



Универзитет у Новом Саду
Природно-математички факултет
Департман за математику и информатику



Радмила Краљ

Примена програмског пакета ГеоГебра у настави Нацртне геометрије

Мастер рад

Нови Сад, 2019.

Садржај

Предговор	2
1 Увод	4
2 Нормално пројектовање на једну раван	7
2.1 Пројекција тачке	7
2.2 Пројекција праве	8
2.3 Права величина нагибног угла праве према пројекцијској равни	9
2.4 Права величина дужи	12
2.5 Међусобни однос две праве	13
2.6 Пројекција равни	15
2.7 Права у равни	17
2.8 Обарање равни	18
2.9 Међусобни положај две равни	19
2.10 Продор праве кроз раван	23
2.11 Нормалност праве и равни	24
3 Нормално пројектовање на две равни	26
3.1 Пројекција тачке на две равни	26
3.2 Пројекција праве на две равни	27
3.3 Обарање праве	29
3.4 Пројекције две праве у зависности од њиховог међусобног положаја у простору .	30
3.5 Први и други траг равни	33
3.6 Сутражница и нагибница равни	35
3.7 Обарање равни	36
3.8 Две равни	37
3.9 Пројекција равног лика	40
4 Нормално пројектовање на три равни	42
4.1 Пројекција тачке на три равни	42
4.2 Пројекција праве на три равни	44
4.3 Пројекција равни	46
4.4 Пројекције равних ликова паралелних и нормалних на пројекцијске равни	51
5 Закључак	54
Литература	55
Биографија	56

Предговор

Нацртна геометрија је област геометрије у којој се проучавају методе пресликавања којима се просторни ликови представљају одговарајућим ликовима у равни. На овај начин постижемо да се решавање одређеног проблема у простору своди на решавање одговарајућег задатка у равни.

Циљ учења Нацртне геометрије је двојак. Први циљ је да се ученици оспособе да нацртају неки облик који виде у простору, а други да развију способност да цртежом добију што је могуће тачнију просторну представу посматраног облика.

Једна од главних тешкоћа које се јављају при изучавању Нацртне геометрије се огледа у томе да просторни облици имају три димензије, а цртеж само две. Зато одређени број ђака веома тешко визуализује постављене проблеме.

Класична настава Нацртне геометрије подразумева да се сви цртежи добијају класичном конструкцијом, односно употребом геометријског прибора. Данас, када се у процесу наставе све више говори о модернизацији и о различитим начинима мотивисања ученика, класична настава трпи велике промене. Узимајући у обзир чињеницу да ученици све више времена проводе уз рачунаре и да им класична настава углавном не држи пажњу, јер захтева много времена, прецизности и посвећености, поставља се питање да ли им је Нацртну геометрију могуће приближити на неки иновативнији начин? У овом раду је то покушано применом пакета ГеоГебра. ГеоГебра је апликација која повезује геометрију, алгебру и анализу и намењена је за учење и подучавање математике у школама. Неке од њених предности су што је бесплатна и лако доступна. Такође, могућа је њена инсталација на телефоне новијих генерација, па за одвијање овако осмишљене наставе није неопходно имати рачунарски кабинет на располагању.

Нека од истраживања о употреби софтверског пакета ГеоГебра у настави могу се наћи и у радовима [6], [7] и [8].

Осим на факултетима, настава Нацртне геометрије се одвија и у грађевинским и техничким стручним школама, као и у гимназијама. Осим у четворогодишњем средњем образовању, Нацртна геометрија се изучава и у неким трогодишњим средњим стручним школама као обавезан предмет. Овај рад ће се првенствено бавити

обрадом градива прилагођеног средњим школама, док би курсеви на факултету обухватили шире градиво.

Велику захвалност дугујем свом ментору др Горану Радојев, како на помоћи око избора теме, тако и на свим саветима, сугестијама и примедбама које су допринеле изради овог рада. Такође, захвалност дугујем и члановима комисије др Ђурђици Такачи, др Мирјани Штрбоји и др Мирјани Брдар.

Радмила Краљ

Нови Сад, јул 2019.

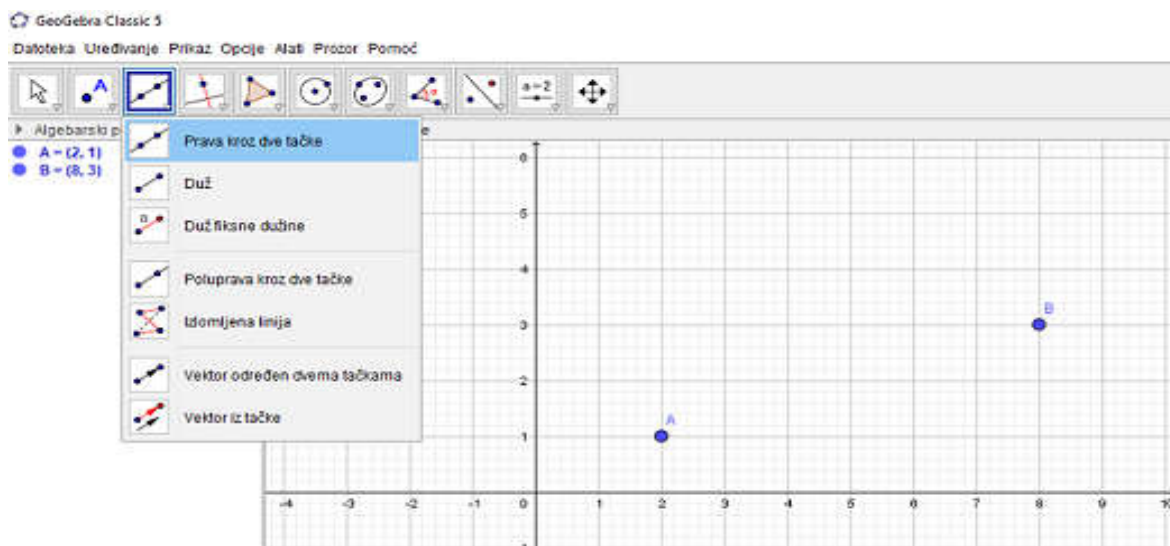
1 Увод

Рад је издељен у три главне целине: нормално пројектовање на једну, две и три равни. Све конструкције у овом раду су урађене у ГеоГебри. Сам рад садржи слике радова у поменутој апликацији. Једна од великих предности ГеоГебре је та да се објекат који посматрамо може представити у тродимензионалном приказу, што ученицима знатно помаже у визуализацији проблема. Такође, пружа могућност „ротирања“ простора што омогућава сагледавање проблема из свих углова, што у класичној настави није увек лако изводљиво.

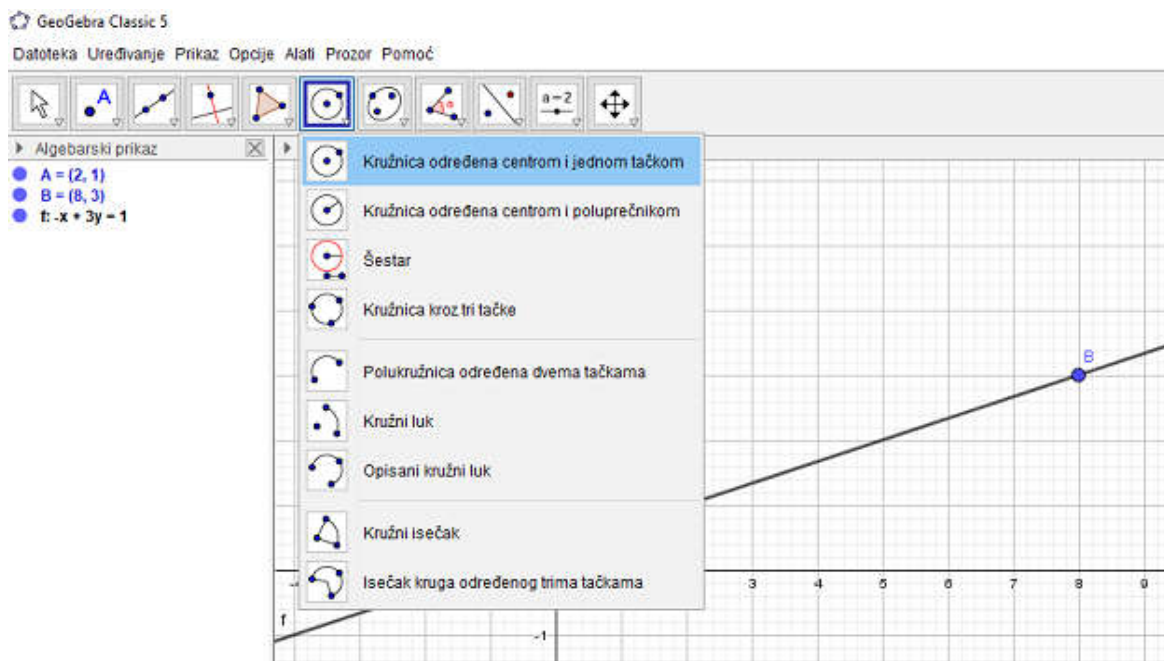
Сви динамички цртежи који су решење проблема приказаних у примерима који су обрађени у овом раду могу се наћи на адреси <https://www.geogebra.org/m/nntrzc2g> и на CD-у, који је приложен уз овај мастер рад.

Сама апликација ГеоГебра је веома једноставна за рад. Приликом покретања самог програма појављује се контролна линија са иконицама за већину објеката који су нам потребни за конструкцију. Кликом на неку од иконица дати објекат постављамо на површину за рад тамо где нам одговара. Такође, на располагању су нам два окружења у којима можемо радити: дводимензионални и тродимензионални приказ. ГеоГебра као апликација је веома заступљена, па ако приликом конструкције и наиђемо на неки проблем у смислу функционисања самог програма, решење је веома лако наћи јер постоји велики број појашњења на интернету.

У раду је урађен велики број цртежа, а основа за сваки од њих је цртање праве, кружнице и постављање клизача. Приликом цртања праве потребно је нацртати две тачке које је одређују, што се лако ради кликом на иконицу „тачка“. Затим се бира иконица „права кроз две тачке“ и кликом на тачке које су већ нацртане добијамо праву. Такође, приликом израде цртежа у овом раду веома често је коришћена кружница. На самим цртежима она углавном није видљива, али се користи за добијање различитих пресечних тачака. Кружницу лако добијамо кликом на иконицу „кружница“ и затим на тачку која је одређена да буде центар кружнице. Полупречник кружнице може бити фиксиран или променљив, што добијамо употребом клизача.

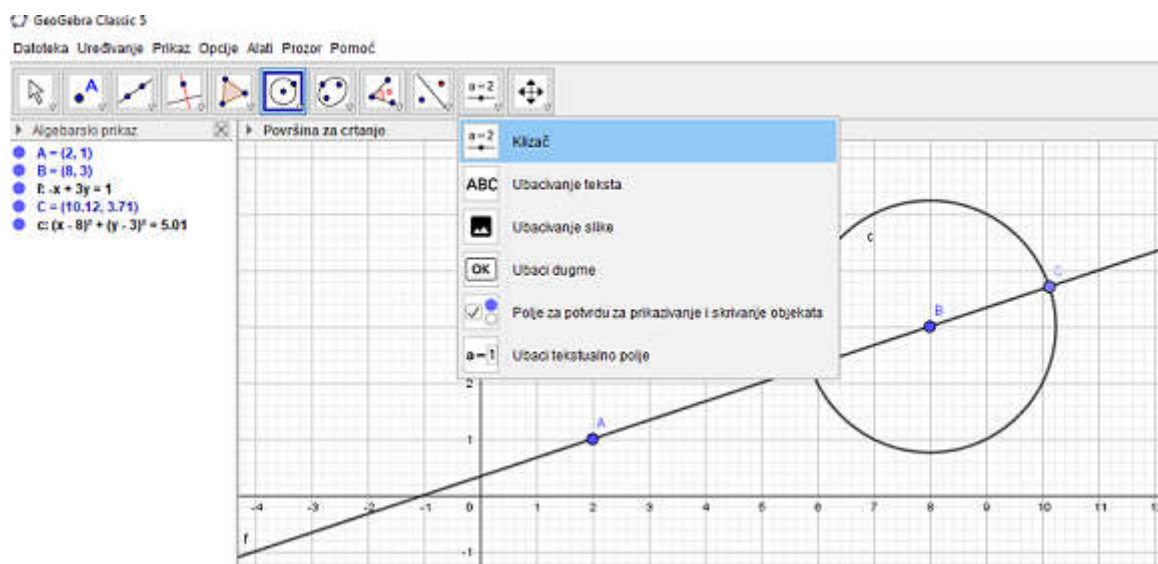


Постављање праве кроз две тачке

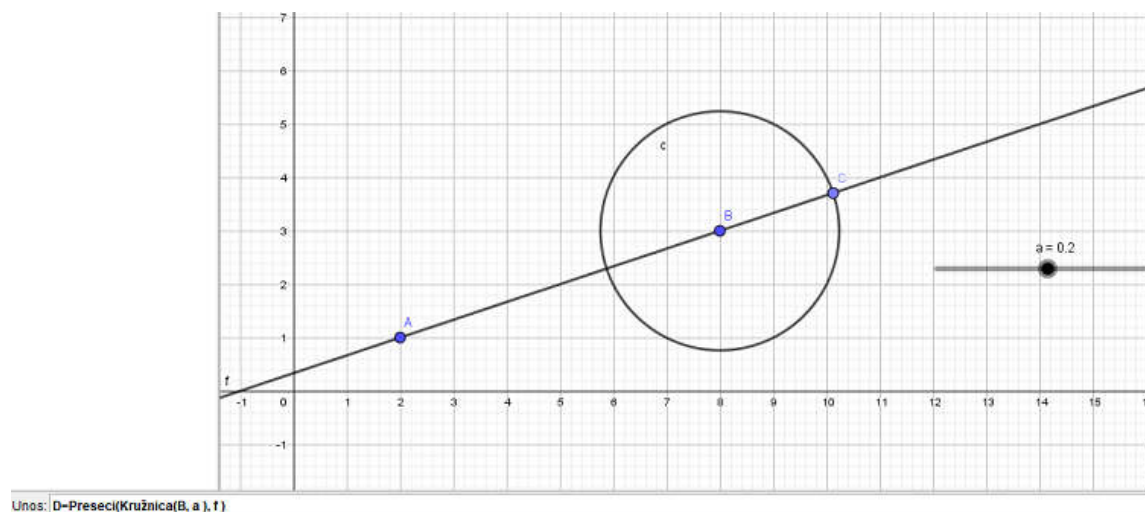


Постављање кружнице

Неки од цртежа у овом раду су динамички цртежи, што значи да померањем одређених објеката долазимо до промене разних елемената на цртежу. У ову сврху су најчешће коришћени клизачи који су постављани ради промене одстојања неких тачака. Поред тога, сваком од клизача је потребно доделити функцију, коју куцамо у поље унос.



Постављање клизача



Додељивање функције клизачу а

Пре него што пређемо на сам рад, у овом делу ће бити објашњени начини обележавања одређених објеката.

Тачке су обележене великим латиничним словима A, B, P, Q, ..., а праве малим латиничним словима p, q, r ... Равни обележавамо грчким словима $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ док су ознаке π_1, π_2, π_3 ознаке за пројекцијске равни.

Прве пројекције обележавамо са A', C', p', ..., друге са A'', C'', p'', ..., треће са A''', C''', p''', ... Оборене положаје тачака или правих обележавамо са A₀, C₀, p₀, q₀, ...

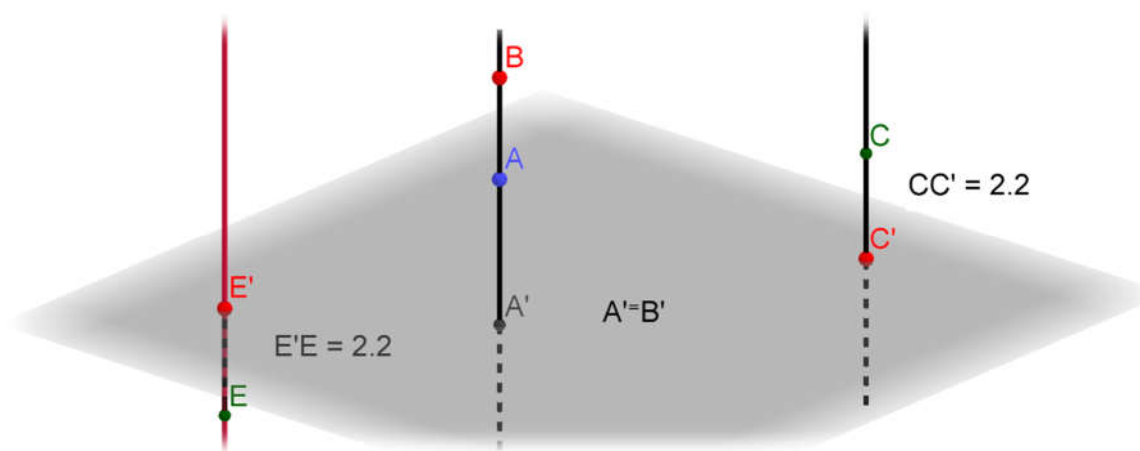
Сви примери који су обрађени у овом раду преузети су из [2] и [5].

2 Нормално пројектовање на једну раван

У овом поглављу бавићемо се нормалним пројектовањем на једну раван. У нацртној геометрији, уопштено, каже се да слика настаје пројектовањем неког објекта на раван слике. Раван слике називамо *раван пројекције* или *пројекцијска раван* и обележавамо је са π . Праве или зраци који врше пројектовање називамо *пројектујући зраци*. Ако су ови зраци нормални на пројектујућу раван ради се о нормалном (ортогоналном, управном) пројектовању, које је наш предмет интересовања [1].

2.1 Пројекција тачке

Нека је дата раван π и тачка A ван ње. Да бисмо одредили нормалну пројекцију дате тачке на раван повучемо кроз тачку A пројектујући зрак p нормалан на раван π . Тачка у којој пројектујући зрак p продире пројекцијску раван π представља нормалну пројекцију тачке A у ознаци A' .



Слика 1. Пројекција тачке на раван

На Слици 1. се види да је за произвољну тачку A – њена пројекција A' јединствено одређена. Са друге стране, за тачку A' – тачка A није јединствено одређена, тј. свака тачка која припада пројектујућем зраку p се пројектује у тачку A' , (на пример тачка B , са Слике 1). Да би ово пресликавање било обострано једнозначно, потребно је увести појам одстојања тачке од пројекцијске равни π као и са које стране равни се тачка налази. Као што видимо на слици за тачку C' и одстојање 2.2 са горње

странице равни π , тачка C је јединствено одређена. Често се ова одстојања пишу бројевима поред саме тачке. Овакве бројеве називамо котама.

Предност обраде овог проблема помоћу пакета ГеоГебра је у томе што ученици једноставним померањем тачке B дуж пројекцијског зрака могу да уоче да за било које одстојање тачке од равни π добијају исту пројекцију, тј. да се пројекција поклапа са тачком A' . Лако се уочава да уколико тачку померамо дуж пројекцијског зрака тако да она постане тачка саме равни π , пројекцијска слика се поклапа са њом самом (ова чињеница ће бити значајна приликом обраде трага праве). Такође, могу да уоче, да би ово пресликавање било бијекција, није довољно да само знамо одстојање тачке од равни већ и страну равни где се тачка налази (нпр. тачке C и E на Слици 1).

2.2 Пројекција праве

Пројекција праве на раван π зависи од положаја праве у односу на раван. Разликујемо три случаја (Слика 2).

1. Права p је нормална на раван π .

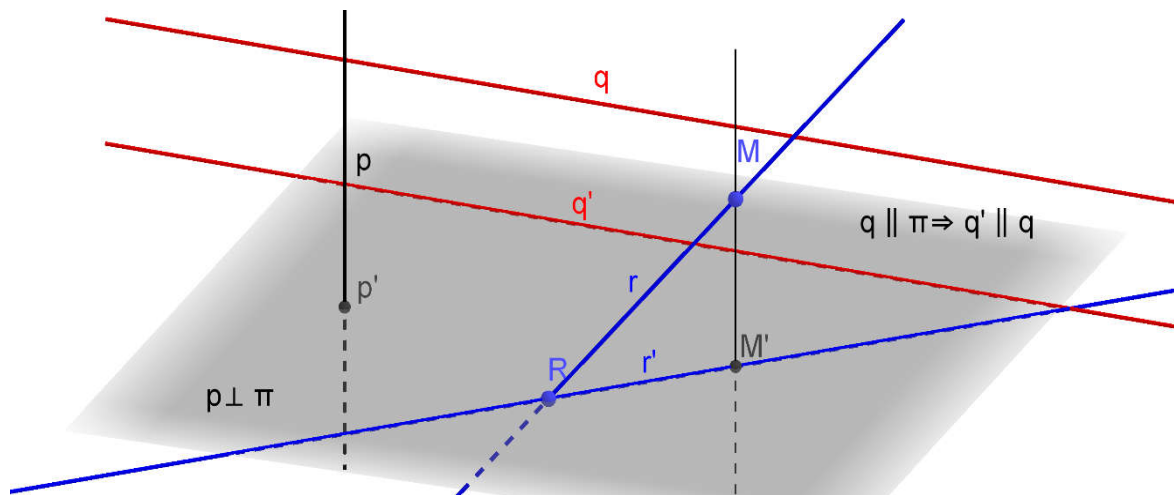
У овом случају се права p поклапа са пројектујућим зрацима сваке њене тачке те је пројекција праве на раван π тачка O — и то тачка продора праве кроз раван.

2. Права q је паралелна равни π .

У овом случају све тачке праве q се налазе на истом одстојању од равни π . Пројектујући зраци сваке тачке праве q образују пројектујућу раван. Ова раван у пресеку са равни π даје праву q' и због једнаких растојања свих тачака праве q од равни π , важи $q \parallel q'$.

3. Права r продире раван π под произвољним углом (различитим од правог).

У овој ситуацији имамо заједничку тачку праве r и равни π . Та тачка се назива траг праве r . Како се она налази на пројекцијској равни важи да се тачка поклапа са својом пројекцијом. Пројекцију праве r добијамо у пресеку равни π и пројектујуће равни. То је права r' . У уџбенику [1] је дата анализа да је у овом случају пресликавање $r \rightarrow r'$ јединствено одређено, док обрнуто није. Уколико нам је r' дато, свака права која садржи траг P и припада пројектујућој равни ће имати исту пројекцију. Да бисмо у овом случају имали једнозначност треба да знамо одстојање бар једне тачке посматране праве.

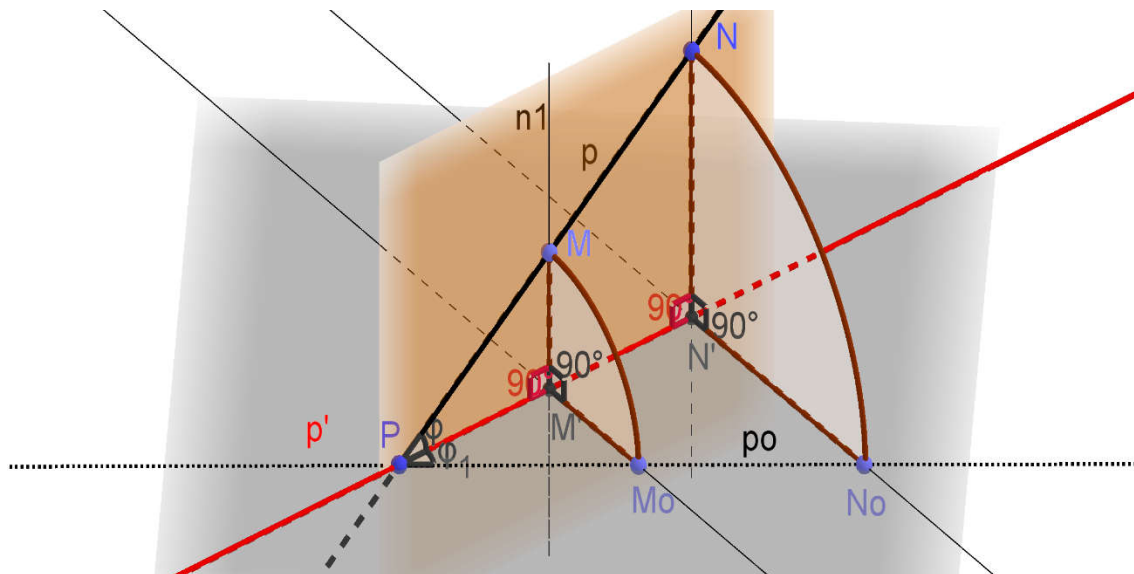


Слика 2. Пројекција праве у зависности од њеног положаја

ГеоГебра нам пружа могућност да сва три могућа случаја уочимо на једном динамичком цртежу, за разлику од класичне конструкције где их морамо засебно конструисати и није у потпуности јасна зависност међу њима. За почетак конструишемо праву која продире кроз пројекцијску раван под произвољним углом, различитим од правога (права g , Слика 2). Из овог положаја ученици лако могу да дођу до друга два, специјална положаја. На пример, померањем неке тачке $R \in g$ дуж њеног пројекцијског зрака и довођењем у положај тако да има исто одстојање од равни π као и нека друга тачка M праве g , добијамо први специјалан случај – случај када је права паралелна равни π . Тада ученици јасно могу да виде да је права паралелна својој пројекцији. Уколико није уочљиво можемо користити ротацију 3D површине за цртање, где ће се јасно видети паралелност. Други специјални положај добијамо померањем праве тако да заузме нормалан положај у односу на раван π , где се права доводи у положај поклапања са својим пројекцијским зраком. Знајући претходно научено, ученици лако виде да је пројекција овакве праве само једна тачка.

2.3 Права величина нагибног угла праве према пројекцијској равни

Праву величину нагибног угла праве према равни π добијамо као угао између обореног положаја праве и њене пројекције (Слика 3).

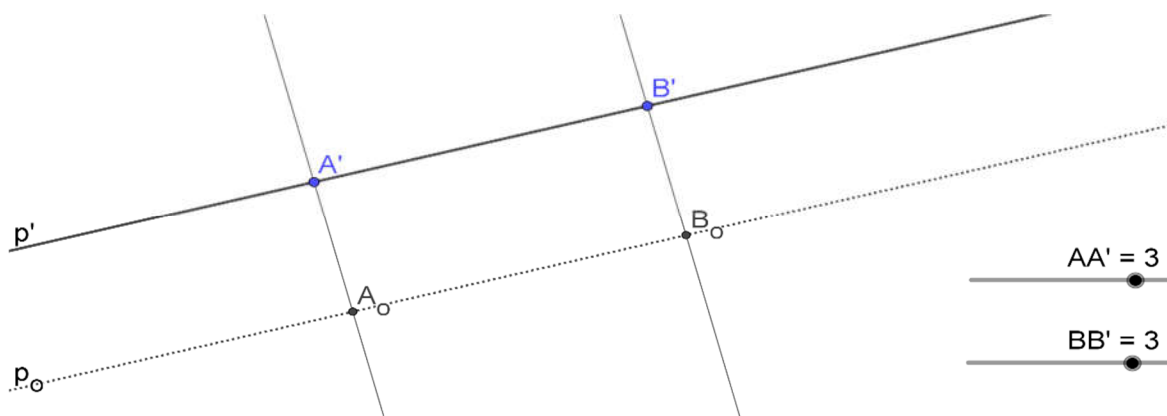


Слика 3. Оборен положај праве и права величина нагибног угла

Уколико нам је дат траг праве r и тачка M' као и одстојање тачке M од равни π тада оборен положај праве r конструишемо на следећи начин. Тачку M_o добијамо тако што у тачки M' конструишемо нормалу на праву r' . Затим на тој нормали тачку M_o одређујемо тако да важи $M'M_o = OM$, где је дуж OM растојање тачке M од равни π . Оборен положај праве r добијамо као праву одређену са P и M_o .

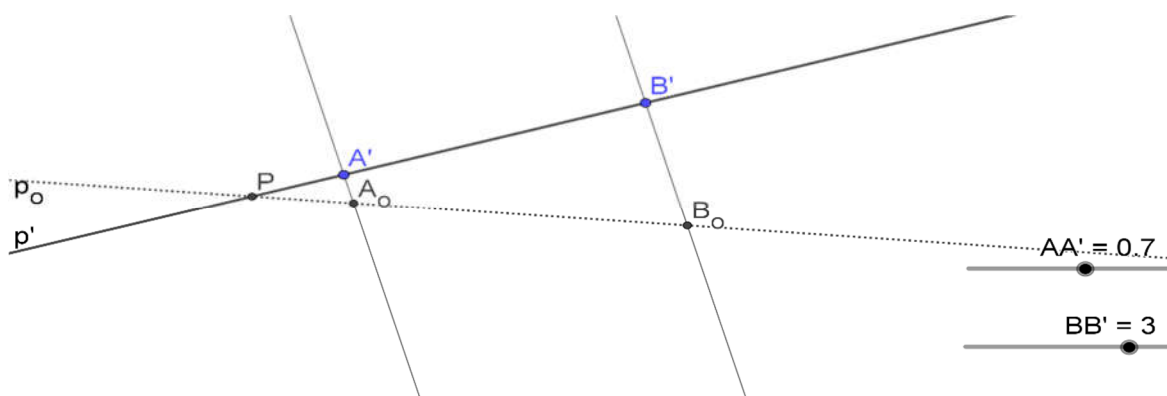
Користећи ГеоГебру ученици су у могућности да директно увиде промену положаја пројекције праве приликом промене одстојања њених тачака од равни π , као и од промене нагибног угла праве.

Нека су дате пројекције A' и B' тачака A и B праве r , као и одстојања тачака A и B од равни π .



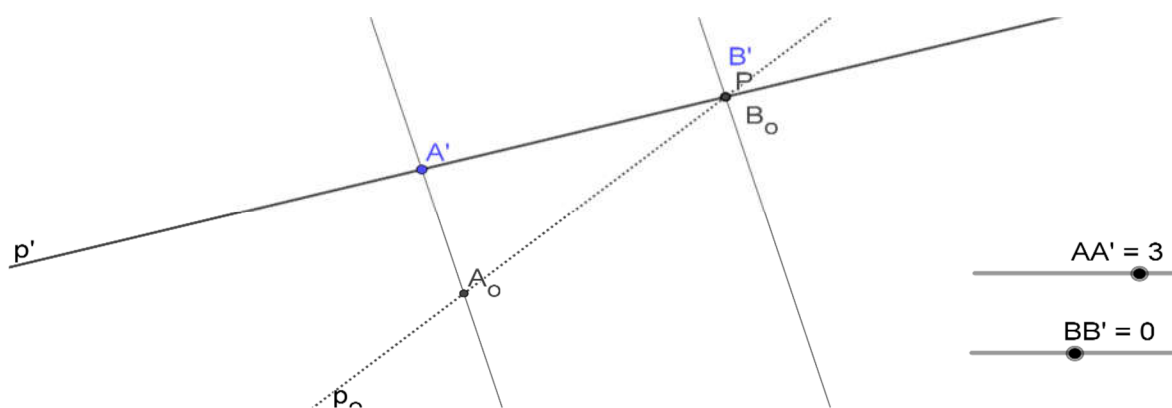
Слика 4а. Конструкција обореног положаја праве помоћу пакета ГеоГебра

ГеоГebra омогућава ученицима да лако увиде да ако се све тачке праве p' налазе на истом одстојању од равни π , односно ако је $AA' = BB'$, оборени положај праве је паралелан са пројекцијом и у том случају немамо пресечну тачку која представља траг праве (Слика 4а). Од велике помоћи приликом оваквог приказа је што ГеоГebra нуди могућност постављања клизача, па ученици на једном динамичком цртежу могу да уоче више могућих положаја, што приликом класичне конструкције није могуће.



Слика 4б. Конструкција обореног положаја праве помоћу пакета ГеоГebra

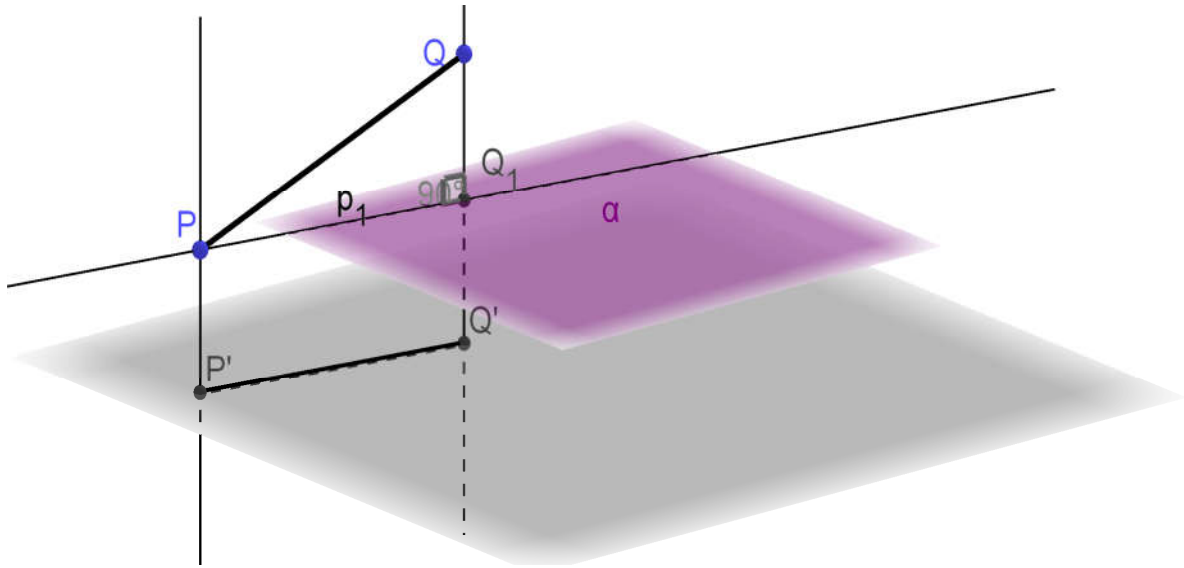
Уколико клизаче AA' и BB' поставимо на различите вредности, онда ученици могу да виде да ће се праве p' и p_0 сећи, тј. да права p продире раван π , а да је та тачка пресека управо траг праве p (Слика 4б).



Слика 4в. Конструкција обореног положаја праве помоћу пакета ГеоГebra

Уколико клизач за одстојање неке тачке поставимо на вредност 0, што значи да је та тачка праве уједно и тачка равни π , управо та тачка ће и бити траг праве p (Слика 4в).

да је $PQ_1 = P'Q'$. Троугао PQ_1Q је правоугли, па важи да је хипотенуза већа од катете, тј. да је $PQ > PQ_1$. Из ове две чињенице лако закључујемо да је $PQ > P'Q'$.



Слика 6. Права величина дужи

Једноставним померањем тачке Q дуж нормале ученици лако виде да је стварна дужина дужи увек већа или једнака од њене пројекције. Уколико тачку Q доведу до поклапања са тачком Q_1 лако уочавају да је $PQR'Q'$ правоугаоник и последично да је $PQ = P'Q'$.

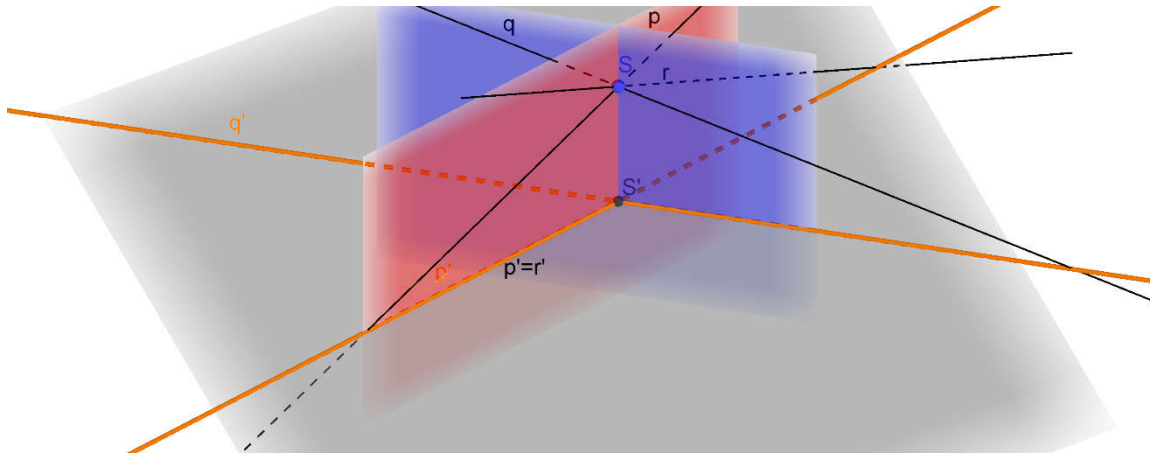
2.5 Међусобни однос две праве

У зависности од тога који положај праве заузимају у простору имамо различите положаје њихових пројекција на раван π , који се могу наћи у [1] и [3].

1. Праве p и q се секу у простору

Разликујемо два могућа положаја њихових пројекција (Слика 7):

- i. Права p и q немају исту пројектујућу раван.
У овом случају се пројекције ове две праве секу.
- ii. Праве p и q имају исту пројектујућу раван.
У овом случају се пројекције поклапају.

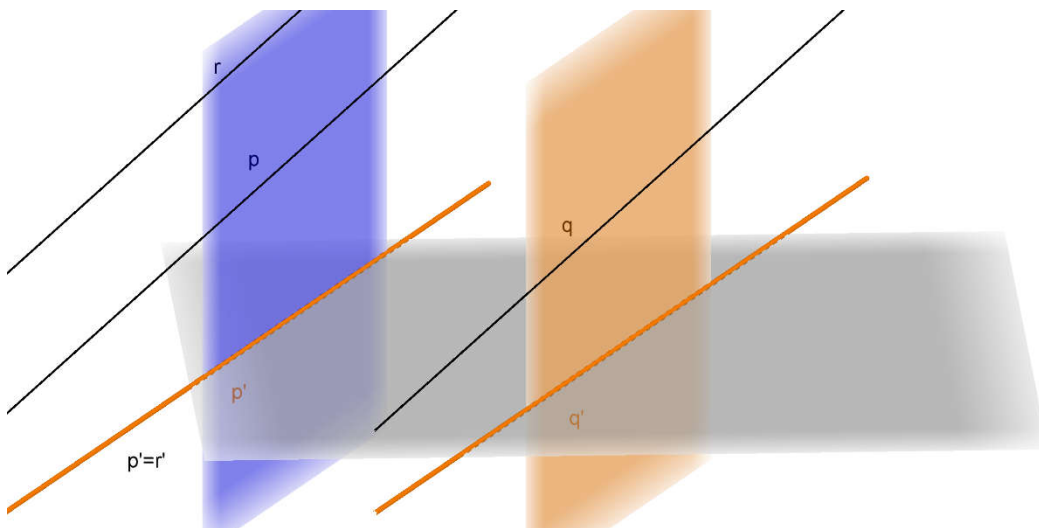


Слика 7. Пројекција правих које се секу

2. Праве p и q су паралелне.

Пројекције овако две постављене праве могу се сврстати у две групе (Слика 8):

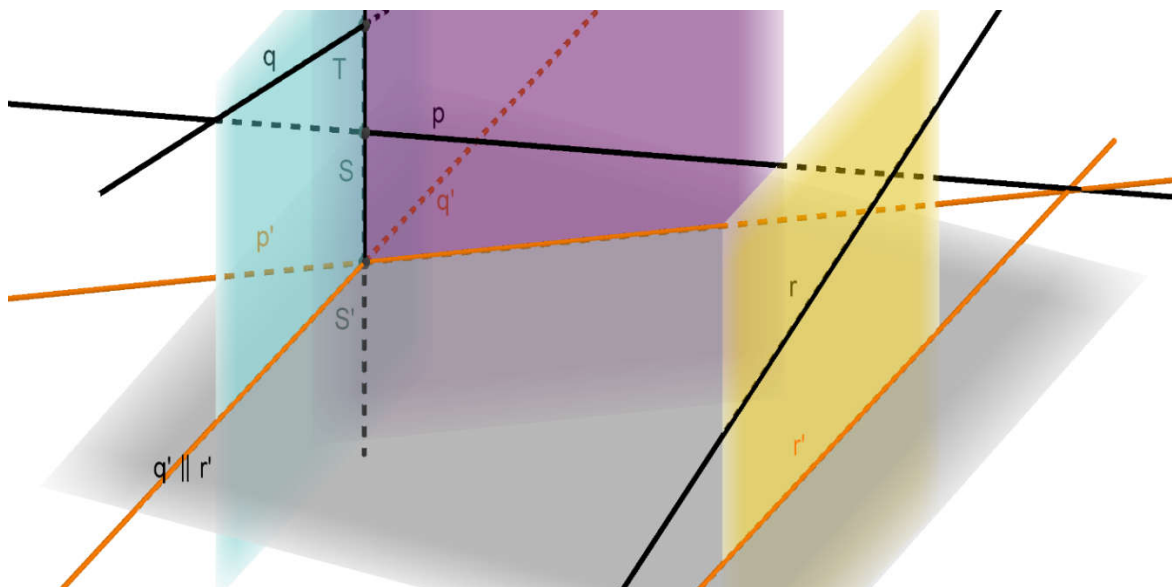
- i. Праве p и q немају исту пројектујућу раван.
У овом случају пројекције p' и q' су такође паралелне праве.
- ii. Праве p и q имају исту пројектујућу раван.
Пројекције правих p и q се поклапају.



Слика 8. Пројекције паралелних правих

3. Праве p и q су мимоилазне (Слика 9). Тада су могућа два односа њихових пројекција:

- i. Пројекције p' и q' су паралелне праве.
- ii. Пројекције p' и q' се секу.



Слика 9. Пројекције мимоилазних правих

Са друге стране, лако можемо закључити да уколико су дате само пројекције p' и q' које се секу, без одстојања и пројекција по две њихове тачке, онда праве p и q могу бити мимоилазне или се могу сећи у простору. Ако су дате само пројекције p' и q' које су паралелне, тада праве p и q могу бити мимоилазне или паралелне. И последњи случај, уколико се пројекције две праве поклапају онда су праве паралелне или се секу и имају исту пројектујућу раван.

Предност учења коришћењем ГеоГебре је у томе што ученици лакше уочавају да пројекције правих не зависе само од њиховог положаја у простору већ и од тога да ли оне припадају истој пројектујућој равни или не. Приликом обраде овог дела посебно је захвално користити тродимензионалну анимацију помоћу које ученицима можемо приближити све могуће положаје правих у простору, што је неким ученицима веома тешко да замисле уколико се користи класичан приступ настави.

2.6 Пројекција равни

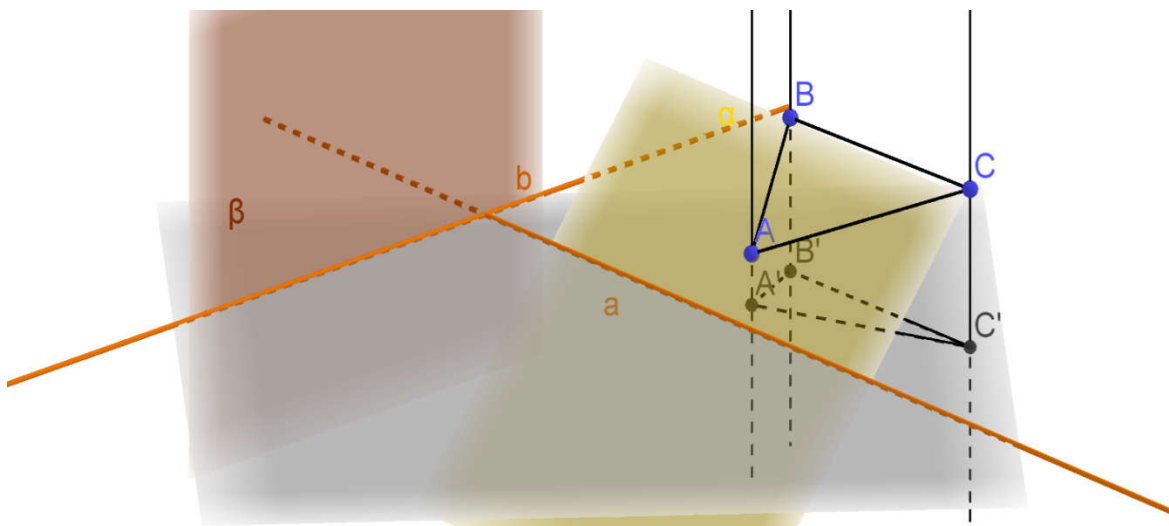
Пројекција произвољне равни α на раван π може бити сама раван π или само једна права у равни π . Пројекција зависи од положаја равни α у односу на пројекцијску раван π .

1. Раван α није нормална на π .

У овом случају се пројекција равни α поклапа са равни π . Права a која представља пресек равни α и пројекцијске равни π назива се траг равни α .

2. Раван β није нормална на π .

Пројекција равни β је само једна права и она се поклапа са трагом равни β , односно са правом b (Слика 10).

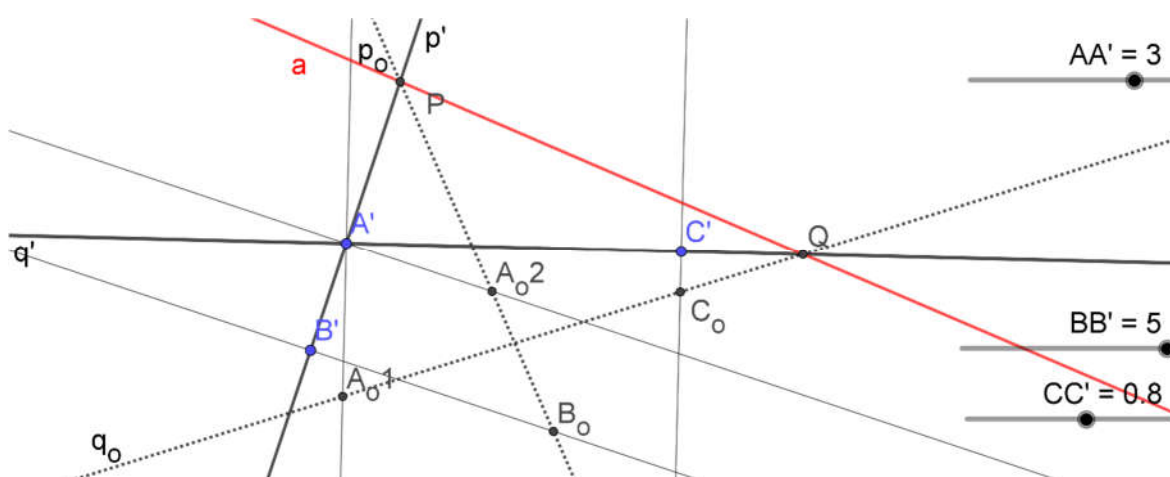


Слика 10. Пројекција равни у зависности од положаја

Пример 2. Три тачке равни α дате су својим пројекцијама и одстојањима од равни π . Наћи траг равни α .

Решење.

Приликом решавања овог проблема користимо чињеницу да се траг сваке праве која припада некој равни налази на трагу те равни. Такође, знамо да траг праве можемо наћи у пресеку пројекције праве и њеног обореног положаја. Како су нам дате три тачке са одстојањима од равни π можемо да формирамо две праве, чији ће трагови бити довољни да одредимо нову праву која представља траг равни α (Слика 11). $\square$



Слика 11. Решење Примера 2 у Геогеври

Решавањем овог примера, ученици лако увиђају да се положај трага равни одређене са три тачке мења у зависности од одстојања тих тачака од равни π . Интересентно је ученицима приказати случај када су три дате тачке колинеарне, где ће видети да се траг не може одредити.

2.7 Права у равни

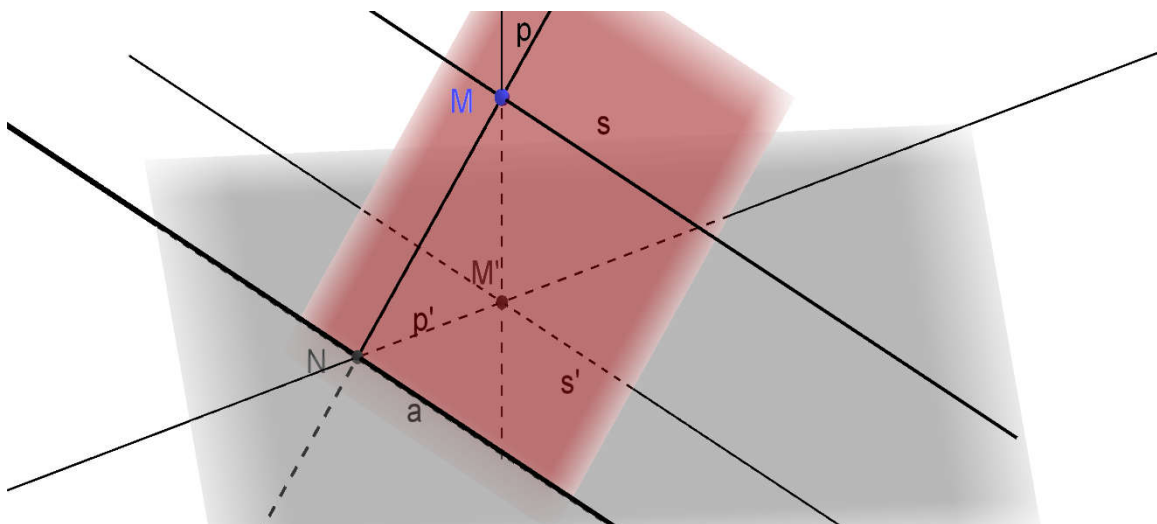
За било коју праву која има траг и која припада произвољној равни важи да траг праве припада трагу равни. Разликујемо два специјална положаја која права може да заузме у равни:

i. Сутражнице или упореднице

То су праве у равни чије су пројекције паралелне трагу равни а које су и саме паралелне трагу (права s на Слици 12). За њих важи да је свака њихова тачка на једнаком одстојању од равни π .

ii. Нагибнице или линије пада

То су праве у равни које су нормалне на траг равни (права p на Слици 12). Такође важи и да су њихове пројекције такође нормалне на траг равни што можемо видети и у радовима [1] и [4].

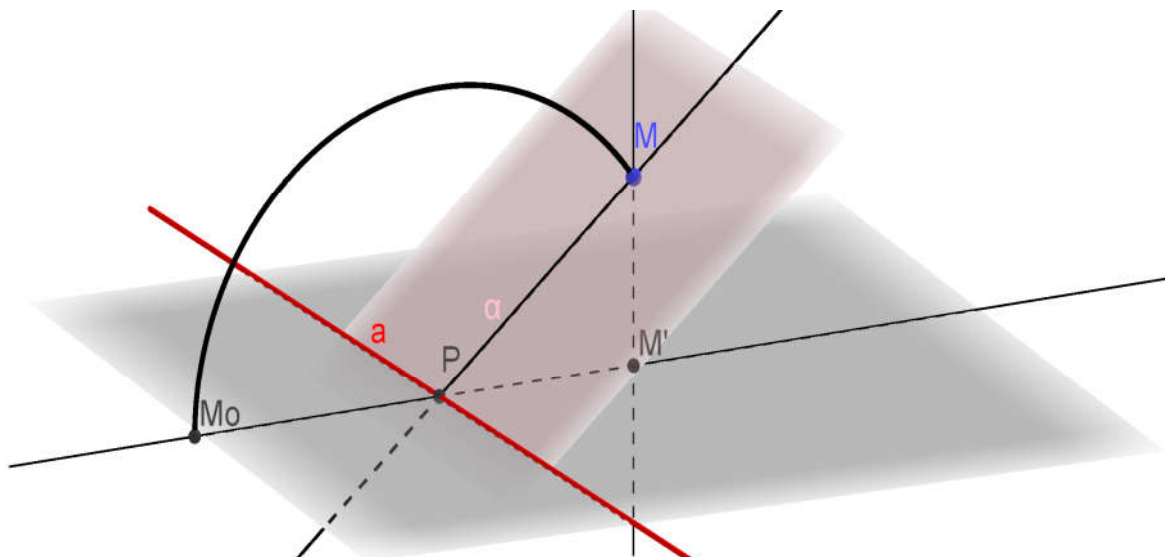


Слика 12. Нагибница и сутражница

Пример 3. Одредити траг равни β ако је дата пројекција p' , траг P и нагибни угао α праве p која лежи у β , те пројекција R' као и њено одстојање од равни π , где је R тачка равни β ван праве p .

Решење.

Траг равни β одређујемо помоћу трагова бар две праве које леже у овој равни. Права p нам је већ дата са својим трагом. Другу праву – праву q , конструишемо тако да она буде права равни β кроз тачку R (Слика 13). У пресеку ове две праве добијамо тачку S . Како је она заједничка тачка за p и q користимо њено одстојање од равни π за конструкцију праве q_0 , која представља оборени положај праве q .



Слика 15. Обарање равни

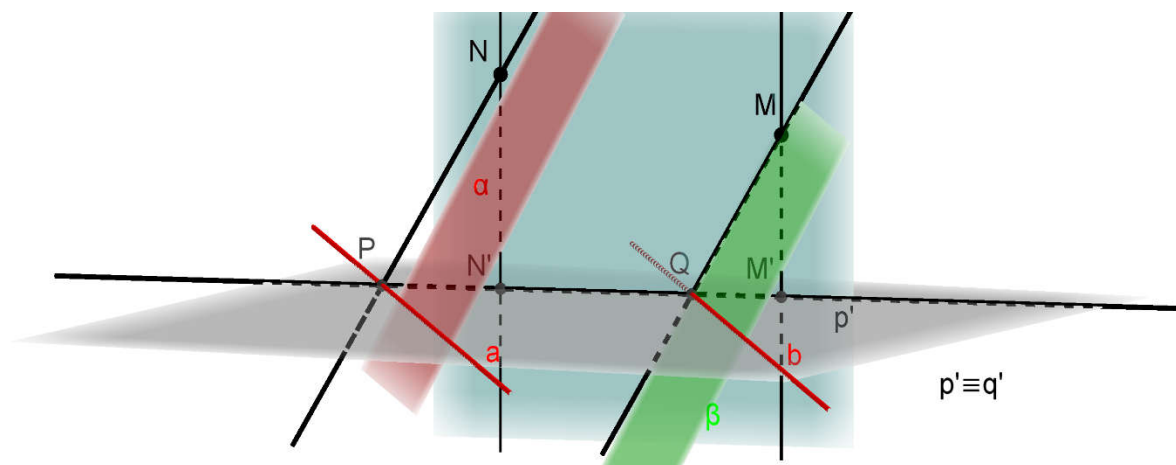
ГеоГебра пружа могућност да се раван „одређе“ око трага, па је самим тим и уочљивије шта представља обарање равни (Слика 15).

2.9 Međusobni položaj dve ravni

Две равни су или паралелне или се секу. Размотримо, сада, обе могућности.

1. Посматране равни α и β су паралелне.

Ако су равни паралелне, онда су и њихови трагови међусобно паралелне праве. Такође, важи да су им линије пада паралелне праве (Слика 16).



Слика 16. Паралелне равни

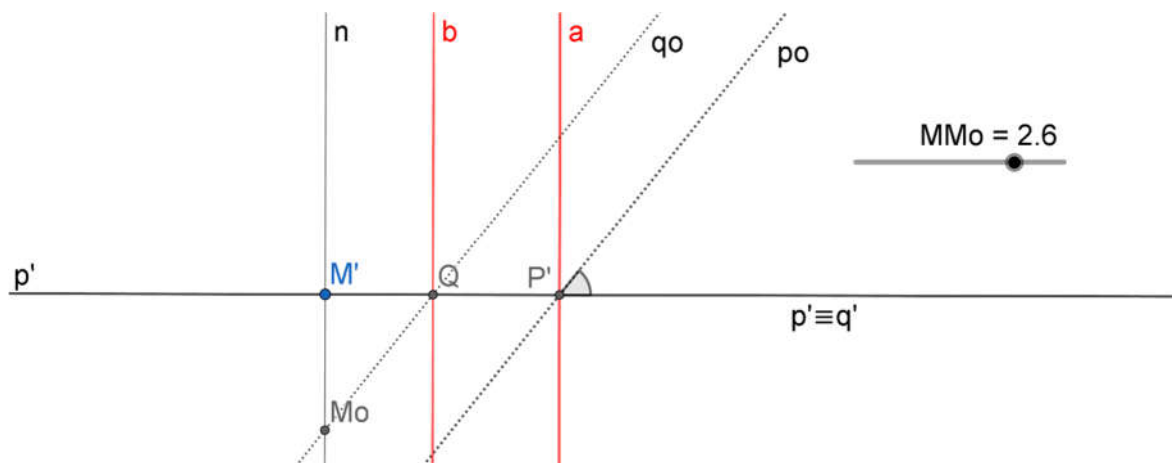
Посматрајмо, сада, неку раван која је нормална на π . Ученици могу лако да уоче да су праве које се добију у пресеку те равни са равнима α и β – нагибнице и да им се пројекције на π поклапају.

Пример 4. Нека је дата раван α својим трагом a и нагибним углом. Конструисати паралелну раван β кроз дату тачку M , задату пројекцијом M' одстојањем тачке M од равни π .

Решење.

Приликом решавања овог проблема битно је имати на уму да је нагибни угао равни исти као и нагибни угао линије пада. С тим у вези, конструисаћемо праву p' кроз тачку M' тако да је p' пројекција линије пада p равни α , тј. да је p' нормално на траг a . Такође, користимо претходно доказану чињеницу да постоји линија пада q равни β , тако да важи $p' \equiv q'$. Даље, конструисамо оборен положај праве q , помоћу тачке M и њеног одстојања и чињенице да је $p_o \parallel q_o$. Затим уз помоћ трага Q праве q и чињенице да важи $\alpha \parallel \beta \Rightarrow a \parallel b$, конструисамо траг b , тако да $b \ni Q$ и $b \perp p'$ (Слика 17).

Променом вредности клизача за MM_o добијамо различите положаје равни β и последично њеног трага b . □



Слика 17. Решење Примера 4 у ГеоГебри

2. Посматране равни α и β се секу. Тада се трагови ових двеју равни могу сећи или могу бити паралелне. Размотрићемо обе могућности.

i. Трагови равни α и β се секу.

Како се равни α и β секу важи $\alpha \cap \beta = p$ и $a \cap b = P$, где је P траг праве p . Представљање овог случаја у тродимензионалном цртежу ученицима олакшавамо визуелизацију, што је било доста тешко класичном конструкцијом. Ученици сада јасно виде да се траг пресечне праве поклапа са тачком где се секу трагови ове две равни. Такође, јасно виде да све тачке сутражница равни α и β , конструисаних на начин као на Слици 18, имају исто одстојање од равни π као и тачка Q .

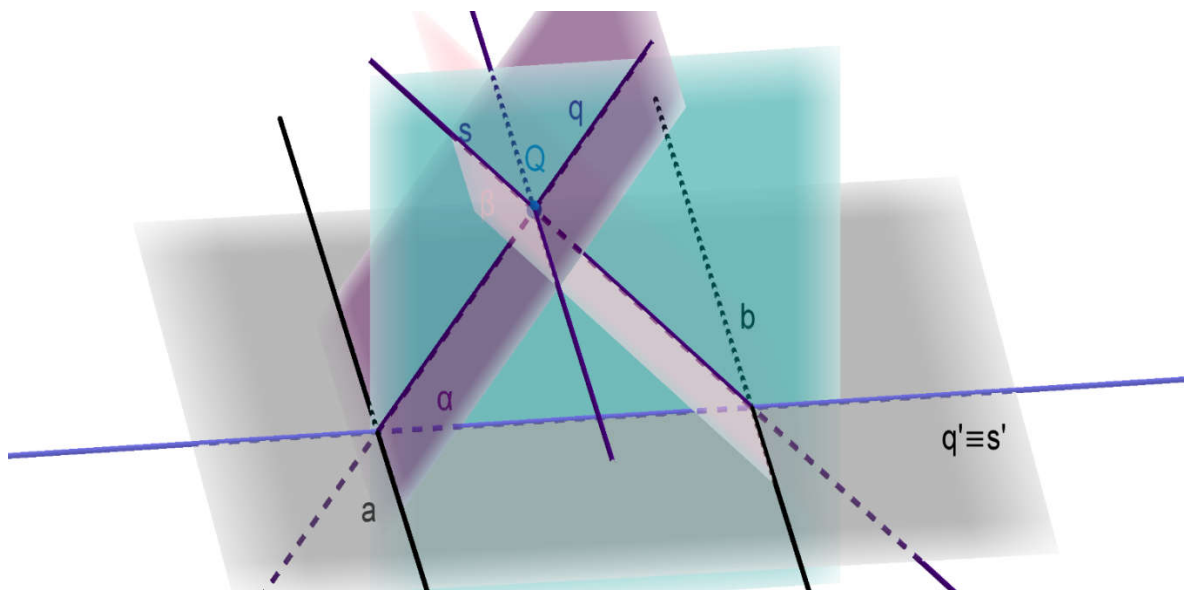
Нека је n линија пада равни β , која пролази кроз тачку N . Помоћу трага праве n (који припада трагу b) и тачке N (и њеног одстојања од π) лако конструишемо оборени положај n_0 праве n . Даље, конструишемо тачку L' , такву да $L \in n$ и $LL' = MM'$. Сада, $s\beta'$ добијамо као праву паралелну са b кроз тачку L' , а потом и тачку $Q' = s\alpha' \cap s\beta'$. Напокон, праву p' добијамо као праву кроз тачке P (пресек трагова a и b) и Q' .

□

ii. Трагови a и b равни α и β су паралелни.

Произвољно бирамо раван γ тако буде ортогонална на траг a , па и на траг b што произилази из паралелности ове две праве. Овако изабрана раван има пресечне праве p и q са равнима α и β . Ове праве представљају линије пада ових равни. Такође, за овако одабране праве важи да им се пројекције поклапају.

Представљањем овог проблема тродимензионалним цртежом у ГеоГебри (Слика 20), ученици јасно виде да бирајући неку од ортогоналних равни на трагове датих равни, у пресеку добијамо праве које су линије пада. Даље, повезујући са раније наученим, како те праве имају исту пројектујућу раван, јасно уочавају да ће им се пројекције поклапати и бити ортогоналне на трагове две дате равни.



Слика 20. Трагови равни су паралелни

Пример 6. Нека су задате равни α и β траговима a и b , тако да важи $a \parallel b$, и са по једном тачком и њеним одстојањима од пројекцијске равни. Наћи пројекцију пресечне праве ове две равни.

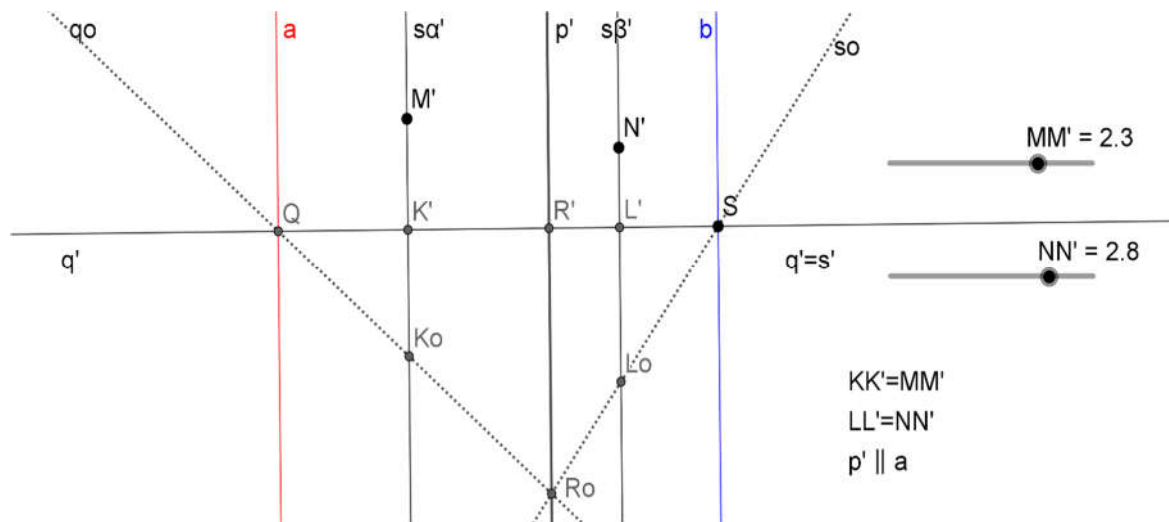
Решење.

Нека је M дата тачка равни α , а тачка N дата тачка равни β . Нека је права q линија пада равни α . Тада важи да је њена пројекција нормална на траг a . Бирамо је произвољно.

Нека је права s линија пада равни β коју добијамо у пресеку равни β и пројектујуће равни за линију пада q (Слика 20). За овако изабране две праве важи $q' \equiv s'$.

Кроз дате тачке равни M и N конструишемо сутражнице равни α и β : $s\alpha$ и $s\beta$, редом. Потом користимо чињеницу да су све тачке сутражнице на истом одстојању од равни π – у пресеку q' и $s\alpha'$ налазимо тачку K' и за њу важи да је $KK' = MM'$, а у пресеку q' и $s\beta'$ налазимо тачку L' , за коју такође важи $LL' = MM'$ (Слика 21). Нека је пресек оборених положаја нагибница q и s – тачка Ro . Пројекцију праве p добијамо као праву која садржи тачку Ro и паралелна је са трагом a .

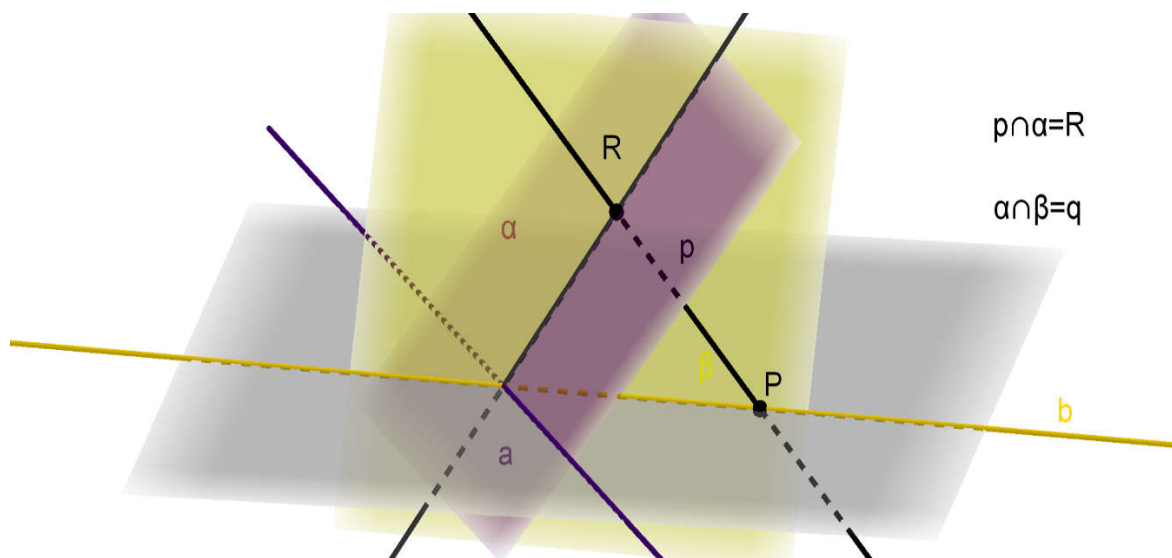
□



Слика 21. Решење Примера 6 у ГеоГебри

2.10 Продор праве кроз раван

Нека је права p таква да продире раван α . Нека је раван β произвољно изабрана тако да јој права p припада. У пресеку равни α и β добијамо неку праву q , па је тачка R (продор праве p кроз α) уједно и пресек правих p и q (Слика 22).



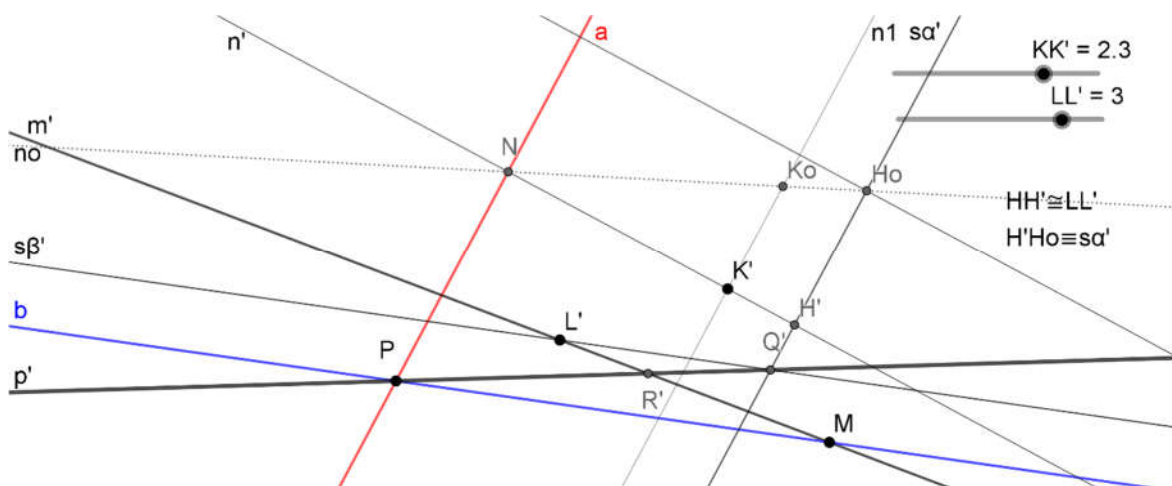
Слика 22. Продор праве кроз раван

Пример 7. Нека је α задата трагом a и тачком K која је дата пројекцијом и одстојањем, и права m задата трагом M и својом тачком L која је дата пројекцијом и одстојањем. Наћи тачку продора праве m кроз раван α .

Решење.

Приликом решавања овог проблема, за почетак, конструишемо произвољну раван β такву да јој припада права m . Оваквих равни има бесконачно много. Нека је права b траг равни β (Слика 23). Праву b конструишемо произвољно тако да $M \in b$, а потом конструишемо пројекцију $s\beta' \ni L'$ сутражнице $s\beta$ равни β кроз тачку L . Раван β је једнозначно одређена са b и $s\beta$. Даље, конструишемо пројекцију n' линије пада равни α кроз тачку K' . Обарамо, сада, праву n и на њој конструишемо тачке $H' \in n'$ и Ho тако да важи $H'Ho = L'Lo$ и $H'Ho \perp n'$. Права кроз H' паралелна трагу a је пројекција sa' сутражнице равни α . У пресеку ове две сутражнице добијамо тачку Q' . Праву r' добијамо као праву кроз P (пресек трагова a и b) и Q' . Пресек r' и m' је пројекција R' тачке продора праве m кроз α .

□



Слика 23. Решење Примера 7 у ГеоГебри

Решавањем датог проблема у ГеоГебри ученици могу да примете да ће се положај тачке продора мењати уколико се промене растојања датих тачака од равни π . Такође, примењују већ стечена знања, а сама конструкција је доста бржа и резултат прегледнији иако захтева од ученика да конструише већи број елемената.

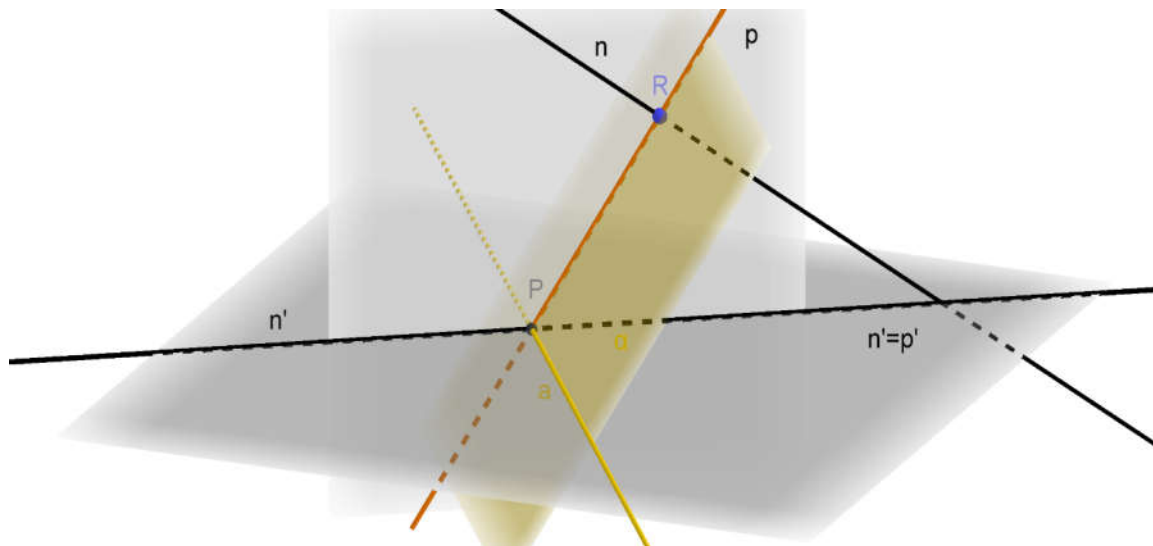
2.11 Нормалност праве и равни

Ако је права n нормална на раван α , онда је пројекција n' нормална на траг a равни α и на пројекцију s' сутражнице равни α (Слика 24).

Нека је v_n пројектујућа раван праве n . Како права n и раван α имају заједничку тачку, онда се раван v_n и раван α секу. Нека је њихов пресек права p . Праве p и n имају исту пројектујућу раван што значи да се њихове пројекције поклапају односно $p' \equiv n'$. Знамо да је $v_n \perp \pi$ и $n \perp \alpha$. Из ове две чињенице закључујемо да је $v_n \perp \alpha$, односно да

је $v_n \perp a$. Како су и права p и њена пројекција нормалне на траг равни α важи да је p линија пада равни α .

Такође, како за сутражницу s важи $s \parallel a$, односно $s' \parallel a$, то даље значи да је n' нормално на s' , што је анализирано у [1] и [4].



Слика 24. Нормалност праве и равни

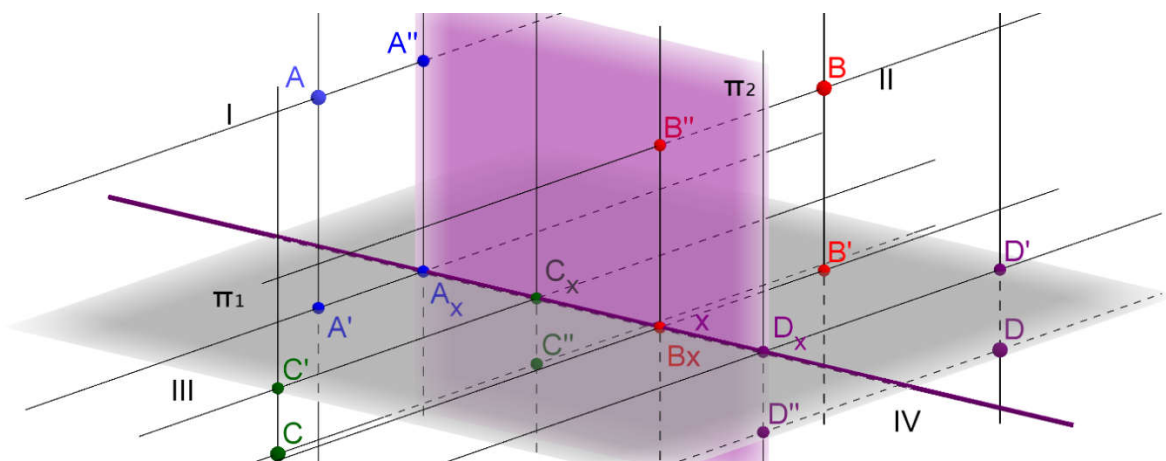
Овај случај, као специјалан вид претходно описаног, може бити интересантан за ученике пошто до тог закључака могу доћи самостално, помоћу ГеоГебре. Постављајући праву m у ортогоналан положај према равни α они могу уочити промене у односу на Пример 7. Такође, могу поновити научено градиво и видети како се сада произвољно изабрана раван β мења и како то утиче на пројекције две посматране праве.

3 Нормално пројектовање на две равни

Као што смо видели у претходном поглављу, пројектовање тачке на једну равни је обострано једнозначно одређено. Тај проблем можемо решити увођењем кога, или узимањем још једне пројекцијске равни. У другом случају, одређена тачка у простору ће имати две пројекције које је потпуно одређују.

Равни на које пројектујемо узимамо тако да су ортогоналне једна на другу. Раван π_1 је хоризонтална па је називамо *хоризонталница*, *тлоцрт* или *прва пројекцијска равни*, а равни π_2 је вертикална и зовемо је *вертикалница*, *нацрт* или *друга пројекцијска равни*. У [1] и [3] можемо наћи да тада ове две равни простор деле на четири квадранта и секу се по правој x .

3.1 Пројекција тачке на две равни

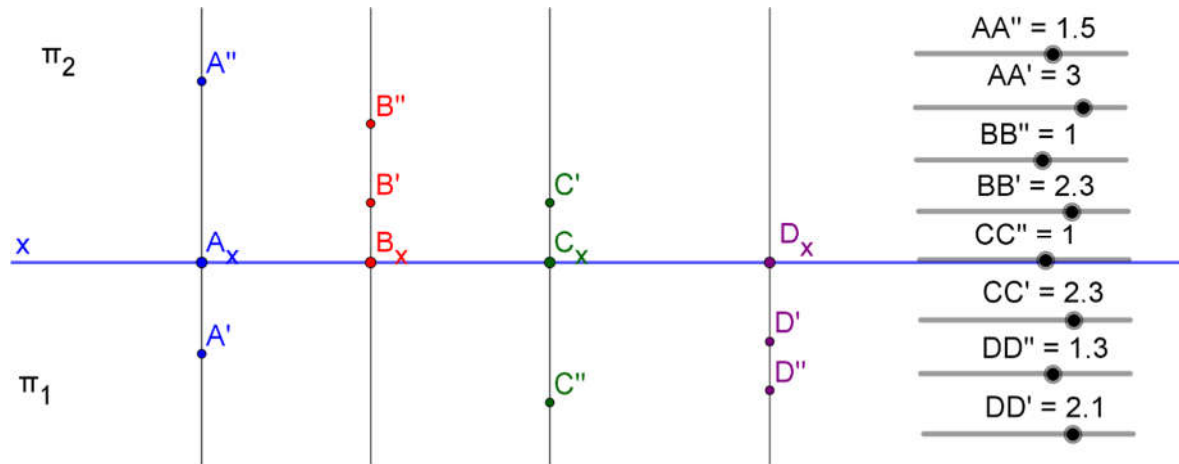


Слика 25. Пројекција тачке на две равни у зависности од положаја у простору

Нека је тачка A произвољна тачка простора. Прва пројекција тачке A је тачка A' , док је њена друга пројекција тачка A'' . Поставимо равни кроз тачке A , A' и A'' . У пресеку са x -осом добијамо тачку A_x (Слика 25). $AA'A_xA''$ је правоугаоник, односно важи $A'A_x \perp x$ и $A''A_x \perp x$. Закључујемо да се тачке A' , A'' и A_x , у дводимензионалном приказу, налазе на истој нормали на праву x коју називамо ординала. Ова чињеница нам помаже приликом дводимензионалног приказа пројекције тачке на две равни [1].

Приликом приказа пројекције тачке на две равни у ГеоГебри (Слика 25), ученици лакше примећују да једној тачки простора одговара само једна прва и само једна друга пројекција, као и да је задатим пројекцијама одређена само једна тачка у простору, односно да је ово пресликавање јединствено одређено. Такође, уочавају да је одстојање $A'A_x$ исто као и растојање тачке A од равни π_2 ($A'A_x = AA''$) и да је одстојање $A''A_x$ исто као и растојање тачке A од равни π_1 ($A''A_x = AA'$). Коришћењем овог пакета ученици су у могућности да виде промену положаја пројекција уколико мењамо положај тачке у простору, као и приликом промене квадранта у ком се тачка налази.

До представљања ових пројекција у дводимензионалном простору долазимо тако што хоризонталну раван остављамо у истом положају а вертикалну ротирамо око x -осе док се њен горњи део не поклопи за задњим делом хоризонталне равни. Тада на једном цртежу добијамо хоризонталну и вертикалну пројекцију са заједничком правом x .



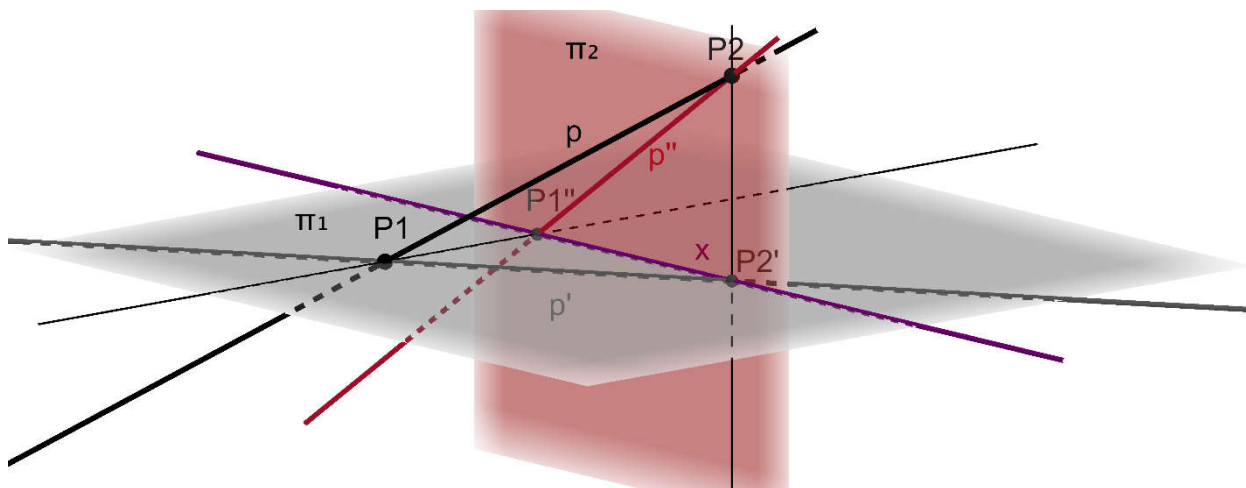
Слика 26. Дводимензионални приказ пројекције тачке на две равни у зависности од квадранта у ком се налази

Тачке А, В, С и D се редом налазе у првом, другом, трећем и четвртном квадранту, а Слика 26 приказује њихове две пројекције. ГеоГebra пружа могућност да се променом одстојања тачке помоћу клизача, од било које равни види и промена положаја пројекције на ординали. Такође, ако се било које одстојање доведе на 0, односно тачка постави тако да припада некој од ове две равни, ученици уочавају да ће пројекција тачке на другу раван бити на x -оси.

3.2 Пројекција праве на две равни

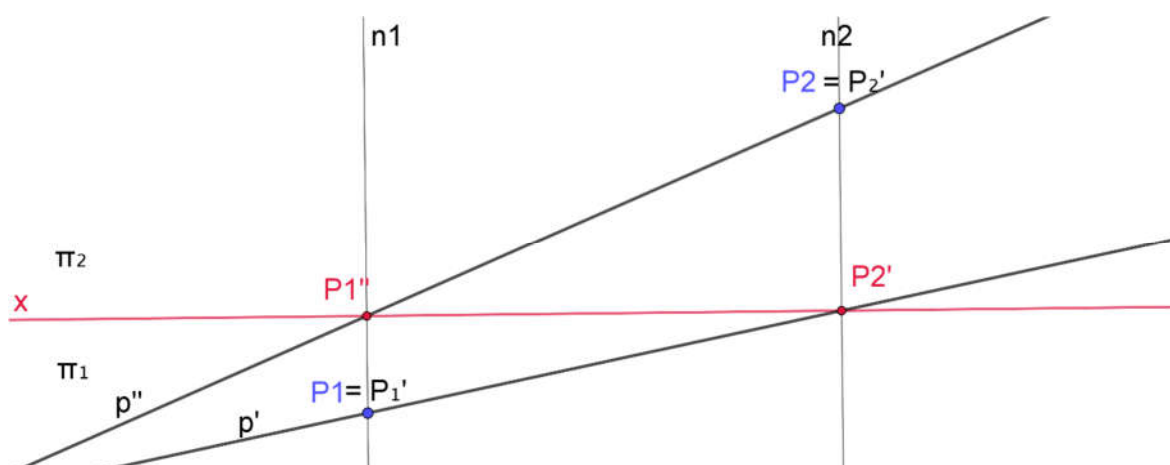
Приликом нормалног пројектовања праве p на две равни добијамо две њене пројекције, праве p' и p'' редом у пројекцијским равнима π_1 и π_2 . Тачке продора праве p (трагови) кроз равни π_1 и π_2 су редом P_1 и P_2 . Ове две тачке леже у пројекцијским равнима а њихове пројекције се налазе на x -оси. Важи $P_1 = P_1'$, $P_2 = P_2''$ и $P_1'', P_2' \in x$.

Прва пројекција праве p је права p' која је одређена тачкама P_1 и P_2' , док је друга пројекција праве p , права p'' одређена тачкама P_2 и P_1'' (Слика 28).



Слика 27. Тродимензионални приказ пројекције праве на две равни у ГеоГебри

Коришћењем ГеоГебре, ученици су у могућности да ротацијом за одређени угао читав тродимензионални приказ доведу у положај у ком ће јасно видети како се дата права p пројектује на раван π_1 дуж праве p' , а на раван π_2 дуж праве p'' .



Слика 28. Дводимензионални приказ пројекције праве на две равни

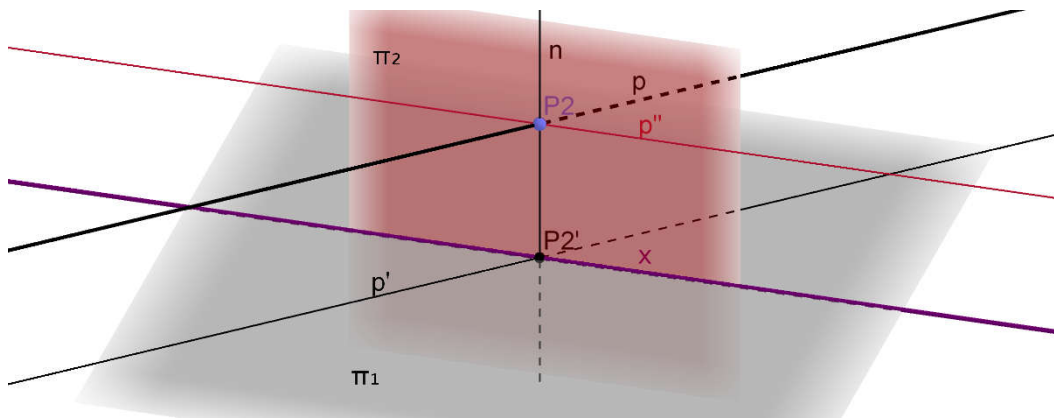
Уочимо да постоје и два специјална случаја:

- i. Права је паралелна са неком од пројекцијских равни.

У овом случају ако је $p \parallel \pi_1$, онда $p'' \parallel x$ (Слика 29), односно ако је $q \parallel \pi_2$ онда важи да је $q' \parallel x$.

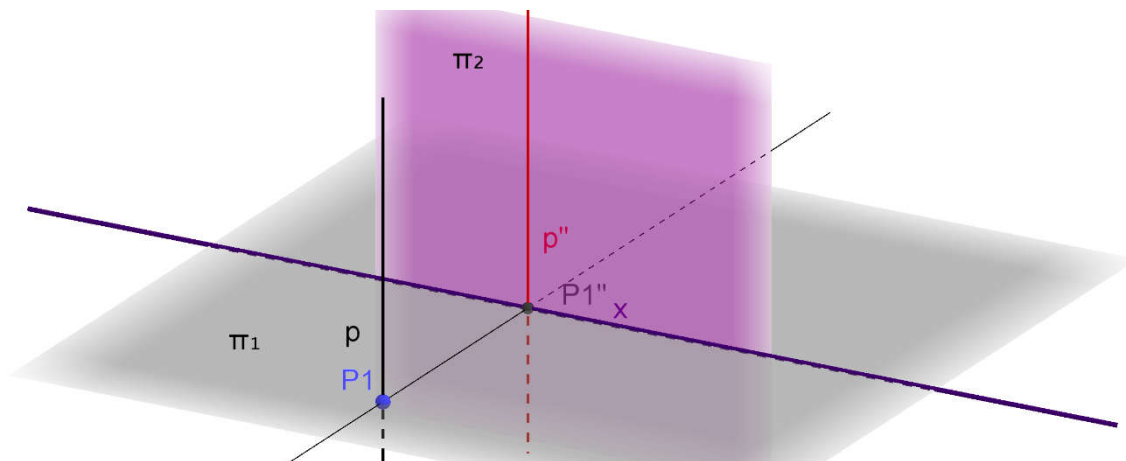
- ii. Права је нормална на неку од пројекцијских равни.

У овом случају важи да је пројекција дате праве на раван на коју је нормална једна тачка, односно њен траг, а да је друга пројекција права која је ортогонална на праву x (Слика 30).



Слика 29. Пројекције праве паралелне са пројекцијском равни π_1

Предност рада и учења помоћу пакета ГеоГебра у овом случају се огледа у томе што ученици лакше визуелизују положаје правих у односу на пројекцијске равни него што то чине приликом класичног предавања. Такође, у могућности су да самостално промене положај праве p и поставе је тако да буде паралелна са другом пројекцијском равни и да сами уоче шта се дешава са пројекцијама те праве. Исто ово могу да примене и на случај када је права ортогонална на неку од равни.

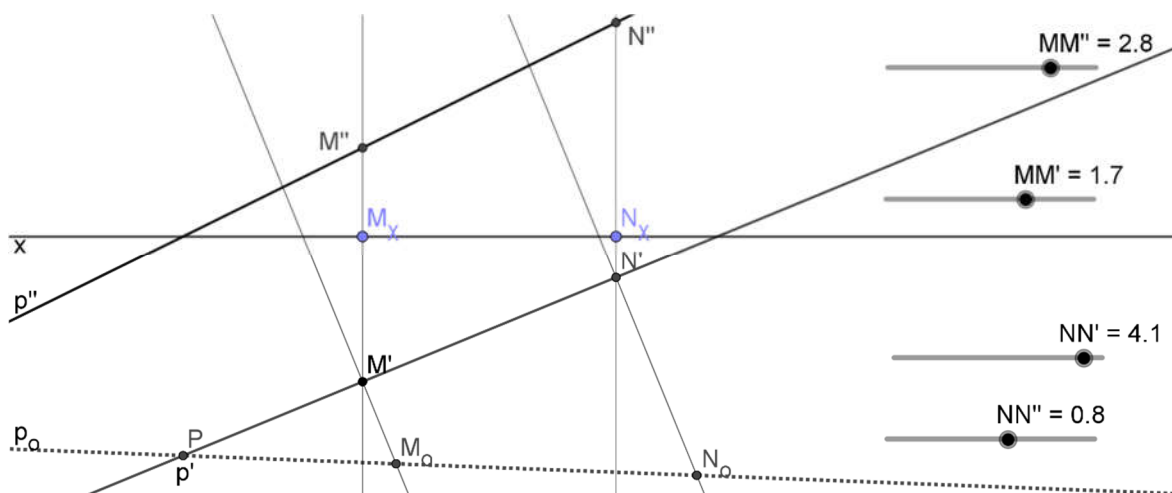


Слика 30. Пројекције праве ортогоналне на пројекцијску раван π_1

Такође, предност ГеоГебре приликом учења је то што ученици на лакши, занимљивији и бржи начин мењају окружење него што то чине класичном конструкцијом и с тим у вези веома лако долазе до самосталних закључака, што је у процесу учења веома битно.

3.3 Обарање праве

Приликом нормалног пројектовања на две равни одређену праву можемо оборити у прву пројекцијску раван π_1 као и у другу пројекцијску раван π_2 . Приликом обарања праве битно је водити рачуна о одстојањима тачака од ове две равни, као што је описано у Поглављу 3.1.



Слика 31. Обарање праве у прву пројекцијску раван π_1

ГеоГebra пружа могућност постављања клизача којима можемо мењати одстојања тачака и приликом тога посматрати промену положаја праве p , односно њеног обореног положаја (Слика 31). За сваку тачку, за коју постављамо клизаче, битно је да знамо ординалу, на којој се налазе њене пројекције, а променом вредности клизача мењаће се и одстојања (самим тим и положаји) пројекција од праве x .

Интересантно би било усмерити ученике да поставе растојање тачака M и N од равни π_1 на нула и поставити питање шта то уствари значи. Ученици би могли да уоче да тада права p припада равни π_1 и да је њен оборен положај уствари иста та права, док се друга пројекција праве поклапа са правом x , где би се увидео још један специјалан положај праве и положај њених пројекција.

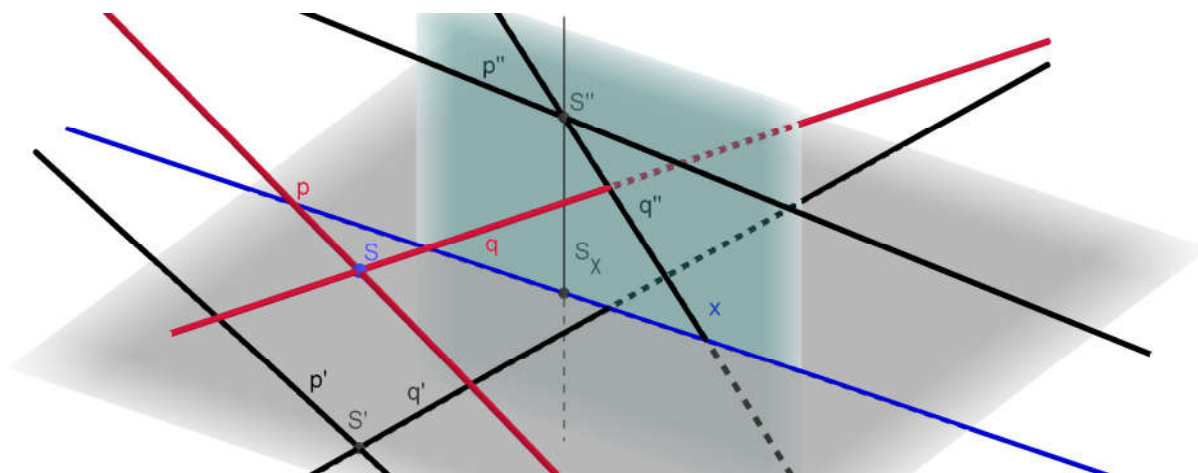
3.4 Пројекције две праве у зависности од њиховог међусобног положаја у простору

Разликујемо три могућа положаја две праве у простору:

1. праве p и q се секу,
2. праве p и q се мимоилазе,
3. праве p и q су паралелне.

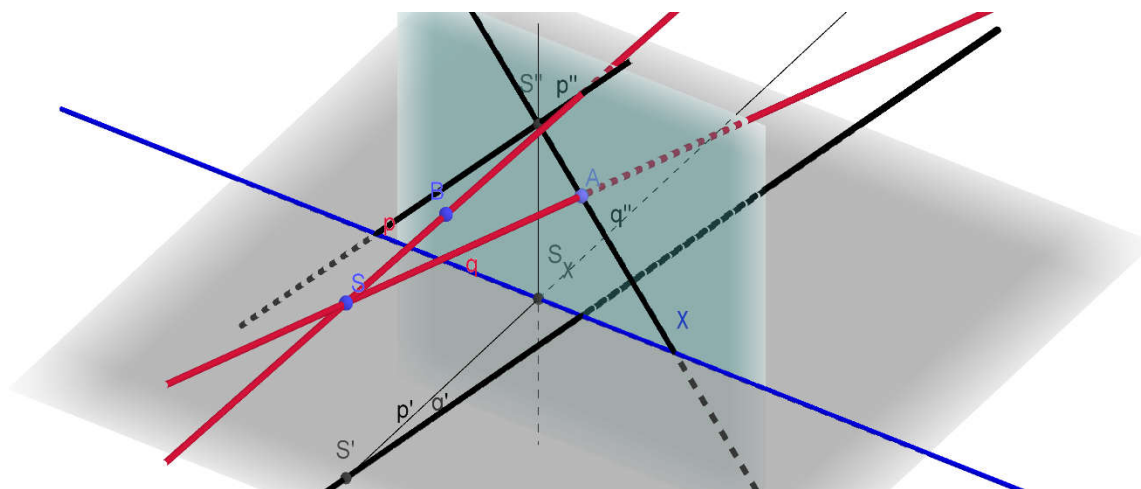
Размотрићемо сваки од ових случајева засебно.

1. Уколико се праве p и q секу у некој тачки S , онда важи да је дуж $S'S''$ нормална на праву x , где су тачке S' и S'' – тачке пресека првих и других пројекција правих p и q , редом.



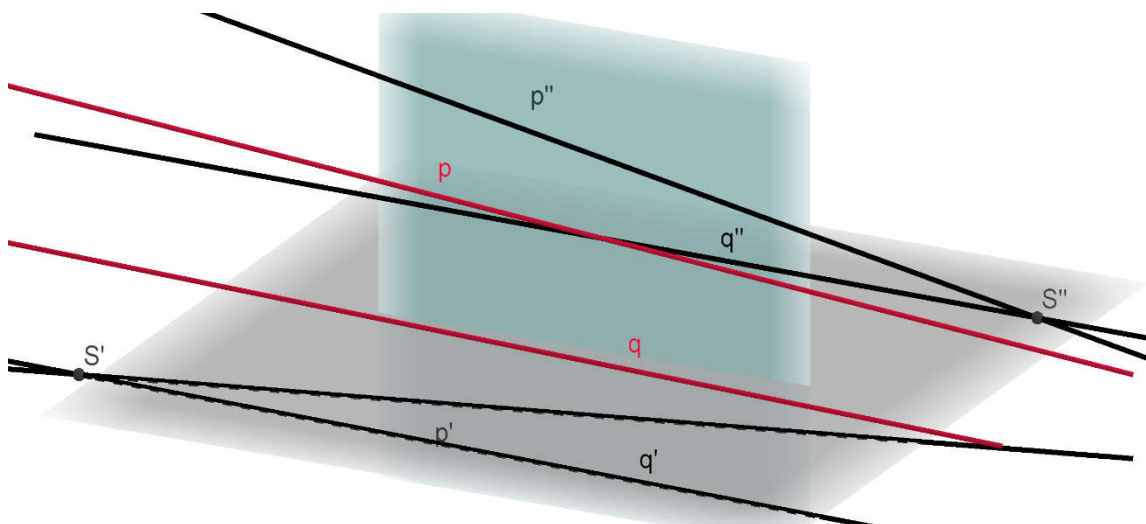
Слика 32. Пројекције две праве које се секу у простору

Из овог случаја ученици лако могу доћи до једног од специјалних. Уколико праве p и q поставимо тако да се секу али припадају истој пројектујућој равни у односу на π_1 њихове прве пројекције ће се поклопити, али и даље важи да је дуж $S'S''$ нормална на праву x . У тродимензионалном приказу ова чињеница уствари значи да је $S'S_x \perp S''S_x$ што се лако уочава на сликама 32 и 33.



Слика 33. Специјални положај две праве које се секу

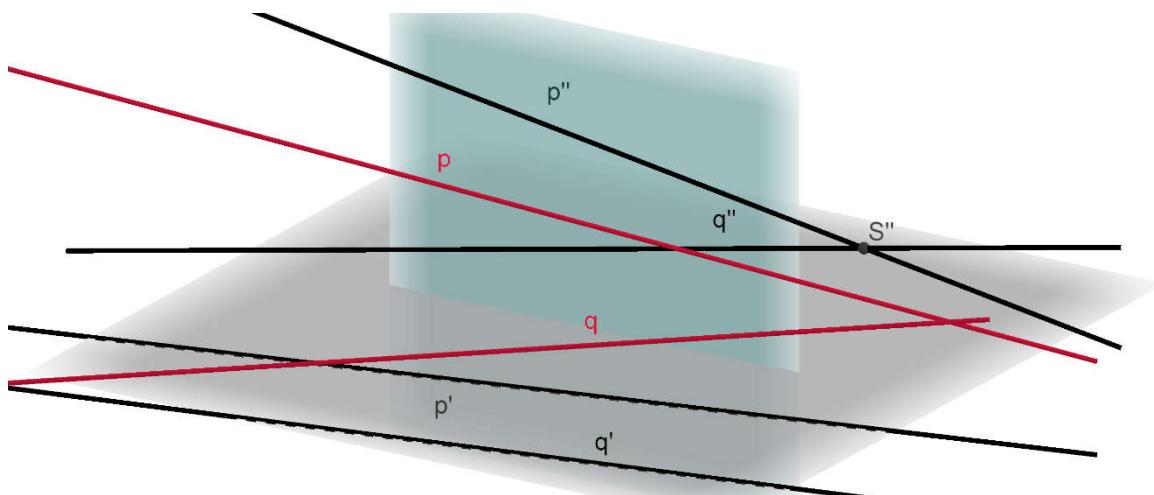
2. Уколико су праве p и q мимоилазне онда дуж $S'S''$ није нормална на праву x , где су тачке S' и S'' – тачке пресека првих и других пројекција правих p и q , редом.



Слика 34. Пројекције две праве које се мимоилазе

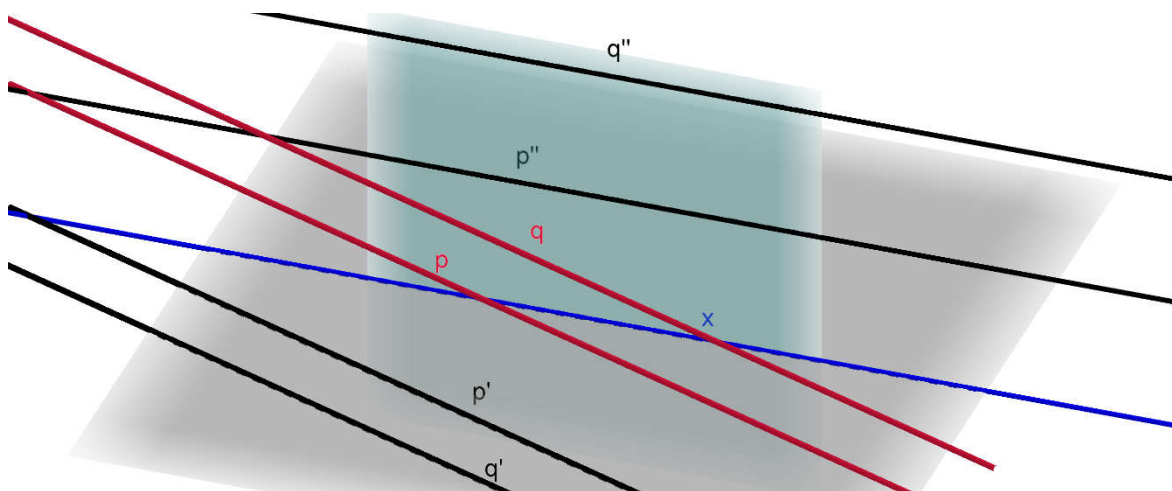
Ротацијом приказа на Слици 34, ученици могу лако да виде да су праве p и q мимоилазне, иако се то не види јасно на основној слици. Управо то је још једна од предности рада у ГеоГебри у односу на класичну конструкцију.

Као и у претходном случају, ученици могу сами доћи до специјалног случаја. Уколико праве p и q поставимо тако да су мимоилазне у простору али припадају паралелним пројектујућим равнима на π_1 , добијамо да су им прве пројекције паралелне праве а друге пројекције праве које се секу (Слика 35).



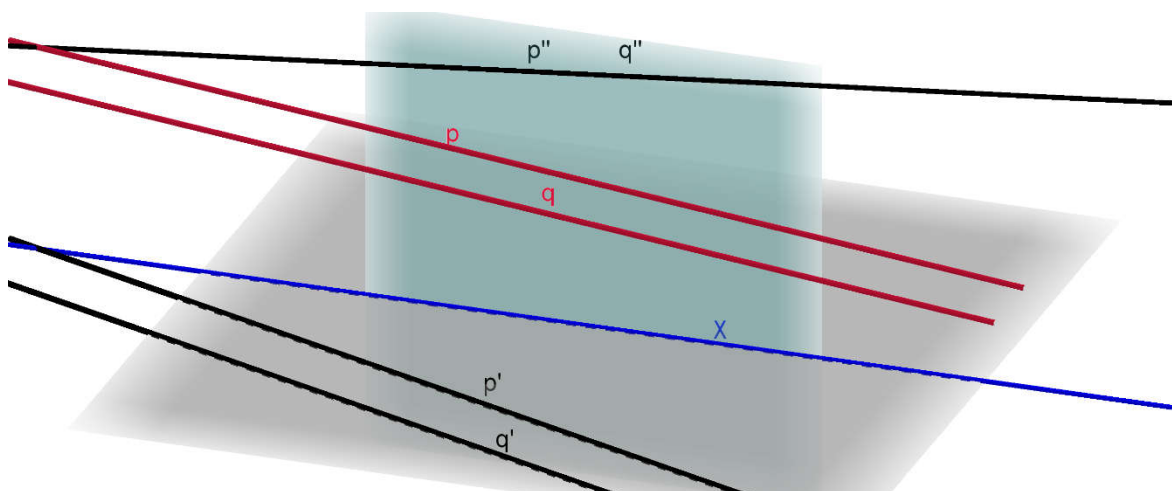
Слика 35. Специјални положај две праве које се мимоилазе

3. Уколико су праве p и q паралелне онда су и прве и друге њихове пројекције такође паралелне праве, тј. $p' \parallel q'$ и $p'' \parallel q''$ (Слика 36).



Слика 36. Пројекције две паралелне праве

Ученици сами могу доћи до специјалног случаја постављајући праве r и q тако да су паралелне, али да припадају истој пројектујућој равни на π_2 . Тада ће прве пројекције ове две праве остати паралелне, док ће се друге пројекције ове две праве поклапати (Слика 37).



Слика 37. Специјални положај две паралелне праве

3.5 Први и други траг равни

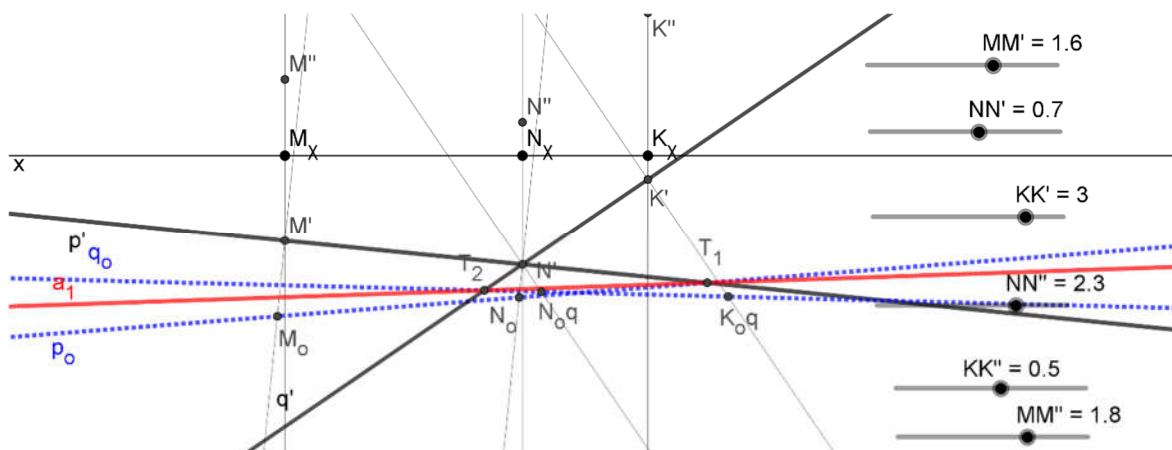
У случају нормалног пројектовања на две равни, раван је једнозначно одређена са своја два трага.

Уколико је раван одређена са две праве r и q чије пројекције знамо, први траг ове равни је права одређена са првим траговима правих r и q . Други траг ове равни је права одређена другим траговима правих r и q .

Ако имамо раван α одређену са три неколинеарне тачке M , N и K које су дате својим пројекцијама, лако налазимо трагове ове равни. Нека је права r одређена тачкама M и N , а права q тачкама N и K . Ове две праве обарамо у пројекцијску раван

π_1 и налазимо њихове трагове T_1 и T_2 . Како су обе праве одабране тако да припадају равни коју обарамо, знамо да се њихови трагови морају налазити на трагу равни α . Знајући то, први траг равни добијамо као праву кроз T_1 и T_2 . Обарањем ових правих у другу пројекцијску раван добијамо други траг равни, што је анализирано у [1].

Приликом ове конструкције можемо користити клизаче који нам дозвољавају промену положаја тачке у односу на прву и другу пројекцијску раван. Овако урађена конструкција пружа могућност ученицима да променом одстојања тачака увиде на који начин се мења положај трага посматране равни.



Слика 38. Конструкција трага равни

Приликом решавања овог проблема помоћу ГеоГебре интересно би било усмерити ученике да поставе одстојање тачке N од прве пројекцијске равни на нула. Запазиће да ће претходно добијени траг нестати. Анализирајући могу да закључе да до те ситуације долази када се трагови правих r и q поклопе. У овом случају то је управо тачка N која им је заједничка.

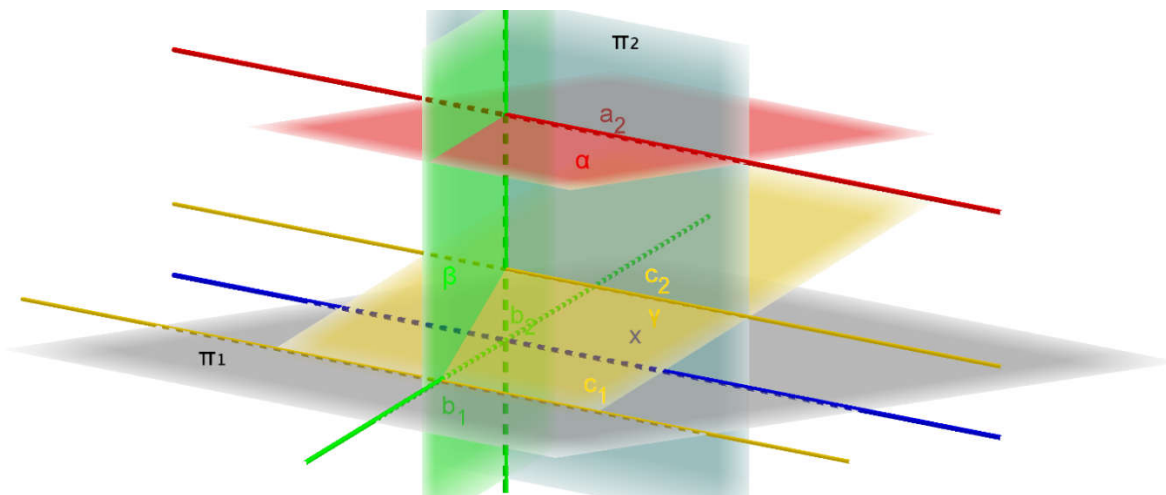
Раван коју обарамо може заузимати неки од специјалних положаја у односу на пројекцијске равни и то:

1. раван је паралелна на неку од пројекцијских равни,
2. раван је ортогонална на неку од пројекцијских равни,
3. раван је паралелна са правом x .

Слика 39 показује ситуацију када је раван α паралелна са π_1 . Ученици лако могу видети да у том случају не постоји први траг, док је други траг паралелан са правом x . Такође, ученици се могу усмерити да поставе нову раван тако да она има само први траг и да закључе какав положај та раван мора заузимати.

На истој слици види се специјални положај равни β која је ортогонална на прву пројекцијску раван. Лако се уочава да оба трага постоје и да је тада други траг нормалан на праву x .

Трећи специјалан положај је положај равни γ , где оба трага постоје и оба су паралелна са правом x .

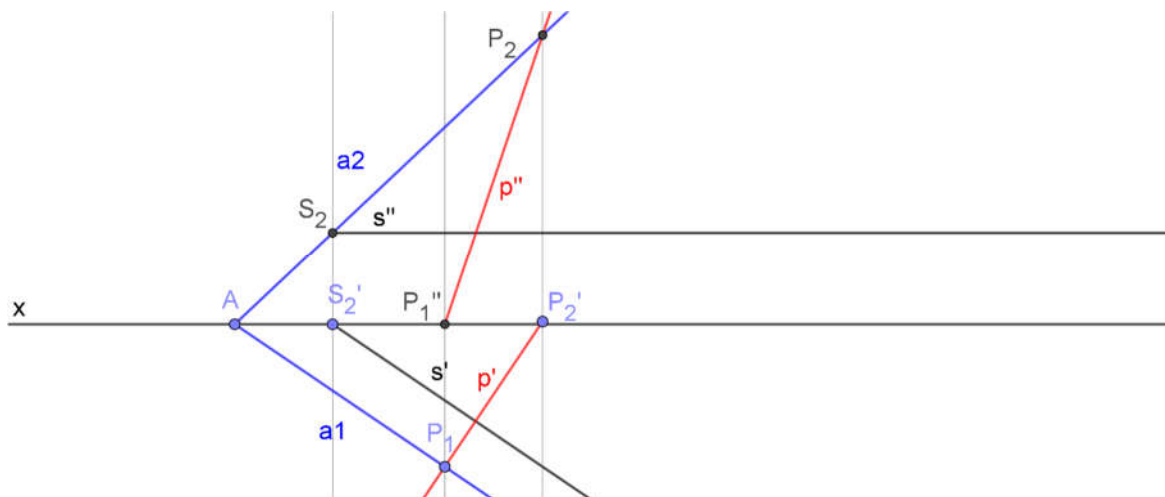


Слика 39. Специјални положаји равни у односу на пројекцијске равни

3.6 Сутражница и нагибница равни

Као што је већ речено, сутражнице су праве које припадају равни такве да су њихове пројекције паралелне са трагом равни. Како разликујемо први и други траг равни, имамо сутражнице у односу на први или други траг.

Нека је s сутражница у односу на први траг равни. Јасно тада је $s' \parallel a_1$. Њену другу пројекцију добијамо користећи чињеницу да се њен траг S_2 налази на другом трагу a_2 равни и да је она права која је паралелна са правом x (Слика 40).



Слика 40. Сутражница и нагибница равни

Линија пада или нагибница је права која припада равни и ортогонална је на њен траг. Већ смо видели да је у том случају пројекција нагибнице такође ортогонална на траг равни. Уколико је дата прва пројекција нагибнице на први траг равни, другу пројекцију добијамо на следећи начин – тачку P_1'' добијамо као другу пројекцију трага P_1 , док се тачка P_2 добија у пресеку нормале из $P_2' = p' \cap x$ на праву x и другог трага

a_2 равни. Другу пројекцију нагибнице добијамо као праву одређену тачкама P_1'' и P_2 (Слика 40).

Обарањем нагибне линије у прву пројекцијску раван добијамо нагибни угао посматране равни према π_1 . Аналогно можемо добити нагибни угао према другој пројекцијској равни.

Стражницу углавном користимо као помоћну праву приликом одређивања положаја друге пројекције тачке, уколико је дата њена прва пројекција.

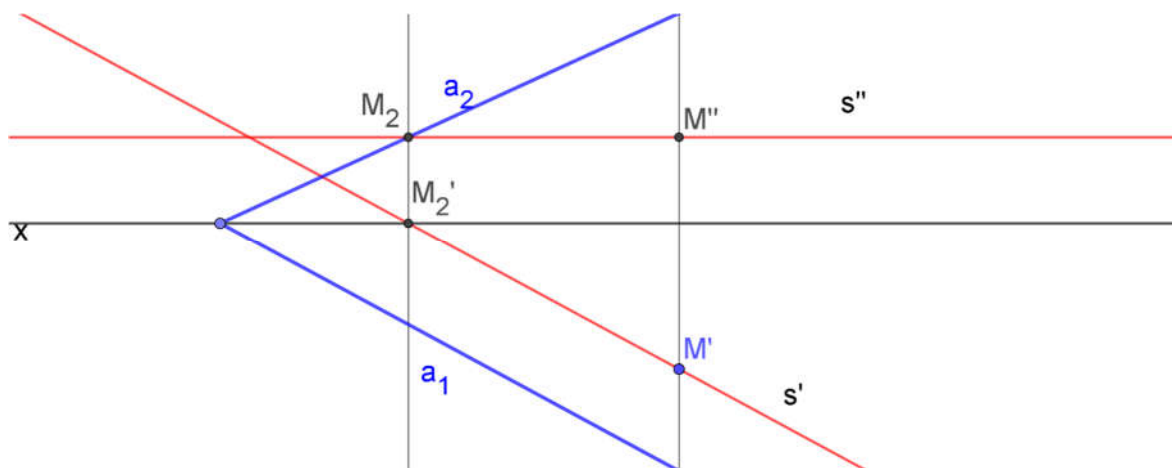
Пример 8. Нека је дата раван α задата са своја два трага a_1 и a_2 и нека је дата прва пројекција M' тачке M , која припада равни α . Конструисати другу пројекцију M'' тачке M .

Решење.

Приликом решавања овог примера користимо чињеницу да уколико нека тачка припада равни, значи да постоји права у равни којој та тачка припада. За ту праву најчешће бирамо сутражницу.

Дакле, кроз тачку M' конструишемо праву s' паралелну са a_1 . Нека је M_2' пресек правих s' и x . Тачку M_2 добијамо у пресеку праве a_2 и нормале на x , која пролази кроз тачку M_2' . Друга пројекција s'' сутражнице s је права којој припада M_2 , а која је паралелна са x . Напокон, тачку M'' добијамо као пресек s'' и ординале кроз тачку M' (Слика 41).

□

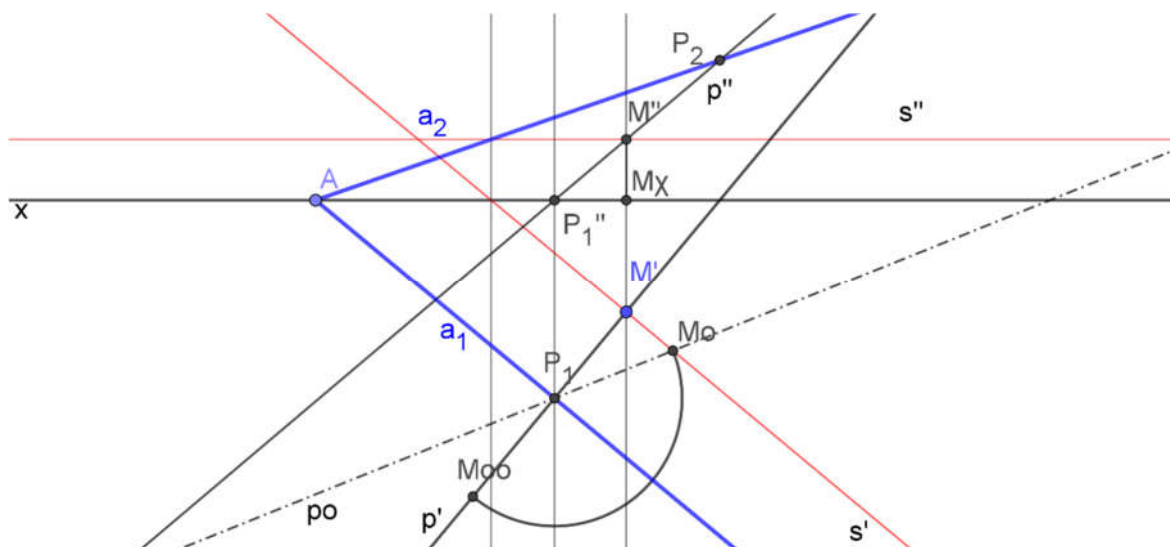


Слика 41. Решење Примера 8 у ГеоГебри

3.7 Обарање равни

Обарање равни можемо вршити у било коју од две пројекцијске равни. Нека је нека раван α одређена са своја два трага. Оборићемо ову раван у прву пројекцијску раван π_1 . Аналогно вршимо обарање у другу пројекцијску раван.

Обарање равни α , која је задата са своја два трага a_1 и a_2 , у прву пројекцијску раван π_1 је ротација равни α око првог трага a_1 којом се раван α доводи до поклапања са π_1 .



Слика 42. Обарање равни

На Слици 42 је приказано обарање равни коришћењем пакета ГеоГebra. Како се раван обара у пројекцијску раван π_1 , траг равни a_1 представља осу ротације и неће мењати положај, тј. поклапа се са својим обореним положајем. Нека је тачка M равни α одређена са своје две пројекције – M' и M'' . За конструкцију обореног положаја тачке M_{00} користимо одстојање MP_1 односно одстојање тачке M од трага равни a_1 . Кроз тачку M' конструишемо линију пада p' као и њену другу пројекцију p'' , а затим праву p оборимо у π_1 . Тачку M_{00} одређујемо тако да важи $MoP_1 = P_1M_{00}$ и да M_{00} припада правој p' .

Конструкцијом у ГеоГебри смо у могућности да мењањем положаја тачке M видимо промене њеног обореног положаја M_0 , што истовремено доводи до промене положаја тачке M_{00} .

3.8 Две равни

Од положаја две равни у простору зависи како ће изгледати положаји њихових првих и других трагова. Размотрићемо обе могућности: две равни су паралелне и две равни се секу.

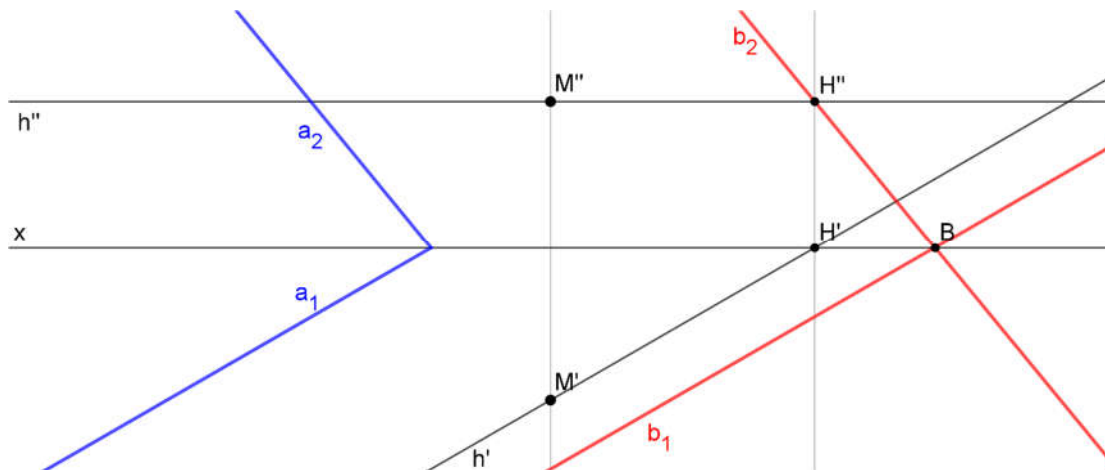
1. Две посматране равни су паралелне.

Уколико су равни α и β паралелне онда су и њихови трагови паралелне праве. Ако је раван α задата са својим траговима a_1 и a_2 , а раван β са својим траговима b_1 и b_2 и важи $\alpha \parallel \beta$, онда је $a_1 \parallel b_1$ и $a_2 \parallel b_2$.

Пример 9. Нека је дата равна α одређена са своја два трага. Конструисати равна β паралелну равни α кроз тачку M (која је задата са своје две пројекције).

Решење.

Како тачка M треба да припада равни β конструисаћемо помоћну праву h тако да је h паралелно са a_1 и h садржи тачку M . Ова права ће очигледно припадати равни β и биће сутражница у односу на први траг те равни. Јасно је да из $h \parallel a_1$ следи и $h \parallel \pi_1$ што доводи до закључка да је $h'' \parallel x$. За конструкцију је још потребно искористити чињеницу да уколико права припада равни, њени трагови треба да припадају трагу равни. Дакле, трагови праве h треба да се налазе на трагу равни β .

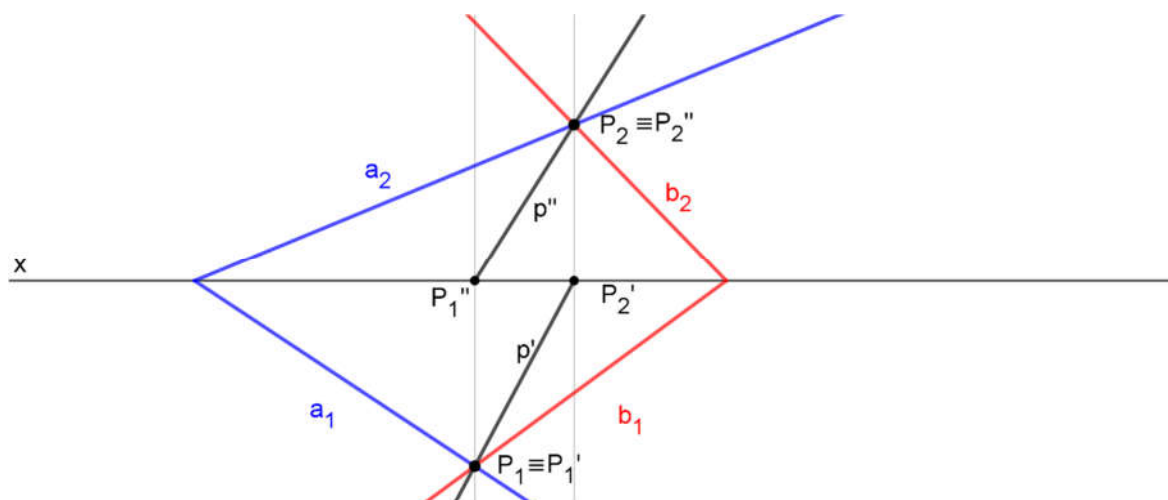


Слика 43. Решење Примера 9 помоћу ГеоГebre

Траг b_2 конструисамо кроз тачку H'' (други траг праве h) тако да је $b_2 \parallel a_2$, а затим траг b_1 кроз тачку $B = b_2 \cap x$, тако да је $b_1 \parallel a_1$. $\square$

2. Две посматране равни се секу.

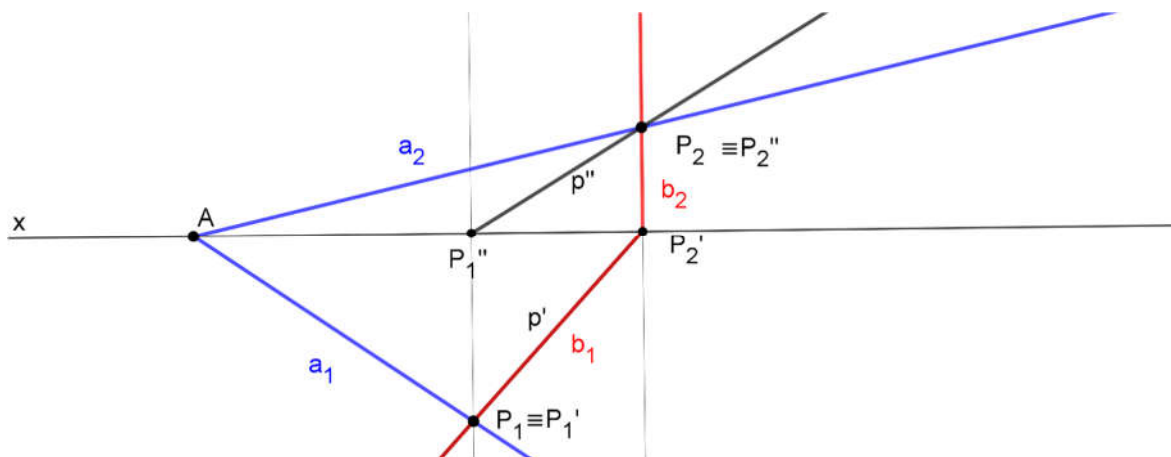
Уколико се равни α и β секу онда се и њихови трагови секу. Како је пресек ове две равни права, њени трагови морају бити баш пресечне тачке трагова равни (Слика 44).



Слика 44. Равни се секу

Нека је раван α задата са своја два трага a_1 и a_2 , а раван β са својим траговима b_1 и b_2 и нека је права p пресек равни α и β . Како је права p заједничка права равни α и β , њен први траг, тачка P_1 , мора припадати првим траговима ове две равни, односно важи $a_1 \cap b_1 = P_1$. Такође, аналогно важи и за њен други траг, односно $a_2 \cap b_2 = P_2$. Коришћењем ових чињеница, и претходно наученог, ученици веома лако могу да конструишу прву и другу пројекцију пресечне праве p .

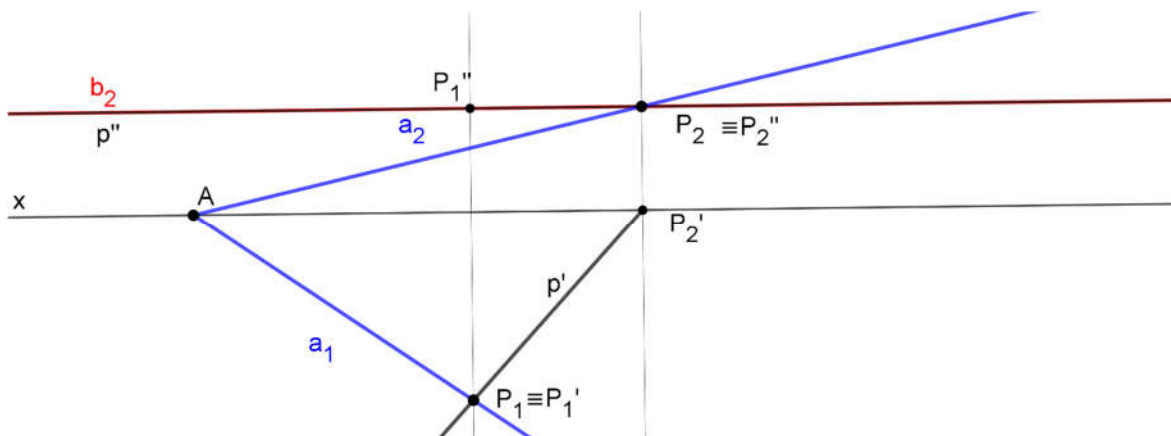
ГеоГebra нам омогућава да веома брзо и лако можемо мењати положај равни, односно њихових трагова и самим тим и уочавати промене положаја пројекција пресечне праве p . Уколико раван β поставимо у специјалан положај тако да је $\beta \perp \pi_1$ онда знамо да ће њен други траг бити ортогоналан на праву x , а прва пројекција праве p ће се поклопити са трагом b_1 (Слика 45).



Слика 45. Раван β ортогонална на π_1

ГеоГebra нам омогућава да до ове конструкције дођемо једноставним померањем трага b_2 у ортогоналан положај према правој x (Слика 45), док се права p' онда аутоматски поклапа са трагом b_1 .

Размотримо, сада, и случај када је раван β паралелна са π_1 . У том случају траг b_1 неће постојати, док за други траг важи $b_2 \parallel x$. Такође, друга пројекција праве p ће се поклопити са трагом b_2 (Слика 46).



Слика 46. Раван β паралелна са π_1

3.9 Пројекција равног лика

Размотримо, сада, и један сложенији проблем – конструкцију пројекција равног лика.

Пример 10. Конструисати пројекције правилног шестоугла $ABCDEF$ који припада датој равни τ , која је задата својим траговима t_1 и t_2 , ако је страница тог шестоугла једнака датој дужи, а теме A и центар S описаног круга припадају симетралама угла између правих t_1 и t_2 . Центар S је на датом одстојању од трага t_1 .

Решење.

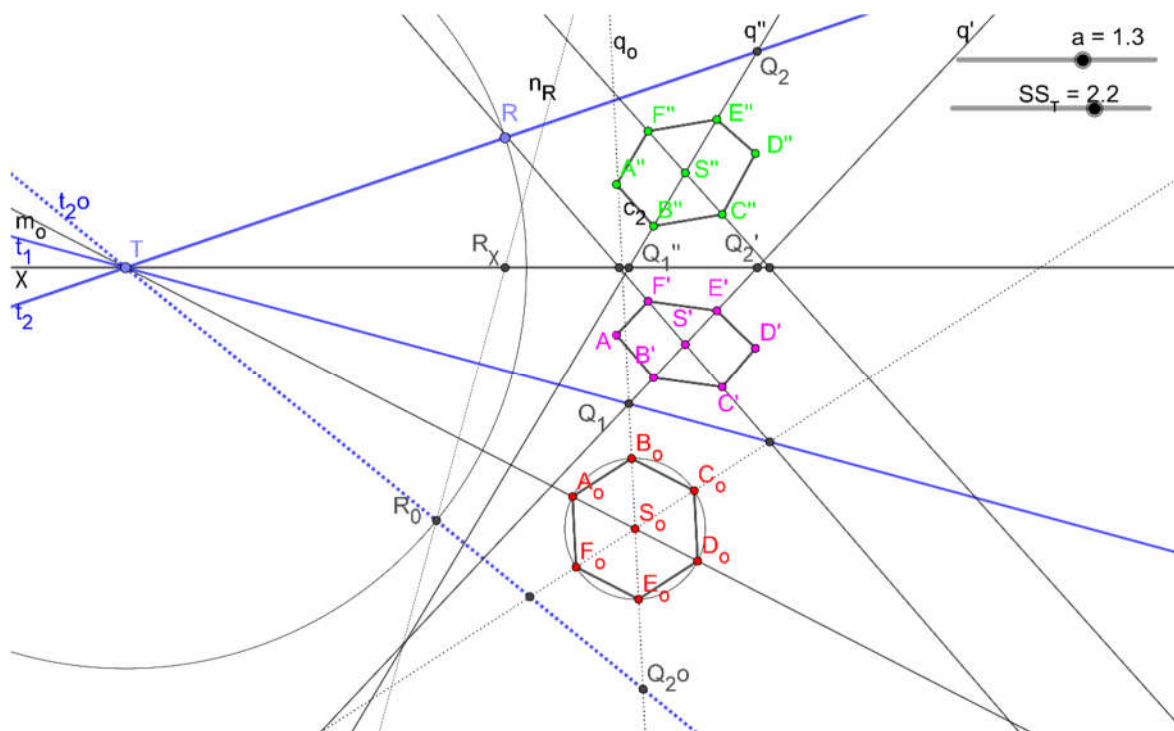
Први корак у решавању датог проблема је обарање равни τ у пројекцијску раван π_1 . Нека је тачка $R = R''$ произвољна тачка са трага t_2 . Тачка $R_x = R'$ је пресечна тачка ординале кроз R и праве x . Нека је T тачка пресека праве x и другог трага t_2 . Конструисаћемо нагибницу n_R такву да јој припада тачка R и да је нормална на траг t_1 . На њој конструисаћемо оборен положај R_o тачке R као пресек кружнице $k(T, TR)$ и праве n_R . Оборени положај t_2^o трага t_2 је права која пролази кроз тачке R_o и T . Конструисаћемо, затим, праву m_o као симетралу угла између правих $t_1 = t_1^o$ и t_2^o . Оборени положај S_o центра кружнице описане око обореног положаја траженог шестоугла се налази на m_o , а на датом одстојању (SS_T – на Слици 47). Даље, конструисаћемо теме оборени положај A_o темена A , тако да $S_oA_o = a$ и $A_o \in m$. Лако налазимо B_o, C_o, D_o, E_o, F_o (на кружници $k(S_o, a)$) користећи особине правилног шестоугла.

Нека је q_o права која пролази кроз тачке B_o и E_o . Нека је, даље, $Q_2^o = q_o \cap t_2^o$ и $Q_1^o = Q_1' = Q_1 = q_o \cap t_1$. Тачку Q_2 добијамо на трагу t_2 , тако да је $Q_2^oT = Q_2T$. Сада, лако налазимо и тачку Q_2' у пресеку праве x и нормале из Q_2 на x , па је $q' = p(Q_1', Q_2')$. У пресеку нормала из B_o, S_o и E_o на траг t_1 са правом q' добијамо тачке B', S' и E' , редом. Даље се, лако, добијају и тачке A', F', C' и D' , а потом и друге пројекције темена траженог шестоугла.

□

ГеоГебра нам пружа могућност да поставимо клизаче за дужину странице и за одстојање центра од трага t_1 тако да ученици могу да виде промену пројекција у зависности од промена ове две дужине.

Ова конструкција захтева велики број помоћних правих што приликом класичног рада делује непрегледно и ученици се веома тешко сналазе на таквим цртежима. ГеоГебра пружа могућност да се помоћне праве уклоне са цртежа односно да се не виде. Поновним означавањем тражене праве она постаје видљива. Ова могућност значајно помаже приликом конструкције јер је рад прегледнији и не долази до преклапања помоћних правих што често доводи до грешака у конструкцији.



Слика 47. Решење Примера 10 у ГеоГебри

4 Нормално пројектовање на три равни

За потпуну представу о облику и положају предмета, или ради лакшег решавања задатог проблема, понекад вршимо пројектовање на три равни. Нову пројекцијску раван уводимо у што повољнијем положају на посматрани предмет, односно у оном положају који пружа најочигледнију пројекцију.

Пример на ком можемо видети зашто некад нису довољне две равни за пројектовање је ситуације када треба да пројектујемо троугао који се налази у равни α , таквој да је $\alpha \perp \pi_1$ и $\alpha \perp \pi_2$. Као што смо видели у претходним поглављима, у овом случају прва пројекција свих тачака равни α , па и посматраног троугла, ће се пројектовати на први траг, а друга пројекција троугла ће бити дуж која се налази на њеном другом трагу. Дакле, ни из прве ни из друге пројекције овог троугла не можемо директно закључити који равни лик смо пројектовали на π_1 и π_2 .

Једна могућност, која би нам дала бољу представу о равном лику који пројектујемо, јесте да уведемо нову пројекцијску раван π_3 , која је нормална на обе пројекцијске равни π_1 и π_2 , односно за коју важи $\pi_3 \perp \pi_1$ и $\pi_3 \perp \pi_2$. Тако постављене равни деле простор на осам делова, на октанте и међусобно се секу по правима x , y и z тако да важи $x = \pi_1 \cap \pi_2$, $y = \pi_1 \cap \pi_3$ и $z = \pi_2 \cap \pi_3$.

Трећу пројекцијску раван називамо још и *страноцртна* или *профилна раван*. Све дефиниције које су коришћене у овом делу рада могу се наћи у [1], [3] и [4].

4.1 Пројекција тачке на три равни

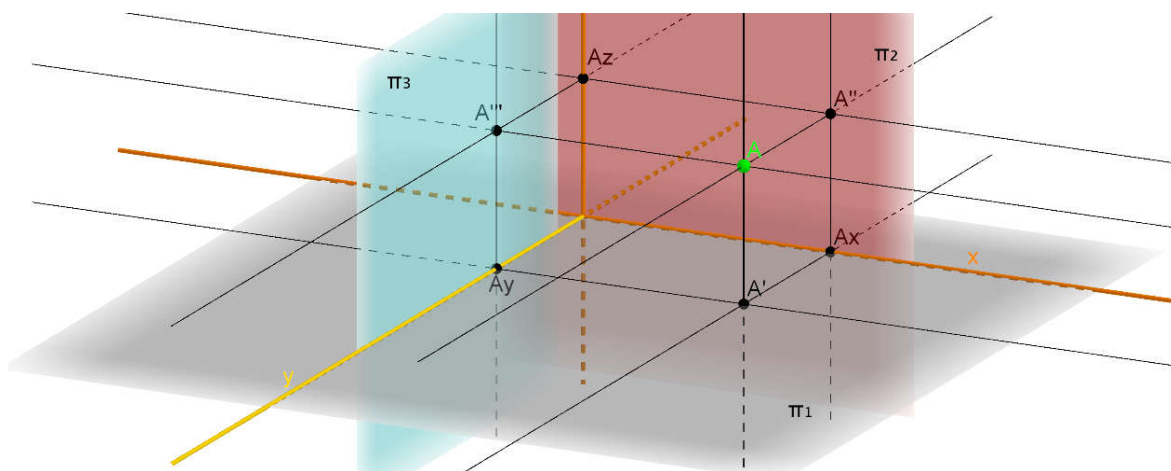
Како смо и видели у претходним поглављима, положај тачке у простору је потпуно одређен помоћу њене две пројекције. Уколико је ипак потребно одредити и њену трећу пројекцију можемо се ослонити на податке које нам пружају њене две познате пројекције.

Нека је посматрана тачка A у првом октанту (Слика 48). Прва и друга пројекција тачке A се конструишу на исти начин као што је приказано у претходном поглављу. Такође, тачку A_x налазимо као пресечну тачку равни која је одређена тачкама A , A' и A'' и праве x .

Слично, као и тачку A_x , дефинишемо и тачке A_y и A_z и добијамо их на следећи начин:

$$A_y \in y, \quad A'A_y \perp y,$$

$$A_z \in z, \quad A''A_z \perp z.$$



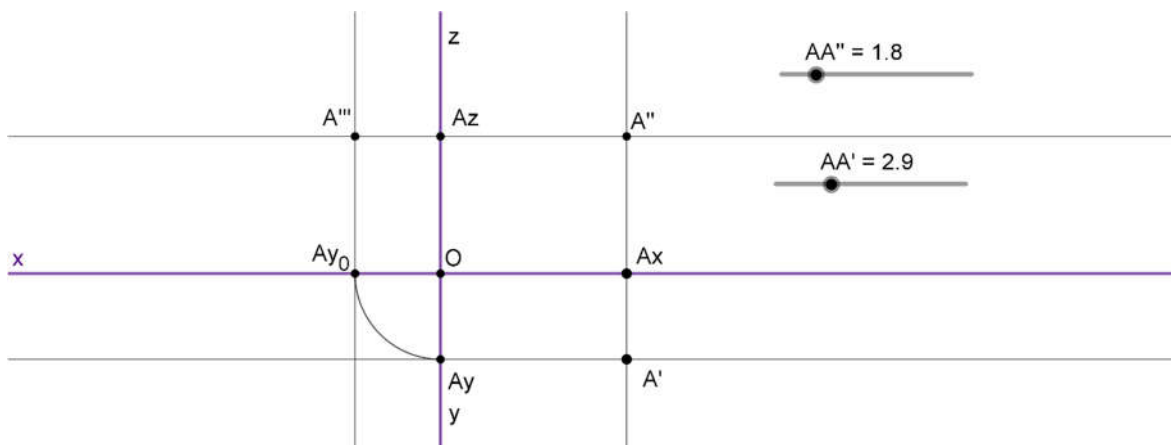
Слика 48. Тродимензионални приказ пројекције тачке на три равни

Даље, помоћу тродимензионалног приказа, лако уочавамо да је $A'''A_z = AA''$ и $AA'' = A'A_x$. Из ове две чињенице закључујемо да је и $A'''A_z = A'A_x$. Дакле, трећа пројекција тачке A је тачка A''' за коју важи: $A'''A_z \perp z$ и $A'''A_z = A'A_x$.

ГеоГebra пружа могућност ученицима да „ротацијом простора“ лакше увиде међусобну зависност растојања посматраних тачака као и њихову промену приликом промене положаја тачке A.

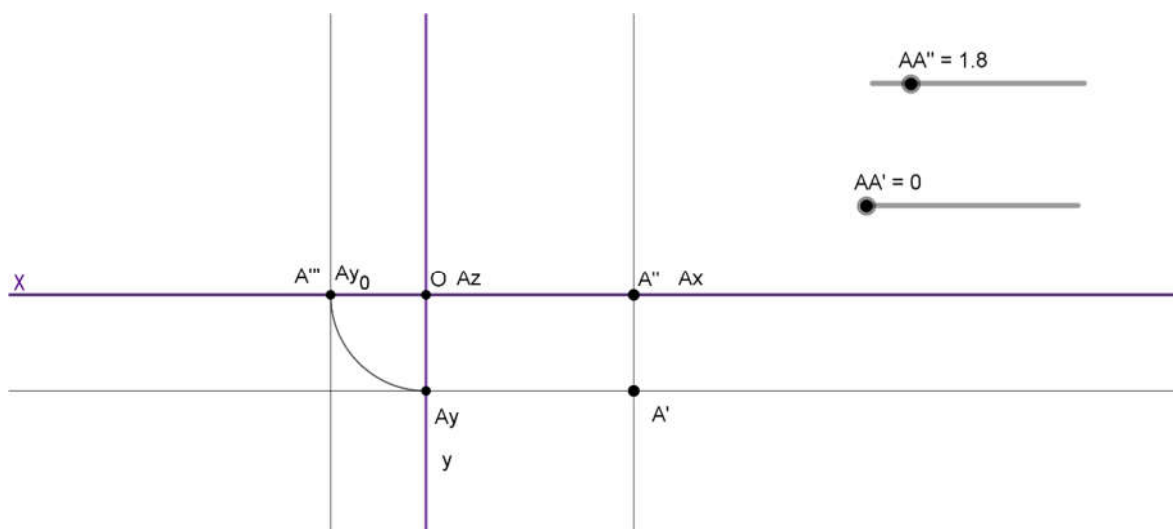
Дводимензионални приказ пројекције тачке из првог октанта видимо на Слици 49. Овакав приказ добијамо тако што раван π_1 ротирамо око x, а π_3 око z и доводимо до поклапања са равни π_2 . Тачку Ay_0 добијамо као пресек x осе и кружнице са центром у O, полупречника OAy. Ротацију вршимо у смеру казаљке на сату.

ГеоГebra пружа могућност постављања клизача за растојање тачке од прве и од друге пројекцијске равни. Ученици на овај начин могу да виде како промена положаја тачке A у односу на прве две пројекцијске равни утиче на промену положаја њене треће пројекције.



Слика 49. Дводимензионални приказ пројекције тачке на три равни

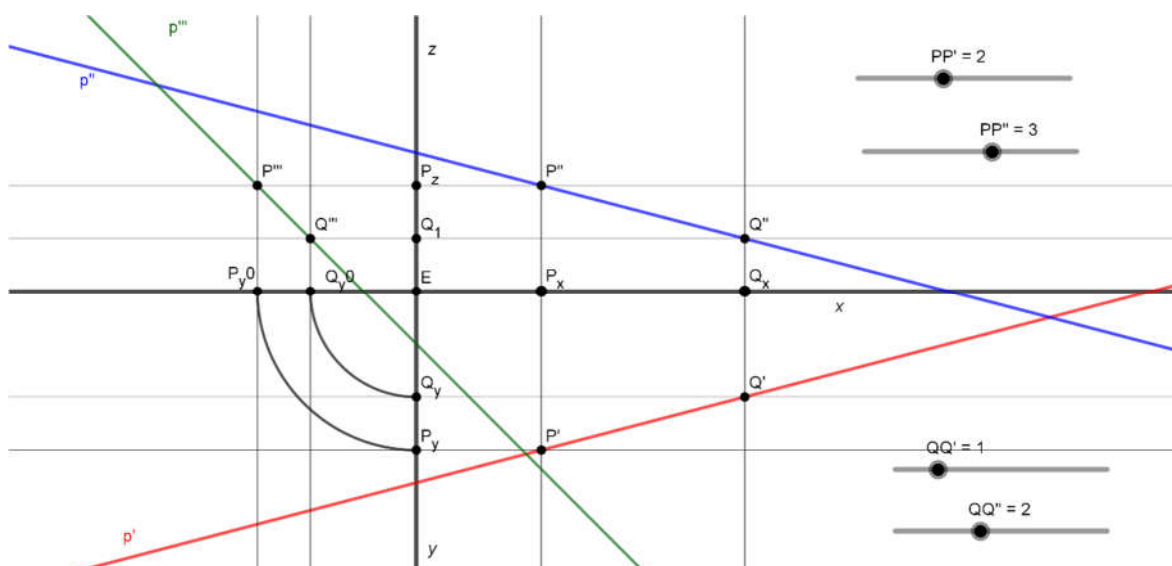
Коришћењем ГеоГебре ученици су у могућности да тачку A поставе у неки од специјалних положаја у односу на пројекцијске равни, нпр. $A \in \pi_1$. Овај положај лако добијају постављањем клизача AA' на нулу (Слика 50).



Слика 50. Дводимензионални приказ пројекције на три равни тачке у специјалном положају

4.2 Пројекција праве на три равни

Нека је права p задата са две своје тачке P и Q . Трећу пројекцију ове праве добијамо лако уколико знамо прву и другу пројекцију тачака P и Q . Прво налазимо треће пројекције P''' и Q''' , ових двеју тачака и то на начин приказан у претходном одељку. Права p''' је права одређена тачкама P''' и Q''' (Слика 51).

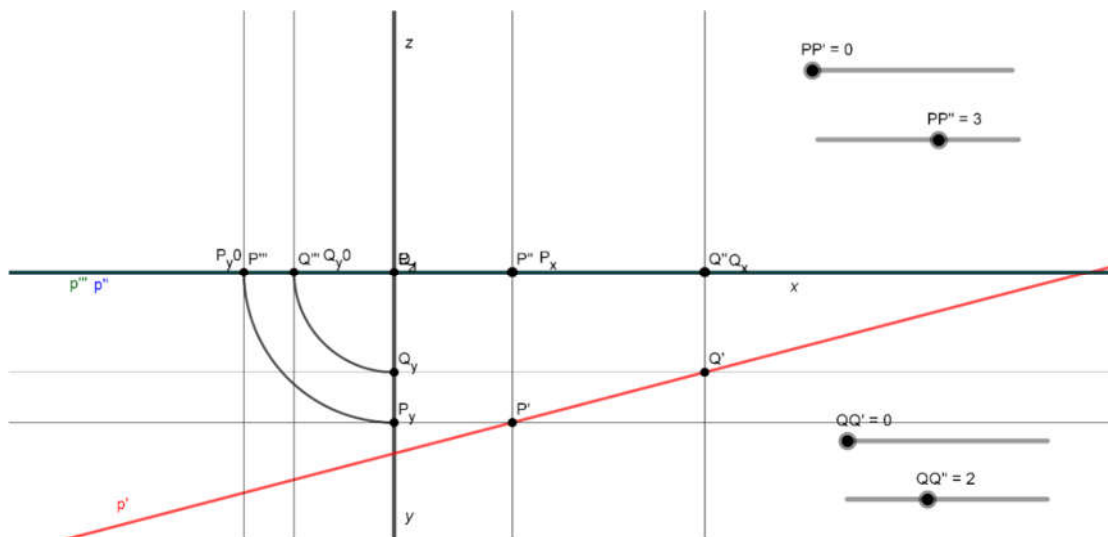


Слика 51. Трећа пројекција праве

Као што је до сад више пута наглашено, ГеоГебра пружа могућност постављања клизача за обе тачке, P и Q . Мењањем растојања ових тачака од пројекцијских равни

праву доводимо у различите положаје. Класична настава, применом конструкције, би од ученика захтевала нов цртеж за сваки од положаја. Међутим, применом ГеоГебре ученик је у могућности да добије пројекције за сваки од жељених положаја постављањем клизача на одговарајуће вредности.

Један од специјалних положаја је да права p припада првој пројекцијској равни. Овај положај праве једноставно добијамо постављањем клизача PP' и QQ' на нулу (Слика 52).

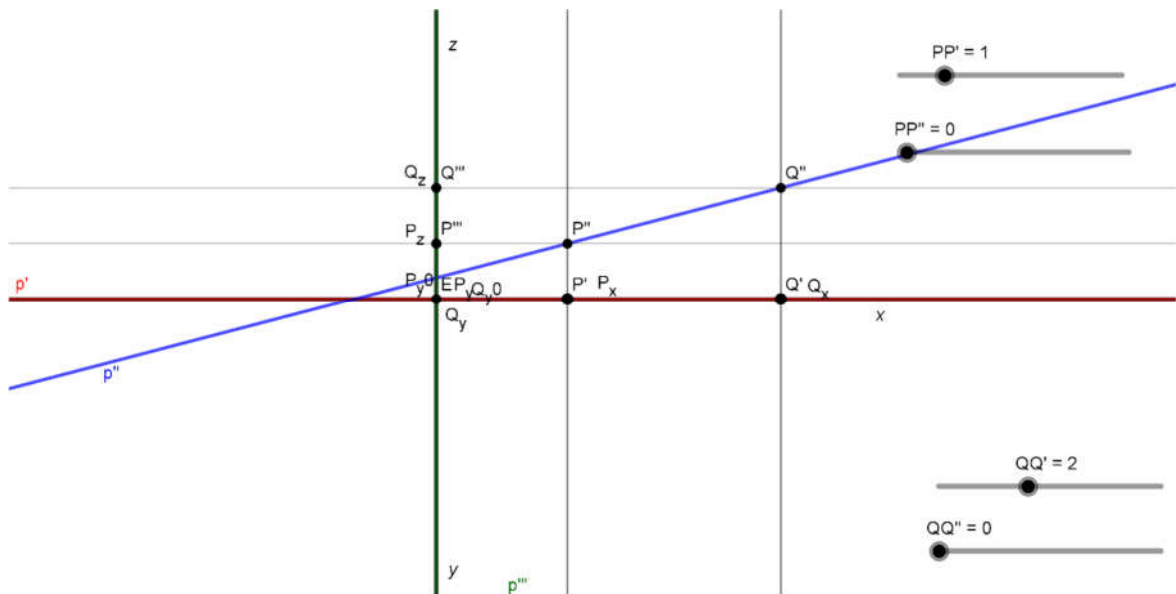


Слика 52. Трећа пројекција праве p која припада првој пројекцијској равни

Лако се види да ће се у том случају друга и трећа пројекција праве поклапати са правама x и y .

Аналогно добијамо и трећу пројекцију праве која припада другој пројекцијској равни. У овом случају клизаче PP'' и QQ'' постављамо на нулу (Слика 53). Ученици, тада, лако увиђају да се прва и трећа пројекција поклапају са правама x и z .

Коришћењем алата које ГеоГебра пружа ученици би могли лако да праву доведу у разне специјалне положаје и посматрају како у датим случајевима изгледају њене три пројекције. Један од таквих случајева је довођење праве у паралелан положај са равни π_1 постављањем клизача PP' и QQ' на исту вредност различиту од нуле. Предност ГеоГебре у овом случају је брза промена окружења и значајна уштеда времена.

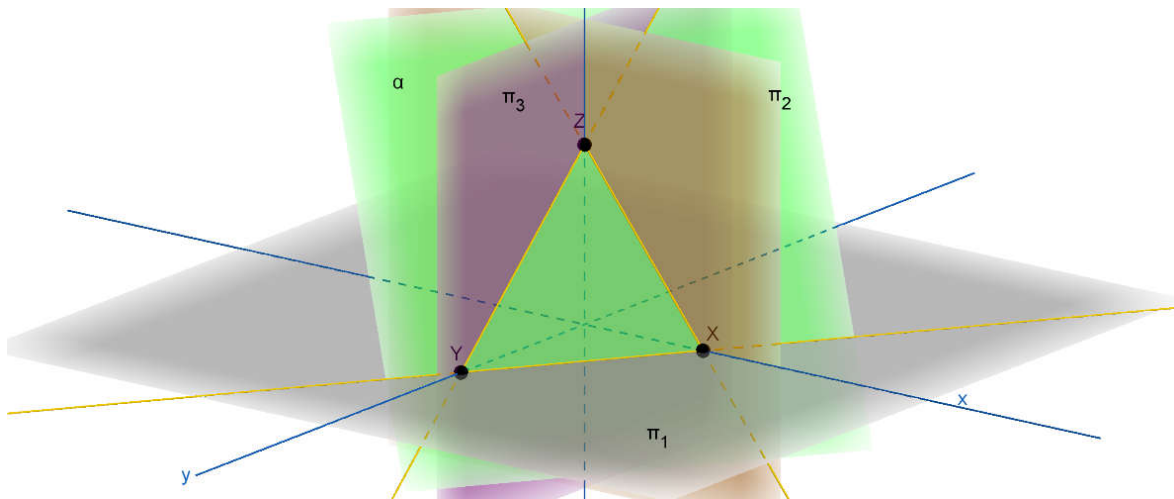


Слика 53. Трећа пројекција праве r која припада другој пројекцијској равни

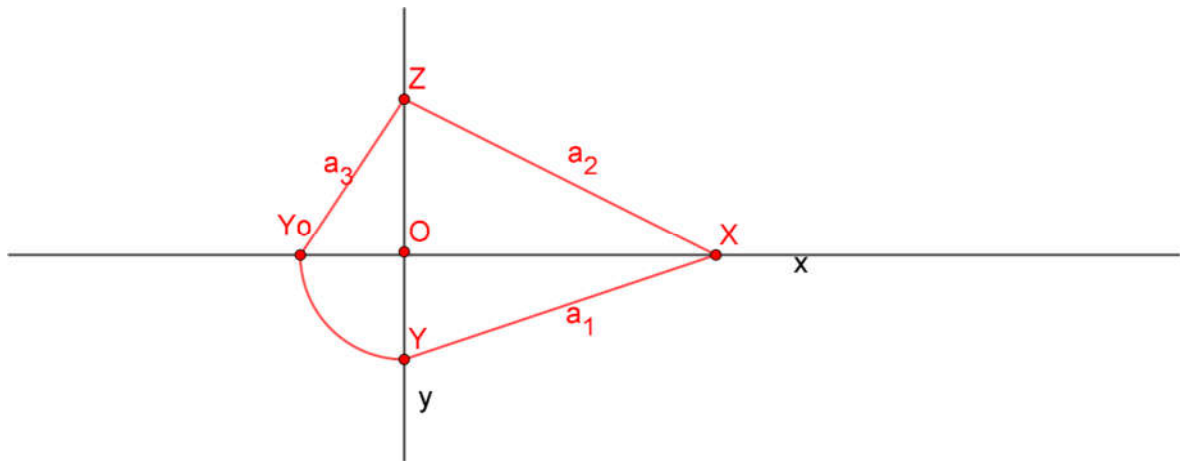
4.3 Пројекција равни

Као што је речено у претходним поглављима, раван је одређена са своја два трага. У овом делу ћемо се бавити њеним трећим трагом (Слика 54).

Нека је раван α задата са своја два трага a_1 и a_2 . Дефинишимо тачке $X = a_1 \cap a_2$ и $Y = a_1 \cap y$, $Z = a_2 \cap z$, $Y_0 = k(O, OY) \cap x$. Трећи траг равни α је права $a_3 = p(Z, Y_0)$ (Слика 55).



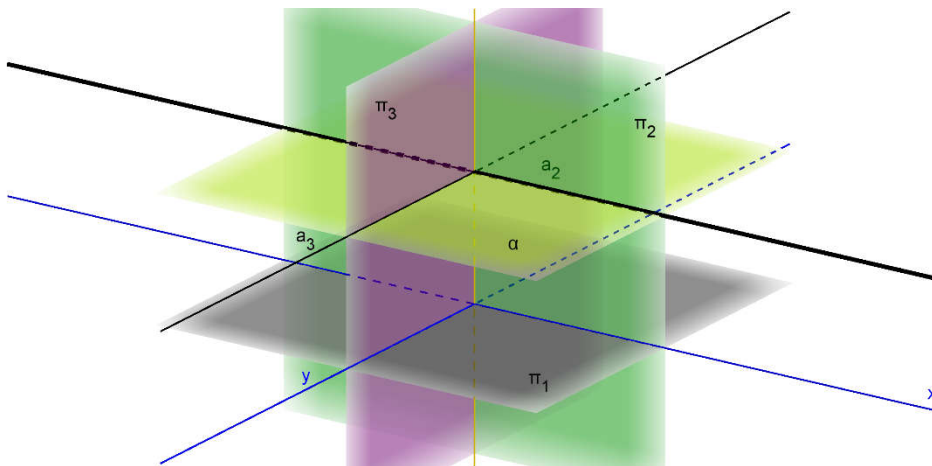
Слика 54. Трoдимензионални приказ равни која сече три пројекцијске равни



Слика 55. Пројекција равни α на три пројекцијске равни

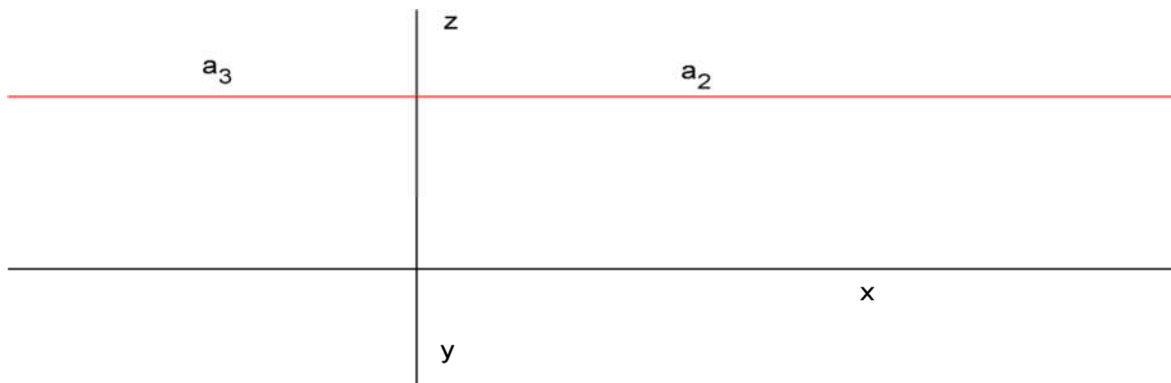
Раван α се може наћи и у неком од специјалних положаја у односу на пројекцијске равни. ГеоГебра нам пружа могућност да веома лако променимо положај посматране равни и посматрамо њене пројекције.

1. Раван α је паралелна са првом пројекцијском равни π_1 (Слика 56).



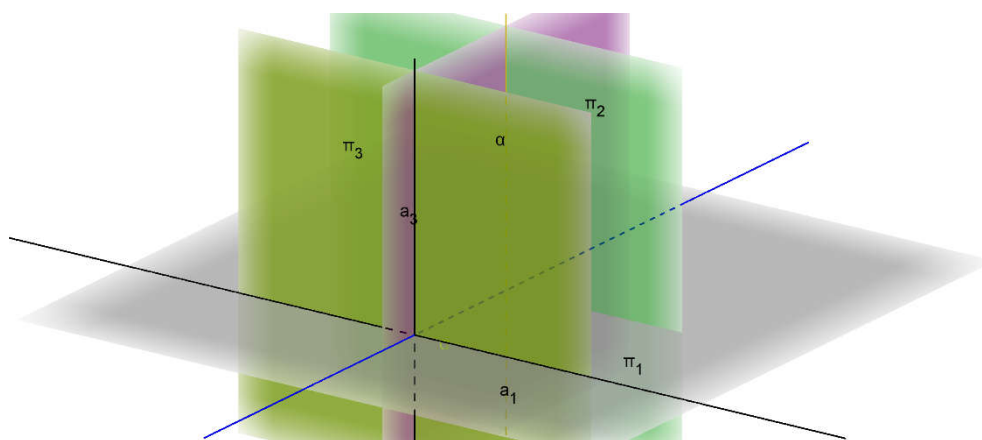
Слика 56. Тродимензионални приказ равни паралелне са π_1

Тада су у равни цртежа други и трећи траг колинеарни, док раван нема први траг (Слика 57).



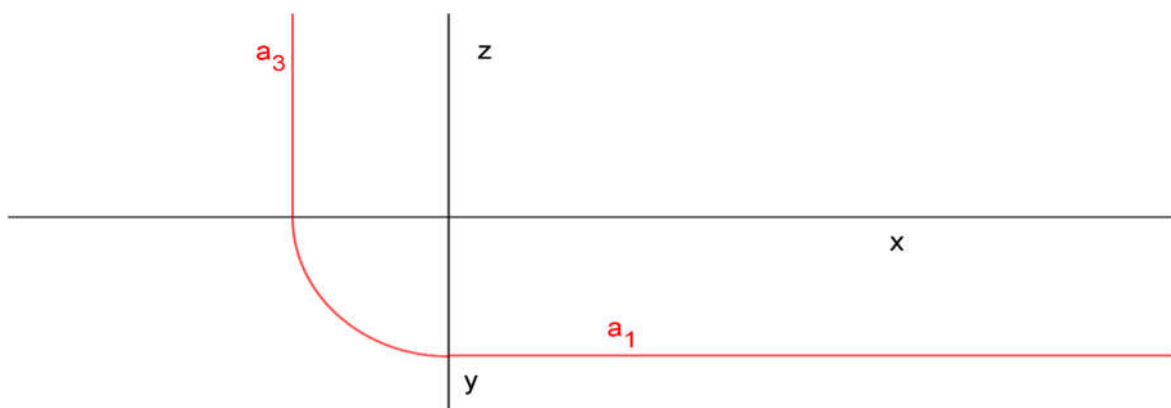
Слика 57. Пројекција равни паралелне са π_1

2. Раван α је паралелна са другом пројекцијском равни π_2 (Слика 58).



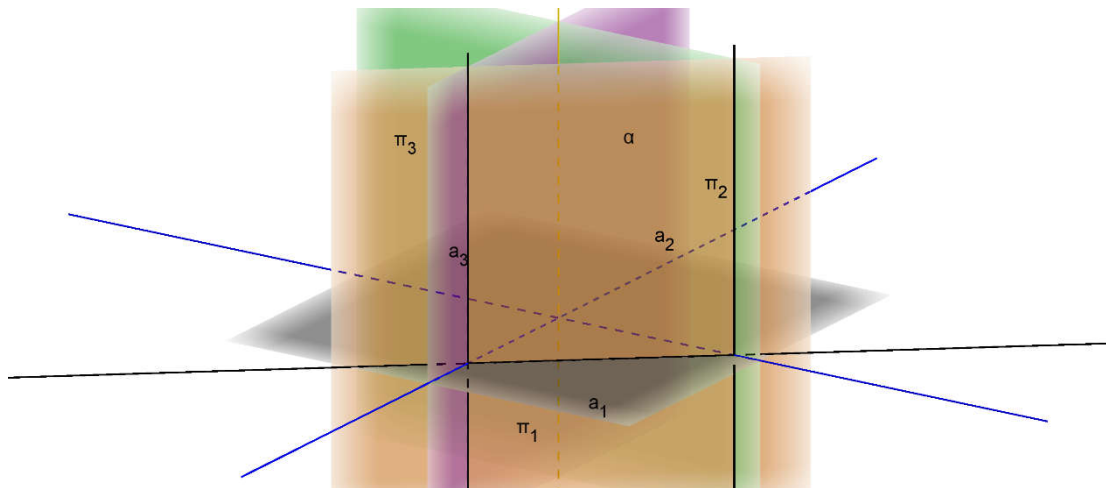
Слика 58. Тродимензионални приказ равни паралелне са π_2

Тада раван нема други траг, док су први и трећи траг приказани на Слици 59.



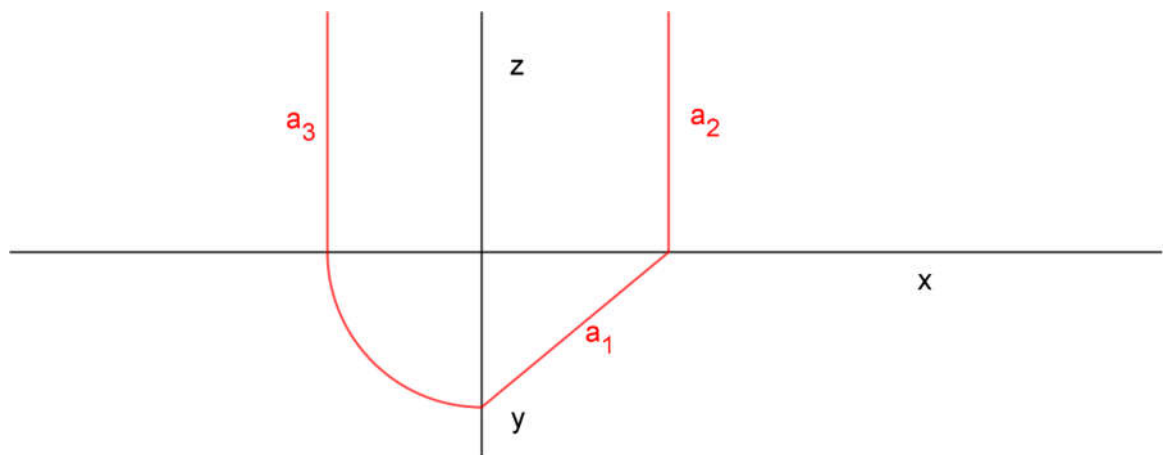
Слика 59. Пројекција равни паралелне са π_2

3. Раван α је нормална на прву пројекцијску раван π_1 (Слика 60).



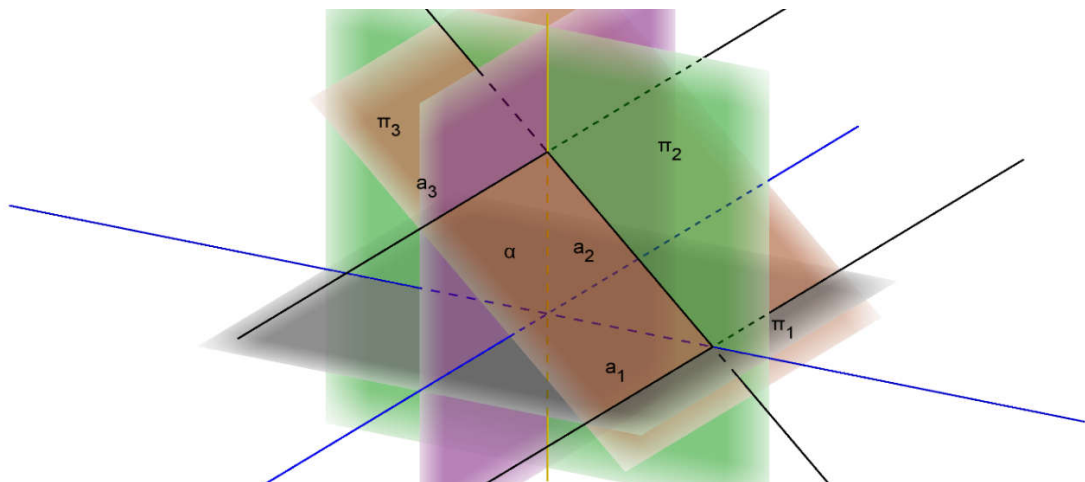
Слика 60. Тродимензионални приказ равни нормалне на π_1

Тада су други и трећи траг те равни, у равни цртежа, паралелне праве (Слика 61).



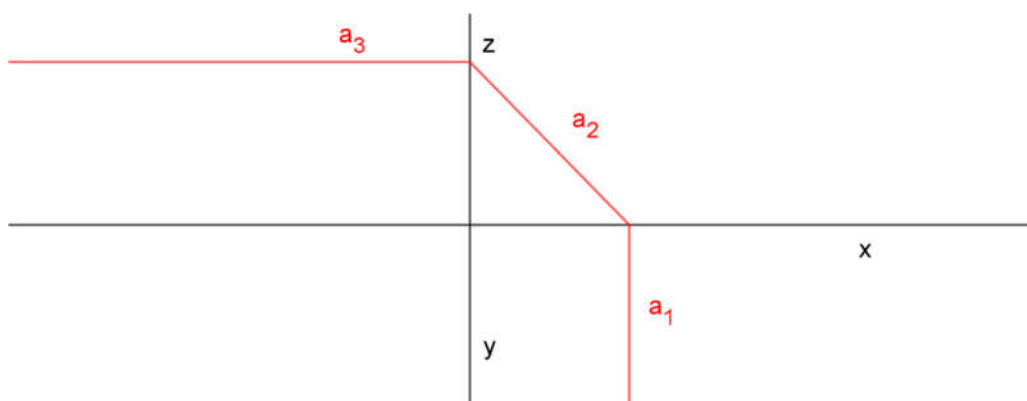
Слика 61. Пројекција равни нормалне на π_1

4. Раван α је нормална на другу пројекцијску раван π_2 (Слика 62).



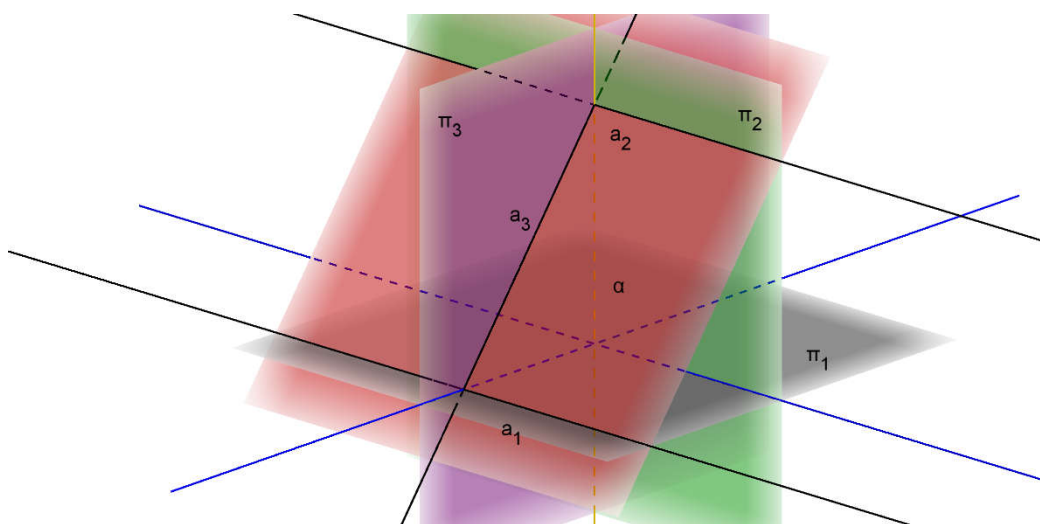
Слика 62. Тродимензионални приказ равни нормалне на π_2

Тада су трагови ове равни, у равни цртежа, у односу као на Слици 63.



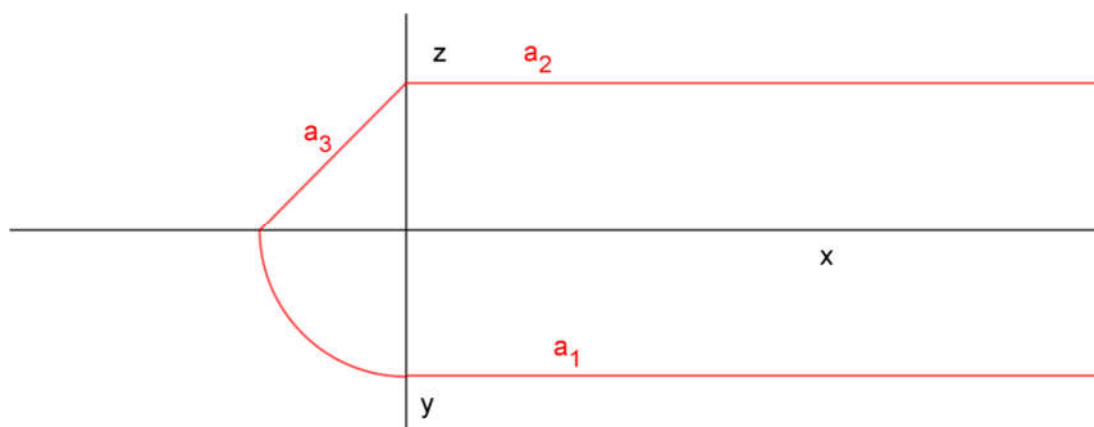
Слика 63. Пројекција равни нормалне на π_2

5. Раван α је нормална на трећу пројекцијску раван π_3 (Слика 64).



Слика 64. Тродимензионални приказ равни нормалне на π_3

Тада су први и други траг ове равни паралелне праве у равни цртежа (Слика 65).



Слика 65. Пројекција равни нормалне на π_3

4.4 Пројекције равних ликова паралелних и нормалних на пројекцијске равни

Пример 11. Нека су задата два темена A и B (својим пројекцијама A' , A'' и B' , B'' , редом) једнакостраничног троугла који се налази у равни α која је нормална на прву и другу пројекцијску раван. Наћи треће теме тог троугла, односно све његове пројекције.

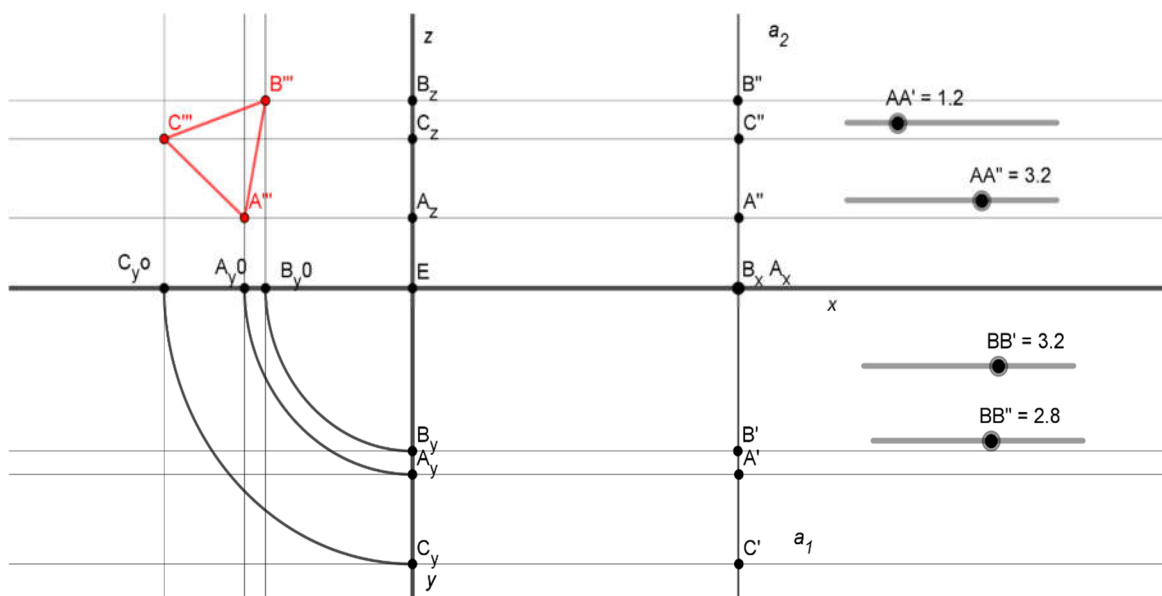
Решење.

Како се троугао налази у равни α која је нормална на прву и другу пројекцијску раван знамо из претходних поглавља да ће се сва темена пројектовати на одговарајуће трагове дате равни. Прве пројекције темена ће се налазити на трагу a_1 , а њихове друге пројекције на трагу a_2 .

Приликом решавања овог проблема морамо водити рачуна да уколико раван лик лежи у равни паралелној некој пројекцијској равни, пројектује се на ту раван у својој правој величини. У овом случају, права величина троугла је уствари његова трећа пројекција.

Тачке A' , A'' , B' , B'' су задате. ГеоГебра нам пружа могућност да овај проблем решавамо користећи већ урађено. Користимо већ обрађену пројекцију праве на три равни, с тим да праве уклањамо и преостале тачке постављамо у положај тако да припадају равни која је у специјалном положају у односу на пројекцијске равни, односно да припадају траговима равни α , за које у овом случају важи да су праве које се поклапају. Такође, имамо могућност да са постављеним клизачима мењамо одстојања датих тачака од прве и друге пројекцијске равни.

Пројекције A''' и B''' , добијамо на већ описан начин. □



Слика 66. Решење Примера 11 коришћењем ГеоГебре

Како знамо да је трећа пројекција овог троугла његова права величина, растојање између тачака A''' и B''' је страница датог троугла. Теме C''' лако добијамо коришћењем чињенице да је овај троугао једнакостраничан. ГеоГебра пружа могућност уцртавања кружница, чији се приказ може искључити, што доприноси бољој прегледности конструкције. Прву и другу пројекцију тачке C лако добијамо нормалним пројектовањем „уназад“. Тачке C' и C'' се такође налазе на првом и другом трагу равни α , редом (Слика 66).

Пример 12. Конструисати пројекције правилног шестоугла који лежи у равни α паралелној другој пројекцијској равни ако су задате тачке P и Q својим првим и другим пројекцијама.

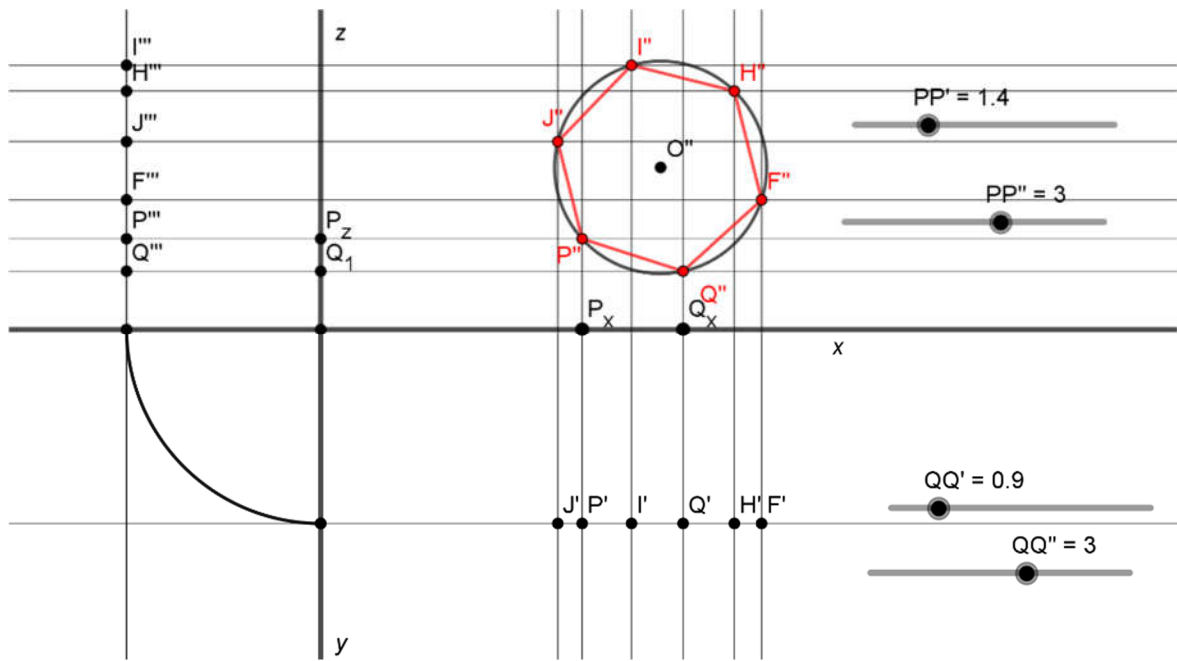
Решење.

Приликом решавања овог проблема треба водити рачуна о положају равни α . Како је она паралелна са π_1 знамо да се шестоугао пројектује у својој правој величини на другу пројекцијску раван.

Такође, користимо чињеницу да је раван α нормална на прву и трећу пројекцијску раван, па се прве и треће пројекције темена овог правилног шестоугла налазе редом на траговима a_1 и a_3 .

Као и у претходном примеру користићемо већ урађено, пројекцију праве на три равни, уклањајући праве. Морамо водити рачуна да окружење поставимо тако да одговара условима задатка. Како је $\alpha \parallel \pi_2$, све тачке ове равни се налазе на истом одстојању од равни π_2 . У том случају клизаче PP'' и QQ'' морамо поставити на исту вредност. Померањем преостала два клизача мењамо страницу датог правилног шестоугла.

Како су нам дате тачке P'' и Q'' , преостала темена лако добијамо тако што прво нађемо центар O'' који ће представљати центар описане кружнице око овог шестоугла. Њега налазимо на исти начин као и тачку C'' у претходном примеру (троугао $A''B''C''$ је једнакостраничан). Након тога остала темена лако налазимо на кружници $k(O'', O''P'')$, тако да је растојање између свака два суседна темена једнако са одстојањем између тачака P'' и Q'' . Применом ГеоГебре ово је веома лако урадити цртањем кружница, чији приказ накнадно искључујемо (Слика 67). $\square$



Слика 67. Решење Примера 12 у ГеоГебри

5 Закључак

Овај рад имао је за циљ да прикаже могућност извођења наставе Нацртне геометрије применом програмског пакета ГеоГебра. Као што је више пута и приказано у овом раду примена ГеоГебре у настави има значајне предности у односу на класичну наставу.

У време када се у нашем образовном систему све више говори и инсистира на модернизацији наставе и стављању ученика са његовим потребама и интересовањима у центар процеса образовања, настава осмишљена на приказан начин могла би да буде одговор на постављене циљеве.

Како ученици данас показују велико интересовање за рад на рачунару, или паметном телефону, можда би баш овакав вид наставе довео до приближавања ученика темама којим се бави Нацртна геометрија, а генерално – и геометрија. На овај начин је лакше мотивисати ученике и држати им пажњу, јер их окружење у којима раде подстиче на самосталан рад.

Предности учења Нацртне геометрије применом програмског пакета ГеоГебра су вишеструке. На овај начин се лако превазилази препрека која је честа у класичној настави, да неки ученици не могу да визуализују одређен проблем, па им самим тим он постаје апстрактан, што је више пута и истакнуто у овом раду. ГеоГебра пружа могућност тродимензионалног приказа проблема, што ученицима дозвољава да га сагледају из свих углова. Такође, применом ове апликације могуће је на истом цртежу приказати више специфичних ситуација, за шта је до сад било потребно цртати више цртежа. ГеоГебра пружа могућност сакривања непотребних објеката што је веома практично јер нема сувишних елемената на цртежу, што често зна да доведе до нехотичних грешака у конструкцији.

Велика предност овог пакета је његова лака доступност. ГеоГебра је бесплатан пакет који је могуће инсталирати и на паметне телефоне. Обзиром да већина ученика поседује овакве телефоне, настава се може организовати и радом на њима, што отклања још једну од могућих тешкоћа – доступност рачунарског кабинета.

Наравно, настава која се изводи на овај начин има и неке своје мане. Циљ наставе Нацртне геометрије није само да се дође до коначне пројекције. Један од њених циљева је вежбање прецизности и уредности код ученика, што у овом случају није у фокусу.

Уз све предности које су набројане у овом раду, остаје још да се утврди колико би у пракси овакав рад побољшао резултате, односно сам квалитет знања ученика. Дакле, неопходно је урадити и истраживање у коме бисмо ученике једног разреда обучавали на класичан начин, а ученике другог применом ГеоГебре у настави, а затим мерили њихова постигнућа.

Као што је већ речено, приказано у овом раду је само основа којим се бави Нацртна геометрија, а прилагођено градиву које се изучава у средњим школама. Курсеви који се изучавају на факултетима су доста комплекснији и обрада додатног градива у ГеоГебри би могла да буде тема неког другог рада.

Литература

- [1] Шнајдер Загорка: „Нацртна геометрија“, Научна књига, Београд, 1991.
- [2] Бранка Алимпих: „Задаци из нацртне геометрије“, Универзитет у Новом Саду, 1969.
- [3] Радојчић Милош, Радојчић Војна: „Нацртна геометрија“, Београд, 1961.
- [4] Ђуровић Винко: „Нацртна геометрија“, Београд, 1966.
- [5] Шапоњић Момчило, Попов Радован: „Задаци из нацртне геометрије“, Нови Сад, 1968.
- [6] Pellumb Kllogjeri: A Global Platform for Teaching and Learning Math „GeoGebra Together and Using the Synergy of Mathematicians“, Technology Enhanced Learning. Quality of Teaching and Educational Reform, Communications in Computer and Information Science, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, vol. 73, 2010, pp. 681-687.
- [7] Petra Surynková: „Reflections of Developments in Educational Techniques in the Design of a New Textbook on Descriptive Geometry“, Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT12), 2015, pp. 320-327.
- [8] Světlana Tomiczková, Miroslav Lávička: „Computer-Aided Descriptive Geometry Teaching“, Computers in the Schools, 30 (1), 2013, pp. 48-60.

Биографија

Радмила Краљ рођена је 18.4.1987. у Бачкој Паланци. Основну школу „Десанка Максимовић“ завршила је у Бачкој Паланци. Гимназију „20. октобар“ у Бачкој Паланци, општи смер, завршила је 2006. године.

Студије на Природно – математичком факултету, у Новом Саду, смер дипломирани математичар – математика финансија уписала је 2006. године. Дипломирала је 16.12.2010. године са просечном оценом 8,67, одбраном завршног рада под називом „Функција корисности у теорији одлучивања“.

Од 2011. године ради у више средњих и основних школа у Бачкој Паланци.

Мастер академске студије на истом факултету уписала је 2013/2014. школске године, смер Мастер математика, модул Настава математике. На мастер студијама положила је све испите предвиђене планом и програмом и тиме стекла услов за одбрану овог мастер рада.

Нови Сад, 2019.

Радмила Краљ

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Radmila Kralj

AU

Mentor: dr Goran Radojev

MN

Naslov rada: Primena programskog paketa GeoGebra u nastavi Nacrtna geometrije

MR

Jezik publikacije: Srpski (ćirilica)

JP

Jezik izvoda: srpski i engleski

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2019.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno- matematički fakultet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 3.

MA

Fizički opis rada: 5 poglavlja/ 56 strana /8 literatura /67 slika

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Nacrtna geometrija

ND

Ključne reči: Nacrtna geometrija, GeoGebra, normalno projektovanje na jednu, dve ili tri ravni.

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: U ovom radu predstavljena je primena softverskog paketa GeoGebra u nastavi Nacrtna geometrije. Obradeno je normalno projektovanje na jednu, dve i tri ravni. Podučavanje i učenje pomoću GeoGebre ima značajne prednosti (bolja vizeulizacija, laka promena objekata u problemima, itd.) u odnosu na klasičnu nastavu, što je i analizirano tokom svih poglavlja ovog rada. Nephodno je, kao naredni zadatak, utvrditi i koliki uticaj ovakav tip podučavanja može da ima na znanje i rezultate učenika.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 29.6.2018.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Đurđica Takači, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Mirjana Štrboja, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Mirjana Brdar, docent, Tehnološki fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Goran Radojev, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND
INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code:

CC

Author: Radmila Kralj

AU

Mentor: dr Goran Radojev

MN

Title: Using software GeoGebra in teaching descriptive geometry

XI

Language of text: Serbian (cyrillic)

LT

Language of abstract: Serbian and English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2019.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science,
Trg Dositeja Obradovića 3

PP

Physical description: 5 chapters/ 56 pages /8 references / 67 pictures

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Descriptive geometry

SD

Key words: Descriptive geometry, GeoGebra, ortogonal projection on one, two and three
planes

SKW UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of
Sciences, University of Novi Sad

HD

Note:

Abstract: In this thesis has been shown using software GeoGebra in teaching descriptive geometry. It was studied ortogonal projection on one, two and three planes. Teaching and learning with the use of GeoGebra has many advantages (better visualization, easy change of objects in problems, etc.) comparing with classical teaching that has been analyzed throughout each chapter of this thesis. Investigation of the influence of this approach of teaching on the knowlegde and achievement of students is the task for the future research.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 29.6.2018.

ASB

Defended:

DE

Thesis defense board:

DB

President: dr. Đurđica Takači, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr. Mirjana Štrboja, Associate professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr. Mirjana Brdar, Assistant professor, Faculty of Technology, University of Novi Sad

Member: dr. Goran Radojev, Assistant professor, Faculty of Science, University of Novi Sad, mentor