Универзитет у Новом Саду
Природно-математички факултет
Департман за математику и информатику

Никола Сарајлија

Тополошки приступ теорији дистрибуција са применама на неке парцијалне диференцијалне једначине

-Мастер рад-

Нови Сад, 2019. год.

Предговор

I am sure that something must be found.
There must exist a notion of generalized
functions which are to functions what the
real numbers are to rational numbers.
(G. Peano, 1912)

Године 1903. млади француски математичар А. Лебег[1] направио је праву револуцију у математичкој анализи стварањем нове теорије интеграције која је допунила недостатке Риманове теорије. Није зато изненађење што је неких 40 година касније други млади француски математичар, Л. Шварц[2], дао неку врсту допуне теорији диференцијалног рачуна. Значај Шварцовог пионирског рада на ономе што данас познајемо као теорија дистрибуција одмах је препознат од стране математичке јавности. Л. Шварц је за свој рад на овом предмету одликован Филдсовом медаљом.

Сама теорија дистрибуција настала је да би се дао исправан смисао неким појмовима математичких модела који нису били исправно засновани. До тога је највише довела тежња многих инжењера и примењених математичара да се одустане од задавања функција дефинисањем њихових вредности у тачки, већ да се уместо тога посматра њихова средња вредност над неком малом облашћу. Овакав приступ показао се одговарајући за примене. Типичан пример за то је $\delta-$дистрибуција (видети пример 4.6).

Постоје два основна приступа теорији дистрибуција. Први, тзв. секвенцијални приступ развила је неколицина пољских математичара на челу са Микусинским. Тај приступ је елементарнији и највише је прихваћен од стране инжењера. У овом раду бавимо се тополошким приступом теорији дистрибуција чији је зачетник Шварц. Он је први објавио систематизовану теорију дистрибуција у својој монографији Theorie des Distributions издатој у 2 тома 1950. и 1951. године. Испоставило се да су дистрибуције тамо описане заиста имале однос према тест функцијама какав реални бројеви имају према рационалним бројевима: $\mathbb{R}$ је најмања могућа екстензија $\mathbb{Q}$ у којој је $\mathbb{Q}$ густ; исто важи и за $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}$. Даље, сваки $r \in \mathbb{R}$ може се апроксимирати низом $(q_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$; исто важи и за $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}$.

Најзад, мора се споменути невероватна предност дистрибутивних решења парцијалних диференцијалних једначина у однос на класична. Врло су честе ситуације у којима класична решења неких проблема не постоје, али дистрибутивна постоје. Поменимо за крај и велики тријумф теорије дистрибу-

[1]Henri Lebesgue (1875-1941).
[2]Laurent Schwartz (1915-2002).

ција: наиме свака парцијална диференцијална једначина са константним коефицијентима има фундаментално решење. За класична решења се, јасно, не може добити ни приближан резултат.

Рад се састоји од 5 глава. У првој глави дати су основни појмови и тврђења везани за тополошке просторе који ће бити потребни у наставку. Уведени су филтери и дата њихова основна својства, чиме је постављен темељ за увођење тополошко векторских простора у другој глави. Додатно, наведени су и неки битни појмови у вези са метричким и векторским просторима.

У другој глави уводимо појам тополошко векторских простора и наводимо примере истих који ће нас пратити током целог рада. Као посебне типове ових простора дефинишемо локално конвексне просторе и одговарајуће појмове везане за њих. Наводимо теорему која даје довољне услове постојања локално конвексне топологије на векторском простору. Бавимо се и приступом локално конвексним просторима помоћу семинорми, и доказујемо врло важну теорему о непрекидности линеарног пресликавања између два простора чије су топологије уведене фамилијама семинорми. Уопштавамо дефиницију ограничених скупова са нормираног на произвољан тополошки простор, с обзиром да ће нам тај појам играти значајну улогу у трећем поглављу треће главе. Последње поглавље друге главе посвећено је финалним топологијама. Приказано је на који начин се до њих долази, а као најважнији пример ових топологија наведена је финална топологија на простору глатких функција са компактним носачем, потоњем простору тест функција.

Циљ треће главе је увођење јаке топологије којом ћемо снабдети простор дистрибуција. Најпре разматрамо проблем упаривања векторских простора помоћу билинеарног пресликавања. Уводимо семинорме индуковане билинеарним пресликавањем чије ће фамилије одредити слабу топологију. Продужавамо изучавање упарених простора увођењем појма поларног скупа. Наводимо основна својства поларних скупова завршавајући теоремом о биполарима. На крају помоћу фамилије ограничених скупова у упареном простору уводимо тзв. $\wp$-топологију, која ће нам у случају да је $\wp$ колекција свих ограничених скупова дати жељену јаку топологију, тзв. β-топологију.

Четврта глава садржи градиво које је циљ овог рада, тако да су у њој доследно изложени дефиниција, примери и разни појмови и тврђења везани за дистрибуције. На самом почетку дајемо дефиницију дистрибуција и теорему која гарантује под којим условом линеарну функционелу на простору тест функција можемо звати дистрибуцијом. Дајемо основне примере регуларних дистрибуција и делта дистрибуције. Затим уводимо носач дистрибуције и карактеришемо дистрибуције које имају компактан носаш. Бавимо се и изводом дистрибуција. Уводимо транслацију дистрибуције, која је значајна за решавање дистрибутивних једначина. Даље уводимо дистрибуције коначног реда и теорему о њиховој репрезентацији. Преостали део ове главе бави се проблемом дефинисања разних операција са дистрибуцијама. Објашњавамо немогућност дефинисања множења и конволуције дистрибуција у општем случају, и утврђујемо да је класа интеграбилних дистрибуција веома уска. Уводимо појам парцијалног диференцијалног оператора и његовог фундаменталног решења. Наводимо знаменити резултат да сваки парцијални диференцијални оператор са константним коефицијентима има фундаментално решење. За крај ове главе бавимо се Фуријеовом трансформацијом. Уводимо класу темперираних дистрибуција и главну теорему овог дела која тврди да је Фуријеова трансформација изоморфизам на простору ових дистрибуција. Објашњавамо значај Фуријеове трансформације за примену у ПДЈ[3].

Пета глава представља кратку примену приказане теорије на решавање парцијалних диференцијалних једначина. Налазимо фундаментално решење Лапласовог оператора за димензије $n \geq 3$, и бавимо се Кошијевим проблемом за таласну једначину.

Захваљујем се члановима комисије др Стевану Пилиповићу и др Дори Селеши за све корисне разговоре и пренето знање током студија, као и за све савете приликом писања овог рада.

Посебну захвалност дугујем свом ментору др Ивани Војновић на великој помоћи и стручним сугестијама приликом писања овог рада, као и на стрпљењу и целокупном залагању током студија.

Најзад, желим да се захвалим својим родитељима и свим пријатељима на указаној подршци.

Нови Сад, 2019. Никола Сарајлија

[3]Уместо ,,парцијална диференцијална једначина" пише се краће ,,ПДЈ" и то је веома уобичајен акроним.

С А Д Р Ж А Ј

Глава 1

Уводни појмови

1.1. Скупови и функције

У овом поглављу уводимо појмове, ознаке и тврђења која ћемо користити у наставку рада. За детаље упућујемо на [1].

Ако је X скуп, са $\mathcal{P}(X)$ означавамо скуп свих подскупова скупа X, тзв. партитивни скуп од X. Ако су A и B скупови, са $A \subseteq B$ означавамо да је A подскуп B, а са $A \subset B$ означавамо да је A прави подскуп B. Ако је X универзални скуп и $A \subseteq X$, онда са A^c означавамо комплемент скупа A у односу на X, то јест скуп $X \setminus A$.

Нека су X, Y произвољни скупови и $f : X \to Y$. Ако је $A \subseteq X$, тада са $f[A]$ означавамо директну слику скупа A, а то је скуп $\{f(x) : \ x \in A\}$. Важи $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$, али $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$, $A, B \subseteq X$. Претходне релације се могу уопштити на произвољан број скупова.

Нека је $f : X \to Y$. Са $f \upharpoonright_A$ означавамо *рестрикцију f на A*. То је функција $f \upharpoonright_A : A \to Y$ дефинисана са $f \upharpoonright_A (x) := f(x), \ x \in A$.
Слично, са $f|_A$ означавамо *сирјективну рестрикцију f на A*. То је функција $f|_A : A \to f[A]$ дефинисана са $f|_A(x) := f(x)$ за све $x \in A$.
Пресликавање $g : A(\subseteq X) \to X$, дефинисано са $g(x) = x$ за све $x \in A$ се зове *идентичко утапање* или *канонична инјекција* скупа A у X. Пишемо и $g : A \hookrightarrow X$. Према томе, $g|_A$ је бијекција.

Функцију чији је кодомен скуп комплексних бројева називамо *функционелом*.

Задржавамо уобичајене ознаке за скупове бројева: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Притом, сматрамо да $0 \in \mathbb{N}$.

Користићемо израз *фамилија* да означимо пресликавање x непразног скупа индекса I у скуп $X \neq 0$ и слику елемента $x(i)$ означаваћемо са x_i. Фамилија се означава са $\{x_i : \ i \in I\}$, $\{x_{i \in I}\}$, или само са $\{x_i\}$ ако је индексни скуп јасан из контекста. Скуп I може бити произвољне кардиналности.

1.2. Топологија

Дефиниција 1.1. *Нека је $X \neq \emptyset$. Топологија τ на X је дефинисана придруживањем свакој тачки $x \in X$ непразне фамилије $\mathcal{U}(x)$ тако да важи:*
(U1) ако $U \in \mathcal{U}(x)$ онда $x \in U$;
(U2) ако $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$ онда $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$;

(U3) ако $\mathcal{U}(x) \ni U \subseteq A \subseteq X$ онда $A \in \mathcal{U}(x)$;
(U4) за свако $U \in \mathcal{U}(x)$ постоји $V \subseteq U$ са особинама $V \in \mathcal{U}(x)$ и $\forall y \in V\ V \in \mathcal{U}(y)$.

Тада кажемо да је X снабдевен топологијом τ и пар (X, τ) називамо тополошки простор. За $x \in X$, скупови $U \in \mathcal{U}(x)$ су околине тачке x.

Ако важе услови из претходне дефиниције, уочимо колекцију $\mathcal{O} = \{O \subseteq X : \ (\forall x \in O)\ O \in \mathcal{U}(x)\}$. Елементи колекције $\mathcal{O}$ називају се отворени скупови. Скуп $F \subseteq X$ је затворен акко је $F^c = X \setminus F$ отворен скуп.

Напоменимо да се топологија може задати и на еквивалентан начин преко отворених скупова, а затим дефинисати да је $U \subseteq X$ околина тачке x ако садржи отворен скуп O око тачке x. Тада особине (U1)-(U4) добијамо као теореме.

Ако су $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ топологије на X и $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, кажемо да је топологија $\mathcal{T}$ грубља (слабија) од топологије $\mathcal{T}'$, односно да је $\mathcal{T}'$ финија (јача) од $\mathcal{T}$.

Тополошки простор је *Хауздорфов* или *T_2-простор* ако сваке две различите тачке имају дисјунктне околине.

По правилу, уместо: „(X, τ) је тополошки простор”, рећи ћемо краће: „X је тополошки простор.”

У наставку користимо ознаку $\mathcal{U}(x)$ за фамилију околина тачке x и ознаке $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ $(\mathcal{F}_\mathcal{X}, \mathcal{F}_\mathcal{Y})$ за колекције отворених (затворених) скупова на просторима X, Y.

Дефиниција 1.2. *Нека је X тополошки простор и $x \in X$. Фамилија $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ се назива база околина тачке x ако важи:*
*(*BO) $\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists B \in \mathcal{B}(x)\ B \subseteq U$.

Пример 1.3. *Ако је $X \neq \emptyset$ и одаберемо $\mathcal{U}(x) = \mathcal{P}(X)$ за свако $x \in X$, добијамо топологију τ_{disc} на X коју називамо дискретна топологија на X. Ако за свако $x \in X$ одаберемо $\mathcal{U}(x) = \{X\}$ добијамо тзв. антидискретну топологију τ_{adisc}. Дискретна и антидискретна топологија на X су редом најгрубља и најфинија топологија на X.*

Пример 1.4. *Нека је $X = \mathbb{R}$ и за свако $x \in \mathbb{R}$ дефинишимо $\mathcal{U}(x)$ са: $U \in \mathcal{U}(x)$ ако постоји отворен интервал око тачке x садржан у U. Тада на $\mathbb{R}$ добијамо уобичајену топологију.*

Дефиниција 1.5. *Нека су $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ тополошки простори и $f : X \to Y$. Пресликавање f је непрекидно ако $(\forall O \in \mathcal{O}_Y)\ f^{-1}[O] \in \mathcal{O}_X$.*

Лема 1.6. *Нека су X, Y тополошки простори и $f : X \to Y$. Тада је f непрекидно акко $(\forall F \in \mathcal{F}_\mathcal{Y}) f^{-1}[F] \in \mathcal{F}_X$.*

Дефиниција 1.7. *Нека су X, Y тополошки простори и $f : X \to Y$. Кажемо да је f хомеоморфизам акко је бијекција, непрекидно и f^{-1} такође непрекидно.*

Пропозиција 1.8. *Нека су X, Y тополошки простори и $f : X \to Y$ непрекидно. Ако је $A \subseteq X$, тада су $f \upharpoonright_A$ и $f|_A$ непрекидна пресликавања.*

С обзиром да доказ ове пропозиције захтева неколико лема техничког карактера, тај доказ изостављамо. Доказ се може наћи у [1].

У топологији је веома битан однос тачака и скупова. У вези са тим ми наводимо две дефиниције које ћемо користити:

Дефиниција 1.9. *Нека је X тополошки простор и $A \subseteq X$.*
Тачка $x \in X$ је атхерентна тачка скупа A акко $\forall U \in \mathcal{U}(x)$ $U \cap A \neq \emptyset$. Скуп свих атхерентних тачака скупа A се назива атхеренција (затварање) скупа A и означава се са $\overline{A}$.

Дефиниција 1.10. *Нека је X тополошки простор и $A \subseteq X$.*
Тачка $x \in X$ је рубна тачка скупа A акко $\forall U \in \mathcal{U}(x)$ $(U \cap A \neq \emptyset \wedge U \cap A^c \neq \emptyset)$. Скуп свих рубних тачака скупа A назива се руб скупа A и означава се са ∂A.

Лема 1.11. *Нека је X тополошки простор и $A \subseteq X$. A је затворен акко $A = \overline{A}$. Скуп ∂A је затворен скуп.*

Дефиниција 1.12. *Нека је X тополошки простор и $f : X \to Y \subseteq \mathbb{C}$. Тада је носач функције f следећи скуп:*

$$supp f := \overline{\{x \in X : \ f(x) \neq 0\}}.$$

Наведимо основне особине носача:

Пропозиција 1.13. *Нека су $f, g : X \to Y \subseteq \mathbb{C}$. Тада важи:*
(a) $supp f$ *је затворен скуп;*
(b) *ако је $\chi : X \to \mathbb{C}$ таква да је $\chi = 1$ на $supp f$, онда је $f = \chi f$;*
(c) $supp(f \cdot g) \subseteq supp f \cap supp g$;
(d) $supp(f + g) \subseteq supp f \cup supp g$.

Пропозиција 1.14. *Нека је $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ фамилија топологија на непразном скупу X. Тада постоји топологија $\mathcal{T}$ на X са следећим особинама:*
(a) *$\mathcal{T}$ је финија од сваке топологије $\mathcal{T}_i$;*
(b) *ако је $\mathcal{T}'$ финија од сваке топологије $\mathcal{T}_i$, онда је $\mathcal{T}$ финија од $\mathcal{T}'$.*

Топологија поменута у претходној пропозицији назива се *најмање горње ограничење фамилије* $(\mathcal{T}_i)$. Она је експлицитно дата са $\mathcal{T} = \bigcap\{\tau : \tau$ је топологија на X финија од свих $\mathcal{T}_i\}$. Из чињенице да је пресек произвољне фамилије топологија поново топологија, из претходне једнакости заправо добијамо доказ Пропозиције 1.14.

За сваку непразну фамилију топологија имамо постојање и такозваног *највећег горњег ограничења фамилије*, и то је топологија која се спомиње у следећој пропозицији:

Пропозиција 1.15. *Нека је $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ фамилија топологија на непразном скупу X. Тада постоји топологија $\overline{\mathcal{T}}$ на X са следећим особинама:*
(a) *$\overline{\mathcal{T}}$ је грубља од сваке топологије $\mathcal{T}_i$;*
(b) *ако је $\mathcal{T}'$ грубља од сваке топологије $\mathcal{T}_i$, онда је $\overline{\mathcal{T}}$ грубља од $\mathcal{T}'$.*

Ако са $\mathcal{O}_i$ означимо колекцију свих отворених скупова топологија $\mathcal{T}_i$, $i \in I$, онда је колекција $\mathcal{O}$ отворених скупова топологије $\overline{\mathcal{T}}$ једноставно дата са $\mathcal{O} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$.

На крају овог поглавља подсетимо се дефиниције топологије на производу тополошких простора. За доказе тврђења која следе консултовати на пример [1].

Теорема 1.16. *Нека је I непразан скуп а $\{(X_i, \mathcal{O}_i) : i \in I\}$ фамилија тополошких простора. Тада је колекција*

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i \in K} \pi_i^{-1}[\mathcal{O}_i] : K \subseteq I \ \wedge \ |K| < \aleph_0 \ \wedge \ \forall i \in K (O_i \in \mathcal{O}_i) \right\}$$

база топологије $\mathcal{O}$.

Дефиниција 1.17. *Топологију $\mathcal{O}$ на скупу $\prod_{i \in I} X_i$ уведену у претходној теореми називамо топологијом Тихонова.*

Наредном лемом објашњавамо како изгледају отворени скупови у топологији Тихонова.

Лема 1.18. *Уз ознаке из Теореме 1.16 имамо:*

$$\bigcap_{i \in K} \pi_i^{-1}[O_i] = \prod_{i \in I} V_i, \ gde je \ V_i = \begin{cases} X_i \text{ за } i \in I \setminus K, \\ O_i \text{ за } i \in K. \end{cases}$$

1.3. Филтери

Фундаментални систем околина је веома важан појам за увођење локално конвексне топологије. У наставку ћемо га више пута спомињати. С обзиром да околине тачке чине филтер, морамо се прво упознати са овим важним појмом теорије скупова:

Дефиниција 1.19. *Нека је $X \neq \emptyset$. Колекција $\Phi \subseteq \mathcal{P}(X)$ се назива филтер на X акко су задовољене следеће три аксиоме:*
(FI 1) $\emptyset \notin \Phi \ni X$;
(FI 2) $F_1, F_2 \in \Phi \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \Phi$;
(FI 3) $\Phi \ni F \subseteq A \subseteq X \Rightarrow A \in \Phi$.

Индуктивно, пресек коначно много елемената филтера припада филтеру (особина FI 2). Из прве две особине такође видимо да пресек коначно много елемената филтера никада није празан.

Пример 1.20. *Нека је X скуп и $x \in X$. Колекција свих подскупова X који садрже тачку x је филтер на X.*

Пример 1.21. *Нека је X тополошки простор и $x \in X$. Из особина $(U1)$-$(U3)$ следи да колекција $\mathcal{U}(x)$ свих околина тачке x образује филтер на X. Приметимо да је претходни пример специјалан случај овог ако на X изаберемо дискретну топологију (пример 1.3).*

Дефиниција 1.22. *Нека је Φ филтер на X.*
Колекција $\mathcal{B} \subseteq \Phi$ је филтер база од Φ акко:
(FB) $\forall F \in \Phi \ \exists B \in \mathcal{B} \ B \subseteq F$.

Може се показати (видети на пример [1]) да је $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ база неког филтера на X акко важе услови:
(FB 1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ и $\emptyset \notin \mathcal{B}$;
(FB 2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \ \exists B_3 \in \mathcal{B} \ B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.
У том случају одговарајући филтер Φ чија је база $\mathcal{B}$ дат је са $\Phi = \{F \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B} \ B \subseteq F\}$.

Дефиниција 1.23. *У тополошком простору X базу филтера $\mathcal{U}(x)$, $x \in X$ (Пример 1.21) зваћемо фундаментални систем околина тачке x.*

Два фундаментална система су еквивалентна акко дају исту топологију.

Дакле, колекција $\mathcal{B}$ околина тачке x је фундаментални систем околина тачке x акко свака околина тачке x садржи неку околину из $\mathcal{B}$.

Пример 1.24. *Колекција свих отворених околина тачке x чини фундаменталан систем околина тачке x.*

1.4. Нормирани векторски простори

Нека је $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Дефиниција 1.25. *Скуп $E \neq \emptyset$ на којем су дефинисане операције $+ : E \times E \to E$ и $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$* [1] *се назива векторски простор над пољем $\mathbb{K}$ акко $\forall x, y, z \in E$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ важи:*
(VP 1) $(x+y)+z = x+(y+z)$;
(VP 2) $x+0 = x$;
(VP 3) $x+(-x) = 0$;
(VP 4) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$;
(VP 5) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$;
(VP 6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
(VP 7) $1 \cdot x = x$. [2]

Дефиниција 1.26. *Непразан подскуп H векторског простора E је његов потпростор акко важи: $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})$ $(\forall x, y \in H)$ $\alpha x + \beta y \in H$.*

У другој и трећој глави ће нам од важности бити неколико појмова који се дефинишу у векторском простору.

Дефиниција 1.27. *Нека је E векторски простор и $A, B \subseteq E$. Тада:*

$$A + B := \{a + b : \ a \in A, b \in B\}.$$

Посебно, ако је B једночлан, $B = \{b\}$, писаћемо $A + b$ уместо $A + \{b\}$.

Дефиниција 1.28. *Нека је E векторски простор. Скуп $A \subseteq E$ је конвексан акко*

$$\forall \lambda \in (0,1) \forall x, y \Big(x, y \in A \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in A \Big).$$

Еквивалентно, $A \subseteq E$ је конвексан акко $\forall \alpha, \beta \in (0,1)$ $\alpha A + \beta A \subseteq A$.

Лема 1.29. *Нека је E векторски простор и $A \subseteq E$. Ако је A конвексан скуп, онда су и $A + b$ и λA конвексни скупови за све $b \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Дефиниција 1.30. *Нека су X, Y векторски простори и $f : X \to Y$. Пресликавање f је линеарно акко*

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}) \ (\forall x, y \in X) \ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

[1] Ознаку $\cdot$ по правилу изостављамо

[2] Аксиома комутативности може се извести из осталих аксиома

Дефиниција 1.31. *Нека су X, Y, Z векторски простори и $f : X \times Y \to Z$. Пресликавање f је билинеарно акко је линеарно по свакој компоненти.*

Дефиниција 1.32. Нека је E векторски простор над $\mathbb{K}$ и $\|\cdot\| : E \to [0, \infty)$ функција за коју важе идентитети:
$(N1)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
$(N2)$ $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;
$(N3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Тада се $\|\cdot\|$ назива норма на E а $(E, \|\cdot\|)$ је нормиран (векторски) простор, скраћено НВП.

Дефиниција 1.33. *Уколико у претходној дефиницији важе идентитети $(N2)$, $(N3)$ и*
$(N1')$ $\|x\| = 0 \Leftarrow x = 0$,
онда се функција $\|\cdot\|$ назива семинорма.

Пропозиција 1.34. *Сваки нормиран простор $(E, \|\cdot\|)$ је и метрички у односу на тзв. метрику индуковану нормом. Та метрика је дата са $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in E$.*

Како је сваки метрички простор и тополошки, појмови непрекидности, границе низа итд. могу да се испитују у сваком нормираном простору.

Пропозиција 1.35. *Нека је E НВП. Тада су операције векторског простора непрекидне функције.*

Дефиниција 1.36. *Нека је E НВП и $y \in E$. Тада са $S_R(y)$ означавамо сферу полупречника R са центром у y, тј. скуп тачака $\{x \in E : \ \|x - y\| = R\}$.*
Ако уместо ,,=" у претходној дефиницији стоји $<$ (респ. $\leq$) одговарајући скуп тачака назива се отворена (респ. затворена) лопта полупречника R са центром у y, ознака $L_R(y)$ (респ. $B_R(y)$).
Посебно, ако је $E = \mathbb{R}^n$ уводимо ознаку $\mathbb{S}^{n-1} := S_1(0)$ и тај скуп називамо $(n-1)$–димензионална јединична сфера у $\mathbb{R}^n$.

У неким нормираним просторима може се увести пресликавање које нам омогућава да изучавамо геометрију тог векторског простора.

Дефиниција 1.37. *Нека је E векторски простор и $(\cdot|\cdot) : E \times E \to \mathbb{K}$ пресликавање које задовољава идентитете:*
$(SP\ 1)$ $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$;
$(SP\ 2)$ $(x|y) = \overline{(y|x)}$;
$(SP\ 3)$ $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$;
$(SP\ 4)$ $(x|x) \geq 0$;
$(SP\ 5)$ $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
Тада се пресликавање $(\cdot|\cdot)$ назива скаларни производ на E, а $(E, (\cdot|\cdot))$ је унитарни векторски простор.

Дефиниција 1.38. *Нека је E унитарни простор и $x, y \in E$. Ако је $(x|y) = 0$ кажемо да су вектори x и y ортогонални, ознака $x \perp y$.*

Дефиниција 1.39. *Нека је E унитарни векторски простор. Тада се његов потпростор $E^{\perp} := \{x \in E : \ (x|y) = 0 \ za \ sve \ y \in E\}$ назива ортогонални комплемент простора E.*

1.5. Гама функција

У поглављу 5.2 тражићемо фундаментално решење Лапласовог оператора Δ. Видећемо да се у том решењу јавља специјална функција, тзв. гама функција, и због тога је сада уводимо.

Ојлеров интеграл друге врсте

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \Re z > 0, \tag{1.5.1}$$

се назива *гама* функција. Очигледно је конвергентан за све $z \in \mathbb{C}$, $\Re z > 0$. Притом, $x^{z-1} := e^{(z-1) ln x}$. Аналитичким продужењем овог интеграла гама функцију можемо дефинисати и за $z \in \mathbb{C}$, $\Re z \leq 0$, $z \neq 0, -1, -2, \ldots$. Из (1.5.1) парцијалном интеграцијом долазимо до формуле редукције

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z), \ \Re z > 0. \tag{1.5.2}$$

Преко гама функције може се изразити површина $(n-1)$–димензионалне јединичне сфере (Деф. 1.36):

$$|\mathbb{S}^{n-1}| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \tag{1.5.3}$$

То је формула која се доказује у теорији мере, а нама ће у поглављу 5.2 бити посебно важна. Читаоце заинтересоване за доказ једнакости (1.5.3) упућујемо на [5].

Глава 2

Локално конвексни простори

Нека је $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

2.1. Тополошко векторски простори

Дефиниција 2.1. *Векторски простор E над пољем K снабдевен топологијом τ се назива тополошко векторски простор, скраћено ТВП, акко је топологија τ компатибилна са операцијама векторског простора у следећем смислу:*
$(TVP\ 1)$ пресликавање $(x, y) \mapsto x + y$, $E \times E \to E$ је непрекидно;
$(TVP\ 2)$ пресликавање $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, $\mathbb{K} \times E \to E$ је непрекидно.

Подразумевамо, наравно, да у претходној дефиницији посматрамо топологију Тихонова (Деф. 1.17) на одговарајућим производима простора.

Пример 2.2. *Сваки нормиран векторски простор је тополошко векторски простор (ово следи из пропозиције 1.35).*

Прво што видимо из особине (TVP 1) јесте да је транслација $x \mapsto x + a$ хомеоморфизам ТВП-а. Заиста, како је инверзна функција транслације поново транслација, из поменуте особине следи жељена непрекидност.
Да бисмо у потпуности познавали топологију ТВП-а довољно је познавати фамилију околина нуле. Заиста, то следи из чињенице да је транслација хомеоморфизам ТВП-а, па је скуп V околина нуле акко је $V + a$ околина тачке a.

Приметимо још да из особине (TVP 1) следи да ако је V околина нуле тада постоји околина нуле U таква да је $U + U \subseteq V$. Ова особина се често користи при доказивању разних тврђења везаних за тополошко векторске просторе.

Дефиниција 2.3. *Нека је E векторски простор над $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ и $A \subseteq E$. Скуп A је:*
- *апсорбујући акко $\forall x \in E\ \exists c_x > 0\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \Big(|\lambda| \le c_x \Rightarrow \lambda x \in A\Big)$;*
- *балансиран акко $\forall x \in A\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \Big(|\lambda| \le 1 \Rightarrow \lambda x \in A\Big)$.*

Важна је следећа.

Теорема 2.4. *У ТВП-у E постоји фундаментални систем околина нуле, означимо га са $\mathcal{R}$, тако да важи:*
$(NO\ 1)$ свака $V \in \mathcal{R}$ је апсорбујућа;

(NO 2) свака $V \in \mathcal{R}$ је балансирана;
(NO 3) за сваку $V \in \mathcal{R}$ постоји $U \in \mathcal{R}$ тако да важи $U + U \subseteq V$.

Обратно, нека је E векторски простор над $\mathbb{K}$ и $\mathcal{R}$ филтер база која задовољава услове $(NO1)-(NO3)$. Онда постоји јединствена топологија на E у односу на коју је E тополошко векторски простор а $\mathcal{R}$ фундаментални систем околина нуле.

Доказ ове теореме може се наћи у [3] (теорема 1, поглавље 2.3).

Ако је $\mathcal{R}$ фамилија скупова из другог дела претходне теореме, онда коначни пресеци њених елемената поново чине филтер базу. Тако, као последицу претходне теореме добијамо наредну пропозицију.

Пропозиција 2.5. *Нека је E векторски простор над $\mathbb{K}$ и $\mathcal{R}'$ филтер база која задовољава услове $(NO1)-(NO3)$. Онда постоји јединствена топологија на E у односу на коју је E тополошко векторски простор а фамилија коначних пресека елемената из $\mathcal{R}'$ фундаментални систем околина нуле.*

Пример 2.6. *Фамилија лопти $B_\rho = \{x : \|x\| \leq \rho\}$ у нормираном простору чини филтер базу која задовољава услове (NO 1)-(NO 3).*

Пример 2.7. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен и $C(\Omega)$ векторски простор свих непрекидних функција $\Omega \to \mathbb{K}$. За $K \subseteq \Omega$ компактан и $\epsilon > 0$ означимо $V_{K,\epsilon} = \{f \in C(\Omega) : |f(x)| \leq \epsilon \text{ za sve } x \in K\}$. Пошто је унија два компактна скупа компактан скуп, скупови $V_{K,\epsilon}$ формирају филтер базу која задовољава услове (NO 1)-(NO 3). Дакле, скупови $V_{K,\epsilon}$ формирају фундаменталну базу околина нуле за топологију у односу на коју је $C(\Omega)$ ТВП.*

2.2. Локално конвексни простори

Дефиниција 2.8. *Тополошко векторски простор (X, τ) је локално конвексан ако свака тачка има фундаменталан систем околина чији сваки елемент је конвексан скуп.*

Јасно, да би ТВП E био локално конвексан, довољно је да само тачка 0 има конвексну базу околина. Уместо локално конвексан тополошко векторски простор писаћемо краће локално конвексан простор. У наставку радимо искључиво само са оваквим просторима. Уколико је $\mathcal{R}'$ фамилија скупова из Пропозиције 2.5, и сваки $R \in \mathcal{R}'$ је конвексан, одговарајућа топологија биће локално конвексна.

Пример 2.9. *Простори из Примера 2.6, 2.7 су локално конвексни. Заиста, по дефиницији лопти и скупова $V_{K,\epsilon}$ види се да је реч о конвексним скуповима.*

Важе одговарајући аналогони Теореме 2.4 и Пропозиције 2.5 (видети [3], поглавље 2.4, пропозиције 4,5 и 6).

Пропозиција 2.10. *У локално конвексном простору балансиране, затворене, конвесне околине нуле формирају фундаменталан систем околина нуле.*

Пропозиција 2.11. *Нека је E векторски простор и $\mathcal{B}$ филтер база на E коју чине апсорбујући, балансирани, конвексни скупови. Нека је $\mathcal{R}$ колекција свих скупова λV, где је $\lambda > 0$ и $V \in \mathcal{B}$. Тада постоји јединствена топологија на E у односу на коју је E локално конвексан простор и R фундаментални систем околина нуле.*

Пропозиција 2.12. *Нека је E векторски простор и $\mathcal{R}$ колекција апсорбујућих, балансираних, конвексних скупова. Означимо са $\mathcal{R}'$ колекцију свих коначних пресека скупова λV, где је $\lambda > 0$ и $V \in \mathcal{R}$. Онда постоји јединствена топологија на E за коју је E локално конвексни простор а фамилија $\mathcal{R}$ фундаментални систем околина 0.*

Применимо претходне пропозиције на конкретне просторе (примери 2.4.3 и 2.4.4 из [3]).

Пример 2.13. *Нека је E векторски простор и $\mathcal{R}$ колекција* **свих** *балансираних, апсорбујућих, конвексних скупова. Очито, $\mathcal{R}$ формира филтер базу, и ако $V \in \mathcal{R}$ онда $\lambda V \in \mathcal{R}$ за све $\lambda > 0$. Значи, $\mathcal{R}$ дефинише топологију на E коју зовемо најфинија локално конвексна топологија.*

Пример 2.14. *У простору $C(\Omega)$ (пример 2.7) скупови $V_K := V_{K,1}$ задовољавају услове пропозиције 2.11. Пошто је $V_{K,\epsilon} = \epsilon V_K$ видимо да је топологија описана у поменутом примеру заиста локално конвексна, како смо већ поменули (Пример 2.9).*

Многе теореме функционалне анализе имају свој аналогон и у теорији тополошко векторских простора. Такве су нпр. теорема о отвореном пресликавању или Хан-Банахова теорема. Овде наводимо геометријски облик Хан-Банахове теореме за локално конвексне просторе, зато што ћемо је у таквом облику користити у трећој глави при доказивању теореме о биполарима. Изостављамо доказ поменуте теореме јер захтева неке додатне резултате. Доказ се може наћи у [3], стр. 182, пропозиција 5.

Теорема 2.15. *Нека је E локално конвексан простор над $\mathbb{R}$, $\emptyset \neq A \subseteq E$ затворен и конвексан и $a \in E \setminus A$. Тада постоји непрекидна линеарна функционела f на E и реалан број α тако да је $f(x) > \alpha$ за све $x \in A$ и $f(a) < \alpha$.*

Последица 2.16. *У реалном локално конвексном простору сваки затворени конвексан скуп A је пресек свих затворених полупростора који га садрже.*

2.3. Семинорме и линеарна пресликавања

Управо смо видели један начин да уведемо локално конвексну топологију. Међутим, тако уведена топологија може да се опише и другим алатом, помоћу семинорми (Деф. 1.33).

Све се базира на следећој леми.

Лема 2.17. *Нека је E векторски простор и q семинорма на E. Тада је скуп $V = \{x \in E : q(x) \leq 1\}$ апсорбујући, балансиран и конвексан.*

Доказ. Ако је $q(x), q(y) \leq 1$ и $\lambda \in (0,1)$, онда је $q(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda q(x) + (1-\lambda)q(y) \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$. Такође, ако је $|\lambda| \leq 1$ онда је $q(\lambda x) = |\lambda| q(x) \leq q(x)$, па још преостаје испитати својство апсорпције. Пошто је V балансиран, довољно је за дато $x \in E$ показати да постоји $\mu \in \mathbb{K}$ тако да $x \in \mu V$. Али, ако је $q(x) = \alpha \neq 0$, онда је $q(\alpha^{-1} x) = 1$ па тврђење следи. □

Нека је сада $(q_i)_{i \in I}$ фамилија семинорми на векторском простору E, и за свако $i \in I$, $V_i = \{x \in E : \ q_i(x) \leq 1\}$. Из Пропозиције 2.12 следи да коначни пресеци скупова ϵV_i, $\epsilon > 0$, формирају фундаменталан систем околина нуле за локално конвексну топологију на E. Сваки скуп $\epsilon V_i =: V_{i,\epsilon}$ састоји се од свих $x \in E$ таквих да је $q_i(x) \leq \epsilon$, и стога фундаментални систем околина нуле за дотичну топологију чине скупови

$$V_{i_1,\ldots,i_n,\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} = \{x \in E : \ q_{i_k}(x) \leq \epsilon_k \ \forall k \leq n\}, \tag{2.3.1}$$

где је $\{i_1, \ldots, i_n\}$ коначан подскуп индексног скупа I и $\epsilon_k > 0$, $k \leq n$.
Један еквивалентан (Деф 1.23) фундаментални систем околина нуле дат је са

$$V_{i_1,\ldots,i_n,\epsilon} = \{x \in E : \ q_{i_k}(x) \leq \epsilon \ \forall k \leq n\}, \tag{2.3.2}$$

$\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$, $\epsilon > 0$.

Пример 2.18. *На простору $C(\Omega)$ дефинишемо семинорме на следећи начин: ако је $K \subseteq \Omega$ компактан ставимо $q_K(f) = \max\limits_{x \in K} |f(x)|$. Тада се скупови V_K из Примера 2.14 могу записати као $V_K = \{f \in C(\Omega) : \ q_K(f) \leq 1\}$. Према томе, ове семинорме дефинишу локално конвексну топологију која је дата у Примеру 2.14.*

Пример 2.19. *Сваки НВП је локално конвексан простор чија је топологија дефинисана једном јединoм семинормом која је уједно и норма.*

У пракси се топологија локално конвексног простора најчешће задаје на управо описани начин, дакле помоћу фамилије семинорми. Веома је пожељно да та фамилија буде засићена, што је појам који прецизирамо у наставку.

Нека је $(q_i)_{1 \leq i \leq n}$ коначна фамилија семинорми на векторском простору E. Онда је функција $q = \max q_i$ дефинисана са $q(x) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} q_i(x)$ семинорма на E, и имамо

$$\{x | \ q(x) \leq \epsilon\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{x | \ q_i(x) \leq \epsilon\} = \{x | \ q_i(x) \leq \epsilon, \ 1 \leq i \leq n\}. \tag{2.3.3}$$

Ако је даље E ТВП и све q_i су непрекидне, онда је и q непрекидна. Кажемо да је фамилија $\mathcal{F}$ семинорми *засићена* (енгл. saturated) акко за сваку коначну потфамилију (q_i) од $\mathcal{F}$ семинорма $\max q_i$ такође припада $\mathcal{F}$. Ако је $(q_i)_{i \in I}$ засићена фамилија семинорми која дефинише локално конвексну топологију τ на E, онда је фундаментални систем околина нуле за τ сачињен од скупова $V_{i,\epsilon} = \{x \in E : \ q_i(x) \leq \epsilon\}$. Да је то тако, једноставно видимо из (2.3.3).

Кажемо да су две фамилије семинорми дефинисаних на истом простору E *еквивалентне* акко дају исту топологију.

Ако имамо да је $(q_i)_{i \in I}$ фамилија семинорми која дефинише локално конвексну топологију простора E, тада од ње лако можемо добити еквивалентну фамилију семинорми која је засићена. Потребно је само да уместо сваке коначне потколекције $(q_{i_k})_{1 \leq k \leq n}$ од $(q_i)_{i \in I}$ узмемо семинорму $q_{i_1,\ldots,i_n} := \max\limits_{1 \leq k \leq n} q_{i_k}$. У наставку ћемо увек уместо дате фамилије семинорми посматрати описану засићену фамилију.

Рецимо још само неколико речи о линеарним пресликавањима, најважнијој класи пресликавања између два векторска простора. У случају ТВП-а, занима нас непрекидност тих пресликавања. Прво дајемо помоћну лему.

Лема 2.20. *Нека су E, F ТВП и $f : E \to F$ линеарно. Ако је f непрекидно у нули, тада је непрекидно на целом E.*

Доказ. Нека је $x \in E$. Нека је W околина 0 у F, тј. $f(x)+W$ околина тачке $f(x)$. Према претпоставци, постоји околина нуле V у простору E таква да је $f[V] \subseteq W$. Али онда, $f[x+V] \subseteq f(x)+f[V] \subseteq f(x)+W$. $\square$

Теорема 2.21. *Нека је E локално конвексан простор чија је топологија дефинисана засићеном фамилијом семинорми $(q_i)_{i\in I}$, а F локално конвексан простор чија је топологија дефинисана фамилијом семинорми $(r_j)_{j\in J}$. Линеарно пресликавање $f : E \to F$ је непрекидно акко за сваку семинорму r_j постоји семинорма q_i и $M > 0$ тако да за све $x \in E$ важи $r_j(f(x)) \leq Mq_i(x)$.*

Доказ. ($\Leftarrow$) Нека важи услов из теореме и нека је W околина нуле у F. Онда W садржи скуп облика $\{x \in F : \ r_{j_k}(x) \leq \epsilon, \ 1 \leq k \leq n\}$. Ако је сада $r_{j_k}(f(x)) \leq M_k q_{i_k}(x), \ 1 \leq k \leq n$, ставимо $V = \{x \in E : \ q_{i_k}(x) \leq \frac{\epsilon}{M_k}, \ 1 \leq k \leq n\}$. То је околина нуле у E и $f[V] \subseteq W$, па је према леми 2.20 функција f непрекидна.

($\Rightarrow$) Нека је f непрекидно. Пошто је $(q_i)_{i\in I}$ засићена фамилија семинорми, за свако $j \in J$ постоји индекс $i \in I$ и $\alpha > 0$ тако да $q_i(x) \leq \alpha$ имплицира $r_j(f(x)) \leq 1$. Тврдимо да је онда $r_j(f(x)) \leq \frac{1}{\alpha} q_j(x)$. Заиста, ако је $q_i(x) = 0$ онда је $q_i(\mu x) = 0$ за свако $\mu > 0$, па је $\mu r_j(f(x)) \leq 1$ за свако $\mu > 0$ и следи $r_j(f(x)) = 0$. Ако је $q_i(x) \neq 0$, онда је $q_i(\frac{\alpha x}{q_i(x)}) = \alpha$, и $r_j(f(\frac{\alpha x}{q_i(x)})) = \frac{\alpha}{q_i(x)} r_j(f(x)) \leq 1$. $\blacksquare$

Пример 2.22. *У случају да су E, F из претходне теореме НВП, на основу Примера 2.19 видимо да теорема 2.21 тврди да је за линеарна пресликавања између нормираних простора непрекидност еквивалентна са ограниченошћу.*

Дефиниција 2.23. *Нека су E, F ТВП и $f : E \to F$ непрекидно и линеарно.*
Ако је f бијективно и f^{-1} такође непрекидно (тј. f је хомеоморфизам), онда је f изоморфизам ТВП-а.
Ако је f ињективно и $f|E$ је изоморфизам, онда је f стриктни морфизам ТВП-а.

Два ТВП-а E и F су *изоморфни* акко постоји изоморфизам E на F. Изоморфизам E на самог себе је *аутоморфизам.*

2.4. Ограничени скупови

Подсетимо се дефиниције ограничених скупова у нормираном простору: *ако је V нормиран векторски простор и $A \subseteq V$, онда је A ограничен ако постоји $r > 0$ тако да $A \subseteq L_r(0)$.*

Циљ нам је да ову дефиницију уопштимо на тополошко векторске просторе. Усвојићемо следећу дефиницију, која потиче од Колмогорова и фон Нојмана (видети [3], дефиниције 1 и 2, поглавље 2.6).

Дефиниција 2.24. *Нека је E ТВП и $A, B \subseteq E$.*
- *A апсорбује B акко постоји $\alpha > 0$ тако да је $B \subseteq \lambda A$ за све $|\lambda| > \alpha$;*
- *B је ограничен акко га апсорбује свака околина нуле.*

Важи следећа лема.

Лема 2.25. *Скуп $B \subseteq E$ је ограничен акко га апсорбује свака фундаментална околина нуле.*

Ако је A балансиран, онда A апсорбује B ако постоји $\mu \in \mathbb{K}$ тако да $B \subseteq \mu A$. Заиста, ако такво μ постоји, онда из $|\lambda| \geq |\mu|$ тј. $|\lambda^{-1}\mu| \leq 1$ очито следи

$$B \subseteq \mu A = \lambda(\lambda^{-1}\mu)A \subseteq \lambda A.$$

Пропозиција 2.26. *Нека су E и F ТВП и $f : E \to F$ линеарно и непрекидно пресликавање. Тада f слика сваки ограничен подскуп од E на ограничен подскуп од F.*

Доказ. Нека је $A \subseteq E$ ограничен и W околина нуле у F. Онда је $f^{-1}[W]$ околина нуле у E и стога апсорбује A. Следи да W апсорбује $f[A]$ (из $A \subseteq \lambda f^{-1}[W]$ следи $f[A] \subseteq \lambda f[f^{-1}[A]] \subseteq A$). □

Посебно, што је финија топологија неког простора то мање ограничених скупова у њему имамо.

Пропозиција 2.27. *Сваки подскуп ограниченог скупа је ограничен. Унија два ограничена скупа је ограничен скуп.*

Доказ. Доказујемо само други део, први је јасан. Нека су A, B ограничени скупови у ТВП E и V балансирана околина нуле у E. Онда за неке $\alpha > 0$, $\beta > 0$ важи $A \subseteq \alpha V$ и $A \subseteq \beta V$, па је $A \cup B \subseteq \gamma V$, $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$. □

Индуктивно добијамо да важи и наредна последица.

Последица 2.28. *Унија коначно много ограничених скупова је ограничен скуп.*

2.5. Финалне топологије

Циљ овог поглавља је описивање топологије простора $\mathcal{D}(\Omega)$. Ту топологију увешћемо као финалну топологију каноничких инјекција $\mathcal{D}(K) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$, где су $K \subseteq \Omega$ компактни. Све ово прецизно описујемо.

Нека је F векторски простор и $(E_I)_{i \in I}$ фамилија ТВП-а над истим пољем $\mathbb{K}$. За свако $i \in I$ нека је f_i линеарно пресликавање из E_i у F. Означимо са Φ скуп локално конвексних топологија на F за које су сви f_i непрекидни. Тада је $\Phi \neq \emptyset$ јер барем $\tau_{adisc} \in \Phi$. Нека је $\mathcal{T}$ најмање горње ограничење скупа Φ у скупу свих топологија на F (Пропозиција 1.14). Тада је $\mathcal{T}$ компатибилна са векторском структуром од F.

Нека је $\mathcal{R}$ филтер база на F коју чине сви балансирани, конвексни скупови V такви да је за сваки $i \in I$ скуп $f^{-1}[V]$ околина нуле у E_i. Доказаћемо да је $\mathcal{R}$ фундаментални систем околина нуле за $\mathcal{T}$ у F. Онда ће из Пропозиције 2.11 следити да је $\mathcal{T}$ локално конвексна топологија на F.

Према истој пропозицији, $\mathcal{R}$ је фундаментални систем околина нуле за неку локално конвексну топологију $\mathcal{T}'$ на F, и према дефиницији фамилије $\mathcal{R}$ сви f_i су непрекидни за $\mathcal{T}'$. Доказаћемо да је $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, па ће из дефиниције топологије $\mathcal{T}$ као најмањег горњег ограничења следити $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. Нека је U околина нуле за

$\mathcal{T}$ у F. Тада U садржи скуп $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ где $V_i \in \mathcal{T}_i$, $i \leq n$ за неке $\mathcal{T}_i \in \Phi$. Пошто је V апсорбујући, балансиран, конвексан и $f_i^{-1}[V] = \bigcap_{k=1}^{n} f_i^{-1}[V_k]$ је околина нуле у E_i за свако $i \in I$, следи $V \in \mathcal{R}$, што је и требало показати.

Управо смо доказали да је $\mathcal{T}$ најфинија локално конвексна топологија на F за коју су сви f_i непрекидни. Зваћемо је *финална локално конвексна топологија на F за фамилију $(f_i)_{i\in I}$*, а чешће ћемо рећи само ,,*финална топологија за фамилију $(f_i)_{i\in I}$*".

Илуструјмо описану конструкцију на следећем примеру (пример 3, поглавље 2.6 у [3]).

Пример 2.29. *Нека је F векторски простор и $(\mathcal{T}_i)$ фамилија локално конвексних топологија на F. За свако i означимо са E_i простор F снабдевен топологијом $\mathcal{T}_i$ и нека је f_i идентичко утапање из E_i у F. Тада је финална топологија τ на F за (f_i) највеће доње ограничење (Пропозиција 1.15) топологија $\mathcal{T}_i$ у скупу свих локално конвексних топологија на F.*

Заиста, τ је грубља од сваке $\mathcal{T}_i$. Балансиран, конвексан скуп U је околина нуле за τ ако је околина нуле за све $\mathcal{T}_i$. Стога, ако је τ' локално конвексна топологија на F грубља од сваке $\mathcal{T}_i$ и U балансирана, конвексна околина нуле за $\mathcal{T}'$, онда је U околина нуле за сваки $\mathcal{T}_i$ па и за τ. Значи, τ је финија од τ'.

Следећу пропозицију ћемо у четвртој глави више пута користити.

Пропозиција 2.30. *Нека је F векторски простор, $(E_i)_{i\in I}$ фамилија локално конвексних простора и за свако $i \in I$ $f_i : E_i \to F$ линеарно. Нека је F снабдевено финалном топологијом $\mathcal{T}$ за $(f_i)_{i\in I}$. Нека је G локално конвексан простор и g линеарно пресликавање из F у G. Онда је g непрекидно акко су све $g \circ f_i$, $i \in I$ непрекидне функције.*

Доказ. ($\Rightarrow$) Композиција непрекидних пресликавања је непрекидна.

($\Leftarrow$) Нека су сва пресликавања $g \circ f_i$ непрекидна и W балансирана, конвексна околина нуле у G. Онда је према претпоставци $f_i^{-1}[g^{-1}[W]]$ околина нуле у E_i за све $i \in I$, па пошто се ради о финалној топологији, апсорбујући, балансирани, конвексан скуп $g^{-1}[W]$ је околина нуле у F за $\mathcal{T}$. Дакле, g је непрекидно.
□

Дајемо сада најважнији пример.

Пример 2.31. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен и $\mathcal{D}(\Omega)$ (користи се још и ознака $C_c^\infty(\Omega)$) векторски простор свих глатких[1] функција са компактним носачем (Деф. 1.12). За сваки $K \subseteq \Omega$ компактан означимо са $\mathcal{D}(K)$ потпростор $\mathcal{D}(\Omega)$ који се састоји од свих $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ чији је носач садржан у K. Тада је $\mathcal{D}(\Omega)$ унија свих $\mathcal{D}(K)$, $K \subseteq \Omega$ компактан.*

За $p \in \mathbb{N}^n$ и $\epsilon > 0$ нека је $V_{p,\epsilon} = \{f \in \mathcal{D}(K) : |\partial^p f(x)| \leq \epsilon$ за све $x \in K\}$. Аналогно као у Примеру 2.14 закључујемо да скупови $V_{p,\epsilon}$[2] задовољавају услове Пропозиције 2.12, па њихови коначни пресеци генеришу локално конвексну топологију на $\mathcal{D}(K)$.

Сада можемо снабдети простор $\mathcal{D}(\Omega)$ финалном топологијом за каноничке инјекције $\mathcal{D}(K) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$, и то је помињана топологија коју ћемо надаље увек посматрати на простору $\mathcal{D}(\Omega)$, што нећемо посебно наглашавати.

---

[1]Функција је глатка ако има изводе произвољног реда који су сви непрекидни.

[2]Њима одговарајуће семинорме које дају исту топологију су $q_p(f) = \max_{x\in K} |\partial^p f(x)|$. Ове семинорме такође дефинишу и топологију простора $\mathcal{D}(K)$.

За крај овог поглавља наводимо конструкцију звану *партиција јединице*, важну не само у функционалној анализи него и у другим гранама математике (диференцијалној геометрији на пример). Помоћу ње локална својства посматраних објеката преносимо на глобалан ниво. Овде ће нам тај појам обезбедити да је простор $\mathcal{D}(\Omega)$ из Примера 2.31 непразан (Последица 2.35).

Дефиниција 2.32. *Нека је X тополошки простор и $(A_i)_{i\in I}$ фамилија подскупова X. Кажемо да је (A_i) локално коначна акко свака тачка $x \in X$ има околину која сече највише коначно много скупова фамилије $(A_i)_{i\in I}$.*

Дефиниција 2.33. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен и $(\Omega_i)_{i\in I}$ отворен покривач за Ω. Фамилија $(\alpha_i)_{i\in I}$ глатких функција се назива партиција јединице оријентисана ка покривачу $(\Omega_i)_{i\in I}$ акко важи:*
(a) $\alpha_i \geq 0$ за све $i \in I$;
(b) $A_i = supp\alpha_i \subseteq \Omega_i$ за све $i \in I$;
(c) фамилија $(A_i)_{i\in I}$ је локално коначна;
(d) $\sum_{i\in I} \alpha_i(x) = 1$ за све $x \in \Omega$.

Приметимо да је сума у (d) добро дефинисана на основу услова (c).

Теорема 2.34. *Партиција јединице увек постоји ма како бирали покривач $(\Omega_i)_{i\in I}$.*

Доказ се може видети у [3], страна 168, теорема 4.

Последица 2.35. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен, $A \subseteq \Omega$ затворен и $A \supseteq V \subset \Omega$ отворен. Тада постоји глатка функција φ таква да је $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ за $x \in \Omega$, $\varphi(x) = 1$ за $x \in A$, и $\varphi(x) = 0$ за $x \in V^c$.*

Доказ. Применимо теорему 2.34 на покривач $\{V, A^c\}$ скупа Ω. Ако је (α_1, α_2) партиција јединице оријентисана ка (Ω_1, Ω_2), можемо бирати $\varphi = \alpha_1$ јер $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и $supp\alpha_2 \subseteq A^c$ имплицирају да је $\alpha_1(x) = 1$ за све $x \in V^c$. $\square$

Глава 3

Дуалност

Циљ ове главе је увођење топологије коју ћемо посматрати на простору дистрибуција. Ради се о тзв. *јакој топологији* или *топологији униформне конвергенције на ограниченим скуповима.* Почињемо од појма упаривања векторских простора. Поново сматрамо да $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

3.1. Упаривање простора

Дефиниција 3.1. *Нека су F и G векторски простори над истим пољем $\mathbb{K}$. Простори F и G су упарени или чине пар акко постоји билинеарна функционела $B : F \times G \to \mathbb{K}$.*

Дефиниција 3.2. *Нека су F и G простори упарени пресликавањем B.*

Кажемо да пар (F,G) раздваја тачке од F (или да билинеарно пресликавање B раздваја тачке од F) акко $\forall 0 \neq x \in F \ \exists 0 \neq y \in G \ B(x,y) \neq 0$.
Аналогна је дефиниција за раздвајање тачака од G.

Ако пар (F,G) раздваја тачке и од F и од G, кажемо да је раздвојен или да тај пар чини дуални систем у односу на B.

Ако F и G чине дуални систем у односу на B, реални векторски простори F_0 и G_0 добијени посматрањем F и G као векторских простора над $\mathbb{R}$ чине дуални систем у односу на пресликавање B_1 дато са $B_1(x,y) = \mathfrak{Re}\, B(x,y)$.

Надаље, уместо:,,нека су F и G векторски простори упарени билинеарним пресликавањем B", рећи ћемо краће: нека су F и G упарени (чине пар) у односу на B.

Пример 3.3. *Нека је E векторски простор над $\mathbb{K}$. Означимо са E^* скуп свих линеарних функционела на E. Уколико на E^* дефинишемо операције сабирања функција и множења функције скаларом на уобичајен начин, E^* такође постаје векторски простор који називамо алгебарски дуал од E. Напоменимо да је нула вектор простора $E*$ функција $\mathbf{0}$ дефинисана са $\mathbf{0}(x) = 0$ за све $x \in E$. Простори E и E^* су упарени у односу на тзв. каноничку билинеарну функционелу $(x,f) \mapsto \langle x,f \rangle$, $E \times E^* \to \mathbb{K}$, која је дефинисана са $\langle x,f \rangle = \langle f,x \rangle = f(x)$, $x \in E$.*

Овако упарени простори чине и дуални систем. Заиста, пар (E,E^*) раздваја тачке од E^* према дефиницији нула вектора у E^*. Докажимо да тај пар раздваја и тачке од E. Нека је $0 \neq x \in E$ и $(e_i)_{i \in I}$ алгебарска база од E. Тада је $x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i$

за неке скаларе $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Мора бити $\alpha_k \neq 0$ за неко k, па ако је $g \in E^*$ пресликавање које свакoм вектору $y = \sum_{i\in I} \beta_i e_i$ додељује његову к-ту координату β_k, следи да је $\langle x, g\rangle = \alpha_k \neq 0$.

Пример 3.4. *Следећи пример је од суштинског значаја за дефинисање простора дистрибуција, и, уопште, представља врло важан концепт у математици и њеним применама.*

Нека је сада E ТВП и означимо са E' скуп свих непрекидних линеарних функционела на E. Тада је E' потпростор простора E^*. Заиста, $E' \subseteq E^*$, и покажимо:
(i) $f, g \in E' \Rightarrow f + g \in E'$;
(ii) $\alpha \in \mathbb{K}, f \in E' \Rightarrow \alpha f \in E'$.
Нека је дато $\epsilon > 0$.
(i) Из непрекидности f и g налазимо околине нуле у E, нека су то U и V, тако да $x \in U \Rightarrow |\langle x, f\rangle| < \frac{1}{2}\epsilon$ и $x \in V \Rightarrow |\langle x, g\rangle| < \frac{1}{2}\epsilon$. Према томе, $x \in U \cap V \Rightarrow |\langle x, f + g\rangle| < \epsilon$, и према леми 2.20 следи $f + g \in E'$.
(ii) Сасвим слично, из непрекидности f имамо околину нуле U у E за коју важи $x \in U \Rightarrow |\langle x, f\rangle| < \frac{\epsilon}{|\alpha|}$. Али онда $x \in U \Rightarrow |\langle x, \alpha f\rangle| = |\alpha||\langle x, f\rangle| < \epsilon$ и поново на основу леме 2.20 $\alpha f \in E'$.

На основу доказаног, E' је и сам векторски простор. Називамо га (тополошки) **дуал** *простора E. Рестрикцију на $E\times E'$ каноничке билинеарне функционеле $(x, f) \mapsto \langle x, f\rangle$ означавамо на исти начин, са $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Она очито раздваја тачке од E',а ако је E локално конвексан и Хауздорфов, она раздваја и тачке од E.*

У наставку сматраћемо да (E, E^*) и (E, E') посматрамо увек у односу на каноничку билинеарну форму.

Прави значај појма раздвајања тачака из саме дефиниције није очигледан. Истакнимо га на овом месту у неколико реченица.

Нека F и G чине пар у односу на B. За свако $x \in F$ пресликавање $x^* : y \mapsto B(x, y)$ је линеарна функционела на G, тј. елемент алгебарског дуала G^*. Такође, пресликавање $\Psi : x \mapsto x^*$, $\Psi : F \to G^*$ је очито линеарно. Ако B раздваја тачке од F, онда је ово пресликавање инјективно (по самој дефиницији 3.2). Према томе, F можемо поистоветити са векторским потпростором $\Psi[F]$ од G^*. Уколико ову идентификацију извршимо, кажемо да смо F *канонички идентификовали* са векторским потпростором од G^*. У том случају, билинеарна форма $(x, y) \mapsto B(x, y)$ је рестрикција на $F\times G$ каноничке билинеарне форме $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ на $F \times F^*$, и због тога се тада и пише $\langle x, y\rangle$ уместо $B(x, y)$.

Слично, ако B раздваја тачке од G, пресликавање $\Phi : y \mapsto y^*$ из G у F^* је инјективно и G се може посматрати као потпростор од F^*.

Ако F и G чине пар у односу на B, тада се на F и G могу дефинисати локално конвексне топологије $\sigma(F, G)$ и $\sigma(G, F)$ које се називају *слабе топологије*. Због симетричности њихових дефиниција бавимо се само са $\sigma(F, G)$.

Ако $y \in G$, онда је пресликавање $x \mapsto B(x, y)$ семинорма на F. Ако означимо ову семинорму са q_y, тада је топологија $\sigma(F, G)$ дефинисана фамилијом семинорми $(q_y)_{y\in G}$. Према (2.3.2), фундаменталан систем околина нуле за топологију $\sigma(F, G)$ чине скупови $U_{y_1,\dots,y_n,\epsilon} = \{x \in F : \ |B(x, y)| \le \epsilon\}$, где је $(y_i)_{i\le n}$ коначна фамилија елемената из G а $\epsilon > 0$.

Приметимо да ако B раздваја тачке од F и идентификујемо F канонички са векторским потпростором од G^*, онда $\sigma(G^*, G)$ индукује на G топологију $\sigma(F, G)$.

Пропозиција 3.5. *Нека F и G чине пар у односу на B и нека је F снабдевено слабом топологијом $\sigma(F,G)$. За свако $y \in G$ пресликавање $y^* : x \mapsto B(x,y)$ је непрекидна линеарна функционела на F, и обратно, ако је f непрекидна линеарна функционела на F, онда постоји $y \in G$такво да је $f(x) = B(x,y)$ за свако $x \in F$.*

Доказ. ($\Rightarrow$) Већ знамо да је y^* линеарна функционела. Да је она непрекидна у односу на слабу топологију докажимо према Теореми 2.21. Заиста, довољно је уочити релацију $|y^*(x)| = |B(x,y)| = q_y(x)$.
($\Leftarrow$) Да докажемо обрат искористићемо следећу лему (за доказ видети [3], стр. 186).

Лема 3.6. *Нека је E векторски простор и $f_1,...,f_n$ линеарне функционеле на E. Ако је f линеарна функционела на E са особином*

$$Ker(f) \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} Ker(f_i),$$

онда постоје скалари $\alpha_1,...,\alpha_n$ такви да је $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$.

Нека је f линеарна функционела на E непрекидна за слабу топологију. Према Теореми 2.21 постоје $y_1,...,y_n \in G$ такви да је $f(x) \leq \max_{1\leq i\leq n} |B(x,y_i)|$ за све $x \in F$. Одатле видимо да је $f(x) = 0$ за све $x \in F$ за које је $B(x,y_i) = 0$, $i \leq n$. Следи да важе услови леме за функцију f и $f_1,...,f_n$, па је $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^*$ за неке $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i \leq n$. Сада ако ставимо $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$, имамо $f(x) = B(x,y)$ за све $x \in F$. □

Притом, $\sigma(F,G)$ је најмања топологија на F за коју су сва пресликавања y^*, $y \in G$ непрекидна. Заиста, ако је $\mathcal{T}$ топологија за коју су сва та непрекидна, онда за дате $x_0 \in F, \epsilon > 0$ и $y_1,...,y_n \in G$, постоји околина V тачке x_0 за $\mathcal{T}$ таква да $x \in V \Rightarrow |B(x - x_0, y_i)| \leq \epsilon$ за све $i \leq n$. Другачије речено, $V \subseteq x_0 + U_{y_1,...,y_n,\epsilon}$ и заиста је $\mathcal{T}$ финија од $\sigma(F,G)$.

Завршавамо карактеризацијом појма раздвајања тачака.

Пропозиција 3.7. *Нека су F и G упарени у односу на B и нека B раздваја тачке од F. Идентификујмо F канонички са потпростором од G^* и нека је на G^* слаба топологија $\sigma(G^*,G)$. Тада B раздваја тачке од G акко је F густ у G^*.*

Доказ. Нека пар (F,G) раздваја тачке од G. Нека је $f \in G^*$ такво да је $f \restriction_{\overline{F}} = 0$ (Пропозиција 2.15). Према Пропозицији 3.5 постоји $y \in G$ такво да је $f(x) = \langle x,y \rangle$, $x \in G^*$, и посебно $\langle x,y \rangle = 0$ за све $x \in F$. Према претпоставци то имплицира $y = 0$, дакле $f = 0$, па на основу Пропозиције 3.5 мора бити $\overline{F} = G^*$.

Обратно, ако је $\overline{F} = G^*$, према пропозицији 3.5 постоји $y \in G$ такво да је $\langle x,y \rangle = 0$ за све $x \in F$. Према претпоставци тада је $\langle x,y \rangle = 0$ за све $x \in G^*$, а то је могуће (Пример 3.3) само за $y = 0$. Контрапозицијом добијамо тврђење. □

3.2. Поларност

Дефиниција 3.8. *Нека F и G чине пар у односу на B. Ако је $A \subseteq F$, онда је $A^\circ := \{y \in G : |B(x,y)| \leq 1\} \subseteq G$ поларни скуп за A.*

Наведимо неке једноставне особине поларних скупова у следећој пропозицији.

Пропозиција 3.9. *Нека су* F *и* G *упарени у односу на* B *и* $A, A_1, A_2 \subseteq F$. *Онда:*
(a) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_1^\circ \supseteq A_2^\circ$;
(b) $A \subseteq (A^\circ)^\circ =: A^{\circ\circ}$;
(c) $A^\circ = A^{\circ\circ\circ}$;
(d) A° *је балансиран, конвексан скуп у* G *затворен за* $\sigma(F,G)$;
(e) $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ$ *за* $\lambda \neq 0$. *Специјално,* A° *је апсорбујући акко је* A *ограничен за* $\sigma(F,G)$;
(f) *ако је* $A_i \subseteq F$, $i \in I$, *онда је* $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ = \bigcap_{i\in I} A_i^\circ$.

Доказ. (a) Ако $y \in A_2^\circ$ онда је $|B(x,y)| \leq 1$ за све $x \in A_2$, па самим тим и за све $x \in A_1$; дакле $y \in A_1^\circ$;
(b) ако $x \in A$ онда је $|B(x,y)| \leq 1$ за све $y \in A^\circ$ па $x \in (A^\circ)^\circ$;
(c) из претходно доказаног видимо да $A \subseteq A^{\circ\circ} \Rightarrow A^\circ \supseteq A^{\circ\circ\circ}$. Са друге стране је према (b), $A^\circ \subseteq (A^\circ)^{\circ\circ} = A^{\circ\circ\circ}$;
(d) доказаћемо истовремено балансираност и конвексност. Нека $y, z \in A^\circ$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $|\lambda| + |\mu| \leq 1$. Тада за свако $x \in A$ имамо

$$|B(x, \lambda y + \mu z)| \leq |\lambda| \cdot |B(x,y)| + |\mu| \cdot |B(x,z)| \leq |\lambda| + |\mu| \leq 1,$$

тј. $\lambda y + \mu z \in A^\circ$ и A° је балансиран $(\mu = 0)$ и конвексан $(\lambda, \mu > 0,\ \lambda + \mu = 1)$. Докажимо ограниченост: можемо записати $A^\circ = \bigcap_{x\in A} A_x$, где је $A_x = \{y \in G : |B(x,y)| \leq 1\}$. Стога је довољно доказати да је сваки A_x затворен у $\sigma(G,F)$. Али, A_x је инверзна слика затвореног скупа $\sigma(G,F)$-непрекидним пресликавањем $y \mapsto B(x,y)$ (Пропозиција 3.5), па је и сам затворен (1.6);
(e) $y \in (\lambda A)^\circ$ је еквивалентно са $|B(\lambda x, y)| = |B(x, \lambda y)| \leq 1$ за све $x \in A$, тј. $\lambda y \in A^\circ$. Претпоставимо да је A° апсорбујући и нека $y \in G$. Онда постоји $\mu > 0$ тако да $\mu y \in A^\circ$, што према управо доказаном значи да $y \in (\mu A)^\circ$. Али онда $q_y(x) = |B(x,y)| \leq \frac{1}{\mu}$ за све $x \in A$ тј. A је $\sigma(F,G)$-ограничен. Обратно, ако је A $\sigma(F,G)$-ограничен, онда за свако $y \in G$ постоји $\mu > 0$ такво да је $|B(x,y)| \leq \frac{1}{\mu}$ за све $x \in A$. Следи $\mu y \in A^\circ$, па пошто је A° балансиран последња релација је довољна да закључимо да је A° апсорбујући.
(f) важи следећи низ еквиваленција:
$y \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ \Leftrightarrow |B(x,y)| \leq 1$ за све $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow |B(x,y)| \leq 1$ за све $x \in A_i$ и $i \in I \Leftrightarrow$ $y \in \bigcap_{i\in I} A_I^\circ$. $\square$

Приметимо да претходна пропозиција утврђује како $^\circ$,,делује" на унију. Да бисмо видели како $^\circ$,,делује на пресек", и да ли важи једнакост дуална оној из (f), требаће нам следећа *теорема о биполарима.*

Теорема 3.10. *Нека* F *и* G *формирају пар. Ако је* $\emptyset \neq A \subseteq F$, *онда је* $A^{\circ\circ}$ *балансирана, конвексна,* $\sigma(F,G)$*-затворена обвојница од* A, *тј. најмањи балансирани, конвексни надскуп* A *који је затворен за топологију* $\sigma(F,G)$.

Доказ. Према пропозицији 3.9(b),(d), $A^{\circ\circ}$ је балансирани,конвексни,$\sigma(F,G)$–ограничени надскуп A. Стога требамо само доказати минималност, тј. ако је D балансирани, конвексни, $\sigma(F,G)$–ограничени надскуп A онда је $A^{\circ\circ} \subseteq D$.

Доказаћемо $D^c \subseteq (A^{\circ\circ})^c$. Нека $a \notin D$. Према Теореми 2.15 постоји непрекидна линеарна функционела на реалном векторском простору F_0 који је ,,подскуп" од F и $\alpha \in \mathbb{R}$ тако да је $f(x) < \alpha$ за $x \in D$ и $f(a) > \alpha$. Пошто $0 \in D$ следи $\alpha > f(0) = 0$, па због линеарности f можемо претпоставити $\alpha = 1$. Ако је F реалан векторски простор, онда се F и F_0 поклапају. Ако је F комплексан векторски простор онда је $x \mapsto f(x) - \imath f(\imath x)$ линеарна функционела непрекидна за $\sigma(F,G)$. Према Пропозицији 3.5 постоји $y \in G$ тако да је $f(x) = \mathfrak{Re} B(x,y)$ за све $x \in F$. Пошто је D балансиран имамо $|B(x,y)| \leq 1$ за све $x \in D$, дакле $y \in D^\circ \subseteq A^\circ$. Са друге стране $|B(a,y)| \geq f(a) > 1$. Последња два закључка дају да $a \notin A^{\circ\circ}$. $\square$

Пропозиција 3.11. *Нека је $(A_i)_{i\in I}$ фамилија балансираних, конвексних, непразних подскупова од F који су затворени за $\sigma(F,G)$. Тада је поларни скуп од $\bigcap_{i\in I} A_i$ балансирана конвексна, $\sigma(G,F)$–затворена обвојница од $\bigcup_{i\in I} A_i^\circ$.*

Доказ. Према теореми о биполарима имамо $A_i = A_i^{\circ\circ}$ и стога према последњем делу претходне пропозиције важи:

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i^{\circ\circ} = \Big(\bigcup_{i\in I} A_I^\circ\Big)^\circ,$$

значи

$$\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^\circ = \Big(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ\Big)^{\circ\circ}.$$

Поново користећи Теорему 3.10 закључујемо да је десна страна балансирана,конвексна, $\sigma(G,F)$–затворена обвојница од $\bigcup_{i\in I} A_i^\circ$. $\square$

Ако је M векторски потпростор од F, онда је $|B(x,y)| \leq 1$ за све $x \in M$ могуће једино у случају $|B(x,y)| = 0$ за све $x \in M$. Према томе, у овом случају можемо сматрати M° за ортогонални комплемент $M^\perp$ који смо раније увели за нормиране просторе (Деф. 1.39).

3.3. Топологија униформне конвергенције

Нека су F и G упарени у односу на B. Означимо са $\wp$ колекцију неких $\sigma(F,G)$–ограничених подскупова F. Онда према Пропозицији 3.9 поларни скупови A° скупова $A \in \wp$ формирају колекцију апсорбујућих, балансираних, конвексних скупова у G. Према Пропозицији 2.12 ови поларни скупови дефинишу локално конвексну топологију на G. Базу околина нуле у G за ту топологију чине коначни пресеци скупова λA°, $\lambda > 0$, $A \in \wp$. Ову топологију ћемо звати *топологија униформне конвергенције на скуповима фамилије* $\wp$, или краће $\wp$*–топологија.*
Напоменимо да уколико желимо да опишемо фамилију семинорми која даје $\wp$–топологију, онда су одговарајуће семинорме дате са $q_A(y) = \sup_{x\in A} |B(x,y)|$, кад A пролази скупом $\wp$. Наиме, $q_A(y) \leq \epsilon \Leftrightarrow y \in \epsilon A^\circ$, па формула (2.3.2) показује да су те топологије исте.

Пропозиција 3.12. *Нека су F и G упарени и $\wp$ колекција неких $\sigma(F,G)$–ограничених подскупова F. Тада ћемо добити исту $\wp$–топологију заменом колекције $\wp$ било*

којом од следећих колекција:
(a) *сви подскупови скупова из* $\wp$;
(b) *коначне уније скупова из* $\wp$;
(c) *скупови* λA, *где* $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \wp$;
(d) $\sigma(F,G)$*–затварања скупова из* $\wp$;
(e) *балансиране, конвексне,* $\sigma(F,G)$*–затворене обвојнице скупова из* $\wp$.

Доказ. Треба показати да су поларни скупови елемената колекција $(a)-(e)$ такође околине σ-топологије. Користимо Пропозицију 3.9.
(a) Ако је $A_1 \subseteq A \in \wp$, онда је $A_1^\circ \supseteq A^\circ$ па је и A_1° околина нуле;
(b) ако $A_i \in \wp$, очигледно је да је $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^\circ = \bigcap_{i=1}^n A_I^\circ$ околина нуле;
(c) за $\lambda \neq 0$ скуп $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda}A^\circ$ је околина нуле; за $\lambda = 0$ имамо да је $(0A)^\circ = G$ такође околина нуле;
(d) важи $A \subseteq \overline{A} \subseteq A^{\circ\circ}$ јер је $A^{\circ\circ}$ затворен. Следи $A^\circ \supseteq \overline{A}^\circ \supseteq A^{\circ\circ\circ} = A^\circ$, значи $\overline{A}^\circ = A^\circ$ је околина нуле;
(e) ако $A \in \sigma$, онда је $A^{\circ\circ}$ балансирана, конвексна, $\sigma(F,G)$–затворена обвојница од A (теорема о биполарима), па је $(A^{\circ\circ})^\circ = A^\circ$ околина нуле. □

Знамо да ако F и G формирају пар који раздваја тачке од F, онда F може да се посматра (канонички) као потпростор од G^*. Стога је оправдана наредна дефиниција.

Дефиниција 3.13. *Нека F и G чине пар који раздваја тачке од F и $\mathcal{T}$ локално конвексна топологија на G. Кажемо да је $\mathcal{T}$ компатибилна са паром (F,G) акко је F дуал од G за топологију $\mathcal{T}$.*

Дакле, $\mathcal{T}$ је компатибилна са паром (F,G) акко су сва непрекидна линеарна пресликавања на G тачно она дефинисана елеметима из F, тј. облика $y \mapsto \langle x,y\rangle$ за неко $x \in F$.

Пример 3.14. *Нека је E ТВП са топологијом $\mathcal{T}$ и E' његов дуал (пример 3.4). Онда је $\mathcal{T}$ компатибилна са паром (E,E') по самој дефиницији дуала.*

Пример 3.15. *Већ смо показали (Пропозиција 3.5) да ако (F,G) раздваја тачке од G, онда је слаба топологија $\sigma(F,G)$ компатибилна са паром (F,G). У наставку смо чак показали да је $\sigma(F,G)$ најмања таква топологија.*

Пример 3.16. *Нека је E Банахов простор и E' његов дуал. Као што смо видели топологија $\sigma(E',E)$ јесте компатибилна са паром (E,E'). Треба знати да топологија индукована нормом у општем случају није компатибилна са паром (E,E'). Ако је E на пример Хилбертов простор то ипак јесте случај. Општије, ако је E било који рефлексиван простор топологија индукована нормом је компатибилна са паром (E,E') (видети [3], пример 4, стр. 198).*

Пропозиција 3.17. *Нека F и G чине пар који раздваја тачке од F. Тада су конвексни, затворени скупови исти за све локално конвексне топологије на G које су компатибилне са паром (F,G).*

Доказ. С обзиром да појмови конвексности и затворености не зависе од поља $\mathbb{K}$ над којим посматрамо F и G, претпоставимо да је $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Према последици Хан-Банахове теореме 2.16 имамо да је сваки затворен конвексан скуп пресек свих затворених полупростора који га садрже. С обзиром да су једначине тих полупростора облика $f(x) \leq \alpha$ где је f непрекидна линеарна функционела, и да су непрекидне линеарне функционеле исте за све топологије компатибилне са (F, G), тврђење следи. $\square$

Без доказа наводимо важну чињеницу да се свака локално конвексна топологија може добити као $\wp$–топологија за неку погодно одабрану фамилију $\wp$.

Најзад долазимо до момента када уводимо топологију којом ћемо снабдети наш простор дистрибуција. Испоставља се да је та топологија заправо $\wp$–топологија за одговарајућу фамилију $\wp$. Наиме, с обзиром да $\wp$ бирамо као колекцију **неких** $\sigma(F, G)$-ограничених скупова, од посебног је интереса топологија коју добијамо ако одаберемо да је $\wp$ колекција **свих** $\sigma(F, G)$–ограничених скупова:

Дефиниција 3.18. *Нека F и G чине пар. Ако је $\wp$ колекција свих $\sigma(F, G)$–ограничених скупова у F, онда се одговарајућа $\wp$–топологија на G назива јака топологија или топологија униформне конвергенције на ограниченим подскуповима од F и обележава се са $\beta(G, F)$.*

Топологија $\beta(G, F)$ није нужно компатибилна са паром (F, G) (у смислу Дефиниције 3.13).

Глава 4

Дистрибуције

4.1. Мотивација

Наводимо следећи пример из [7].

Пример 4.1. *Претпоставимо да меримо температуру у просторији помоћу термометра. Означимо са $f(x)$ температуру у тачки x наше просторије. Тачку x можемо посматрати као материјалну тачку која нема димензију, али то није случај са иглом термометра. Зато кад прислонимо иглу термометра близу тачке x ми заправо више меримо температуру у околини тачке x него у самој тачки x. То значи да пре меримо неку средњу величину $\int f(x)\varphi(x)dx$, где φ зависи од самих особина термометра и позиције где постављамо термометар, значи φ није исто за све тачке x. Пошто смо сада видели да је зарад разлога физике боље посматрати неке средње величине него вредности у тачки (а нпр. у квантној теорији поља нека поља ни немају вредности у тачки), допустимо да наше f можда нема вредност у тачки. То значи да посматрамо ширу класу објеката него што су функције-назовимо их уопштене функције.*

У наставку дајемо и чисто математичку мотивацију за изучавање оваквих функција, а у поглављима која следе се бавимо детаљним проучавањем овог важног појма.

Пример 4.2. *Нека је $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Тада је, као што знамо, $f'(x) = 1$ за $x > 0$, $f'(x) = -1$ за $x < 0$, док извод $f'(0)$ није дефинисан. Природно је, дакле, рећи да је извод f' једнак функцији знака sgn, за коју не прецизирамо вредност у нули. У сваком случају, видимо да је $f''(x) = 0$ на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Али шта је са вредности другог извода у нули? Ако природно ставимо да је $f''(0) = 0$, тј. $f''(x) = 0$ за све $x \in \mathbb{R}$, онда лако видимо $f'(x) = c$ и $f(x) = cx$ за неко $c \in \mathbb{R}$. Међутим, ни за једно c функција $x \mapsto cx$ није једнака функцији $x \mapsto |x|$. Решење је у томе да други извод f'' постоји само као уопштена функција, и то $f'' = 2\delta$ (видети и Пример 4.25).*

4.2. Дефиниција дистрибуција

Шварцова дефиниција:

Дефиниција 4.3. *Нека је Ω отворен подскуп $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{D}(\Omega)$ простор глатких функција са компактним носачем снабдевен топологијом из Примера 2.31. Непрекидна линеарна функционела на Ω се назива дистрибуција дефинисана на Ω.*

Према томе, $\mathcal{D}'(\Omega)$ је простор свих дистрибуција на Ω. Најчешће посматрамо $\mathcal{D}'(\Omega)$ снабдевен јаком топологијом $\beta(\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega))$ из Дефиниције 3.18. У наставку Ω ће стално означавати неки отворени подскуп $\mathbb{R}^n$. Ако је $\Omega=\mathbb{R}^n$ пишемо само $\mathcal{D}'$ уместо $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Пропозиција 4.4. *Линеарна функционела T на $\mathcal{D}(\Omega)$ је дистрибуција акко за сваки $K\subseteq\Omega$ компактан постоји $M>0$ и $m\in\mathbb{N}$ тако да за све $\varphi\in\mathcal{D}(K)$ важи*

$$|\langle T,\varphi\rangle|\le M\max_{|p|\le m}\max_{x\in\Omega}|\partial^p\varphi(x)|. \tag{4.2.1}$$

Напоменимо да услов (4.2.1) може да се замени са

$$|\langle T,\varphi\rangle|\le M\sum_{|p|\le m}\max_{x\in\Omega}|\partial^p\varphi(x)|. \tag{4.2.2}$$

Доказ пропозиције 4.4. Према Пропозицији 2.30 линеарна функционела T на $\mathcal{D}(\Omega)$ је непрекидна акко су све $T\circ\imath_K$ непрекидне на $\mathcal{D}(K)$ док K пролази компактним подскуповима Ω. Сада из Теореме 2.21 и дефиниције семинорми на простору $\mathcal{D}(K)$ (фуснота у Примеру 2.31) следи тражено тврђење. □

Неки аутори услов (4.2.1) узимају за дефиницију дистрибуција.

Пример 4.5. *Нека $f\in C(\Omega)$ (Пример 2.7). За свако $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ важи $f\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$. Додефинишемо функцију $f\varphi$ да буде једнака 0 ван Ω. Следи да $\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\varphi(x)dx$ постоји. Пресликавање*

$$T_f:\varphi\mapsto\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\varphi(x)dx \tag{4.2.3}$$

је линеарна функционела на $\mathcal{D}(\Omega)$. Докажимо да је и непрекидно, тј. покажимо услов 4.2.1.

Нека је $K\subseteq\Omega$ компактан. Тада постоји $a>0$ тако да је K садржан у коцки $\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x_i|\le\frac{1}{2}a,\ 1\le i\le n\}$. Ставимо $b=\max_{x\in K}|f(x)|$. Онда:

$$|\langle T_f,\varphi\rangle|\le\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)\varphi(x)|dx\le a^nb\max_{x\in\Omega}|\varphi(x)|.$$

Према томе, пресликавање T_f за $f\in C(\Omega)$ дефинише дистрибуцију на Ω коју зовемо регуларна дистрибуција.

Очигледно је да је пресликавање $f\mapsto T_f$ из $C(\Omega)$ у $\mathbb{D}'(\Omega)$ линеарно. Покажимо да је и инјективно:

Нека је $f\ne0$. Онда постоји $x_0\in\Omega$ $f(x_0)\ne0$. Раставимо $f=f_1+\imath f_2$, где су f_1,f_2 реалне функције. Због непрекидности f постоји $\alpha>0$ и $r>0$ тако да нека од неједнакости $f_i>\alpha$, $f_i<-\alpha$ важи за бар један од индекса $i=1,2$. Нека је $\chi\in\mathcal{D}(\Omega)$ ненегативна функција таква да је $\chi(x)=1$ за $x\in B_{\frac{r}{2}}(x_0)$ и $\chi(x)=0$ за $B_r(x_0)^c$ (Последица 2.35). Онда је

$$\langle T_f,\chi\rangle=\int_{B_r(x_0)}f_1(x)\chi(x)dx+\imath\int_{B_r(x_0)}f_2(x)\chi(x)dx\ne0.$$

Одиста, нека је нпр. $f_2(x)>\alpha$ у $B_r(x_0)$. Онда је

$$\int_{B_r(x_0)}f_2(x)\chi(x)dx\ge\int_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)}f_2(x)dx\ge\alpha|B_{\frac{r}{2}}(x_0)|,$$

где је $|B_{\frac{r}{2}}(x_0)|$ *мера (запремина) лопте* $B_{\frac{r}{2}}(x_0)$*. Према томе* $\langle T_f, \varphi\rangle \neq 0$.

Напоменимо да ћемо понекад поистовећивати непрекидну функцију f *и одговарајућу регуларну дистрибуцију* T_f*, говорећи: регуларна дистрибуција* f.

Према томе, сваку непрекидну функцију можемо посматрати као дистрибуцију. Дистрибуције, тако, уопштавају појам непрекидне функције. Може се показати да и свака локално интеграбилна функција дефинише дистрибуцију на исти начин. У то се овом приликом нећемо упуштати, с обзиром да у овом раду не користимо Лебегову теорију мере. Детаљи се могу наћи у [4]. Због постојања оваквих дистрибуција неки аутори дистрибуције називају уопштеним функцијама, иако многи под овим термином подразумевају ширу класу пресликавања.

Наводимо основни пример дистрибуције која се историјски и прва појавила:

Пример 4.6. *Нека је* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *отворен и* $a \in \Omega$*. Линеарна функционела* $\varphi \mapsto \varphi(a)$ *је непрекидна на* $\mathcal{D}(\Omega)$ *јер ако је* $K \subseteq \Omega$ *компактан важи процена* $|\varphi(a)| \leq \max\limits_{x\in\Omega}|\varphi(x)|$ *за све* $\varphi \in \mathcal{D}(K)$*. На тај начин добијамо дистибуцију* δ_a *дату са*

$$\langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a).$$

То је Диракова $\delta-$*дистрибуција, која се назива још и Диракова мера. Назив „мера” није случајан. С тим у вези видети Дефиницију 4.34.*

Занимљиво је да δ *није регуларна дистрибуција. То нећемо доказивати јер доказ захтева познавање теорије Лебегове интеграције. Доказ се може наћи у [4], стр. 42.*

Теорија тополошко векторских простора, и посебно теорија локално конвексних простора изложена у главама 2 и 3 представља основу теорије дистрибуција. Због тога се многа тврђења везана за дистрибуције не доказују, јер следе директно из одговарајућих тврђења за локално конвексне просторе. То је приступ који користимо и у овом раду. То је уједно и најчешћи разлог због којег ће докази многих тврђења која следе бити изостављени, као што је на пример случај са следеће две пропозиције.

Пропозиција 4.7. *Нека је* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *низ дистрибуција и претпоставимо да за свако* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *постоји* $T(\varphi) := \lim_{n\to\infty} T_n(\varphi)$*. Онда је са* $T : \varphi \mapsto T(\varphi)$ *дефинисана дистрибуција и* (T_n) *јако конвергира ка* T *у* $\mathcal{D}'(\Omega)$*.*

Пропозиција 4.8. *Нека је* $(T_\epsilon)_{0<\epsilon<\alpha}$ *фамилија дистрибуција и претпоставимо да за свако* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *постоји* $T(\varphi) := \lim_{\epsilon\to 0} T_n(\varphi)$*. Онда је са* $T : \varphi \mapsto T(\varphi)$ *дефинисана дистрибуција и* (T_ϵ) *јако конвергира ка* T *у* $\mathcal{D}'(\Omega)$*.*

За доказ претходна два тврђења читаоце упућујемо на [3], стр. 315, пропозиција 2.

Пример 4.9. *За свако* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *лимес*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \tag{4.2.4}$$

постоји. Заиста, запишимо $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ где је ψ непрекидна функција. По дефиницији извода видимо да је $\varphi'(0) = \psi(0)$. Пошто φ има компактан носач претпоставимо да је $\varphi(x) = 0$ за $|x| \geq a$. Онда

$$\int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \varphi(0) \int_{\epsilon<|x|<a} \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon<|x|<a} \psi(x) dx$$

$$= \varphi(0)\Big(\int_{\epsilon}^{a} \frac{dx}{x} + \int_{-a}^{-\epsilon} \frac{dx}{x}\Big) + \int_{\epsilon<|x|<a} \psi(x) dx$$

$$= 0 + \int_{\epsilon<|x|<a} \psi(x) dx,$$

а последњи интеграл конвергира ка $\int_{-a}^{a} \psi(x) dx < \infty$ кад $\epsilon \to 0$.

Даље, за свако $\epsilon > 0$ линеарно пресликавање

$$\varphi \mapsto \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

је дистрибуција дефинисана на $\mathbb{R}$. Стварно, ако је $K \subseteq \Omega$ компактан, $K \subseteq [-a, a]$, и $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, онда важи

$$\Big| \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \Big| \leq 2\ ln \frac{a}{\epsilon}\ \max_{x \in K} |\varphi(x)|,$$

и задовољен је услов (4.2.1).

Из Пропозиције 4.8 следи да лимес (4.2.4) дефинише дистрибуцију на $\mathbb{R}$. Пошто се у класичној анализи тај лимес назива „Кошијева главна вредност" интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ и означава са $vp.\frac{1}{x}$, и овде задржавамо исту ознаку за одговарајућу дистрибуцију. Дакле,

$$\langle vp.\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Понекад чак изостављамо слова $vp.$ и пишемо само x^{-1} или $\frac{1}{x}$.

Важи $vp.\frac{1}{x} \cdot x = \mathbf{1}$, али о томе ћемо више рећи у осмом поглављу када дефинишемо производ дистрибуција и глатке функције.

Наредна пропозиција је врло важна, али је не доказујемо јер се у доказу јавља појам рефлексивности локално конвексног простора који у овом раду нисмо увели. Доказ се може видети у [3], стр. 316.

Пропозиција 4.10. *Слика $\mathcal{D}(\Omega)$ у $\mathcal{D}'(\Omega)$ пресликавањем $f \mapsto T_f$ је густа.*

Пропозиција 4.11. *Инјекција $f \mapsto T_f$ из $C(\Omega)$ у $\mathcal{D}'(\Omega)$ је непрекидна.*

Доказ. Пошто је $C(\Omega)$ Хауздорфов простор довољно је доказати секвенцијалну непрекидност. Нека (f_n) тежи ка 0 у $C(\Omega)$. Узмимо $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ и $K = supp(\varphi)$. Онда $\max_{x \in K} |f_n(x)| \leq \epsilon$ за $n \geq n_0(\epsilon)$, и $|\int_{\Omega} f_n(x)\varphi(x)| \leq \epsilon \int_{\Omega} |\varphi(x)| dx,\ n \geq n_0(\epsilon)$, тј. T_{f_n} тежи ка нули слабо у $\mathcal{D}'(\Omega)$. Али према Пропозицији 4.7 следи да (T_{f_n}) тежи и јако ка нули у $\mathcal{D}'(\Omega)$. □

4.3. Носач дистрибуције

Подсетимо се (Дефиниција 1.12), носач функције $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ је скуп $suppf = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \neq 0\}}$. То је најмањи затворен скуп на којем је f различита од нуле, и истовремено комплемент највећег отвореног подскупа од $\mathbb{R}^n$ на којем је f идентички једнака нули. Жеља нам је сада да ову дефиницију уопштимо и на дистрибуције и за то бирамо другу карактеризацију носача из претходне реченице. Но, најпре пар уводних појмова.

Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен и $U \subseteq \Omega$ такође отворен. Свака функција f која припада $\mathcal{D}(U)$ може се посматрати као функција $\overline{f}$ из $\mathcal{D}(\Omega)$ где је $\overline{f} \upharpoonright_U = f$ и $\overline{f}(x) = 0$ за $x \in \Omega \setminus U$. Ако $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, онда је њена рестрикција на $\mathcal{D}(U)$ дистрибуција $T_U \in \mathcal{D}'(U)$ дефинисана са $\langle T_U, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$ за $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Зваћемо T_U *рестрикцијом* T *на* U, или *дистрибуцијом индукованом на* U *од* T. Ако је $T_U = 0$, кажемо да је T *нула* на U. Слично, ако су $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ отворени, $U \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_2$ отворен и $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, казаћемо да су S и T *једнаке на* U акко је $S_U = T_U$.

Дефиниција 4.12. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен и $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Тада је носач дистрибуције T скуп U^c, где је U највећи отворен подскуп од Ω на којем је T нула. Означимо га са $SuppT$.*

Јасно, $SuppT$ је затворен скуп по дефиницији.

У наставку Ω ће бити отворен подскуп $\mathbb{R}^n$ а T и S неке дистрибуције на Ω.

Лема 4.13. *Тачка $x \in \Omega$ припада $SuppT$ акко за сваку околину V тачке x постоји $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ са особинама: $supp\varphi \subseteq V$ и $\langle T, \varphi\rangle \neq 0$.*

Доказ. ($\Leftarrow$) Нека $x \notin SuppT = U^c$. Тада $x \in U$. Изаберимо $V = U$. Тада за свако $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ са $supp\varphi \subseteq U$ очито важи $\langle T, \varphi\rangle = 0$, јер је T нула на U.
($\Rightarrow$) Нека $x \in SuppT$ и $V \in \mathcal{U}(x)$. Претпоставимо да за свако $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ са $supp\varphi \subseteq V$ важи $\langle T, \varphi\rangle = 0$. То онда значи да је T нула на V, али према дефиницији скупа U као највећег отвореног скупа на којем је T нула следи $V \subseteq U$. Дакле $x \in U$, контрадикција. □

Пример 4.14. *$SuppT_f = suppf$ за $f \in C(\Omega)$.*

С обзиром да смо носач дистрибуције увели као уопштење носача обичне функције, овај резултат је био очекиван. Показаћемо овај наизглед једноставан резултат чији се доказ у литератури углавном изоставља.

Доказ примера 4.14. ($\subseteq$) Нека $x_0 \notin suppf$. Онда је $f(x_0) = 0$. Тада x_0 није рубна тачка скупа $suppf$ јер је $suppf$ затворен скуп па садржи свој руб. Онда постоји нека околина $U = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ тачке x_0 таква да је $f|_U = 0$. Тада за околину V из претходне леме бирамо управо U и према леми следи $x \notin SuppT_f$.
($\supseteq$) Нека $x_0 \in suppf$. Нека је $V \in \mathcal{U}(x_0)$ произвољно. Ако је $f(x_0) \neq 0$, онда као у доказу инјективности пресликавања $f \mapsto T_f$ (пример 4.5) налазимо $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $supp\varphi \subseteq V$ такво да је $\langle T, \varphi\rangle \neq 0$. Ако је пак $f(x_0) = 0$, онда је $x_0 \in suppf$ могуће само ако је x_0 рубна тачка скупа $suppf$. Но, онда је $f \neq 0$ у некој левој или десној околини x_0 па се опет позивамо на поменути пример. □

Пример 4.15. $Supp\delta_a = \{a\}$.

Доказ. Следи директно из леме 4.13. Заиста, једино тачка $x = a$ испуњава услов те леме. То се једноставно проверава. □

Пропозиција 4.16. 1.$Supp(S+T) \subseteq SuppS \cup SuppT$;
2.$Supp(\lambda T) = SuppT$ *за* $\lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{K}$.

Доказ. Лакше је доказати да је $(SuppS \cup SuppT)^c \subseteq (SuppS)^c \cap (SuppT)^c$. Заиста, ако $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ и $supp\varphi \subseteq (SuppS)^c \cap (SuppT)^c$, онда је $\langle S+T, \varphi\rangle = \langle S, \varphi\rangle + \langle T, \varphi\rangle = 0$. Друга једнакост следи из релација $\langle \lambda T, \varphi\rangle = \langle T, \lambda\varphi\rangle$ и $supp(\lambda\varphi) = supp(\varphi)$, $\lambda \neq 0$. □

Приметимо да ова пропозиција заправо каже да дистрибуције чији је носач садржан у неком фиксном скупу чине векторски потпростор.
Слично, дистрибуције које имају компактан носач чине векторски простор. Следећи циљ нам је да окарактеришемо тај векторски простор. Стога уводимо нови простор функција.

Пример 4.17. *Означимо са* $\mathcal{E}(\Omega)$ *векторски простор свих глатких функција на* Ω. *Снабдејмо тај простор локално конвексном топологијом генерисаном фамилијом семинорми*

$$q_{K,p} = \max_{x\in K} |\partial^p f(x)| \tag{4.3.1}$$

(K *пролази кроз компактне подскупове од* Ω, $p \in \mathbb{N}^n$*). Јасно,* $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \mathcal{E}(\Omega)$. *Важи и више,* $\mathcal{D}(\Omega)$ *је потпростор простора* $\mathcal{E}(\Omega)$.

Нека $m \in \mathbb{N}$. *У наставку ћемо са* $\mathcal{E}^m(\Omega)$ *означавати векторски простор свих функција* $f : \Omega \to \mathbb{K}$ *са особином да* $\partial^p f$ *постоји и да је непрекидна функција за све* $|p| \leq m$. *Очито,* $\mathcal{E}(\Omega) \subseteq \mathcal{E}^m(\Omega)$ *за свако* $m \in \mathbb{N}$ *и* $\mathcal{E}(\Omega) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}^m(\Omega)$. *Шта више, фамилија семинорми* $(q_{K,p})$ *где је* $q_{K,p}$ *дата горњим изразом (4.3.1) генеришу локално конвексну топологију за* $\mathcal{E}^m$ *кад* K *пролази компактним подскуповима од* Ω *а* $|p| \leq m$.

У следећој Лајбницовој формули као и у остатку овог рада користићемо мултииндексну нотацију коју сада уводимо.

Напомена 4.18. *У једначини (4.3.2) користимо тзв. мултииндексну нотацију: ако је* $p = (p_1, ..., p_n), q = (q_1, ..., q_n)$ *(n-мултииндекси), онда имамо:*
- $p + q := (p_1 + q_1, ..., p_n + q_n)$;
- $\binom{p}{q} := \binom{p_1}{q_1} \cdots \binom{p_n}{q_n}$;
- $|p| = p_1 + \cdots + p_n$;
- $q \leq p$ *акко* $q_i \leq p_i$ *за све* $i = 1, ..., n$;
- $\partial^p = \partial_1^{p_1} \cdots \partial_n^{p_n} = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_n^{p_n}}$.

Пропозиција 4.19. *Нека* $\varphi, \psi \in C^{|p|}(U)$, *где је* U *околина неке тачке* $x \in \mathbb{R}^n$ *(*$p \in \mathbb{N}^n$*). Онда важи*

$$\partial^p(\varphi\psi) = \sum_{q\leq p} \binom{p}{q} \partial^q \varphi \cdot \partial^{p-q} \psi \tag{4.3.2}$$

у тачки x.

Доказ. Индукцијом по реду $|p|$ мулти-индекса p.
За $|p| = 0$ формула се своди на $\varphi\psi = \varphi\psi$, а за $|p| = 1$ добијамо обично Лајбницово правило $\partial_j(\varphi\psi) = \partial_j\varphi \cdot \psi + \partial_j\psi \cdot \varphi$ које користимо у индукцијском кораку.

Претпоставимо сада да (4.3.2) важи за све $p \in \mathbb{N}^n$ такве да је $|p| = m$, и нека је $s = (s_1, ..., s_n)$ мултииндекс реда $m + 1$. Пошто је $|s| \geq 1$, нека од компоненти s_k мора бити ≥ 1, и без губитка општости претпоставимо да је то s_1. Нека је $p = (p_1, ..., p_n)$ мултииндекс такав да је $p_1 = s_1 - 1$ и $p_j = s_j$ за $2 \leq j \leq n$. Онда је $|p| = m$ и $\partial^s = \partial_1\partial^p$. Према индуктивној претпоставци и бази индукције имамо

$$\partial^s(\varphi\psi) = \partial_1 \sum_{q \leq p} \binom{p}{q} \partial^q\varphi \cdot \partial^{p-q}\psi$$

$$= \sum_{q \leq p} \binom{p}{q} \partial_1\partial^q\varphi \cdot \partial^{p-q}\psi + \sum_{q \leq p} \binom{p}{q} \partial^q\varphi \cdot \partial_1\partial^{p-q}\psi$$

$$= \sum \binom{s_2}{q_2} \cdots \binom{s_n}{q_n} \left(\binom{s_1 - 1}{q_1 - 1} + \binom{s_1 - 1}{q_1} \right) \partial^q\varphi \cdot \partial^{s-q}\psi$$

$$= \sum_{q \leq s} \binom{s}{q} \partial^q\varphi \cdot \partial^{s-q}\psi.$$

Притом смо у прелазу из 2. у 3. једнакост користили смену бројача. □

Сада можемо да окарактеришемо простор $\mathcal{E}'$.

Пропозиција 4.20. *Дистрибуција T припада простору $\mathcal{E}'(\Omega)$ акко је $SuppT$ компактан у Ω.*

Доказ. ($\Rightarrow$) Претпоставимо да $SuppT$ није компактан. Изаберимо низ $(K_k)_{k \in \mathbb{N}}$ растућих ($K_k \subseteq K_{k+1}$) компактних подскупова Ω са особином да је сваки компактан $L \subseteq \Omega$ садржан у неком K_k. Онда $SuppT$ сече сваки $(K_k)^c$, па за свако $k \in \mathbb{N}$ постоји $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ такво да је $\langle T, \varphi_k \rangle = 1$ и $supp\varphi_k \subseteq (K_k)^c$. Али онда низ φ_k конвергира ка нули у $\mathcal{E}(\Omega)$ јер за сваки $K \subseteq \Omega$ компактан имамо $\varphi_k \restriction_K = 0$ под условом да је $supp\varphi_k \subseteq (K_k)^c$. Ово је у контрадикцији са непрекидношћу T.
($\Leftarrow$) Нека је $SuppT$ компактан у Ω. Дефинисаћемо $S \in \mathcal{E}(\Omega)$ које се на $\mathcal{D}(\Omega)$ поклапа са T. Нека је $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ таква да је $\chi = 1$ у околини $SuppT$ (последица 2.35). За $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ имамо $\chi\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, и дефинишимо

$$\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle.$$

Очигледно је S линеарна функционела на $\mathcal{E}(\Omega)$. Докажимо да се поклапа са T на $\mathcal{D}(\Omega)$. Заиста, ако $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, онда је $\varphi = \chi\varphi + (1 - \chi)\varphi$ и $supp(1 - \chi)\varphi \cap K = \emptyset$. Зато је $\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$.

Остаје још проверити непрекидност S. Нека је (φ_k) низ елемената из $\mathcal{E}(\Omega)$ који тежи ка нули у $\mathcal{E}(\Omega)$. Онда је $supp\chi\varphi_k \subseteq supp\chi$ за свако k и низ $\chi\varphi_k$ тежи ка нули у $\mathcal{D}(\Omega)$ јер је по претходној пропозицији $\partial^p(\chi\varphi_k)$ линеарна комбинација чланова $\partial^q\chi \cdot \partial^r\varphi_k$, $q \leq p$, $r \leq p$. Пошто је T непрекидно на $\mathcal{D}(\Omega)$, израз $\langle S, \varphi_k \rangle = \langle T\chi\varphi_k \rangle$ тежи ка нули у $\mathbb{K}$. □

Завршавамо ово поглавље резултатом који нам омогућава да неко локално својство дистрибуција проширимо на цео скуп Ω. Као и други резултати овог типа, доказ користи партицију јединице (Деф. 2.33). Доказ се може наћи у [3], стр. 322, пропозиција 4.

Пропозиција 4.21. *Нека је $(\Omega_i)_{i\in I}$ отворен покривач Ω. Претпоставимо да је на сваком Ω_i дефинисана дистрибуција T_i таква да кад год је $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$ онда је $T_i = T_j$ на $\Omega_i \cap \Omega_j$. Тада постоји дистрибуција T на Ω таква да је $T_{\Omega_i} = T_i$ за све $i \in I$.*

Напомена. Може се чак показати и јединственост дистрибуције T из пропозиције 4.21.

4.4. Извод дистрибуције

Већина операција са дистрибуцијама уводи се на следећи начин: уколико је f функција која дефинише регуларну дистрибуцију T_f, потражимо најприроднији начин да дотичну операцију дефинишемо за T_f, а затим добијено прогласимо за дефиницију у општем случају. Ни извод дистрибуције неће бити изузетак од овог правила.

Врло брзо ћемо видети да дистрибуције имају изводе свих редова, што показује њихов значај за решавање парцијалних диференцијалних једначина.

Нека је f непрекидно диференцијабилна функција на $\mathbb{R}^n$ и $T = T_f$ регуларна дистрибуција њој асоцирана. Онда је разумно очекивати да је дистрибуција

$$\partial_j T_f \text{ асоцирана са } \partial_j f,\ j \in \{1, ..., n\}. \qquad (\diamond)$$

Ако $\varphi \in \mathcal{D}$, онда парцијалном интеграцијом у односу на x_j уз примедбу да се φ анулира ван компактног скупа добијамо

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f(x) \cdot \varphi(x) dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \partial_j \varphi(x) dx.$$

Ако је захтев $(\diamond)$ испуњен, онда претходну једначину можемо записати као

$$\langle \partial_j T, \varphi \rangle = -\langle T, \partial_j \varphi \rangle.$$

Пратећи описани алгоритам увођења операција са дистрибуцијама сада дајемо општу дефиницију.

Дефиниција 4.22. *Нека $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. За сваки мултииндекс $p \in \mathbb{N}^n$ дефинишемо линеарно пресликавање $\partial^p : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ са:*

$$\langle \partial^p T, \varphi \rangle = (-1)^{|p|} \langle T, \partial^p \varphi \rangle,\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Тада се $T^{|p|} = \partial^p T$ назива парцијални извод реда p од T.

Напомена. Истим симболом ∂^p означавамо извод на простору дистрибуција и на простору тест функција.

Да би показали да је Дефиниција 4.22 добра, односно да је извод дистрибуције поново дистрибуција морамо да покажемо да је линеарно пресликавање $\partial^p : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ непрекидно. Према теорији тополошко векторских простора, довољно је показати да је пресликавање $\partial^p : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ непрекидно, што добијамо индуктивно из следеће пропозиције.

Пропозиција 4.23. *За сваки индекс* $j \in \{1,...,n\}$ *пресликавање* $\varphi \mapsto \partial_j\varphi$, $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ *је непрекидно.*

Доказ. Користимо Пропозицију 2.30. Нека је $K \subseteq \Omega$ и V околина 0 у $\mathcal{D}(\Omega)$. Онда постоји $\epsilon > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ тако да $V \cap \mathcal{D}(K)$ садржи скуп

$$\{\varphi : \ |\partial^p \varphi(x)| \leq \epsilon, \ |p| \leq k\}.$$

Заиста, управо скупови наведеног облика чине фундаментални систем околина нуле у $\mathcal{D}(K)$.
Но, онда је скуп

$$U = \{\varphi : \ |\partial^p \varphi(x)| \leq \epsilon, \ |p| \leq k+1\}$$

околина нуле у $\mathcal{D}(K)$ и $\varphi \in U \Rightarrow \partial_j\varphi \in V$. □

Последица 4.24. *За сваки мултииндекс* $p \in \mathbb{N}$ *пресликавање* $\varphi \mapsto \partial^p\varphi$, $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ *је непрекидно.*

Поновимо још једном већ најављено: на основу ове дефиниције свака дистрибуција има изводе било ког реда. Због тога су дистрибуције веома важне за решавање парцијалних диференцијалних једначина.

Ако $f \in \mathcal{E}^{(|p|)}(\Omega)$ и $g = \partial^p f$, онда применом парцијалне интеграције $|p|$ пута да је $\partial^p T_f = T_g$.

Приметимо још да је $\partial_i\partial_j T = \partial_j\partial_i T$ за $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $1 \leq i, j \leq n$ с обзиром да аналогна формула важи за тест функције.

Такође, $Supp(\partial^p T) \subseteq Supp T$ за све мултииндексе $p \in \mathbb{N}^n$.

Пример 4.25. *Означимо са* H *Хевисајдову функцију на* $\mathbb{R}$ *дефинисану са*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Дистрибуција H *није непрекидна функција али јесте локално интеграбилна, тако да* H *дефинише регуларну дистрибуцију*

$$\langle H, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi(x)dx$$

на $\mathbb{R}$. *Нађимо њен извод. Према Дефиницији 4.22 биће:*

$$\langle \partial H, \varphi \rangle = -\langle H, \partial\varphi \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = -\varphi(x)|_0^\infty = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle, \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Дакле $H' = \partial H = \delta$. *Приметимо да би обичан извод функције* H *био једнак* 0 *за* $x \neq 0$, *док за* $x = 0$ *не би био дефинисан. Сетимо се на овом месту још и Примера 4.2 из поглавља 4.1 ове главе.*

У наставку ознака H *означаваће искључиво Хевисајдову дистрибуцију.*

Пример 4.26. *По Дефиницији 4.22 лако можемо пронаћи сваки извод* $\delta-$*дистрибуције:*

$$\langle \delta^{(p)}, \varphi \rangle = (-1)^{|p|}\varphi^{(p)}(0).$$

У Примеру 4.5 видели смо да свака непрекидна функција f на $\mathbb{R}^n$ дефинише дистрибуцију. Међутим, ово је тачно и ако дозволимо да f има коначно много тачака прекида 1. врсте на $\mathbb{R}^n$. Докажимо ово, узимајући ради једноставности, $n = 1$:

Пример 4.27. *Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ функција непрекидна свуда сем евентуално у коначно много тачака $x_1, ..., x_k$ у којима постоје одговарајући једнострани лимеси који су коначни. Онда је изразом*

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \sum_{i=0}^{k} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi(x)dx, \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

($a_0 = -\infty$, $a_{k+1} = \infty$) дефинисана дистрибуција на $\mathbb{R}$ јер важи

$$\Big|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx\Big| \le \max_x |\varphi(x)| \cdot \int_{-a}^{a} |f(x)|dx,$$

где је $supp\varphi \subseteq [-a, a]$.

Претпоставимо сада да је у сваком интервалу (a_i, a_{i+1}) функција f непрекидно диференцијабилна и да f има у свакој тачки a_i, $i = 1, ..., k$, одговарајући једнострани извод који је коначан.

Онда је дистрибуција f' регуларна (према управо показаном) и, ако означимо скокове функције $f(a_i+) - f(a_i-)$ са s_i, $i = 1, ..., k$, онда имамо

$$\langle \partial T_f, \varphi\rangle = -\langle T_f, \partial\varphi\rangle = -\sum_{i=0}^{k} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x)dx$$

$$= -\sum_{i=0}^{k} f(x)\varphi(x)\Big|_{a_i+}^{a_{i+1}-} + \sum_{i=0}^{k} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{k} s_i\varphi(a_i) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx,$$

па је

$$\partial T_f = T_{f'} + \sum_{i=1}^{k} s_i \delta_{a_i}.$$

Посебно, ако је f непрекидна онда је $\partial T_f = T_{f'}$, као што смо већ констатовали из услова ($\diamond$).

Из претходног примера видимо да δ дистрибуција описује сингуларитете регуларних дистрибуција. Она се јавља у ,,критичним" тачкама локално интеграбилних функција: у тачкама прекида функције (претходни пример) или у тачкама где се губи диференцијабилност функције (Пример 4.2).

4.5. Транслација

У овом поглављу сматрамо да је $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Ако је f функција са доменом $\mathbb{R}^n$ и h вектор у $\mathbb{R}^n$, дефинишемо *транслацију функције* f *за вектор* h као функцију $(\tau_h f)(x) \overset{def}{=} f(x-h)$.

Нека је $f \in C$ и $g = \tau_h f$. Онда имамо (у смислу регуларних дистрибуција)

$$\langle T_g, \varphi\rangle = \int f(x-h)\varphi(x)dx = \int f(x)\varphi(x+h)dx = \langle T_f, \tau_{-h}\varphi\rangle.$$

На основу тога уводимо

Дефиниција 4.28. *Нека* $T \in \mathcal{D}'$. *За вектор* $h \in \mathbb{R}^n$ *дефинишемо дистрибуцију* $\tau_h T$ *са*

$$\langle \tau_h T, \varphi\rangle = \langle T, \tau_{-h}\varphi\rangle,\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Тада се $\tau_h T$ *назива транслација дистрибуције* T *за вектор* h.

Пресликавање τ_h је непрекидно на $\mathcal{D}'$ тј. дефиниција је исправна. Заиста, то следи из чињенице да је $\tau_h : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ изоморфизам ($\max\limits_x |\partial^p \varphi(x)| = \max\limits_x |\partial^p (\tau_h \varphi)(x)|$), а ово према теорији тополошко векторских простора (последица Пропозиције 3 у [3], стр. 256) повлачи да је и $\tau_h : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ изоморфизам.

Пример 4.29. $\tau_h \delta = \delta_h$.

Доказ. Ово следи директном применом дефиниције 4.28:

$$\langle \tau_h \delta, \varphi\rangle = \langle \delta, \tau_{-h}\varphi\rangle = \langle \delta, \varphi(\cdot + h)\rangle = \varphi(h) = \langle \delta_h, \varphi\rangle. \quad \square$$

Искористимо сада уведену дефиницију да бисмо дали нови појам који је веома користан за решавање парцијалних диференцијалних једначина.

Ако је f функција са доменом $\mathbb{R}^n$, онда је очигледно f независна од променљиве x_i акко је $\tau_h f = f$ за све векторе $h \in \mathbb{R}^n$ паралелне са x_i−осом. Сада ово уопштимо у следећој дефиницији.

Дефиниција 4.30. *Дистрибуција* $T \in \mathcal{D}'$ *је независна од променљиве* x_i *акко је* $\tau_h T = T$ *за све векторе* $h \in \mathbb{R}^n$ *паралелне са* x_i*−осом.*

Пропозиција 4.31. *Дистрибуција* $T \in \mathcal{D}'$ *је независна од променљиве* x_i *акко је* $\partial_j T = 0$.

Доказ ове пропозиције захтева неке додатне резултате па га зато изостављамо. За доказ препоручујемо [3], стр. 331.

Наводимо следећу лему ди Боа Рејмонда:

Лема 4.32. *Нека* $f, g \in C$. *Ако је* $\partial_j T_f = T_g$, *онда* ∂f *постоји и* $\partial_j f = g$.

Доказ. Без умањења општости нека је $j = 1$ и дефинишимо

$$h(x) := \int_0^{x_1} g(t, x'')\mathrm{dt},$$

где је $x'' = (x_2, ..., x_n)$. Функција h је непрекидна, $\partial_1 h$ постоји и $\partial_1 h = g$. Лако се проверава $\partial_1 T_h = T_g$, те стога $\partial_1(T_f - T_h) = 0$. Функција $u = f - h$ је непрекидна и $\partial_1 T_u = 0$, па према пропозицији 4.31 имамо $\tau_h T_u = 0$ за све векторе h паралелне са x_1−осом, а онда и $\tau_h u = 0$ за све такве векторе h. Другим речима, u је независна од променљиве x_1, зато је $\partial_1 h = 0$ односно $\partial_1 f = \partial_1 h = g$. $\square$

4.6. Ред дистрибуција

Пример 4.33. *Означимо са* $\mathcal{D}^m(\Omega)$ *скуп свих функција дефинисаних на* Ω *које имају компактан носач и које имају све изводе реда* p, $|p| \leq m$ *који су непрекидни. Аналогно као у Примеру 2.31,* $\mathcal{D}^m(\Omega)$ *је унија простора* $\mathcal{D}^m(K)$, $K \subseteq \Omega$ *компактан. Топологију простора* $\mathcal{D}^m(K)$ *дефинишу исте норме као и за простор* $\mathcal{D}(K)$ *(Пример 2.31). Снабдејмо* $\mathcal{D}^m(\Omega)$ *финалном топологијом за фамилију* $\mathcal{D}^m(K) \hookrightarrow \mathcal{D}^m(\Omega)$, $K \subseteq \Omega$ *компактан. Онда је* $\mathcal{D}^m(\Omega)$ *Хауздорфов простор који на сваком* $\mathcal{D}^m(K)$ *индукује сопствену топологију. Такође, сваки* $\mathcal{D}^m(K)$ *је затворен у* $\mathcal{D}^m(\Omega)$. *Приметимо да је заправо* $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{D}^m(\Omega)$. *Сва утапања*

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{D}^{m+1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}^m(\Omega) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{D}^0(\Omega)$$

су непрекидна.

У претходном низу каноничких инјекција слика сваког простора је густа у следећем простору тог низа. На основу тога и теорије тополошко векторских простора (Последица 2 Пропозиције 3.12.2 у [3])добијамо да је у низу

$$\mathcal{D}'^0(\Omega) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{D}'^m(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'^{m+1}(\Omega) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

свако пресликавање инјективно. Стога можемо сваки простор посматрати као потпростор следећег у низу. Тако ћемо и резоновати, и то даје смисла следећој дефиницији.

Дефиниција 4.34. *Нека* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *Тада кажемо да је* T *реда* m *акко припада* $\mathcal{D}'^m(\Omega)$ *а не припада* $\mathcal{D}'^{m+1}(\Omega)$.

Дистрибуције реда 0 *називају се (Радонове) мере на* Ω.

Значи, $\mathcal{D}'^m(\Omega)$ је простор свих дистрибуција реда $\leq m$ на Ω. Дистрибуција T је коначног реда ако $T \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$ за неко $m \in \mathbb{N}$. Постоје дистрибуције које нису коначног реда (видети пример 4.39).

Пример 4.35. *Простор* $\mathcal{D}'^0(\Omega)$ *свих мера на* Ω *чешће означавамо са* $\mathcal{M}(\Omega)$. *Ако* $\varphi \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ *и* $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, *тада се вредност* $\langle \mu, \varphi \rangle$ *каноничке билинеарне форме (пример 3.4) у тачки* (μ, φ) *назива интеграл функције* φ *у односу на меру* μ *и традиционално означава са*

$$\int_\Omega \varphi(x) \mathrm{d}\mu(x). \tag{4.6.1}$$

Пропозиција 4.36. $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *је реда* $\leq m$ *акко за сваки* $K \subseteq \Omega$ *компактан постоји* $M > 0$ *тако да*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq M \max_{|p| \leq m} \max_x |\partial^p \varphi(x)| \tag{4.6.2}$$

за све $\varphi \in \mathcal{D}(K)$.

Доказ. T је реда највише m акко је непрекидна на $\mathcal{D}(\Omega)$ за грубљу топологију коју на $\mathcal{D}(\Omega)$ индукује $\mathcal{D}^m(\Omega)$. Према Пропозицији 2.21 и дефиницији семинорми на $\mathcal{D}(K)$ (фуснота у примеру 2.31) добијамо да је дистрибуција T реда $\leq m$ акко важи тачно услов наведен у формулацији ове пропозиције. □

Напомена. Приметимо да захтевамо да (4.6.2) важи за све $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Ако је то тако, онда иста неједнакост важи и за све $\varphi \in \mathcal{D}^m(\Omega)$.

Пример 4.37. *Ако $f \in C(\Omega)$, тада је регуларна дистрибуција T_f мера (реда 0), па се још означава и са μ_f или $\mathrm{d}\mu_f$. Заиста, видимо да је услов (4.6.2) већ за $m = 0$ одмах испуњен. Ако је $\Omega = \mathbb{R}^n$ и $f \equiv 1$, онда се та мера назива Лебегова мера и понекад означава са dx у складу са (4.6.1).*

Пример 4.38. *Као што смо већ рекли у Примеру 4.6, делта дистрибуција δ_a је мера (Деф. 4.34). То се лако доказује провером услова 4.6.2. Ако је p мултииндекс реда m, онда је $\partial^p \delta_a$ дистрибуција реда m.*

Пример 4.39. *Линеарна функционела $T = \sum_{n\in\mathbb{N}} \partial^n \delta_n$ дата са*

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{(n)}(n), \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

је дистрибуција на $\mathbb{R}$ али није коначног реда.

Доказ. Нека је $K \subseteq \Omega$ компактан и $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Тада постоји $n \in \mathbb{N}$ такав да је $K \subseteq [-n, n]$. Сада лако видимо да је услов (4.2.2) задовољен за $M = 1$ и $m = n$ па је T дистрибуција на $\mathbb{R}$.

Из истог разматрања следи да T није коначног реда, јер када K пролази свим компактним подскуповима од $\mathbb{R}$, бројеви n пролазе целим скупом $\mathbb{N}$ који није ограничен. □

Жеља нам је да ближе одредимо простор дистрибуција коначног реда. У том циљу снабдевамо простор тест функција новом топологијом.

Пример 4.40. *Већ смо рекли да је $\mathcal{D}(\Omega) = \cap_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}^m(\Omega)$. Означимо са $\mathcal{D}^F(\Omega)$ простор $\mathcal{D}(\Omega)$ снабдевен најгрубљом топологијом у односу на коју су сва пресликавања $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}^m(\Omega)$ непрекидна. Онда је $\mathcal{D}^F(\Omega)$ локално конвексан Хауздорфов простор. Топологија $\mathcal{D}^F(\Omega)$ је грубља од топологије простора $\mathcal{D}(\Omega)$ уведене у Примеру 2.31. Заиста, довољно је показати да је идентичко пресликавање $i : \mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}^F(\Omega)$ непрекидно, али се оно може приказати као композиција непрекидних пресликавања, па закључак одатле одмах следи. Наредна пропозиција сведочи да је та топологија и стриктно грубља од оне уведене у Примеру 2.31.*

Пропозиција 4.41. *(Пропозиција 2, стр. 339 у [3]) Дуал $\mathcal{D}'^F(\Omega)$ се састоји од свих дистрибуција коначног реда.*

Као и у већини тврђења везаних за дистрибуције доказ ове пропозиције се директно ослања на теорију дуалности локално конвексних простора па га не наводимо.

Важи и следећа:

Пропозиција 4.42. *Дуал $\mathcal{E}'^m(\Omega)$ се састоји од свих дистрибуција реда m које имају компактан носач.*

Последица 4.43. *Свака дистрибуција која има компактан носач је коначног реда.*

За крај овог поглавља навешћемо пар теорема о репрезентацији дистрибуција.

Теорема 4.44. *Ако $T \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$, онда постоји коначна фамилија мера $(\mu_p)_{|p|\le m}$ таквих да је $T = \sum_{|p|\le m} \partial^p \mu_p$.*

Да бисмо исказали и прецизнији резултат, требаће нам помоћна пропозиција.

Пропозиција 4.45. *Нека је $m < \infty$. Ако $T \in \mathcal{E}'^m(\Omega)$ и $\varphi \in \mathcal{E}^m(\Omega)$ је такво да је $\partial^p(x) = 0$ за све $x \in SuppT$ и $|p| \le m$, онда је $\langle T, \varphi\rangle = 0$.*

Сада можемо да докажемо наредну теорему.

Теорема 4.46. *Ако је $SuppT = \{0\}$, $T \in \mathcal{D}(\Omega)$, онда се T може изразити као коначна линеарна комбинација Диракове мере и њених извода.*

Доказ. Према последици 4.43 имамо $T \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$ за неко $m \in \mathbb{N}$. Тејлоров развој даје

$$\varphi(x) = \sum_{|p|\le m} \frac{\partial^p \varphi(0)}{p!} x^p + \alpha(x),$$

где $\alpha \in \mathcal{E}$ и $\partial^p \psi(0) = 0$ за $|p| \le m$. Али, претходна Пропозиција имплицира да је $\langle T, \psi\rangle = 0$ и зато

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{|p|\le m} \frac{1}{p!} \langle T, x^p\rangle \partial^p \varphi(0) = \sum_{|p|\le m} \frac{(-1)^{|p|}}{p!} \langle T, x^p\rangle \langle \partial^p \delta, \varphi\rangle$$

односно $T = \sum_{|p|\le m} \frac{(-1)^{|p|}}{p!} \langle T, x^p\rangle \partial^p \delta$ и то је тражено представљање. □

Помоћна Пропозиција 4.45 није нам само била битна за доказ теореме о репрезентацији, већ се испоставља да она сама има неке важне последице.

Пропозиција 4.47. *Нека је $m < \infty$. Ако $T \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$ и $\varphi \in \mathcal{D}^m(\Omega)$ задовољава $\partial^p \varphi(x) = 0$ за све $x \in SuppT$ и све $|p| \le m$, онда је $\langle T, \varphi\rangle = 0$.*

Доказ. Идеја је да се уведе α такво да $\alpha T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, па да се примени пропозиција 4.45 на дистрибуцију αT. И заиста, довољно је изабрати $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ које је једнако 1 на $supp\varphi$ (2.35). Тада је $\langle \alpha T, \varphi\rangle = \langle T, \alpha\varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$ па због $Supp(\alpha T) \subseteq SuppT$ следи $\partial^p \varphi(x) = 0$ за $x \in Supp(\alpha T)$ и $|p| \le m$. □

Пропозиција 4.48. *Нека $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ако $\alpha \in \mathcal{E}^m(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$ и $\partial^p \alpha(x) = 0$ за $x \in SuppT$ и $|p| \le m$, онда је $\alpha T = 0$.*

Напомена. У доказу ове пропозиције користи се партиција јединице (Деф. 2.33), видети [3], пропозиција 8, стр. 363.

4.7. Интеграбилност

Интеграбилних дистрибуција има веома ,,мало”. Само су неке мере интеграбилне, и то не све.

Овде ћемо заправо да се бавимо питањем за које дистрибуције T је израз $\langle T, \mathbf{1}\rangle$ добро дефинисан. Ако је $T = T_f$, онда је $\langle T_f, \mathbf{1}\rangle = \int_\Omega f(x)dx$, па ћемо у складу с тим и за произвољну дистрибуцију T израз $\langle T, \mathbf{1}\rangle$ означавати са $\int_\Omega T$ и звати *интеграл дистрибуције* T.

Пример 4.49. *Нека је $C_0(\Omega)$ простор непрекидних функција f на Ω које имају следећу особину: за свако $\epsilon > 0$ постоји $K \subseteq \Omega$ компактан такав да је $|f| < \epsilon$ на $\Omega \cap K^c$. Кажемо да се $f \in C_0(\Omega)$ „губи на граници од Ω". Тада је $C_0(\Omega)$ Банахов простор у односу на норму $\|f\| := \max\limits_{x\in\Omega} f(x)$.*

Подсетимо се, $\mathcal{M}(\Omega) = \mathcal{D}'^0(\Omega)$ (поглавље 4.6). Означимо дуал $C_0'(\Omega)$ са $\mathcal{M}^1(\Omega)$. Пошто је пресликавање $\mathcal{D}^0(\Omega) \hookrightarrow C_0(\Omega)$ непрекидно и слика $\mathcal{D}^0(\Omega)$ је густа у $C(\Omega)$, према теорији тополошко векторских простора (Последица 2, стр. 256 у [3]) добијамо да је пресликавање $\mathcal{M}^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega)$ инјективно, тј. свака дистрибуција из $\mathcal{M}^1(\Omega)$ може се посматрати као мера. Прецизније, мера $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ припада $\mathcal{M}^1(\Omega)$ акко постоји $M \geq 0$ такав да $|\langle \mu, \varphi \rangle| \leq M \max\limits_x |\varphi(x)|$ за све $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Ако ово важи, онда је инфимум свих M за које важи претходна неједнакост *норма* $\|\mu\|$ од μ у Банаховом простору $\mathcal{M}^1(\Omega)$.

Пример 4.50. *Очигледно је $\|\delta_a\| = 1$.*

Доказ. Јасно је да неједнакост $|\langle \delta_a, \varphi \rangle| = |\varphi(a)| \leq M \max\limits_x |\varphi(x)|$ важи за $M = 1$ ма како бирали $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, и да не мора да важи за $M < 1$ и погодно изабрано $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Теорема 4.51. *Нека је μ мера. Онда $\mu \in \mathcal{M}^1(\Omega)$ акко је израз $\langle \mu, \mathbf{1} \rangle = \int_\Omega \mathrm{d}\mu(\mathrm{x})$ дефинисан и коначан.*

Због ове теореме чији доказ превазилази границе овог рада, мере из $\mathcal{M}^1(\Omega)$ називамо *интеграбилним*. Користи се и термин из физике: *мере коначне тоталне масе*.

Пример 4.52. *Као уопштење простора $C_0(\Omega)$ уводимо просторе $\mathcal{B}_0^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ради се о просторима функција које се губе на граници Ω (Пример 4.49) и које имају непрекидних p извода, $|p| \leq m$. Ови простори су локално конвексни, снабдевени топологијом индукованом фамилијом семинорми $(q_p)_{|p|\leq m}$, $q_p(f) = \max\limits_{x\in\Omega} |f(x)|$.*

И у овом поглављу имамо теорему о репрезентацији:

Теорема 4.53. *Нека је $m < \infty$. Ако су $(\mu_p)_{|p|\leq m}$ мере из $\mathcal{M}^1(\Omega)$, онда је*

$$\varphi \mapsto \sum_{|p|\leq m} (-1)^{|p|} \langle \mu_p, \partial^p \varphi \rangle$$

непрекидна линеарна функционела на $\mathcal{B}_0^m(\Omega)$, и обратно, свака непрекидна линеарна функционела на $\mathcal{B}_0^m(\Omega)$ је тог облика, за неке мере μ_p из $\mathcal{M}^1(\Omega)$.

Доказ. ($\Rightarrow$) Нека је $\epsilon > 0$ дато. Тражимо околину V тачке 0 у $\mathcal{B}_0^m(\Omega)$ такву да $\varphi \in V$ имплицира $|\sum_{|p|\leq m} (-1)^{|p|} \langle \mu_p, \partial^p \varphi \rangle| \leq \epsilon$. Нека је N број оних мултииндекса p таквих да је $|p| \leq m$ и $M = \max\limits_{|p|\leq m} \|\mu_p\|$. Ставимо $V = \{\varphi : |\partial^p \varphi(x)| \leq \frac{\epsilon}{N \cdot M},\ x \in \Omega,\ |p| \leq m\}$. Тада је V околина нуле у $\mathcal{B}_0^m(\Omega)$, и ако $\varphi \in V$ онда

$$|\sum_{|p|\leq m} (-1)^{|p|} \langle \mu_p, \partial^p \varphi \rangle| \leq \sum_{|p|\leq m} |\langle \mu_p, \partial^p \varphi \rangle| \leq \sum_{|p|\leq m} \|\mu_p\| \cdot \frac{\epsilon}{N \cdot M} \leq \epsilon.$$

Смер ($\Leftarrow$) не доказујемо, јер овај смер тврди егзистенцију извесне репрезентације која следи из оштије теореме о репрезентацији у тополошко векторским просторима. У доказу овог смера користи се такође и Хан-Банахова теорема. $\square$

Последица 4.54. *Непрекидне линеарне функционеле на $\mathcal{B}_0^m(\Omega)$ су пресликавања облика*

$$\varphi \mapsto \sum_{|p|\le m} (-1)^{|p|}\langle \mu_p, \partial^p\varphi\rangle,$$

где је m неки природан број а (μ_p) фамилија интеграбилних мера $(\mu_p \in \mathcal{M}^1(\Omega))$.

Дефиниција 4.55. *Дистрибуције облика*

$$\sum_{|p|\le m} (-1)^{|p|}\langle \partial^p \mu_p\rangle$$

где $\mu_p \in \mathcal{M}^1(\Omega)$ се називају интеграбилне.

Према претходној последици свака линеарна и непрекидна функционела на $B_0(\Omega)$ је интеграбилна дистрибуција , и свака интеграбилна дистрибуција је линеарна и непрекидна функционела на $\mathcal{B}_0(\Omega)$.

Слика пресликавања $C_0(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$ је густа јер је већ слика $\mathcal{D}(\Omega)$ густа у $C(\Omega)$. На основу теорије тополошко векторских простора (Последица 2, стр. 256 у [3]) пресликавање $C'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{M}^1(\Omega)$ је инјективно. Посебно, свака мера која има компактан носач је интеграбилна.

4.8. Множење

Множење дистрибуција је веома важан појам у нашој теорији за који се испоставља да је посебно значајан за примене. Многи проблеми из физике, рецимо из квантне теорије поља, имају чврсту везу са множењем елемената из $\mathcal{D}'$.

Нажалост, као што ћемо ускоро видети, множење дистрибуција је *нерегуларна* операција. То значи да она није дефинисана над целим $\mathcal{D}'(\Omega)$[1]. Са мање или више успеха дефинисано је множење дистрибуција над неким подскупом од $\mathcal{D}'(\Omega)$. То је главни разлог ограничене примене дистрибуција у нелинеарним проблемима. У наставку разматрамо множење дистрибуција глатком функцијом.

Напоменимо да се множење дистрибуција као нерегуларна операција може дефинисати помоћу Фуријеове транформације, користећи везу између конволуције и множења (Теорема 4.101). То је приступ Хермандера и захтева принцип локализације којим се ми не бавимо у овом раду, па га зато изостављамо. Детаљи се могу наћи у [4], поглавље 11.7.

Приступајући дефинисању операције множења, жеља нам је да очувамо што више операција стандарног множења. Испоставља се да је највећи проблем са тим особина асоцијативности. Овај проблем је успешно решио математичар Коломбо дефинисањем једне алгебре уопштених функција која се може

[1] Као пандан овом појму, операције дефинисане над целим простором $\mathcal{D}'(\Omega)$ називаћемо *регуларним*; извод дистрибуције је рецимо регуларна операција

успешно користити за решавање нелинеарних парцијалних диференцијалних једначина (видети [11]).

Нека $f \in C(\Omega)$ и $\alpha \in \mathcal{E}(\Omega)$. Тада функција αf припада $C(\Omega)$ и имамо:

$$\langle \alpha f, \varphi \rangle = \int_\Omega \alpha(x) f(x) \varphi(x) dx = \langle T_f, \alpha\varphi \rangle.$$

То нас доводи до следеће:

Дефиниција 4.56. *Нека $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ако $\alpha \in \mathcal{E}^m(\Omega)$ и $T \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$, онда производ функције α и дистрибуције T дефинишемо као*

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle$$

за $\varphi \in \mathcal{D}^m(\Omega)$.

Дефинишемо такође и дистрибуцију $T\alpha$. Ставимо једноставно $T\alpha = \alpha T$.

Очигледно је да је αT добро дефинисана линеарна функционела на $\mathcal{D}^m(\Omega)$, с обзиром да $\alpha\varphi \in \mathcal{D}^m(\Omega)$. Да би доказали да је та функционела и непрекидна доказаћемо следећу пропозицију.

Пропозиција 4.57. *Нека $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и $\alpha \in \mathcal{E}^m(\Omega)$. Пресликавање $\varphi \mapsto \alpha\varphi$, $\mathcal{D}^m(\Omega) \to \mathcal{D}^m(\Omega)$ је непрекидно.*

Доказ. Нека је V околина нуле у $\mathcal{D}^m(\Omega)$ и $K \subseteq \Omega$ компактан. Тада $V \cap \mathcal{D}^m(K)$ садржи скуп $\{\varphi : |\partial^p \varphi(x)| \leq \epsilon, |p| \leq k\}$ за неке $\epsilon > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ ($k = m$ ако је $m < \infty$). Према Лајбницовој формули (4.3.2) извод $\partial^p(\alpha\varphi)$ је линеарна комбинација израза облика $\partial^q \alpha \cdot \partial^{p-q}\varphi$. Пошто су функције $\partial^q \alpha$ за $|q| \leq k$ ограничене на K, постоји $\eta > 0$ тако да ако $\psi \in \{\varphi : |\partial^p \varphi(x)| \leq \eta, |p| \leq k\}$ онда $\alpha\varphi \in V$. Тиме је доказана тражена непрекидност (користимо Пропозицију 2.30). □

Последица 4.58. *Пресликавање αT је непрекидно.*

Доказ. Заиста, пресликавање $\varphi \mapsto \langle T, \alpha\varphi \rangle$ је композиција пресликавања $\varphi \mapsto \alpha\varphi$ и $\psi \mapsto \langle T, \alpha\psi \rangle$. □

Пример 4.59. $x\delta = 0$ *јер* $\langle x\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, x\varphi \rangle = (x\varphi)(0) = 0.$

Пример 4.60. *Ако је μ мера на Ω и $\alpha \in C(\Omega)$, онда је $\nu = \alpha\mu$ мера дефинисана са*

$$\int_\Omega \varphi(x) \mathrm{d}\nu(x) = \int_\Omega \varphi(x) \alpha(x) \mathrm{d}\mu(x)$$

за сваку функцију φ непрекидну на Ω. ν се назива мера са густином α у односу на μ.

Пропозиција 4.61.

$$Supp(\alpha T) \subseteq supp\alpha \cap SuppT.$$

Специјално, ако α или T имају компактан носач, онда и αT има компактан носач.

Доказ. Доказаћемо еквивалентну релацију

$$(supp\alpha)^c \cup (SuppT)^c \subseteq Supp(\alpha T)^c.$$

Ако $x \in (SuppT)^c$, онда постоји околина V тачке x таква да $supp\varphi \subseteq V$ повлачи $\langle T, \varphi\rangle = 0$ (Лема 4.13) Али $supp(\alpha\varphi) \subseteq supp\varphi$, па ако је $supp\varphi \subseteq V$ онда је $\langle \alpha T, \varphi\rangle = \langle T, \alpha\varphi\rangle = 0$. Дакле $x \in (Supp\alpha T)^c$.

Ако $x \in (supp\alpha)^c$, онда постоји околина V од x таква да је $\alpha\restriction_V = 0$. Тада је V одговарајућа околина из Леме 4.13, јер ако је $supp\varphi \subseteq V$ за $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ онда је $\alpha\varphi \equiv 0$, па $\langle \alpha T, \varphi\rangle = \langle T, \alpha\varphi\rangle = 0$. Поново следи $x \in Supp(\alpha T)^c$. $\square$

Пропозиција 4.62. *Нека* $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. *Ако* $\alpha \in \mathcal{E}^{m+1}(\Omega)$ *и* $T \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$ *онда*

$$\partial_j(\alpha T) = \partial\alpha \cdot T + \alpha \cdot \partial_j T$$

за све $1 \le j \le n$.

Доказ. Користећи Дефиниције 4.22, 4.56 и формулу (4.3.2), за $\varphi \in \mathcal{D}^m(\Omega)$ добијамо

$$\begin{aligned}\langle \partial_j(\alpha T, \varphi)\rangle &= -\langle \alpha T, \partial_j\varphi\rangle = -\langle T, \alpha\partial_j\varphi\rangle\\ &= -\langle T, \partial_j(\alpha\varphi) - \varphi\partial_j\alpha\rangle = \langle \partial_j T, \alpha\varphi\rangle + \langle \partial_j\alpha \cdot T, \varphi\rangle\\ &= \langle \alpha \cdot \partial T + \partial_j\alpha \cdot T, \varphi\rangle. \ \square\end{aligned}$$

Наредна последица се доказује потпуно исто као Пропозиција 4.19, па је зато доказ изостављен.

Последица 4.63. *Нека* $p \in \mathbb{N}^n$. *Ако* $\alpha \in \mathcal{E}^{m+|p|}(\Omega)$ *и* $T \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$ *онда*

$$\partial^p(\alpha T) = \sum_{q \le p} \binom{p}{q} \partial^q\alpha \cdot \partial^{p-q} T.$$

Множење уведено у Деф. 4.56 задовољава и лепе особине асоцијативности и дистрибутивности. Прецизније:

Пропозиција 4.64. *Нека* $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. *Ако* $\alpha, \beta \in \mathcal{E}^m(\Omega)$ *а* $S, T \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$, *онда*

$$(\alpha + \beta)T = \alpha T + \beta T, \ \alpha(S + T) = \alpha S + \alpha T,$$

$$(\alpha\beta)T = \alpha(\beta T).$$

Доказ. Све особине следе по дефиницији и из чињенице да одговарајући идентитети важе за тест функције. Илустрације ради, докажимо другу формулу:

$$\begin{aligned}\langle \alpha(S + T)\varphi\rangle &= \langle S + T, \alpha\varphi\rangle = \langle S, \alpha\varphi\rangle + \langle T, \alpha\varphi\rangle\\ &= \langle \alpha S, \varphi\rangle + \langle \alpha T, \varphi\rangle = \langle \alpha S + \alpha T, \varphi\rangle. \ \square\end{aligned}$$

Дефиниција 4.56 може се проширити и на производ k дистрибуција $T_1, ..., T_k$ реда $\le m$, али под условом да највише једна од њих не припада простору $\mathcal{E}^m(\Omega)$.

Једноставно ставимо индуктивно $T_1 T_2 \cdots T_k = T_1(T_2 \cdots T_k)$. У том производу није битан поредак фактора (подсетимо се $\alpha T = T\alpha$), и имамо опште правило асоцијативности:

$$\prod_{i=1}^{k} T_i = (\prod_{i=1}^{l} T_i) \cdot (\prod_{i=l+1}^{k} T_i)$$

за $1 \leq l < k$.

Напоменимо да уколико дозволимо да две од дистрибуција $T_1, ..., T_k$ нису из простора $\mathcal{E}^m(\Omega)$, тада множење није добро дефинисано и, како се испоставља, проблем је управо асоцијативност. Одмах наводимо чувени Шварцов пример:

Пример 4.65. *Важи:*

$$(\delta x) vp.\frac{1}{x} = 0 \cdot vp.\frac{1}{x} = 0.$$

Међутим, $x \cdot vp.\frac{1}{x} = \mathbf{1}$. *Заиста,*

$$\langle x \cdot vp.\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \langle \mathbf{1}, \varphi\rangle, \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

па ако другачије распоредимо заграде добићемо

$$\delta(x vp.\frac{1}{x}) = \delta \cdot 1 = \delta,$$

па не важи асоцијативност.

4.9. Тензорски производ дистрибуција

Нека су $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ отворени скупови. За функције $f \in C(\Omega_1), g \in C(\Omega_2)$ дефинишимо њихов *тензорски производ* $f \otimes g \in C(\Omega_1 \times \Omega_2)$ са

$$f \otimes g(x,y) := f(x)g(y), \ (x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2. \tag{4.9.1}$$

Посматрајмо $f \otimes g$ као регуларну дистрибуцију која делује на тест функцију $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. То дејство је дато са:

$$\langle f \otimes g, \Phi\rangle = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x)g(y)\Phi(x,y) \mathrm{d(x,y)} = \int_{\Omega_2} g(y) \Big(\int_{\Omega_1} f(x)\Phi(x,y) dx \Big) dy. \tag{4.9.2}$$

Посебно, ако је $\Phi = \varphi \otimes \psi$ односно $\Phi(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$, тада

$$\langle f \otimes g, \varphi \otimes \psi\rangle = \langle f, \varphi\rangle\langle g, \psi\rangle \tag{4.9.3}$$

Сада када смо дали одговарајућу мотивацију, проширујемо тензорски производ на опште дистрибуције. Испоставља се да нам је подесан облик (4.9.3).

Дефиниција 4.66. *Нека* $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1), S \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. *Јединствена дистрибуција* $R \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ *која задовољава*

$$\langle R, \varphi \otimes \psi\rangle = \langle S, \varphi\rangle\langle T, \psi\rangle$$

за све $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1), \psi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ *се назива тензорски производ дистрибуција* S *и* T *и означава се са* $S \otimes T$.

Доказ егзистенције и јединствености овакве дистрибуције је предмет посебних разматрања и додатних теоретских финеса (видети [3], стр. 370-372). Испоставља се да се и рачун (4.9.2) преноси на произвољне дистрибуције:

Пропозиција 4.67. *Ако* $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1), T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, *онда за свако* $\chi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ *имамо*

$$\begin{aligned}\langle S \otimes T, \chi \rangle &= \int_{\Omega_1} S(x)\Big(\int_{\Omega_2} T(y)\chi(x,y)dy\Big)dx \\ &= \int_{\Omega_2} T(y)\Big(\int_{\Omega_1} S(x)\chi(x,y)dx\Big)dy.\end{aligned}$$

Напомена. У претходној формули смо уместо $\langle S, \varphi \rangle$ писали $\int_{\Omega_1} S(x)\varphi(x)dx$, па смо тако функцију $y \mapsto \langle S, \chi(\cdot,y) \rangle$ означили са $\int_{\Omega_1} S(x)\chi(x,\cdot)dx$. Ово је тзв. Шварцова нотација и врло је корисна, јер има предност показивања променљиве по којој радимо. Напоменимо да неки аутори не користе ову нотацију, већ променљиву наводе у угластим заградама, одмах после знака дистрибуције. Дакле, тада је $\langle S(x)\chi(\cdot,y) \rangle = \int_{\Omega_1} S(x)\chi(x,\cdot)dx$.

Наведимо два примера који ће нам касније требати.

Пример 4.68. *Нека* $f \in C(\Omega_1)$, $g \in C(\Omega_2)$. *Нађимо* $T_f \otimes T_g$. *Важи:*

$$\langle T_f \otimes T_g, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle T_f, \varphi \rangle \langle T_g, \psi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx \int g(y)\psi(y)dy$$

$$\int f(x)g(y)\varphi(x)\psi(y)\mathrm{dxdy}.$$

У складу са Дефиницијом 4.9.1 следи да је $T_f \otimes T_g = T_{f\otimes g}$.

Пример 4.69. *Означимо са* δ_x *Диракову меру (у нули) на* $\mathbb{R}^n$, *а са* δ_y *Диракову меру на* $\mathbb{R}^m$. *Онда*

$$\langle \delta_x \otimes \delta_y, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle \delta_x, \varphi \rangle \langle \delta_y, \psi \rangle = \varphi(0)\psi(0),$$

тј. $\delta_x \otimes \delta_y$ *је Диракова мера у нули на* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Од особина тензорског производа наводимо само оне најосновније.

Пропозиција 4.70. *Ако* $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1), T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ *тада:*

$$SuppS \otimes T = SuppS \times SuppT.$$

Доказ. Нека $(x,y) \notin SuppS \times SuppT$. Без умањења општости нека $x \notin SuppS$. Пошто је $(SuppS)^c$ отворен постоји околина U тачке x која не сече $SuppS$. Ако је χ тест функција са носачем у $U \times \Omega_2$, онда је за свако $y \in \Omega_2$ функција $\chi(\cdot,y)$ са носачем у U, па према пропозицији 4.67 имамо

$$\langle S \otimes T, \chi \rangle = \int_{\Omega_2} T(y)\Big(\int_{\Omega_1} S(x)\chi(x,y)dx\Big)dy = 0.$$

Пошто је $U \times \Omega_2$ околина нуле од (x,y) следи $(x,y) \notin SuppS \otimes T$.

Ако $(x,y) \in SuppS \times SuppT$, онда за сваку околину U тачке x постоји тест функција φ са носачем у U тако да је $\langle S, \varphi \rangle \neq 0$, и за сваку околину V тачке y постоји тест функција ψ са носачем у V тако да је $\langle T, \psi \rangle \neq 0$. Али тада је $\langle S \otimes T, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle S\varphi \rangle \langle T, \psi \rangle \neq 0$ и $\varphi \otimes \psi$ има носач садржан у $U \times V$, што је произвољно мала околина тачке (x,y). Следи да $(x,y) \in SuppS \otimes T$. $\square$

Пропозиција 4.71. *Ако* $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1), T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ *и* $p \in \mathbb{N}^n, q \in \mathbb{N}^m$, *онда је*

$$\partial^{(p,q)}(S \otimes T) = \partial_x^p S \otimes \partial_y^q T,$$

где је $\partial^{(p,q)} = \frac{\partial^{|p+q|}}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_n^{p_n} \partial y_1^{q_1} \cdots \partial y_m^{q_m}}$.

Доказ. Имамо низ једнакости за тест функције φ и ψ из простора $\mathcal{D}(\Omega_1)$ и $\mathcal{D}(\Omega_2)$:

$$\begin{aligned}\langle \partial^{(p,q)}(S \otimes T), \varphi \otimes \psi \rangle &= (-1)^{|p+q|} \langle S \otimes T, \partial^{(p,q)(\varphi \otimes \psi)} \rangle \\ &= (-1)^{|p+q|} \langle S \otimes T, \partial_x^p \varphi \otimes \partial_y^q \psi \rangle \\ &= (-1)^{|p|} \langle S, \partial_x^p \varphi \rangle \cdot (-1)^{|q|} \langle T, \partial_y^q \psi \rangle \\ &= \langle \partial_x^p S, \varphi \rangle \langle \partial_y^q T, \psi \rangle = \langle \partial_x^p S \otimes \partial_y^q T, \varphi \otimes \psi \rangle.\end{aligned}$$

Пошто је простор $\mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2)$ густ у $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ (ово усвајамо без доказа), следи тврђење пропозиције. □

Пропозиција 4.72. *Ако* $\alpha \in \mathcal{E}(\Omega_1), S \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ *и* $\beta \in \mathcal{E}(\Omega_2), T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ *тада*

$$(\alpha \otimes \beta)(S \otimes T) = (\alpha S) \otimes (\beta T).$$

Доказ. Имамо низ једнакости

$$\langle (\alpha \otimes \beta)(S \otimes T), \varphi \otimes \psi \rangle = \langle S \otimes T, (\alpha \otimes \beta)(\varphi \otimes \psi) \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \langle S \otimes T, (\alpha\varphi) \otimes (\beta\psi) \rangle = \langle S, \alpha\varphi \rangle \langle T, \beta\psi \rangle \\ &= \langle \alpha S, \varphi \rangle \langle \beta T, \psi \rangle = \langle (\alpha S) \otimes (\beta T), \varphi \otimes \psi \rangle,\end{aligned}$$

за тест функције одговарајућих простора. Из густине $\mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2)$ у $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ поново налазимо тражено. □

Свакако да се Дефиниција 4.66 може уопштити на $s > 2$ дистрибуција, што ћемо користити у наредном поглављу. Важи следећа теорема.

Теорема 4.73. *За датих* $s \geq 2$ *дистрибуција* $T_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$, $i \leq s$, $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^n$ *отворени, постоји јединствена дистрибуција*

$$R \in \mathcal{D}'(\prod_{i=1}^{s} \Omega_i)$$

која задовољава

$$\langle R, \otimes_{i=1}^s \varphi_i \rangle = \prod_{i=1}^{s} \langle T_i, \varphi_i \rangle$$

за све $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$.

Дистрибуцију R *зваћемо тензорски производ дистрибуција* T_i, $i \leq s$ *и означавати је са* $\otimes_{i=1}^s T_i$.

Претходна теорема је доказана у [3] на страни 376.

Савршено је јасно да и за производ више од две дистрибуције важе аналогони Пропозиција 4.70-4.72.

4.10. Конволуција

Нека су $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ непрекидне функције такве да бар једна има компактан носач, рецимо g. Тада је *конвулуција* функција f и g нова функција, означавамо је са $h=f*g$, коју дефинишемо са $(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy$, $x\in\mathbb{R}^n$. Нађимо како би требала бити дефинисана одговарајућа регуларна дистрибуција T_h:

$$\langle T_h,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy\Big)\varphi(x)dx.$$

Применом Фубинијеве теореме и уз смену промењливих налазимо

$$\langle T_h,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(y)\varphi(x+y)dxdy.$$

Ако се сетимо Дефиниције 4.9.1 видимо да има смисла навести наредну дефиницију.

Дефиниција 4.74. *Нека $S,T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. За $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ означимо са $\varphi^\triangle$ функцију из $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n})$ дефинисану са $(x,y)\mapsto\varphi(x+y)$. Тада је конволуција дистрибуција S и T дефинисана са*

$$\langle S*T,\varphi\rangle=\langle S\otimes T,\varphi^\triangle\rangle.$$

Пропозиција 4.75. *Дефиниција је исправна, тј. пресликавање $\varphi\mapsto\langle S\otimes T,\varphi^\triangle\rangle$ је непрекидно и линеарно на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказ. С обзиром да $S\otimes T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^{2n})$ довољно је показати да је линеарно пресликавање $\varphi\mapsto\varphi^\triangle$ непрекидно из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ у $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n})$. Даље, користећи Пропозицију 2.30 показујемо непрекидност $\varphi\mapsto\varphi^\triangle$ из $\mathcal{D}(K)$ у $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n})$.

Нека је V околина нуле у $\mathcal{E}$. Можемо претпоставити да је V облика

$$\{\psi:\ |\partial^r\psi(z)|\le\epsilon,\ r\in\mathbb{N}^{2n},|r|\le m,\ z\in M\},$$

где је $M\subseteq\mathbb{R}^{2n}$ компактан и $m\in\mathbb{N}$. Онда је

$$U=\{\varphi:\ |\partial^p\varphi(x)|\le\epsilon,\ |p|\le 2m\}$$

околина нуле у $\mathcal{D}(K)$ и $\varphi\in U$ имплицира $\varphi^\triangle\in V$ јер је $\partial_x^p\partial_y^q\varphi^\triangle(x,y)=(\partial^{p+q}\varphi)(x+y)$. $\square$

Ако се присетимо пропозиције 4.67 добијамо важну једначину

$$\langle S*T,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}S(x)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}T(y)\varphi(x+y)dy\Big)dx=\int_{\mathbb{R}^n}T(y)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}S(x)\varphi(x+y)dx\Big)dy.\tag{4.10.1}$$

Приметимо да уведена дефиниција покрива само дистрибуције које имају компактан носач. Тешкоћа у дефинисању конволуције произвољних дистрибуција састоји се у томе што за $\varphi\in\mathcal{D}\setminus\{0\}$ функција $\varphi^\triangle$ нема компактан носач. Да бисмо дефинисали конволуцију на прави начин не смемо дозволити да обе дистрибуције ,,расту произвољно брзо у бесконачности”. То значи да ако једну бирамо потпуно произвољно друга мора имати компактан носач и обрнуто. Спроведимо ову конструкцију.

Све почива на чињеници да можемо дефинисати $\langle T,\varphi\rangle$, $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ чак и у случају да само $\varphi\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ ако је скуп $C = SuppT\cap supp\varphi$ компактан. Заиста, према последици 2.35 постоји $\chi\in\mathcal{D}$ која је једнака 1 на околини C. Ставимо онда

$$\langle T,\varphi\rangle = \langle T,\chi\varphi\rangle \tag{$\clubsuit$}$$

Пошто $\chi\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ израз на десној страни једнакости је дефинисан. Ако T или φ имају компактан носач, онда можемо бирати χ која је једнака 1 на околини $SuppT$ или $supp\varphi$ па једнакост ($\clubsuit$) има уобичајено значење.

Нека су даље A и B два затворена подскупа $\mathbb{R}^n$ и означимо са $A^\triangle = \{(x,y): x+y\in A\}\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. У тврђењима која следе ћемо користити следећи услов:

($\triangle$) За сваки $K\subseteq\mathbb{R}^n$ компактан скуп $(A\times B)\cap K^\triangle$ је компактан у $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

Дефиниција 4.76. *Нека су $S,T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ такве да $A = SuppS$ и $B = SuppT$ задовољавају услов ($\triangle$). Тада дефинишемо $S*T$ са*

$$\langle S*T,\varphi\rangle = \langle S\otimes T,\varphi^\triangle\rangle,\quad \varphi\in\mathcal{D}.$$

Пропозиција 4.77. *Дефиниција је исправна, тј. пресликавање $\varphi\mapsto\langle S\otimes T,\varphi^\triangle\rangle$ је линеарна и непрекидна функционела.*

Доказ. Ако је $K\subseteq\mathbb{R}^n$ компактан, према услову ($\triangle$) и скуп $K_0 = (A\times B)\cap K\subseteq\mathbb{R}^{2n}$ је компактан. Изаберемо $\alpha\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ која је једнака 1 на околини K_0. С обзиром на проширену дефиницију ($\clubsuit$) доказујемо, према Пропозицији 2.30, да је $\varphi\mapsto\langle S\otimes T,\alpha\varphi^\triangle\rangle$ непрекидно на $\mathcal{D}(K)$.

Већ знамо да је пресликавање $\varphi\mapsto\varphi^\triangle$, $\mathcal{D}(K)\to\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ непрекидно (Пропозиција 4.75), а исто важи и за пресликавање $\varphi^\triangle\mapsto\alpha\varphi^\triangle$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n})\to\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$. Пошто $S\otimes T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ доказ је готов. □

Дајемо сада неке основне особине конволуције.

Пропозиција 4.78. *Нека $S,T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и њихови носачи задовољавају услов ($\triangle$). Тада је*

$$Supp(S*T)\subseteq SuppS+SuppT.$$

Доказ. Нека $x\notin SuppS+SuppT$. Скуп $SuppS+SuppT$ је затворен[2], па постоји околина V тачке x која не сече $SuppS+SuppT$. Нека је φ тест функција са носачем у тој околини. То значи да $supp\varphi^\triangle$ не сече $SuppS\times SuppT = SuppS\otimes T$ (Пропозиција 4.70). Стога $\langle S*T,\varphi\rangle = \langle S\otimes T,\varphi^\triangle\rangle = 0$ па $x\notin(SuppS*T)$. □

Последица 4.79. *Ако $S,T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ имају компактне носаче, и $S*T$ има компактан носач.*

Пропозиција 4.80. *Нека $S,T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и њихови носачи задовољавају услов ($\triangle$). Онда је*

$$S*T = T*S.$$

[2]Збир два затворена скупа у општем случају није затворен. Али, ако ти скупови задовољавају услов ($\triangle$) то ипак јесте тако (видети [3], стр. 385).

Доказ. Ако је $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ са носачем K, нека је $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ једнака 1 на околини компактног скупа $(A\times B)\cap K^{\Delta}$ (овакво α постоји на основу Последице 2.35). Онда је према Пропозицији 4.67 и Дефиницији 4.76 испуњено

$$\langle S*T,\varphi\rangle = \langle S\otimes T,\alpha\varphi^{\Delta}\rangle$$

$$= \int S(x)\Big(\int T(y)\alpha(x,y)\varphi(x+y)dy\Big)dx$$

$$= \int T(y)\Big(\int S(x)\alpha(x,y)\varphi(x+y)dx\Big)dy = \langle T\otimes S,\alpha\varphi^{\Delta}\rangle = \langle T*S,\varphi\rangle. \ \square$$

Пропозиција 4.81. *За свако $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ важи $\delta * T = T*\delta = T$.*

Доказ. Према (4.10.1) за свако $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имамо

$$\langle T*\delta,\varphi\rangle = \int T(x)\Big(\int \delta(y)\varphi(x+y)dy\Big)dx = \int T(x)\varphi(x)dx = \langle T,\varphi\rangle.$$

Из (4.10.1) добијамо и $\delta * T = T$. $\square$

Пропозиција 4.82. *Нека $S,T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и њихови носачи задовољавају услов (Δ). Онда за свако $j \le n$ имамо*

$$\partial_j(S*T) = \partial_j S*T = S*\partial_j T.$$

Доказ. *Пошто је $Supp(\partial_j S) \subseteq SuppS$ једнакости на десној страни су добро дефинисане. Сада за погодно одабрану функцију χ имамо*

$$\langle \partial_j(S*T),\varphi\rangle = -\langle S*T,\partial_j\varphi\rangle$$

$$= -\int S(x)\chi(x)\Big(\int T(y)\partial_j\varphi(x+y)dy\Big)dx$$

$$= \int S(x)\chi(x)\Big(\int \partial_j T(y)\varphi(x+y)dy\Big)dx = \langle S*\partial T,\varphi\rangle.$$

Слично се изводи и друга једнакост, а иста следи и из Пропозиције 4.80.

Пропозиција 4.83. *Нека $S,T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и њихови носачи задовољавају услов (Δ). Онда за сваки вектор $h \in \mathbb{R}^n$ имамо*

$$\tau_h(S*T) = \tau_h S*T = S*\tau_h T.$$

Доказ. Спроводимо рачун сличан оном из доказа претходне Пропозиције 4.82. Имамо у виду и дефиницију транслације. Важи:

$$\langle \tau_h(S*T),\varphi\rangle = \langle S*T,\tau_{-h}\varphi\rangle$$

$$= \int S(x)\Big(\int T(y)\varphi(x+y+h)dy\Big)dx$$

$$= \int S(x)\Big(\int \tau_h T(y)\varphi(x+y)dy\Big)dx = \langle S*\tau_h T,\varphi\rangle \ \square$$

Напоменимо да се конволуција може исправно дефинисати и за више од две дистрибуције. Ако имамо s дистрибуција $T_1,\dots,T_s$ на $\mathbb{R}^n$ са $A_i = SuppT_i$, онда уопштавањем услова (Δ) добијамо услов

(Δ_s) за сваки $K \subseteq \mathbb{R}^n$ компактан скуп $(\prod_{i=1}^{n} A_i) \cap K^{\Delta}$ је компактан у $\mathbb{R}^{ns}$;

Овде је $K^{\Delta} = \{(x_1, ..., x_s) : x_i \in \mathbb{R}^n \ i \ x_1 + \cdots x_s \in K\}$.
Сада конволуцију $\star_{i=1}^{s} T_i = T_1 * \cdots * T_s$ дефинишемо са

$$\langle \star_{i=1}^{s} T_i, \varphi \rangle = \langle \otimes_{i=1}^{s} T_i, \varphi^{\Delta} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \tag{4.10.2}$$

где је $\varphi^{\Delta} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{ns})$ функција $\varphi^{\Delta}(x_1, ..., x_s) = \varphi(x_1 + \cdots + x_s)$.

Тек сада када смо увели конволуцију за $n > 2$ можемо испитивати и асоцијативност конволуције. Важи следећа пропозиција чији се доказ изводи по истом принципу као доказ Пропозиције 4.80.

Пропозиција 4.84. *Нека су $R, S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ дистрибуције чији носачи задовољавају услов (Δ_3). Тада важи*

$$(R * S) * T = R * (S * T) = R * S * T.$$

Доказ се може видети у [3], стр. 390.

Међутим, ако имамо дистрибуције R, S, T чији носачи не задовољавају услов (Δ_3), изрази $(R*S)*T$ и $R*(S*T)$ могу оба бити дефинисани и различити: На пример ако посматрамо дистрибуције на $\mathbb{R}$ видимо да је (Пример 4.25)

$$(\mathbf{1} * \partial\delta) * H = \partial\mathbf{1} * H = 0 * H = 0,$$

али

$$\mathbf{1} * (\partial\delta * H) = \mathbf{1} * \partial(\delta * H) = \mathbf{1} = \partial H = \mathbf{1} * \delta = \mathbf{1},$$

и очито је $0 \neq \mathbf{1}$.

Завршавамо са односом тензорског производа и конволуције.

Пропозиција 4.85. *([3], стр. 399) Нека су $Q, R \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^k)$ чији носачи задовољавају услов (Δ), и $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^l)$ чији носачи задовољавају услов (Δ). Онда су $Q \otimes S$ и $R \otimes T$ дистрибуције из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{k+l})$ чији носачи задовољавају услов (Δ), и имамо везу*

$$(Q * R) \otimes (S * T) = (Q \otimes S) * (R \otimes T).$$

4.11. Фуријеова трансформација

За потребе овог поглавља означићемо са X и Ξ две истоветне копије простора $\mathbb{R}^n$, а са $x = (x_1, ..., x_n) \in X$ и $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \Xi$ њихове елементе. Можемо сматрати да X и Ξ чине дуални систем у односу на билинеарну функционелу $(x, \xi) \mapsto \langle x, \xi \rangle = x\xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$.

Фуријеова трансформација функција дефинише се у разним курсевима анализе. Подсетимо се како се она дефинише за неко $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Дефиниција 4.86. *Несвојствени интеграл*

$$\int_A f(x) e^{-2\pi \imath x\xi} dx,$$

ако постоји, назива се Фуријеова трансформација функције $f : A \to \mathbb{R}$ и означава се са $\hat{f}$ или $\mathcal{F}f$.

Уводимо сада простор у којем се $\mathcal{F}$ најприродније понаша.

Пример 4.87. *Означимо са $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (или $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}^n)$) векторски простор глатких функција на $\mathbb{R}^n$ које имају следећу особину:*

за све $k \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}^n$, и $\epsilon > 0$ постоји $R > 0$ тако да је

$$|(1+|x|^2)^k \partial^p f(x)| \le \epsilon, \quad |x| > R. \tag{4.11.1}$$

Кажемо да f заједно са свим својим изводима брзо опада у бесконачности, а $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ називамо простор брзоопадајућих функција. Простор $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ постаје локално конвексан уколико га снабдемо фамилијом семинорми $(q_{k,p})$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^n$, које су дефинисане са

$$q_{k,p}(f) = \max_{x\in\mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^k \partial^p f(x)|.$$

Напоменимо да је $\mathcal{S} = \cap_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{S}_k$, где са $\mathcal{S}_k$ означавамо простор глатких функција на $\mathbb{R}^n$ које задовољавају услов (4.11.1) за фиксно $k \in \mathbb{Z}$. Фамилија истих семинорми $(q_{k,p})_{p\in\mathbb{N}^n}$ (k фиксно!) чини да $\mathcal{S}_k$ постане локално конвексан простор.

За функције $f \in \mathcal{S}(X)$ важи да $\hat{f}$ постоји, припада $\mathcal{S}(\Xi)$ ([3], стр. 408-409), и важи да је $\mathcal{F} : \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(\Xi)$ изоморфизам простора. Последњу, важну чињеницу ћемо доказати у засебној теореми.

Означимо са $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ дуал простора $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Пропозиција 4.88. *Простор $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ се може идентификовати са простором дистрибуција облика $(1+|x|^2)^k \sum \partial^p \mu_p$, где $k \in \mathbb{N}$ и (μ_p) је коначна фамилија мера из $\mathcal{M}^1$.*

Дистрибуције из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ називају се *темпериране* (*споро растуће*) дистрибуције.

Напоменимо да се $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ може посматрати као потпростор од $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, и притом је $\mathcal{S}$ густ у $\mathcal{S}'$. Заиста, ако $f \in \mathcal{S}$ онда $T_f \in \mathcal{M}^1 \subseteq \mathcal{S}'$ што видимо из

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| = |\int f(x)\varphi(x)dx| \le \max_x |\varphi(x)| \int |f(x)| dx$$

на основу Пропозиције 4.88. Даље, $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S}'$ доказује се као у Пропозицији 4.10.

Сада желимо да дефинишемо $\mathcal{F}$ на простору $\mathcal{S}'(X)$, или, еквивалентно, да проширимо $\mathcal{F}$ са $\mathcal{S}(X)$ на $\mathcal{S}'(X)$. Да бисмо мотивисали општу дефиницију посматрајмо случај регуларних дистрибуција, и приметимо да је за $f \in \mathcal{S}(X)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\Xi)$ испуњено $\langle \mathcal{F} f, \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}\varphi\rangle$ јер су обе стране једнаке са

$$\int_X \int_\Xi f(x)\varphi(x) e^{-2\pi\imath x\xi} \mathrm{d}\xi dx.$$

Стога уводимо наредну дефиницију.

Дефиниција 4.89. *Фуријеова трансформација*[3] *$\mathcal{F}T$ или $\hat{T}$ дистрибуције $T \in \mathcal{S}'(X)$ дефинише се са*

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\Xi).$$

[3] Каже се и $\mathcal{F}$–трансформација.

Из претходно описане мотивације видимо да се уведена операција поклапа на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ са уобичајеним $\mathcal{F}$. Пошто је $\mathcal{F} : \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(\Xi)$ непрекидно, следи да је и $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(X) \to \mathcal{S}'(\Xi)$ непрекидно, па како је $\mathcal{S}$ густ у $\mathcal{S}'$ на основу теорије локално конвексних простора следи да је Дефиницијом 4.89 дата јединствена екстензија $\mathcal{F}$ са $\mathcal{S}$ на $\mathcal{S}'$ (Пропозиција 5 у [3], стр. 129).

Пример 4.90. *Важи* $\mathcal{F}(\delta) = \mathbf{1}$. *Заиста, за свако* $\varphi \in \mathcal{S}(\Xi)$ *имамо*

$$\langle \mathcal{F}(\delta), \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}\varphi \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\Xi} \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi = \langle \mathbf{1}, \varphi \rangle.$$

У наставку ће нам требати и наредна пропозиција чији се доказ може видети у [3], стр. 413.

Пропозиција 4.91. *Ако* $T_i \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $i \le s$, *онда*

$$\otimes_{i=1}^{s} T_i \in \mathcal{S}'(\prod_{i=1}^{s} \mathbb{R}^n)$$

и

$$\mathcal{F}(\otimes_{i=1}^{s} T_i) = \otimes_{i=1}^{s} \mathcal{F}(T_i).$$

Пример 4.92. $\mathcal{F}(e^{-\pi|x|^2}) = e^{-\pi|\xi|^2}$, *односно функција* $x \mapsto e^{-\pi|x|^2}$ *је фиксна тачка Фуријеове трансформације. Исто рецимо важи и за функцију* $x \mapsto e^{-\frac{|x|^2}{4}}$. *Резултати овог типа се најчешће доказују методама комплексне анализе интеграцијом по контури. Поступак тог типа се може наћи у [4], Пример 11.1. Овде приказујемо други начин за налажење Фуријеове трансформације који је описан у [13], одељак 1.2.*

С обзиром на пропозицију 4.91 и чињеницу да је за $x = (x_1, ..., x_n) \in X = \mathbb{R}^n$ *испуњено* $e^{-\pi|x|^2} = \prod_{i=1}^{n} e^{-\pi x_i^2}$ *довољно је размотрити случај* $n = 1$. *Ставимо* $\varphi_a(x) = e^{-\pi x^2/a}$, $x \in \mathbb{R}$. *Онда је*

$$\varphi'(x) = -2\pi x a^{-1} \varphi_a(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

па је

$$\frac{d}{d\xi} \varphi_a\hat{\ }(\xi) = (-2\pi\imath x \varphi_a(x))\hat{\ }(\xi)$$

$$= (\imath a \frac{d}{dx} \varphi_a(x))\hat{\ }(\xi)$$

$$= \imath a \cdot (2\pi\imath\xi) \widehat{\varphi}_a(\xi) = -2\pi a \xi \widehat{\varphi}_a(\xi).$$

Опште решење диференцијалне једначине

$$\frac{d}{d\xi} \widehat{\varphi}_a(\xi) = -2\pi a \xi \widehat{\varphi}_a(\xi)$$

је $\widehat{\varphi}_a(\xi) = C e^{-\pi a \xi^2}$. *Константа* C *је дата са* $C = \widehat{\varphi}_a(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2/a} dx = \sqrt{a}$ *(последњи интеграл се рачуна сменом у интегралу* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, *што је добро познати интеграл из теорије вероватноће). Према томе*

$$\mathcal{F}(e^{-\pi x^2/a})(\xi) = \sqrt{a} e^{-\pi a \xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

одакле специјално за $a = 1$ *добијамо* $\mathcal{F}(e^{-\pi x^2}) = e^{-\pi\xi^2}$.

Напоменимо да смо у приказаном рачуну користили замену редоследа диференцирања и интеграљења („улазак извода под интеграл”). Таква размена у овом случају јесте дозвољена зато јер је функција φ_a *брзоопадајућа за свако* $a > 0$, *то јест* $\varphi_a \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *за свако* $a > 0$. *Теореме које то тврде могу се видети у [13], Теорема 1.1 и Теорема 1.2.*

Наводимо сада веома важну пропозицију, која открива због чега је $\mathcal{F}-$трансформација значајна за примену у решавању парцијалних диференцијалних једначина.

Пропозиција 4.93. *Нека је* $T \in \mathcal{S}'(X)$, $p \in \mathbb{N}^n$ *мултииндекс и* h *вектор из* $\mathbb{R}^n$. *Тада:*
(a) $\mathcal{F}(D^p T) = \xi^p \mathcal{F}(T)$;
(b) $\mathcal{F}((-x)^p T) = D^p \mathcal{F}(T)$;
(c) $\mathcal{F}(\tau_h T) = e^{-2\pi\imath h\xi} \mathcal{F}(T)$;
(d) $\mathcal{F}(e^{2\pi\imath hx} T) = \tau_h \mathcal{F}(T)$.

Доказ. (a) За $\varphi \in \mathcal{S}(\Xi)$ имамо $\langle \mathcal{F}(D^p T), \varphi\rangle = \langle D^p T, \mathcal{F}\varphi\rangle = (-1)^p \langle T, D^p \mathcal{F}\varphi\rangle$. Следи да је довољно показати

$$D^p \mathcal{F}\varphi = (-1)^{|p|} \mathcal{F}(\xi^p \varphi).$$

Ово пак следи диференцирањем под знаком интеграла $|p|$ пута.
(b) Како је $\langle \mathcal{F}((-x)^p T), \varphi\rangle = \langle T, (-x)^p \mathcal{F}\varphi\rangle$, видимо да је довољно показати

$$(-x)^p \mathcal{F}(\varphi) = (-1)^{|p|} \mathcal{F}(D^p \varphi).$$

Међутим, ово добијамо парцијалном интеграцијом $|p|$ пута.
(c) Како је $\langle \mathcal{F}(\tau_h T), \varphi\rangle = \langle T, \tau_{-h} \mathcal{F}(\varphi)\rangle$, довољно је показати

$$\tau_{-h} \mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}(e^{-2\pi\imath h\xi} \varphi).$$

Али, с обзиром на дефиницију Фуријеове трансформације ово следи обичном сменом у интегралу.
(d) Слично као (c). $\square$

Пропозиција 4.94. *За* $h \in \mathbb{R}^n$ *имамо* $\mathcal{F}(e^{2\pi\imath hx}) = \tau_h \delta = \delta_h$.

Доказ. На основу дела (d) пропозиције 4.93 довољно је доказати $\mathcal{F}(\mathbf{1}) = \delta$. Међутим, $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{\mathbf{x_1}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{x_n}$ и $\delta = \delta_{x_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{x_n}$, па према Пропозицији 4.91 следи да је довољно размотрити случај $n = 1$.

Означимо $\mathcal{F}(\mathbf{1}) = T$. На основу претходне пропозиције имамо $\xi T = \mathcal{F}(D\mathbf{1}) = 0$. Онда је $T = \lambda\delta$ за неко $\lambda = const$. Докажимо да је $\lambda = 1$. Приметимо да је

$$\langle \mathcal{F}(1), \varphi\rangle = \lambda\langle \delta, \varphi\rangle = \langle 1, \mathcal{F}\varphi\rangle$$

за свако $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Изаберемо ли $\varphi = e^{-\pi\xi^2}$ према примеру 4.92 тачно добијамо

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1. \ \square$$

Да бисмо исказали најважнију теорему овог дела упоредо са Фуријеовом трансформацијом морамо посматрати и инверзну Фуријеову трансформацију $\overline{\mathcal{F}}$, која је за брзоопадајуће функције φ дефинисана са

$$\overline{\mathcal{F}}(\varphi)(\xi) = \int_X \varphi(x) e^{2\pi\imath x\xi} dx. \tag{4.11.2}$$

С обзиром да се од $\mathcal{F}$ ова нова трансформација разликује једино у предзнаку ,,–" у експоненту броја e савршено је јасно да је $\overline{\mathcal{F}}$ такође непрекидна и линеарна трансформација из $\mathcal{S}(X)$ у $\mathcal{S}(\Xi)$. Дефинишемо инверзну Фуријеову трансформацију темперираних дистрибуција $T \in \mathcal{S}'(X)$:

$$\langle \overline{\mathcal{F}} T, \varphi \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}} \varphi \rangle.$$

Тада се $\overline{\mathcal{F}}$ рестрикована на $\mathcal{S}(X)$ поклапа са пресликавањем дефинисаним са (4.11.2), и оно је јединствена непрекидна екстензија на $\mathcal{S}'$ тог пресликавања. Све важније формуле наведене за $\mathcal{F}$ важе и за $\overline{\mathcal{F}}$:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{F}}(\delta) &= 1 & \overline{\mathcal{F}}(1) &= \delta \\
\overline{\mathcal{F}}(D^p T) &= (-\xi)^p \overline{\mathcal{F}}(T) & \overline{\mathcal{F}}(x^p T) &= D^p \overline{F}(T) \\
\overline{\mathcal{F}}(\tau_h T) &= e^{2\pi\imath h\xi} \overline{\mathcal{F}}(T) & \overline{\mathcal{F}}(e^{-2\pi\imath hx} T) &= \tau_h \overline{\mathcal{F}}(T) \\
\overline{\mathcal{F}}(e^{-\pi|x|^2}) &= e^{-\pi|\xi|^2} & \overline{\mathcal{F}}(e^{-2\pi\imath hx}) &= \delta_h
\end{aligned}$$

Наводимо и доказујемо поменуту важну теорему:

Теорема 4.95. *Фуријеова трансформација је изоморфизам $\mathcal{S}(X)$ на $\mathcal{S}(\Xi)$ чији је инверз $\overline{\mathcal{F}}$.*
Фуријеова трансформација је изоморфизам $\mathcal{S}'(X)$ на $\mathcal{S}'(\Xi)$ чији је инверз $\overline{\mathcal{F}}$.

Доказ. Већ знамо да је $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ линеарно и непрекидно. Докажимо да је $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi = \varphi$ за $\varphi \in \mathcal{S}$, тј. докажимо да важи

$$\varphi(x) = \int_\Xi \hat{\varphi}(\xi) e^{2\pi\imath x\xi} \mathrm{d}\xi.$$

Заиста, десна страна претходне једнакости је $\langle e^{2\pi\imath h\xi}, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \mathcal{F}(e^{2\pi\imath h\xi}), \varphi \rangle$, што је на основу Пропозиције 4.94 једнако $\langle \delta_h, \varphi \rangle = \varphi(h)$. Слично се доказује $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\psi = \psi$ за $\psi \in \mathcal{S}(\Xi)$. Из претходна два закључка онда следи да је $\mathcal{F}$ сирјективно (на $\psi \in \mathcal{S}(\Xi)$ слика се $\overline{\mathcal{F}}\psi$) и инјективно ($\mathcal{F}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi = 0$). Како је и $\overline{\mathcal{F}}$ линеарно и непрекидно следи да је $\mathcal{F}$ изоморфизам.

Што се тиче другог дела тврђења нека $T \in \mathcal{S}'(X)$ и $S \in \mathcal{S}'(\Xi)$. Тада $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}S = S$ и $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T = T$ следи из управо доказаног:

$$\langle \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

и слично за $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}S = S$. Одатле следи да су $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ бијективна пресликавања, једно другом инверзна. Знамо да су $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ на просторима темперираних дистрибуција непрекидна и линеарна пресликавања, и то је крај другог дела доказа. □

За крај овог поглавља желимо да докажемо важну теорему о томе како Фуријеова трансформација делује на конволуцију две темпериране дистрибуције. Испоставиће се да је резултат тога производ Фуријеових трансформација тих дистрибуција, али та једнакост важи само ако једна од тих дистрибуција припада ужем простору од $\mathcal{S}'$. Прво уводимо одговарајући простор.

Пример 4.96. *Нека је $\mathcal{O}_M$ векторски простор свих глатких функција f на $\mathbb{R}^n$ таквих да је за свако $p \in \mathbb{N}^n$ и све $\varphi \in \mathcal{S}$ функција $\varphi \cdot \partial^p f$ ограничена на $\mathbb{R}^n$. Тада $\mathcal{O}_M$ називамо простором свих глатких функција на $\mathbb{R}^n$ које споро опадају заједно са свим својим изводима. Овај простор такође постаје локално конвексан, и то уз помоћ фамилије семинорми $(q_{\varphi,p})$, $\varphi \in \mathcal{S}$, $p \in \mathbb{N}^n$ које су дате са $q_{\varphi,p}(f) = \sup_x |\varphi(x)\partial^p f(x)|$.*

Пример 4.97. *У Примеру 4.87 увели смо просторе $\mathcal{S}_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тамо смо констатовали да је $\cap_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{S}_k = \mathcal{S}$. У наставку ће нам од значаја бити простор који је једнак унији простора $\mathcal{S}_k$, и тај простор означићемо са $\mathcal{O}_c$,*

$$\mathcal{O}_c = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{S}_k.$$

Може се показати да је $\mathcal{O}_c$ заправо простор глатких функција α за које постоји $k \in \mathbb{Z}$ тако да за све $p \in \mathbb{N}^n$ функција $x \mapsto (1+|x|^2)^k|\partial^p \alpha(x)|$ тежи нули кад $|x| \to \infty$. Према томе, $\mathcal{O}_c \subseteq \mathcal{O}_M$, и ова инклузија је строга[4].

Пропозиција 4.98. *([3], стр. 419) Простор $\mathcal{O}_c'$ може се поистоветити са простором свих дистрибуција T таквих да је за свако $k \in \mathbb{Z}$ дистрибуција $(1+|x|^2)T$ интеграбилна.*

Елементи простора $\mathcal{O}_c'$ су *брзоопадајуће* дистрибуције.

Прецизирајмо сад значење конволуције брзоопадајуће и спорорастуће дистрибуције, у циљу навођења финалне теореме.

Дефиниција 4.99. *Конволуција $S * T$ дистрибуција $S \in \mathcal{O}_c'$ и $T \in \mathcal{S}'$ дата је са*

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S, \check{T} * \varphi \rangle.$$

Овде је $\check{T}$ дистрибуција дефинисана са

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle,$$

где је $\check{\varphi}$ функција $x \mapsto \varphi(-x)$. Нећемо се упуштати у објашњавање добре дефинисаности $S * T$. Ако носачи дистрибуција S и T задовољавају услов (Δ), онда се нова и стара дефиниција $S * T$ поклапају.

Пропозиција 4.100. *([4], стр. 262) Ако $S \in \mathcal{O}_c'(X)$ онда $\hat{S} \in \mathcal{O}_M(X)$.*

Важи наредна теорема (доказ се може видети у [4], стр. 264).

Теорема 4.101. *Фуријеова трансформација $\mathcal{F}$ је изоморфизам простора $\mathcal{O}_c'(X)$ и $\mathcal{O}_M(X)$. Осим тога, за $S \in \mathcal{O}_c'(X)$ и $T \in \mathcal{S}'(X)$ важи*

$$\mathcal{F}(S * T) = \mathcal{F}(S) \cdot \mathcal{F}(T).$$

Инверз изоморфизма $\mathcal{F} : \mathcal{O}_c'(X) \to \mathcal{O}_M(\Xi)$ је, наравно, $\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{O}_M(\Xi) \to \mathcal{O}_c'(X)$.

[4] Функција $x \mapsto e^{\imath\pi|x|^2}$ припада $\mathcal{O}_M$ али не и $\mathcal{O}_c$.

Глава 5

Примене на парцијалне диференцијалне једначине

5.1. Уводни део

Ослањајући се на мултииндексну нотацију уведену у напомени 4.18 уводимо сада додатну терминологију.

Полином степена $\leq m$ *по променљивим* $\xi_1, ..., \xi_n$ је израз облика $P(\xi) = \sum_{|p|\leq m} \alpha_p \xi^p$ где је p n-мултииндекс, $\alpha_p \in \mathbb{K}$ и $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$. Ако је за неко $|p| = m$ испуњено $\alpha_p \neq 0$, кажемо да је тај полином степена m. По правилу поистовећиваћемо полином са одговарајућом полиномном функцијом.

Подсетимо се, за $q = (q_1, ..., q_n) \in \mathbb{N}^n$ извод $\frac{\partial^{|q|}}{\partial \xi_1^{q_1} \cdots \partial \xi_n^{q_n}} P(\xi)$ означаваћемо и са $P^{(q)}(\xi)$. Увешћемо и ознаку $D_j = \frac{1}{2\pi\imath} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j \leq n$, из разлога који постају јасни у поглављу у Фуријеовој трансформацији. Тада је, јасно, D^q ознака за $D_1^{q_1} \cdots D_n^{q_n}$. Ако сада у полиному $P(\xi)$ степена m заменимо сваки ξ_j са D_j добијамо *парцијални диференцијални оператор* $P(D)$ *степена* m *са константним коефицијентима.*

Могуће је сваки оператор $P(D)$ идентификовати са дистрибуцијом $P(D)\delta$, сматрајући дејство извода у оператору $P(D)$ за дејство конволуције: $P(D)\cdot = P(D)\delta * \cdot$. Да је овакво поистовећивање исправно види се из Пропозиција 4.81 и 4.82. Заиста, на основу те две пропозиције видимо да се свака парцијална диференцијална једначина са константним коефицијентима облика

$$\sum_{|p|\leq m} c_p \partial^p f = g$$

може свести на једначину конволуције

$$(\sum_{|p|\leq m} c_p \partial^p \delta) * f = g.$$

Дистрибуција E таква да је $P(D)E = \delta$ назива се *фундаментално (или елементарно) решење оператора* $P(D)$. Та дистрибуција је веома важна, јер се сва остала решења могу изразити преко ње.
Наиме, ако је познато E, онда једначина $P(D)S = T$ ($Supp T$ компактан) има за

једно решење $E * T$. То опет следи из Пропозиција 4.81 и 4.82:

$$P(D)(E * T) = (P(D)E) * T = \delta * T = T.$$

Сва остала решења су онда облика $E * T + H$, где је H произвољно решење хомогене једначине $P(D)H = 0$.

Од самог почетка развоја теорије дистрибуција једно од главних питања је било: *да ли сваки парцијални диференцијални оператор са константим коефицијентима има фундаментално решење?* Овај проблем је решен релативно брзо, већ 1953. године, када су Еренпрајз[1] и Малгранж[2] независно један од другог доказали да је одговор потврдан (погледати на пример [12], поглавље 3.1).
Ми ћемо пример налажења фундаменталног решења дати у наредном поглављу.

5.2. Њутнов потенцијал

Нека је $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Конволуција V_n,

$$V_n = \frac{1}{|x|^{n-2}} * f \text{ za } n \geq 3, \text{ i } V_2 = \frac{1}{|x|} * f, \tag{5.2.1}$$

ако постоји, за $n \geq 3$ се назива Њутнов потенцијал са густином f, а за $n = 2$ се назива логаритамски потенцијал. Ово је уопштење класичне дефиниције потенцијала где се претпоставља да је $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Покажимо да потенцијал (5.2.1) помножен са одговарајућом константом задовољава једначину Поасона:

$$\Delta u = f, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}. \tag{5.2.2}$$

Приметимо да је за $f = 0$ ово добро позната Лапласова једначина.
С обзиром да је δ неутрални елемент за конволуцију, довољно је показати да је

$$\frac{\Gamma(n/2)}{(2-n)2\pi^{n/2}}\ \Delta\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right) = \delta(x), \quad n \geq 3, \tag{5.2.3}$$

где је Γ гама функција (1.5.1). Користимо ознаке из поглавља 1.5.
Ставимо да је $|x| = r$, и подсетимо се (1.5.3) да је $|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{n-2}}{\Gamma(n/2)}$. Како је r^{-n+2} локално интеграбилна функција, важи да је

$$\langle \Delta \frac{1}{r^{n-2}}, \phi \rangle = \langle \frac{1}{r^{n-2}}, \Delta\phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta\phi}{r^{n-2}} dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{r \geq \epsilon} \frac{\Delta\phi}{r^{n-2}}. \tag{5.2.4}$$

Применимо Гринов идентитет

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}\omega, \tag{5.2.5}$$

[1]Leon Ehrenpreis (1930-2010), амерички математичар
[2]Bernard Malgrange (1928-), француски математичар

где $\frac{\partial}{\partial n}$ представља извод у правцу спољашње нормале на границу $\partial\Omega$ површи Ω. За Ω узимамо простор између сфера $r=\epsilon$ и $r=R$, где је R одабрано тако да буде $supp\phi \subseteq S_R(0)$. Добијамо:

$$\int_{r\geq\epsilon}\frac{\phi}{r^{n-2}}dx=\int_{r\geq\epsilon}\phi\Delta(\frac{1}{r^{n-2}})dx+\int_{\partial S_\epsilon(0)}\phi\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r^{n-2}})\epsilon^{n-1}\mathrm{d}\sigma-\int_{\partial S_\epsilon(0)}\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial\phi}{\partial r}\epsilon^{n-1}\mathrm{d}\sigma, \tag{5.2.6}$$

где $\mathrm{d}\sigma$ означава површински елемент на јединичној сфери S^{n-1}. Први интеграл на десној страни једнакости је 0 јер је $\frac{1}{r^{n-2}}$ хармонијска функција тј. $\Delta(1/r^{n-2})=0$ на $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Рачунајући $\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^{n-2}}$ други интеграл постаје

$$-(n-2)\int_{\partial S_\epsilon(0)}\phi(x)\mathrm{d}\sigma=-(n-2)|S^{n-1}|\cdot\frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{\partial S_\epsilon(0)}\phi(r\sigma)\mathrm{d}\sigma. \tag{5.2.7}$$

Кад $\epsilon\to 0$ овај израз тежи у

$$-(n-2)|S^{n-1}|\cdot\phi(0)=-(n-2)\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\langle\delta,\phi\rangle. \tag{5.2.8}$$

Најзад, трећи интеграл је по апсолутној вредности мајориран изразом облика $\mathrm{const}\cdot\int\mathrm{d}\sigma$, па тежи 0 кад $\epsilon\to 0$.
Добијамо да је

$$\left\langle\frac{\Gamma(n/2)}{(2-n)2\pi^{n/2}}\ \Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right),\phi\right\rangle=\langle\delta,\phi\rangle, \tag{5.2.9}$$

односно

$$\frac{\Gamma(n/2)}{(2-n)2\pi^{n/2}}\ \Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)=\delta, \tag{5.2.10}$$

као што смо и желели.

За $n=2$ спроводећи поступак сличан управо описаном може се показати да је

$$\Delta ln\frac{1}{r}=-2\pi\delta,$$

видети рецимо [8], вежба 31.

5.3. Кошијев проблем

Циљ овог поглавља је да решимо Кошијев проблем

$$\Box u=f,\quad u|_{t=0}=\varphi,\quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi, \tag{5.3.1}$$

где $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ а $\varphi,\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.

Притом је $\Box$ такозвани Даламберов оператор, и тај оператор дефинишемо као $\Box=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_x=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^3\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Јасно је да $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$.

Прво ћемо наћи дистрибутивно решење једноставнијег проблема:

$$\Box G=0\quad G|_{t=0}=0\quad \frac{\partial G}{\partial t}|_{t=0}=\delta. \tag{5.3.2}$$

Касније ће се испоставити да се помоћу решења G овог проблема (то решење звaћемо *Гриновом функцијом за* $\square$) може описати решење полазног проблема (5.3.1).
Означимо са $\overline{G} = \overline{G}(t,x)$ Фуријеову трансформацију функције G по променљивој x. Онда $\overline{G}$ задовољава проблем

$$\frac{\partial^2 \overline{G}}{\partial t^2} + 4\pi^2|\xi|^2\overline{G} = 0, \quad \overline{G}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \overline{G}}{\partial t}|_{t=0} = \hat{\delta} = 1. \tag{5.3.3}$$

Овај проблем лако решавамо методом варијације константи и добијамо да је $\overline{G}(t,\xi) = \frac{\sin(2\pi t|\xi|)}{2\pi|\xi|}$.
Нека $a \in \mathbb{R}^+$ и посматрајмо дистрибуцију на $\mathbb{R}^3$ дефинисану са:

$$\langle \delta(a - |x|), \phi \rangle = \int_{|x|=a} \phi(x) dx.$$

Нађимо њену Фуријеову транформацију: дистрибуција $T = \delta(|x| - a)$ има компактан носач и ротационо је инваријантна[3]. Онда је њена Фуријеова трансформација глатка функција која је такође ротационо инваријантна (ова особина доказана је у [8], вежба 70, а ми тај доказ због техничких детаља изостављамо). Посебно, $\hat{T}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \hat{T}(0,0,|\xi|)$ па можемо писати

$$\hat{T}(\xi) = \langle \delta(|x| - a), e^{-2\imath\pi x\cdot\xi} \rangle = \int_{|x|=a} e^{-2\pi\imath x_3|\xi|} dx.$$

Ако искористимо поларне координате

$$x_1 = a \sin\theta \cos\phi,$$

$$x_2 = a \sin\theta \sin\phi,$$

$$x_3 = a\cos\theta,$$

и $dx = a^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta$ сменом у интегралу добијамо

$$\hat{T}(\xi) = a^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-2\pi\imath a \cos\theta|\xi|} \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{\pi} e^{-2\pi\imath a \cos\theta|\xi|} \sin\theta \mathrm{d}\theta.$$

Уз још једну смену $u = \cos\theta$ последњи интеграл лако решавамо:

$$\hat{T}(\xi) = 2\pi a^2 \int_{-1}^{1} e^{-2\pi\imath u|\xi|} \mathrm{du}$$

$$= 2\pi a^2 \frac{e^{-2\pi\imath a|\xi|} - e^{2\pi\imath a|\xi|}}{-2\pi\imath a|\xi|} = 2a\frac{\sin 2\pi a|\xi|}{|\xi|}.$$

С обзиром да смо израчунали $\overline{G}$ сада имамо

$$\frac{1}{4\pi a}\hat{T}(\xi) = \frac{\sin 2\pi a|\xi|}{2\pi|\xi|} = \overline{G}(a,\xi),$$

[3]Дистрибуција $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ је ротационо инваријантна акко је $T \circ A = T$ за све ортогоналне матрице A димензије n.

па примењујући инверзну Фуријеову транформацију добијамо

$$G(t,x) = \frac{1}{4\pi t}\delta(t-|x|).$$

Сада прелазимо на 2. део овог проблема у којем ћемо искористити пронађено G да решимо проблем (5.3.1).
Прво ћемо решити проблем

$$\Box u_0 = 0, \quad u_0|_{t=0} = 0 \quad \frac{\partial u_0}{\partial t}|_{t=0} = \psi. \tag{5.3.4}$$

Ако ставимо $u_0(t,x) = \psi(x) * G(t,x)$, где је $*$ конволуција по x, имаћемо

$$\Box u_0 = \psi * \Box G = 0, \quad u_0|_{t=0} = \psi * \Box G|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial t}|_{t=0} = \psi * \frac{\partial G}{\partial t}_{t=0} = \psi * \delta = \psi.$$

Ако уместо ψ у (5.3.4) ставимо ϕ, аналогно видимо да ће и тај проблем имати решење. Означимо то решење са v и ставимо $\omega = \partial_t v$. Докажимо да је сада $u_1 = u_0 + \omega$ решење проблема

$$\Box u_1 = 0, \quad u_1|_{t=0} = \varphi, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{t=0} = \psi.$$

Заиста, то лако видимо из

$$\Box\omega = \partial_t \Box v = 0, \quad \omega|_{t=0} = \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = \varphi, \quad \frac{\partial\omega}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(v|_{t=0}) = 0.$$

Најзад, нека је $\tau \in \mathbb{R}^+$ и $v(x,t,\tau)$ решење проблема

$$\Box v = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = f(x\tau).$$

Ставимо $u_2 = \int_0^t v(x,t-\tau,\tau)\mathrm{d}\tau$. Докажимо да је $u_0 + u_1 + u_2$ решење полазног проблема (5.3.1).
Како је $u_2 = \int_0^t v(x,t-\tau,\tau)\mathrm{d}\tau$ следи:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = v(x,0,t) + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t}(x,t-\tau,\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t}(x,t-\tau,\tau)\mathrm{d}\tau$$

јер је $v|_{t=0} = 0$. Такође,

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t}(x,0,t) + \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t-\tau,\tau)\tau$$

и

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x,t-\tau,\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Према томе,

$$\Box u_2 = f(x,t) + \int_0^t \Box v(x,t-\tau,\tau)\mathrm{dt} = f(x,t).$$

Пошто је $u_2|_{t=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{t=0} = 0$, жељено је доказано.

Закључак

У раду смо се бавили теоријом дистрибуција, и приказали смо тополошки приступ овом важном појму. Дали смо и два илустративна примера примене приказане теорије.

Најпре смо увели појам тополошко векторских простора и, специјално, локално конвексних простора и одговарајуће појмове везане за њих. Навели смо теорему која омогућава увођење локално конвексне топологије на векторском простору уз одређени услов. Приказали смо и приступ локално конвексним просторима преко семинорми. Уопштили смо дефиницију ограничених скупова са нормираног на произвољан тополошки простор, с обзиром да нам је тај појам био веома важан у трећој глави. На крају је уведена финална топологија и дефинисана је топологија простора тест функција $\mathcal{D}$.

Након тога смо се концентрисали на увођење топологије којом ћемо снабдети простор дистрибуција $\mathcal{D}'$. За то нам је био потребан појам упарених простора, јер је само у том окружењу могуће увести дефиницију поларног скупа. У наставку је приказано на који начин се управо поларни скупови користе за снабдевање простора $\mathcal{D}'$ одговарајућом топологијом.

Затим дефинишемо дистрибуције и одмах смо дали неколико пропратних тврђења. Дефинисан је носач дистрибуција и окарактерисане су дистрибуције компактног носача. Наставили смо са изводом дистрибуција. Видели смо да свака дистрибуција има извод произвољног реда чиме смо истакли њихов значај у теорији ПДЈ. Даље смо дефинисали транслацију дистрибуција. Дефинисан је ред дистрибуције, и окарактерисали смо дистрибуције коначног реда. Увели смо појам мера (дистрибуције реда 0), и видели смо да су интеграбилне дистрибуције поткласа мера. Изучавали смо множење и конволуцију дистрибуција, и видели смо са којим се проблемима сусрећемо при дефинисању истих. Конволуција је уведена преко тензорског производа, којем је посвећено посебно поглавље. Најзад смо изучавали Фуријеову трансформацију дистрибуција, а највише са циљем њихове примене у ПДЈ. На крају смо дали примену теорије илустроване у четвртој глави у виду решења два проблема из области ПДЈ.

Литература

[1] М. КУРИЛИЋ, *Основи опште топологије*, Едиција ,,Универзитетски уџбеник", Универзитет, 1998.

[2] З. СТОЈАКОВИЋ, И. БОШЊАК, *Елементи линеарне алгебре*, Нови Сад, Symbol, 2010.

[3] J. HORVATH, *Topological vector spaces and distributions*, Addison-Wesley publishing company, 1966.

[4] С. ПИЛИПОВИЋ, Б. СТАНКОВИЋ, *Простори дистрибуција*, Нови Сад: Српска академија наука и уметности, Огранак у Новом Саду, 2000.

[5] С.ПИЛИПОВИЋ, Д. СЕЛЕШИ, *Мера и интеграл, Фундаменти теорије вероватноће*, Београд: Завод за уџбенике, 2012.

[6] F. TREVES, *Topological vector spaces, Distributions and Kernels*, Academic press incorporated, 1967.

[7] J. DUISTERMAAT, J. KOLK, *Distributions theory and applications*, Birkhauser, Basel, 2010.

[8] C. ZUILY, *Problems in Distributions and Partial Differential Equations*, Elsevier, Academic Press, 1988.

[9] R. STRICHARTZ, *A guide to distribution theory and Fourier transforms*, CRC Press Incorporated, 1994.

[10] G. HÖRMANN, R. STEINBAUER, *Lecture notes on the theory of distributions*, Fakultat fur Mathematik, Universitat Wien, Summer Term, 2009.

[11] J.F. COLOMBEAU, *New generalized functions and multiplication of distributions*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984.

[12] L. HÖRMANDER, *Linear Partial Differential Operators*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 131. Springer-Verlag, Berline-Göttingen-Heidelberg, 1963.

[13] Н. ТЕОФАНОВ, *Изабрана поглавља примењене анализе, треће предавање*, Природно-математички факултет, Нови Сад, зимски семестар, 2018.

Биографија

Никола Сарајлија рођен је 19. децембра 1995. године у Новом Саду. Основну школу Јован Дучић је завршио у Петроварадину 2010. године као носилац Вукове дипломе. Исте године је уписао Гимназију Јован Јовановић Змај у Новом Саду, смер Обдарени ученици у математичкој гимназији, коју је завршио 2014. године са одличним успехом као носилац дипломе за математику. Одмах затим је уписао основне академске студије на Природно-математичком факултету у Новом Саду, смер Математика, које је завршио 2017. године са просечном оценом 10. Исте године је уписао мастер академске студије Теоријске Математике на Природно-математичком факултету у Новом Саду. Положио је све испите предвиђене наставним планом и програмом мастер студија у јулском року 2019. године. Школске 2018/2019 године био је носилац стипендије Фонда за младе таленте Републике Србије. Планира да упише докторску школу математике у Србији.

Нови Сад, јул 2019. Никола Сарајлија

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:
РБР

Идентификациони број:
ИБР

Тип документације: Монографска документација
ТД

Тип записа: Текстуални штампани материјал
ТЗ

Врста рада: Мастер рад
ВР

Аутор: Никола Сарајлија
АУ

Ментор: др Ивана Којновић
МН

Наслов рада: Тополошки приступ теорији дистрибуција са применама на неке парцијалне диференцијалне једначине
НР

Језик публикације: српски (ћирилица)
ЈП

Језик извода: с / е
ЈИ

Земља публиковања: Србија
ЗП

Уже географско подручје: Војводина
УГП

Година: 2019
ГО

Издавач: Ауторски репринт
ИЗ

Место и адреса: Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовића 4
МА

Физички опис рада: 5/70/13/0/0/0/0
(број поглавља/страна/лит. цитата/табела/слика/графика/прилога)
ФО

Научна област: Математика
НО

Научна дисциплина: Функционална анализа
НД

Предметна одредница/Кључне речи: тополошко векторски простори, локално конвексни простори, финалне топологије, упаривање простора, топологија униформне конвергенције, дистрибуције, примена на парцијалне диференцијалне једначине
ПО

УДК:

Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
ЧУ

Важна напомена:
ВН

Извод:
ИЗ

У овом мастер раду се бавимо тополошким приступом теорији дистрибуција, једним од два могућа приступа поменутој теорији. У првом поглављу дати су неки основни математички појмови који се појављују у даљем раду. У другом поглављу дата је дефиниција тополошко векторских простора и специјално локално конвексних простора, и наведена је теорема о снабдевању произвољног векторског простора локално конвексном топологијом. Уведен је појам финалне топологије, и представљена топологија простора $\mathcal{D}$ тест функција. У трећем поглављу бавимо се упаривањем простора. Дефинишемо поларни скуп неког подскупа у упареном простору и објашњавамо на који нас начин колекција поларних скупова доводи до дефинисања разних топологија на другом од два упарена простора. У вези са тим наводимо јаку топологију β којом ћемо снабдети простор дистрибуција. Четврто поглавље садржи суштину овог рада. Прво је уведена одговарајућа мотивација за дефинисање дистрибуција, а затим је дата прецизна дефиниција уз пар пропратних тврђења. Даље су дефинисани носач дистрибуције, ред дистрибуције, и разне операције са дистрибуцијама, редом: извод, транслација, интеграбилност, множење, тензорски производ, конволуција, Фуријеова трансформација. Најзад, у последњем, петом поглављу илустрована је примена теорије уведене у четвртој глави. Решена су два практична проблема: нађено је фундаментално решење Лапласовог оператора и решен је један Кошијев проблем за таласну једначину.

Датум прихватања теме од стране НН већа:
ДП 9.5.2019.

Датум одбране:
ДО

Чланови комисије:
КО

Председник:	Академик др Стеван Пилиповић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
Члан:	др Ивана Војновић, доцент, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, ментор
Члан:	др Дора Селеши, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Nikola Sarajlija
AU

Mentor: Ivana Vojnović, Ph.D.
MN

Title: A topological approach to the distribution theory with applications to some partial differential equations
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English/Serbian (cyrillic/latin)
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2019
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 5/70/13/0/0/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Functional Analysis
SD

Subject/Key words: topological vector spaces, locally convex spaces, final topologies, pairings, topology of uniform convergence, distributions, applications to partial differential equations
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB

In this master thesis we deal with a topological approach to the distribution theory, one of two possible approaches to this topic. In the first section we gave some basic mathematical concepts that appear in this thesis. The second section deals with topological vector spaces, especially with locally convex spaces. We give a result about endowing vector space with locally convex topology. We introduce the concept of final topologies, and present topology of the space $\mathcal{D}$ of test functions. In the third section we deal with pairings of vectors spaces. We define polar set of a subset in a paired space and we explain a procedure of introducing different kinds of topologies on the second of paired spaces using polar subsets. In a connection with that we define strong topology β which we use to endow space of distributions. Fourth section represents the goal of this thesis. First we give a motivation for defining distributions, and afterwards the rigorous definition is given accompanied with a few basic propositions. In the sequel we define support, order of distributions and various operations, namely: derivative, translation, integrability, multiplication, tensor product, convolution, Fourier transform. Finally, the last, fifth section illustrates applications of the theory from section 4. Two classical problems are solved: a fundamental solution of the Laplace operator is found and one Cauchy problem for the wave equation is solved.

Accepted by the Scientific Board on:
ASB 9.5.2019.

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr. Stevan Pilipović, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Dr. Ivana Vojnović, assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Dr. Dora Seleši, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad.