseteq A$.
За $C \subseteq A$ важи

$$C = A \cap C = (A_1 \cap C) \oplus \cdots \oplus (A_n \cap C).$$

Сада је

$$h(C) = h_1(A_1 \cap C) \oplus \cdots \oplus h_n(A_n \cap C),$$

тј. важи $C \sim_s h(C)$.

(b) Нека су дате декомпозиције $A_1 = A_1^1 \oplus \cdots \oplus A_1^n, A_2 = A_2^1 \oplus \cdots \oplus A_2^m$ и $B_1 = B_1^1 \oplus \cdots \oplus B_1^n, B_2 = B_2^1 \oplus \cdots \oplus B_2^m$, такве да је $A_1^i \cong B_1^i, i = 1, \ldots, n$, $A_2^j \cong B_2^j, j = 1, \ldots, m$. Сада постоје бијекције $h_1^i : A_1^i \to B_1^i, h_2^j : A_2^j \to B_2^j$. Како је $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$, важи

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \oplus A_2 = (A_1^1 \oplus \cdots \oplus A_1^n) \oplus (A_2^1 \oplus \cdots \oplus A_2^m),$$

$$B_1 \cup B_2 = B_1 \oplus B_2 = (h_1^1(A_1^1) \oplus \cdots \oplus h_1^n(A_1^n)) \oplus (h_2^1(A_2^1) \oplus \cdots \oplus h_2^m(A_2^m)),$$

одакле следи $A_1 \cup A_2 \sim_s B_1 \cup B_2$. □

Вратимо се доказу теореме. На основу особине (a) из леме 7.1 добијамо $A \setminus C \sim_s B \setminus f(C)$ и $C \sim_s f(C)$. Сада је због особине (b)

$$(A \setminus C) \cup C \sim_s (B \setminus f(C)) \cup f(C),$$

одакле је $A \sim_s B$. □

Доказ јаке верзије парадокса Банаха и Тарског. Нека су A и B ограничени скупови тачака у простору, који имају непразне унутрашњости. Довољно је показати $A \preceq B$. Тада је због симетрије и $B \preceq A$, па тврђење следи на основу теореме 7.6. Покажимо $A \preceq B$.

Одаберимо две лопте K и L такве да је $A \subseteq K, L \subseteq B$. На основу парадокса Банаха и Тарског знамо да можемо извршити дупликацију лопте L. Вршимо дупликације све док не добијемо довољан број лопти да копијама L прекријемо читаву лопту K. Претпоставимо да нам је за

ово било потребно n копија. Означимо са L_1 добијени скуп од n дисјунктних копија лопте L. Сада те копије уз помоћ транслација и преклапања можемо довести у жељени положај, и тај скуп ћемо обележити са L_2. Јасно је да важи $L_2 \preceq L_1$, па добијамо $A \subseteq K \subseteq L_2 \preceq L_1 \sim_s L \subseteq B$, одакле је $A \preceq B$. $\square$

8 Закључак

Презентовани на самом старту XX века, Хилбертови проблеми су одредили пут којим ће се математика даље развијати. Захваљујући различитости области којима се проблеми баве, велики број математичара се заинтересовао за ове проблеме и за теме које они обрађују. Управо у томе лежи највећи значај Хилбертовог предавања. Након што су пронађена решења појединих проблема, математичка јавност је наставила да се бави овим проблемима, усавршавајући и уопштавајући пронађене методе.

Посебно место међу проблемима заузима први проблем који је решен, Трећи Хилбертов проблем, који је у великој мери допринео популаризацији Хилбертових проблема. Мотивисан проблемом проналажења елементарног доказа за запремину полиедра, трећи проблем је представљао почетак развоја теорије разложивости. У следећој табели је дат преглед најзначајнијих резултата који се тичу теорије разложивости и Трећег Хилбертовог проблема.

	Једнакоразложивост и n-димензионална запремина	Једнакоразложивост и једнакодопуњивост
$\mathbb{R}^2$	еквивалентни	еквивалентни
$\mathbb{R}^3$	нееквивалентни	еквивалентни
$\mathbb{R}^4$	нееквивалентни	еквивалентни
$\mathbb{R}^n$, $n \geq 5$	нееквивалентни	еквивалентни

Табела 1: Проблеми разлагања који се односе на Трећи Хилбертов проблем

Кроз рад смо се бавили проблемима разлагања и допуњавања у равни и у простору. Показали смо да у равни два полигона имају исту запремину акко су једнакоразложиви. Насупрот томе, у простору не постоји таква еквиваленција. Једнакост запремина два полиедра не гарантује да ће они бити и једнакоразложиви. Испоставља се да еквиваленција услова постоји само у случају када се поред једнакости запремине захтева да полиедри имају и исте Денове инваријанте. За разлику од „обичне“ једнакоразложивости, код скуповне једнакоразложивости увек постоји еквиваленција. Наиме, свака два ограничена скупа тачака са непразним унутрашњостима су скуповно једнакоразложива.

Како је проблем у равни и простору у највећој мери решен, природно се поставља питање уопштења Трећег Хилбертовог проблема у више димензија. Као што видимо из табеле 1 одговор на то питање у $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$ је такође негативан, као и у три димензије. Може се показати да Сидлеров потребан и довољан услов важи и у четири димензије, док проналажење таквог услова у $n \geq 5$ димензија представља отворен проблем. Поред овог проблема, отворен проблем представљају и проблеми разлагања у нееуклидској и сферној геометрији.

Литература

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK, Third Edition*, Springer-Verlag, Berlin, 2004

[2] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK, Fifth Edition*, Springer-Verlag, Berlin, 2014

[3] S. Banach, A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fundamenta Mathematicae Vol. 6 (1924), 244-277

[4] D. Benko, *A New Approach to Hilbert's Third Problem*, The American Mathematical Monthly Vol. 114 (2007), 665-676

[5] P. Bernays, *Hilbert, David*, in P. Edwards (ed.), *The Encyclopedia of Philosophy*, Vol. 3, Macmillan Publishing Co., Free Press, New York, 1967, 496-504

[6] В. Г. Болтянский, *Равновеликие и равносоставленньйе фигуры*, Государствениое издательство тхенико-теоретическої литературы, Москва, 1956

[7] В. Г. Болтянский, *Третья проблема Гильберта*, Наука, Москва, 1977

[8] R. Bricard, *Sur une question de géométrie relative aux polyédres*, Nouvelles annales de mathématiques, tome 15 (1896), 331-334

[9] G. V. Brummelen, M. Kinyon (editors), *Mathematics and the Historians Craft: The Kenneth O. May Lectures*, Springer Science+Business Media, Inc., New York, 2005

[10] M. M. Buck, *Hilberts Problems, Mathematics 3rd Year Project*, School of Mathematical Sciences, University of Nottingham, 2007

[11] M. Dehn, *Ueber den Rauminhalt*, Mathematishe Annalen Vol. 55 (1902), 465-478

[12] M. Dehn, *Ueber raumgleiche Polyeder*, Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, Mathematisch-physikalische Klasse (1900), 345-354

[13] S. L. Devadoss, J. O'Rourke, *Discrete and Computational Geometry*, Princeton University Press, 2011

[14] К. Дошен, З. Марковић, Ж. Мијајловић, *Хилбертови проблеми и логика*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1986

[15] M. Egginton, *Hilbert's Third Problem*, May 2011, draft

[16] R. Fitzpatrick (editor), *Euclid's Elements of Geometry*, 2008, draft

[17] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2000

[18] D. Hilbert, *Mathematical Problems, Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900*, 1900

[19] R. M. French, *The Banach-Tarski Theorem*, The Mathematical Intelligencer Vol. 10, No. 4 (1988)

[20] V. F. Kagan, *Über die Transformation der Polyeder*, Mathematishe Annalen Vol. 57 (1903), 421-424

[21] L. A. Krasilnikova, *Hilbert's Third Problem (A Story of Threes)*, 2015, draft

[22] I. Pak, *Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry*, 2010, draft

[23] J. O'Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press, New York, Oxford, 1987

[24] K. Shiga, T. Sunada, *A Mathematical Gift, III: The interplay between topology, functions, geometry, and algebra*, The American Mathematical Society, 2005

[25] K. Stromberg, *The Banach-Tarski Paradox*, The American Mathematical Monthly Vol. 86, No. 3 (1979), 151-161

[26] K. Subramani, *Fourier-Motzkin Elimination*, Department of Computer Science and Electrical Engineering, West Virginia University, Morgantown, WV

[27] S. Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, 1993

[28] L. M. Wapner, *The Pea & the Sun: A Mathematical Paradox*, A K Peters, Ltd., Canada, 2005

[29] T. Weston, *The Banach-Tarski Paradox*, draft

[30] B. H. Yandell, *The Honors Class, Hilberts's Problems and Their Solvers*, A. K. Peters, Ltd., 2002

[31] *mathafou.free.fr/pbg_en/sol110c.html*

[32] *mathworld.wolfram.com/HilbertsProblems.html*

[33] *www.britannica.com/biography/David-Hilbert*

[34] *www.cut-the-knot.org/do_you_know/Bolyai.shtml*

[35] *www.daviddarling.info/encyclopedia/H/Haberdashers_Puzzle.html*

[36] *www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hilbert.html*

[37] *www-history.mcs.st-and.ac.uk/Extras/Hilbert_Problems.html*

[38] *www.thefamouspeople.com/profiles/david-hilbert-471.php*

Биографија

Радојка Циганović је рођена 7. јула 1991. године у Новом Саду. Похађала је основну школу „Јован Јовановић Змај“ у Сремској Каменици, коју завршава 2006. године као носилац Вукове дипломе. Исте године уписује Гимназију „Јован Јовановић Змај“ у Новом Саду, природно-математички смер. 2010. је завршила гимназију са одличним успехом, након чега уписује Природно-математички факултет у Новом Саду, смер Примењена математика, Математика финансија. Основне академске студије је завршила 2013. године са просечном оценом 9,81, и уписала се на мастер студије математике, смер Теоријска математика. Положила је све испите предвиђене планом и програмом мастер студија са просечном оценом 9,62.

Од 2011. године је стипендиста Српског привредног друштва, Фондације „Привредник“. Две године је била међу добитницима стипендије Доситеја Фонда за младе таленте (2012/13 и 2014/15). Учествовала је на догађају ECMI Modelling Week 2015, који се одржао у Лисабону од 19. до 25. јула 2015. године.

Нови Сад, октобар 2015. *Радојка Циганović*

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:
РБР

Идентификациони број:
ИБР

Тип документације: Монографска документација
ТД

Тип записа: Текстуални штампани материјал
ТЗ

Врста рада: Мастер рад
ВР

Аутор: Радојка Циганović
АУ

Ментор: др Бојан Башић
МН

Наслов рада: Трећи Хилбертов проблем и сродни проблеми разлагања
НР

Језик публикације: српски (ћирилица)
ЈП

Језик извода: српски/енглески
ЈИ

Земља публиковања: Србија
ЗП

Уже географско подручје: Војводина
УГП

Година: 2015
ГО

Издавач: Ауторски репринт
ИЗ

Место и адреса: Нови Сад, Департман за математику и информатику, Природно–математички факултет, Универзитет у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовића 4
МА

Физички опис рада: (8/59/38/1/28/0/0)
(број поглавља/страна/лит. цитата/табела/слика/графика/прилога)
ФО

Научна област: Математика
НО

Научна дисциплина: Комбинаторна геометрија
НД

Предметна одредница/Кључне речи: Трећи Хилбертов проблем, Волас–Бољаи–Гервинова теорема, парадокс Банаха и Тарског, једнакоразложивост, једнакодопуњивост, Денова инваријанта, Аксиома избора
ПО
УДК

Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику Природно–математичког факултета Универзитета у Новом Саду
ЧУ

Важна напомена:
ВН

Извод:
Циљ овог мастер рада је био упознавање са проблемима разлагања у равни и простору, са посебним акцентом на Трећи Хилбертов проблем који гласи: уколико су уочена два полиедра једнаких запремина, да ли је увек могуће један од њих разрезати на коначан број делова од којих је затим могуће саставити други? Рад се може поделити у четири целине. У првој целини се дају мотивација за постављање проблема и његова прецизна формулација. На почетку другог дела се уводе појмови разлагања, једнакоразложивости и једнакодопуњивости. Након тога се доказује Волас–Бољаи–Гервинова теорема која даје потврдан одговор на аналогни проблем разлагања у равни. Трећи део у раду је централни и ту су дата два доказа да је одговор на Трећи Хилбертов проблем, у општем случају, негативан. Први доказ се изводи применом Брикардовог услова, а други помоћу Денове инваријанте. Након тога се наводи потребан и довољан услов да два полиедра буду једнакоразложива. Последња целина у раду је посвећена парадоксу Банаха и Тарског о дупликацији лопте.
ИЗ

Датум прихватања теме од стране НН већа: 09.02.2015.
ДП

Датум одбране: новембар 2015.
ДО

Чланови комисије:
КО

Председник:	др Војислав Петровић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
Ментор:	др Бојан Башић, доцент, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
Члан:	др Борис Шобот, доцент, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Tupe of record: Printed text
TR

Content Code: Master's thesis
CC

Author: Radojka Ciganović
AU

Mentor: Bojan Bašić, Ph.D.
MN

Title: The 3rd Hilbert's problem and related problems of decomposition
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2015
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (8/59/38/1/28/0/0)
(number of sections/pages/references/tables/pictures/graphs/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific Discipline: Combinatorial geometry
SD

Subject/Key words: The 3rd Hilbert's problem, Wallace–Bolyai–Gerwien Theorem, Banach–Tarski Paradox, equidecomposability, equicomplementability, Dehn's invariant, Axiom of choice
SKW
UC

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
The aim of this master thesis was to introduce the problems of decomposition in plane and space, with special emphasis on the Hilbert's third problem which states: if two polyhedra have the same volume, is it always possible to decompose one of them into a finite number of polyhedra that can be rearranged to form the second? The thesis can be divided into four parts. The first part gives motivation for setting the problem and its precise formulation. At the beginning of the second part the concepts of decomposition, equidecomposability and equicomplementability are introduced. After that is proven Wallace–Bolyai–Gerwien theorem which gives an affirmative answer to the analogous problem of decomposition in plane. The third part of the work is central and there are given two proofs that in general the answer to Hilbert's third problem is negative. The first proof is performed using Bricard condition, and the second uses Dan's invariant. After that it is given a necessary and sufficient condition that two polyhedra are equidecomposable. The last section in the thesis is devoted to Banach-Tarski paradox of the duplication of the ball.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 09.02.2015.
ASB

Defended: November 2015.
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Vojislav Petrović Ph.D., full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Mentor:	Bojan Bašić Ph.D., assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	Boris Šobot Ph.D., assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad