UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

ULTRAFILTERI

MASTER TEZA

Autor:
Nenad Savić

Mentor:
dr Milan Z. Grulović

Novi Sad, 2013.

Sadržaj

Predgovor

Ultrafilteri i ultraproizvodi modela su u mnogim granama matematike gotovo nezaobilazne metode. Tipični primeri su nestandardna analiza, neki segmenti topologije i teorije skupova, algebre i generalno, teorije modela. Recimo, u topologiji, jedna vrsta kompaktifikacije se oslanja na ultrafiltere. U algebri su, između ostalog, i moćno sredstvo za ispitivanje aksiomatizabilnosti nekih klasa algebri (te primene nalazimo još u radovima Maljceva s početka nastajanja teorije modela). U nestandardnoj analizi preko ultrastepena definišemo infinitezimale. U teoriji modela ultraproizvod konstrukcija je jedna od osnovnih metoda za dobijanje novih modela od klase već postojećih. Jedna od suštinskih prednosti ove metode u odnosu na druge redukovane proizvode jeste u tome da u slučaju da je klasa aksiomatizibilna, novodobijeni modeli ostaju u toj klasi. Uostalom, jedan od uslova da je neka klasa aksiomatizibilna je da je zatvorena za formacije ultraproizvoda.
Rad se sastoji iz šest glava.

U prvoj (uvodnoj) glavi su navedeni osnovni pojmovi iz logike i teorije skupova koji se koriste u tekstu.

U drugoj glavi se dokazuje egzistencija ultrafiltera na Bulovim algebrama (korišćenjem Zornove leme). U klasifikaciji ultrafiltera su navedene neke od osnovnih klasa ultrafiltera koji se najčešće primenjuju: uniformni, regularni, α-kompletni. Pored ostalog, pokazano je da je egzistencija merljivog kardina ekvivalentna uslovu da postoji ω^+-kompletan ultrafilter. Dokaz ovog tvrđenja dat u [2] je nekorektan i u ovom radu je to ispravljeno. Između ostalog pokazano je još da se na prebrojivom skupu klase ω^+-nekompletnih, uniformnih i regularnih poklapaju.

U trećoj glavi je data fundamentalna teorema vezana za ultraproizvode - Łošova teorema. Primena ove teoreme je ilustrovana primerima iz algebre, logike i nestandardne analize.

U četvrtoj glavi su definisani pojmovi "svojstvo prvog reda" i "generalno svojstvo prvog reda" sa primerima teorija koja ta svojstva imaju ili nemaju (na primer, teorija konačno dimenzionalnih vektorskih prostora nema generalno svojstvo prvog reda).

U petoj glavi razmatra se kardinalnost ultraproizvoda. Tako je, recimo, pokazano da je kardinalnost ultraproizvoda konačnih nenula skupova na prebrojivom skupu potpuno određena. Kad su beskonačni kardinali u pitanju dokazan je, između ostalih, i ovaj rezultat:
ako je α beskonačan kardinal i F regularan ultrafilter na skupu I kardinalnosti γ, onda je $card(\alpha^I/F) = \alpha^\gamma$.

Ključni rezultat šeste glave kaže da je klasa struktura K generalno elementarna akko je ta klasa zatvorena za izomorfizme, formacije ultraproizvoda i elementarne ekvivalencije. Primenom ove teoreme dokazano je da klase nilpotentnih, rešivih i neabelovih prostih grupa nisu generalno elementarne.

Na kraju, želeo bih da se zahvalim svim članovima komisije na pomoći oko izrade ove teze. Sa profesorom Grulovićem sam izabrao ovu temu (koja je trajno aktuelna), a komentari i sugestije svih članova komisije su doprineli finalnoj izradi rada.

Nenad Savić

Poglavlje 1

Uvod

Rad počinjemo osnovnim pojmovima iz logike i teorije skupova kao i nekim oznakama, dok će ostale oznake, koje bi mogle biti zbunjujuće, biti objašnjenje u trenutku kada se budu koristile.

Jezik nad kojim radimo obeležavaćemo sa $\mathcal{L}$ i on se sastoji od logičkih i nelogičkih simbola.

Od logičkih simbola imamo:
- skup promenljivih $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$,
- logičke veznike $\wedge, \neg, \exists$,
- pomoćne simbole $(,)$.

Od nelogičkih simbola imamo:
- skup relacija $\mathcal{R}$,
- skup funkcija $\mathcal{F}$.

Pored navedenih logičkih veznika koristimo i, na uobičajen način, izvedene $\vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ i $\forall$. Pošto uvek koristimo iste logičke simbole dovoljno je zadati skup nelogičkih simbola da bismo zadali jezik. U tom slučaju pišemo $\mathcal{L} = \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$.

Definišimo funkciju $ar : \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \to \omega$ tako da je
$ar(\rho) > 0$, za $\rho \in \mathcal{R}$
$ar(f) \geqslant 0$, za $f \in \mathcal{F}$.

$ar(f)$ čitamo kao arnost funkcije f, analogno i za relacije. Sa $\mathcal{R}^n$ i $\mathcal{F}^n$ obeležavaćemo skup svih n-arnih relacija, odnosno funkcija. To jest,
$\mathcal{R}^n = \{\rho \in \mathcal{R} \mid ar(\rho) = n\}$,
$\mathcal{F}^n = \{f \in \mathcal{F} \mid ar(f) = n\}$.
Primetimo da konstante predstavljamo kao nularne funkcije.

Skup termova tipa $\mathcal{L}$ nad X, u oznaci $Term_{\mathcal{L}}(X)$, definišemo kao najmanji skup reči koji zadovoljava sledeća tri uslova:
(1) $X \subseteq Term_{\mathcal{L}}(X)$,
(2) $\mathcal{F}^0 \subseteq Term_{\mathcal{L}}(X)$,
(3) Ako $t_1, \ldots, t_n \in Term_{\mathcal{L}}(X), f \in F^n$, onda $f(t_1, \ldots, t_n) \in Term_{\mathcal{L}}(X)$.

Elementarne formule tipa $\mathcal{L}$ nad X definišemo kao najmanji skup reči koji zadovoljava:
Ako je $\rho \in \mathcal{R}^n$, $t_1, \ldots, t_n \in Term_{\mathcal{L}}(X)$, onda je $\rho(t_1, \ldots, t_n)$ elementarna formula.

Skup formula tipa $\mathcal{L}$ nad X, u oznaci $Form_{\mathcal{L}}(X)$, definišemo kao najmanji skup reči koji zadovoljava:
(1) svaka elementarna formula je formula,
(2) Ako su A i B formule, onda su formule i $A \wedge B$, $\neg A$,
(3) Ako je $x \in X$, $A \in Form_{\mathcal{L}}(X)$, onda je formula i $(\exists x)A$.

Model tipa $\mathcal{L}$ je uređeni par $\mathcal{M} = \langle M, I \rangle$, gde je M neprazan skup (nosač modela), a I je preslikavanje čiji je domen $\mathcal{R} \cup \mathcal{F}$, tako da važi:
(1) $I(f) \in M, f \in \mathcal{F}^0$;
(2) $I(\rho) \subseteq M^n, \rho \in \mathcal{R}^n, n \geqslant 1$;
(3) $I(f) : M^n \to M, f \in \mathcal{F}^n, n \geqslant 1$.
Za $I(a)$ kažemo da je interpretacija simbola a u modelu $\mathcal{M}$. Često ćemo koristiti i oznaku $a^{\mathcal{M}}$ umesto $I(a)$.

Valuacija je svako preslikavanje $\tau : X \to M$. Ako $a \in M$, onda definišemo valuciju $\tau(a/x)$ na sledeći način:

$$\tau(a/x)(y) = \begin{cases} \tau(y), & y \neq x; \\ a, & y = x \end{cases} .$$

Vrednost terma t za valuaciju τ definišemo na sledeći način:
(1) Ako je t jednako x, za $x \in X$, onda je $v_\tau(x) = \tau(x)$;
(2) Ako je t jednako c, za $c \in \mathcal{F}^0$, onda je $v_\tau(c) = I(c)$;
(3) Ako je t jednako $f(t_1, \ldots, t_n), f \in \mathcal{F}^n$, onda je $v_\tau(t) = I(f)(v_\tau(t_1), \ldots, v_\tau(t_n))$.
Indukcijom po složenosti terma t lako se može pokazati da vrednost terma ne zavisi od onih promenljivih koje ne figurišu u njemu.

Definišimo još i važenje formule u datom modelu za datu valuaciju.
Neka je $A \in Form_{\mathcal{L}}(X)$ i neka je $\mathcal{M}$ model tipa $\mathcal{L}$ i neka je τ proizvoljna

valuacija. Kažemo da formula A važi u modelu $\mathcal{M}$ za valuaciju τ, u oznaci $\mathcal{M} \models_\tau A$, akko:
- ako je A elementarna formula, odnosno A je oblika $\rho(t_1, \ldots, t_n), \rho \in \mathcal{R}^n$, onda

$$\mathcal{M} \models_\tau A \quad akko \quad (t_1^{\mathcal{M}}[\tau], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\tau]) \in I(\rho);$$

- ako $B, C \in Form_{\mathcal{L}}(X)$, onda

$$\mathcal{M} \models_\tau B \wedge C \quad akko \quad (\mathcal{M} \models_\tau B \quad i \quad \mathcal{M} \models_\tau C),$$

$$\mathcal{M} \models_\tau \neg B \quad akko \quad nije \quad \mathcal{M} \models_\tau B,$$

$$\mathcal{M} \models_\tau (\exists x)B \quad ako \quad postoji \quad a \in M \quad tako \quad da \quad \mathcal{M} \models_{\tau(a/x)} B.$$

U radu će se koristiti aksioma izbora kao i lema Zorna[1] pa ćemo i njih navesti u uvodu.

Aksioma izbora:

$$(\forall x)(x \neq \emptyset \wedge (\forall y \in x) y \neq \emptyset \wedge (\forall u \in x)(\forall v \in x)(u \neq v \Rightarrow u \cap v = \emptyset)$$
$$\Rightarrow (\exists z)(\forall y \in x)(\exists! u)(u \in y \wedge u \in z))$$

Lema Zorna:
Ako u parcijalno uređenom skupu svaki lanac ima gornje ograničenje, onda taj skup ima bar jedan maksimalan element.

Generalno, što se tiče oznaka, oznakom " $\subseteq$ " dozvoljavamo podskup bez ograničenja, a pod oznakom " $\subset$ " ne dozvoljavamo jednakost. Komplement skupa A obeležavaćemo sa A^c.
Sa $S_\alpha(X)$ obeležavamo skup svih podskupova od X čija je kardinalnost manja od α. Specijalno, $S_\omega(X)$ predstavlja skup svih konačnih podskupova skupa X.
Ostale oznake će biti objašnjenje u trenutku kada se koriste.

[1]Max August Zorn (1906-1993) - nemački matematičar

Poglavlje 2

Klasifikacija ultrafiltera

U ovoj glavi definišemo filter i ultrafilter i navodimo neke osnovne klase ultrafiltera, kao što su klasa glavnih, neglavnih, uniformnih, α-kompletnih i regularnih ultrafiltera.
Kada kažemo da je $\langle I,F\rangle$ (ultra)filter par, to jest, da je F (ultra)filter na I, pod tim ćemo podrazumevati da je F (ultra)filter nad Bulovom[1] algebrom $\langle \mathcal{P}(I),\subseteq\rangle$. Stoga, definišimo prvo mrežu, a potom i Bulovu algebru kao specijalnu mrežu.

2.1 Mreže i Bulove algebre

Mreže i Bulove algebre nisu tema ovog rada, tako da se nećemo detaljno baviti njima. Navešćemo samo neka njihova bazična svojstva koja ćemo koristiti u radu sa ultrafilterima nad Bulovom algebrom.

Definicija 2.1 **Mreža** *je parcijalno uređen skup u kojem svaka dva elementa imaju supremum i infimum.*

Pod mrežom L podrazumevaćemo mrežu $\langle L,\leqslant\rangle$. Supremum elemenata x i y obeležavaćemo sa $x \vee y$, a infimum sa $x \wedge y$. Ako u mreži postoji najveći element, obeležavaćemo ga sa 1, a ako postoji najmanji element obeležavaćemo ga sa 0.

Definicija 2.2 *Za mrežu L kažemo da je* **komplementirana** *akko ima najveći i najmanji element i važi da za svaki $x \in L$ postoji $y \in L$ takav da važi*

[1] George Boole (1815-1864)-engleski matematičar i filozof

$x \vee y = 1$ *i* $x \wedge y = 0$. *Mreža je* **distributivna** *akko za sve* $x, y, z \in L$ *važi:*

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

Sada imamo sve potrebne pojmove da definišemo Bulovu algebru.

Definicija 2.3 **Bulova algebra** *je komplementirana distributivna mreža.*

Napomena. U Bulovoj algebri, za svaki element x postoji jedinstveni komplement i obeležavaćemo ga sa x^*.

Primer. Za svaki neprazan skup X, uređeni par $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ je Bulova algebra. Presek dva skupa je njihov infimum, a unija supremum. Ceo skup X je najveći element, a $\emptyset$ je najmanji element. Za svaki $A \subseteq X$, $X \setminus A$ je njegov komplement. Lako se proverava da važe zakoni distributivnosti.

2.2 Filteri i ultrafilteri na Bulovoj algebri

Definicija 2.4 **Filter** *na mreži* L *je neprazan podskup* F *skupa* L *koji zadovoljava:*
(a) za sve $x, y \in F$, $x \wedge y \in F$,
(b) za sve $x \in F$ *i* $y \in L$, *ako* $x \leqslant y$ *onda* $y \in F$.

Primeri.
(1) U svakoj mreži L, ceo skup L je filter, takozvani trivijalni filter.
(2) Ako mreža L ima maksimalan element 1, onda je $\{1\}$ filter na L.
(3) Za svako $x \in L$, skup $\{y \mid x \leqslant y\}$ je filter koji zovemo glavni filter generisan sa x.

Filter F mreže L zovemo **pravi** ako je F pravi podskup od L, to jest $F \neq L$. Jasno, ukoliko L ima minimum 0, F je pravi ako i samo ako $0 \notin F$. **U nastavku teksta, pod pojmom filter podrazumevamo pravi filter ukoliko ne naglasimo drugačije**.

Dokažimo sada jednu lemu koja će nam trebati u nastavku.

Lema 2.5 *U Bulovoj algebri* $x \wedge y^* = 0$ *akko* $x \leqslant y$.

Dokaz: Neka je $x \wedge y^* = 0$. Tada $x = x \wedge 1 = x \wedge (y \vee y^*) = (x \wedge y) \vee (x \wedge y^*) = (x \wedge y) \vee 0 = x \wedge y \leqslant y$ Obrnuto, neka je $x \leqslant y$. Tada $x \wedge y = x$ pa $x \wedge y^* = (x \wedge y) \wedge y^* = x \wedge (y \wedge y^*) = x \wedge 0 = 0$. ∎

Neka je A podskup skupa koji je nosač neke Bulove algebre.

Definicija 2.6 *A ima* **svojstvo konačnog preseka** *(s.k.p.) ako i samo ako infimum proizvoljnog konačnog podskupa skupa A nije jednak 0.*

Lako je pokazati da važi sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 2.7 *(1) Ako A ima s.k.p., onda za svaki element x Bulove algebre važi da $A \cup \{x\}$ ima s.k.p. ili $A \cup \{x^*\}$ ima s.k.p.*
(2) Ako je $\{A_i \mid i \in I\}$ lanac podskupova Bulove algebre i ako za svako $i \in I$, A_i ima s.k.p. onda i $\bigcup_{i \in I} A_i$ ima s.k.p.

Ako je A skup nekih elemenata Bulove algebre B, onda sa A^0 obeležavamo skup onih elemenata iz B koji su veći od nekog elementa iz A. Dakle,

$$A^0 = \{x \in B \mid \exists a \in A, a \leqslant x\}.$$

Sa A^{inf} obeležavamo skup infimuma svih konačnih podskupova skupa A, odnosno

$$A^{inf} = \{inf(X) \mid X \in S_\omega(A)\}.$$

Lema 2.8 *Za proizvoljan podskup A Bulove algebre, skup $(A^{inf})^0$ je (ne nužno pravi) filter. Svaki filter koji sadrži A sadrži i $(A^{inf})^0$. $(A^{inf})^0$ je pravi ako i samo ako A ima s.k.p.*

Dokaz: Primetimo da $x \in (A^{inf})^0$ akko za neki $X \in S_\omega(A), inf(X) \leqslant x$.
Pretpostavimo da $x, y \in (A^{inf})^0$. Tada, za neke $X, Y \in S_\omega(A), inf(X) \leqslant x$ i $inf(Y) \leqslant y$. Jasno, $X \cup Y \in S_\omega(A)$ i $inf(X \cup Y) = inf(X) \wedge inf(Y)$, pa kako je $inf(X) \wedge inf(Y) \leqslant x \wedge y$ imamo da $x \wedge y \in (A^{inf})^0$. Trivijalno, ako $x \in (A^{inf})^0$ i $x \leqslant y$ onda $y \in (A^{inf})^0$. Dakle, $(A^{inf})^0$ je filter.
Neka je F filter i $A \subseteq F$. Neka $x \in (A^{inf})^0$. Tada, za neko $X \in S_\omega(A), inf(X) \leqslant x$. Kako $X \subseteq F$, a F je filter, sledi $inf(X) \in F$. Pošto je F filter, imamo da $x \in F$. Stoga, $(A^{inf})^0 \subseteq F$.
Ako A nema s.k.p. postoji $X \in S_\omega(A), inf(X) = 0$. Dakle, $0 \in (A^{inf})^0$ pa $(A^{inf})^0$ nije pravi. Pretpostavimo sada da $(A^{inf})^0$ nije pravi. Onda, za neko $X \in S_\omega(A), inf(X) \leqslant 0$ pa je $inf(X) = 0$. Stoga, A nema s.k.p. što kompletira dokaz. ∎

Iz ove leme direktno sledi da podskup A Bulove algebre može biti proširen do filtera ako i samo ako ima s.k.p.

Definicija 2.9 *Filter koji je maksimalan, s obzirom na skupovnu inkluziju, zovemo* **ultrafilter***.*

Dakle, ultrafilter je filter koji nema pravih proširenja koja su pravi filteri. Ultrafilteri mogu biti okarakterisani na još jedan način koji demonstriramo u sledećoj lemi.

Lema 2.10 *Ako je F filter na Bulovoj algebri B, F je ultrafilter akko za svako $x \in B$ važi $x \in F \veebar x^* \in F$.*

Dokaz: Primetimo prvo da ako za neko $x \in B$ i x i x^* pripadaju F, onda $0 = x \wedge x^* \in F$ pa F nije pravi.
($\Leftarrow$) Pretpostavimo prvo da za svako $x \in B$ važi $x \in F \veebar x^* \in F$. Neka je G filter koji strogo sadrži F. Postoji neko $x \in G \setminus F$. Kako $x \notin F, x^* \in F \subseteq G$. Dakle, G nije pravi. Stoga, F je maksimalan pravi filter, odnosno ultrafilter.
($\Rightarrow$) Pretpostavimo sada da je F ultrafilter i da $x \notin F$. Neka je G filter generisan sa $F \cup \{x\}$. Kako je F ultrafilter sledi da G nije pravi. Stoga $F \cup \{x\}$ nema s.k.p. pa za neko $X \in S_\omega(F), inf(X) \wedge x = 0$. Stoga, $inf(X) \leqslant x^*$. $inf(X) \in F$ pa sledi da i $x^* \in F$, što je i trebalo pokazati. ■

Da bismo dokazali sledeću teoremu, koja nam garantuje egzistenciju bogate klase ultrafiltera na proizvoljnoj Bulovoj algebri, koristićemo Zornovu lemu koja je jedan od ekvivalenata aksiome izbora.

Teorema 2.11 *(***Teorema o ultrafilteru***) Svaki filter u Bulovoj algebri može se proširiti do ultrafiltera.*

Dokaz: Neka je F filter u Bulovoj algebri B. Neka je $\mathcal{F}$ skup svih filtera u B koji sadrže F. Kako $F \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ nije prazan. $\mathcal{F}$ možemo parcijalno urediti skupovnom inkluzijom. Pokažimo da, s obzirom na skupovnu inkluziju, svaki lanac u $\mathcal{F}$ ima gornje ograničenje.
Neka je $\mathcal{D} = \{D_i \mid i \in I\}$ lanac u $\mathcal{F}$ i neka je $D = \bigcup_{i \in I} D_i$. Ako $x, y \in D$, onda postoje $i, j \in I, x \in D_i$ i $y \in D_j$. Neka je, bez umanjenja opštosti, $D_i \subseteq D_j$. Tada, $x, y \in D_j$, dakle, $x \wedge y \in D_j \subseteq D$. Ako $z \in B$, $x \in D_j$ i $x \leqslant z$, onda $z \in D_j \subseteq D$. Kako $0 \notin D_i$ ni za jedno $i \in I$, sledi da $0 \notin D$. Dakle, D je filter i $F \subseteq D$ pa sledi $D \in \mathcal{F}$. D je gornje ograničenje za $\mathcal{D}$ u $\mathcal{F}$.
Iz Zornove leme sledi da $\mathcal{F}$ sadrži maksimalan element G koji je tražena ekstenzija filtera F. ■

Posledica 2.12 *Svaki skup elemenata Bulove algebre koji ima s.k.p. može se proširiti do ultrafiltera.*

2.3 Klasifikacija ultrafiltera

U ovom delu rada definišemo i dokazujemo egzistenciju i neke osobine neglavnih, uniformnih, λ-kompletnih i regularnih ultrafiltera. Njihov značaj će se manifestovati kod ultraproizvoda.

Definicija 2.13 *Filter F je* **glavni filter** *na I akko je oblika $F = \{Y \subseteq I \mid X \subseteq Y\}$, gde je X neki neprazni podskup skupa I. Kažemo da X generiše filter F.* **Glavni ultrafilter** *je ultrafilter koji je glavni filter.*

Primer.
Posmatrajmo Bulovu algebru $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$. Za svako $x \in X$, skup $\{A \in \mathcal{P}(X) \mid x \in A\}$ je ultrafilter koji zovemo glavni ultrafilter generisan sa x. Ultrafilter je glavni akko je generisan nekim elementom Bulove algebre.

Lema 2.14 *Ako je F filter na I, F je glavni filter akko $\bigcap\{X \mid X \in F\} \in F$*

Dokaz: Trivijalno. ∎

Lema 2.15 *Neka je F glavni filter. F je ultrafilter akko skup koji generiše F sadrži samo jedan element.*

Dokaz: Neka je $x \in I$ i $F = \{X \subseteq I \mid x \in X\}$. Kako je za svako $Y \subseteq I$ ili $x \in Y$ ili $x \in I \setminus Y$, F je ultrafilter.
Obrnuto, pretpostavimo da je F glavni ultrafilter i da $X_0 = \bigcap\{X \mid X \in F\}$ sadrži bar dva elementa x, y. Kako je F ultrafilter sledi da ili $\{x\}$ ili $I \setminus \{x\}$ pripada F. U prvom slučaju $y \notin X_0$, a u drugom slučaju $x \notin X_0$, kontradikcija. ∎

Ova lema nam kaže da ako je $card(I) = \alpha$, onda ima tačno α različitih glavnih ultrafiltera na I.

Lema 2.16 *Ultrafilter F na I je glavni akko sadrži konačan skup.*

Dokaz: Ako je ultrafilter glavni generisan je jednoelementnim skupom pa sadrži konačan skup. Obrnuto, neka ultrafilter sadrži konačan skup i neka je X skup najmanje kardinalnosti u F. Pokažimo da je X jednoelementan skup. Pretpostavimo da $x, y \in X$. Po pretpostavci $\{x\} \notin F$ pa sledi da $I \setminus \{x\} \in F$. Stoga, $X \cap (I \setminus \{x\}) = X \setminus \{x\} \in F$. Ali, $X \setminus \{x\}$ sadrži manje elemenata od X, kontradikcija. ∎

Primedba. Ako je I konačan skup, onda su svi ultrafilteri na I glavni; neglavni ultrafilteri ne sadrže konačne skupove (ultrafilter je neglavni akko nije glavni).

Egzistenciju neglavnih ultrafiltera na beskonačnim skupovima nam garantuje sledeća lema.

Lema 2.17 *Ako je I beskonačan, postoji neglavni ultrafilter na I.*

Dokaz: Neka je $\overline{S}_\omega(I)$ skup svih kokonačnih podskupova od I. Lako se proverava da $\overline{S}_\omega(I)$ ima s.k.p. pa sledi da može biti proširen do ultrafiltera F na I. Jasno, F ne sadrži konačne skupove pa je neglavni. ■

Primetimo da svaki neglavni ultrafilter sadrži sve kokonačne skupove (jer ne sadrži nijedan konačan podskup).
Pokazali smo da ako je I kardinalnosti α onda postoji tačno α glavnih ultrafiltera na I. Prirodno, postavlja se pitanje koliko ima neglavnih ultrafiltera? Konstatujmo ovom prilikom (bez dokaza) da je odgovor na to pitanje 2^{2^α}.

Definicija 2.18 *Ultrafilter F na I je* **uniforman** *akko svi skupovi iz F imaju istu kardinalnost kao I.*

Lema 2.19 *Ako je I beskonačan postoji uniforman ultrafilter na I.*

Dokaz: Neka je $card(I) = \alpha$ i neka je $\overline{S}_\alpha(I)$ skup svih onih podskupova skupa I čiji su komplementi kardinalnosti manje od α. Lako se proverava da $\overline{S}_\alpha(I)$ ima s.k.p. pa se može proširiti do ultrafiltera. Jasno, taj ultrafilter ne sadrži skupove kardinalnosti manje od α pa sledi da je uniforman. ■

Primetimo da svaki uniforman ultrafilter sadrži sve skupove koji pripadaju $\overline{S}_\alpha(I)$ i obrnuto, ultrafilter koji sadrži sve skupove iz $\overline{S}_\alpha(I)$ je uniforman.

Lema 2.20 *Neka je I beskonačan skup. Kolekcija svih neglavnih ultrafiltera na I podudara se sa kolekcijom svih uniformnih ultrafiltera na I akko je I prebrojiv.*

Dokaz: Svi uniformni ultrafilteri su neglavni. Ako je I prebrojiv, onda je svaki neglavni ultrafilter uniforman.
Pretpostavimo sada da je $card(I) = \alpha > \aleph_0$. Neka je β beskonačan kardinal manji od α i neka je J bilo koji podskup skupa I kardinalnosti β. Neka je

$$G = \{X \subseteq I \mid card(J \setminus X) < \aleph_0\}$$

Lako se pokazuje da G ima s.k.p. i da sadrži sve skupove iz $\overline{S}_\omega(I)$. Stoga, G se može proširiti do neglavnog ultrafiltera F na I. Dakle, $J \in G \subseteq F$, pa F nije uniforman. ∎

Definicija 2.21 *Neka je α proizvoljan beskonačni kardinal. Ultrafilter F na I je* **α-kompletan** *akko za svaku kolekciju $\{X_\xi \mid \xi < \gamma\}$ elemenata iz F važi $\bigcap\{X_\xi \mid \xi < \gamma\} \in F$, za svako $\gamma < \alpha$. F je* **α-nekompletan** *akko nije α-kompletan.*

Lema 2.22 *Glavni ultrafilter je α-kompletan za svaki kardinal α.*

Dokaz: Ako je F generisan sa $\{x\}$ onda za proizvoljnu kolekciju $\{X_\xi \mid \xi < \alpha\}$ elemenata iz F važi $\{x\} \subseteq \bigcap\{X_\xi \mid \xi < \alpha\}$ pa sledi da $\{X_\xi \mid \xi < \alpha\} \in F$. ∎

Postavlja se pitanje da li postoje neglavni ultrafilteri koji su ω^+-kompletni. Sledeća lema nam daje kompletan odgovor u slučaju ultrafiltera na prebrojivim skupovima.

Lema 2.23 *Ako je I kardinalnosti α, onda ne postoji neglavni α^+-kompletan ultrafilter na I.*

Dokaz: Neka je $\{x_\xi \mid \xi < \alpha\}$ enumeracija skupa I i F neglavni ultrafilter na I. Za $\xi < \alpha$, neka je $X_\xi = I \setminus \{x_\xi\}$. Kako je F neglavni, $X_\xi \in F$, za svako ξ, ali $\bigcap_{\xi<\alpha} X_\xi = \emptyset \notin F$; dakle, F nije α^+-kompletan. ∎

Posledica 2.24 *Svi neglavni ultrafilteri na prebrojivim skupovima su ω^+-nekompletni.*

Prirodno, postavlja se pitanje da li postoji ω^+-kompletan neglavni ultrafilter na neprebrojivim skupovima. Da bismo to prodiskutovali potrebne su nam dve leme.
Kažemo da je kardinal α **merljiv** ako i samo ako je α neprebrojiv i postoji neglavni ultrafilter na α koji je α-kompletan. Kardinal α je ω^+-merljiv akko postoji neglavni ω^+-kompletan ultrafilter na α.

Lema 2.25 *Neka je D α-kompletan ultrafilter na I i neka $f : I \to J$. Tada je $E = \{Y \subseteq J \mid f^{-1}(Y) \in D\}$ α-kompletan ultrafilter na J.*

Dokaz: Trivijalno. ∎

Lema 2.26 *Ako je D neglavni ultrafilter na I, onda postoji najveći kardinal α takav da je D α-kompletan i da je α merljiv kardinal.*

Dokaz: Postoji najmanji kardinal β takav da D nije β-kompletan (bar $card(I)^+$). Pretpostavimo da je β granični kardinal. Tada $\beta = \lim_{\xi<\gamma} \alpha_\xi$, gde je γ granični kardinal. Neka $E \subseteq D$ i $card(E) < \beta$. Tada, za $\xi < \gamma$ $card(E) \leqslant \alpha_\xi < \alpha_{\xi+1} < \beta$ pa $\bigcap E \in D$, kontradikcija. Dakle, postoji α, takav da je $\beta = \alpha^+$, pa je α najveći kardinal takav da je D α-kompletan. Kako D nije α^+-kompletan, postoji particija skupa $I = \bigcup_{\eta<\alpha} X_\eta$ tako da $X_\eta \notin D, \forall \eta < \alpha$. Neka $f : I \to \alpha$ i $f(i) = \eta \Leftrightarrow i \in X_\eta$. Zbog prethodne leme imamo da je $E = \{Y \subseteq \alpha \mid f^{-1}(Y) \in D\}$ α-kompletan ultrafilter na α. On je i neglavni jer u suprotnom postoji $\{\eta\} \in E$, odnosno $f^{-1}(\{\eta\}) = X_\eta \in D$, kontradikcija, dakle α je merljiv. ■

Teorema 2.27 *Merljiv kardinal postoji ako i samo ako postoji ω^+-merljiv kardinal.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Kako su svi merljivi kardinali i ω^+-merljivi, ovaj smer je jasan. ($\Leftarrow$) Neka je α najmanji kardinal na kom postoji D neglavni ω^+ kompletan ultrafilter. Pretpostavimo da α nije merljiv. Tada postoji $\beta < \alpha$ (neka je β najmanje takvo) da D nije β-kompletan. Znamo da je β nasledni, odnosno postoji γ tako da je $\beta = \gamma^+$. D nije γ^+ kompletan pa postoji particija $\alpha = \bigcup_{\eta<\gamma} X_\eta$ tako da za svako $\eta < \gamma$, $X_\eta \notin D$. Definišimo $f : \alpha \to \gamma$ sa $f(\xi) = \eta \Leftrightarrow \xi \in X_\eta$. $E = \{Y \subseteq \gamma \mid f^{-1}(Y) \in D\}$ je ω^+ kompletan na γ jer ako $Y_i \in E, i \in \omega$, onda $f^{-1}(\bigcap Y_i) = \bigcap f^{-1}(Y_i) \in D$, kontradikcija. ■

Napomenimo da je egzistencija merljivog kardinala nedokaziva u ZFC.

Dokažimo sada jednu lemu koja nam daje alternativnu karakterizaciju α^+-kompletnih ultrafiltera i koja će nam biti korisna u nastavku rada.

Lema 2.28 *Neka je F ultrafilter na I. F je α^+-kompletan akko za svako $\beta \leqslant \alpha$ i svaku $\{X_\xi \mid \xi < \beta\}$ particiju skupa I postoji jedinstveno $\xi_0 < \beta$ takvo da $X_{\xi_0} \in F$.*

Dokaz: Pretpostavimo prvo da je F α^+-kompletan, $\beta \leqslant \alpha$ i $\{X_\xi \mid \xi < \beta\}$ particija skupa I. Kako su X_ξ-ovi po parovima disjunktni, sledi da je najviše jedan od njih u F. Pretpostavimo da nije nijedan. Onda, za $\xi < \beta$, $I \setminus X_\xi \in F$. Kako je F α^+-kompletan

$$\bigcap_{\xi<\beta}(I \setminus X_\xi) = I \setminus \bigcup_{\xi<\beta} X_\xi = I \setminus I = \emptyset \in F,$$

što nam daje kontradikciju.
Obrnuto, pretpostavimo da postoji kolekcija $\{X_\xi \mid \xi < \alpha\}$ takva da za svako $\xi < \alpha$, $X_\xi \in F$, ali da $\bigcap_{\xi<\alpha} X_\xi \notin F$. Tada $\bigcup_{\xi<\alpha} X_\xi^c \in F$. Trivijalno, važi da je $I = (I \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} X_\xi^c) \cup \bigcup_{\xi<\alpha} X_\xi^c$. Formirajmo sad kolekciju $\{Y_\xi \mid \xi < \alpha\}$ na sledeći način:
$Y_0 = X_0^c$ i za svako $0 < \theta < \alpha$, $Y_\theta = X_\theta^c \setminus \bigcup_{\xi<\theta} X_\xi^c$.
Tada je $\bigcup_{\xi<\alpha} Y_\xi = \bigcup_{\xi<\alpha} X_\xi^c$, i Y_ξ-ovi su po parovima disjunktni. Dakle, imamo particiju skupa I koju čine skupovi $\{Y_\xi \mid \xi < \alpha\}$ i $I \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} Y_\xi$. Po pretpostavci tačno jedan od njih pripada F, a kako $I \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} Y_\xi \notin F$, sledi da postoji ξ_0 tako da $Y_{\xi_0} \in F$. Kako je $Y_{\xi_0} \subseteq X_{\xi_0}^c$, $X_{\xi_0}^c \in F$ pa $X_{\xi_0} \notin F$, kontradikcija; dakle, F je α^+-kompletan. ■

Lema 2.29 *Neka je F ultrafilter na I. Ako je α najmanji kardinal takav da je F α^+-nekompletan, tada postoji niz $\langle X_\xi \mid \xi < \alpha\rangle$ elemenata iz F takav da važi*

(1) $X_\xi \supseteq X_\eta, \xi \leqslant \eta < \alpha$,

i

(2) $\bigcap_{\xi<\alpha} X_\xi = \emptyset$.

Dokaz: Kako je F α^+-nekompletan, postoji kolekcija $\{Y_\xi \mid \xi < \alpha\}$ elemenata iz F takva da $Y = \bigcap_{\xi<\alpha} Y_\xi \notin F$. Stoga, $I \setminus Y \in F$. Za $\xi < \alpha$, neka je

$$X_\xi = (I \setminus Y) \cap \bigcap_{\zeta<\xi} Y_\zeta.$$

Kako je $card(\xi) < \alpha$, F je $card(\xi)^+$-kompletan pa sledi da $X_\xi \in F$. Jasno je da (1) važi, kao i (2):

$$\bigcap_{\xi<\alpha} X_\xi = (I \setminus Y) \cap \bigcap_{\xi<\alpha} Y_\xi = (I \setminus Y) \cap Y = \emptyset.$$

■

Ako je I beskonačan skup, $S_\omega(I)$ je iste kardinalnosti kao i I pa stoga postoji bijekcija između I i $S_\omega(I)$.

Definicija 2.30 *Kažemo da je F* **regularan** *ultrafilter na I akko postoji bijektivno preslikavanje f skupa I na $S_\omega(I)$ takvo da, za svako $i \in I$,*

$$\{j \in I \mid i \in f(j)\} \in F.$$

Na prvi pogled se ne vidi zbog čega je važna ova definicija, ali će se to mnogo bolje primetiti kada budemo diskutovali o kardinalnostima ultraproizvoda.
Pre svega, pozabavimo se odnosom između regularnih ultrafiltera i drugih vrsta ultrafiltera.

Lema 2.31 *Neka je I beskonačan skup. Tada postoji regularan ultrafilter na I i svaki regularan ultrafilter na I je ω^+-nekompletan i uniforman.*

Dokaz: Neka je f bijektivno preslikavanje skupa I na $S_\omega(I)$. Za svako $i \in I$ neka je

$$E_i = \{j \in I \mid i \in f(j)\}$$

Pokazujemo da kolekcija $E = \{E_i \mid i \in I\}$ ima s.k.p.
Neka je $\{E_{i_1}, ..., E_{i_n}\}$ konačan podskup skupa E. Ako je $\{i_1, ..., i_n\} = f(i_0)$, onda

$$i_0 \in E_{i_1} \cap ... \cap E_{i_n}.$$

Stoga, E ima s.k.p. pa može biti proširen do ultrafiltera F na I. Po konstrukciji, F je regularan ultrafilter.
Pretpostavimo sada da je F regularan ultrafilter na I. Postoji, dakle, preslikavanje f skupa I na $S_\omega(I)$ takvo da za svako $i \in I$

$$E_i = \{j \in I \mid i \in f(j)\} \in F.$$

Neka je $\{i_n \mid n \in \omega\}$ prebrojiv podskup skupa I. Za $n \in \omega$ neka je

$$E_{i_n} = \{j \in I \mid i_n \in f(j)\}.$$

Po pretpostavci je za svako n, $E_{i_n} \in F$, ali očigledno

$$\bigcap_{n \in \omega} E_{i_n} = \{j \in I \mid \forall n \in \omega, i_n \in f(j)\} = \emptyset \notin F;$$

dakle, F je ω^+-nekompletan.
Pokažimo da je F i uniforman. Pretpostavimo da je $X \subseteq I$ i $card(X) < card(I)$. Tada je

$$card(\bigcup_{i \in X} f(i)) < card(I),$$

pa stoga postoji neko $j_0 \in I \setminus \bigcup_{i \in X} f(i)$. Ako, za $i \in I$, $j_0 \in f(i), i \notin X$. Sledi da

$$\{i \in I \mid j_0 \in f(i)\} \subseteq I \setminus X.$$

Kako je $\{i \in I \mid j_0 \in f(i)\} \in F$, zaključujemo da je $I \setminus X \in F$ pa $X \notin F$. Dakle, F je i uniforman. ■

U opštem slučaju nije poznato da li su svi ω^+-nekompletni uniformni ultrafilteri i regularni. Ponovo, u slučaju prebrojivih skupova imamo potpun odgovor, a da bismo to dokazali potrebne su nam sledeće dve leme.

Lema 2.32 *Neka je $I = \{i_n \mid n \in \omega\}$ prebrojiv skup i neka je F neglavni ultrafilter na I. Tada postoji niz $\langle X_n \mid n \in \omega\rangle$ podskupova od I takav da važi:*
(1) $X_0 = I$,
(2) za svako $n, X_{n+1} \subseteq X_n$ i $X_n \setminus X_{n+1}$ je beskonačan,
(3) za svako $n, X_n \in F$,
(4) $\bigcap_{n\in\omega} X_n = \emptyset$

Dokaz: Neka je $X_0 = I$. Pretpostavimo da je $k < \omega$, i da smo za $n \leqslant k$ definisali skupove X_n koji zadovoljavaju (1)-(3) kao i
(5) za $m < n, i_m \notin X_n$.
Neka su A_k, B_k beskonačni disjunktni skupovi čija je unija X_k. Kako $X_k \in F$ sledi da ili A_k ili B_k pripada F. Ako je $A_k \in F$ onda je i $A_k \setminus \{i_k\} \in F$ pa stavljamo da je $X_{k+1} = A_k \setminus \{i_k\}$. Ako $A_k \notin F$ uzimamo da je $X_{k+1} = B_k \setminus \{i_k\}$. Dakle, našli smo skupove X_n za $n \leqslant k+1$ tako da su (1)-(3) i (5) zadovoljeni. Stoga, indukcija nam daje skupove X_n, za sve n, koji zadovoljavaju date uslove. Zbog (5) sledi $\bigcap_{n\in\omega} X_n = \emptyset$, što je i trebalo pokazati. ■

Lema 2.33 *Ako je F neglavni ultrafilter na prebrojivom skupu $I = \{i_n \mid n \in \omega\}$, onda je F regularan.*

Dokaz: Neka je $\langle X_n \mid n \in \omega\rangle$ niz skupova koji zadovoljavaju uslove (1)-(4) prethodne leme. Za $n \in \omega$, neka je Y_n kolekcija svih konačnih podskupova skupa I koji sadrže sve i_k za $k < n$. Jasno,
(1) $Y_0 = S_\omega(I)$,
(2) za svako n je $Y_{n+1} \subseteq Y_n$ i $Y_n \setminus Y_{n+1}$ je beskonačan
(3) $\bigcap_{n\in\omega} Y_n = \emptyset$,
Za svako n, neka je f_n bijektivno preslikavanje skupa $X_n \setminus X_{n+1}$ na $Y_n \setminus Y_{n+1}$ i neka je $f = \bigcup\{f_n \mid n \in \omega\}$. Zbog osobina skupova X_n i Y_n, f je bijektivno preslikavanje skupa I na $S_\omega(I)$.
Za svako $n \in \omega$, ako $i \in X_{n+1}, f(i) \in Y_{n+1}$ pa sledi da $i_n \in f(i)$. Imamo

$$X_{n+1} \subseteq \{i \in I \mid i_n \in f(i)\},$$

ali $X_{n+1} \in F$ pa i $\{i \in I \mid i_n \in f(i)\} \in F$. Dakle, F je regularan. ■

Lema 2.34 *Ako je F ω^+-nekompletan ultrafilter na I, postoji preslikavanje*

$$f : I \to S_\omega(\omega),$$

tako da za svako $n \in \omega$ važi:

$$\{i \in I \mid n \in f(i)\} \in F.$$

Dokaz: Prema lemi 2.29 postoji opadajući niz $\langle X_n \mid n \in \omega \rangle$ elemenata iz F takav da je $\bigcap_{n\in\omega} X_n = \emptyset$. Bez umanjenja opštosti pretpostavićemo da je $X_0 = I$. Za svako $i \in I$, neka je

$$f(i) = \{n \in \omega \mid i \in X_n\}.$$

Jasno, $f(i)$ je konačan podskup od ω, odnosno $f(i) \in S_\omega(\omega)$.
Za proizvoljno $n \in \omega$ i $i \in X_n$ važi da $n \in f(i)$. Stoga,

$$X_n \subseteq \{i \in I \mid n \in f(i) \in F.$$

■

Teorema 2.35 *Neka je I prebrojiv skup. Tada se kolekcije neglavnih, ω^+-nekompletnih, uniformnih i regularnih ultrafiltera na I poklapaju.*

Poglavlje 3

Konstrukcija ultraproizvoda

U ovom delu rada bavimo se konstrukcijom ultraproizvoda i dokazujemo Łośovu teoremu koja je jedna od najbitnijih teorema (po broju posledica) u ovoj oblasti teorije skupova.

3.1 Konstrukcija ultraproizvoda

Neka je I proizvoljan indeksni skup. Neka je $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ familija struktura jezika $\mathcal{L}$. Neka je $A = \prod_{i\in I} A_i$ kartezijanski proizvod skupova A_i, gde je A_i nosač modela $\mathcal{A}_i$ (u nastavku ćemo dosta često, kad je jasno iz konteksta, izostavljati indeksni skup pa ćemo umesto $A = \prod_{i\in I} A_i$ pisati $A = \prod A_i$). Elemente skupa A obeležavaćemo sa f, g, h, f', g', h' itd. Za $f \in A$, i-tu koordinatu ćemo obeležavati sa $f(i)$ ili f_i.
Neka je U kolekcija podskupova skupa I. Definišimo relaciju $\sim_U$ na A sa

$$f \sim_U g \quad akko \quad \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U.$$

Pokažimo sada jednu lemu koja je fundamentalna za konstrukciju ultraproizvoda.

Lema 3.1 *Ako je U filter na I onda je $\sim_U$ relacija ekvivalencije na $\prod A_i$, ako je $\sim_U$ relacija ekvivalencije na $\prod A_i$ onda je U filter, ako $card(A_i) \geqslant 3$, $\forall i \in I$.*

Dokaz: Ako je U filter na I, onda $I \in U$ pa je $\sim_U$ refleksivna relacija. Trivijalno, $\sim_U$ je simetrična relacija. Dokažimo da je tranzitivna.

Pretpostavimo da je $f \sim_U g$ i $g \sim_U h$. Tada, po definiciji relacije $\sim_U$, imamo

$$X = \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U$$

i

$$Y = \{i \in I \mid g(i) = h(i)\} \in U.$$

Pošto je U filter, znamo da onda i $X \cap Y \in U$. Ali,

$$X \cap Y \subseteq Z = \{i \in I \mid f(i) = h(i)\},$$

pa $Z \in U$, što nam daje $f \sim_U h$.
Obrnuto, neka je $\sim_U$ relacija ekvivalencije. Zbog refleksivnosti relacije $\sim_U$ imamo da je $I \in U$. Pretpostavimo da su $X, Y \in U$. Pokažimo da onda i $X \cap Y \in U$. Pretpostavljamo da je $X \cap Y \neq \emptyset$, jer u suprotnom dobijamo da je U trivijalan filter (svi podskupovi skupa I su u U). Dakle, postoje f, g, h, k tako da

$$X = \{i \in I \mid f(i) = g(i)\}$$

i

$$Y = \{i \in I \mid h(i) = k(i)\}.$$

Definišimo

$$\theta(i) = \begin{cases} g(i), & i \in Y; \\ j \neq f(i), g(i), & i \in I \setminus Y. \end{cases}$$

Pošto je $\theta = g$ samo na Y, a $Y \in U$ sledi da je $\theta \sim_U g$. Zbog tranzitivnosti imamo da je onda i $\theta \sim_U f$, pa $\{i \in I \mid f(i) = \theta(i)\} \in U$, a to je upravo skup $X \cap Y$. Pretpostavimo sada da $X \in U$ i $X \subseteq Y \subseteq I$. Pokažimo da i $Y \in U$. Znamo da postoje f, g takve da je

$$X = \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U.$$

Definišimo sada

$$h(i) = \begin{cases} f(i), & i \in X; \\ g(i), & i \in Y \setminus X; \\ j \neq f(i), g(i), & i \in I \setminus (X \cup Y). \end{cases}$$

Pošto je $h = f$ samo na X, a $X \in U$ sledi da je $h \sim_U f$, a zbog tranzitivnosti je $h \sim_U g$ pa

$$Y = \{i \in I \mid h(i) = g(i)\} \in U,$$

što je i trebalo dokazati. ∎

Od sad, pa nadalje u radu pretpostavljamo da je U filter na I. Intuitivno, skupovi koji pripadaju U su "veliki" podskupovi skupa I, pa kada kažemo da je $f \sim_U g$, možemo na to gledati kao da se f i g poklapaju na "skoro svim" koordinatama. Ovu ideju proširujemo.

Neka je $\prod A_i/U = \{f_U \mid f \in \prod A_i\}$, gde je $f_U = \{g \in \prod A_i \mid f \sim_U g\}$. Na $\prod A_i/U$ definišemo model $\mathcal{A}$ jezika $\mathcal{L}$ na sledeći način:

Ako je R relacijsko slovo dužine n, onda je

$$\langle f_{1_U}, \ldots, f_{n_U} \rangle \in R^{\mathcal{A}} \quad akko \quad \{i \in I \mid \langle f_1(i), \ldots, f_n(i) \rangle \in R^{\mathcal{A}_i}\} \in U;$$

Ako je F funkcijsko slovo dužine $n \geqslant 1$, onda je

$$F^{\mathcal{A}}(f_{1_U}, \ldots, f_{n_U}) = g_U \quad akko \quad \{i \in I \mid F^{\mathcal{A}_i}(f_1(i), \ldots, f_n(i)) = g(i)\} \in U;$$

Ako je c konstanta, onda je

$$c^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}_i} \mid i \in I\}_U.$$

Definicija je korektna zbog svojstava filtera U.

Sa $\mathcal{A}$ obeležavaćemo strukturu čiji je nosač $\prod A_i/U$ i na kome su definisane odgovarajuće relacije izvedene od relacija na A_i i zvaćemo je **redukovani proizvod** familije $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ nad filterom U. Ako je U ultrafilter na I, onda $\prod \mathcal{A}_i/U$ zovemo **ultraproizvod**. Ako je za svako $i \in I$, $\mathcal{A}_i = \mathcal{B}$, onda redukovani proizvod obeležavamo sa $\mathcal{B}^I/U$ i zovemo **redukovani stepen** od $\mathcal{B}$ nad U. Ako je U ultrafilter na I, $\mathcal{B}^I/U$ zovemo **ultrastepen** od $\mathcal{B}$.

3.2 Łośova teorema

U ovom odeljku pretpostavljam da je U ultrafilter na I. Prirodno, postavlja se pitanje u kakvom su odnosu elementarne osobine ultraproizvoda i struktura od kojih je nastao. Kompletan odgovor na to pitanje nam daje Łośova teorema. Pre nego što je dokažemo, pokažimo jednu lemu.

Neka je $\nu : \omega \to \prod A_i/U$ valuacija u $\mathcal{A}$. Ako je $\nu(n) = f_{n_U}$ pišemo i $\nu = \langle f_{1_U}, \ldots, f_{n_U}, \ldots \rangle$. Za $\nu \in (\prod A_i/U)^\omega$ neka je $\nu_i \in A_i^\omega$ dato sa $\nu_i = \langle f_1(i), \ldots, f_n(i), \ldots \rangle$.

Lema 3.2 *Neka su date valuacije* $\nu \in (\prod A_i/U)^\omega$, $\nu = \langle f_{1_U}, \dots, f_{n_U}, \dots \rangle$ *i* $\nu_i \in A_i^\omega$, $\nu_i = \langle f_1(i), \dots, f_n(i), \dots \rangle$, $\forall i \in I$. *Tada važi:*
ako je t *term jezika* $\mathcal{L}$, *onda je*

$$t_\nu^{\mathcal{A}} = \langle t_{\nu_i}^{\mathcal{A}_i} \mid i \in I \rangle_U,$$

gde su $t_\nu^{\mathcal{A}}$ *i* $t_{\nu_i}^{\mathcal{A}_i}$ *vrednosti terma* t *u, respektivno, modelima* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{A}_i$, *za date valuacije.*

Dokaz: Dokaz dajemo indukcijom po složenosti terma t:
(1) ako je t oblika x_j, za neko j, onda je

$$t_\nu^{\mathcal{A}} = f_{j_U} = \langle f_j(i) \mid i \in I \rangle_U = \langle t_{\nu_i}^{\mathcal{A}_i} \mid i \in I \rangle_U;$$

(2) ako je t baš konstanta c, onda je

$$t_\nu^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}} = \langle c^{\mathcal{A}_i} \mid i \in I \rangle_U = \langle t_{\nu_i}^{\mathcal{A}_i} \mid i \in I \rangle_U;$$

(3) ako je t oblika $F(t_1, \dots, t_k)$, onda je

$$\begin{aligned} t_\nu^{\mathcal{A}} &= F^{\mathcal{A}}(t_{1_\nu}^{\mathcal{A}}, \dots, t_{k_\nu}^{\mathcal{A}}) \\ &= F^{\mathcal{A}}(\langle t_{1_{\nu_i}}^{\mathcal{A}_i} \mid i \in I \rangle_U, \dots, \langle t_{k_{\nu_i}}^{\mathcal{A}_i} \mid i \in I \rangle_U) \\ &= \langle F^{\mathcal{A}_i}(t_{1_{\nu_i}}^{\mathcal{A}_i}, \dots, t_{k_{\nu_i}}^{\mathcal{A}_i}) \mid i \in I \rangle_U \\ &= \langle t_{\nu_i}^{\mathcal{A}_i} \mid i \in I \rangle_U. \end{aligned}$$

■

Teorema 3.3 (Łośova teorema)
Za svaku formulu $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *jezika* $\mathcal{L}$ *važi:*

$$\mathcal{A} \models_\nu \varphi(x_1, \dots, x_n) \quad \textit{akko} \quad \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models_{\nu_i} \varphi(x_1, \dots, x_n)\} \in U.$$

Dokaz: Dokaz izvodimo indukcijom po složenosti formule φ.
Ako je $\varphi(x_1, \dots, x_n) \equiv R(t_1, \dots, t_n)$, imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models_\nu R(t_1, \dots, t_n) &\Leftrightarrow R^{\mathcal{A}}(t_{1_\nu}^{\mathcal{A}}, \dots, t_{n_\nu}^{\mathcal{A}}) \\ &\Leftrightarrow \{i \in I \mid R^{\mathcal{A}_i}(t_{1_{\nu_i}}^{\mathcal{A}_i}, \dots, t_{n_{\nu_i}}^{\mathcal{A}_i})\} \in U \\ &\Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models_{\nu_i} R(t_1, \dots, t_n)\} \in U. \end{aligned}$$

Analogno se dokazuje da važi i u slučaju kad je $\varphi \equiv t_1 = t_2$.

Ako je $\varphi \equiv \neg\psi$, tada je

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models_\nu \varphi \quad &\Leftrightarrow \quad nije \quad \mathcal{A} \models_\nu \psi \\
&\Leftrightarrow \quad \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models_{\nu_i} \psi\} \notin U \\
&\Leftrightarrow \quad \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models_{\nu_i} \neg\psi\} \in U \\
&\Leftrightarrow \quad \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models_{\nu_i} \varphi\} \in U.
\end{aligned}$$

Ako je $\varphi \equiv \psi \wedge \theta$, onda je

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models_\nu \varphi \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models_\nu \psi \quad i \quad \mathcal{A} \models_\nu \theta \\
&\Leftrightarrow \quad \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models_{\nu_i} \psi\} \in U \quad i \quad \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models_{\nu_i} \theta\} \in U \\
&\Leftrightarrow \quad \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models_{\nu_i} \psi \wedge \theta\} \in U \\
&\Leftrightarrow \quad \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models_{\nu_i} \varphi\} \in U.
\end{aligned}$$

U ovom koraku smo koristili da $X, Y \in U$ akko $X \cap Y \in U$.

Ako je $\varphi \equiv (\exists x_j)\psi(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j)$, izvodimo

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models_\nu (\exists x_j)\psi(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists g_U \in \prod A_i/U \quad tako \quad da \quad \mathcal{A} \models_{\nu(j/g_U)} \psi[f_{1_U}, \ldots, g_U] \\
&\Leftrightarrow \quad \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models_{\nu_i(j/g(i))} \psi[f_1(i), \ldots, g(i)]\} \in U \\
&\Leftrightarrow \quad \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models_{\nu_i} (\exists x_j)\psi(x_1, \ldots, x_j)\} \in U.
\end{aligned}$$

■

Jedino mesto u dokazu gde smo koristili da je U ultrafilter, a ne samo filter, je u delu gde je φ oblika $\neg\psi$.
Navedimo sada jednu trivijalnu posledicu:

Posledica 3.4 *Ako je σ rečenica jezika $\mathcal{L}$, onda*

$$\prod \mathcal{A}_i/U \models \sigma \quad akko \quad \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \sigma\} \in U.$$

Łośova teorema ne važi ako je U filter, a ne ultrafilter. Pokažimo to sledećim primerom:

Neka je $\mathcal{L} = \{+, 0\}$ jezik teorije grupa. Neka je U Fréchetov filter na ω, odnosno

$$U = \{K \subseteq \omega \mid card(\omega \setminus K) < \aleph_0\}.$$

Neka je za svako $n \in \omega \setminus \{0,1\} = I$, $\mathbf{Z_n}$ ciklična grupa reda n. Posmatrajmo rečenicu

$$\sigma = (\exists x)(x \neq 0 \wedge x + x = 0).$$

Pretpostavimo da $\prod \mathbf{Z_n}/U \models \sigma$. Tada postoji $f_U \in \prod \mathbf{Z_n}/U$ tako da je $f_U \neq 0_U$ i $f_U + f_U = 0_U$, odnosno

$$X = \{i \in I \mid f(i) +_i f(i) = 0_i\} \in F.$$

Obeležimo sa $A = \{i \in I \mid f(i) \neq 0_i\}$. Primetimo da važi da je

$$A \cap X \subseteq 2N,$$

gde je $2N$ skup prirodnih parnih brojeva. Kako $2N \notin F$, sledi da i $A \cap X \notin F$, kontradikcija. Dakle $\prod \mathbf{Z_n}/U \models \neg\sigma$.
Sa druge strane

$$\{n \in I \mid \mathbf{Z_n} \models \neg\sigma\} \subseteq 2N + 1 \notin F,$$

gde je $2N + 1$ skup prirodnih neparnih brojeva.
Ovim smo pokazali da rečenica $\neg\sigma$ važi na $\prod \mathbf{Z_n}/U$, ali $\{n \in I \mid \mathbf{Z_n} \models \neg\sigma\} \notin F$.

Pokažimo kako konstrukcija ultraproizvoda i Łośova teorema mogu efikasno da se primene u nekim drugim oblastima matematike.

Primer 1. Svako polje ima algebarsko zatvorenje.
Neka je T_F teorija polja u jeziku $\mathcal{L}_F = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ i neka je $\mathbb{K}$ polje. Proširimo jezik $\mathcal{L}_F$ na sledeći način:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F \cup \{c_a \mid a \in K\}.$$

Neka je Δ_K dijagram polja $\mathbb{K}$, odnosno Δ_K je skup svih atomarnih rečenica i njihovih negacija jezika $\mathcal{L}$ koje važe u $\mathbb{K}$.
Dalje, za $f(x) \in K[x]$, neka je $K_{f(x)}$ polje razlaganja polinoma $f(x)$ nad K ($K_{f(x)}$ postoji prema Kronekerovoj teoremi).
Za dato $f(x) \in K[x]$ neka je

$$I_{f(x)} = \{g(x) \in K[x] \mid f(x) = (x - \beta_1) \cdot \dots \cdot (x - \beta_n), \beta_i \in K_{g(x)}\}.$$

$\{I_{f(x)} \mid f(x) \in K[x]\}$ ima s.k.p. jer za proizvoljne $f_1(x), \dots, f_n(x) \in K[x]$ važi

$$\prod_{i=1}^{n} f_i(x) \in \bigcap_{i=1}^{n} I_{f_i(x)}.$$

Dakle, postoji ultrafilter U koji sadrži familiju $\{I_{f(x)} \mid f(x) \in K[x]\}$. Neka je

$$K^* = \prod_{f(x)\in K[x]} K_{f(x)}/U.$$

Primetimo da $K^* \models T_F \cup \Delta_K$, odnosno K^* sadrži kopiju polja $\mathbb{K}$. Neka $p(x) \in K[x]$, $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Posmatrajmo

$$\begin{aligned}\varphi \quad \equiv \quad & \exists y_1 \ldots \exists y_n (y_1 + \cdots + y_n = -a_{n-1} \wedge y_1 y_2 + \cdots + y_{n-1} y_n = a_{n-2} \wedge \\ & \ldots \quad \wedge y_1 \ldots y_n = (-1)^n a_0).\end{aligned}$$

Skup $\{g(x) \mid K_{g(x)} \models \varphi\} = I_{p(x)} \in U$, pa $K^* \models \varphi$. Sada je $\{\alpha \in K^* \mid \alpha \quad je \quad algebarski \quad nad \quad K\}$ algebarsko zatvorenje polja $\mathbb{K}$.

Primer 2. (Teorema kompaktnosti) Neka je data teorija T (T je konzistentan, deduktivno zatvoren skup rečenica). Ako svaki konačan podskup skupa T ima model, onda i T ima model.
Neka je T skup rečenica. Za $P \in S_\omega(T)$ neka $M_P \models P$. Definišimo $J_P = \{Q \in S_\omega(T) \mid M_Q \models P\}$ i pokažimo da $\mathcal{J} = \{J_P \mid P \in S_\omega(T)\}$ ima s.k.p. Ako $P_1, \ldots, P_n \in S_\omega(T)$, tada

$$P_1 \cup \cdots \cup P_n \in J_{P_1} \cap \cdots \cap J_{P_n}.$$

Neka je U ultrafilter koji sadrži familiju $\mathcal{J}$. Tada, $\prod_{P\in S_\omega(T)} M_P/U \models T$ jer za $\varphi \in T$ važi da

$$\{P \in S_\omega(T) \mid M_P \models \varphi\} = J_{\{\varphi\}} \in F.$$

Primer 3. Nestandardna analiza.
Neka je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva i neka je K predikatski račun sa jednakošću koji sadrži sledeće simbole:
Za svako $r \in \mathbb{R}$, postoji konstanta a_r;
za svaku n-arnu funkciju φ na $\mathbb{R}$, postoji funkcijsko slovo f_φ;
za svaku n-arnu relaciju Φ na $\mathbb{R}$, postoji relacijsko slovo A_Φ.
$\mathbb{R}$ posmatramo kao domen modela $\mathcal{R}$ u K, gde je $a_r^{\mathcal{R}} = r$, $f_\varphi^{\mathcal{R}} = \varphi$ i $A_\Phi^{\mathcal{R}} = \Phi$.
Neka je F neglavni ultrafilter na ω i neka je $\mathcal{R}^\spadesuit = \mathcal{R}^\omega/F$ čiji domen obeležavamo sa $R^\spadesuit$. Znamo da je $\mathcal{R}^\spadesuit \equiv \mathcal{R}$ kao i to da $\mathcal{R}^\spadesuit$ ima elementarni podmodel $\mathcal{R}^\sharp$ koji je izomorfna slika modela $\mathcal{R}$. Elemente skupa $R^\spadesuit \setminus R^\sharp$ zovemo nestandardni realni brojevi.
Neka je R_1 skup "konačnih" elemenata skupa $R^\spadesuit$, odnosno $R_1 = \{z \mid \exists u \in R^\sharp \quad |z| < u\}$ i neka je $R_0 = \{z \mid \forall u \in R^{\sharp +} \quad |z| < u\}$ skup "infinitezimala". Za $x \in R_1$ možemo definisati realan broj r tako da je $x - r$ infinitezimala.

Takav broj r zovemo standardni deo od x, u oznaci $st(x)$. Ako je x realan broj, onda je $st(x) = x$. Ako je $st(x) = st(y)$, pišemo $x \approx y$, tj. $x \approx y$ akko je $x - y$ infinitezimala, odnosno x i y su "beskonačno blizu".
Neka je $\omega^\spadesuit = \{f_F \in R^\spadesuit \mid \{j \mid f(j) \in \omega\} \in F\}$. Ako je s niz realnih brojeva, tada postoji funkcija koja je proširenje datog niza na domen $\omega^\spadesuit$.

Teorema 3.5 *Neka je s niz realnih brojeva i c realan broj. Neka je $s^\spadesuit$, funkcija koja preslikava skup $\omega^\spadesuit$ u $R^\spadesuit$, korespodentna funkciji s u R. Tada, $\lim s_n = c$ akko $s^\spadesuit(n) \approx c$, za svako $n \in \omega^\spadesuit \setminus \omega$.*

Dokaz: Neka je $\lim s_n = c$. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Postoji $n_0 \in \omega$ takav da

$$\forall k(k \in \omega \wedge k \geqslant n_0 \Rightarrow |s_k - c| < \varepsilon)$$

važi u $\mathcal{R}$. Stoga, korespodentna rečenica

$$\forall k(k \in \omega^\spadesuit \wedge k \geqslant n_0 \Rightarrow |s^\spadesuit(k) - c| < \varepsilon)$$

važi u $\mathcal{R}^\spadesuit$. Za svako $n \in \omega^\spadesuit \setminus \omega$ važi da je $n > n_0$ pa $|s^\spadesuit(n) - c| < \varepsilon$.
Obrnuto, neka je $s^\spadesuit(n) \approx c, \forall n \in \omega^\spadesuit \setminus \omega$. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i $n_1 \in \omega^\spadesuit \setminus \omega$. Tada

$$\forall k(k \in \omega^\spadesuit \wedge k \geqslant n_1 \Rightarrow |s^\spadesuit(k) - c| < \varepsilon).$$

Odgovarajuća rečenica koja važi u $\mathcal{R}$ nam daje $\lim s_n = c$. ∎

Poglavlje 4

Konačna aksiomatizabilnost

U ovom odeljku ćemo ispitati da li su neka od bazičnih matematičkih svojstava (kao, na primer, "biti konačan", "biti beskonačan", "biti polje", "biti dobro uređen skup" itd.) i svojstva prvog reda ili možda samo generalna svojstva prvog reda ili, pak, nijedno od toga.

Da ne bi dolazilo do zabune, ponovo pretpostavljamo da su sve strukture sa kojima radimo istog tipa.
Svojstvo P je svojstvo prvog reda ako se može opisati jednom rečenicom. Formalno, ovo definišemo na sledeći način:

Definicija 4.1 *Svojstvo P je* **svojstvo prvog reda** *akko postoji rečenica σ tako da*

$$\mathcal{A} \models \sigma \quad \textit{akko} \quad \mathcal{A} \textit{ ima svojstvo } P.$$

Definicija 4.2 *Svojstvo P je* **generalno svojstvo prvog reda** *akko postoji skup rečenica Σ takav da struktura ima svojstvo P akko je model za Σ.*

Primetimo da je svojstvo prvog reda i generalno svojstvo prvog reda, ali obrat ne mora da važi.

Primeri.

(1) Za svako $n \in \omega$ neka je $\exists^{\geqslant n}$ rečenica

$$(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)(x_1 \neq x_2 \wedge \cdots \wedge x_1 \neq x_n \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \neq x_n).$$

Lako se vidi da $\mathcal{A} \models \exists^{\geqslant n}$ akko A sadrži bar n elemenata. Dakle svojstvo "sadržati bar n elemenata" jeste svojstvo prvog reda.

(2) Neka je $\exists!^n$ rečenica

$$\exists^{\geqslant n} \wedge \neg\exists^{\geqslant n+1},$$

tada $\mathcal{A} \models \exists!^n$ akko A sadrži tačno n elemenata. Stoga, svojstvo "imati tačno n elemenata" je svojstvo prvog reda (mogli smo ga definisati i sa rečenicom $(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)(\forall y)(\bigwedge_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i \neq x_j) \wedge \bigvee_{i=1}^{n}(y = x_i))$.

(3) Neka je $\Sigma = \{\exists^{\geqslant n} \mid n < \omega\}$. Jasno, $\mathcal{A}$ je beskonačan akko je model za Σ. Dakle, "biti beskonačan" je generalno svojstvo prvog reda.

Upravo smo videli da je svojstvo "biti kardinalnosti n", za proizvoljno $n \in \omega$, svojstvo prvog reda, a pokazaćemo da svojstvo "biti konačan" nije ni gene ralno svojstvo prvog reda.

Pokažimo,kao posledicu Łośove teoreme, da "biti konačan" (a samim tim i beskonačan) nije svojstvo prvog reda (naravno, "biti beskonačan" jeste generalno svojstvo prvog reda). Da bismo to pokazali treba nam prvo jedna lema.

Lema 4.3 *Neka je Σ skup rečenica. Ako postoje proizvoljno veliki konačni modeli za Σ, onda postoji i beskonačan model za Σ.*

Dokaz: Pretpostavimo da Σ ima proizvoljno velike konačne modele. Neka je $\langle \mathcal{A}_r \mid r < \omega\rangle$ niz konačnih modela za Σ takav da ako je A_r kardinalnosti n_r i $n_r < n_s$, za $r < s < \omega$. Neka je F neglavni ultrafilter na ω i neka je $\mathcal{A} = \prod \mathcal{A}_r/F$. Kako na svakom $\mathcal{A}_r$ važi svaka rečenica iz Σ, prema Łośovoj teoremi imamo da je i $\mathcal{A}$ model za Σ. Za svako $n \in \omega$, rečenica $\exists!^n$ važi za najviše jedno $\mathcal{A}_r$, a pošto je F neglavni, F ne sadrži jednoelementne skupove pa zaključujemo (opet prema Łośovoj teoremi) da $\exists!^n$ ne važi na $\mathcal{A}$ ni za jedno $n < \omega$. Dakle, $\mathcal{A}$ je beskonačan. ■

Posledica 4.4 *Svojstvo "biti konačan skup" nije generalno svojstvo prvog reda.*

Dokaz: Direktna posledica prethodne leme. ■

Sledeće što želimo da pokažemo je da svojstvo "biti dobro uređen skup" nije generalno svojstvo prvog reda. Da bismo to pokazali pokažimo prvo još nekoliko primera.

(4) Neka je P relacijsko slovo dužine 2 i σ_O rečenica

$$(\forall x_0)\neg P(x_0,x_0) \wedge (\forall x_0)(\forall x_1)[P(x_0,x_1) \vee P(x_1,x_0) \vee x_0 = x_1] \wedge$$
$$\wedge(\forall x_0)(\forall x_1)(\forall x_2)[P(x_0,x_1) \wedge P(x_1,x_2) \Rightarrow P(x_0,x_2)].$$

$\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}\rangle$ je model za σ_O akko je $P^{\mathcal{A}}$ (striktno) totalno uređenje na A.

(5) Neka je σ_{OL} rečenica

$$\sigma_O \wedge (\exists x_0)(\forall x_1)\neg P(x_0,x_1).$$

$\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}\rangle$ je model za σ_{OL} akko je $P^{\mathcal{A}}$ totalno uređenje na A sa najvećim elementom.

(6) Neka je σ_{DOL} rečenica

$$\sigma_{OL}\wedge(\forall x_0)[(\exists x_1)P(x_1,x_0) \Rightarrow (\exists x_2)[P(x_2,x_0)\wedge(\forall x_3)(\neg[P(x_2,x_3)\wedge P(x_3,x_0)])]].$$

$\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}\rangle$ je model za σ_{DOL} akko je $P^{\mathcal{A}}$ totalno uređenje na A sa najvećim elementom u kojem svaki element od koga postoji manji ima neposrednog prethodnika.

Kao što smo upravo videli, "biti totalno uređenje sa najvećim elementom u kojem svaki element od koga postoji manji ima neposrednog prethodnika" jeste svojstvo prvog reda, a sada ćemo dokazati da "biti dobro uređenje" nije ni generalno svojstvo prvog reda. Da bismo to dokazali koristićemo jednu trivijalnu činjenicu koja kaže da ako je P_0 svojstvo prvog reda, a P_1 proizvoljno svojstvo i ukoliko se P_0 i P_1 međusobno ne isključuju, onda svojstvo "imati osobine P_0 i P_1" je generalno svojstvo prvog reda akko je P_1 generalno svojstvo prvog reda.

Teorema 4.5 *Osobina "biti dobro uređen skup" nije generalno svojstvo prvog reda.*

Dokaz: Postoje proizvoljno veliki konačni dobro uređeni modeli za σ_{DOL}, ali ne postoji beskonačan dobro uređen model za σ_{DOL}, što nam daje da biti dobro uređen skup nije generalno svojstvo prvog reda. ■

(7) Neka je σ_{DOS} rečenica

$$\sigma_O \wedge (\forall x_0)(\forall x_1)[P(x_0, x_1) \Rightarrow (\exists x_2)[P(x_0, x_2) \wedge P(x_2, x_1)]].$$

$\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}} \rangle$ je gust i uređen skup akko je model za σ_{DOS}.

U nastavku dajemo primere iz algebarskih struktura i dokazujemo koja svojstva jesu, a koja nisu svojstva prvog reda.

(8) (**Grupe**)
U ovom slučaju, teorija se najčešće interpretira u jeziku $\mathcal{L}_G = \{+, -, 0\}$, gde je $+$ binarna operacija, $-$ unarna, a 0 je konstanta. Sistem aksioma je:

$$\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = x + (y + z))$$

$$\forall x (x + 0 = x)$$

$$\forall x (x + (-x) = 0).$$

Ako je σ_G konjunkcija ovih rečenica, onda je $\mathcal{G} = \langle G, +^{\mathcal{G}}, -^{\mathcal{G}}, 0^{\mathcal{G}} \rangle$ grupa akko $\mathcal{G} \models \sigma_G$. Dakle, "biti grupa" je svojstvo prvog reda.
$\mathcal{G}$ je komutativna akko $\mathcal{G} \models \sigma_G \wedge \forall x \forall y (x + y = y + x)$ pa je i svojstvo "biti komutativna grupa" svojstvo prvog reda.

(9) (**Prsteni**)
U ovom slučaju odgovarajući jezik je $\mathcal{L}_R = \{+, -, \cdot, 0\}$, gde su $+, \cdot$ binarne funkcije, - unarna, a 0 konstanta. $\mathcal{R} = \langle R, +^{\mathcal{R}}, -^{\mathcal{R}}, 0^{\mathcal{R}}, \cdot^{\mathcal{R}} \rangle$ je prsten akko je $\langle R, +^{\mathcal{R}}, -^{\mathcal{R}}, 0^{\mathcal{R}} \rangle$ Abelova grupa i $\mathcal{R} \models \forall x \forall y \forall z (x(y+z) = xy + xz \wedge (y+z)x = yx + zx)$ i $\mathcal{R} \models \forall x \forall y \forall z ((xy)z = x(yz))$. Teoriju prstena obeležavaćemo sa σ_R.
Teorija komutativnih prstena σ_{CR} je $\sigma_R \wedge \forall x \forall y (xy = yx)$ pa je i svojstvo "biti komutativan prsten" svojstvo prvog reda.

(12) (**Polja**)
Jezik teorije polja je $\mathcal{L}_F = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$, a teorija polja σ_F je

$$\sigma_{CR} \wedge (0 \neq 1) \wedge \forall x (x \cdot 1 = x \wedge \forall x \exists y (xy = 1)).$$

(13) (**Polja karakteristike** p)
Za polje kažemo da je konačne karakteristike p akko je p najmanji pozitivan prirodan broj takav da za svaki element x tog polja važi

$$px = 0,$$

gde je

$$px = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{p-sabiraka}.$$

Poznato nam je iz algebre da je polje karakteristike p akko je p prost broj, kao i činjenica da ako je $q \neq p$ i $\mathcal{A}$ polje karakteristike p, onda $\mathcal{A}$ nije polje karakteristike q.
Polje je karakteristike p akko zadovoljava $\sigma_F \wedge C_p \equiv \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p-sabiraka} = 0$.
Polje koje nije karakteristike p, ni za jedan prost broj p zovemo polje karakteristike 0.

(14) (**Polja karakteristike 0**)
Teorija polja karakteristike 0 je $\Delta_F^0 = \sigma_F \cup \{\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p-sabiraka} \neq 0 \mid p \in P\}$, gde je P skup svih prostih brojeva. Dakle, "biti polje karakteristike p" je svojstvo prvog reda, a "biti polje karakteristike 0" je generalno svojstvo prvog reda. Pokažimo da nije i svojstvo prvog reda.

Teorema 4.6 *Svojstvo "biti polje karakteristike 0" nije svojstvo prvog reda.*

Dokaz: Pretpostavimo da postoji rečenica σ_F^0 takva da $\mathcal{A} \models \sigma_F^0$ akko je $\mathcal{A}$ polje karakteristike 0. Za svaki prost broj p neka je $\mathcal{A}_p$ polje karakteristike p, odnosno model za $\{\sigma_F, C_p\}$. Neka je F neglavni ultrafilter na skupu svih prostih brojeva i neka je

$$\mathcal{A} = \prod_p \mathcal{A}_p / F.$$

Kako je, za svako p, $\mathcal{A}_p$ model za σ_F, prema Łośovoj teoremi imamo da je $\mathcal{A}$ model za σ_F. Za svako p, C_p važi na tačno jednom faktoru-$\mathcal{A}_p$. Pošto F ne sadrži jednoelementne skupove (ponovo prema Łośovoj teoremi) $\mathcal{A}$ nije model za C_p. Dakle, $\mathcal{A}$ je karakteristike 0 pa $\mathcal{A} \models \sigma_F^0$. Kako σ_F^0 ne važi ni na jednom faktoru $\mathcal{A}_p$, dobijamo kontradikciju sa Łośovom teoremom. ■

(15) (**Vektorski prostori**)
Uobičajen pristup vektorskim prostorima je taj da se sastoje od dva disjunktna skupa, polja skalara i komutativne grupa vektora, zajedno sa nekim relacijama koje važe između njih. Postoji način da se taj "problem" izbegne, odnosno da pojam vektorskog prostora izrazimo preko jezika prvog reda, gde sve promenljive pripadaju jednom skupu. Upravo to radimo u nastavku.

Jezik koji koristimo će se sastojati od dva unarna relacijska slova V i F, četiri ternarna relacijska, S, P, A, M i tri konstantna simbola 0_F, 1_F i 0_V. Intuitivno, $V(x)$ nam govori da je x vektor, $F(x)$ da je x skalar, a S, P, A, M nam predstavljaju sabiranje skalara, množenje skalara, sabiranje vektora, množenje vektora skalarom, respektivno. 0_F nam predstavlja nula skalar,1_F jedinicu skalar, a 0_V nula vektor.
S će definisati Abelovu grupu na skupu "skalara" sa neutralnim elementom 0_F. Naša teorija će uključivati rečenice:
$V(0_V) \wedge F(0_F) \wedge F(1_F) \wedge \forall x(V(x) \Leftrightarrow \neg F(x))$;
$\forall x \forall y \forall z(V(x) \vee V(y) \vee V(z) \Rightarrow \neg S(x,y,z))$;
$\forall x \forall y(F(x) \wedge F(y) \Rightarrow \exists! z(S(x,y,z)))$;
$\forall x \forall y \forall z \forall t \forall s \forall u \forall v(S(x,y,z) \wedge S(t,z,u) \wedge S(y,z,s) \wedge S(x,s,u) \Rightarrow u = v)$;
$\forall x \forall y \forall z \forall u(S(x,y,z) \wedge S(y,x,u) \Rightarrow z = u)$;
$\forall x(F(x) \Rightarrow S(x, 0_F, x)) \wedge \forall x(F(x) \Rightarrow \exists y(F(y) \wedge S(x,y,0_F)))$.
Analogno, P će definisati komutativnu polugrupu sa jedinicom (1_F) na skupu skalara gde će još važiti:
$\forall x(F(x) \wedge x \neq 0_F \Rightarrow \exists y P(x,y,1_F))$;
$\forall x \forall y \forall z \forall s \forall t_1 \forall t_2 \forall u \forall v(S(y,z,s) \wedge P(x,s,u) \wedge P(x,y,t_1) \wedge P(x,z,t_2) \wedge S(t_1,t_2,v) \Rightarrow u = v)$.
Po simetriji stvari, A će definisati Abelovu grupu na skupu "vektora" sa neutralnim elementom 0_V, a M će definisati množenje vektora skalarom na sledeći način:
$\forall x \forall y \forall z(V(x) \vee F(y) \vee F(z) \Rightarrow \neg M(x,y,z))$;
$\forall x \forall y \forall z \forall s \forall t_1 \forall t_2 \forall u \forall v(A(y,z,s) \wedge M(x,s,u) \wedge M(x,y,t_1) \wedge M(x,z,t_2) \wedge A(t_1,t_2,v) \Rightarrow u = v)$;
$\forall x \forall y \forall z \forall w \forall t_1 \forall t_2 \forall u \forall v(S(x,y,z) \wedge M(z,u,v) \wedge M(x,u,t_1) \wedge M(y,u,t_2) \wedge A(t_1,t_2,w) \Rightarrow v = w)$;
$\forall x \forall y \forall z \forall t \forall s \forall v(P(x,y,s) \wedge M(s,z,u) \wedge M(y,z,t) \wedge (y,t,v) \Rightarrow u = v)$;
$\forall x(V(x) \Rightarrow M(1_F, x, x))$.
Dakle, teorija vektorkih prostora je skup svih navedenih rečenica.

(16) (**Konačno dimenzionalni vektorski prostori**)
Dimenzija vektorskog prostora je n, ako postoji n linearno nezavisnih vektora koji generišu prostor. Uvedimo neke oznake koje će nam dosta olakšati dalju diskusiju.
Neka je $S_n(u_1, \ldots, u_n; x_1, \ldots, x_n; y)$ formula
$(\exists z_1) \ldots (\exists z_n)(\exists t_1) \ldots (\exists t_{n-2})[M(u_1,x_1,z_1) \wedge \cdots \wedge M(u_n,x_n,z_n) \wedge A(z_1,z_2,t_1) \wedge A(t_1,z_3,t_2) \wedge \cdots \wedge A(t_{n-3},z_{n-1},t_{n-2}) \wedge A(t_{n-2},z_n,y)]$.

Stoga, $S_n(u_1, \ldots, u_n; x_1, \ldots, x_n; y)$ nam kaže

$$y = u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n.$$

Neka je dalje

$$LI_n(x_1, \ldots, x_n)$$

zamena za formulu

$$(\forall u_1)\ldots(\forall u_n)[S_n(u_1, \ldots, u_n; x_1, \ldots, x_n; \mathbf{0}) \Rightarrow (u_1 = 0 \wedge \cdots \wedge u_n = 0)].$$

$LI_n(x_1, \ldots, x_n)$ nam kaže da su vektori $x_1, \ldots, x_n$ linearno nezavisni.
Neka nam je $\delta_{dim(n)}$ rečenica:

$$(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)(LI_n(x_1, \ldots, x_n) \wedge (\forall y)[V(y) \Rightarrow (\exists u_1)\ldots(\exists u_n) S_n(u_1, \ldots, u_n; x_1, \ldots, x_n; y)]).$$

Vektorski prostor je dimenzije n akko je model za $\delta_{dim(n)}$. Dakle, za svako n, "biti vektorski prostor dimenzije n" je svojstvo prvog reda.

Ako je $\Sigma = \{\sigma_{VS}\} \cup \{\neg\delta_{dim(n)} \mid n \in \omega\}$, onda je $\mathcal{A}$ beskonačno dimenzionalan vektorski prostor akko je model za Σ. Dakle, "biti beskonačno dimenzionalan vektorski prostor" je generalno svojstvo prvog reda.
Pokažimo da nije i svojstvo prvog reda. Pretpostavimo da jeste i neka $\mathcal{A} \models \sigma$ akko je $\mathcal{A}$ beskonačno dimenzionalan vektorski prostor. Obeležimo sa $\mathcal{A}_n$ vektorski prostor dimenzije n, za sve $n \in \omega$. Neka je F neglavni ultrafilter na ω. Tada, po Łośovoj teoremi imamo da je

$$\emptyset = \{n \in \omega \mid \mathcal{A}_n \models \sigma\} \in F,$$

što nam daje kontradikciju.
Dakle, "biti beskonačan", a samim tim i konačan, vektorski prostor nije svojstvo prvog reda.

(18) (**Algebarski zatvorena polja**)
Za polje kažemo da je algebarski zatvoreno ako se svaki polinom stepena bar jedan, sa koeficijentima iz tog polja, može rastaviti na linearne faktore. Ekvivalentan uslov datom uslovu je da svaki nekonstantni polinom ima nulu u tom polju.

Polje je algebarski zatvoreno akko zadovoljava rečenice

$$\varphi_n \equiv \forall x_0 \ldots \forall x_n (x_n \neq 0 \Rightarrow \exists y (x_n y^n + \cdots + x_1 y + x_0 = 0)),$$

za sve $n \geqslant 1$. Dakle, "biti algebarski zatvoreno polje" jeste generalno svojstvo prvog reda.

Pokažimo da nije i svojstvo prvog reda.
Da bismo to pokazali pozivamo se na tvrđenje koje kaže da za svako $n \in \omega$ postoji polje koje nije algebarski zatvoreno u kom svi polinomi stepena $\leqslant n$ imaju nulu (dokaz ovog tvrđenja može se naći u [2]).

Teorema 4.7 *Svojstvo "biti algebarski zatvoreno polje" nije svojstvo prvog reda.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno i neka je σ odgovarajuća rečenica. Za svako $n \in \omega$ neka je $\mathcal{A}_n$ polje koje nije algebarski zatvoreno i u kom svi polinomi stepena $\leqslant n$ imaju nulu. Neka je F neglavni ultrafilter na ω i neka je $\mathcal{A} = \prod \mathcal{A}_n / F$.

Jasno je da je $\mathcal{A}$ polje. Za svako n, rečenica φ_n važi u svim sem konačno mnogo faktora proizvoda $\mathcal{A}$, pa zaključujemo da φ_n važi u $\mathcal{A}$. Dakle, $\mathcal{A}$ je algebarski zatvoreno polje, pa $\mathcal{A} \models \sigma$. Prema Łośovoj teoremi imamo da $\mathcal{A} \models \neg\sigma$, kontradikcija. $\blacksquare$

Poglavlje 5

Kardinalnost ultraproizvoda

U ovoj glavi bavimo se isključivo kardinalnošću ultraproizvoda, odnosno ispitujemo kako na kardinalnost ultraproizvoda utiče kardinalnost njegovih faktora, kardinalnost indeksnog skupa i priroda ultrafiltera. Videćemo da bitnu ulogu igra priroda ultrafiltera koje smo pomenuli u prvoj glavi.

Pre nego što krenemo da se bavimo kardinalnošću ultraproizvoda, pokažimo prvo nekoliko stavova vezanih za skupovna svojstva ultraproizvoda na koja ćemo se pozivati u nastavku u ovoj glavi.

5.1 Skupovna svojstva ultraproizvoda

Neka je F ultrafilter na I i neka je $G \subseteq I$ proizvoljan. Sa $F \upharpoonright G$ označavamo skup:

$$F \upharpoonright G = \{X \cap G \mid X \in F\}.$$

Lema 5.1 *Ako je F ultrafilter na I i ako $G \in F$, onda je $F \upharpoonright G$ ultrafilter na G i za svako $X \subseteq I$ važi:*

$$X \in F \quad \textit{akko} \quad X \cap G \in F \upharpoonright G.$$

Dokaz: (1) Pošto je $G = G \cap G$, a $G \in F$, sledi $G \in F \upharpoonright G$.
(2) Neka $A, B \in F \upharpoonright G$. Tada postoje $X, Y \in F$ tako da

$$A = X \cap G,$$

$$B = Y \cap G.$$

Stoga je $X \cap Y \in F$, pa

$$A \cap B = (X \cap Y) \cap G \in F \restriction G.$$

(3) Neka $A \in F \restriction G$ i $A \subseteq B \subseteq G$. Ako je, za $X \in F$, $A = X \cap G$ i ako je $Z = X \cup B$ imamo da $B = Z \cap G \in F \restriction G$.
Dakle, $F \restriction G$ je filter na G, pokažimo da je i ultrafilter. Pre nego što pokažemo da je ultrafilter pokažimo:

$$X \cap G \in F \restriction G.$$

Neka $X \cap A \in F \restriction G$. Ako $Y \in F$ takvo da je $X \cap A = X \cap Y$ imamo $A \supseteq X \cap A = X \cap Y \in F$.

Neka je, dalje, $A \subseteq G$. Ako je $A \in F$, onda je $A \in F \restriction G$. Ako $A^c \in F$, onda je $G \setminus A = G \cap A^c \in F \restriction G$. ■

Napomena. Strukture $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jezika $\mathcal{L}$ su izomorfne (u oznaci $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$) akko postoji bijektivno preslikavanje φ skupa A na B tako da za svako funkcijsko slovo f, svako relacijsko slovo ρ, svaku konstantu c i svako $a_1, \ldots, a_n \in A$ važi:

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a \quad akko \quad f^{\mathcal{B}}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) = \varphi(a),$$

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \rho^{\mathcal{A}} \quad akko \quad \langle \varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n) \rangle \in \rho^{\mathcal{B}},$$

$$\varphi(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}.$$

Teorema 5.2 *Neka nam je data familija struktura jezika $\mathcal{L}$, $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$, neka je F ultrafilter na I i neka $G \in F$. Tada važi:*

$$\mathcal{A} = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i / F \cong \mathcal{B} = \prod_{i \in G} \mathcal{A}_i / F \restriction G.$$

Dokaz: Definišimo preslikavanje

$$\Phi : \prod_{i \in I} A_i / F \to \prod_{i \in G} A_i / F \restriction G$$

na sledeći način:
ako $f \in \prod_{i \in I} A_i$, onda sa $f \restriction G$ obeležavamo restrikciju funkcije f na G, odnosno $f \restriction G \in \prod_{i \in G} A_i$. Stavimo

$$\Phi(f/F) = f \restriction G / F \restriction G.$$

Trivijalno, preslikavanje je sirjektivno. Pokažimo da se dobro slaže sa funkcijama i relacijama (dobro slaganje sa relacijom "=" implicira injektivnost).
Ako je H n-arna funkcija jezika $\mathcal{L}$, tada je:

$$\begin{aligned}
H^{\mathcal{A}}(f_1/F,\ldots,f_n/F)=g/F &\Leftrightarrow \{i\in I \mid H_i^{\mathcal{A}_i}(f_1(i),\ldots,f_n(i))=g(i)\}\in F\\
&\Leftrightarrow \{i\in I \mid H_i^{\mathcal{A}_i}(f_1(i),\ldots,f_n(i))=g(i)\}\cap G\in F\restriction G\\
&\Leftrightarrow \{i\in G \mid H_i^{\mathcal{A}_i}(f_1(i),\ldots,f_n(i))=g(i)\}\in F\restriction G\\
&\Leftrightarrow H^{\mathcal{B}}(f_1\restriction G/F\restriction G,\ldots,f_n\restriction G/F\restriction G)=g\restriction G/F\restriction G\\
&\Leftrightarrow H^{\mathcal{B}}(\Phi(f_1/F),\ldots,\Phi(f_n/F))=\Phi(g/F).
\end{aligned}$$

Pokažimo na sličan način da se Φ slaže i sa relacijama.
Ako je R n-arna relacija jezika $\mathcal{L}$, onda je:

$$\begin{aligned}
\langle f_1/F,\ldots,f_n/F\rangle\in R^{\mathcal{A}} &\Leftrightarrow \{i\in I \mid \langle f_1(i),\ldots,f_n(i)\rangle\in R_i^{\mathcal{A}_i}\}\in F\\
&\Leftrightarrow \{i\in I \mid \langle f_1(i),\ldots,f_n(i)\rangle\in R_i^{\mathcal{A}_i}\}\cap G\in F\restriction G\\
&\Leftrightarrow \{i\in G \mid \langle f_1(i),\ldots,f_n(i)\rangle\in R_i^{\mathcal{A}_i}\}\in F\restriction G\\
&\Leftrightarrow \langle f_1\restriction G/F\restriction G,\ldots,f_n\restriction G/F\restriction G\rangle\in R^{\mathcal{B}}\\
&\Leftrightarrow \langle \Phi(f_1/F),\ldots,\Phi(f_n/F)\rangle\in R^{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

■

Posledica 5.3 *Ako je F glavni ultrafilter na I, onda postoji $k\in I$ tako da važi:*

$$\prod \mathcal{A}_i/F\cong\mathcal{A}_k.$$

Dokaz: Pošto je F glavni postoji neko $k\in I$ tako da $\{k\}\in F$. Iz prethodne teoreme imamo:

$$\prod \mathcal{A}_i/F\cong\prod_{i\in\{k\}}\mathcal{A}_i/F\restriction\{k\}\cong\mathcal{A}_k.$$

■

Dakle, u razmatranju nisu od interesa glavni ultrafilteri. Pokažimo još jednu korisnu posledicu prethodne teoreme:

Posledica 5.4 *Ako je F neglavni ultrafilter na I, postoji $J\subseteq I$ i G uniformni ultrafilter na J tako da za proizvoljnu familiju istotipnih struktura važi:*

$$\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/F\cong\prod_{i\in J}\mathcal{A}_i/G.$$

Dokaz: Neka je $\lambda = min\{card(X) \mid X \in F\}$ i neka je J proizvoljan skup iz F čija je kardinalnost baš λ. Po prethodnoj teoremi je

$$\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i/F \cong \prod_{i\in J} \mathcal{A}_i/G,$$

gde je $G = F \restriction J$. Za svako $X \in F$ imamo da je $X \cap J$ element F čija je kardinalnost λ. G je uniforman ultrafilter jer je svaki element iz G oblika $X \cap J$, $X \in F$. ■

Lema 5.5 *Ako je $\mathcal{A}$ struktura kardinalnosti najviše λ i ako je F λ^+-kompletan ultrafilter na I, onda*

$$\mathcal{A}^I/F \cong \mathcal{A}.$$

Dokaz: Posmatrajmo preslikavanje $d : A \to A^I/F$ definisano sa

$$d(a) = a^*/F,$$

gde $a^* \in A^I$ i $\forall i \in I$, $a^*(i) = a$.
Pokažimo da je d sirjekcija. Neka $f/F \in A^I/F$. Za svako $a \in A$ neka je

$$X_a = \{i \in I \mid f(i) = a\}.$$

$\{X_a \mid a \in A\}$ je particija skupa I na najviše λ disjunktnih skupova. Zbog leme 2.28 postoji $a_0 \in A$ tako da $X_{a_0} \in F$. Stoga $f/F = d(a_0)$.
Dokazi injektivnosti i homomorfnosti funkcije d su trivijalni. ■

5.2 Kardinalnost ultraproizvoda konačnih kardinala

Pređimo sada na diskusiju o kardinalnostima ultraproizvoda, na čemu je i težiste ovog rada.

Lema 5.6 *Ako za svako $i \in I$, $card(A_i) = card(B_i)$ i ako je F ultrafilter na I, onda*

$$card(\prod A_i/F) = card(\prod B_i/F).$$

Dokaz: Trivijalno. ■

Ova lema je suštinska za rad u ovoj glavi jer nam govori da je za kardinalnost ultraproizvoda jedino bitna kardinalnost faktora, a ne i koji su skupovi u pitanju; stoga ćemo uvek pretpostavljati da su svi faktori baš kardinali. Dakle, ispitivaćemo problem kardinalnosti $\prod \alpha_i/F$, gde je za svako $i \in I$, α_i kardinal. Jasno, ako je za svako $i \in I$, $\alpha_i = \alpha$, odgovarajući ultrastepen obeležavamo sa α^I/F.

Napomena. Dalje, uvek ćemo pretpostavljati da je I proizvoljan indeksni skup kardinalnosti γ i da je F ultrafilter na I, pa to nećemo eksplicitno naglašavati u nastavku.

Navedimo sada još jednu lemu, čiji je dokaz takođe trivijalan pa ga nećemo navoditi:

Lema 5.7 *$min\{\alpha_i \mid i \in I\} \leqslant card(\prod \alpha_i/F) \leqslant \prod \alpha_i$.*

Posledica 5.8 *(a) $\alpha \leqslant card(\alpha^I/F) \leqslant \alpha^\gamma$;*
(b) Ako je $\alpha = \alpha^\gamma$, onda je $card(\alpha^I/F) = \alpha$.

Tvrđenje 5.9 *Neka je $\{i \in I \mid \beta_i \leqslant \alpha_i\} \in F$, gde su α_i, β_i kardinali. Tada*

$$card(\prod \beta_i/F) \leqslant card(\prod \alpha_i/F).$$

Dokaz: Obeležimo sa $X = \{i \in I \mid \beta_i \leqslant \alpha_i\}$. Neka je za $i \in I \setminus X$, a_i proizvoljan element iz α_i. Definišimo preslikavanje $\Phi : \prod \beta_i/F \to \prod \alpha_i/F$ sa
Za $f \in \prod \beta_i$, neka je $\hat{f} \in \prod \alpha_i$ tako da važi:

$$\hat{f}(i) = \begin{cases} f(i), & i \in X \\ a_i, & i \in I \setminus X. \end{cases}$$

$\Phi(f/F) = \hat{f}/F$. Pokažimo da je Φ injekcija.
Pretpostavimo da je $\Phi(f/F) = \Phi(g/F)$, gde $f, g \in \prod \beta_i$. Tada je

$$\hat{f}/F = \hat{g}/F,$$

odnosno

$$Y = \{i \in I \mid \hat{f}(i) = \hat{g}(i)\} \in F.$$

Pošto je F filter imamo da $X \cap Y \in F$, a primetimo da ako $i \in X \cap Y$, onda je $f(i) = g(i)$. Dakle, $X \cap Y \subseteq Z = \{i \in I \mid f(i) = g(i)\}$, pa $Z \in F$, odnosno $f/F = g/F$, što je i trebalo pokazati. ■

Dalje, priču u ovoj glavi odvijamo u dva smera. U prvom delu nastavka obrađivaćemo kardinalnost ultraproizvoda konačnih skupova, a u drugom delu beskonačnih.

Lema 5.10 *Ako je α konačan kardinal, onda je*

$$card(\alpha^I/F) = \alpha.$$

Dokaz: Pošto je α konačan kardinal, F je α^+-kompletan ultrafilter pa je ovo tvrđenje direktna posledica leme 5.5. ■

Lema 5.11 *Neka je $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ kolekcija konačnih kardinala. Ako postoji $n \in \omega$ tako da $X_n = \{i \in I \mid \alpha_i = n\} \in F$, onda*

$$card(\prod \alpha_i/F) = n.$$

Dokaz:

$$\prod_{i \in I} \alpha_i/F \cong \prod_{i \in X_n} \alpha_i/F \restriction X_n,$$

a zbog prethodne leme

$$card(\prod_{i \in X_n} \alpha_i/F \restriction X_n) = n.$$

■

Posledica 5.12 *Ako je $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ kolekcija konačnih kardinala koja je ograničena odozgo, onda je*

$$card(\prod \alpha_i/F) < \aleph_0.$$

Dokaz: Ako je $\alpha_i \leqslant n$, $\forall n \in \omega$, onda je $I = X_1 \cup \cdots \cup X_n$, pa je, za neko k, $X_k \in F$. Prema prethodnoj lemi je $card(\prod \alpha_i/F) < \aleph_0$. ■

Posledica 5.13 *Ako je $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ kolekcija konačnih kardinala i ako je F ω^+-kompletan ultrafilter na I, onda*

$$card(\prod \alpha_i/F) < \aleph_0.$$

Dokaz: Pošto $I = \bigcup_{n\in\omega} X_n \in F$, a F je ω^+ kompletan, mora postojati $k \in \omega$ tako da $X_k \in F$ (u suprotnom $X_n^c \in F$, za svako $n \in \omega$, pa i $\bigcap_{n\in\omega} X_n^c \in F$, a onda $\bigcup_{n\in\omega} X_n = I \notin F$, kontradikcija). ■

Videli smo da u slučaju da ako neki od skupova X_n pripada F, znamo šta se dešava sa kardinalnošću odgovarajućeg ultraproizvoda. Postavlja se pitanje šta se dešava ako nijedan X_n ne pripada F. U opštem slučaju imamo delimično rešenu situaciju, a u slučaju da je I prebrojiv skup imamo kompletan odgovor. Da bismo to dokazali, pokažimo prvo jednu lemu:

Lema 5.14 *Postoji kolekcija $A \subseteq \omega^\omega$ tako da je $card(A) = 2^{\aleph_0}$ i:*
(1) ako $f \in A$ i $n \in \omega$, onda $f(n) < 2^n$;
(2) ako $f, g \in A$ i $f \neq g$ onda je $\{n \in \omega \mid f(n) = g(n)\}$ konačan.

Dokaz: Za svaku funkciju $\varphi \in 2^\omega$ definišimo funkciju $f_\varphi \in \omega^\omega$ na sledeći način:

$$f_\varphi(n) = \sum_{m<n} \varphi(m)2^m.$$

Po definiciji je $f_\varphi(0) = 0$. Trivijalno važi da je za $\varphi \neq \psi$ i $f_\varphi \neq f_\psi$, pa je kardinalnost skupa $A = \{f_\varphi \mid \varphi \in 2^\omega\}$ baš $2^{\aleph_0}$.
(1) Neka $f \in A$. Tada postoji $\varphi \in 2^\omega$ tako da je $f = f_\varphi$, te je

$$f(n) \leqslant 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1} < 2^n.$$

(2) Neka je $f_\varphi \neq f_\psi$. Pokažimo da je $\{n \in \omega \mid f_\varphi(n) = f_\psi(n)\}$ konačan. Pošto je $f_\varphi \neq f_\psi$ sledi da je $\varphi \neq \psi$, pa postoji $n \in \omega$ tako da je $\varphi(n) \neq \psi(n)$. Neka je k najmanji prirodan broj za koji to važi. Pokažimo sada da za svako $l > k$ važi da je $f_\varphi(l) \neq f_\psi(l)$. Imamo

$$f_\varphi(l) = \sum_{m\leqslant k} \varphi(m)2^m + \sum_{k<m<l} \varphi(m)2^m,$$

$$f_\psi(l) = \sum_{m\leqslant k} \psi(m)2^m + \sum_{k<m<l} \psi(m)2^m.$$

Ako je za svako $k < m < l$, $\varphi(m) = \psi(m)$, onda je dokaz gotov, u suprotnom uzmimo najmanji $k < t < l$, takav da je $\varphi(t) \neq \psi(t)$. Tada imamo

$$f_\varphi(l) = \underbrace{\sum_{m\leqslant k} \varphi(m)2^m}_{A} + \underbrace{\sum_{k<m\leqslant t} \varphi(m)2^m}_{C} + \sum_{t<m<l} \varphi(m)2^m,$$

$$f_\psi(l) = \underbrace{\sum_{m\leqslant k}\psi(m)2^m}_{B} + \underbrace{\sum_{k<m\leqslant t}\psi(m)2^m}_{D} + \sum_{t<m<l}\psi(m)2^m.$$

Kako je $|A-B| = 2^k$, a $|C-D| = 2^t$ sledi da je $A+C \neq B+D$, jer je $t > k$. Sad ako je za sve $t < m < l$, $\varphi(m) = \psi(m)$, dokaz je gotov, a u suprotnom nastavljamo postupak onoliko puta koliko ima $n < l$, takvih da je $\varphi(n) \neq \psi(n)$ i dokaz je kompletan. ■

Lema 5.15 *Ako je $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ kolekcija konačnih nenula kardinala takva da, za svako $n \in \omega$, $X_n \notin F$, onda je*

$$card(\prod \alpha_i/F) \geqslant 2^{\aleph_0}.$$

Dokaz: Primetimo pre svega da F mora biti neglavni ultrafilter. To važi jer je za svako $n \in \omega$, $X_n^c \in F$, ali $\bigcap_{n\in\omega} X_n^c = \emptyset \notin F$, pa je F ω^+-nekompletan. Jasno je da postoje proizvoljno veliki $n \in \omega$ sa osobinom da je $X_n \neq \emptyset$. Napravimo sada particiju skupa I, $\{J_n \mid n \in \omega\}$ na sledeći način:

$$J_n = X_{2^n} \cup \cdots \cup X_{2^{n+1}-1}, \quad za \;\; svako \;\; n \in \omega.$$

Neki od J_n-ova mogu biti prazni, ali njih ne ubacujemo u kolekciju. Primetimo da za svako n, $J_n \notin F$ i ako $i \in J_n$, onda je $\alpha_i \geqslant 2^n$. Obeležimo sa $n(i)$ broj za koji važi da $i \in J_{n(i)}$ (naravno, on je jedinstven).
Dalje, za svako $i \in I$, neka je $\langle m_{i,k} \mid k < 2^{n(i)}\rangle$ niz različitih elemenata iz α_i i neka je data familija funkcija A kao u prethodnoj lemi. Za svako $f \in A$ definišimo $h_f \in \prod \alpha_i$ sa

$$h_f(i) = m_{i,f(n(i))}.$$

Jasno, zbog $f(n(i)) < 2^{n(i)}$, takav element uvek postoji.
Neka su $f, g \in A$ i $h_f(i) = h_g(i)$. Tada je $f(n(i)) = g(n(i))$ pa stoga

$$\{i \in I \mid h_f(i) = h_g(i)\} \subseteq \bigcup\{J_n \mid f(n) = g(n)\},$$

jer $i \in J_{n(i)}$.
Pretpostavimo sada da je $f \neq g$. Tada postoji samo konačno mnogo $n \in \omega$ takvih da je $f(n) = g(n)$, a kako nijedan $J_n \notin F$ sledi da

$$\bigcup\{J_n \mid f(n) = g(n)\} \notin F$$

odakle sledi

$$\{i \in I \mid h_f(i) = h_g(i)\} \notin F.$$

Dakle, imamo da je za $f \neq g$ i $h_f/F \neq h_g/F$, pa je $\{h_f/F \mid f \in A\}$ podskup skupa $\prod \alpha_i/F$ kardinalnosti $2^{\aleph_0}$. ■

Kao što smo rekli, u slučaju da je I prebrojiv skup imamo kompletan odgovor.

Teorema 5.16 *Ako je* $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ **prebrojiva** *kolekcija konačnih nenula kardinala, onda važi:*
(1) ako za neko $n \in \omega$, $\{i \in I \mid \alpha_i = n\} \in F$, *onda je*

$$card(\prod \alpha_i/F) = n;$$

(2) ako ne postoji $n \in \omega$ *tako da je* $\{i \in I \mid \alpha_i = n\} \in F$, *onda je*

$$card(\prod \alpha_i/F) = 2^{\aleph_0}.$$

Dokaz: (1) Dokazano u lemi 5.11.
(2) Prema prethodnoj teoremi je $card(\prod \alpha_i/F) \geqslant 2^{\aleph_0}$, a sa druge strane je

$$card(\prod \alpha_i/F) \leqslant \prod \alpha_i \leqslant \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

■

5.3 Kardinalnost ultraproizvoda beskonačnih kardinala

U nastavku se bavimo slučajem kada su **svi** faktori beskonačni kardinali. Na prvi pogled deluje da nam to umanjuje opštost jer nije pokriven slučaj kada imamo kolekciju proizvoljnih kardinala. Međutim, pokažimo da to nije tačno.
Pretpostavimo da je $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ kolekcija proizvoljnih kardinala. Neka je $G = \{i \in I \mid \alpha_i < \aleph_0\}$ i neka je $H = I \setminus G$. Pošto je F ultrafilter imamo da ili $G \in F$ ili $H \in F$. Znamo da važi da je ili

$$card(\prod_{i \in I} \alpha_i/F) = card(\prod_{i \in G} \alpha_i/F \restriction G)$$

ili

$$card(\prod_{i \in I} \alpha_i/F) = card(\prod_{i \in H} \alpha_i/F \restriction H).$$

U prvom slučaju imamo ultraproizvod konačnih kardinala, a u drugom beskonačnih. Kako je prvi slučaj obrađen pređimo na drugi.

Teorema 5.17 *Ako je F ω^+-kompletan, onda je*

$$card(\omega^I/F) = \aleph_0;$$

ako je F ω^+-nekompletan, onda je

$$card(\omega^I/F) \geqslant 2^{\aleph_0}.$$

U slučaju da je I prebrojiv skup i F ω^+-nekompletan onda je

$$card(\omega^I/F) = 2^{\aleph_0}.$$

Dokaz: Ako je F ω^+-kompletan, prema lemi 5.5 je

$$card(\omega^I/F) = \aleph_0.$$

Pretpostavimo da je F ω^+-nekompletan. Tada postoji particija skupa I, $\{X_n \mid n \in \omega\}$, takva da nijedan X_n ne pripada F. Za svako $n \in \omega$ i za svako $i \in X_n$ stavimo da je $\alpha_i = n$. Znamo:

$$card(\prod \alpha_i/F) \geqslant 2^{\aleph_0},$$

kao i to da je

$$card(\prod \alpha_i/F) \leqslant card(\omega^I/F),$$

što nam rešava drugi slučaj.
Na kraju, pretpostavimo da je $card(I) = \aleph_0$. U ovom slučaju imamo:

$$2^{\aleph_0} \leqslant card(\omega^I/F) \leqslant \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

■

Posledica 5.18 *Ako je $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ kolekcija beskonačnih kardinala i ako je F ω^+-nekompletan ultrafilter, onda je*

$$card(\prod \alpha_i/F) \geqslant 2^{\aleph_0}.$$

Dokaz: Kako je, za svako $i \in I$, $\alpha_i \geqslant \omega$, sledi da je

$$card(\prod \alpha_i/F) \geqslant card(\omega^I/F) \geqslant 2^{\aleph_0}.$$

■

Sledeće što želimo je da pokažemo da je kardinalnost ultraproizvoda beskonačnih kardinala "dosta češće" neprebrojiva nego što je prebrojiva.

Teorema 5.19 *Ako je F ω^+-nekompletan ultrafilter na I i, za svako $i \in I$, α_i je beskonačan kardinal, onda*

$$[card(\prod \alpha_i/F)]^\omega = card(\prod \alpha_i/F).$$

Dokaz: Neka nam je dato preslikavanje $f : I \to S_\omega(\omega)$ kao u lemi 2.34. Kako je $f(i)$ konačan skup, za svako $i \in I$ postoji bijektivno preslikavanje $g_i : \alpha_i^{f(i)} \to \alpha_i$. Želimo da definišemo preslikavanje

$$\theta : (\prod \alpha_i/F)^\omega \to \prod \alpha_i/F,$$

koje je injektivno, jer odatle sledi da je

$$[card(\prod \alpha_i/F)]^\omega \leqslant card(\prod \alpha_i/F),$$

a kako obrnuta nejednakost trivijalno važi, tvrđenje je dokazano.
Neka je

$$h = \langle h_n/F \mid n \in \omega \rangle \in (\prod \alpha_i/F)^\omega.$$

Za svako $n \in \omega$ i svako $i \in I$ imamo da $h_n(i) \in \alpha_i$. Definišimo $h_i^* \in \alpha_i^{f(i)}$ na sledeći način:

$$h_i^*(n) = h_n(i), \quad za \ \ svako \ \ n \in f(i).$$

Sada, definišimo $g \in \prod \alpha_i$ sa

$$g(i) = g_i(h_i^*), \quad za \ \ svako \ \ i \in I.$$

Konačno, neka je

$$\theta(h) = g/F.$$

Pokažimo da je θ injekcija.
Neka je $h \neq h'$. Tada, postoji $n \in \omega$ tako da je $h_n/F \neq h'_n/F$ pa

$$X = \{i \in I \mid h_n(i) \neq h'_n(i)\} \in F.$$

Neka je $Y = \{i \in I \mid n \in f(i)\}$. Znamo da $Y \in F$, pa sledi da i $X \cap Y \in F$. Neka $i \in X \cap Y$. Tada je $h_n(i) \neq h'_n(i)$ i $n \in f(i)$. Stoga, $h_i^*(n) \neq h_i'^*(n)$, pa je i $h_i^* \neq h_i'^*$. Kako je g_i injekcija sledi da je $g(i) \neq g'(i)$. Dakle,

$$X \cap Y \subseteq Z = \{i \in I \mid g(i) \neq g'(i)\},$$

pa $Z \in F$. Odatle sledi da je $g/F \neq g'/F$, odnosno da je θ injekcija. ■

Posledica 5.20 *Ako je α beskonačan kardinal i F ω^+-nekompletan ultrafilter, onda je*

$$[card(\alpha^I/F)]^\omega = card(\alpha^I/F).$$

Ova teorema nam govori da su ultraproizvodi "dosta često" neprebrojivi iz prostog razloga što je

$$\aleph_0^{\aleph_0} \neq \aleph_0.$$

Do sada smo razmotrili neke slučajeve kad je F ω^+-nekompletan. Želimo još da vidimo šta se dešava u slučaju da je F uniforman ili regularan ultrafilter. Pozabavimo se prvo sa slučajem kada je F uniforman. Da bismo taj slučaj razmotrili potrebna nam je

Lema 5.21 *Ako je γ beskonačan (podsetimo se $\gamma = card(I)$) i $\alpha \geqslant \gamma$ onda postoji $X \subseteq \alpha^I$ takav da je $card(X) > \gamma$ i da važi:*

$$f, g \in X \wedge f \neq g \Rightarrow card(\{i \in I \mid f(i) = g(i)\}) < \gamma. \tag{5.1}$$

Dokaz: Neka je $\{x_\eta \mid \eta < \gamma\}$ enumeracija skupa I. Neka je, dalje, Y kolekcija svih podskupova skupa α^I koji zadovoljavaju (5.1). Jasno, zbog Zornove leme, Y ima maksimalan element, jer svaki lanac ima gornje ograničenje, s obzirom na skupovnu inkluziju. Neka je X jedan maksimalan element. Pokažimo da je $card(X) > \gamma$.
Pretpostavimo suprotno. Tada postoji enumeracija skupa X oblika $\{f_\xi \mid \xi < \gamma\}$. Definišimo $g \in \alpha^I$ na sledeći način:
Neka je $g(x_0) = 0$. Neka je $\zeta < \gamma$ i pretpostavimo da je $g(x_\eta)$ definisano za sve $\eta < \zeta$. Kako je

$$card(\{f_\xi(x_\zeta) \mid \xi < \zeta\}) < \gamma,$$

postoji neki element koji pripada $\alpha \setminus \{f_\xi(x_\zeta) \mid \xi < \zeta\}$. Neka je λ_ζ najmanji takav. Stavimo $g(x_\zeta) = \lambda_\zeta$.
Primetimo da iz definicije sledi da je za svako $\xi < \zeta < \gamma$, $g(x_\zeta) \neq f_\xi(x_\zeta)$.
Uzmimo neko proizvoljno $f \in X$. Tada postoji μ tako da je $f = f_\mu$. Znamo da je $\{i \in I \mid f_\mu(i) = g(i)\} \subseteq \{x_\xi \mid \xi \leqslant \mu\}$ pa je i njegova kardinalnost $< \gamma$. Stoga $X \cup \{g\}$ zadovoljava (5.1) što nam daje kontradikciju sa pretpostavkom da je X maksimalan. Dakle, $card(X) > \gamma$. ∎

Teorema 5.22 *Ako je γ beskonačan i $\alpha \geqslant \gamma$ i ako je F uniforman ultrafilter na I, onda je*

$$card(\alpha^I/F) > \gamma.$$

Dokaz: Neka je skup $X \subseteq \alpha^I$ dat kao u prethodnoj lemi i neka je

$$A = \{f/F \mid f \in X\}.$$

Ako su $f, g \in X$ i $f \neq g$, onda je

$$card(\{i \in I \mid f(i) = g(i)\}) < \gamma,$$

pa stoga

$$\{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \notin F,$$

jer je F uniforman, pa je $f/F \neq g/F$. Kako je $card(X) > \gamma$, dokaz je kompletan. ∎

Preostaje nam još da vidimo šta možemo da kažemo u slučaju kad je F regularan ultrafilter na I.

Teorema 5.23 *Ako je α beskonačan kardinal i F regularan ultrafilter na I, onda je*

$$card(\alpha^I/F) = \alpha^\gamma.$$

Dokaz: Trivijalno važi da je

$$card(\alpha^I/F) \leqslant \alpha^\gamma,$$

pa treba pokazati samo obrnutu nejednakost.

Neka je A skup svih konačnih nizova elemenata iz α. Pošto je α beskonačan, $card(A) = \alpha$. Pokazujemo da je $\alpha^\gamma \leqslant card(A^I/F)$.
Kako je F regularan ultrafilter na I, postoji bijektivno preslikavanje $\phi : I \to S_\omega(I)$, takvo da za svako $j \in I$ važi:

$$J_j = \{i \in I \mid j \in \phi(i)\} \in F.$$

Obeležimo sa $\prec$ neko linearno uređenje skupa I.
Neka $f \in \alpha^I$. Konstruišimo funkciju $f^* \in A^I$ na sledeći način:
Ako je $\phi(i) = \{i_0, \ldots, i_k\}$, gde je $i_0 \prec i_1 \prec \cdots \prec i_k$, stavimo

$$f^*(i) = \langle f(i_0), \ldots, f(i_k)\rangle.$$

Sada definišimo $h : \alpha^I \to A^I/F$ sa

$$h(f) = f^*/F.$$

Dokazujemo da je h injektivno preslikavanje.

Neka $f, g \in \alpha^I$ i $f \neq g$. Postoji $j \in I$ tako da je $f(j) \neq g(j)$. Neka je i proizvoljan element iz I takav da $j \in \phi(i)$, recimo, neka je

$$\phi(i) = \{i_0, \ldots, j, \ldots, i_k\},$$

pri čemu važi da je $i_0 \prec \cdots \prec j \prec \cdots \prec i_k$. Tada je

$$f^*(i) = \langle f(i_0), \ldots, f(j), \ldots, f(i_k) \rangle,$$

a

$$g^*(i) = \langle g(i_0), \ldots, g(j), \ldots, g(i_k) \rangle,$$

pa je $f^*(i) \neq g^*(i)$. Prema tome

$$J_j = \{i \in I \mid j \in \phi(i)\} \subseteq Z = \{i \in I \mid f^*(i) \neq g^*(i)\} \in F$$

i $f^*/F \neq g^*/F$. ∎

Sa ovom teoremom završavamo našu diskusiju o kardinalnosti ultraproizvoda.

Pokažimo jednu posledicu ove priče, a to je činjenica da "operacija ultrastepenovanja nije komutativna". Pokažimo to na sledećem kontraprimeru:

Neka je $card(I) = \aleph_0$, $card(J) = 2^{\aleph_0}$ i neka je F uniforman ultrafilter na J. Znamo da je

$$card((2^I)^J/F) > 2^{\aleph_0}.$$

Trivijalno, $card(2^J/F) = 2$, te je

$$card((2^J/F)^I) = 2^{\aleph_0},$$

i odatle

$$(2^I)^J/F \not\cong (2^J/F)^I.$$

Poglavlje 6

Elementarne i Δ-elementarne klase

U ovoj glavi želimo samo da pokažemo jednu činjenicu o ultraproizvodima, a to je da je svojstvo biti Δ-elementarna klasa ekvivalentno sa dva uslova od kojih je jedan uslov da je ta klasa zatvorena za formacije ultraproizvoda. Da bismo to pokazali uvedimo prvo potrebne pojmove i pokažimo neke bazične stvari koje će nam trebati da bismo dokazali željeni rezultat.
Skup svih rečenica jezika $\mathcal{L}$ obeležavaćemo sa $Sent(\mathcal{L})$.

Definicija 6.1 *Strukture $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jezika $\mathcal{L}$ su* **elementarno ekvivalentne***, u oznaci $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, akko važi: za svaku rečenicu σ jezika $\mathcal{L}$ je*

$$\mathcal{A} \models \sigma \quad akko \quad \mathcal{B} \models \sigma.$$

Neka je K klasa struktura jezika $\mathcal{L}$ i neka je Σ neki skup rečenica jezika $\mathcal{L}$. Koristićemo sledeće dve standardne oznake:

$$Th(K) = \{\sigma \mid \sigma \in Sent(\mathcal{L}) \wedge \forall \mathcal{A} \in K \ \mathcal{A} \models \sigma\},$$

$$M(\Sigma) = \{\mathcal{A} \mid \forall \sigma \in \Sigma \ \mathcal{A} \models \sigma\}.$$

Lema 6.2 *(a) Za proizvoljni skup rečenica $\{\sigma_i \mid i \in I\}$ jezika $\mathcal{L}$, važi:*

$$\bigcap_{i \in I} M(\sigma_i) = M(\bigcup_{i \in I} \{\sigma_i\});$$

(b) Ako je Σ proizvoljan skup rečenica i K neka kolekcija struktura jezika $\mathcal{L}$, onda je:

$$M(Th(M(\Sigma))) = M(\Sigma),$$

i

$$Th(M(Th(K))) = Th(K);$$

(c) Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ proizvoljne strukture, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:
(1) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$;
(2) $Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$;
(3) $\mathcal{B} \in M(Th(\mathcal{A}))$.

Dokaz: Trivijalno. ■

Definicija 6.3 *Klasa struktura K jezika $\mathcal{L}$ je* **elementarna klasa** *akko postoji $\sigma \in Sent(\mathcal{L})$ tako da je $K = M(\sigma)$; u tom slučaju pišemo $K \in EC$. Klasa struktura K je* **Δ-elementarna klasa** *akko postoji skup rečenica Σ tako da je $K = M(\Sigma)$; u tom slučaju pišemo $K \in EC_\Delta$.*

Primetimo da $K \in EC$ akko je osobina "biti struktura u K" svojstvo prvog reda, a $K \in EC_\Delta$ akko je osobina "biti struktura u K" generalno svojstvo prvog reda. Prema prethodnoj lemi je $K \in EC_\Delta$ akko postoji skup rečenica $\{\sigma_i \mid i \in I\}$ tako da je

$$K = \bigcap_{i \in I} M(\sigma_i),$$

odnosno, akko je K presek skupa elementarnih klasa.

Lema 6.4 *$K \in EC_\Delta$ akko $K = M(Th(K))$.*

Dokaz: Ako je $K = M(Th(K))$, onda očigledno $K \in EC_\Delta$.
Obrnuto, neka $K \in EC_\Delta$. Tada postoji $\Sigma \subseteq Sent(\mathcal{L})$ takav da je $K = M(\Sigma)$. Dakle,

$$M(Th(K)) = M(Th(M(\Sigma))) = M(\Sigma) = K.$$

■

Teorema 6.5 *Neka je K klasa struktura jezika $\mathcal{L}$. $K \in EC_\Delta$ akko su ispunjeni uslovi:*
(1) K je zatvorena za izomorfizme i formacije ultraproizvoda;
(2) K je zatvorena za elementarne ekvivalencije.

Dokaz: ($\Rightarrow$)
Pretpostavimo $K \in EC_\Delta$. Tada postoji $\Sigma \subseteq Sent(\mathcal{L})$ tako da je $K = M(\Sigma)$. Trivijalno važi da je K zatvorena za izomorfizme i elementarne ekvivalencije, a što se tiče zatvorenosti za ultraproizvode, to je direktna posledice Łośove teoreme.
($\Leftarrow$) Pretpostavimo sada da važi (1) i (2). Generalno važi da je $K \subseteq M(Th(K))$. Pokažimo da važi i obrnuta inkluzija.
Neka $\mathcal{A} \in M(Th(K))$. Za svako $\sigma \in Th(A)$, postoji $\mathcal{M}_\sigma \in K$ tako da je $\mathcal{M}_\sigma \models \sigma$ (u suprotnom bismo imali $\neg\sigma \in Th(A)$, stoga i $\mathcal{A} \models \sigma \wedge \neg\sigma$). Neka je, za $\sigma \in Th(A)$, $J_\sigma = \{\tau \in Th(A) \mid \mathcal{M}_\tau \models \sigma\}$. Familija $\{J_\sigma \mid \sigma \in Th(A)\}$ ima s.k.p. (jer je $\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n \in J_{\sigma_1} \cap \cdots \cap J_{\sigma_n}$). Ako je F ultrafilter nad $Th(A)$ koji sadrži familiju $\{J_\sigma \mid \sigma \in Th(A)\}$, tada je $\prod_{\sigma \in Th(A)} \mathcal{M}_\sigma / F \in K$ i $\prod_{\sigma \in Th(A)} \mathcal{M}_\sigma / F \equiv \mathcal{A}$ pa je, prema datim uslovima, $\mathcal{A} \in K$. $\blacksquare$

Za kraj ove glave pokažimo da klase nilpotentnih, rešivih, kao i neabelovih prostih grupa nisu aksiomatizabilne.
(**Nilpotentne grupe**)
Grupa $\mathbb{G}$ je nilpotentna ako i samo ako postoji centralni niz, odnosno niz

$$\mathbb{G} = \mathbb{G}_0 > \mathbb{G}_1 > \cdots > \mathbb{G}_{k-1} > \mathbb{G}_k = \mathbb{E},$$

takav da su sve podgrupe $\mathbb{G}_i$ normalne i $\mathbb{G}_i/\mathbb{G}_{i+1} \leqslant Z(\mathbb{G}/\mathbb{G}_{i+1})$, za sve $i \leqslant k-1$. Grupa $\mathbb{G}$ je nilpotentna klase k akko je najkraći centralni niz dužine k.
Pokažimo da klasa nilpotentnih grupa nije konačno aksiomatizabilna. Koristićemo tvrđenje da je $\mathbb{D}_{2^n}$ nilpotentna grupa klase n, gde sa $\mathbb{D}_k$ obeležavamo diedarsku grupu stepena k.
Obeležimo sa $N_3 = \{n \in \omega \mid n \geqslant 3\}$ i neka je F neglavni ultrafilter na N_3. Posmatrajmo

$$\mathbb{G} = \prod \mathbb{D}_{2^n}/F$$

i pretpostavimo da je $\mathbb{G}$ nilpotentna grupa klase k. Za svako $n > k+1$ postoje elementi $a_1^n, \ldots, a_{k+1}^n \in D_{2^n}$ takvi da je $[a_1^n, \ldots, a_{k+1}^n] \neq e$. Neka je, dalje, $\overline{a_1} = \langle a_1^i \mid i \in N_3 \rangle, \ldots, \overline{a_{k+1}} = \langle a_{k+1}^i \mid i \in N_3 \rangle$, gde prvih $k+1$ komponenata uzimamo proizvoljno. Lako se pokazuje da je

$$[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{k+1}}] \neq e,$$

kontradikcija.
Na sličan način se može pokazati da i klasa svih rešivih grupa nije konačno aksiomatizabilna.

(**Neabelove proste grupe**)
Pokažimo da i klasa neabelovih prostih grupa nije konačno aksiomatizabilna. Neka je $n \geqslant 5$, F neglavni ultrafilter nad $N_5 = \{n \in \omega \mid n \geqslant 5\}$ i neka je $\mathbb{A}_n$ alternativna grupa reda n. Znamo da su $\mathbb{A}_n$ proste i neabelove. Posmatrajmo

$$\mathbb{A} = \prod \mathbb{A}_n / F$$

i pokažimo da $\mathbb{A}$ nije prosta grupa.
Za svako $\alpha_n \in A_n$, neka je k_α^n broj elemenata koje α "pomera", odnosno $k_\alpha^n = card(\{i \in N_5 \mid \alpha(i) \neq i\})$. Neka je $B = \{\langle \alpha_n \mid n \geqslant 5 \rangle \mid \{k_\alpha^n \mid n \geqslant 5\} \quad ima \quad supremum\}$. Lako se proverava da je B nosač netrivijalne normalne podgrupe grupe $\mathbb{A}$.

Literatura

[1] Barnes, D.W., Mack, J.M., *An algebraic introduction to mathematical logic, graduate texts in mathematics*, Springer-Verlag, 1975.

[2] Bell, J.L., Slomson, A.B., *Models and Ultraproducts: An Introduction*, North-Holland, Amsterdam, 1969.

[3] Chang, C.C., Keisler, H.J., *Model Theory Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford-Tokyo, 1990.

[4] Comfort, W.W., Negrepontis, S., *The Theory of Ultrafilters*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1974.

[5] Grulović, M.Z., *Comments on ultraproducts of forcing systems*, Publication de l'institut mathématique, Nouvelle série, tome 69(83) (2001), 18-26;

[6] Grulović, M.Z., *Osnovi teorije grupa*, Univerzitet u Novom Sadu, 1997.

[7] Herrlich, H., *Axiom of Choice*, Springer, 2006.

[8] Jech, T., *Set theory*, Springer, 2002.

[9] Mendelson, E., *Introduction to mathematical logic*, D. Van Nostrand company, 1979.

[10] Šobot, B., Ultrafiltri i ultraproizvodi, magistarska teza, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2004.

Biografija

Nenad Savić je rođen 13. jula 1989. godine u Rumi, gde je 2004. godine završio osnovnu školu "Jovan Jovanović Zmaj" i upisao Rumsku gimnaziju. Srednju školu je završio 2008. godine i iste godine upisao Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer profesor matematike. Osnovne studije je završio sa prosečnom ocenom 9.42 i poslednji ispit na osnovnim studijama je položio u junu 2011. god. Iste godine je upisalo master akademske studije na matičnom fakuletu, modul nastava matematike. U junu 2013. god. je položio poslednji ispit na master studijama i time stekao uslov za odbranu ovog master rada.

Novi Sad, septembar 2013. Nenad Savić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: (RBR):

Identifikacioni broj: (IBR):

Tip dokumentacije: (TD): Monografska dokumentacija

Tip zapisa: (TZ): Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada: (VR): Master rad

Autor: (AU): Nenad Savić

Mentor: (MN): Milan Grulović

Naslov rada: (NR): Ultrafilteri

Jezik publikacije: (JP): srpski (latinica)

Jezik izvoda: (JI): srpski i engleski

Zemlja publikovanja: (ZP): Srbija

Uže geografsko područje: (UGP): Vojvodina

Godina: (GO): 2013.

Izdavač: (IZ): Autorski reprint

Mesto i adresa: (MA): Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

Fizički opis rada: (FO):6/59/10/0/0/0/0

Naučna oblast: (NO): Matematika

Naučna disciplina: (ND): Matematička logika

Predmetna odrednica/Ključne reči: (PO): Ultrafilteri, uniformni ultrafilteri, regularni ultrafilteri, λ-kompletni ultrafilteri, ultraproizvodi modela, konačna aksiomatizabilnost, elementarne i generalno elementarne klase modela

UDK:

Čuva se: (ČU): Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

Važna napomena: (VN):

Izvod: (IZ): U tezi su navedena ključna svojstva ultrafiltera i ultraproizvoda. Teme koje se obrađuju u drugoj i petoj glavi su (delimična) klasifikacija ultrafiltera, veza egzistencije merljivih kardinala i ω^+-kompletnih ultrafiltera i kardinalnost ultraproizvoda. U trećoj, četvrtoj i šestoj glavi se ilustruje primena Łośove teoreme i ispituje konačna aksiomatizabilnost teorija prvog reda kao i elementarna svojstva i generalno elementarna svojstva nekih klasa modela.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: (DP):

Datum odbrane: (DO):

Članovi komisije: (KO):

Predsednik: dr Miloš Kurilić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Milan Z. Grulović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Boris Šobot, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: (ANO):

Identification number: (INO):

Document type: (DT): Monographic documentation

Type of record: (TR): Textual printed matter

Contents code: (CC): Master's thesis

Author: (AU): Nenad Savić

Mentor: (MN): Milan Grulović

Title: (TI): Ultrafilters

Language of text: (LT): Serbian (latin)

Language of abstract: (LA): Serbian and English

Country of publication: (CP): Serbia

Locality of publication: (LP): Vojvodina

Publication year: (PY): 2012.

Publisher: (PU): Author's reprint

Publ. place: (PP): Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

Physical description: (PD): 6/59/10/0/0/0/0

Scientific field: (SF): Mathematics

Scientific discipline: (SD): Mathematical Logic

Subject/Key words: (SKW): Ultrafilters, uniform ultrafilters, regular ultrafilters, λ-complete ultrafilters, ultraproducts of models, finite axiomatizability, elementary and general elementary classes of models

UC:

Holding data: (HD): The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Note: (N):

Abstract: (AB): The thesis contains the crucial results of theories of ultrafilters and ultraproducts. The themes of the second and fifth chapters are (partial) classification of ultrafilters, the connection of the existence of measurable cardinals and ω^+-complete ultrafilters and cardinalities of ultraproducts. In the third, fourth and the sixth chapters, besides the presentation of the applications of Łoś theorem, it is investigated the axiomatizability of some theories of first order and the elementary and generalized elementary properties of some classes of models.

Accepted by the Scientific Board on: (ASb):

Defended: (DE):

Thesis defend board: (DB):

President: dr Miloš Kurilić, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: dr Milan Z. Grulović, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, advisor

Member: dr Boris Šobot, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad