



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ  
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ  
ДЕПАРТАМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И  
ИНФОРМАТИКУ



---

Оља Скакавац

# ОБЛАСТ АТРАКЦИЈЕ РАЗНИХ ПОСТУПАКА

мастер рад

---

Нови Сад, 2014.

## Садржај

---

|                                                     |           |
|-----------------------------------------------------|-----------|
| <b>Предговор</b>                                    | <b>4</b>  |
| <b>1. Уводни део</b>                                | <b>5</b>  |
| 1.1 Ознаке.....                                     | 5         |
| 1.2 Дефиниције.....                                 | 6         |
| 1.3 Теореме .....                                   | 10        |
| <b>2. Неки познати поступци</b>                     | <b>12</b> |
| 2.1 Халејев поступак.....                           | 12        |
| 2.2 Супер Халејев поступак .....                    | 14        |
| 2.3 Модификован супер Халејев поступак .....        | 14        |
| 2.4 Кингова фамилија поступака.....                 | 14        |
| 2.5 Jarratt-ова фамилија поступака .....            | 14        |
| 2.5.1 Први случај .....                             | 15        |
| 2.5.2 Други случај.....                             | 15        |
| 2.5.3 Трећи случај.....                             | 15        |
| 2.5.4 Четврти случај .....                          | 15        |
| <b>3. Нова фамилија поступака Jarratt-овог типа</b> | <b>16</b> |
| <b>4. Експерименти</b>                              | <b>18</b> |
| 4.1 Халејеви поступци .....                         | 20        |
| 4.1.1 Халејев поступак .....                        | 20        |
| 4.1.2 Супер Халејев поступак .....                  | 21        |
| 4.1.3 Модификовани супер Халејев поступак.....      | 21        |

|       |                                             |           |
|-------|---------------------------------------------|-----------|
| 4.2   | <b>Jarratt-ов поступак .....</b>            | <b>22</b> |
| 4.2.1 | Први случај .....                           | 22        |
| 4.2.2 | Други случај.....                           | 22        |
| 4.2.3 | Трећи случај.....                           | 23        |
| 4.2.4 | Четврти случај .....                        | 23        |
| 4.2.5 | Случајеви од 1-4 .....                      | 23        |
| 4.3   | <b>Кингов поступак .....</b>                | <b>24</b> |
| 4.4   | <b>Нова фамилија Jarratt-овог типа.....</b> | <b>24</b> |
| 5.    | <b>Закључак</b>                             | <b>25</b> |
| 6.    | <b>Биографија</b>                           | <b>26</b> |
| 7.    | <b>Литература</b>                           | <b>27</b> |

## Предговор

---

Поступци за решавање нелинеарне једначине  $f(x)=0$  са једном непознатом често се класификују по реду конвергенције, по броју израчунавања вредности функције и њених извода и по индексу ефикасности. У овом мастер раду посматрамо као критеријум за упоређивање поступака област атракције и њену зависност од реда конвергенције. Упоредимо више поступака реда конвергенције 3 и 4 за израчунавање приближних решења једноструких нула и њихове области атракције. Посебно се упоређују области атракције за поступке истог реда конвергенције и за поступке различитог реда конвергенције.

Мастер рад је подељен у четири дела. У уводном делу дајемо ознаке, дефиниције и теореме које ћемо користити у даљем раду. Други део садржи дефиниције Халејевог поступка, супер Халејевог оптималног поступка, модификованог супер Халејевог оптималног поступка, Кингове фамилије поступака и Jarratt-овог поступка, теореме о конвергенцији и реду конвергенције. У трећем делу посматрамо једну нову двопараметарску фамилију поступака Jarratt-овог типа. Оригинални део мастер рада представља доказ конвергенције четвртог реда за поменуто двопараметарску фамилију поступака Jarratt-овог типа, анализа утицаја параметара и поређење области атракције за посматране поступке.

У последњем делу рада приказаћемо нумеричке експерименте урађене у програмском пакету *Mathematica*.

Нови Сад, октобар 2014.

Оља Скакавац

## 1. Уводни део

---

### 1.1 Ознаке

- $\mathbb{C}$  скуп комплексних бројева
- $D = [a, b]$
- $D_f^+ = \{x \in D \mid f(x) > 0\}$
- $D_f^- = \{x \in D \mid f(x) < 0\}$
- $D_\rho(\alpha) = \{x \in D \mid |x - \alpha| \leq \rho\}, \quad \alpha \in D, \quad \rho > 0$
- $C^k[a, b]$  - скуп  $k$  - пута непрекидно диференцијабилних функција
- $\{x_k\}$  низ бројева  $x_0, x_1, \dots$
- $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$
- $t(x) = \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}$
- $\sigma(x) = 2 \frac{f(x - u(x))}{f(x)}$
- $\lambda(x) = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{f' \left( x - \frac{2}{3} u(x) \right)}{f'(x)} \right)$
- $\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)^2} f'' \left( x - \frac{1}{3} u(x) \right)$
- $\alpha$  решење једначине  $f(x) = 0$ , односно са њом еквивалентне једначине  $x = \varphi(x)$
- $C_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j! f'(\alpha)}, \quad j = 2, 3, \dots$
- $A_j(x) = \frac{f^{(j)}(x)}{j! f'(x)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$

- једначина грешке  $e_{k+1} = Ce_k^p + O(e_k^{p+1}),$

где је  $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k,$

$$e_k = x_k - \alpha,$$

$p$  је ред итеративног поступка

$C$  асимптотска константа грешке

$\frac{e_{k+1}}{e_k^p}, k = 1, 2, \dots$  апроксимације асимптотске константе грешке

## 1.2 Дефиниције

Скоро све дефиниције, ако није посебно наведено, су из [8].

**Дефиниција 1.** Једначина непокретне тачке је једначина облика

$$x = \varphi(x).$$

**Дефиниција 2.** Број  $\alpha$  је непокретна тачка функције  $\varphi$  ако је

$$\alpha = \varphi(\alpha).$$

Нека је  $x_0$  произвољан број из интервала  $[a, b]$ . Формирамо низ бројева  $x_0, x_1, x_2, \dots$  према

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Овај низ је могуће формирати само ако  $\varphi(x_k) \in [a, b], k = 0, 1, 2, \dots$  због дефинисаности функције  $\varphi$  на интервалу  $[a, b]$ . Очигледно, ако функција  $\varphi$  пресликава интервал  $[a, b]$  у самог себе, важи  $\varphi(x_k) \in [a, b], k = 0, 1, 2, \dots$ . Ако је низ  $x_0, x_1, x_2, \dots$  добро дефинисан и има граничну вредност, тј. за неко  $\alpha \in [a, b]$  важи

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha,$$

онда је  $\alpha$  решење једначине  $\varphi(x) = x$ , ако је функција  $\varphi$  непрекидна на интервалу  $[a, b]$ . Наиме, из  $\varphi(x) \in [a, b]$ , за свако  $x \in [a, b]$  следи, због затворености интервала  $[a, b]$ , да тачка  $\alpha \in [a, b]$ , а због непрекидности функције  $\varphi$  следи

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) = \varphi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) = \varphi(\alpha).$$

Дакле, ако низ  $x_0, x_1, x_2, \dots$  конвергира ка  $\alpha$ , тада је његова гранична вредност,  $\alpha$ , решење једначине  $\varphi(x) = x$ , а чланови тог низа апроксимирају то решење.

Овај поступак, у коме рачунамо вредности  $x_0, x_1, x_2, \dots$  према  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ , је пример **итеративног поступка** (поступак сукцесивних апроксимација), где је  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  **итеративно правило**, функција  $\varphi$  **функција корака**, а низ  $x_0, x_1, x_2, \dots$  је **итеративни низ**. Први члан тог низа  $x_0$  је **почетна апроксимација** (стартна вредност). Када итеративни низ конвергира за произвољну почетну вредност из неког скупа, кажемо да **итеративни поступак конвергира**.

Итеративне поступке можемо поделити у две групе на основу података који они користе у једном итеративном кораку. Тако разликујемо итеративне поступке са и без меморије, [14].

**Дефиниција 3.** *Ако се нова апроксимација  $x_{k+1}$  израчунава само помоћу  $x_k$ , тј. ако је  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ , онда је посматрани поступак без меморије.*

- Њутнов поступак је најпознатији итеративни поступак без меморије. Код овог поступка је

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (1)$$

**Дефиниција 4.** *Нека је дат конвергентан низ  $x_0, x_1, \dots$  чија је гранична вредност  $\alpha$ . Кажемо да је  $p \in [1, \infty)$  ред конвергенције тог низа ако је*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} = C,$$

*а  $C$  је константа различита од нуле. Ако је  $p=1$ , онда додатно претпостављамо да је  $C < 1$ .*

Такође, каже се да је ред конвергенције низа  $x_0, x_1, \dots$  најмање  $p$  ако дозволимо да константа  $C$  може бити једнака нули.

Еквивалентни запис претходне дефиниције је следећи.

**Дефиниција 5.** *Конвергентан низ  $x_0, x_1, \dots$  чија је гранична вредност  $\alpha$ , има ред конвергенције  $p \in [1, \infty)$  ако постоје константа  $C$  различита од нуле и природан број  $n_0$  такав да је*

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C |x_k - \alpha|^p, \quad k \geq n_0.$$

*Ако је  $p=1$ , онда додатно претпоставимо да је  $C < 1$ .*

Познато је да конвергенција поступака за нумеричко решавање једначина зависи, понекад и много, од почетне апроксимације. Да бисмо сагледали прецизније ову зависност, дефинисаћемо област ( базен) атракције. Можемо рећи

да је област атракције за дату функцију и дати поступак скуп свих почетних вредности за које поступак конвергира свакој нули функције.

Функција

$$f(x) = x^2 + \sin(\pi x) \quad (2)$$

има две реалне нуле  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_2 \approx -0.787$ . Скуп свих почетних вредности  $x_0$  за које Њутнов поступак примењен на једначину  $f(x) = 0$  конвергира ка  $\alpha_1$  је област атракције за  $\alpha_1$ . Исто тако, скуп свих почетних вредности  $x_0$  за које Њутнов поступак примењен на једначину  $f(x) = 0$  конвергира ка  $\alpha_2$  је област атракције за  $\alpha_2$ . Посматрали смо само реалне нуле функције  $f$ . Слично поступамо и ако је функција комплексне променљиве.

**Дефиниција 6.** [22] Нека је дата функција  $f$  дефинисана у комплексној равни  $\mathbb{C}$  и нека су њене нуле  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ , и нека је конвергентни поступак дефинисан са

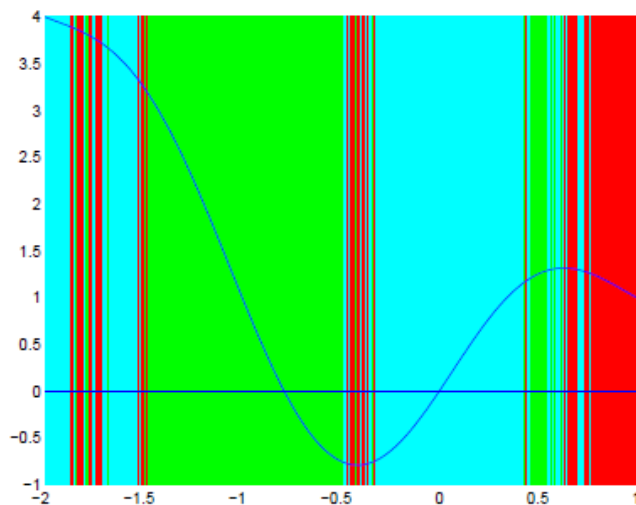
$$x_{n+1} = g(x_n) \quad (3)$$

Област атракције за нулу  $\alpha_k$  је дефинисан са

$$B_{f,g}(\alpha_k) = \{ \alpha \in \mathbb{C} \mid \text{поступак } x_{n+1} = g(x_n) \text{ са } x_0 = \alpha \text{ конвергира ка } \alpha_k \} \quad (4)$$

Очигледно ако смо довољно близу неке нуле, тада би требало да смо у области атракције за ту нулу. Али то није увек тако, јер итеративни поступак може да скочи са једне тачке и да не конвергира тој нули или уопште да не конвергира, иако је у веома блиској тачки конвергирао посматраној нули. На следећој слици то илуструјемо на примеру функције (2) и Њутновог поступка. На интервалу  $[-2, 1]$  посматрамо сваку од 3000 тачака као почетну вредност  $x_0$  и постављамо вертикалне линије у боји према следећој шеми:

- ако итеративни поступак конвергира са  $x_0$  нули  $\alpha_1 = 0$  линија је светло плава
- ако итеративни поступак конвергира са  $x_0$  нули  $\alpha_2 = -0.787237124534337\dots$  линија је зелена
- ако итеративни поступак не конвергира са  $x_0$  ни ка  $\alpha_1$  ни ка  $\alpha_2$  онда је линија црвена.



Слика 1. Област атракције за функцију (2), [22]

Очигледно око сваке нуле имамо широку пругу исте боје. У транзиционим тачкама узане пруге различитих боја се мешају. Значи, ту имамо фракталну структуру.

Када се посматрају и комплексне нуле функције добијају се интересантне слике области конвергенције. На примеру функције из [22]

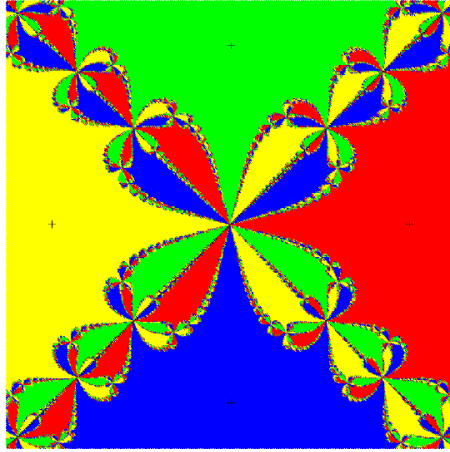
$$f(x) = x^4 - 1 \quad (5)$$

чије су нуле  $1, -1, i, -i$  посматрамо области конвергенције у делу комплексне равни дефинисаном са

$$R = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy, -1.25 \leq x \leq 1.25, -1.25 \leq y \leq 1.25\} \quad (6)$$

Одговарајуће боје су

- $\alpha = 1$  црвена
- $\alpha = i$  зелена
- $\alpha = -1$  жута
- $\alpha = -i$  плава



Слика 2. Област атракције за Њутнов поступак примењен на функцију (5)

Видимо да „режњеви“ који се јављају дуж дијагоналних линија које раздвајају област атракције садрже све четири боје. Веће подобласти увек садрже и друге две нуле, тј. дуж дијагонале која раздваја  $\alpha=1$  од  $\alpha=i$  (црвену од зелене) веће подобласти су плава и жута. Приметимо да режњеви као и подобласти имају фракталне ивице и да се смањују дуж дијагонале.

Посматрали смо област атракције Њутновог поступка. Питање које се појављује јесте да ли су исте или сличне области атракције и код других поступака. Посматраћемо Халејев, супер Халејев, модификовани супер Халејев Jarratt-ов поступак да бисмо упоредили област атракције за исту функцију и у истој области комплексне равни.

### 1.3 Теореме

Скоро све теореме, ако није посебно наведено, су из [8].

Итеративни поступак се може користити и код решавања једначина облика  $f(x) = 0$ . Ако тражимо нуле функције  $f$  на интервалу  $[a, b]$  потребно је одредити функцију  $\varphi$  тако да су једначине  $x = \varphi(x)$  и  $f(x) = 0$  еквивалентне на интервалу  $[a, b]$ . Услов еквивалентности ових једначина нам даје следећа теорема.

**Теорема 1.** *Нека је функција  $g$  ограничена на интервалу  $[a, b]$  и нека је  $g(x) \neq 0$  за  $x \in [a, b]$ . Тада су једначине  $f(x) = 0$  и  $x = \varphi(x)$  са  $\varphi(x) = x - g(x)f(x)$  еквивалентне на интервалу  $[a, b]$ .*

Под претпоставком да је итеративни поступак  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  конвергентан, да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$  и да је функција  $\varphi$  довољан број пута непрекидно диференцијабилна, важи следећа теорема, [1]

**Теорема 2.** [1] *Ред конвергенције једнокорачног поступка*

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

*је позитиван цео број. Овај поступак има ред конвергенције  $p$  ако и само ако је*

$$\alpha = \varphi(\alpha), \quad \varphi^{(j)}(\alpha) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p-1, \quad \varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

## 2. Неки познати поступци

---

### 2.1 Халејев поступак

Халејев поступак се први пут појавио у [10]. Овај поступак се често појављује и као специјалан случај других поступака, [7], [9], [21]. Постоје и бројне модификације овог поступка, а најпознатије су супер Халејев поступак и модификовани супер Халејев поступак. Ред Халејевог поступка је  $p = 3$ . У раду [7] приказана је фамилија поступака трећег реда конвергенције за решавање нелинеарних једначина. Показано је да овој фамилији припадају неки већ познати поступци: Халејев поступак и поступак из рада [16] и супер Халејев поступак из рада [15].

Халејев поступак

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)}},$$

може се записати и на следећи начин

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{2}{2 - t(x_n)},$$

где је

$$t(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Под претпоставкама које су сличне оним које постављамо за Њутнов поступак, у раду [7] дат је доказ глобалне монотоне конвергенције трећег реда за једну фамилију поступака. Фамилија поступака се дефинише на следећи начин.

Нека је

$$x_{n+1} = F_k(x_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

где су функције  $F_k$  облика

$$F_k(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \varphi_k(t(x)), \quad k = 1, 2, \dots$$

са

$$t(x) = \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}$$

и функцијама  $\varphi_k$  дефинисаним са

$$\varphi_0(s) = 1, \quad \varphi_k(s) = \frac{2}{2 - s \cdot \varphi_{k-1}(s)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Функције  $\varphi_k$  се лако рачунају. Наводимо првих осам  $\varphi_k(s)$ ,  $k = 1, 2, \dots, 8$ :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{2-s}, \quad \frac{2-s}{2(1-s)}, \quad \frac{4-4s}{4-6s+s^2}, \quad \frac{4-6s+s^2}{4-8s+3s^2}, \quad -\frac{2(4-8s+3s^2)}{-8+20s-12s^2+s^3} \\ & \frac{-8+20t-12t^2+t^3}{4(-2+6t-5t^2+t^3)}, \quad -\frac{8(-2+6s-5s^2+s^3)}{16-56s+60s^2-20s^3+s^4}, \quad \frac{16-56s+60s^2-20s^3+s^4}{16-64s+84s^2-40s^3+5s^4} \end{aligned}$$

Лако се види да су Њутнова и Халејева итеративна функција специјални случајеви са  $F_0$  и  $F_1$  респективно. Њутнов поступак не припада овој фамилији поступака трећег реда, али се може посматрати као гранични случај када  $s \rightarrow 0$ .

**Теорема 3.** [7] Претпоставимо да  $f \in C^3[a, b]$ ,  $f(a) > 0 > f(b)$  и  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) > 0$ ,  $f'''(x) \geq 0$ , за  $x \in [a, b]$ . Тада за свако  $x_0 \in [a, b]$  такво да је  $f(x_0) > 0$  итеративни поступак  $x_{n+1} = F_k(x_n)$  конвергира монотono ка решењу  $\alpha$  једначине  $f(x) = 0$ . Ако је још

$$f'(a) \geq 2f'(b) \quad (7)$$

Онда важи

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq |x_{n+1} - x_n| \quad (8)$$

за свако  $n = 0, 1, \dots$ , и све  $k = 1, 2, \dots$ .

## 2.2 Супер Халејев поступак

Супер Халејев поступак је дефинисан у [15] и његов ред конвергенције је  $p = 3$ . Овај поступак је облика  $x_{n+1} = F(x_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , где је

$$F(x) = x - u(x) \frac{2 - t(x)}{2(1 - t(x))} \quad (9)$$

## 2.3 Модификован супер Халејев поступак

Модификован супер Халејев поступак је дат у [12] и његов ред је  $p = 4$ . У раду [3] је доказано да је овај поступак исти као раније публиковани Jarratt-ов поступак, [19]. И овај поступак је облика  $x_{n+1} = F(x_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , где је

$$F(x) = x - u(x) \left( 1 + \frac{\mu(x)}{2} + \frac{1}{2} \frac{\mu(x)^2}{1 - \omega\mu(x)} \right) \quad (10)$$

## 2.4 Кингова фамилија поступака

Кингов поступак је једнопараметарски и дат је у [20]. Његов ред је  $p = 4$  и има облик  $x_{n+1} = F(x_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , где је

$$F(x) = x - u(x) \left( 1 + \frac{2\sigma(x) + \beta\sigma(x)^2}{4 + 2(\beta - 2)\sigma(x)} \right) \quad (11)$$

## 2.5 Jarratt-ова фамилија поступака

Jarratt-ов поступак из [18] је реда  $p = 4$ . Облика је  $x_{n+1} = F(x_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , где је

$$F(x) = x - u(x) \left( a_1 + \frac{a_2 f'(x)}{f'(x - u(x))} + \frac{f'(x)}{b_1 f'(x) + b_2 f'(x - u(x))} \right)$$

После смене

$$\frac{f'\left(x - \frac{2}{3}u(x)\right)}{f'(x)} = 1 - \frac{2}{3}\lambda(x)$$

добивамо

$$F(x) = x - u(x) J(\lambda(x)) \quad (12)$$

где је

$$J(\lambda) = a_1 + \frac{3a_2}{3-2\lambda} + \frac{3}{3b_1 + (3-2\lambda)b_2} \quad (13)$$

Као што је показано у [18] параметри (13) су

$$a_1 = \frac{-9+10a_2}{-18+16a_2}, \quad b_1 = -\frac{3(-9+8a_2)}{(-3+4a_2)^3}, \quad b_2 = \frac{-81+144a_2-64a_2^2}{(-3+4a_2)^3} \quad (14)$$

Видимо да један параметар,  $a_2$ , остаје слободан. За различите изборе тог параметра добијамо поступке реда конвергенције 4. Приказаћемо оне поступке који се посебно посматрају и у [18].

### 2.5.1 Први случај

$$a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = -1, \quad b_2 = 3$$

$$J(\lambda) = \frac{2-\lambda}{2(1-\lambda)} \quad (15)$$

### 2.5.2 Други случај

$$a_2 = \frac{9}{10} \Rightarrow a_1 = 0, \quad b_1 = 25, \quad b_2 = -15$$

$$J(\lambda) = \frac{6+5\lambda}{6+2\lambda-4\lambda^2} \quad (16)$$

### 2.5.3 Трећи случај

$$a_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow a_1 = 1, \quad b_1 = -\frac{1}{3}, \quad b_2 = -\frac{1}{3}$$

$$J(\lambda) = \frac{18-9\lambda+4\lambda^2}{18-18\lambda+4\lambda^2} \quad (17)$$

### 2.5.4 Четврти случај

$$a_2 = \frac{27}{52} \Rightarrow a_1 = \frac{11}{28}, \quad b_1 = -\frac{1183}{64}, \quad b_2 = \frac{1911}{64}$$

$$J(\lambda) = \frac{24-46\lambda+11\lambda^2}{24-58\lambda+28\lambda^2} \quad (18)$$

### 3. Нова фамилија поступака Jarratt-овог типа

Двопараметарска фамилија је облика  $x_{n+1} = F(x_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , где је

$$F(x) = x - \theta u(x) \psi_k(\lambda(x)) - (1 - \theta) \psi_m(\lambda(x)) \quad (19)$$

где су функције  $\psi_i$  елементи скупа

$$\left\{ -\frac{2}{-2+z}, \frac{2+z}{2}, -\frac{8}{-8+4z+z^2(2+\beta)}, \frac{-4+z(2+\beta)}{-4+z(4+\beta)}, \frac{1}{8}(8+4z+z^2(4+\beta)) \right\} \quad (20)$$

а  $\theta$  и  $\beta$  су параметри које ћемо одредити тако да ред конвергенције поступка буде 4.

Конвергенцију посматраних поступака ћемо доказати користећи се следећом теоремом, која је последица теореме 2.

**Теорема 4.** Нека је  $I$  околина једноструког корена  $\alpha$  јеначине  $f(x) = 0$ . Претпоставимо да функција  $f$  има непрекидне изводе све до четвртог реда на  $I$ . Онда је ред конвергенције поступка

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

четири ако је

$$\alpha = F(\alpha), \quad F^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad F^{(4)} \neq 0.$$

Асимптотска константа грешке је  $F^{(4)} / 4!$ .

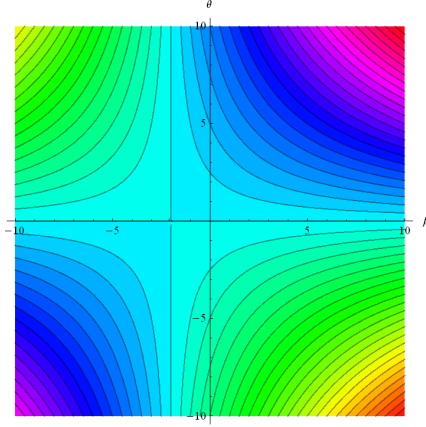
Интересују нас само комбинације које имају оба параметра  $\theta$  и  $\beta$ . То су следеће три групе комбинација за које (19) даје четврти ред конвергенције

- $(k, m) = (3, 2), (k, m) = (4, 2), (k, m) = (5, 2)$
- $(k, m) = (3, 1), (k, m) = (4, 1), (k, m) = (5, 1)$

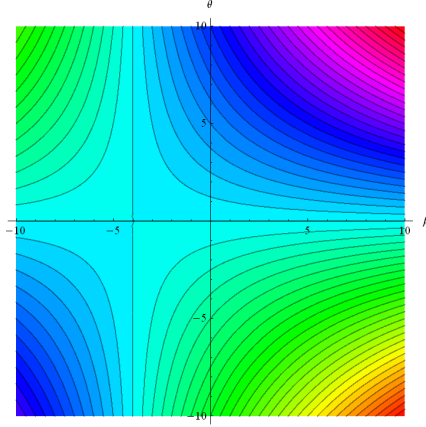
Одговарајући изводи су респективно

- $\frac{F'''(\alpha)}{6} = W_1 = \left(2 - \left(2 + \frac{\beta}{2}\right)\theta\right)c_2^2$
- $\frac{F'''(\alpha)}{6} = W_2 = \left(1 - \left(1 + \frac{\beta}{2}\right)\theta\right)c_2^2$

На основу претходне теореме добијамо везу параметара која гарантује четврти ред конвергенције. Из услова  $F'''(\alpha) = 0$  добијамо везу параметара  $\theta$  и  $\beta$ . На следећим сликама приказујемо ту везу.



Слика 3.  $2 - \left(2 + \frac{\beta}{2}\right)\theta = 0$



Слика 4.  $1 - \left(1 + \frac{\beta}{2}\right)\theta = 0$

Одговарајуће асимптотске константе грешке су

a) За  $2 - \left(2 + \frac{\beta}{2}\right)\theta = 0$

- $(1 + \theta)c_2^3 - c_2c_3 + \frac{c_4}{9}, \quad k = 3, \quad m = 2$
- $\left(5 - \frac{4}{\theta}\right)c_2^3 - c_2c_3 + \frac{c_4}{9}, \quad k = 4, \quad m = 2$
- $5c_2^3 - c_2c_3 + \frac{c_4}{9}, \quad k = 5, \quad m = 2$

b) За  $1 - \left(1 + \frac{\beta}{2}\right)\theta = 0$

- $2c_2^3 - c_2c_3 + \frac{c_4}{9}, \quad k = 3, \quad m = 1$
- $\left(2 - \frac{1}{\theta}\right)c_2^3 - c_2c_3 + \frac{c_4}{9}, \quad k = 4, \quad m = 1$
- $(4 + \theta)c_2^3 - c_2c_3 + \frac{c_4}{9}, \quad k = 5, \quad m = 1$

## 4. Експерименти

---

У овом делу прво посматрамо поступак (19) за  $k = 3, m = 1$  и

$$\theta = 1, \beta = -\frac{2(-1+\theta)}{\theta}.$$

Приказаћемо нумеричке вредности за једначину

$$\sin x - \frac{1}{2} = 0$$

чије је решење  $\alpha = \pi / 6$ .

Сва рачунања су урађена у програмском пакету *Mathematica* 8. Прецизност је повећана на 20000 цифара са *SetPrecision* функцијом. Користили смо следећи излазни критеријум:

$$|x_k - \alpha| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |f(x_k)| < \varepsilon$$

где је  $\alpha$  тачно решење посматране једначине и  $\varepsilon = 10^{-20000}$ . Нумерички ред конвергенције *ord* је рачунат према

$$ord_k = \frac{\ln(|x_{k+1} - \alpha|/|x_k - \alpha|)}{\ln(|x_k - \alpha|/|x_{k-1} - \alpha|)}, k = 1, 2, \dots$$

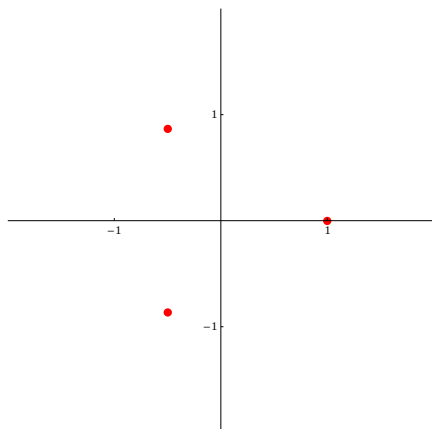
и представља апроксимацију реда конвергенције  $p$ , а апроксимације  $C_k$  асимптотске константе грешке  $C$  рачунате су према

$$C_k = \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p}, k = 1, 2, \dots$$

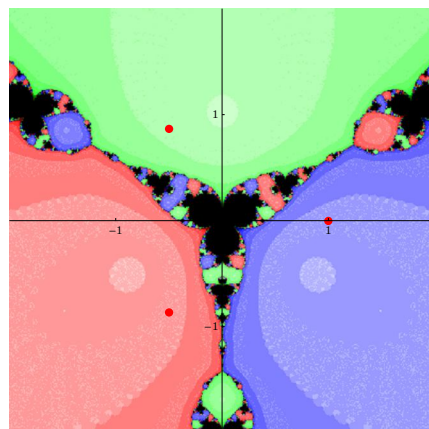
Код свих поступака  $C_k \approx 4$ .

Резултати решавања посматране једначине дати су у следећој табели.





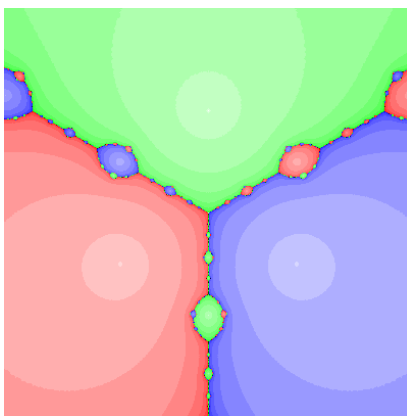
Слика 5. Нуле функције  $f(z) = z^3 - 1$



Слика 6. Области атракције и нуле функције  $f(z) = z^3 - 1$

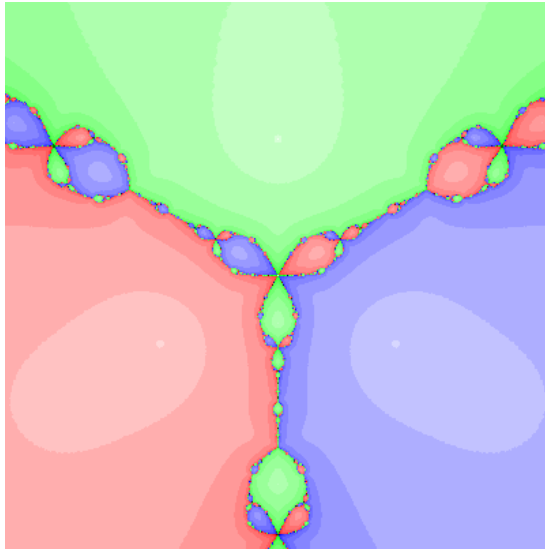
## 4.1 Халејеви поступци

### 4.1.1 Халејев поступак



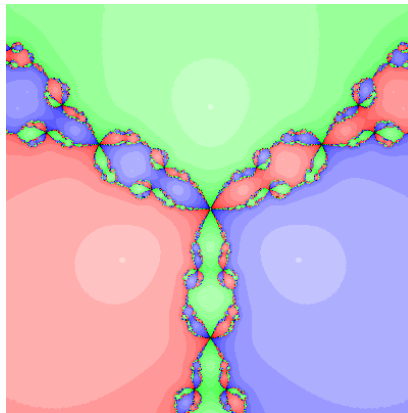
Слика 7. Област атракције Халејевог поступка

#### 4.1.2 Супер Халејев поступак

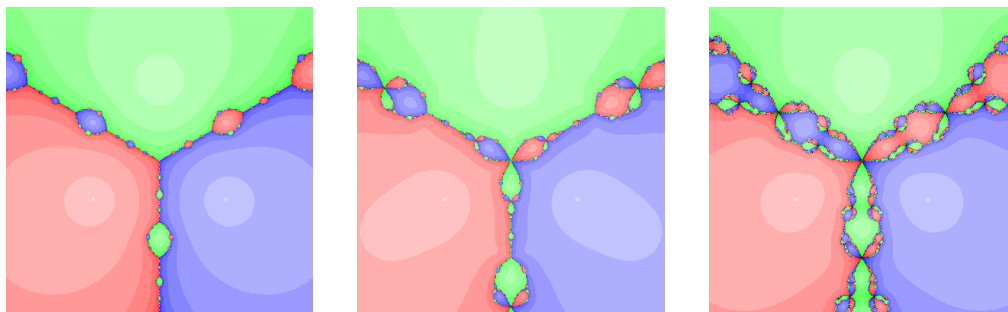


Слика 8. Област атракције супер Халејевог поступка

#### 4.1.3 Модификовани супер Халејев поступак



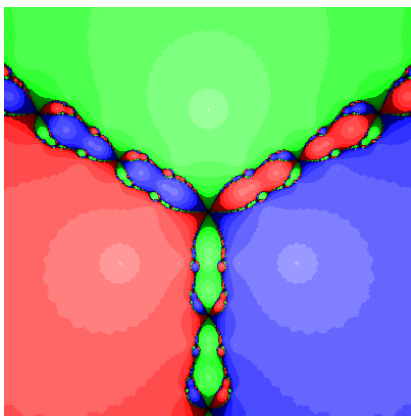
Слика 9. Области атракције модификованог супер Халејевог поступка



Слика 10. Области атракције Халејевих поступака

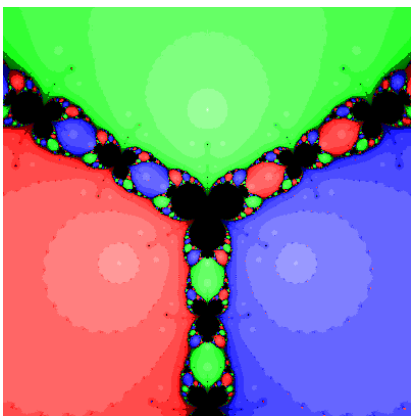
## 4.2 Jarratt-ов поступак

### 4.2.1 Први случај



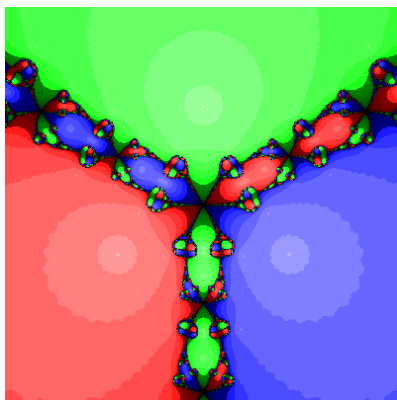
Слика 11. Jarratt-ов поступак за  $a_2 = 0$

### 4.2.2 Други случај



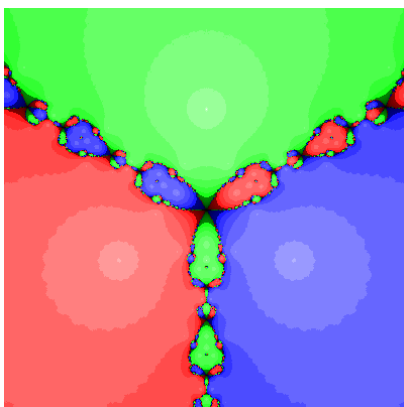
Слика 12. Jarratt-ов поступак за  $a_2 = \frac{9}{10}$

### 4.2.3 Трећи случај



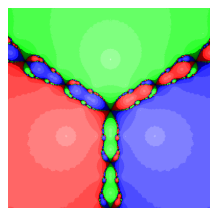
Слика 13. Jarratt-ов поступак за  $a_2 = \frac{3}{2}$

### 4.2.4 Четврти случај

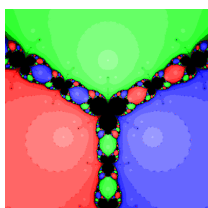


Слика 14. Jarratt-ов поступак за  $a_2 = \frac{27}{52}$

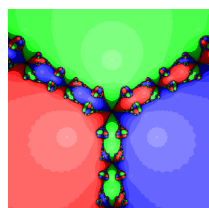
### 4.2.5 Случајеви од 1 -4



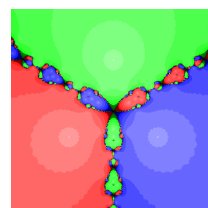
$$a_2 = 0$$



$$a_2 = \frac{9}{10}$$



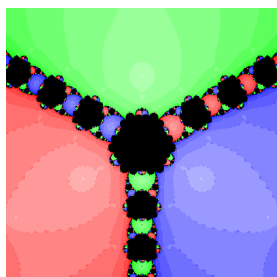
$$a_2 = \frac{3}{2}$$



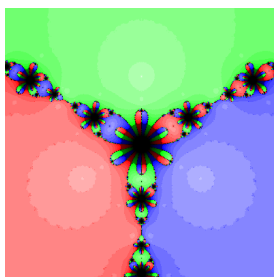
$$a_2 = \frac{27}{52}$$

Слика 15. Jarratt-ови поступци

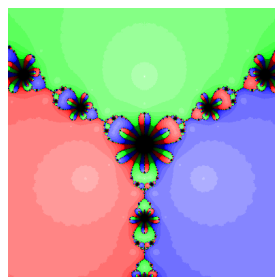
### 4.3 Кингов поступак



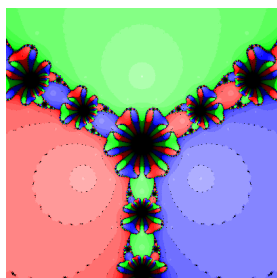
Слика 16.  $\beta = -5$



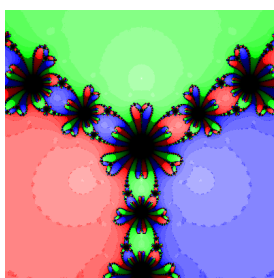
Слика 17.  $\beta = -3$



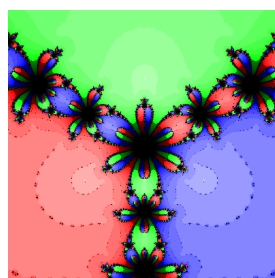
Слика 18.  $\beta = -1$



Слика 19.  $\beta = 1$

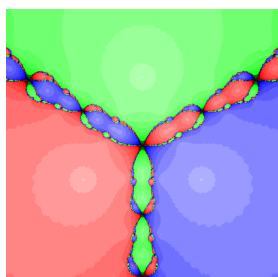


Слика 20.  $\beta = 3$

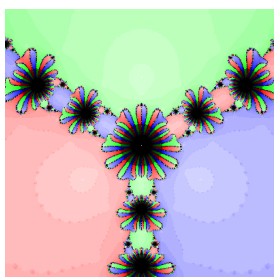


Слика 21.  $\beta = 5$

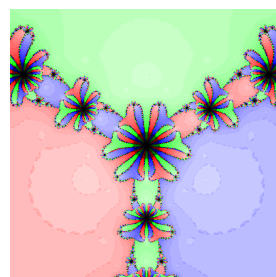
### 4.4 Нова фамилија Jarratt-овог типа



$k = 4, m = 4, \beta = 0, \theta = -1$



$k = 5, m = 1, \beta = 0, \theta = -1$



$k = 5, m = 1, \beta = \theta = -4$

Слика 22.

## 5. Закључак

---

У овом мастер раду посматрамо као критеријум за упоређивање поступака област атракције и њену зависност од реда конвергенције. Упоредимо више поступака реда конвергенције 3 и 4 за израчунавање приближних решења једноструких нула и њихове области атракције. Посебно се упоређују области атракције за поступке истог реда конвергенције и за поступке различитог реда конвергенције. Разматра се и могућност упоређивања различитих поступака на основу области атракције.

Њутнов поступак је реда конвергенције 3, Халејев и супер Халејев су такође реда 3, а остали посматрани поступци су реда конвергенције 4. Када посматрамо њихове области атракције руководимо се идеалном ситуацијом. Наиме, у идеалном случају области атракције би требало да су раздвојене правим линијама. Ниједан поступак нема ту карактеристику. У посматраним случајевима томе је најближи Халејев поступак, какоје наглашено и у [22], [17], [4].

Поступци са параметрима би требало да пруже шансу да се погодним избором параметара добију лепше раздвојене области атракције. Међутим, то није увек случај, како показују и наше слике за Кингов и Jarratt-ов поступак, као и за нову фамилију Jarratt-овог типа. Слична запажања за Кингов и Jarratt-ов поступак налазимо и у [17], [4]. Ипак, како слика 22 показује, има смисла варирати комбинације функција у поступку (19) и у избору параметара.

Тамнија боја означава велики број итерација у односу на предвиђени максимални број итерација. Црна боја значи да са максимално предвиђеним бројем итерација нисмо добили апроксимације са жељеном прецизношћу. У том погледу видимо да параметри доприносе побољшању слике области атракције.

## 6. Биографија

---



Рођена сам 7.11.1986. године у Новом Саду. Основну школу „Јован Поповић” завршила сам 2001.године у Новом Саду, као носилац дипломе Вук Караџић. Гимназију „Исидора Секулић” у Новом Саду, друштвено-језички смер, завршила сам 2005.године као носилац дипломе Вук Караџић. Исте године уписала сам Природно-математички факултет у Новом Саду, смер дипломирани математичар-професор математике а завршила 2010.године.

Током студија била сам стипендиста Министарства просвете Републике Србије и добитник факултетске и универзитетске награде.

Као студент завршне године факултета, била сам међу 1000 најбољих студената и самим тим стипендиста Фонда за младе таленте Министарства омладине и спорта Републике Србије. Уписала сам мастер академске студије математике, модул настава математике. Текуће године положила сам све испите предвиђене наставним планом и програмом и стекла право за одбрану мастер рада.

Запослена сам у Гимназију „Исидора Секулић” у Новом Саду, где предајем математику ученицима природно-математичког и друштвено језичког смера већ четири године.

Нови Сад, октобар 2014.

Оља Скакавац

## 7. Литература

---

- [1] A. Ralston, A., A First Course in Numerical Analysis, Tokyo [etc.]: McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1965.
- [2] A.M. Ostrowski, Solution of Equations and Systems of Equations, Academic Press Inc., 1966.
- [3] B. Neta, C. Chun, M. Scott, A note on the modified super-Halley method, Applied Mathematics and Computation 218 (2012) 9575–9577.
- [4] B. Neta, M. Scott, C. Chun, Basins of attraction for several methods to find simple roots of nonlinear equations, Appl. Math. Comput. 218 (2012) 10548–10556.
- [5] C. Chun, M.Y. Lee, B. Neta, J. Džunić, On optimal fourth-order iterative methods free from second derivative and their dynamics, Applied Mathematics and Computation 218 (2012) 6427–6438.
- [6] D. Herceg, Đ. Herceg, Means based modifications of Newton's method for solving nonlinear equations, Appl. Math. Comput., 219,11,(2013), 6126–6133.
- [7] Đ. Herceg, D. Herceg, On a third order family of methods for solving nonlinear equations, International Journal of Computer Mathematics, 2010, 1–9.
- [8] D. Herceg, N. Krejić, Numerička analiza, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, Novi Sad, 1997.
- [9] E. Habsen, E., Patrick, M., A family of root finding methods, Numer. Math. 27(1977), 257–269.
- [10] E. Halley, E., A new and general method of finding the roots of equations, Philos. Trans. Roy. Soc. London 18 (1694),136–148.
- [11] H.T. Kung, J.F. Traub, Optimal order of one-point and multipoint iteration, J. Assoc. Comput. Mach. 21 (1974) 634–651.
- [12] J. Kou, Y. Li, A family of modified super-Halley methods with fourth-order convergence, Applied Mathematics and Computation 189 (2007) 366–370.
- [13] J. Kou, Y. Li, X. Wang, A variant of super-Halley method with accelerated fourth-order convergence, Applied Mathematics and Computation 188 (2007), 535–539.
- [14] J.F. Traub, Iterative Methods for the Solution of Equations, Prentice Hall, Clifford, NJ, 1964.
- [15] J.M. Gutierrez, M. A. Hernandez, An acceleration of Newton's method: super-Halley method, Applied Mathematics and Computation 117(2001) 223–239.
- [16] M. Basto, V. Semiao, F.L. Calheiros, A new iterative method to compute nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 173(2006), 468–483.

- [17] M. Scott, B. Neta, C. Chun, Basin attractors for various methods, *Appl. Math. Comput.* 218 (2011) 2584-2599.
- [18] P. Jarratt, Some efficient fourth order multipoint methods for solving equations, *BIT* 9 (1969) 119–124.
- [19] P. Jarratt, Some Fourth Order Multipoint Iterative Methods for Solving Equations, *Mathematics of Computation*, Vol. 20, No. 95 (1966), 434-437.
- [20] R.F. King, A family of fourth-order methods for nonlinear equations, *SIAM Numer. Anal.* 10 (1973) 876–879.
- [21] W. Gander, On Halley’s iteration method, *Amer. Math. Monthly* 92(1985) 131-134.
- [22] J. F. Epperson, *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*, John Wiley & Sons Inc, New York, 2013. Supplementary material for *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*, (Second Edition), by James F. Epperson [www.jfepperson.org/2edition-web](http://www.jfepperson.org/2edition-web)

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ  
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ  
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ  
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:

**РБР**

Идентификациони број:

**ИБР**

Тип документације: Монографска документација

**ТД**

Тип записа: Текстуални штампани материјал

**ТЗ**

Врста рада: Мастер рад

**ВР**

Аутор: Оља Скакавац

**АУ**

Ментор: др Драгослав Херцег

**МН**

Наслов рада: Област атракције разних поступака

**НР**

Језик публикације: српски (ћирилица)

**ЈП**

Језик извода: српски и енглески

**ЈИ**

Земља пуибликовања: Србија

**ЗП**

Уже географско подручје: Војводина

**УГП**

Година: 2014.

**ГО**

Издавач: Ауторски репринт

**ИЗ**

Место и адреса: Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 3.

**МА**

Физички опис рада: (4 поглавља/ 32 стране /1 табела / 22 литературе )

**ФО**

Научна област: Математика

**НО**

Научна дисциплина: Нумеричка анализа

**НД**

Кључне речи: итеративни поступак, област атракције

**КР**

Чува се: У библиотеци Департмана за математику и информатику

**ЧУ**

Важна напомена: нема

**ВН**

Извод: У мастер раду посматрамо као критеријум за упоређивање поступака област атракције и њену зависност од реда конвергенције. Упоредимо више поступака реда конвергенције 3 и 4 за израчунавање приближних решења једноструких нула и

њихове области атракције. Посебно се упоређују области атракције за поступке истог реда конвергенције и за поступке различитог реда конвергенције.

**ИЗ**

Датум прихватања теме од стране НН већа: 10.04.2014.

**ДП**

Датум одбране: 29.10.2014.

**ДО**

**Чланови комисије:**

**КО**

Председник: др Хелена Зарин, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

Члан: др Ђорђе Херцег, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

Ментор: др Драгослав Херцег, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF SCIENCE  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS  
KEY WORDS DOCUMENTATION

Serial number:

**SNO**

Identification number:

**INO**

Document type: Monograph type

**DT**

Type of record: Printed text

**TR**

Contents Code: Master's theses

**CC**

Author: Olja Skakavac

**AU**

Mentor: dr Dragoslav Herceg

**MN**

Title: Basin attractors for various methods

**TI**

Language of text: Serbian (Cyrillic)

**LT**

Language of abstract: s/en

**LA**

Country of publication: Serbia

**CP**

Locality of publication: Vojvodina

**LP**

Publication year: 2014.

**PY**

Publisher: Author's reprint

**PU**

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science Trg Dositeja Obradovića 3.

**PP**

Physical description: (4 chapters, 32 pages, 1 chaptrs, 22 references)

**PD**

Scientific field: Mathematics

**SF**

Scientific discipline: Numerical analysis

**SD**

Key words: iterative method, basin attractors

**UC**

Holding data: Library of Department of Mathematics and Informatics

**HD**

Note:

Abstract: In the master work we consider area attractions and its dependence on the order of convergence as a criterion for comparison procedures. We compare several methods convergence order 3 and 4 for calculating approximate solutions of single zero and their area attractions. Especially

comparing the areas attractions for the actions of the same order of convergence and convergence among different methods.

**AB**

Accepted by the Scientific Board on: 10.04.2014.

**ASB**

Defended: 29.10.2014.

President: dr Helena Zarin, Full Proffessor, Faculty of Science, University of Novi Sad  
Member: dr Đorđe Herceg, Full Proffessor, Faculty of Science, University of Novi Sad  
Member: dr Dragoslav Herceg, Full Proffessor, Faculty of Science, University of Novi Sad